

TESE APRESENTADA NO I.F.G.W. PARA A OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE DOUTOR EM FÍSICA

UNICAMP - CAMPINAS

Este exemplar é a versão  
final da tese do Aluno  
Ricardo Egydio de Carvalho  
21/12/88

Alfredo H. Gioia de Almeida

Este trabalho teve apoio da Fundação  
de Amparo à Pesquisa do Estado de  
São Paulo (FAPESP), e da  
Coordenadoria de Aperfeiçoamento do  
Pessoal de Ensino Superior (CAPES-  
PICD).

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
UNICAMP  
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

TÍTULO : "CAOS NUM CONTEXTO RESSONANTE E SUA QUANTIZAÇÃO"

AUTOR : RICARDO EGYDIO DE CARVALHO

ORIENTADOR : ALFREDO MIGUEL OZÓRIO DE ALMEIDA

PRIMAVERA 89

*Encaro a pós-graduação como uma etapa fundamental para a iniciação à pesquisa. Encontrei no Instituto de Física e na Unicamp uma sólida infraestrutura computacional. A biblioteca do IFGW oferece um considerável acervo de periódicos e livros, e o atendimento ao usuário sempre foi exemplar. A tradição e o clima para fazer pesquisa no IFGW são perceptíveis nos 'burburinhos' dos corredores.*

*No orientador, prof. Alfredo, sempre encontrei apoio, estímulo e franqueza para levar adiante os estudos. O meu trabalho de tese foi orientado com muita seriedade e profissionalismo.*

*Acredito que me foram dadas, na pós-graduação, as condições objetivas para começar a pesquisar.*

*As relações sociais com muitas pessoas também contribuíram para manter um bom ritmo de trabalho. Pessoas, como o Júlio, a Luca, o Pedro, o César, o Antonio, a Vitória, o Dênis, a Márcia, o Arthur.*

*Agradeço ao trabalho de 'micrografia' da Liliane, ao Gilberto pelos desenhos e ao prof. Marcus com quem mantive discussões estimulantes. Deixo agradecimento especial ao prof. Chinellato, quem 'levantou' o sistema em diversos fins de semana e feriados, e ao prof. Cabrera quem vem me apoiando desde a graduação.*

À VITÓRIA PELA COMPREENSÃO E  
APOIO.

# ÍNDICE

CAPÍTULO 1 : INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 : FORMA NORMAL DE BIRKHOFF E SUA QUANTIZAÇÃO .....	6
CAPÍTULO 3 : FORMA NORMAL RESSONANTE : QUANTIZAÇÃO .....	14
CAPÍTULO 4 : ADIÇÃO DE CAOS : UM SISTEMA QUASE-INTEGRÁVEL .....	34
CAPÍTULO 5 : TEORIAS DE PERTURBAÇÕES .....	48
CAPÍTULO 6 : "OVERLAP" DE RESSONÂNCIAS INTEGRÁVEIS E CAOS .....	59
CAPÍTULO 7 : RESULTADOS E CONCLUSÃO .....	90
APÊNDICE A : CURVAS DE NÍVEL E SECÇÃO DE POINCARÉ .....	93
APÊNDICE B : COMPUTAÇÃO DO MOVIMENTO PERTURBADO .....	97
APÊNDICE C : CÁLCULO DO COMUTADOR $[\hat{H}, \hat{J}_2]$ E DO PARÊNTESES DE POISSON $(H, J_2)$ .....	106
APÊNDICE D : COMPUTAÇÃO DO MOVIMENTO PERTURBADO (DUAS RESSONÂNCIAS) .....	109
APÊNDICE E : DISTRIBUIÇÃO DE HUSIMI .....	111
REFERÊNCIAS .....	116

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Os sistemas clássicos hamiltonianos podem exibir dois tipos contrastantes de movimento: regular e caótico.

A situação mais simples correspondendo ao caso regular, para  $L$  graus de liberdade, é aquela quando o movimento é globalmente integrável. Neste caso, haverá  $L$  constantes de movimento independentes na forma de funções  $F_i(q, p)$ , em involução, isto é, com os parênteses de Poisson,  $(F_i, F_j) = 0$ . Assim, cada órbita fica restrita a um toro  $L$ -dimensional, resultante da múltipla intersecção das  $L$  superfícies  $F_i(q, p) = \text{constante}$ , cada uma de  $(2L - 1)$  dimensões. Neste toro pode-se definir exatamente  $L$  contornos fechados,  $\gamma_j$ , que não podem ser reduzidos a cada outro por uma deformação contínua. Estes contornos irredutíveis podem ser usados para definir as variáveis ação,  $I_j$ :

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} p_j dq_j \quad \text{I-1}$$

As variáveis canonicamente conjugadas são os ângulos  $\varphi_j$  que indexam as  $L$  direções do toro.

Se todas as ações forem constantes de movimento a hamiltoniana é dada por  $H(I)$  apenas. Caso todas ações possam ser separadas individualmente então a regra de quantização é dada pelas condições de Bohr-Sommerfeld<sup>(1)</sup>,

$$I_i = \int_{\gamma_i} p_i dq_i = \hbar \left( n_i + \frac{\mu_i}{4} \right) \quad , \quad (i = 1, \dots, L) \quad \text{I-2}$$

Caso as variáveis não sejam separáveis mas  $H = H(I)$  ainda, as regras de quantização semiclássicas são dadas por,

$$I_i = \int_{\gamma_i} \sum_{k=1}^L p_k dq_k = \hbar \left( n_i + \frac{\mu_i}{4} \right) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, L \quad \text{I-3}$$

conhecidas por quantização de Bohr-Sommerfeld, Einstein, Brillouin, Keller, Maslov<sup>(2)</sup>, onde  $\mu_i$  é o índice de Maslov que para o oscilador harmônico é 2. O espectro de energias é dado por  $E_n = H \left( J = \hbar \left( n + \frac{\mu}{4} \right) \right)$ . Mesmo se na hamiltoniana clássica aparecer uma única variável ângulo, o sistema ainda será integrável, mas no espaço de fases correspondente poderão aparecer ilhas de ressonâncias com separatrizes separando toros de famílias diferentes (libração e rotação) e efeitos de tunelamento podem ocorrer. Para conhecer os espectros de energias semiclassicas torna-se necessário utilizar outras teorias que corrijam a quantização direta dos toros. O formalismo de Wigner-Weyl<sup>(3)</sup> pode ser usado para abordar este problema.

Sistemas integráveis são raros; dentre os sistemas hamiltonianos quase todos são não integráveis no sentido de que não existem constantes globais de movimento além da energia. Uma classe de sistemas não integráveis é aquela em que quase todas órbitas exploram quase toda superfície de energia  $(2L - 1) -$  dimensional definida por  $H(p, q) = \text{constante}$ , ao invés de estarem confinadas a um  $L$ -toro como nos sistemas integráveis. Nesse caso diz-se que o movimento é ergódico, uma condição necessária para que seja globalmente caótico. Estudos teóricos e numéricos desses sistemas mostram que eles são sensíveis às condições iniciais e que um conhecimento preciso do comportamento futuro não é possível, apesar deles ainda serem determinísticos. A identificação da irregularidade do movimento é feita em geral através de cálculos computacionais da secção de Poincaré ou da determinação dos expoentes de Lyapunov.

Uma teoria estatística baseada em um 'ensemble' de matrizes aleatórias estabelece padrões de flutuações espectrais. Se o 'ensemble' é invariante frente a transformações ortogonais, as matrizes são reais e simétricas e representam sistemas com simetria de inversão temporal. Define-se então o 'ensemble' gaussiano ortogonal (GOE). Se o 'ensemble' é invariante frente a transformações unitárias, as matrizes são complexas hermitianas e representam sistemas sem a simetria de

inversão temporal. Define-se então o 'ensemble' gaussiano unitário (G U E)<sup>(4)</sup>.

A partir de evidências computacionais, conjectura-se<sup>(5)</sup> que sistemas quânticos com simetria de inversão temporal cujos análogos clássicos são sistemas completamente caóticos, têm flutuações espectrais previstas por G.O.E. Se confirmada tal conjectura pode-se estabelecer a universalidade das leis de flutuações de níveis de energias para sistemas cujos análogos clássicos são caóticos<sup>(6)</sup>.

Para estes sistemas clássicos a quantização de toros obviamente não mais se aplica; as únicas variedades invariantes que existem são a própria superfície de energia e as órbitas periódicas. Por isso o limite semiclássico de estados estacionários tem que ter alguma ligação com as órbitas periódicas do movimento clássico. Gutzwiller<sup>(7)</sup> mostra que a densidade de estados é dada formalmente por uma soma sobre todas órbitas periódicas para cada energia.

Ao se quebrar a integrabilidade do sistema clássico, as variáveis ângulo deixam de ser cíclicas e  $H = H(I, \varphi)$ . O aparecimento de ressonâncias pode ser considerado como perturbações que agem no sistema não perturbado  $H = H(I)$ . O teorema KAM<sup>(8)</sup> diz que se a perturbação for suficientemente fraca a maioria dos toros invariantes não desaparecem, apenas são deformados levemente. Contudo existem 'gaps' onde os toros são destruídos, e esses 'gaps' crescem com a intensidade da perturbação. Os sistemas genéricos são constituídos de órbitas caóticas e toros invariantes e nisso se assemelham aos sistemas quase integráveis.

Chirikov<sup>(9)</sup>, com a sua descrição universal de uma ressonância não linear, conjectura que o 'overlap' de ressonâncias não integráveis é o responsável pelo surgimento de camadas de órbitas caóticas no espaço de fases. Portanto em um sistema típico de dois graus de liberdade o espaço de fases apresenta curvas de libração circundando as órbitas periódicas estáveis, órbitas caóticas e periódicas nas regiões que eram ocupadas pelas separatrizes, e toros irracionais delimitando

as regiões caóticas. O espaço de fases de um sistema genérico é dividido em regiões regulares, onde o movimento está preso a toros invariantes, e em regiões irregulares onde o movimento é caótico.

Percival<sup>(10)</sup> aplica o princípio de correspondência às propriedades das regiões regulares e irregulares do espaço de fases para sistemas com grandes números quânticos e  $\hbar$  finito, porém pequeno quando comparado com as principais ações clássicas. Aquelas regiões que são menores em volume do que  $(2\pi\hbar)^L$  podem ser negligenciadas e somente uma quantidade finita de regiões de cada tipo permanece relevante. Com esses argumentos Percival conjectura que as energias do espectro irregular são mais sensíveis a qualquer pequena mudança de algum parâmetro de perturbação, do que aquelas do espectro regular. Esta sensibilidade se manifesta na dinâmica dos níveis no espaço dos parâmetros e é denominada por oscilações de Percival.

Contrariamente aos casos integrável e caótico ainda não se conhece uma teoria semiclássica para os sistemas quase integráveis. Dado o pouco conhecimento e a generalidade de tais sistemas, preparamos um sistema clássico autônomo com dois graus de liberdade do tipo  $H(\underline{J}, \underline{\theta}) = H_0(\underline{J}) + \alpha H_1(\underline{J}, \theta_1) + \beta H_2(\underline{J}, \theta_2)$ .

A hamiltoniana não perturbada  $H_0$  corresponde a uma expansão em série de Taylor na vizinhança de um ponto de equilíbrio estável denominada forma normal de Birkhoff que representa toros invariantes circundando o ponto de equilíbrio.

A primeira perturbação  $H_1$  não quebra a integrabilidade do sistema e gera uma ressonância isolada nas proximidades do ponto de equilíbrio. Ela é determinada através de um truncamento da forma normal de Birkhoff com mais um termo de mais baixa ordem. O sistema agora representado é constituído dos toros invariantes iniciais e separatrizes separando librações de rotações. A sua versão quântica representa um hamiltoniano separado por blocos, pois a integrabilidade clássica é preservada quanticamente.

Ao ligar a segunda perturbação  $H_2$ , alguns toros racionais são destruídos originando órbitas caóticas e órbitas periódicas isoladas, também aparecem cadeias de ressonâncias secundárias tanto na região de libração quanto na região de rotação. Este sistema quase integrável representando um movimento complexo na vizinhança de um ponto elítico, a partir da expansão em forma normal, constitui o sistema básico de nossos estudos. Quanticamente a quebra de integrabilidade é dada pelo acoplamento dos infinitos blocos.

Para obter o espectro de energias do sistema com caos é preciso truncar a matriz hamiltoniana em uma ordem finita. Este truncamento impede a convergência simultânea de todos autovalores. Porém, apenas uma região delimitada do espaço de fases é coberta por órbitas caóticas o que nos permite pensar que uma função de corte, acompanhe  $H_2$  de modo a anular seu efeito fora de uma certa região. Isto justifica o truncamento da matriz hamiltoniana em uma quantidade de blocos desejada e assegura a convergência das mais baixas energias.

Estas discussões, da preparação do sistema clássico e sua quantização são apresentadas nos capítulos 2, 3 e 4. No capítulo 5 exibimos algumas teorias de segunda ordem de perturbações. No capítulo 6 discutimos o critério de 'overlap' de ressonâncias não integráveis de Chirikov e apresentamos um novo modelo de ressonâncias que permite visualizar a interação das ilhas, através do 'overlap' de ressonâncias globalmente integráveis. Olhamos também os espectros deste sistema. E no capítulo 7, sumamos os resultados e conclusões, seguindo-se 5 apêndices. Computações da distribuição de Husimi são mostradas no apêndice E.

## CAPÍTULO 2 - FORMA NORMAL DE BIRKHOFF E SUA QUANTIZAÇÃO

Para mostrar o que está envolvido na técnica da forma normal de BIRKHOFF<sup>(11)</sup> vamos estudar o movimento de um sistema hamiltoniano clássico na vizinhança de um ponto de equilíbrio. O sistema pode ter um número  $L$  de graus de liberdade. Então em menor ordem de aproximação o movimento é descrito por  $L$  osciladores harmônicos unidimensionais desacoplados. Contudo, eles podem ser acoplados, se termos anarmônicos na expansão de Taylor da hamiltoniana são levados em consideração. Devido aos acoplamentos o sistema torna-se não integrável na maioria dos casos e por ser um sistema genérico ele não é nem integrável nem caótico completamente. Experimentos numéricos<sup>(12,13)</sup> e investigações analíticas<sup>(14,15,16,17)</sup> indicam que coexistem órbitas caóticas e toros invariantes, em um sistema genérico.

Coloca-se então o problema de como prescrever analiticamente os toros invariantes. Um dos possíveis métodos é calcular a forma normal da hamiltoniana clássica. Isto foi originalmente desenvolvido por BIRKHOFF para os casos não ressonantes, isto é, quando não existem condições de comensurabilidade entre as frequências dos osciladores harmônicos. Procede-se por uma série de transformações canônicas, funções polinomiais de coordenadas e momenta, que prescreve um comportamento totalmente integrável. Após  $(j - 2)$  transformações a nova hamiltoniana está na forma normal de grau  $(j)$ . Por definição isto significa que todos monômios de ordem  $\leq j$  na expansão da hamiltoniana comutam (Parênteses de Poisson nulo) com a parte harmônica da hamiltoniana. De fato, todos termos da forma normal são polinômios das  $N$  ações. Este procedimento pode ser formalmente estendido a  $(j \rightarrow \infty)$  onde obtemos uma expansão de potências da hamiltoniana como uma função das ações. Cada uma das  $N$  ações quando expressa em termos das coordenadas e momenta originais é também uma série de potências. Contudo SIEGAL<sup>(18)</sup> provou que as séries divergem, o que está relacionado à não

integrabilidade do movimento. Se o raio de convergência das séries fosse não nulo, o sistema seria rigorosamente integrável em alguma região do espaço de fases e aí existiriam toros invariantes.

Deve-se notar que esse procedimento pode ter valor até nos casos em que as séries assim obtidas não converjam. Nesse caso ainda obtemos características importantes do movimento na vizinhança do ponto de equilíbrio corrigindo a linearização.

A quantização da forma normal de *BIRKHOFF* é possível se os operadores quânticos forem correlacionados individualmente com os monômios de coordenadas e momenta. Como decorrência da forma normal o operador hamiltoniano dela obtido pode ser separado na soma,  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_A$ , da parte harmônica  $\hat{H}_0$  e outra anarmônica  $\hat{H}_A$ , tal que  $[\hat{H}_0, \hat{H}_A]$  se anula. Conseqüentemente,  $\hat{H}_0$  e  $\hat{H}_A$  podem ser diagonalizados simultaneamente, isto é  $\hat{H}_A$  é diagonal em uma base de funções harmônicas. No caso não ressonante, onde a hamiltoniana clássica na forma normal depende só das ações e por isso inexistem efeitos de tunelamento, os resultados reduzem à quantização de toros (no limite semiclássico).

Neste contexto, preparamos um sistema hamiltoniano clássico autônomo de dois graus de liberdade, aproximando o movimento na vizinhança de um ponto de equilíbrio estável na origem por um truncamento da forma normal de *BIRKHOFF*, o resto sendo considerado como perturbações, tão pequenas quanto mais próximas estiverem do ponto de equilíbrio. Supondo que as duas frequências características  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sejam diferentes, a hamiltoniana pode ser expandida em uma série de Taylor,

$$H(\underline{p}, \underline{q}) = \omega_1 \left( \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right) + \omega_2 \left( \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right) + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} k_{\alpha,\beta} \frac{\alpha_1}{q_1} \cdot \frac{\alpha_2}{q_2} \cdot \frac{\beta_1}{p_1} \cdot \frac{\beta_2}{p_2}, \quad (1)$$

onde  $k_{\alpha,\beta}$  é uma constante que pode depender de  $\alpha$  e  $\beta$ . Dizemos que existe uma ressonância no ponto de equilíbrio  $(\underline{q}, \underline{p}) = (\underline{Q}, \underline{P})$  se houver uma condição de

comensurabilidade entre as frequências, do tipo  $\omega_j = \alpha \omega_k$ , onde  $\alpha$  é racional e  $(i$  e  $k)$  são  $(1$  ou  $2)$ . O ponto de equilíbrio é não ressonante se não existir tal relação racional.

Através da transformação canônica complexa,

$$\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (q + i \cdot p) \quad , \quad \underline{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (q - i \cdot p) \quad , \quad (2)$$

as coordenadas e momenta tornam-se:

$$\underline{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\underline{a} + \underline{a}^*) \quad , \quad \underline{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\underline{a} - \underline{a}^*) \quad , \quad (3)$$

e a hamiltoniana (1) é levada a:

$$H(\underline{a} , \underline{a}^*) = \omega_1 (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1^*) + \omega_2 (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2^*) + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} k'_{\alpha,\beta} \underline{a}_1^{\alpha_1} \cdot \underline{a}_2^{\alpha_2} \cdot \underline{a}_1^{*\beta_1} \cdot \underline{a}_2^{*\beta_2} \quad , \quad (4)$$

onde,

$$\{\underline{a}_k^* , \underline{a}_l\}_{(q , p)} = i \cdot \delta_{k,l} \quad , \quad \{\underline{a}_k^* , \underline{a}_l^*\}_{(q , p)} = \{\underline{a}_k , \underline{a}_l\}_{(q , p)} = 0 \quad , \quad (4')$$

De acordo com o teorema de BIRKHOFF<sup>(19,20)</sup> é usualmente possível eliminar termos de ordem superior da série (4), por meio de sucessivas transformações canônicas independentes do tempo, tal que obtemos a forma normal,

$$H(\underline{a} , \underline{a}^*) = \omega_1 (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1^*) + \omega_2 (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2^*) + b_{4,0} (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1^*)^2 + b_{2,2} (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1^*) (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2^*) + \dots + b_{0,N-1} (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2^*)^{\frac{N-1}{2}} + \sum_{\alpha,\beta=N}^{\infty} k_{\alpha,\beta} \underline{a}_1^{\alpha_1} \cdot \underline{a}_2^{\alpha_2} \cdot \underline{a}_1^{*\beta_1} \cdot \underline{a}_2^{*\beta_2} \quad , \quad (5)$$

onde os coeficientes  $b_{i,j}$  representam a dependência das frequências nas amplitudes das oscilações. Geralmente o resto da forma normal não pode ser eliminado; isto é, a série da forma normal não converge. Também devemos manter outros termos na série, se  $(\omega_1/\omega_2)$  é próximo de um número racional. Estendemos a expressão (5) até ordem N fazendo a transformação canônica  $(\underline{a}, \underline{a}^*) \rightarrow (\underline{Z}, \underline{Z}^*)$  através da função geratriz,

$$F(\underline{a}^*, \underline{Z}) = Z_1 \cdot a_1^* + Z_2 \cdot a_2^* + \sum_{\alpha+\beta=N}^{\infty} S_{\alpha,\beta} Z_1^{\alpha_1} Z_2^{\alpha_2} a_1^{*\beta_1} a_2^{*\beta_2} \quad (6)$$

Uma vez que  $\frac{\partial F(\underline{a}^*, \underline{Z})}{\partial t} = 0$  ,  $H(\underline{Z}, \underline{Z}^*) = H(\underline{a}, \underline{a}^*)$

A partir de (6) obtém-se as séries de potências para as variáveis,

$$a_1 = \frac{\partial F}{\partial a_1^*} , \quad a_2 = \frac{\partial F}{\partial a_2^*} , \quad Z_1^* = \frac{\partial F}{\partial Z_1} , \quad Z_2^* = \frac{\partial F}{\partial Z_2} \quad (7)$$

Ao fazer a reversão das séries das variáveis  $Z_1^*$  e  $Z_2^*$  obtém-se  $a_1^*$  e  $a_2^*$  em termos de  $(\underline{Z}, \underline{Z}^*)$ ; ao substituir as séries de  $a_1^*$  e  $a_2^*$  nas séries de  $a_1$  e  $a_2$ , obtém-se explicitamente  $(\underline{a}, \underline{a}^*)$  como função de  $(\underline{Z}, \underline{Z}^*)$ . Qualquer aproximação a  $\underline{a}^*$  e  $\underline{a}$  além da linear  $(\underline{a} = \underline{Z}$  ,  $\underline{a}^* = \underline{Z}^*)$  gera termos de ordem superior a N na extensão da hamiltoniana<sup>(21)</sup>, sendo assim obtém-se:

$$\begin{aligned} H(\underline{a}, \underline{a}^*) &= \omega_1 (a_1 \cdot a_1^*) + \omega_2 (a_2 \cdot a_2^*) + b_{4,0} (a_1 \cdot a_1^*)^2 + b_{2,2} (a_1 \cdot a_1^*) (a_2 \cdot a_2^*) + \\ &\dots + b_{0,N-1} (a_2 \cdot a_2^*)^{\frac{N-1}{2}} + \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=N}^{\infty} \left\{ k_{\alpha,\beta} - [i\omega_1(\beta_1 - \alpha_1) + i\omega_2(\beta_2 - \alpha_2)] \cdot S_{\alpha,\beta} \right\} \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot a_2^{*\beta_2} \quad (8) \end{aligned}$$

A expressão da forma normal de BIRKHOFF é portanto obtida através da escolha:

$$S_{\alpha,\beta} = \frac{-i \cdot k_{\alpha,\beta}}{\omega_1(\beta_1 - \alpha_1) + \omega_2(\beta_2 - \alpha_2)} \quad (9)$$

quando a relação entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$  é irracional e  $\alpha_1 \neq \beta_1$  e  $\alpha_2 \neq \beta_2$ . Se  $\alpha_1 = \beta_1$  e  $\alpha_2 = \beta_2$  a escolha (9) é impossível, mas também chegamos à forma normal de BIRKHOFF para qualquer N,

$$H(\underline{a}, \underline{a}^*) = \omega_1 (a_1 \cdot a_1^*) + \omega_2 (a_2 \cdot a_2^*) + b_{4,0} (a_1 \cdot a_1^*)^2 + b_{2,2} (a_1 \cdot a_1^*) (a_2 \cdot a_2^*) + \dots + b_{0,N-1} (a_2 \cdot a_2^*)^{\frac{N-1}{2}} + k_{N,0} (a_1 \cdot a_1^*)^{\frac{N}{2}} + k_{0,N} (a_2 \cdot a_2^*)^{\frac{N}{2}} + \text{T.O.S} \quad (10)$$

onde T.O.S. significa termos de ordem superior.

Define-se então as variáveis de ângulo-ação através da transformação canônica,

$$\underline{a} = \sqrt{I} \cdot \exp(i \cdot \varphi) \quad , \quad \underline{a}^* = \sqrt{I} \cdot \exp(-i \varphi) \quad (12)$$

tal que

$$\underline{a} \cdot \underline{a}^* = I = \left( \frac{p^2 + q^2}{2} \right) \cdot \begin{cases} q = \sqrt{2I} \cdot \cos \varphi \\ p = \sqrt{2I} \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (13)$$

E assim descrevemos (10) por:

$$H(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + b_{4,0} I_1^2 + b_{2,2} I_1 I_2 + \dots + b_{N,0} I_1^{N/2} + b_{0,N} I_2^{N/2} + \text{T.O.S} \quad (14)$$

a qual exhibe a dependência da forma normal de BIRKHOFF apenas nas ações.

Apesar da forma normal de BIRKHOFF ser uma aproximação integrável à hamiltoniana clássica ela torna-se assintoticamente exata conforme nos aproximamos do ponto de equilíbrio. O seu truncamento numa ordem finita é necessário e fornece uma primeira aproximação a sistemas mais complexos.

A transformação quântica que relaciona os operadores momentum e posição  $(\hat{p}, \hat{q})$  com os operadores número e fase  $(\hat{I}, \hat{\phi})$  é uma transformação unitária de um lado apenas ( $U^+U = 1$ ,  $UU^+ \neq 1$ ). Este tipo de transformação viola a condição quântica de manter invariante os autovalores de um dado operador. Porém se os autovalores de  $(UU^+)$ ,  $(UU^+) |K\rangle = \Phi(K) |K\rangle$ , dependerem de alguma maneira da constante de Planck  $\hbar$ , tal que  $\Phi(K) \rightarrow 1$ , quando  $\hbar \rightarrow 0$  para todo K, então o mesmo limite clássico é obtido se  $(\hat{I}, \hat{\phi})$  são gerados de  $(\hat{p}, \hat{q})$  por transformações unitárias ou por transformações unitárias de um lado<sup>(22)</sup>.

Neste regime de BIRKHOFF todos toros no sistema classicamente integrável pertencem a uma única família, e por isso as autoenergias são bem aproximadas por versões melhoradas das regras de quantização de BOHR-SOMMERFELD<sup>(20)</sup>. Estas são canonicamente invariantes,  $\int p dq = \int I d\phi$ , e cobrem semiclassicamente a quantização de todos os sistemas (1) que podem ser transformados na hamiltoniana (14).

A quantização da equação (2) pode ser interpretada como a definição dos operadores de criação e aniquilação  $\hat{a}^+$  e  $\hat{a}$  a partir dos operadores de momentum e posição usuais:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{q} - i \cdot \hat{p}) \quad ; \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{q} + i \cdot \hat{p}) \quad (15)$$

Eles obedecem a relação de comutação:

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] = \hbar \cdot \delta_{j,k} \quad (16)$$

O operador hamiltoniano correspondente é então o polinômio,

$$\hat{H} = \omega_1 \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\hbar}{2} \right) + \omega_2 \left( \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\hbar}{2} \right) + b_{4,0} \left[ \left( \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \right)^2 + \hbar \left( \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \right) + \frac{\hbar^2}{4} \right] + \dots \quad (17)$$

onde usamos a regra de simetrização e o limite semiclássico conhecido<sup>(10)</sup>

$$\hat{I} = \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar}{2} \right) \quad , \quad (18)$$

para o caso do oscilador harmônico.

Usando a representação do oscilador harmônico  $|n_1, n_2\rangle$  tal que,

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{\hbar n_1} |n_1 - 1, n_2\rangle \quad , \\ \hat{a}_1^\dagger |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{\hbar(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2\rangle \quad , \end{aligned} \quad (19)$$

com similar expressão para  $n_2$ , obtemos a matriz hamiltoniana

$$\begin{aligned} \langle n_1', n_2' | \hat{H} | n_1, n_2 \rangle &= \left( \omega_1 \hbar \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \omega_2 \hbar \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) + b_{4,0} \hbar^2 \left( n_1^2 + n_1 + \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\ &\left. \dots \right) \cdot \delta_{n_1', n_1} \cdot \delta_{n_2', n_2} \quad , \end{aligned} \quad (20)$$

o que corresponde simplesmente substituir  $I$  por  $\left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar$ , onde as componentes de  $n$  ( 0, 1, 2, ... ) são os números quânticos. Deve-se notar que as constantes clássicas de movimento são preservadas quanticamente. Pelo fato da matriz hamiltoniana ser diagonal, os níveis não são acoplados, o que permite ocorrência de quase degenerescências e cruzamentos no espaço dos parâmetros.

### CAPÍTULO 3 : FORMA NORMAL RESSONANTE : QUANTIZAÇÃO

O algoritmo de BIRKHOFF foi estendido por GUSTAVSON<sup>(23)</sup> aos casos ressonantes. As dificuldades de divergências ainda persistem, mas podemos notar que, enquanto as séries infinitas não têm um rigoroso significado, a hamiltoniana na forma normal truncada em uma certa ordem ( $j$ ) pode representar um sistema rigorosamente integrável, próximo do sistema original. Não é claro como tal proximidade pode ser medida, mas experimentos numéricos<sup>(24)</sup> mostram uma boa concordância da aproximação de órbitas periódicas, de toros invariantes e suas bifurcações. Obviamente, em regimes onde o movimento é predominantemente caótico, tal aproximação perde completamente seu significado uma vez que não existem mais os toros invariantes correspondentes à forma normal; mas aí também o ponto de equilíbrio perde a estabilidade aqui presumida.

Supondo, portanto, que a forma normal truncada é uma aproximação suficientemente boa da hamiltoniana original, podemos rapidamente encontrar o operador hamiltoniano correspondente  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_A$ , apesar da questão da quantização<sup>(25)</sup> e da correspondência quântica a transformações canônicas clássicas gerais<sup>(22,26)</sup> serem problemas não resolvidos. Isto é apoiado em experiências cujos resultados obtidos da quantização de formas normais são bastante próximos daqueles obtidos de teorias de perturbação quânticas<sup>(11,27,28)</sup>.

A quantização da forma normal em casos ressonantes integráveis é reduzida a simples manipulações algébricas envolvendo diagonalizações de matrizes finitas. O cálculo dos elementos de matriz de  $\hat{H}_A$  no subespaço de  $\hat{H}_0$  é direto já que  $\hat{H}_A$  pode ser expresso em termos dos operadores de criação e aniquilação. Este método permite calcular probabilidades de transição e efeitos de tunelamento ressonante num contexto integrável e, de acordo com alguns autores<sup>(29,30,31)</sup>, compete com vantagens sobre teorias de perturbações para aproximar sistemas não separáveis.

Ao tentarmos melhorar a precisão da forma normal de *BIRKHOFF* aumentando a ordem da série de Taylor, verificamos que mesmo para  $N$  finito aparecerão termos caracterizados por pequenos denominadores em (9) que impedem a convergência da série (8). Estes, correspondem à manifestação de um fenômeno físico que localmente altera o caráter das trajetórias no espaço de fases. Quando estes denominadores se anulam, definem-se então ressonâncias. Podemos estudar a passagem por uma ressonância de uma família de órbitas periódicas na vizinhança da origem, guardando o termo ressonante de ordem mais baixa. Obtemos assim, no mínimo, um primeiro conhecimento do processo de ressonância.

A inclusão de termos ressonantes na forma normal caracteriza-a como forma normal ressonante. Usualmente, na literatura especializada, as ressonâncias carregam finas regiões de órbitas caóticas e são tipicamente não integráveis. Aqui, inicialmente adicionaremos um termo integrável à forma normal de *BIRKHOFF* para gerar uma ressonância integrável isolada. *GUSTAVSON*<sup>(29)</sup> trata o problema de forma geral e abstrata; aqui damos um tratamento simples para dois graus de liberdade.

Escolhemos uma relação quase racional para as frequências características,

$$\frac{\omega}{2} = r\omega - \lambda \quad , \quad (21)$$

onde  $s$  e  $r$  são inteiros primos entre si e  $\lambda$  uma constante.

Se  $\lambda = 0$  tem-se uma ressonância sobre o ponto de equilíbrio estável. Estudamos então a aproximação mais simples que valha perto de  $\lambda = 0$ , o que significa deslocar a ressonância da origem para algum toro ressonante no espaço de fases na vizinhança da origem.

Inicialmente tomamos  $\lambda = 0$  (frequências racionalmente dependentes) e

observamos que :

$$S_{\alpha, \beta} = \frac{-i k_{\alpha, \beta}}{\omega_1(\beta_1 - \alpha_1) + \omega_2(\beta_2 - \alpha_2)} \quad (9)$$

diverge quando  $\alpha_1 \neq \beta_1$  e  $\alpha_2 \neq \beta_2$ , definindo uma ressonância. Portanto existem termos que não podem ser eliminados da soma em (8). Neste sentido obtemos os termos ressonantes de menor potência para os quais  $\alpha_1 \neq \beta_1$  e  $\alpha_2 \neq \beta_2$  fazendo,

$$\omega_1(\beta_1 - \alpha_1) + \omega_2(\beta_2 - \alpha_2) = 0 \quad (22)$$

ou

$$s(\beta_1 - \alpha_1) + r(\beta_2 - \alpha_2) = 0 \quad (23)$$

A escolha dos  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's é feita de modo que a soma ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$ ) seja ( $r + s$ ) e mínima, isto é

$$(\beta_1 - \alpha_1) = \pm r \quad , \quad (\beta_2 - \alpha_2) = \mp s \quad (24)$$

$$\text{de } \begin{cases} (\beta_1 - \alpha_1) = r \\ (\beta_2 - \alpha_2) = -s \end{cases} \Rightarrow \{ \alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = s \quad , \quad \beta_1 = r \quad , \quad \beta_2 = 0 \} \quad ,$$

$$\text{de } \begin{cases} (\beta_1 - \alpha_1) = -r \\ (\beta_2 - \alpha_2) = s \end{cases} \Rightarrow \{ \alpha_1 = r \quad , \quad \alpha_2 = 0 \quad , \quad \beta_1 = 0 \quad , \quad \beta_2 = s \} \quad (25)$$

Assim a expressão (8) é descrita por :

$$H(\underline{q}, \underline{q}^*) = \omega_1 (a_1 \cdot a_1^*) + \omega_2 (a_2 \cdot a_2^*) + b_{4,0} (a_1 \cdot a_1^*)^2 + \dots + b_{0,N-1} (a_2 \cdot a_2^*)^{\frac{N-1}{2}} +$$

$$+ \sum_{\substack{r \\ s}} \left\{ a_2^s \cdot a_1^r + a_1^r \cdot a_2^s \right\} + \text{T.O.S} \quad (26)$$

Em termos das variáveis de ângulo-ação, temos,

$$\begin{aligned}
 H(\underline{J}, \underline{\varphi}) &= \omega_1 \cdot I_1 + \omega_2 \cdot I_2 + b_{4,0} \cdot I_1^2 + \dots + b_{0,N-1} \cdot I_2^{\frac{(N-1)}{2}} + \\
 &+ \alpha \cdot (I_1^r \cdot I_2^s)^{1/2} \cdot \cos(r \cdot \varphi_1 - s \cdot \varphi_2)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Após identificar os termos ressonantes e agregá-los à hamiltoniana, fazemos  $\lambda \neq 0$  e obtemos uma hamiltoniana truncada denominada forma normal ressonante fora da ressonância, pois  $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \left(\frac{rs}{r}\right) - \lambda$ .

Finalmente, a transformação canônica linear  $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \rightarrow (\underline{J}, \underline{\theta})$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= r \cdot J_1 & , & & \theta_1 &= r \cdot \varphi_1 - s \cdot \varphi_2 & , \\
 I_2 &= J_2 - s \cdot J_1 & , & & \theta_2 &= \varphi_2 & ,
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

leva a hamiltoniana à forma:

$$H(\underline{J}, \underline{\theta}) = \omega_2 \cdot (J_2 - r \cdot \lambda \cdot J_1) + b_{4,0} \cdot r^2 \cdot J_1^2 + \dots + \alpha \cdot (r \cdot J_1)^{r/2} \cdot (J_2 - s \cdot J_1)^{s/2} \cdot \cos \theta_1$$

(29)

A variável  $\theta_2$  é uma variável cíclica pois a hamiltoniana independe dela, daí segue que  $J_2$  é uma constante independente de movimento, tal que o parênteses de Poisson  $(H, J_2)_{(\underline{J}, \underline{\theta})} = 0$ . Assim o movimento é integrável e não existem órbitas caóticas. Estas podem aparecer quando incluirmos termos de ordem superior, que foram negligenciados em (26). Quase todas órbitas no espaço de fases estão sobre toros invariantes. Contudo nem todos esses toros pertencem à mesma família.

Para  $r > 4$  ( $s = 1$ ) o último termo, assim como os outros termos da forma normal, serão menores que  $\left| \omega_2 \cdot r \cdot \lambda \cdot J_1 \right| + \left| b_{4,0} \cdot r^2 \cdot J_1^2 \right|$  para  $J_1 \rightarrow 0$ , jogando

$(\omega_2 J_2)$  para o lado esquerdo da equação. Em primeira aproximação teríamos então um toro invariante da secção  $\pi J_{1,0}$ , onde

$$\left. \frac{\partial H}{\partial J_1} \right|_{J_1=J_{1,0}} = -\omega_2 r \lambda + 2 b_{4,0} r^2 J_{1,0} = 0 \quad (30)$$

composto de órbitas periódicas de período  $(r/s)$  vezes o da central. No limite da ressonância  $(\lambda \rightarrow 0)$  esse toro coalesce com a órbita central e desaparece para  $\lambda < 0$ . Esta situação é parecida com a bifurcação de HOPF<sup>(32,33)</sup> de sistemas dinâmicos gerais.

O efeito do termo dependente de  $\theta_1$  é qualitativo, não podendo ser desprezado por menor que seja  $J_{1,0}$ . Por causa dele, temos  $(\partial H / \partial \theta_1)_{J_{1,0}} \neq 0$  em geral, de maneira que os pontos desse toro não ficam parados. Só nos pontos  $\theta_{1,0} = \pi$  é que temos pontos de equilíbrio. Em segunda aproximação, temos:

$$H = (b_{4,0} r^2) \cdot (J_1 - J_{1,0})^2 + \alpha (r J_{1,0})^{r/2} \cdot (J_2 - s J_{1,0})^{s/2} \cdot \cos \theta_1$$

ou

$$H = C_1 (\Delta J)^2 + \alpha' \cos \theta_1 \quad (31)$$

que é a hamiltoniana do pêndulo de ângulo  $\theta_1$ . Vemos que metade dos novos pontos de equilíbrio (órbitas periódicas) são estáveis e a outra metade são instáveis. Os pontos estáveis, são rodeados de toros em "ilha" que se separam da aproximação de BIRKHOFF por separatrizes que saem do ponto instável com a equação :

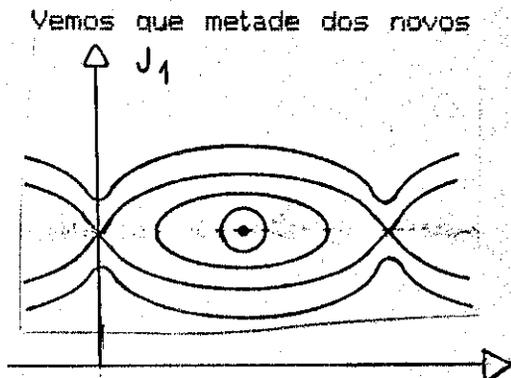


figura 1

$$(J_1 - J_{1,0}) = \left[ \alpha (r J_{1,0})^{r/2} \cdot (J_2 - s J_{1,0})^{s/2} \cdot (1 - \cos \theta_1) \right]^{1/2} \quad (32)$$

De (32) e (30) vemos que a área máxima das ilhas é de ordem  $\lambda^{\Gamma/4}$  :

A frequência natural de oscilação ( $\tilde{\omega}_1$ ) do pêndulo em torno do ponto de equilíbrio estável também é de ordem de  $\lambda^{\Gamma/4}$

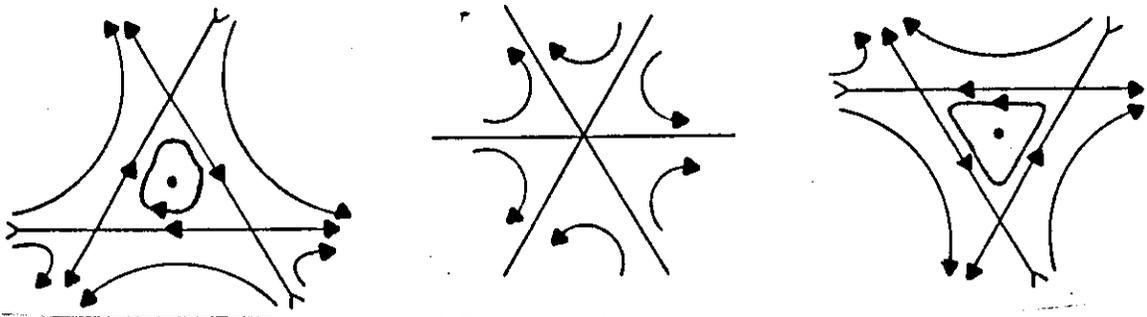
$$\tilde{\omega}_1 = (C_1 \cdot \alpha')^{1/2}$$

$$\tilde{\omega}_1 = \left[ (b_{4,0} \cdot r^2) \cdot \alpha \cdot (r \cdot J_{1,0})^{\Gamma/2} \cdot (J_2 - S \cdot J_{1,0})^{5/2} \right]$$

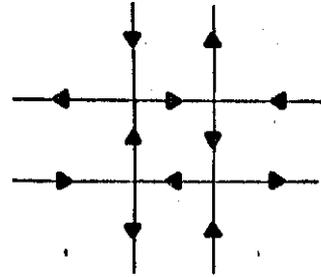
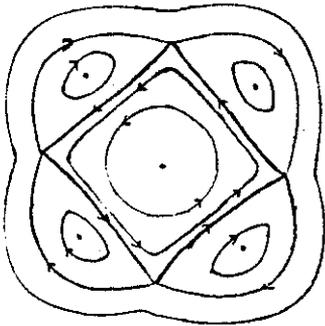
Portanto vemos que no limite  $\lambda \rightarrow 0$ , embora qualitativamente diferente, o movimento se aproxima daquele obtido da forma normal de BIRKHOFF; as ilhas se estreitam e a frequência de oscilação em torno das órbitas estáveis vai a zero.

Como existem muitos números racionais que se aproximam de um dado número real, temos muitas quase-ressonâncias de ordem elevada. Para cada uma delas teremos um quase toro de órbitas periódicas que se desfaz num sistema de ilhas. Podemos focalizar qualquer um deles por meio da forma normal ressonante a custo de ignorar os outros colares de ilhas. Por outro lado, se repetirmos o mesmo tratamento para as órbitas estáveis satélites da órbita central, obtemos novos sistemas de ilhas dentro das ilhas<sup>(20)</sup>.

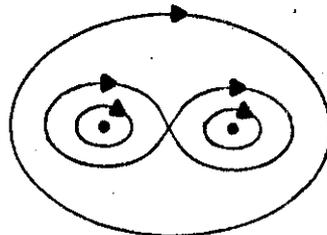
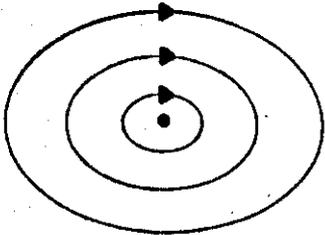
As ressonâncias de ordem  $r \leq 4$  tem estruturas diferentes. Para  $r = 3$  só existem satélites instáveis presentes para todo  $\lambda \neq 0$ , vide figura 2 abaixo:



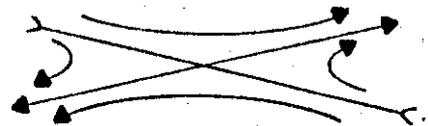
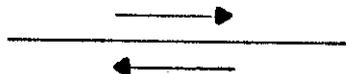
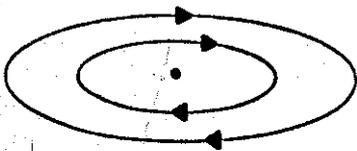
A ressonância de ordem 4 pode apresentar duas configurações. Uma que acompanha as ressonâncias de ordem superior, e a outra analoga à ressonância de ordem 3, figura 3:



Na ressonância de ordem 2 - a chamada bifurcação de duplicação de período - a órbita central passa de estável a instável, surgindo dois satélites estáveis, figura 4:



A ressonância de ordem 1 ocorre na transição parabólica do ponto de equilíbrio de elíptico para hiperbólico, figura 5:



Todas formas normais ressonantes cuja ressonância é de ordem maior do que quatro têm a mesma estrutura. A quantização do termo ressonante

introduzido em (26) é direta e o hamiltoniano correspondente é:

$$\hat{H} = \omega_1 \left( \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1 + \frac{\hbar}{2} \right) + \omega_2 \left( \hat{a}_2^\dagger \cdot \hat{a}_2 + \frac{\hbar}{2} \right) + b_{4,0} \left[ \left( \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1 \right)^2 + \hbar \left( \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1 \right) + \frac{\hbar^2}{4} \right] + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \left( \hat{a}_1^{\dagger r} \cdot \hat{a}_2^s + \hat{a}_1^r \cdot \hat{a}_2^{\dagger s} \right) \quad (33)$$

Na representação do oscilador harmônico  $|n_1, n_2\rangle$  a ressonância introduz elementos de matriz não diagonais:

$$\langle n_1', n_2' | \hat{H} | n_1, n_2 \rangle = \left( \omega_1 \hbar (n_1 + 1/2) + \omega_2 \hbar (n_2 + 1/2) + \right.$$

$$\left. + b_{4,0} \hbar^2 \left( n_1^2 + n_1 + \frac{1}{4} \right) + \dots \right) \delta_{n_1', n_1} \delta_{n_2', n_2} +$$

$$+ \left( \frac{\alpha}{2} \hbar^{(r+s)/2} \right) \left[ (n_1 + 1) \dots (n_1 + r) \cdot n_2 \dots (n_2 - s + 1) \right]^{1/2}$$

$$\cdot \delta_{n_1', n_1-r} \delta_{n_2', n_2+s} + \text{c.c.} \quad (34)$$

onde c.c significa um termo conjugado complexo.

O fato de  $\hat{H}$  ser não diagonal significa que  $\hat{H}$  não comuta com algum dos osciladores usado na base. Contudo pode-se verificar que o hamiltoniano comuta com o operador,

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{\hbar} \left( s \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + r \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + C \right) = \left( s \frac{\hat{I}_1}{\hbar} + \hat{I}_2 \right) \quad (35)$$

correspondendo à ação clássica  $J_2$  a menos de uma constante. Por isso  $\hat{J}_2$  é uma integral de movimento, tal como na dinâmica clássica. Assim transformando a base  $|n_1, n_2\rangle$  a autoestados de  $\hat{J}_2$  podemos reduzir a matriz hamiltoniana a uma estrutura de blocos e considerar os autovalores de blocos individuais.

Para tanto definimos o operador

$$\hat{J}_1 = \hat{I}_1/r = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar/2) / r \quad , \quad (36)$$

em concordância com (28). Na base  $|n_1, n_2\rangle$ ,

$$\hat{J}_1 |n_1, n_2\rangle = \frac{\hbar}{r} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) |n_1, n_2\rangle \quad , \quad (37)$$

para que  $n_1$  seja inteiro

$$n_1 = r \cdot n + n_0 \quad , \quad (38)$$

e

$$\hat{J}_1 |n_1, n_2\rangle = \hbar \left( n + \frac{n_0}{r} + \frac{1}{2r} \right) |n_1, n_2\rangle \quad , \quad (39)$$

com  $n_0 = 0, 1, 2, 3, \dots, (r-1)$  e  $n =$  inteiro positivo.

Os autovalores de  $\hat{J}_1$  se agrupam em  $r$  seqüências diferentes de autovalores de  $\hat{I}_1$ .

O espectro de  $\hat{J}_2$  é dado por,

$$\hat{J}_2 |n_1, n_2\rangle = \hbar \left[ \frac{\hbar}{r} n_1 + n_2 + \frac{\hbar}{2r} + \frac{1}{2} \right] |n_1, n_2\rangle \quad , \quad (40)$$

$$\hat{J}_2 |n_1, n_2\rangle = \hbar \left[ \hbar n + n_2 + \left( \frac{\hbar}{2r} + \frac{1}{2} + \frac{\hbar}{r} n_0 \right) \right] |n_1, n_2\rangle \quad , \quad (41)$$

e para que  $(sn + n_2)$  seja inteiro definimos

$$n_2 = m - sn \quad , \quad (42)$$

Portanto, definindo os estados,

$$|n_1, n_2\rangle_{J_2} = |rn + n_0, m - sn\rangle_{J_2} \equiv |k\rangle \quad , \quad (43)$$

obtemos a matriz hamiltoniana,

$$\begin{aligned} \langle k' | \hat{H} | k \rangle_m = & \left\{ \hbar\omega_2 \left[ m + \left( \frac{s}{2r} + \frac{1}{2} + \frac{s}{r}n_0 \right) - \lambda \left( rn + n_0 + \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + b_{4,0} \hbar^2 \left[ r^2 \left( n + \frac{n_0}{r} + \frac{1}{2r} \right)^2 \right] \right\} \delta_{n', n} \cdot \delta_{m', m} + \\ & + \left( \frac{\alpha}{2} \hbar^{(s+r)/2} \right) \cdot \left( (rn + n_0 + 1) \dots (rn + n_0 + r) \cdot (m - sn) \dots \right. \\ & \left. \dots (m - s(n+1) + 1) \right)^{1/2} \cdot \delta_{n', n-1} \cdot \delta_{m', m} + \text{c.c} \quad (44) \end{aligned}$$

Para cada  $m$ , obtemos um único bloco da matriz hamiltoniana. Cada bloco é tridiagonal simétrico e finito.

Particularizamos este formalismo ao caso típico onde

$$\omega_2 = 1, \quad \omega_1 = \frac{1}{6} - \lambda, \quad b_{4,0} = 0, \quad b_{i,j} = 0 \quad , \quad (45)$$

de modo que as principais equações são resumidas a seguir:

$$H(\underline{a}, \underline{a}^*) = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) (a_1 \cdot a_1^*) + (a_2 \cdot a_2^*) + c(a_1 \cdot a_1^*)^2 + \frac{\alpha}{2} [a_2 a_1^{*6} + a_1^6 a_2^*] \quad (26')$$

$$H(\underline{J}, \varphi) = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) \cdot J_1 + J_2 + c J_1^2 + \alpha \cdot J_1^3 \cdot J_2^{1/2} \cdot \cos(6\varphi_1 - \varphi_2) \quad (27')$$

$$H(\underline{J}, \theta) = J_2 - 6\lambda \cdot J_1 + 6^2 \cdot c J_1^2 + \alpha \cdot 6^3 J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot \cos \theta_1 \quad (29')$$

$$\hat{H} = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) \left(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{\hbar}{2}\right) + \left(\hat{a}_2^+ a_2 + \frac{\hbar}{2}\right) + c \left[ (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1)^2 + \hbar (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1) + \frac{\hbar^2}{4} \right] + \frac{\alpha}{2} (\hat{a}_1^{+6} \cdot \hat{a}_2 + \hat{a}_1^6 \cdot \hat{a}_2^+) \quad (33')$$

$$\langle n_1', n_2' | \hat{H} | n_1, n_2 \rangle = \left[ \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) \hbar \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + c \hbar^2 \left(n_1^2 + n_1 + \frac{1}{4}\right) \right] \cdot$$

$$\cdot \delta_{n_1', n_1} \cdot \delta_{n_2', n_2} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2} \hbar^{7/2}\right) \cdot \left[ (n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 3)(n_1 + 4)(n_1 + 5)(n_1 + 6) \cdot n_2 \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \delta_{n_1', n_1 - 6} \cdot \delta_{n_2', n_2 + 1} + \text{c.c.} \quad (34')$$

$$\begin{aligned}
\langle k' | \hat{A} | k \rangle = & \left\{ \hbar \left[ m + \frac{7}{12} + \frac{n_0}{6} - \lambda \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right) \right] + \alpha \hbar^2 \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \delta_{n', n} \cdot \delta_{m', m} + \\
& + \left( \frac{\alpha \hbar^2}{2} \right)^{7/2} \cdot \left( (6n + n_0 + 1) \cdot (6n + n_0 + 2) \cdot (6n + n_0 + 3) \cdot (6n + n_0 + 4) \right. \\
& \left. (6n + n_0 + 5) \cdot (6n + n_0 + 6) (m - n) \right)^{1/2} \cdot \delta_{n', n-1} \cdot \delta_{m', m} + \dots
\end{aligned}
\tag{44'}$$

A escolha  $\left(\frac{\alpha}{\hbar} = \frac{1}{6}\right)$  impõe uma ressonância de ordem 6 e para  $\lambda > 0$  algum toro ressonante passará a abrigar uma estrutura de ilhas com uma órbita periódica estável circundada por toros de libração e uma instável onde se encontram as variedades da separatriz que separam os toros de rotação daqueles de libração como previsto pelo teorema de POINCARÉ-BIRKHOFF<sup>(11)</sup>. O espaço de fases da hamiltoniana reduzida, veja apêndice A, exibe esta estrutura.

Nas figuras seguintes vemos a seção de Poincaré do sistema ressonante integrável.

UMA RESSONANCIA

ALFA = 1.5\*(6\*\*(-0.3))

BETA = 0.0

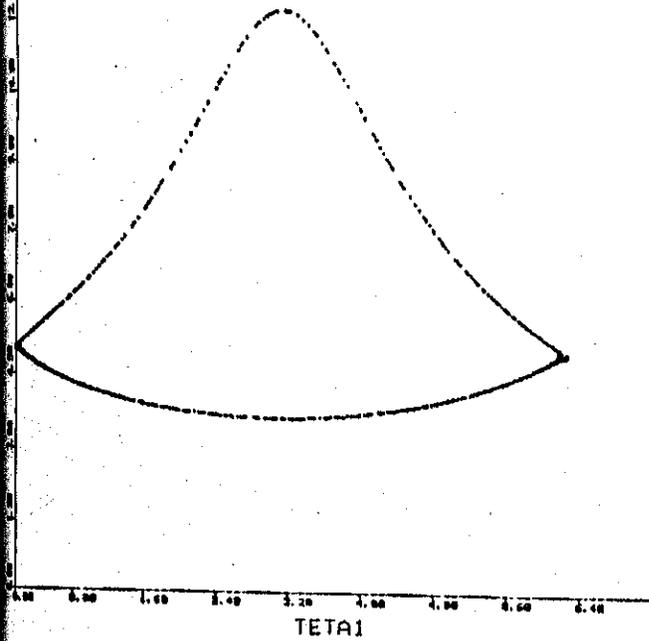


FIGURA 8 :

Separatriz do movimento. Foram dadas 70 condições iniciais na região linear próxima ao ponto hiperbólico.

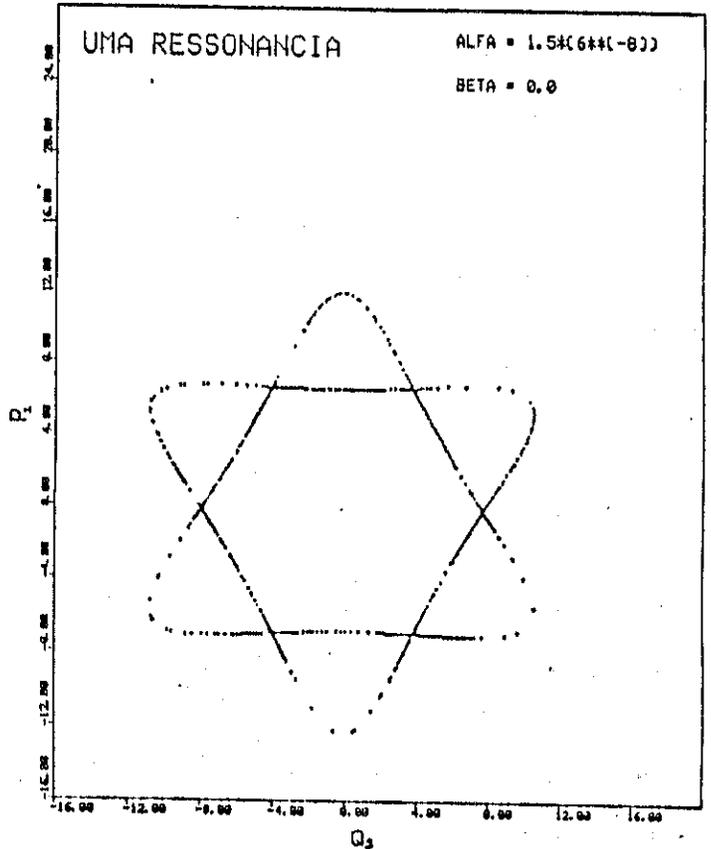
FIGURA 9 :

A partir de  $(J_1$  e  $\theta_1$ ) usados na figura 8, usamos as transformações (28) e (13) e descrevemos a separatriz em  $(p_1, q_1)$ .

UMA RESSONANCIA

ALFA = 1.5\*(6\*\*(-0.3))

BETA = 0.0



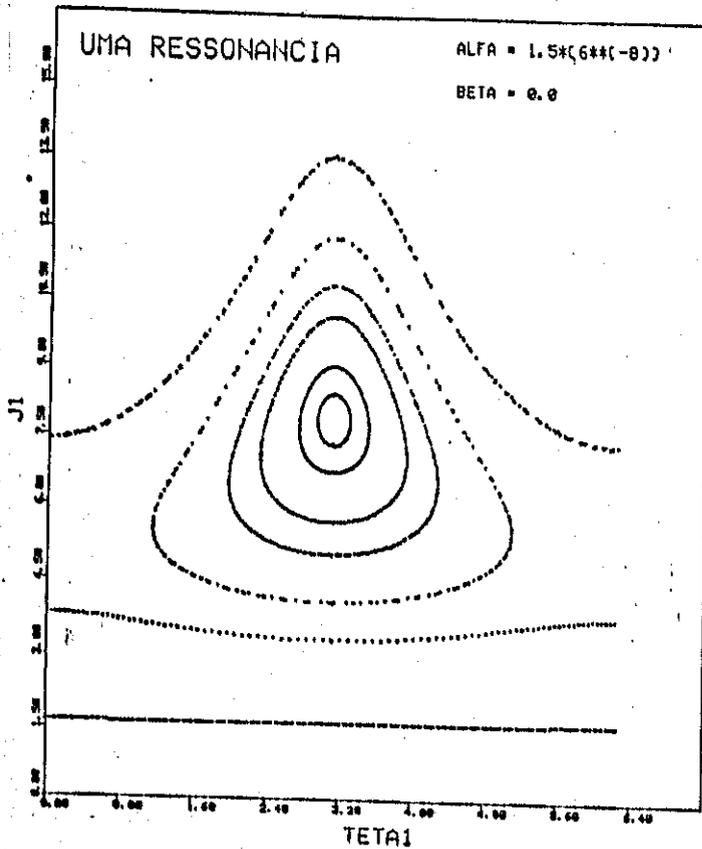
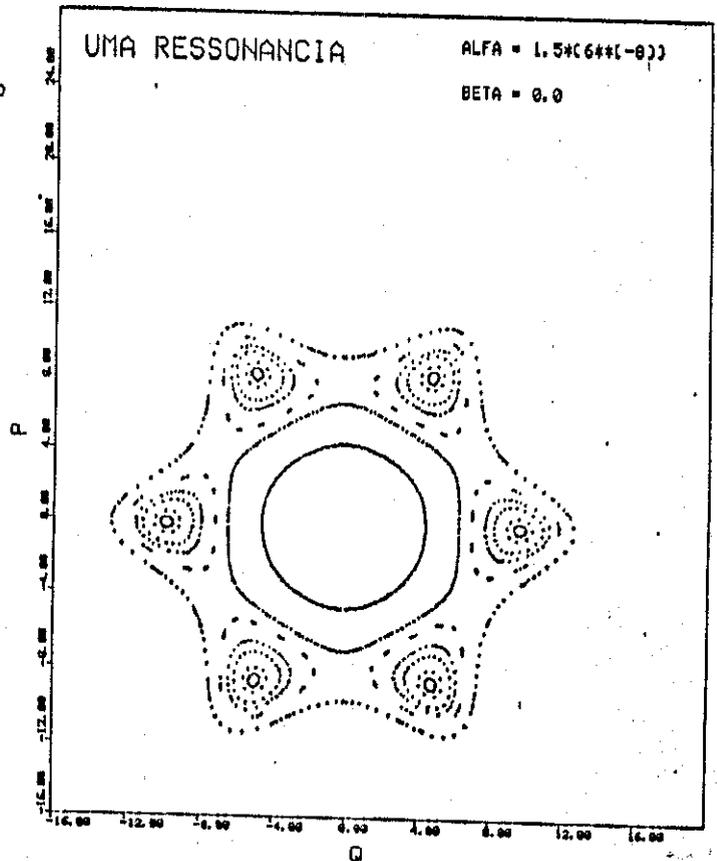


FIGURA 10 :

Espaço de fases exibindo curvas de libração e rotação. Foram dadas 8 condições iniciais ao longo de  $\theta_1 = \pi$ .

FIGURA 11 :  
Análogo à Figura 10, no espaço  $(p_1, q_1)$ .



O fato de existirem famílias diferentes de toros no espaço de fase faz com que as regras de quantização de BOHR-SOMMERFELD melhoradas não sejam mais adequadas para aproximar o espectro de energias, porque próximo à separatriz, fortes efeitos de tunelamento ocorrem<sup>(34)</sup> e estes não são previstos por BOHR-SOMMERFELD. Para cada valor de  $J_2$  as energias de (44) dependem do tunelamento interno envolvendo toros em ilhas (o movimento pode interromper seu percurso no "tempo  $\theta_2$ " saltando através da separatriz) e do tunelamento de rotação entre os toros que envolvem a ressonância.

Cada uma das seis possíveis sequências de autovalores de  $\hat{J}_1$  ( $n_0 = 0, 1, 2, 3, 4,$  ou  $5$ ) define um "macro" subespaço que denominamos por "blocoões". Dentro desses, observa-se a comutação  $[\hat{H}, \hat{J}_2] = 0$  definindo uma estrutura de infinitos "bloquinhos"; cada um associado a um possível autovalor de  $\hat{J}_2$ . Na situação de uma ressonância isolada integrável estudamos os efeitos de tunelamento ressonante através de um bloquinho tridiagonal para um dado  $n_0$ . Uma teoria explícita para tunelamento no contexto descrito é derivada na referência (34).

Poder-se-ia incorrer em erros significativos ao quantizar o sistema descrito em variáveis de ângulo-ação, equação (29), devido ao fato da correspondente transformação quântica ser unitária de um só lado. Esses erros poderiam competir com a magnitude dos efeitos de tunelamento e comprometer a fidelidade dos resultados advindos desta quantização. No entanto damos um exemplo numérico<sup>(21)</sup>, no qual usamos uma teoria semiclássica<sup>(3)</sup> baseada na representação de WIGNER-WEYL que utiliza explicitamente a hamiltoniana (29),  $H(\underline{J}, \underline{\varrho})$ , cujo espectro de energias é resultado da diagonalização da matriz hamiltoniana semiclássica e está em excelente concordância com os resultados exatos. As autoenergias semiclássicas daí obtidas são também canonicamente invariantes, portanto, todos sistemas clássicos com a mesma forma normal corresponderão aos mesmos níveis de energias quantizados. Observamos então

que é de fato válido usar variáveis de ângulo-ação na presença de tunelamento ressonante. Podemos observar tal concordância nos espectros a seguir:

MATRIZ EXATA		MATRIZ SEMICLASSICA	
E ( 1 )	=2. 98253	FSC ( 1 )	=2. 98250
E ( 2 )	=3. 00639	FSC ( 2 )	=3. 00637
E ( 3 )	=3. 02981	FSC ( 3 )	=3. 02777
E ( 4 )	=3. 05278	FSC ( 4 )	=3. 05276
E ( 5 )	=3. 07530	FSC ( 5 )	=3. 07520
E ( 6 )	=3. 09736	FSC ( 6 )	=3. 09734
E ( 7 )	=3. 11896	FSC ( 7 )	=3. 11894
E ( 8 )	=3. 14009	FSC ( 8 )	=3. 14008
E ( 9 )	=3. 16076	FSC ( 9 )	=3. 16074
E (10)	=3. 18095	FSC (10)	=3. 18093
E (11)	=3. 20066	FSC (11)	=3. 20064
E (12)	=3. 21988	FSC (12)	=3. 21986
E (13)	=3. 23860	FSC (13)	=3. 23858
E (14)	=3. 25681	FSC (14)	=3. 25680
E (15)	=3. 27450	FSC (15)	=3. 27449
E (16)	=3. 29166	FSC (16)	=3. 29165
E (17)	=3. 30827	FSC (17)	=3. 30826
E (18)	=3. 32430	FSC (18)	=3. 32430
E (19)	=3. 33974	FSC (19)	=3. 33974
E (20)	=3. 35455	FSC (20)	=3. 35455
E (21)	=3. 36869	FSC (21)	=3. 36868
E (22)	=3. 38209	FSC (22)	=3. 38208
E (23)	=3. 39469	FSC (23)	=3. 39467
E (24)	=3. 40618	FSC (24)	=3. 40618
E (25)	=3. 41715	FSC (25)	=3. 41716
E (26)	=3. 42417	FSC (26)	=3. 42417
E (27)	=3. 43653	FSC (27)	=3. 43654
E (28)	=3. 44163	FSC (28)	=3. 44163
E (29)	=3. 45941	FSC (29)	=3. 45941
E (30)	=3. 46532	FSC (30)	=3. 46533
E (31)	=3. 48641	FSC (31)	=3. 48641
E (32)	=3. 49274	FSC (32)	=3. 49274
E (33)	=3. 51667	FSC (33)	=3. 51667
E (34)	=3. 52318	FSC (34)	=3. 52318
E (35)	=3. 54981	FSC (35)	=3. 54981
E (36)	=3. 55634	FSC (36)	=3. 55634
E (37)	=3. 58566	FSC (37)	=3. 58566
E (38)	=3. 59206	FSC (38)	=3. 59206
E (39)	=3. 62407	FSC (39)	=3. 62407
E (40)	=3. 63022	FSC (40)	=3. 63022

TABELA 1

A relação entre ressonâncias e cruzamentos evitados de níveis, "avoided crossings", tem sido objeto de vários estudos <sup>(35,36,37)</sup>. Embora tanto "avoided crossings" e caos clássicos estejam usualmente associados com ressonâncias, os primeiros podem aparecer em sistemas estritamente integráveis<sup>(34,36)</sup>. A repulsão dos níveis é interpretada como uma consequência dos efeitos de tunelamento de rotação entre toros que envolvem a separatriz e pode ser visualizada no acoplamento de elementos de matriz diagonais primeiros vizinhos no interior de um bloquinho. Nos gráficos a seguir podemos acompanhar a evolução de alguns níveis de energia com relação ao parâmetro de perturbação  $\alpha$  e observar os "avoided crossings". Utilizamos  $n_0=3$  e o conjunto de parâmetros B-44 do apêndice B. A separação de níveis vizinhos e o espectro de energias devem ser comparados com o caso  $\alpha = 0$ . Ao lado das figuras seguem alguns comentários e resultados relevantes ao contexto do trabalho.

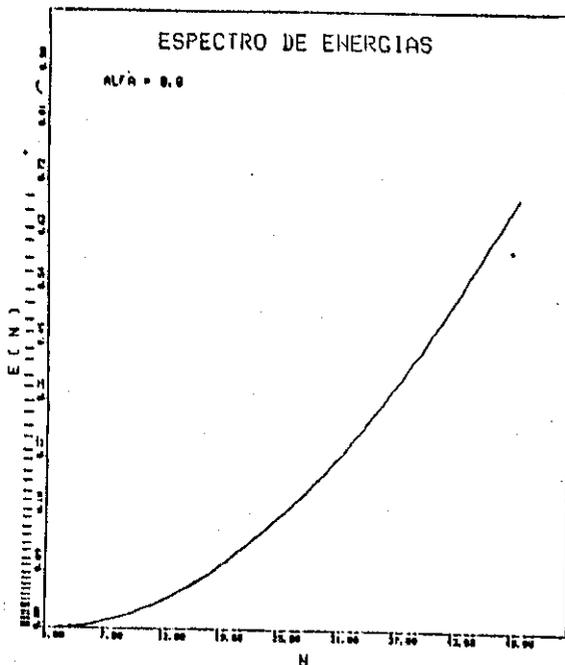
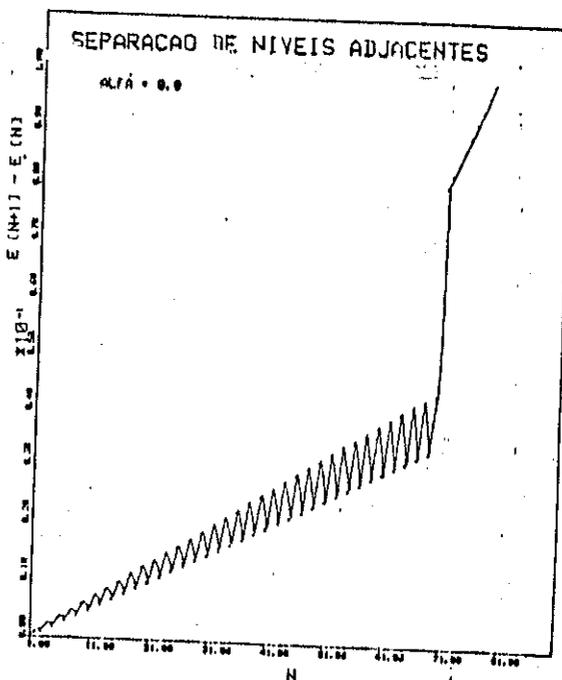


FIGURA 1 :

As mais baixas energias diagonais são quase degeneradas. Subtrai-se  $E(1)$  de todas energias.

FIGURA 2 :

Até a energia da órbita central ( $N \approx 72$ ) a separação de níveis é crescente e oscilante.



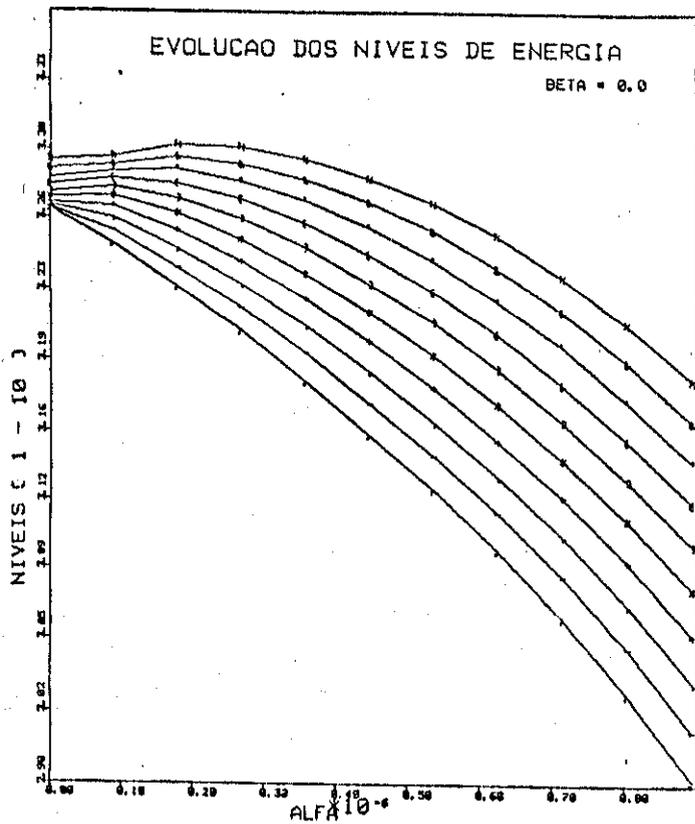
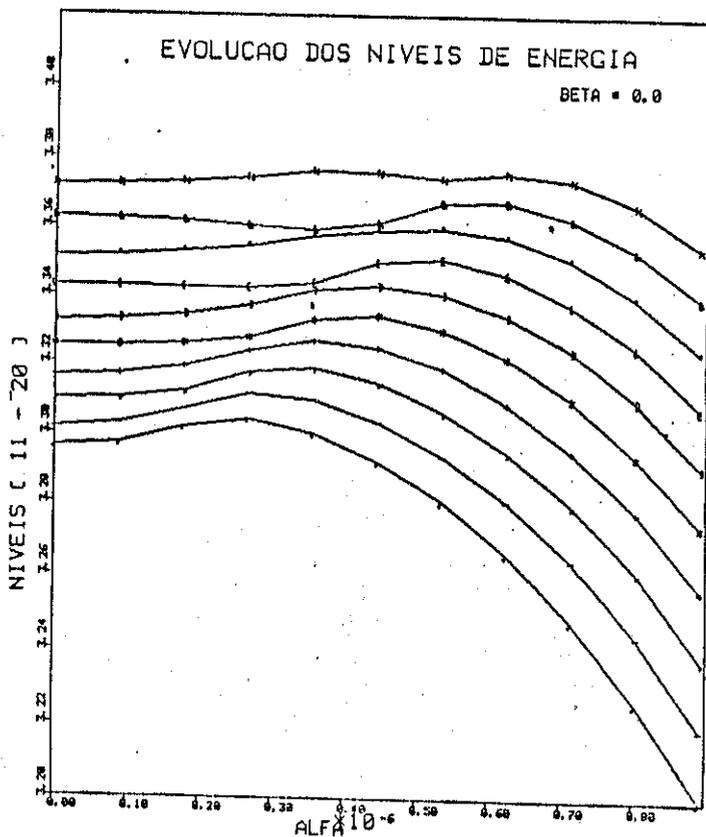


FIGURA 12 :

Cada nível tem um símbolo diferente. Eles oscilam levemente para pequenos  $\alpha$ 's. A partir do quinto nível, todos passam por suas energias diagonais em certos valores de  $\alpha \neq 0$ .

FIGURA 13 :

Todos níveis oscilam e passam por suas energias diagonais. Observa-se também alguns 'avoided crossings'.



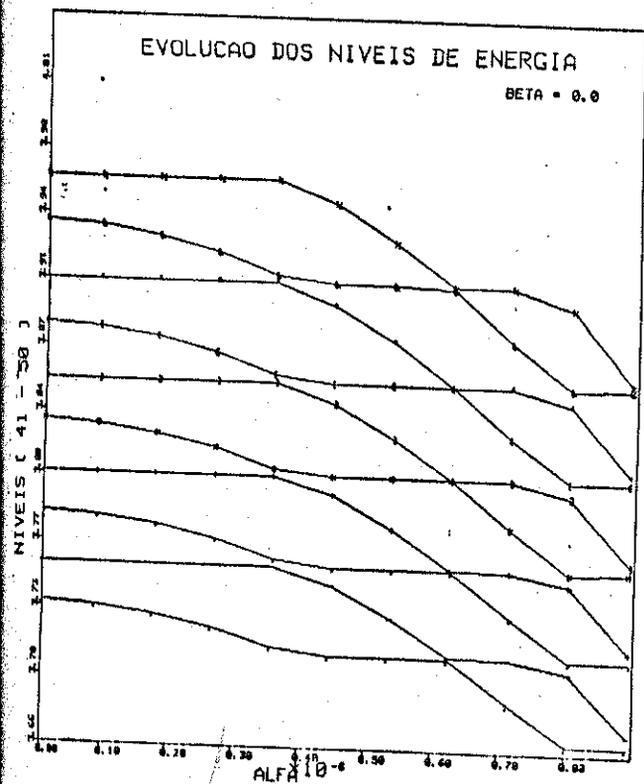
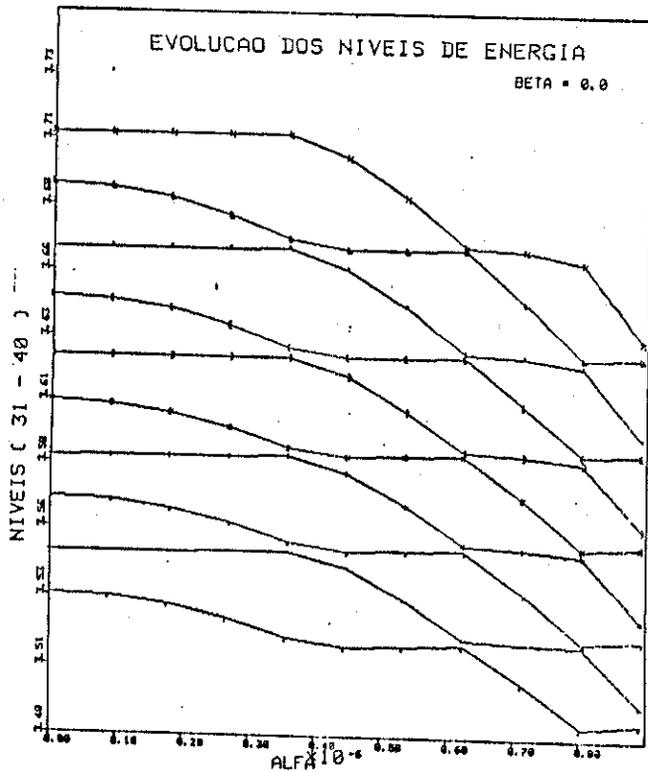
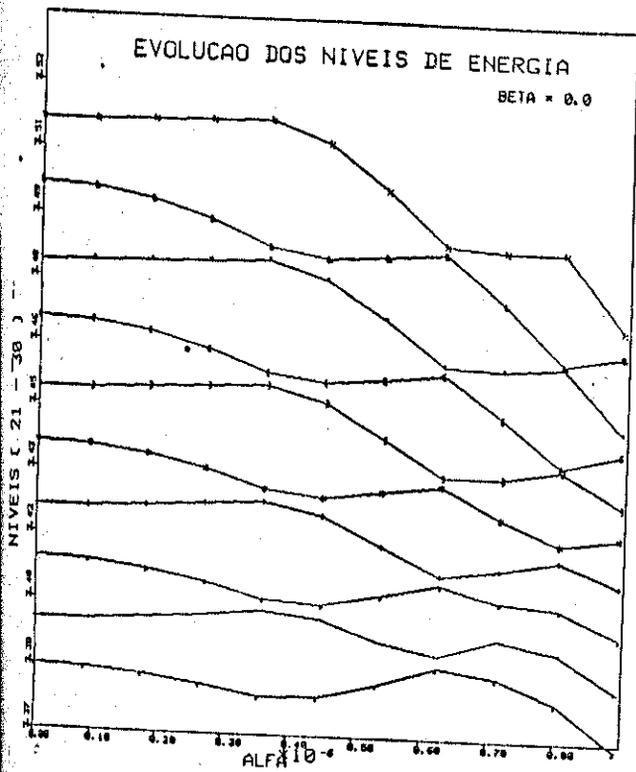


FIGURA 14 :

A partir do 24º nível, todos os pares de níveis comportam-se de maneira idêntica. Enquanto um nível permanece estacionário com energia próxima de sua energia diagonal, o seu 'conjugado' perde energia até ocorrer o 1º 'avoided crossing' e a partir daí ambos oscilam. Todos 'avoided crossing' ocorrem para mesmos valores de  $\alpha$ . Este efeito coletivo é padronizado pelos efeitos de 'tunelamento de rotação'.

### ESPECTRO DE ENERGIAS

ALFA =  $1.5 \times 10^{-8}$

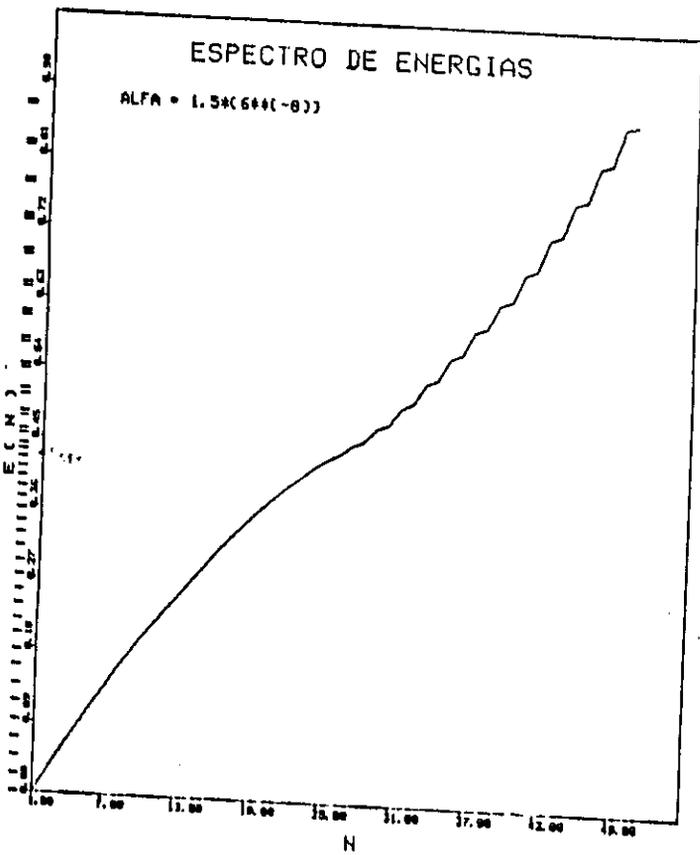
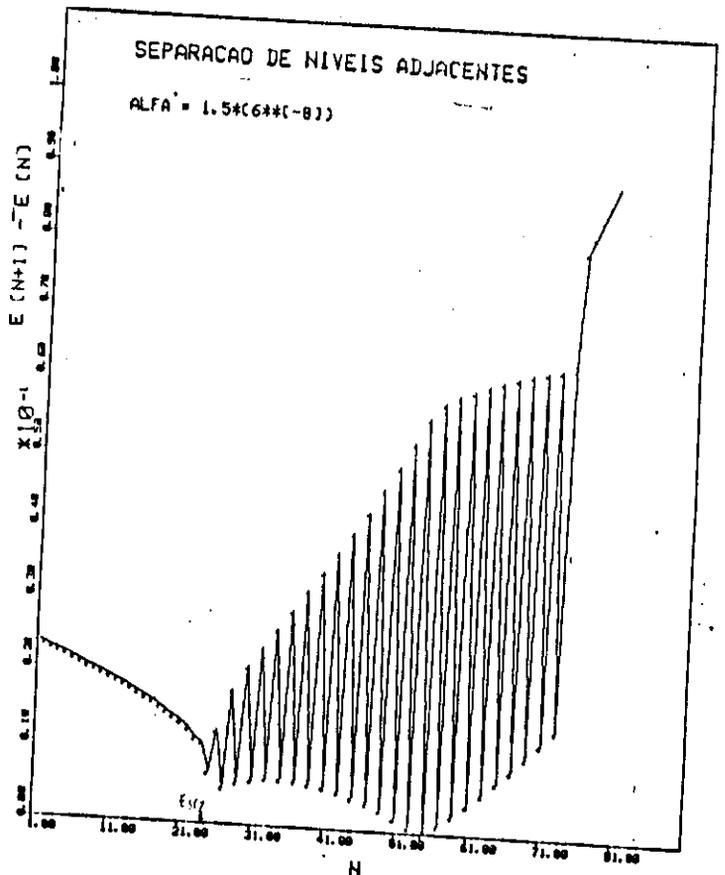


FIGURA 15 :

A ressonância levanta as quase degenerescências e a partir da energia da separatriz o espectro é do tipo 'escada'.

FIGURA 16:

A partir da energia da separatriz  $E_{sp}(N \approx 24)$  até a energia da órbita central os níveis separam-se aos pares devido aos efeitos de tunelamento.



## CAPÍTULO 4 - ADIÇÃO DE CAOS : UM SISTEMA QUASE-INTEGRÁVEL

Agora, introduzimos uma descrição qualitativa daqueles sistemas hamiltonianos genéricos que podem ser tratados como perturbações de sistemas integráveis. A principal característica de sistemas quase integráveis é a presença simultânea de trajetórias regulares e de regiões caóticas. Estas são confinadas a regiões delimitadas por toros irracionais que suportam as órbitas regulares. Para sistemas autônomos com grau de liberdade maior do que dois as trajetórias regulares não mais separam as órbitas caóticas, as quais agora formam uma "teia" caótica. Isto produz o fenômeno conhecido por difusão de Arnold<sup>(9)</sup>. Mas neste estudo nos restringiremos a dois graus de liberdade.

Uma vez que trajetórias regulares dependem descontinuamente da escolha das condições iniciais, suas presenças não implicam na existência de uma integral isolada, globalmente invariante, do sistema. Contudo onde elas aparecem, representam invariantes locais exatas do movimento. Estas trajetórias são também condicionalmente periódicas nas variáveis ângulos, cobrindo densamente uma superfície toroidal de ação constante. As variáveis ângulos definem as duas direções da superfície com frequências incomensuráveis.

As regiões de trajetórias caóticas ocupam uma porção finita da superfície de energia no espaço de fases. As interseções sucessivas de uma única trajetória caótica com a secção de Poincaré preenche uma área finita. Na literatura é usual referir-se à região caótica que se forma perto da separatriz como uma camada de ressonância. Para uma pequena perturbação, as camadas são finas e separadas por curvas invariantes e o movimento de uma camada a outra é proibido. As camadas se misturam quando a última curva invariante separando camadas que circundam cadeias de ilhas adjacentes é destruída. Isto leva ao aparecimento de estocasticidade global (ou intensa) no movimento. A separatriz não tem mais o comportamento suave encontrado no caso integrável, ao contrário é

extremamente complicado. Conforme aumenta-se a intensidade da perturbação, ressonâncias de ordem superior (no interior das ilhas) removem algumas superfícies KAM<sup>(8)</sup>, expandindo a região sobre a qual o movimento complicado da separatriz afeta as trajetórias vizinhas.

Pode-se melhorar a compreensão do movimento perturbado da separatriz a partir da hamiltoniana reduzida do sistema. As duas variedades entrantes  $H^+$  da separatriz se unem com as duas variedades emanantes  $H^-$  sobre o ponto de equilíbrio instável do movimento, [ também conhecido por singularidade hiperbólica do campo vetorial] ou ponto fixo hiperbólico do mapa correspondente. Um ponto  $x$  pertence a  $H^+$  se após repetidas transformações  $T^n x$  ele é levado à singularidade conforme  $n \rightarrow \infty$ , enquanto que ele fica sobre  $H^-$  se a transformação inversa  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n} x$  leva-o ao ponto singular. Uma vez que o período é infinito na separatriz, o movimento de  $x$  torna-se mais lento conforme o ponto fixo hiperbólico é aproximado. Considere agora a separatriz unindo pontos hiperbólicos adjacentes do mesmo conjunto; a curva  $H^+$  deixando um ponto hiperbólico geralmente intersecta a curva  $H^-$  que chega no ponto hiperbólico vizinho. Esta intersecção é chamada de ponto homoclínico uma vez que é o cruzamento de famílias de trajetórias assintóticas à mesma órbita periódica (ou ponto de equilíbrio) instável. Se uma intersecção existe, então demonstra-se que existem infinitas intersecções, todas também definidas como pontos homoclínicos. Se as intersecções forem entre separatrizes de órbitas vizinhas, elas são denominadas pontos heteroclínicos.

O movimento extremamente complicado resultante, pode ser visualizado de maneira mais clara da seguinte forma. A intersecção das variedades  $H^+$  e  $H^-$  no ponto homoclínico  $X$  implica num cruzamento  $X'$  e então novamente em  $X''$ , com  $X''$  mais próximo de  $X'$  do que  $X'$  de  $X$ . Uma vez que as iterações constituem uma aplicação conservativa, (as áreas envolvidas pelas intersecções são conservadas),  $H^+$  oscila mais rapidamente entre  $X'$  e  $X''$  do que entre  $X$  e  $X'$ . Sucessivos cruzamentos estão cada vez mais próximos e  $H^+$  oscila cada vez com maior amplitude, fig.(17). Por

outro lado  $H^-$  deve oscilar tão violentamente quanto  $H^+$  e intersectá-la um número infinito de vezes. Isto é ilustrado na fig.(18) a partir de um exemplo numérico de DRAGT e FINN<sup>(3e)</sup>.

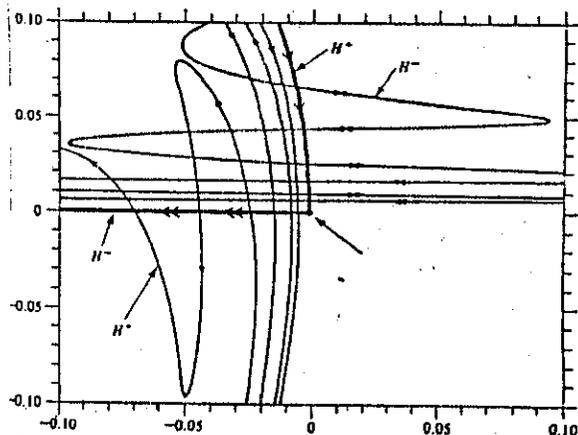
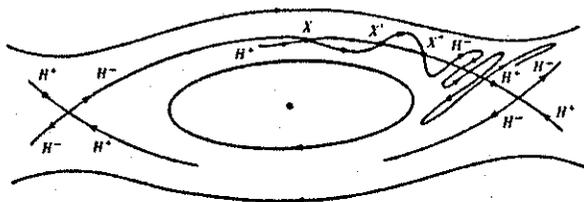


FIGURA 17

FIGURA 18

Mas os pontos homoclínicos por si só não contam a estória completa desta complexa região perto da separatriz. Uma vez que o número de rotação ao redor do ponto singular elíptico vai a infinito na separatriz, então na vizinhança desta, existe um número infinito de ressonâncias de segunda ordem correspondendo a altos números de rotação. Cada uma tem seu próprio conjunto de pontos singulares elípticos e hiperbólicos, com seus próprios violentos movimentos que intersectam repetidamente cada outra ressonância de segunda ordem e também a de primeira ordem em pontos heteroclínicos. Todas trajetórias preenchem densamente todo o espaço acessível a elas. Neste contexto uma possível razão para o comportamento caótico próximo às separatrizes é obtida do conceito de "overlap" de ressonâncias e conforme este ocorre para ordens mais elevadas de ressonâncias (ilhas dentro de ilhas) o movimento passa a ficar cada vez mais complexo. A condição para o "overlap" de ressonâncias vizinhas será discutida no capítulo 6.

A estabilidade do movimento linearizado obtido de uma expansão sobre as trajetórias periódicas é também relacionada à irregularidade. Soluções linearmente instáveis levam à divergência exponencial das trajetórias. A taxa de

divergência pode ser interpretada diretamente como uma medida da irregularidade do movimento. Quando todas ou quase todas soluções periódicas são linearmente instáveis em uma região do espaço de fases pode-se esperar que o movimento seja caótico nesta região. Soluções linearmente estáveis levam a movimento regular em torno da trajetória periódica. A perda de estabilidade global ocorrerá somente quando for destruído o último toro envolvente. Presume-se que este possua o número de rotação mais difícil de ser aproximado por racionais, isto é, a média dourada ( $\mu = (\sqrt{5} - 1)/2$ ). Essa conjectura foi verificada computacionalmente por Greene<sup>(39)</sup> para o mapa padrão. Esse regime de grandes perturbações não é acessível às técnicas KAM, daí o grande interesse na adaptação de técnicas de grupos de renormalização ao problema da sobrevivência de toros sujeitos a grandes perturbações<sup>(40,41)</sup>.

Um desenvolvimento recente diz respeito à sobrevivência de movimento "quase-periódico" mesmo depois de destruído um toro irracional. Num mapa sobre o plano, continua a existir uma órbita não caótica, cuja coordenada angular mantém o mesmo número de rotação. A partir de uma perturbação crítica  $\epsilon_c$  ela apenas deixa de preencher densamente uma curva fechada. Surgem buracos sobre a curva, numa estrutura de conjunto de Cantor. Essas estruturas são chamadas de **Kantors** por MACKAY, MEISS e PERCIVAL<sup>(42)</sup> que em seu artigo fazem o estudo "microscópico" da difusão das órbitas caóticas pelos buracos dos Kantors.

Após estes comentários preliminares, podemos voltar a atenção para a forma normal (29'). Ao colocarmos o termo dependente explicitamente em  $\theta_1$  percebemos que a constante de movimento  $J_1$  foi quebrada, mas não  $J_2$ . Portanto, para que o sistema autônomo passe a ser não integrável é preciso que introduzamos uma segunda perturbação que dependa explicitamente em  $\theta_2$ ,  $H_2 = f(\theta_2)$ ; de modo que  $\theta_2$  não seja mais uma variável cíclica e por conseguinte  $(H_2, J_2)_{(J, \theta_2)} \neq 0$ .

Em adição a esta condição procuramos um termo que tenha média nula frente a um período de  $\theta_2$  de modo que o sistema ressonante seja uma boa descrição do sistema caótico médio, isto é :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_2) d\theta_2 = 0 \quad (46)$$

Assim sendo, agregamos um único termo também de  $O(7)$  à forma normal dado por,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \Rightarrow (3, 1, 3, 0) + (3, 0, 3, 1) \quad (47)$$

ou

$$\left( a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot a_1^{*\beta_1} \cdot a_2^{*\beta_2} \right) \rightarrow \left( a_1^3 \cdot a_2 \cdot a_1^{*3} \right) + \left( a_1^3 \cdot a_1^{*3} \cdot a_2^* \right) \quad (48)$$

$$H_2(a, a^*) = \frac{\beta}{2} (a_1 \cdot a_1^*)^3 \cdot (a_2 + a_2^*) \quad (49)$$

e a hamiltoniana (26') torna-se

$$H(a, a^*) = \left( \frac{1}{6} - \lambda \right) (a_1 \cdot a_1^*) + (a_2 \cdot a_2^*) + c(a_1 \cdot a_1^*)^2 + \\ + \frac{\alpha}{2} [a_1^6 \cdot a_2^* + a_1^{*6} \cdot a_2] + \frac{\beta}{2} [(a_1 \cdot a_1^*)^3 \cdot (a_2 + a_2^*)] \quad (50)$$

Nas variáveis de ângulo-ação  $(\varphi, J)$  temos:

$$H_2(J, \varphi) = \beta I_1^3 \cdot I_2^{1/2} \cdot \cos \varphi_2 \quad (51)$$

$$H(J, \varphi) = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) I_1 + I_2 + c \cdot I_1^2 + \alpha I_1^3 I_2^{1/2} \cos(6\varphi_1 - \varphi_2) + \beta I_1^3 I_2^{1/2} \cos \varphi_2 \quad (52)$$

De acordo com a transformação canônica (28) descrevemos o sistema em  $(J, \vartheta)$  por

$$H_2(J, \vartheta) = \beta 6^3 J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} \cos \vartheta_2 \quad (53)$$

$$H(J, \vartheta) = J_2 - 6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2 + 6^3 J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} [\alpha \cos \vartheta_1 + \beta \cos \vartheta_2] \quad (54)$$

A quebra de integrabilidade  $(J_2, H_2(J, \vartheta)) \neq 0$  decorrente deste novo termo pode ser visualizada de uma maneira mais interessante.

A hamiltoniana  $H_0 = J_2 - 6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2$  define uma superfície de energia parabólica no plano  $(E_0, J_1)$ , sendo que a cada valor de  $J_2$  atribuímos uma parábola. Podemos visualizar o espaço  $(E_0, q_1, p_1)$ , girando em  $2\pi$  a figura ao lado e abaular todas curvas em  $J_1 = 0$ ; então a superfície de energia  $J_{2,0} = \text{constante}$ , assemelha-se a um chapéu mexicano, figura (20), cuja canaleta corresponde ao mínimo da parábola.

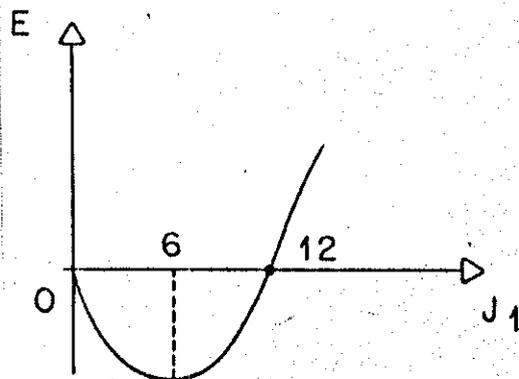


figura 19

A primeira perturbação  $H_1$  introduz morros, vales

e ilhas de ressonância próximas ao mínimo de energia de  $H_0$  — "ondulações na aba do chapéu". As órbitas que estiverem em algum toro ressonante com energia próxima à da separatriz, podem tunelar a outros toros ressonantes, porém dentro do mesmo chapéu. Cada chapéu tem um valor bem definido e constante de  $J_2$ , portanto associamos a cada chapéu um bloco da matriz hamiltoniana. Ao introduzirmos a perturbação  $H_2(\theta_2)$ , as órbitas podem agora variar seu valor de  $J_2$  ( $(J_2, H_2(\underline{J}, \underline{\theta})) \neq 0$ ), (apêndice C) isto é, elas podem pular a outros chapéus empilhados quando passarem próximas dos pontos homoclinicos. Quanticamente, isto se manifesta acoplando bloquinhos.

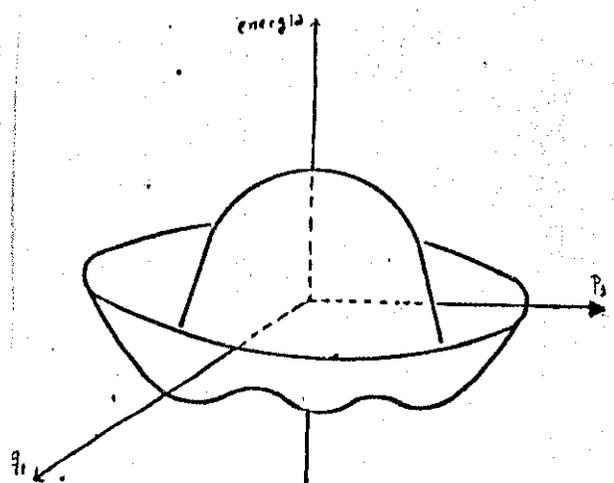


figura 20

Estamos interessados em estudar, apenas uma faixa de energias — energias ressonantes — e para isso, será preciso considerar vários blocos na matriz hamiltoniana, pois estados distantes, em algum bloco, manterão alguma correlação não nula com aqueles em observação. Na figura ao lado podemos visualizar este acoplamento de longo alcance.

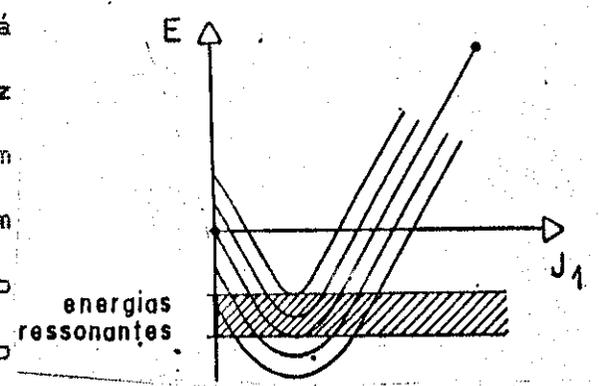


figura 21

A quantização da (49) leva ao seguinte operador.

$$\hat{H}_2 = \left( \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{2} \hbar \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{4} \hbar^2 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{1}{8} \hbar^2 \right) \cdot \frac{3}{2} \hbar \cdot (\hat{a}_2^+ + \hat{a}_2) \quad (55)$$

e o hamiltoniano agora é

$$\hat{H} = \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{\hbar}{2}) + c \left[ (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1)^2 + \hbar (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1) + \frac{\hbar^2}{4} \right] + \frac{\alpha}{2} (\hat{a}_1^{+6} \hat{a}_2 + \hat{a}_1^6 \hat{a}_2^+) +$$

$$+ \frac{\beta}{2} (\hat{a}_2^+ \hat{a}_2) \cdot \left( \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{2} \hbar \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{4} \hbar^2 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{1}{8} \hbar^3 \right)$$

(56)

Na base de autoestados  $|k\rangle$  de  $\hat{J}_{2,0}$ , os elementos de matriz da matriz hamiltoniana são:

$$\langle k' | \hat{H} | k \rangle = \left\{ \hbar \left[ m + \frac{7}{12} + \frac{n_0}{6} - \lambda \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right) \right] + c \hbar^2 \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \cdot \delta_{n',n} \cdot \delta_{m',m} +$$

$$+ \left( \frac{\alpha}{2} \cdot \hbar^{7/2} \right) \cdot \left\{ (6n + n_0 + 1) (6n + n_0 + 2) (6n + n_0 + 3) (6n + n_0 + 4) \right.$$

$$\cdot (6n + n_0 + 5) (6n + n_0 + 6) (m - n) \left. \right\}^{1/2} \cdot \delta_{n',n-1} \cdot \delta_{m',m} + c.c.$$

$$+ \left( \frac{\beta}{2} \cdot \hbar^{7/2} \right) \cdot \left\{ \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right)^3 \cdot (m - n + 1) \right\}^{1/2} \cdot \delta_{n',n} \cdot \delta_{m',m+1} + c.c.$$

(57)

A perturbação  $\hat{H}_2$  acopla blocos primeiros vizinhos ( $\delta_{m',m+1}$ ) diagonalmente ( $\delta_{n',n}$ ). Isto pode ser percebido clássicamente no fato de aparecer  $\cos(1 \cdot \theta_2)$ . Esquemáticamente a matriz hamiltoniana pode ser vista por:

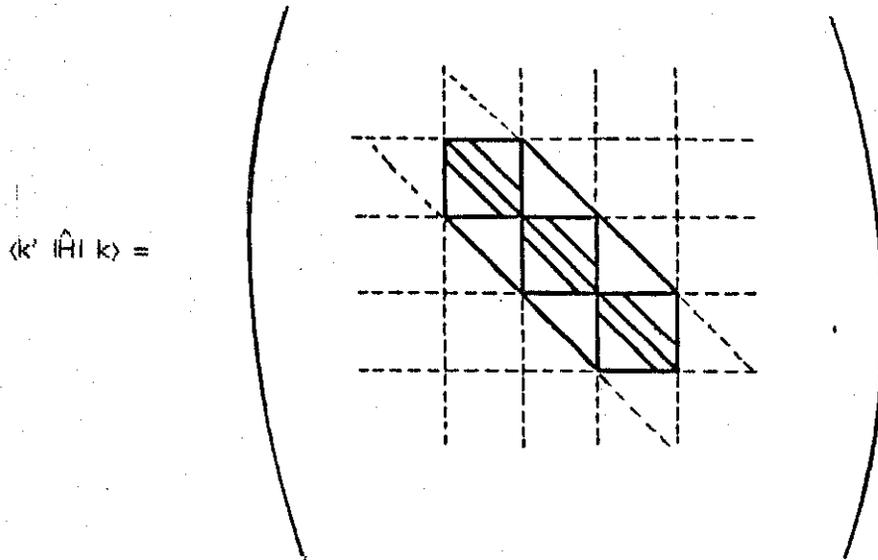


figura 22

A seguir mostramos o espaço de fases para o sistema perturbado.

UMA RESSONANCIA

ALFA = 1.5\*(6\*\*(-8))

BETA = 4.0\*(6\*\*(-9))

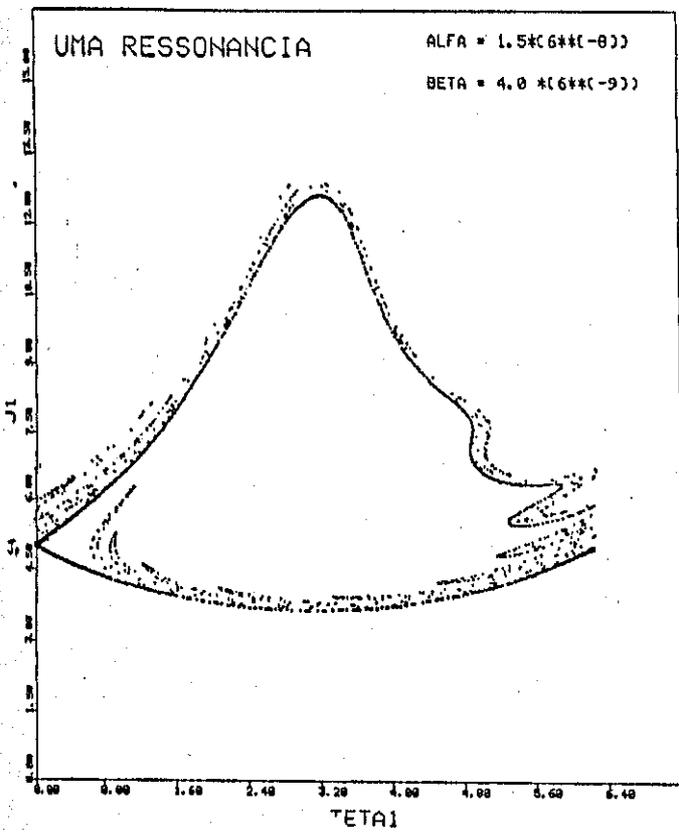
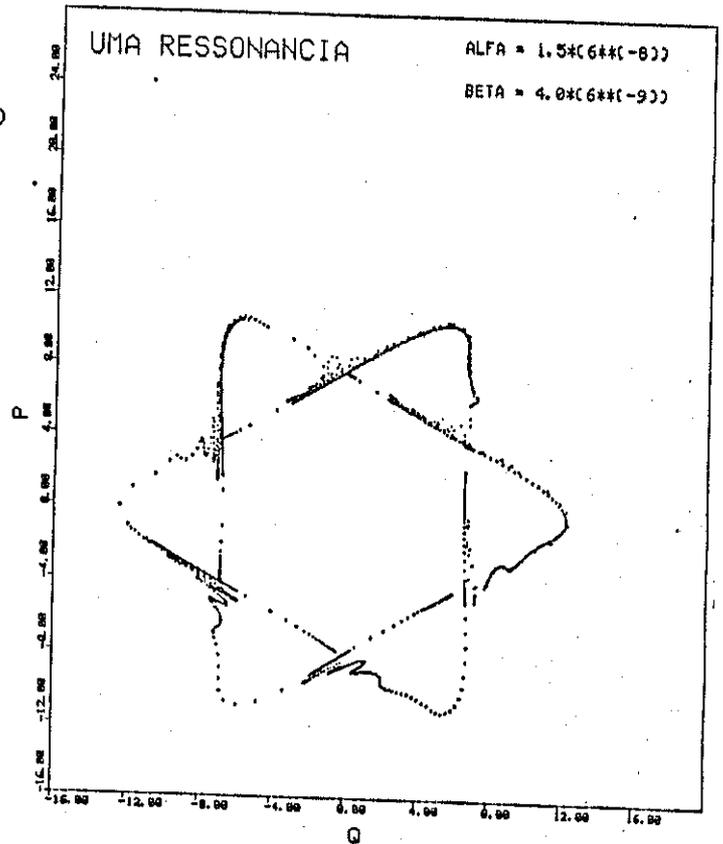


FIGURA 23 :

O 'splitting' da separatriz é a assinatura de caos clássico. Foram dadas 100 condições iniciais na região linear próxima a  $J_R$ .

FIGURA 24 :

Espaço de fases ( $p_1, q_1$ ) para o caso da figura acima.



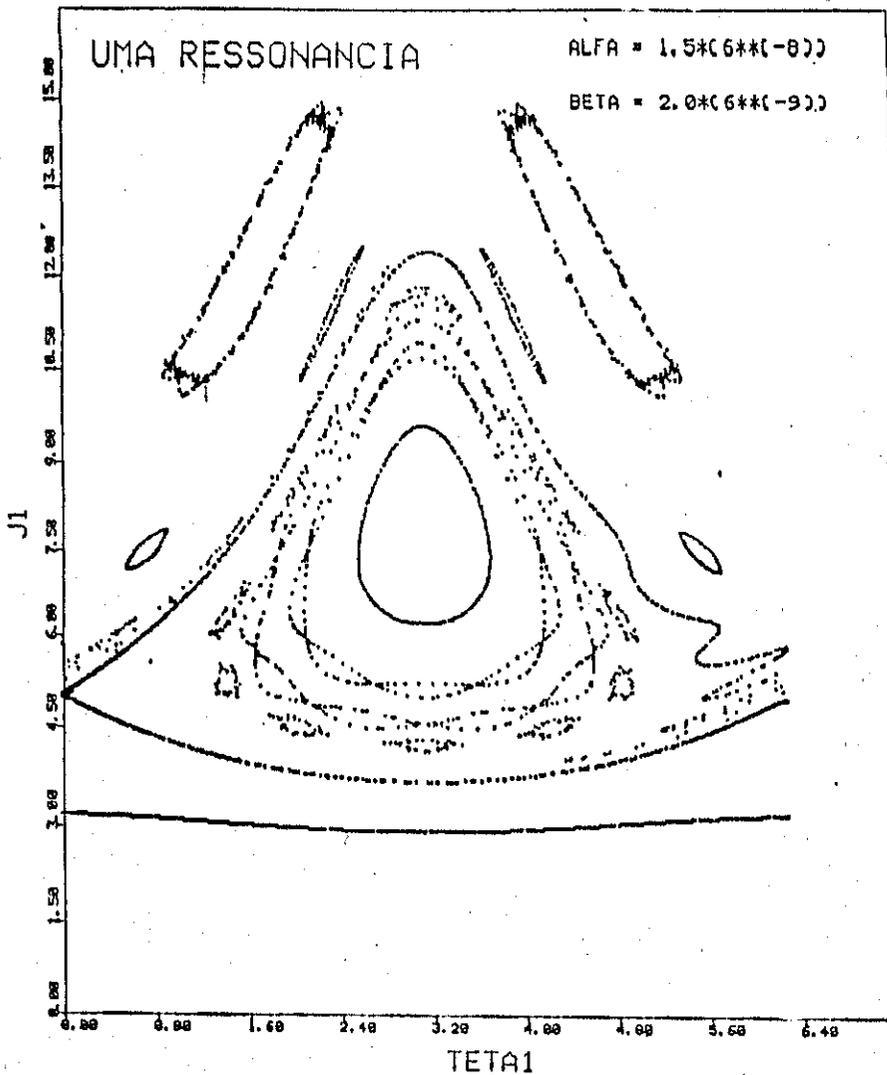


FIGURA 25 :

Uma coletânea de condições iniciais foi escolhida para este gráfico. Três cadeias de ilhas secundárias aparecem no interior da ilha principal. O 'splitting' da separatriz também é exibido. Uma curva de libração, uma de rotação e outras ilhas são mostradas.

A matriz hamiltoniana para um  $n_0$  (bloco) fixo é truncada em um número finito de bloquinhos. Os autovalores de cada um destes bloquinhos individualmente, são conhecidos numericamente com a precisão que se desejar; quando os consideramos juntos mantendo  $\beta=0$ , os autovalores obtidos são dados pela superposição daqueles individuais.

Ao ligarmos a perturbação, o espectro não se estabiliza tão facilmente como no caso de  $\beta=0$ , ele é bastante sensível à quantidade de bloquinhos. Na medida em que colocamos outros bloquinhos na matriz melhora-se a estabilidade dos autovalores de energias mais baixas, no entanto acarreta em um maior tempo de execução do processo de diagonalização.

Uma possibilidade para solucionar este problema é transformar a estrutura da matriz de  $n$  blocos tridiagonais ( $k \times k$ ) acoplados diagonalmente em uma matriz com  $k$  blocos ( $n \times n$ ) também tridiagonais. Como os bloquinhos originais não tem a mesma dimensão — blocos adjacentes diferem em uma unidade suas dimensões — deve-se levar em conta esta diferença de dimensões na nova estrutura da matriz.

A vantagem da matriz ser real, simétrica com apenas três diagonais pode ser usada para descrevê-la em forma de banda.

Os espectros a seguir foram obtidos com (2301) funções de base correspondendo a 13 bloquinhos na matriz hamiltoniana.

E(1)	E(2)	E(3)	E(4)	E(5)	E(6)	E(7)	E(8)	E(9)	E(10)
982527	3 006394	3 029814	3 052700	3 075277	3 097359	3 118958	3 140093	3 160750	3 180740
982530	3 006397	3 029816	3 052700	3 075300	3 097361	3 118961	3 140096	3 160752	3 180752
982533	3 006404	3 029823	3 052771	3 075310	3 097370	3 118970	3 140105	3 160772	3 180961
982545	3 006413	3 029833	3 052800	3 075320	3 097395	3 118981	3 140116	3 160786	3 180974
982557	3 006425	3 029845	3 052816	3 075334	3 097403	3 118995	3 140131	3 160803	3 180990
982564	3 006432	3 029853	3 052824	3 075341	3 097412	3 119004	3 140137	3 160814	3 181000
982572	3 006440	3 029861	3 052831	3 075352	3 097428	3 119013	3 140150	3 160826	3 181011
982584	3 006453	3 029875	3 052847	3 075367	3 097440	3 119030	3 140167	3 160846	3 181031
982594	3 006463	3 029885	3 052857	3 075377	3 097446	3 119043	3 140180	3 160861	3 181048
982610	3 006480	3 029902	3 052875	3 075390	3 097461	3 119064	3 140203	3 160887	3 181074

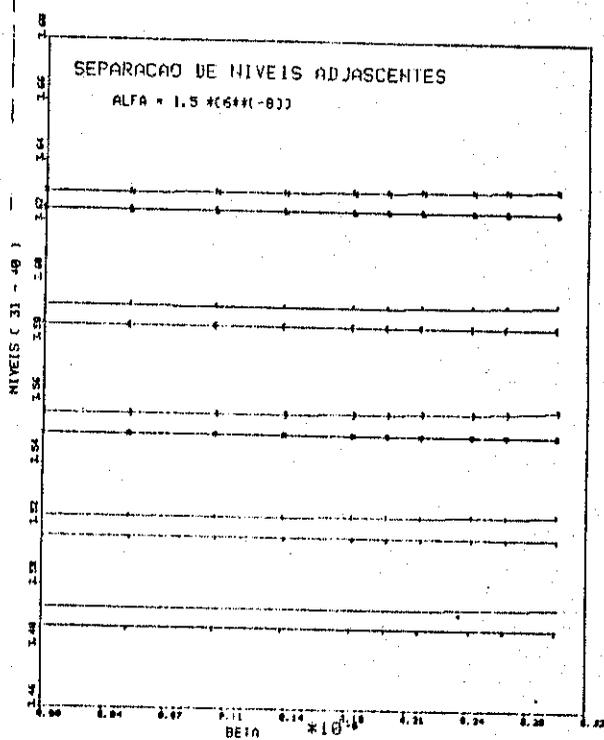
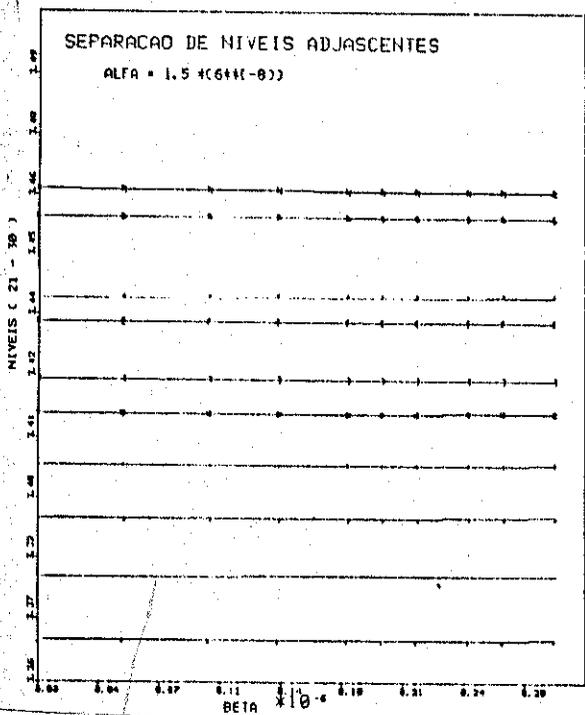
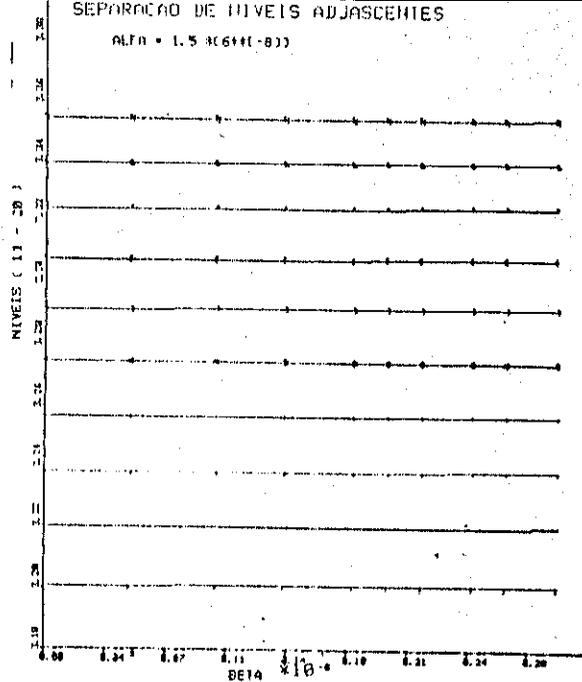
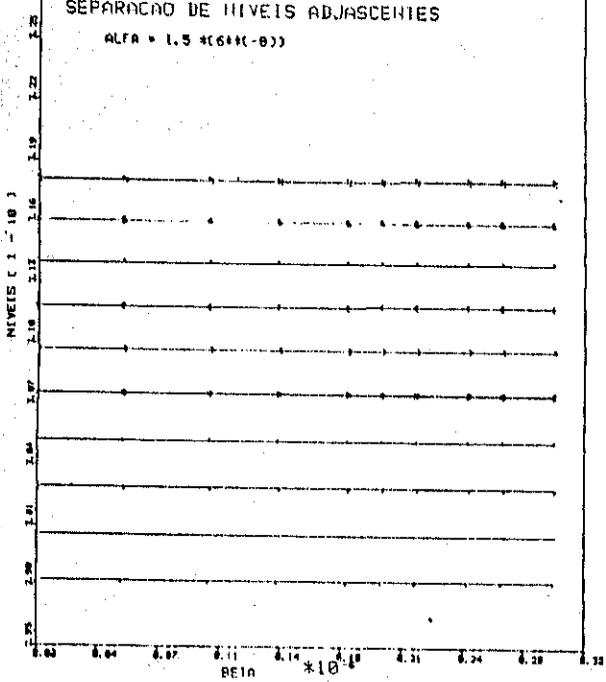
E(11)	E(12)	E(13)	E(14)	E(15)	E(16)	E(17)	E(18)	E(19)	E(20)
200657	3 219876	3 238597	3 256010	3 274002	3 291661	3 308268	3 324304	3 339742	3 354547
200660	3 219879	3 238600	3 256013	3 274005	3 291664	3 308273	3 324305	3 339746	3 354551
200669	3 219890	3 238609	3 256022	3 274009	3 291675	3 308285	3 324310	3 339750	3 354558
200681	3 219905	3 238621	3 256035	3 274023	3 291688	3 308302	3 324317	3 339773	3 354566
200698	3 219924	3 238637	3 256051	3 274037	3 291707	3 308324	3 324326	3 339794	3 354577
200707	3 219935	3 238647	3 256061	3 274046	3 291718	3 308338	3 324332	3 339806	3 354583
200718	3 219948	3 238658	3 256073	3 274056	3 291731	3 308354	3 324341	3 339822	3 354594
200737	3 219970	3 238678	3 256094	3 274074	3 291755	3 308383	3 324360	3 339852	3 354616
200793	3 219987	3 238695	3 256112	3 274093	3 291777	3 308407	3 324380	3 339870	3 354638
200782	3 220023	3 238729	3 256148	3 274630	3 291821	3 308459	3 324427	3 339934	3 354689

E(21)	E(22)	E(23)	E(24)	E(25)	E(26)	E(27)	E(28)	E(29)	E(30)
3 368685	3 382085	3 394690	3 406179	3 417154	3 424166	3 436531	3 441629	3 457412	3 465024
3 368689	3 382087	3 394698	3 406180	3 417155	3 424166	3 436531	3 441638	3 457411	3 465027
3 368703	3 382095	3 394724	3 406194	3 417160	3 424166	3 436531	3 441664	3 457411	3 465028
3 368720	3 382104	3 394757	3 406200	3 417165	3 424166	3 436530	3 441698	3 457410	3 465026
3 368743	3 382117	3 394806	3 406220	3 417173	3 424166	3 436529	3 441744	3 457409	3 465033
3 368758	3 382125	3 394837	3 406240	3 417179	3 424167	3 436529	3 441774	3 457409	3 464990
3 368775	3 382136	3 394873	3 406256	3 417187	3 424170	3 436528	3 441811	3 457408	3 464955
3 368809	3 382161	3 394942	3 406287	3 417205	3 424180	3 436528	3 441895	3 457407	3 464933
3 368839	3 382189	3 394999	3 406315	3 417224	3 424211	3 436528	3 441934	3 457406	3 464923
3 368901	3 382246	3 395105	3 406376	3 417269	3 424260	3 436528	3 442100	3 457405	3 465072

E(31)	E(32)	E(33)	E(34)	E(35)	E(36)	E(37)	E(38)	E(39)	E(40)
3 486412	3 492736	3 516666	3 523177	3 549814	3 556344	3 585656	3 592061	3 624070	3 630217
3 486412	3 492745	3 516666	3 523194	3 549814	3 556377	3 585656	3 592026	3 624070	3 630304
3 486411	3 492772	3 516666	3 523246	3 549814	3 556478	3 585656	3 591942	3 624069	3 630490
3 486411	3 492807	3 516666	3 523310	3 549813	3 556606	3 585656	3 591890	3 624069	3 630665
3 486410	3 492858	3 516665	3 523406	3 549813	3 556783	3 585655	3 591903	3 624069	3 630850
3 486410	3 492893	3 516665	3 523468	3 549813	3 556898	3 585655	3 591960	3 624067	3 630966
3 486409	3 492941	3 516665	3 523547	3 549813	3 557037	3 585655	3 592072	3 624069	3 631089
3 486409	3 493050	3 516664	3 523706	3 549812	3 557311	3 585655	3 592293	3 624067	3 631315
3 486408	3 493162	3 516664	3 523879	3 549812	3 557552	3 585655	3 592410	3 624067	3 631562
3 486407	3 493416	3 516663	3 524227	3 549812	3 558021	3 585654	3 592811	3 624067	3 631797

TABELA 2 : São mostrados os 40 primeiros autovalores do sistema perturbado, para 10 valores de  $\beta$ . Estas intensidades da perturbação não foram suficientes para provocar oscilações nos níveis de energia.

Beta = ( 0. ; 0.5 ; 1. ; 1.4 ; 1.8 ; 2. ; 2.2 ; 2.5 ; 2.7 ; 3. ) \* ( 6\*\*(-9) )



FIGURAS 26, 27 : Evolução, com o parâmetro  $\beta$ , dos 40 primeiros níveis de energia.

## CAPÍTULO 5 - TEORIAS DE PERTURBAÇÕES

O estudo em mecânica quântica de sistemas físicos conservativos é baseado na equação de autovalores do operador hamiltoniano. Contudo, somente poucos problemas podem ser resolvidos analiticamente em sua forma exata; em geral a equação de autovalores é bastante complicada. Por isso torna-se necessário desenvolver métodos aproximativos para abordar analiticamente os sistemas físicos genéricos. Tais métodos, usualmente denominados por teorias de perturbações, possibilitam obter soluções aproximadas da equação de autoestados em certos casos.

Na tentativa de prever o espectro de energias do sistema caótico descrito no capítulo 4, vamos desenvolver algumas teorias estacionárias de perturbações. Consideraremos os autoestados  $|k\rangle$  do oscilador harmônico, equação (43), como sendo as funções de base do problema não perturbado.

### I - RAYLEIGH - SCHRÖDINGER (NÃO DEGENERADA)

Descrevemos o operador hamiltoniano na soma,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W} \quad (58)$$

onde  $\hat{H}_0$  o operador diagonal,  $\hat{W} = \alpha \hat{H}_1 + \beta \hat{H}_2$  são apresentados em (56) e tomamos a expansão usual em segunda ordem das energias:

$$E_k = E_k^0 + \langle k | \hat{W} | k \rangle + \sum_{k' \neq k} \frac{|\langle k' | \hat{W} | k \rangle|^2}{E_k^0 - E_{k'}^0} + \dots \quad (59)$$

lembrando que os estados  $|k\rangle$  envolvem dois números quânticos,  $n$  e  $m$ . O operador  $\hat{H}_1$  acopla estados de mesmo  $m$  (internos em um bloquinho) e diferentes  $n$ 's

(estados primeiros vizinhos), enquanto que  $\hat{H}_2$  acopla estados com diferentes  $m$ 's (bloquinhos adjacentes) e mesmo  $n$  (diagonalmente).

Escrevemos a expressão (59) para  $\hat{W}$ :

$$E_k = E_k^0 + \langle k | \hat{H}_1 | k \rangle + \langle k | \hat{H}_2 | k \rangle + \\ + \sum_{k' \neq k} \frac{| \langle k' | \hat{H}_1 | k \rangle |^2 + | \langle k' | \hat{H}_2 | k \rangle |^2 + 2 \operatorname{Re} \langle k' | \hat{H}_1 | k \rangle^* \langle k' | \hat{H}_2 | k \rangle}{E_k^0 - E_{k'}^0} + \dots \quad (60)$$

Como  $\hat{H}_1$  não dá contribuição diagonal e  $\hat{H}_2$  não age no interior dos bloquinhos, seus valores esperados são nulos, e também o é o último termo de (60) visto que, para em certo  $\langle k' |$ , quando  $\hat{H}_1$  contribui  $\hat{H}_2$  se anula e vice-versa.

Então,

$$E_k = \left\{ E_k^0 + \sum_{k' \neq k} \frac{| \langle k' | \hat{H}_1 | k \rangle |^2}{E_k^0 - E_{k'}^0} + \dots \right\} + \sum_{k' \neq k} \frac{| \langle k' | \hat{H}_2 | k \rangle |^2}{E_k^0 - E_{k'}^0} + \dots \quad (61)$$

Podemos interpretar o termo entre chaves, como se todas as correções devidas a  $\hat{H}_1$  estivessem incluídas e identificá-lo como sendo a  $k$ -ésima energia ressonante ( $E_k^R$ ), daí, as energias do sistema completo são dadas pelas energias 'não perturbadas'  $E_k^R$ , acrescidas de correções decorrentes dos acoplamentos entre estados, de fato, não perturbados impostos pela ação de  $\hat{H}_2$ ; isto é, pelos acoplamentos entre bloquinhos:

$$E_k = E_k^R + \sum_{k' \neq k} \frac{| \langle k' | \hat{H}_2 | k \rangle |^2}{E_k^0 - E_{k'}^0} + \dots \quad (62)$$

Designaremos os estados  $|k\rangle = |6n - n_0, m - n\rangle$  por simplesmente:

$$|k\rangle = |N, M\rangle \quad (63)$$

onde o número quântico  $N = 6n - n_0$  é interno aos bloquinhos e  $M = m - n$ , o número quântico que identifica cada bloquinho, e assim escrevemos explicitamente as energias,

$$E_{N,M} = E_{N,M}^R + \frac{|\langle N, M-1 | \hat{H}_2 | N, M \rangle|^2}{E_{N,M}^0 - E_{N, M-1}^0} + \frac{|\langle N, M+1 | \hat{H}_2 | N, M \rangle|^2}{E_{N,M}^0 - E_{N, M+1}^0} + \dots \quad (64)$$

Em (64) não ocorre pequenos denominadores, pois todas energias diagonais são diferentes. Para cada  $N$  fixo, a diferença de energia entre bloquinhos vizinhos é uma unidade de  $\hbar$ .

Devemos notar que esta teoria, de segunda ordem, de Rayleigh-Schrödinger é uma teoria de três bloquinhos apenas, pois ela não considera acoplamentos indiretos. Sendo assim, não se espera que ela forneça bons resultados para o espectro de energias do sistema caótico no regime de perturbações medianas ou intensas, visto que numericamente é preciso considerar vários bloquinhos para estabilizar os primeiros autovalores mesmo quando  $\beta$  não é muito grande.

## II - BRILLOUIN - WIGNER

Esta teoria não é tão facilmente encontrada quanto a anterior, mas é um método já estabelecido (vide por exemplo ZIMAM J.M.<sup>(43)</sup>).

A série perturbativa, em segunda ordem, de BRILLOUIN-WIGNER é dada por,

$$E_k = E_k^0 + \langle k | \hat{W} | k \rangle + \sum_{k' \neq k} \frac{|\langle k' | \hat{W} | k \rangle|^2}{E_k^0 - E_{k'}^0} + \dots \quad (65)$$

A diferença com relação ao caso de Rayleigh-Schrödinger é que no denominador da expansão aparece a energia perturbada '  $E_k$  ' ao invés da energia não perturbada '  $E_k^0$  '. Esta é uma equação implícita a ser resolvida para  $E_k$ .

Fazendo desenvolvimento, análogo ao caso anterior, para  $\hat{W} = \alpha \hat{H}_1 + \beta \hat{H}_2$  obtemos:

$$E_k = E_k^R + \sum_{k' \neq k} \frac{|\langle k' | \hat{H}_2 | k \rangle|^2}{E_k - E_{k'}} + \dots \quad (66)$$

ou, explicitamente

$$E_{N,M} = E_{N,M}^R + \frac{|\langle N, M-1 | \hat{H}_2 | N, M \rangle|^2}{E_{N,M} - E_{N,M-1}^0} + \frac{|\langle N, M+1 | \hat{H}_2 | N, M \rangle|^2}{E_{N,M} - E_{N,M+1}^0} + \dots \quad (67)$$

Como antes, esta teoria também é uma teoria de três bloquinhos e por isso também não deve fornecer boa aproximação para o espectro desejado. Uma opção que surge desta expansão é escrever (67) em termos de um polinômio de grau 3, da seguinte forma,

$$E_{N,M}^3 + a_2 E_{N,M}^2 + a_1 E_{N,M} + a_0 = 0 \quad (68)$$

onde

$$a_2 = - \left\{ E_{N,M}^R + E_{N,M-1}^0 + E_{N,M+1}^0 \right\} ,$$

$$a_1 = \left\{ E_{N,M}^R \cdot E_{N,M-1}^0 + E_{N,M-1}^R E_{N,M+1}^0 + E_{N,M-1}^0 E_{N,M+1}^0 - H_2^- - H_2^+ \right\} , \quad (69)$$

$$H_2^- = |\langle N, M-1 | \hat{H}_2 | N, M \rangle|^2 ; \quad H_2^+ = |\langle N, M+1 | \hat{H}_2 | N, M \rangle|^2 ,$$

$$a_0 = - \left\{ E_{N,M}^R \cdot E_{N,M-1}^0 \cdot E_{N,M+1}^0 - H_2^- \cdot E_{N,M+1}^0 - H_2^+ \cdot E_{N,M-1}^0 \right\}$$

A expansão de segunda ordem de RAYLEIGH-SCHRÖDINGER (59) é um caso particular da expansão de BRILLOUIN-WIGNER (65) basta trocar  $E_k$  por  $E_k^0$ , e como vimos, ambas são teorias de três bloquinhos sendo que uma cúbica generaliza as aproximações perturbativas. Neste sentido, devemos esperar que o espectro numérico, resultante da diagonalização de uma matriz com  $j$  blocos, seja escrito analiticamente por um polinômio de grau  $j$ . Na tabela abaixo comparamos os resultados das teorias de 2ª ordem apresentadas com os autovalores numéricos e observamos que as energias ressonantes são as que melhor aproximam o espectro perturbado.

EXATO ( BETA = 0 )		EXATO ( BETA = 2 * (6 + i(-9)) )	
ER(1)	= 2.98252745	E(1)	= 2.98256395
ER(2)	= 3.00637425	E(2)	= 3.00640370
ER(3)	= 3.02981356	E(3)	= 3.02982341
ER(4)	= 3.05278277	E(4)	= 3.05282353
ER(5)	= 3.07529895	E(5)	= 3.07534243

RAYLEIGH - SCHRÖDINGER		BRILLOUIN - WIGNER	
RS(1)	= 2.98250499	BW(1)	= 2.97701035
RS(2)	= 3.00637523	BW(2)	= 3.00077722
RS(3)	= 3.02978716	BW(3)	= 3.02062361
RS(4)	= 3.05276676	BW(4)	= 3.04513332
RS(5)	= 3.07526804	BW(5)	= 3.05814597

TABELA 3

Um último comentário sobre a expansão (65) é que se  $\hat{W} = \alpha \hat{H}_1$  apenas, obtemos uma representação perturbativa para o sistema ressonante a despeito das quase-degenerescências entre as energias não perturbadas  $E_k^0$  e  $E_{k'}^0$ , que causam os pequenos denominadores na expansão de RAYLEIGH-SCHRÖDINGER. A teoria passa a ser agora de três níveis e a cúbica correspondente é,

$$E_N^3 - \{E_N^0 + E_{N-1}^0 + E_{N+1}^0\} \cdot E_N^2 + \{E_N^0 \cdot E_{N-1}^0 + E_N^0 \cdot E_{N+1}^0 + E_{N-1}^0 \cdot E_{N+1}^0 - H_1^- - H_1^+\} \cdot E_N - \{E_N^0 \cdot E_{N-1}^0 \cdot E_{N+1}^0 - H_1^- \cdot E_{N+1}^0 - H_1^+ \cdot E_{N-1}^0\} = 0 \quad (70)$$

para cada bloquinho M estipulado, onde

$$H_1^- = |\langle N-1, M | \hat{H}_1 | N, M \rangle|^2 \quad (71)$$

$$H_1^+ = |\langle N+1, M | \hat{H}_1 | N, M \rangle|^2$$

Novamente, se a perturbação  $\hat{H}_1$  for intensa a ponto de tornar importante os acoplamentos indiretos, a expressão (70) não deve fornecer bons resultados para as energias ressonantes  $E_N$ 's.

### III - EXPANSÃO EM DETERMINANTES<sup>(44)</sup>

Temos a equação de autovalores

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2) |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (72)$$

onde  $\hat{H}_0$  é diagonal na representação de osciladores;  $(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)$  é dividida em blocos com mais uma paralela à diagonal e  $(\hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2)$  ganha mais uma paralela à diagonal entre blocos.

Reescrevemos (72) por,

$$[(E - \hat{H}_0) - (\hat{H}_1 + \hat{H}_2)] |\psi\rangle = 0 \quad (73)$$

ou

$$\left\{ 1 + \frac{(\hat{H}_1 + \hat{H}_2)}{(\hat{H}_0 - E)} \right\} |\psi\rangle = 0 \quad (74)$$

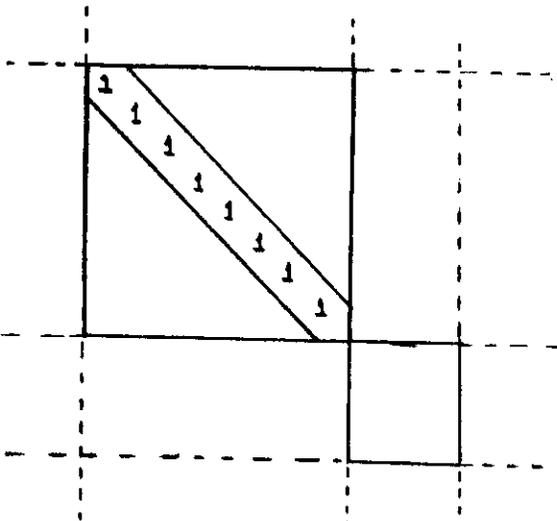
Expandimos e projetamos (74) na base  $|k\rangle$  dos osciladores,

$$\sum_{k'} \left\{ 1 \cdot \delta_{k,k'} + \frac{\langle k | (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) | k' \rangle}{E_k - E} \right\} \langle k' | \psi \rangle = 0 \quad (75)$$

A condição para que (75) seja satisfeita é que:

$$\Delta = \det \left\{ 1 \cdot \delta_{k,k'} + \frac{\langle k | (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) | k' \rangle}{E_k - E} \right\} = 0 \quad (76)$$

Do fato que os elementos de matriz de  $\hat{H}_1$  e  $\hat{H}_2$  são pequenos e de (76), vemos que podemos omitir as linhas e colunas tais que  $|E_k^0 - E| \gg |\langle k | (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) | k' \rangle|$  para uma faixa de energias. Essas linhas e colunas serão em vários blocos. Podemos rearrumar tais linhas e colunas num único bloco cujo determinante será então aproximadamente 1, o que justifica um truncamento da matriz hamiltoniana.



Podemos obter uma expansão do determinante que sobrou usando a expansão segundo a diagonal<sup>(45)</sup>: Subtraímos a matriz identidade de nossa matriz e tomamos  $j$  elementos na diagonal da matriz e as linhas e colunas que se

intersectam nesses elementos diagonais. Essas linhas e colunas formam um reticulado com  $(j \times j)$  elementos de matriz. Definimos  $\Delta_j$  como o determinante da matriz formada por esses elementos com zeros na diagonal e  $S_j$  como a soma de todos os determinantes  $\Delta_j$  que podemos formar dessa maneira. Então,

$$\Delta = 1 + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + \det \left\{ \frac{\langle k | \hat{H}_1 + \hat{H}_2 | k' \rangle}{E_k^0 - E} \right\} \quad (77)$$

Nota-se que  $S_1$  é de primeira ordem nos  $H$ 's,  $S_2$  é de segunda ordem e assim por diante. No nosso caso  $S_1$  é zero; já em  $S_2$  temos termos de dois tipos, um envolvendo  $\hat{H}_1$  e outro  $\hat{H}_2$ :

$${}^1(\Delta_2) = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\langle k | \hat{H}_1 | k' \rangle}{E_k^0 - E} \\ \frac{\langle k' | \hat{H}_1 | k \rangle}{E_{k'}^0 - E} & 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$${}^2(\Delta_2) = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\langle k | \hat{H}_2 | k' \rangle}{E_k^0 - E} \\ \frac{\langle k' | \hat{H}_2 | k \rangle}{E_{k'}^0 - E} & 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Em  $S_3$  também teremos termos  ${}^1(\Delta_3)$  que só contém a perturbação  $\hat{H}_1$  e assim por diante. Podemos então juntar todos determinantes que envolvem apenas  $\hat{H}_1$

e separá-los dos demais que envolvem só  $\hat{H}_2$  e misturas de  $\hat{H}_1$  com  $\hat{H}_2$ .

Reescrevemos (77) :

$$\Delta = \Delta^1 + \sum \det \begin{bmatrix} 0 & (V_2)_{kk'} \\ (V_2)_{k'k} & 0 \end{bmatrix} + \sum \det \begin{bmatrix} 0 & (V_1)_{kk'} & (V_2)_{kk'} \\ (V_1)_{k'k} & 0 & (V_1)_{kk'} \\ (V_2)_{k'k} & (V_1)_{k'k} & 0 \end{bmatrix} + \dots \quad (80)$$

onde  $\Delta = \Delta^1$  quando  $\hat{H}_2 = 0$  e

$$(V_1)_{kk'} = \frac{\langle k | \hat{H}_1 | k' \rangle}{E_k^0 - E} \quad (81)$$

Vamos nos concentrar no primeiro termo de (80): perturbação de segunda ordem em  $\hat{H}_2$ , considerando as correções de ordem superior muito pequenas.

Pegamos a equação (76) com  $\hat{H}_2 = 0$  e a identificamos com  $\Delta^1$ , multiplicamos cada linha por  $(E_k^0 - E)$ , isto é, o determinante por  $\prod_k (E_k^0 - E)$  e chegamos a,

$$\Delta^1 = \det \left\{ (E_k^0 - E) \cdot \delta_{kk'} + (\hat{H}_1)_{kk'} \right\} \quad (82)$$

O termo em  $\hat{H}_2$  que estamos mantendo, (79), quando multiplicado por  $\prod_k (E_k^0 - E)$  resulta em,

$$\sum_{k,k'} \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq k'}} (E_j^0 - E) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & (\hat{H}_2)_{kk'} \\ (\hat{H}_2)_{k'k} & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Portanto a equação (76) é aproximada a,

$$\det \left\{ (E_k^0 - E) \cdot \delta_{kk'} + (\hat{H}_1)_{kk'} \right\} + \sum_{k,k'} \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq k'}} (E_j^0 - E) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & (\hat{H}_2)_{kk'} \\ (\hat{H}_2)_{k'k} & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (84)$$

Nota-se que o determinante dos blocos têm a seguinte forma,

$$\det \left\{ (E_k^0 - E) \cdot \delta_{kk'} + (\hat{H}_1)_{kk'} \right\} = \prod_k \lambda_k (E) \quad (85)$$

onde os  $\lambda_j (E)$  são os autovalores da matriz- ou seja, solução da equação,

$$\det \left\{ (E_k^0 - E - \lambda_k) \cdot \delta_{kk'} + (\hat{H}_1)_{kk'} \right\} = 0 \quad (86)$$

Sejam

$$\Lambda_k = \lambda_k (0) \quad (87)$$

os autovalores da matriz cujo determinante é (86) com  $E = 0$ ; isto é, os autovalores dos bloquinhos, que já conhecemos por energias ressonantes, então temos,

$$\lambda_k (E) = \Lambda_k - E \quad (88)$$

A equação (84) para os autovalores se reduz então a,

$$\prod_k (\Lambda_k - E) + \sum_{k,k'} \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq k'}} (E_j^0 - E) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & (\hat{H}_2)_{kk'} \\ (\hat{H}_2)_{k'k} & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (89)$$

Agora toda a dependência em  $E$  é explícita. Essa propriedade se mantém mesmo que adicionemos mais termos da expansão (80). Deve-se salientar que esta expressão (89) corresponde a um polinômio de ordem  $k$  e deve ser resolvida numericamente a partir de uma escolha inicial para  $E$ , para cada energia procurada e sua aplicabilidade é restrita à ordem  $k$  do polinômio.

## CAPÍTULO 6 - "OVERLAP" DE RESSONÂNCIAS INTEGRÁVEIS E CAOS

Para sistemas quase integráveis genéricos com dois graus de liberdade existem regiões caóticas circundando as separatrizes, associadas com ressonâncias. Estas regiões persistem para qualquer intensidade  $\varepsilon$  não nula de perturbação, embora suas áreas tendam a zero conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por isso não é abrupta a "transição ao caos" e assim torna-se necessário definir algum critério para avaliar o grau de irregularidade do sistema em questão.

Obviamente, uma determinação quantitativa dos parâmetros para os quais esta transição ocorre produz informações importantes sobre o comportamento do sistema.

Na ausência de um critério analítico que forneça condições necessárias e suficientes para estabelecer a transição, utilizam-se cálculos numéricos e argumentos plausíveis que levam a estimativas da transição ao caos.

Um procedimento para estabelecer um movimento fortemente caótico, iniciado por *CHIRIKOV*<sup>(46)</sup>, e posteriormente refinado por ele mesmo (*CHIRIKOV*<sup>(9)</sup>), é atualmente conhecido como o critério de "overlap". Ele postula que a última superfície *KAM*, entre duas ressonâncias consecutivas, é destruída quando a soma das meia-larguras das duas separatrizes formada pelas ressonâncias, mas calculadas independentemente uma de cada outra, é igual à distância entre as ressonâncias. As distâncias são medidas em termos da ação ou frequência, dependendo de qual for mais conveniente. Este critério é razoavelmente intuitivo, pois sabemos que regiões perto da separatriz são de fato caóticas (em um sistema não integrável) tal que a aproximação e o contacto de duas regiões caóticas não deixa sobreviver uma superfície invariante entre elas.

O critério de 'overlap' não é rigorosamente nem necessário nem suficiente. Podemos imaginar a última superfície *KAM* se rompendo antes que o 'overlap' das ilhas ocorra, devido à interação de termos que agem no lado de fora

das separatrizes. Alternativamente a solução do problema completo pode modificar sensivelmente as larguras das ilhas de modo que elas não entrem realmente em 'overlap' quando os cálculos feitos em cada ressonância isolada predizem que sim. Porém, resultados numéricos indicam que o critério de 'overlap' fornece uma boa condição para movimentos irregulares. Ele pode, contudo, ser sofisticado por considerar tanto as larguras das regiões caóticas perto das separatrizes primárias quanto as das mais importantes ressonâncias secundárias que existem entre as principais<sup>(9)</sup>, por fazer uma expansão na vizinhança da separatriz<sup>(47,48)</sup> ao invés da vizinhança de um ponto fixo. A técnica de expansão envolve aplicações sucessivas de teoria de perturbação secular<sup>(48)</sup>. Mesmo sem esta modificação, o critério em sua forma mais simples, de 'overlap' de ressonâncias primárias ainda serve como uma primeira estimativa da transição e tem sido usado em uma grande variedade de problemas por CHIRIKOV<sup>(9)</sup>, WALKER and FORD<sup>(50)</sup>, ROSEMBLUTH<sup>(51)</sup>, dentre outros.

CHIRIKOV aborda o problema estudando ressonâncias não-lineares em um sistema não integrável típico de um grau de liberdade dependendo do tempo, governado pela hamiltoniana,

$$H(I, \varphi, t) = H_0(I) + \epsilon V(I, \varphi, t) \quad (90)$$

onde a perturbação externa  $V(I, \varphi, t)$  é descrita aqui via uma dependência explícita da hamiltoniana no tempo. Presume-se que a perturbação seja periódica no tempo com um período  $T$ , frequência  $\Omega = 2\pi/T$  e periodicamente dependente na fase

$$\tau = \Omega t + \tau_0 \quad (91)$$

com  $\tau_0$  sendo a fase inicial. Expande-se a perturbação em uma série dupla de Fourier:

$$H(I, \varphi, \tau) = H_0(I) + \epsilon \sum_{m,n} V_{m,n}(I) \cdot e^{i(m\varphi+n\tau)} \quad (92)$$

O efeito de uma componente perturbativa de Fourier é tão mais intenso quanto mais suave for a variação de sua fase,

$$\psi_{m,n} = m\varphi + n\tau \quad (93)$$

No limite de fase constante, tem-se uma ressonância,

$$m \cdot \dot{\varphi} + n \cdot \dot{\tau} = m\omega_0(I) + n\Omega = 0 \quad ; \quad \omega_0(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I} \quad (94)$$

Esta relação determina um conjunto de valores ressonantes da frequência  $\omega_0$  e respectivamente da energia ou ação  $I$ . Valores ressonantes  $\omega_{m,n}$  formam geralmente um conjunto denso. Contudo inicia-se o problema no limite oposto, quando a soma em (92) consiste de um único termo (ou dois complexos conjugados precisamente). Isto é, considera-se as propriedades de uma única ressonância isolada inicialmente, e escreve-se a hamiltoniana (92) por:

$$H(I, \varphi, \tau) = H_0(I) + \epsilon V_{m,n}(I) \cdot \cos(m\varphi - n\tau) \quad (95)$$

onde considera-se  $V_{m,n} = V_{n,m}^*$  uma função real. O sinal de  $n$  enfatiza a natureza ressonante do termo mantido.

Introduz-se a fase

$$\psi = m\varphi - n\tau \quad (96)$$

e escolhe-se uma função geratriz da forma,

$$F(I, \varphi, \tau) = - (I - I_r) \cdot \left( \frac{\psi + n \cdot \tau}{m} \right) \quad (97)$$

onde  $I_r$  é uma constante, de modo a eliminar a dependência explícita do tempo. A nova hamiltoniana é:

$$H(P, \psi) = H(I, \varphi, \tau) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (98)$$

com

$$P = - \frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{(I - I_r)}{m} \quad (99)$$

e,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - n.P.\Omega \quad (100)$$

Expande-se a hamiltoniana  $H_0(I)$  até ordem de  $P^2$ :

$$H_0(I) \approx H_0(I_r) + \left( \frac{\partial H_0}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial P} \right) I = I_r \cdot P + \left[ \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \left( \frac{\partial I}{\partial P} \right)^2 + \frac{\partial H_0}{\partial I} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial P^2} \right] \Bigg|_{I=I_r} \cdot \frac{P^2}{2} + \dots \quad (101)$$

$$H_0(I) \approx \omega_0(I_r) \cdot m \cdot P + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega_0(I)}{\partial I} \Bigg|_{I=I_r} \cdot m^2 \cdot P^2 + \dots \quad (102)$$

onde negligenciamos  $H_0(I_r)$ , usamos (99) e (94).

Assim,

$$H(P, \psi) \approx (m \cdot \omega_0(I_r) - n \Omega) \cdot P + \frac{P^2}{2M} + \mathcal{E} \cdot V_{m,n}(I_r) \cdot \cos \psi \quad (103)$$

tomando apenas o primeiro termo na expansão de  $V_{m,n}(I)$ . A constante  $I_r$  é escolhida

de modo a definir o ponto de equilíbrio hiperbólico do pêndulo, isto é,

$$m \cdot \omega_0(l_r) - n \cdot \Omega = 0 \quad (104)$$

define uma ressonância. Daí chega-se à hamiltoniana de um pêndulo de um grau de liberdade, portanto integrável,

$$H(P, \psi) \approx \frac{P^2}{2M} + \mathcal{B} \cdot V_{m,n}(l_r) \cdot \cos\psi \quad (105)$$

cuja massa é determinada pela não linearidade das oscilações não perturbadas,

$$M^{-1} = m^2 \cdot \left. \frac{\partial \omega_0(l)}{\partial l} \right|_{l = l_r} \quad (106)$$

A frequência de pequenas oscilações do pêndulo é:

$$\omega_0 = \sqrt{\mathcal{B} \cdot V_{m,n}(l_r)/M} \quad (107)$$

e cada ramo da separatriz tem um momentum, dado por

$$P_{spx} = \pm 2M \cdot \omega_0 \cdot \cos(\psi/2) \quad (108)$$

De acordo com (99), na ressonância,

$$m \cdot P_r = (\Delta l)_r \quad (109)$$

e chegamos à meia-largura (em  $l$ ) da separatriz (ressonância)

$$(\Delta l)_r = 2m \sqrt{\mathcal{B} \cdot M \cdot V_{m,n}(l_r)} \quad (110)$$

onde a quantidade  $P_r$  é a amplitude de oscilação de  $P$  e o seu valor máximo ( $|\cos(\psi/2)| = 1$ ) define a meia-largura da separatriz.

Em termos da frequência, a meia-largura da separatriz é:

$$(\Delta\omega)_r = \left. \frac{\partial\omega_0}{\partial I} \right|_{I=I_r} \quad (\Delta I)_r = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{B \cdot V_{m,n}(I_r)}{M}} \quad (111)$$

A descrição universal de uma ressonância na aproximação do pêndulo é restrita à condição de que os termos negligenciados na expansão da hamiltoniana sejam pequenos ( $\frac{(\Delta I)_r}{I_r} \ll 1$ ) e que as frequências de oscilações de fase sejam pequenas o suficiente para podermos negligenciar os termos não-ressonantes na hamiltoniana, como sendo termos que oscilam rapidamente. E, uma vez que ocorre uma ressonância,  $m \cdot \omega_0(I_r) = n \cdot \Omega$ , para o harmônico  $(m, n)$ , também ocorrem ressonâncias para os harmônicos  $(l m, l n)$ ,  $(l$  inteiro  $\neq 0)$ ; assim a aproximação do pêndulo é também restrita pela condição  $V_{l m, l n} \ll V_{m, n}$  com  $l > 1$ .

A interação de ressonâncias é entendida como a influência simultânea de várias ressonâncias, isto é, vários harmônicos da perturbação da hamiltoniana (92), onde cada harmônico determina sua 'própria' ressonância em um domínio particular do espaço de fases. Nesse contexto procura-se conhecer como é o movimento frente a influência simultânea de muitas ressonâncias. Se o sistema está próximo de uma ressonância particular os outros termos são considerados não ressonantes e podem ser eliminados por uma seqüência de infinitas transformações canônicas, de variáveis. No limite, obtém-se portanto um sistema integrável cujo movimento é regular.

Contudo, isto é apenas um truque matemático formal, pois estabilidade real depende de esta seqüência de infinitas transformações de variáveis ser convergente, ou em outras palavras, se existe o limite no qual o movimento é formalmente estável.

Com base no teorema de Poincaré<sup>(52)</sup>, que diz que um sistema hamiltoniano genérico não tem outra integral analítica de movimento além da energia, entendia-se até recentemente, que um oscilador genérico não linear era instável. Todavia com a teoria KAM<sup>(53,54,55)</sup> demonstra-se a existência de Toros invariantes até um certo valor crítico, da perturbação, o que determina o limiar de movimento estável.

Por outro lado procura-se estudar mecanismos que sejam responsáveis pela destruição de toros frente a uma perturbação suficientemente forte. Um mecanismo geral para determinar a instabilidade do movimento é o 'overlap' de ressonâncias não lineares. O caso mais simples de interação de ressonâncias é a interação de somente duas ressonâncias. Suponha que o campo perturbativo envolva duas frequências  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  com mesma amplitude. Quando a meia largura das separatrizes  $(\Delta\omega)_r$  for da ordem de  $1/2 \cdot (\Delta\Omega)$ , onde  $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2|$ , as separatrizes irão se tocar e iniciará o processo de 'overlap' das ilhas e nesta região do espaço de fases o movimento será caótico.

No capítulo 4 estudamos um sistema com uma única cadeia de ilhas e pudemos observar que a presença da segunda perturbação gera uma grande quantidade de cadeias de ilhas secundárias que entram em 'overlap' quando variamos um parâmetro ( $\alpha$  no caso).

Procuramos no entanto, um tratamento análogo ao que demos a uma ressonância isolada, ou seja, preparamos uma classe especial de sistemas que exibem, várias cadeias de ressonâncias integráveis, e colocamo-las em interação. Apesar de simples esta abordagem é inteiramente original. A partir da condição de ressonância A-16 ( $\dot{\theta}_{1,0} = 0$ ), notamos que ocorrerão ressonâncias nas proximidades dos extremos da função hamiltoniana, pois

$$\dot{\theta}_{1,0} = \frac{\partial H_0}{\partial J_1} = 0 \quad (A-16)$$

determina os máximos e mínimos de  $H_0$ . Se a forma normal de BIRKHOFF ( $H_0$ ) for uma

função polinomial de  $J_1$  de ordem  $n$ , cujos zeros não são degenerados, do tipo,

$$H_0(J) = \sum_n a_n J_1^n \quad (112)$$

com  $a_0 = J_{2,0}$  e os demais  $a_n$ 's com os valores e sinais convenientes, obtemos  $(n - 1)$  condições onde  $(\partial H_0 / \partial J_1 = 0)$ . Ao ligarmos uma perturbação integrável que independe do ângulo  $\theta_2$ , e que seja periódica no ângulo  $\theta_1$  tal qual no sistema anterior, a cada extremo de  $H_0$  corresponderá uma cadeia de separatrizes no espaço  $(p_1, q_1)$  ou uma separatriz em  $(J_1, \theta_1)$ . E, ao variarmos o parâmetro que regula a intensidade da perturbação podemos aumentar a amplitude de oscilação das ilhas a ponto delas se tocarem e entrarem em 'overlap'. Como o sistema é estritamente e globalmente integrável este tipo de 'overlap' não criará camadas estocásticas na vizinhança das separatrizes como descrito por *CHIRIKOV*, mas gerará uma nova configuração topológica foliada de toros invariantes. As órbitas caóticas podem aparecer quando ligarmos a segunda perturbação periódica, agora em  $\theta_2$ .

O caso mais simples para estudar 'overlap' de ressonâncias integráveis é o de duas cadeias de ilhas, isto é, adicionamos um termo cúbico na hamiltoniana (55)  $H_0$  e ajustamos os sinais dos termos para evitar tunelamento para o contínuo,

$$H_0(J) = J_2 + 6\lambda J_1 - 6^2 c J_1^2 + 6^3 a J_1^3 \quad (113)$$

de tal modo que a superfície de energia é

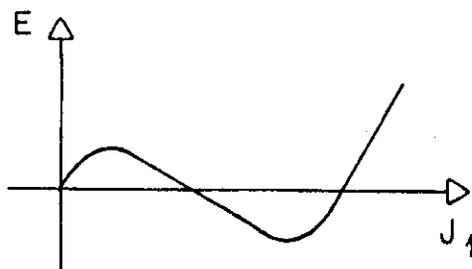


FIGURA 29

ou em termos de  $(p_1, q_1)$

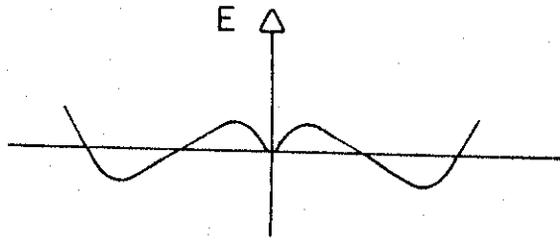


FIGURA 30

Deve-se salientar que este novo termo adiciona apenas uma correção diagonal à matriz hamiltoniana. Os morros e vales que abrigam as ilhas ocorrerão nos extremos de  $H_0(J)$  quando a primeira perturbação for não nula. As perturbações que são ligadas, são de ordem mais baixa possível na forma normal, isto é, mantemos a ressonância (1:6), tal que  $r + s = 7$  ainda, pois os termos correspondentes continuarão sendo de ordem maior do que aqueles de BIRKHOFF e portanto preservam a estrutura perturbativa na forma normal. Assim, temos

$$H = J_2 + 6\lambda J_1 - 6^2 c J_1^2 + 6^3 a J_1^3 + \alpha \cdot 6^3 J_1^3 \cdot (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot \cos\theta_1 \quad (114)$$

como sendo a atual forma normal ressonante, onde  $(J_2, H)_{(J, \theta)} = 0$ ,  $[\hat{J}_2, \hat{H}] = 0$  e associamos à cada bloquinho da matriz hamiltoniana um "chapéu mexicano amassado" do tipo da figura (30) no qual o movimento está restrito. No apêndice D apresento as equações de movimento e sua linearização na vizinhança dos pontos de equilíbrio hiperbólicos. Nas figuras que seguem podemos visualizar o sistema com as separatrizes distantes e gradualmente se aproximando até ocorrer a 1ª transição correspondendo ao 'overlap' das ilhas; e aumentando ainda mais o valor de  $\alpha$  chegamos à 2ª transição correspondendo ao desaparecimento de uma separatriz.

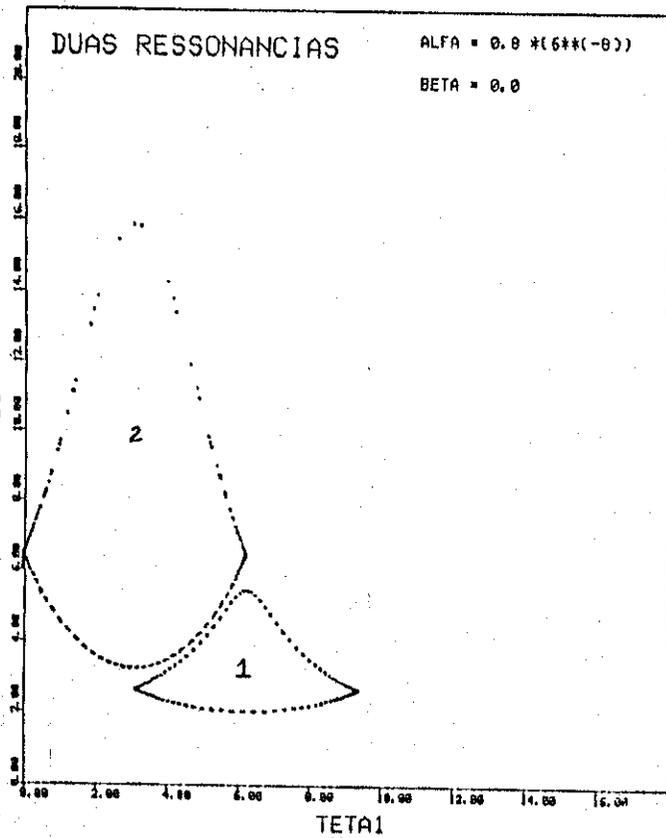


FIGURA 31 :

Duas separatrizes, correspondendo à situação em que as cadeias de ilhas estão separadas e não há interação entre elas. A separatriz inferior tem energia maior do que a separatriz superior, esta por sua vez é mais não-linear do que a pequena.

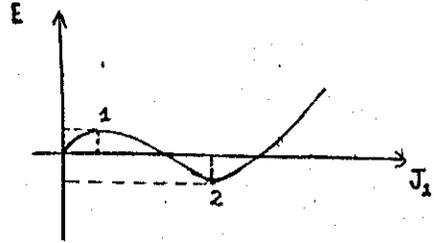
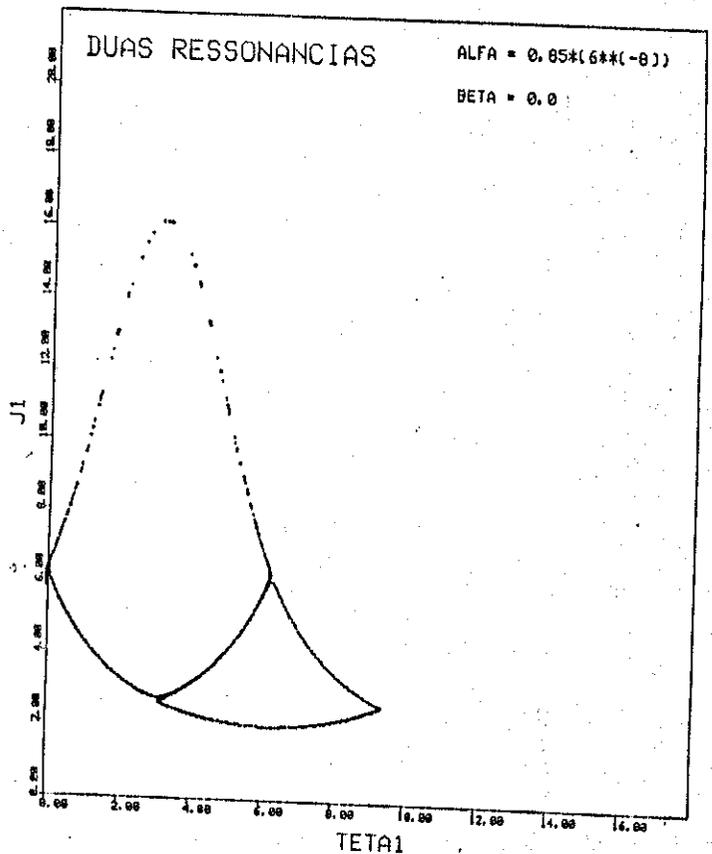


FIGURA 32 :

Este valor do parâmetro ( $\alpha$ ) inicia o contato entre as separatrizes e leva à situação em que um ponto hiperbólico de uma separatriz quase faz parte de um ramo da outra separatriz. Uma órbita sobre a separatriz pode explorar uma maior região do espaço de fases sem variar sua energia (nem seu  $J_{2,0}$ ). Em princípio é possível colocar em contato inúmeras separatrizes a ponto de uma órbita poder aumentar significativamente sua não linearidade sem alterar seu  $J_{2,0}$  nem sua energia, caso seja conveniente.

Neste regime duas raízes de  $H_0(J)$  degeneram-se.



DUAS RESSONANCIAS

ALFA = 0.86\*(6\*\*(-8))

BETA = 0.0

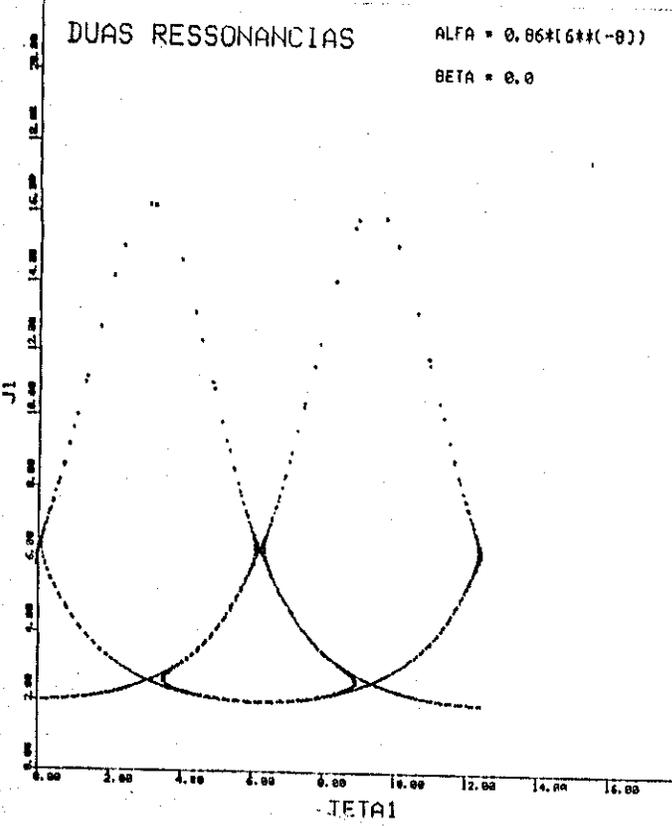


FIGURA 33 :

Ocorreu a 1ª transição: A trajetória que emana do ponto hiperbólico da separatriz superior adentra na região da outra separatriz, faz um laço e retorna a um dos ramos de sua curva inicial; enquanto isso a trajetória que emana do ponto hiperbólico da outra separatriz adentra na região da 1ª faz um laço e segue por um dos ramos iniciais. Neste regime duas raízes de  $H_0(J)$  tornaram-se imaginárias.

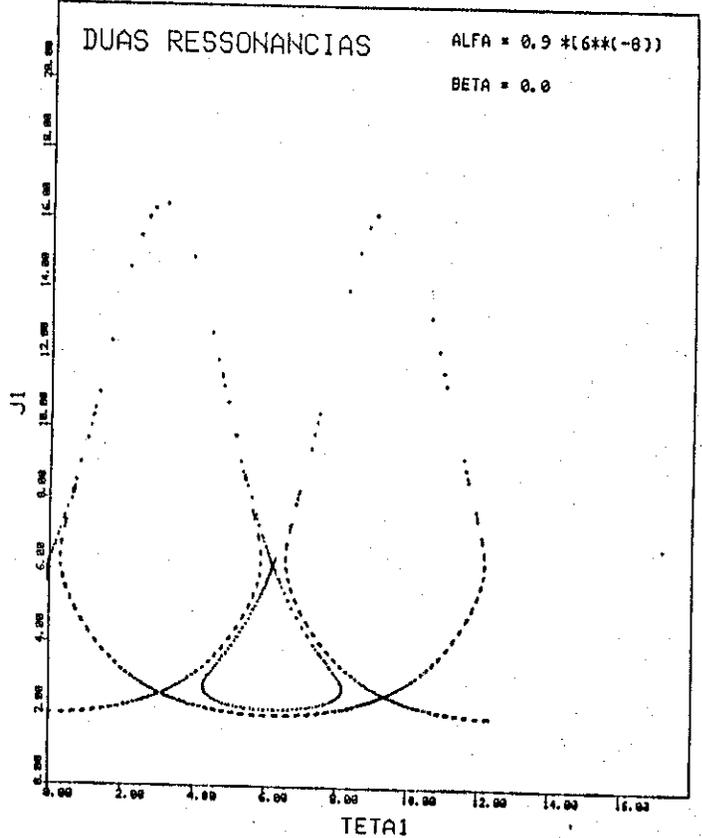
FIGURA 34 :

A descrição da figura anterior é melhor visualizada aqui.

DUAS RESSONANCIAS

ALFA = 0.9\*(6\*\*(-8))

BETA = 0.0



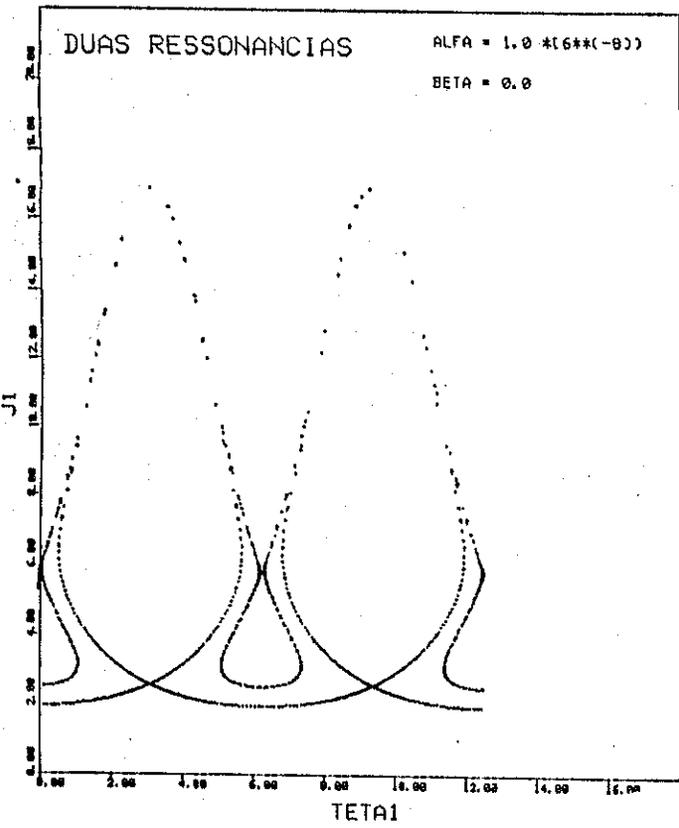
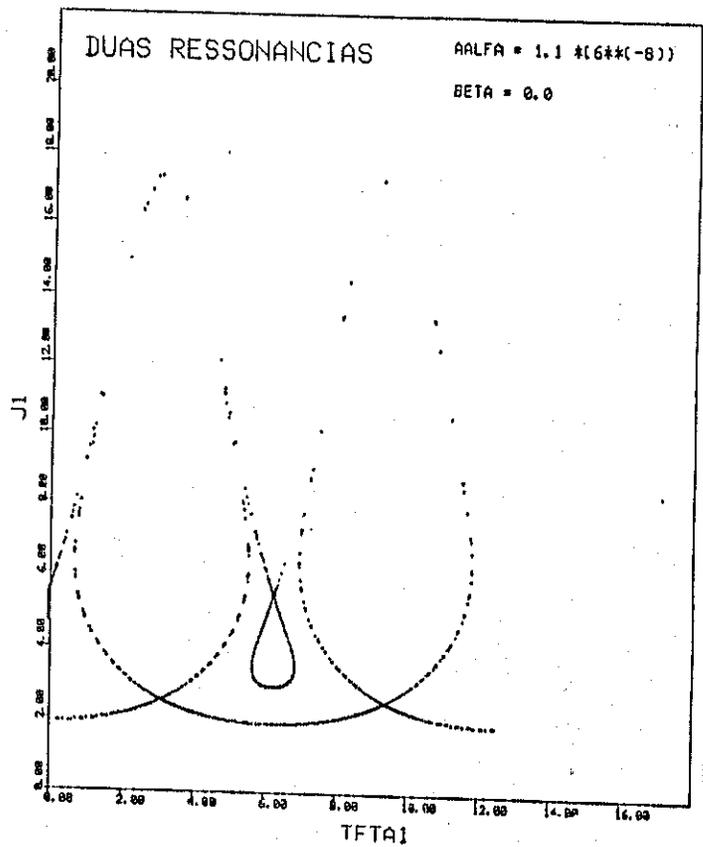


FIGURA 35 :

Com o aumento do valor de  $\alpha$ , o laço inferior diminui sua área.

FIGURA 36 :



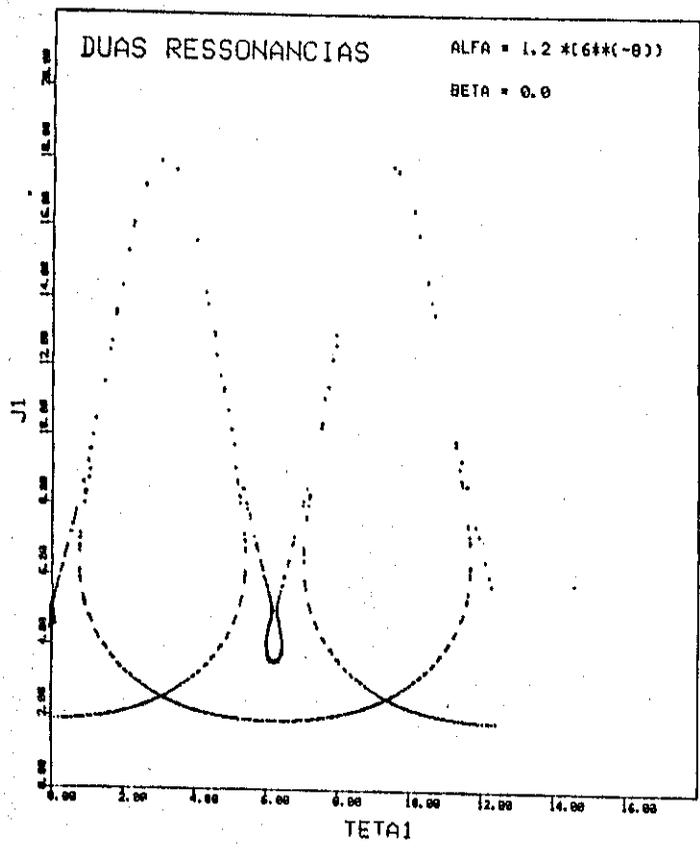
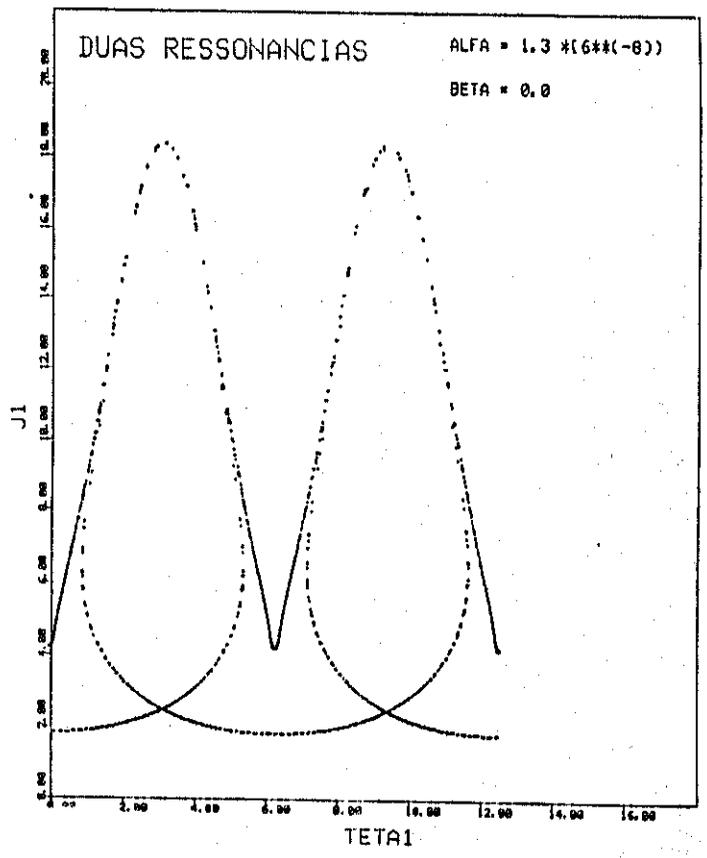


FIGURA 37 :  
É perceptível que o laço separatriz vai desaparecer.

FIGURA 38 :  
Nesta situação ocorre a 2ª transição: o laço separatriz inferior desaparece e dois pontos de equilíbrios diferentes coalescem, determinando uma bifurcação. Ai o ponto de equilíbrio hiperbólico torna-se imaginário e tem-se o espaço de fases com uma única ressonância, onde o ramo que sobrou da outra separatriz passa a ser uma rotação.



O termo  $(6^3 J_1^3)$ , pode ser descrito por  $(I_1^3)$  cujo correspondente operador é dado por

$$\hat{I}_1^3 = \left( \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{2} \hbar \cdot \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{4} \hbar^2 \cdot \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{1}{8} \hbar^3 \right) \quad (115)$$

Na base  $|k\rangle = |6n + n_0, m - n\rangle$ , os elementos de matriz do operador hamiltoniano são obtidos por atuação direta de cada termo e dados por,

$$\begin{aligned} \langle k' | \hat{H} | k \rangle = & \left\{ \hbar \left( m + \frac{7}{12} + \frac{n_0}{6} \right) + \lambda \hbar \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right) - c \hbar^2 \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right)^2 + \right. \\ & + a \hbar^3 \left( 6n + n_0 + \frac{1}{2} \right)^3 \left. \right\} \cdot \delta_{n', n} \cdot \delta_{m', m} + \\ & + \left( \frac{a}{2} \hbar^{7/2} \right) \left\{ (6n + n_0 + 1) (6n + n_0 + 2) (6n + n_0 + 3) (6n + n_0 + 4) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (6n + n_0 + 5) (6n + n_0 + 6) (m - n) \right\}^{1/2} \cdot \delta_{n', n-1} \cdot \delta_{m', m} + h.c \end{aligned} \quad (116)$$

para cada bloco (autovalor de  $\hat{J}_2$ ) da matriz hamiltoniana.

A evolução dos correspondentes níveis de energias quânticas com a variação de  $\alpha$  é mostrada nos gráficos a seguir. Apresento a dinâmica dos 70 primeiros autovalores apenas, e é perceptível que as oscilações dos níveis aumentaram devido à presença do novo termo diagonal. Como este termo não implica em novos acoplamentos entre diferentes estados, as modificações introduzidas, no comportamento dos níveis de energia, são de natureza clássica, decorrente da presença de duas ressonâncias integráveis. São mostrados também, os espectros de energias para diferentes valores de  $\alpha$  e as respectivas separações de níveis vizinhos.

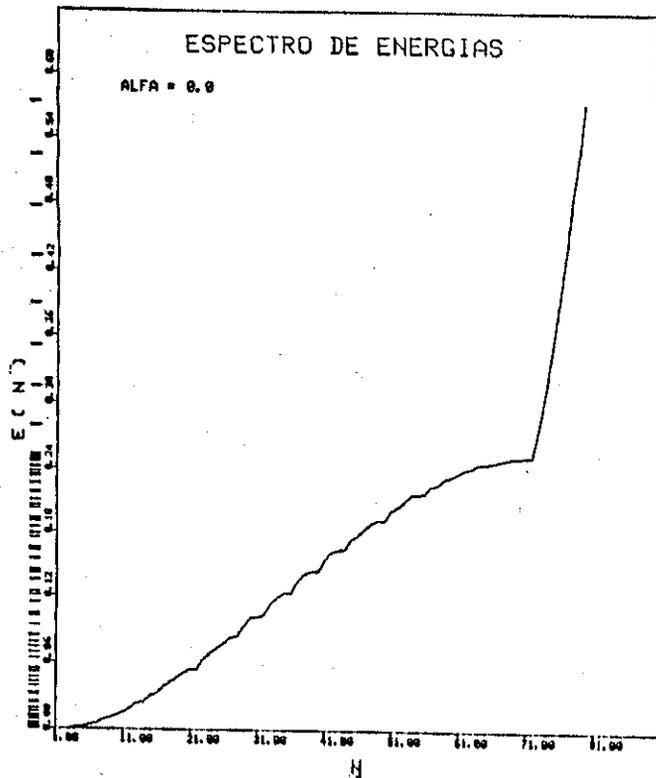
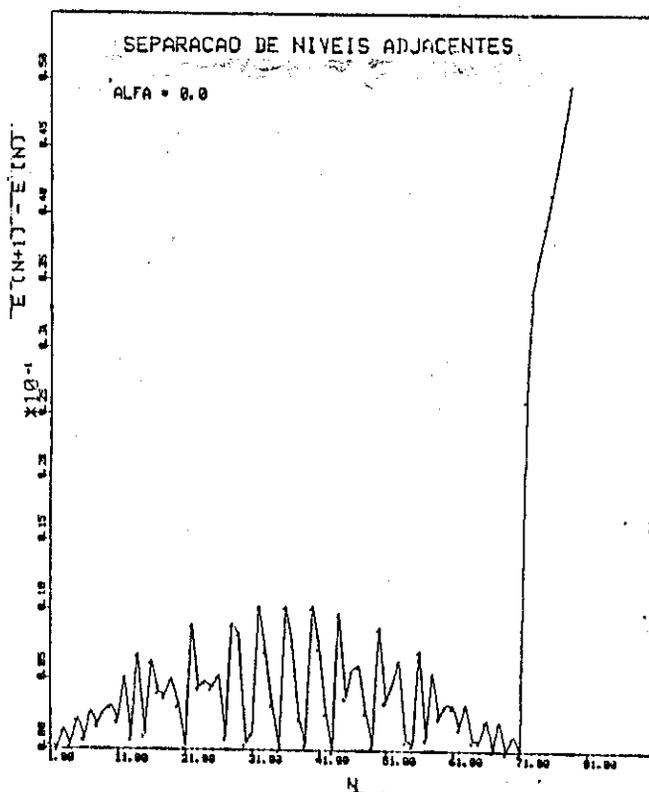


FIGURA 39 :

Pelo fato de  $H_0$  ser uma cúbica, podem ocorrer tripletos de (quase) degenerescências.

FIGURA 40 :

Para energias acima do máximo da cúbica ( $n^2 71$ ) os níveis são bem separados.



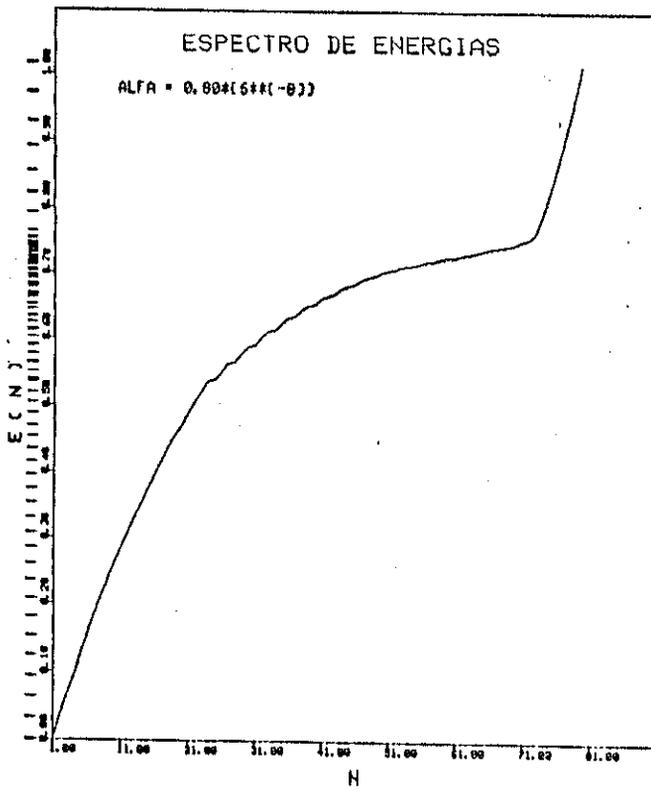


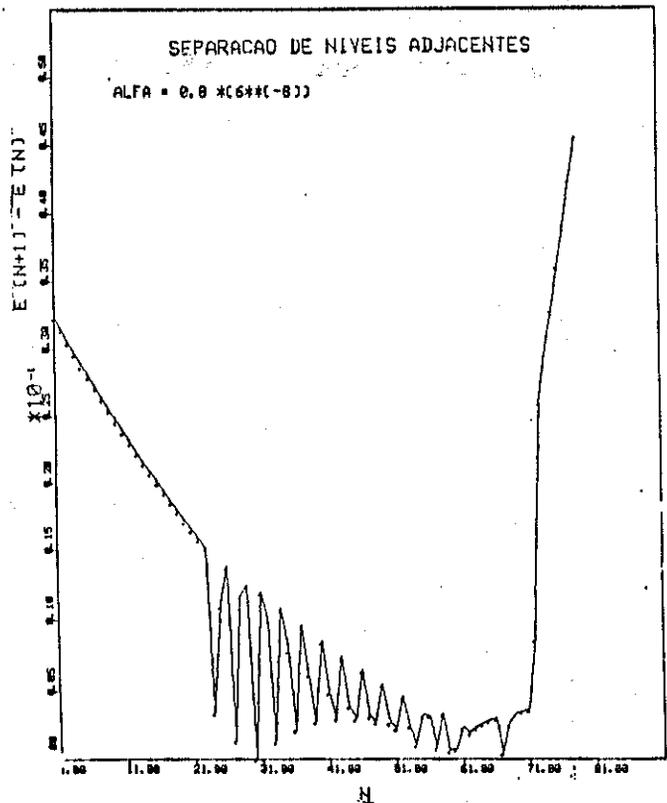
FIGURA 41 :

'Regime de Ressonâncias Independentes'

A perturbação ressonante levanta as quase degenerescências dos níveis com menores energias. Porém existem quase degenerescências, em outra região do espectro.

FIGURA 42 :

A separação por pares, vista no caso de uma ressonância é modificada aqui.



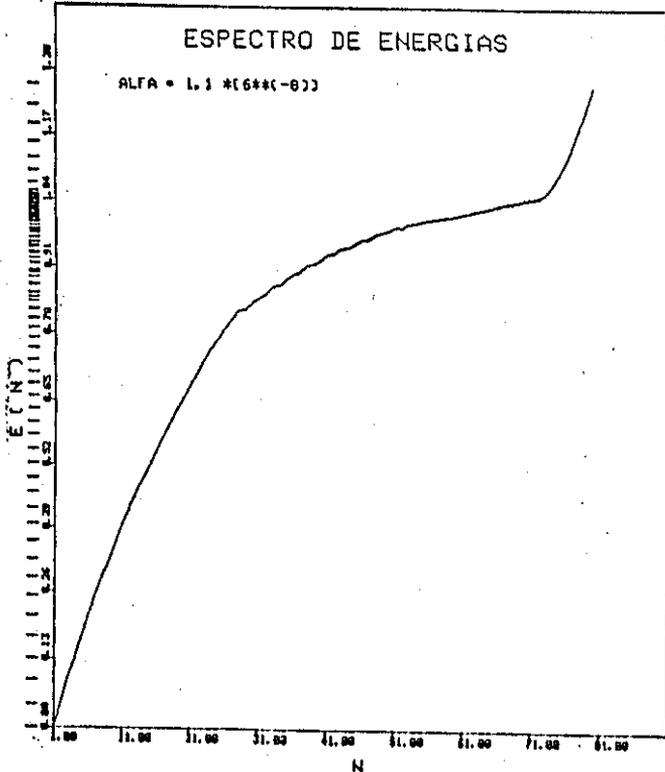
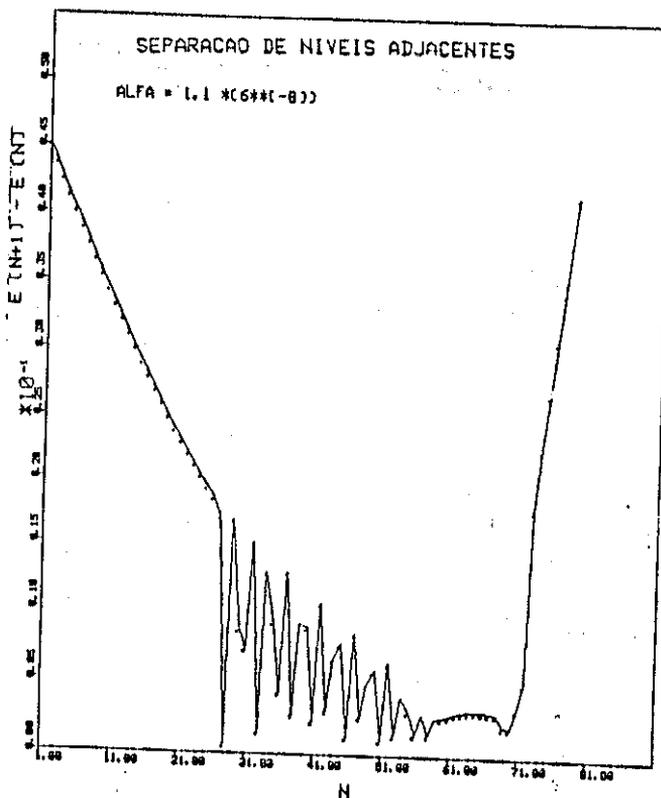


FIGURA 43 :

Regime de 'overlap'.

FIGURA 44 :

Observa-se que alguns níveis ( $n \approx 61-71$ ) estão ( $\sim$ ) igualmente espaçados.



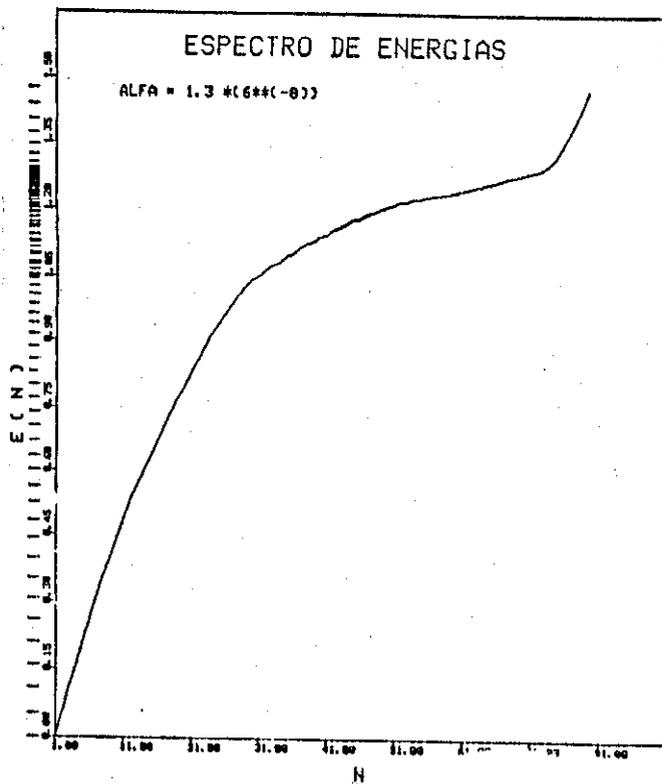


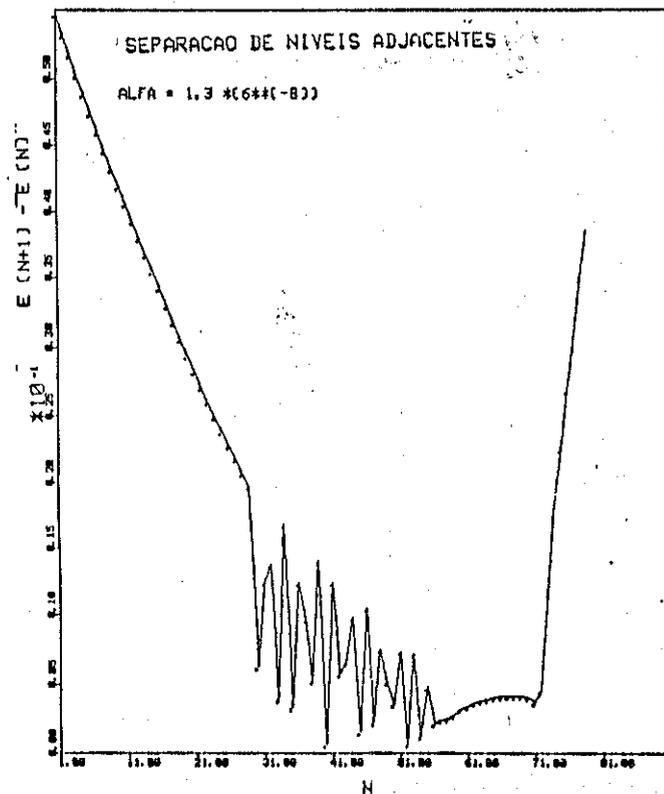
FIGURA 45:

'Uma Ressonância.'

Apesar de uma separatriz ter desaparecido, ainda existem quase degenerescências na região de rotação.

FIGURA 46 :

Aumentou o número de níveis (~) igualmente espaçados.



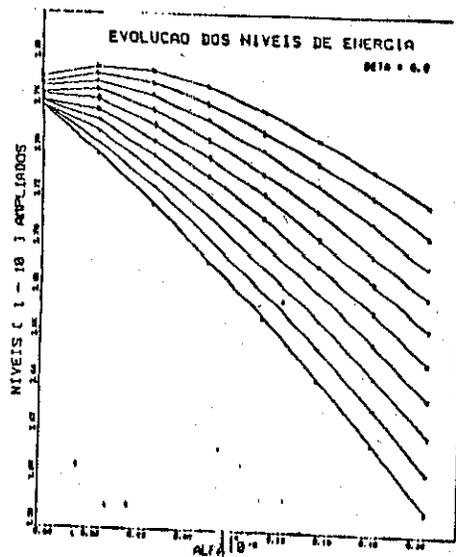
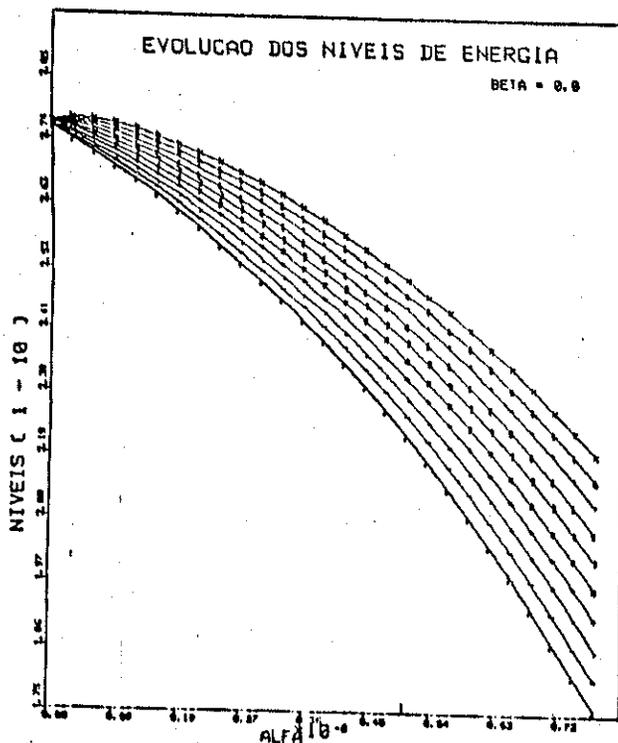


FIGURA 47 :

O comportamento dos níveis é análogo àquelas do sistema com uma ressonância. O 'overlap' inicia em  $\alpha = 0.5 \times 10^{-6}$ . Cada nível tem um símbolo.

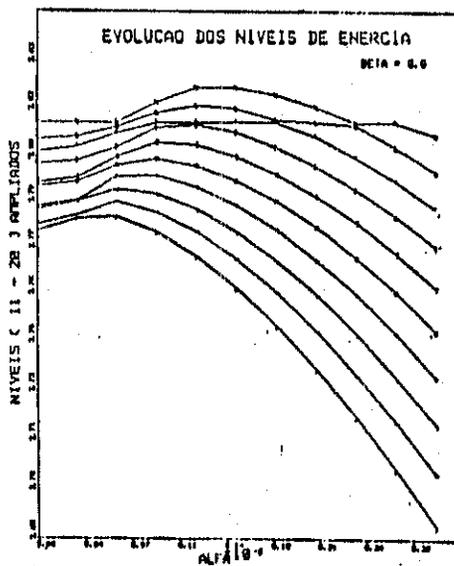
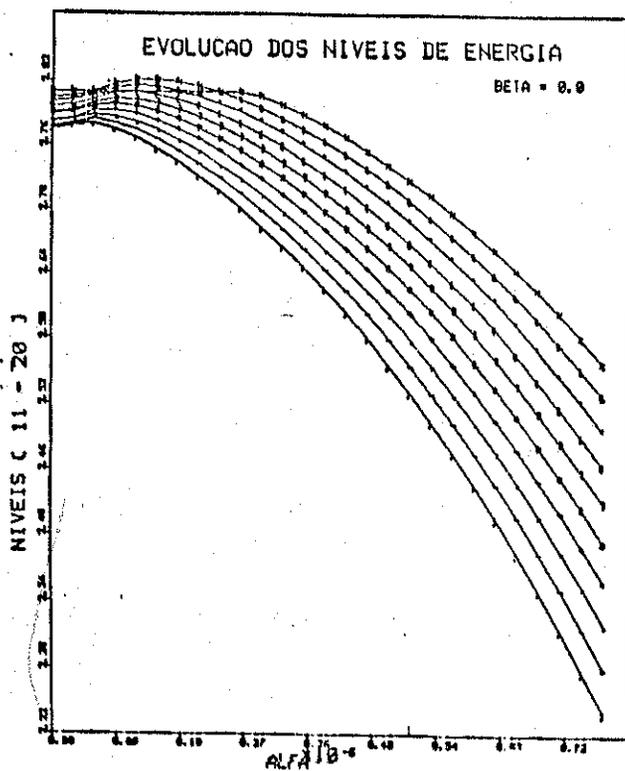


FIGURA 48 :

Os níveis oscilam na região de pequenos  $\alpha$ 's. Todos passam por suas energias diagonais.

### EVOLUCAO DOS NIVEIS DE ENERGIA

BETA = 0.0

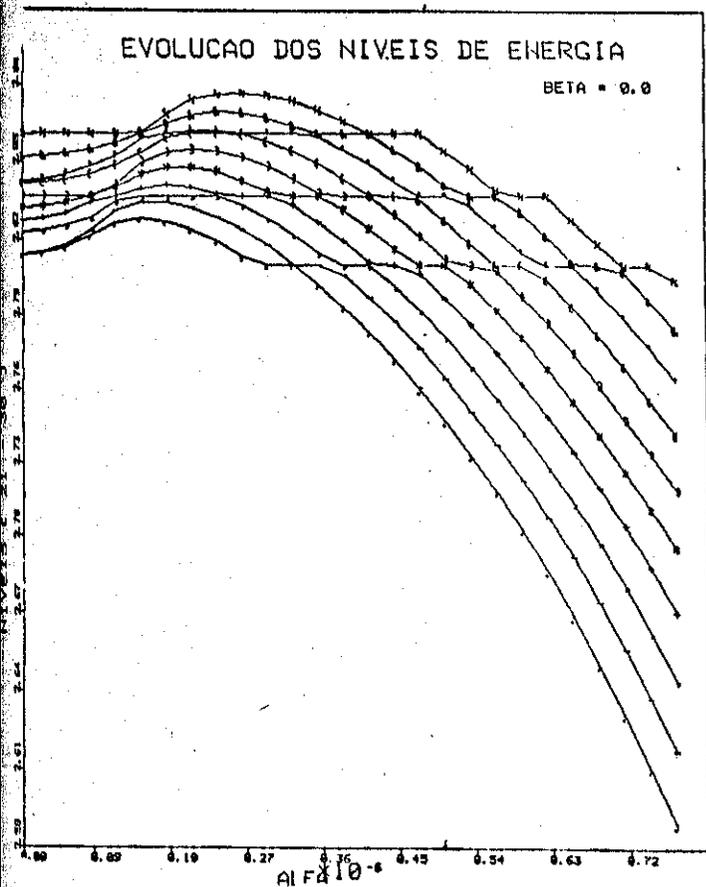
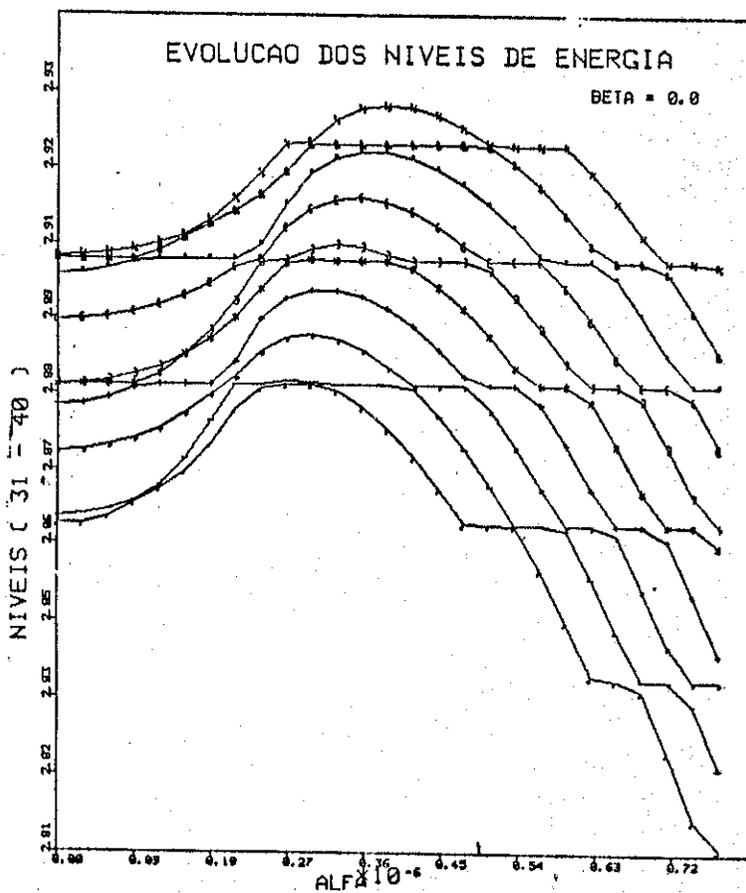


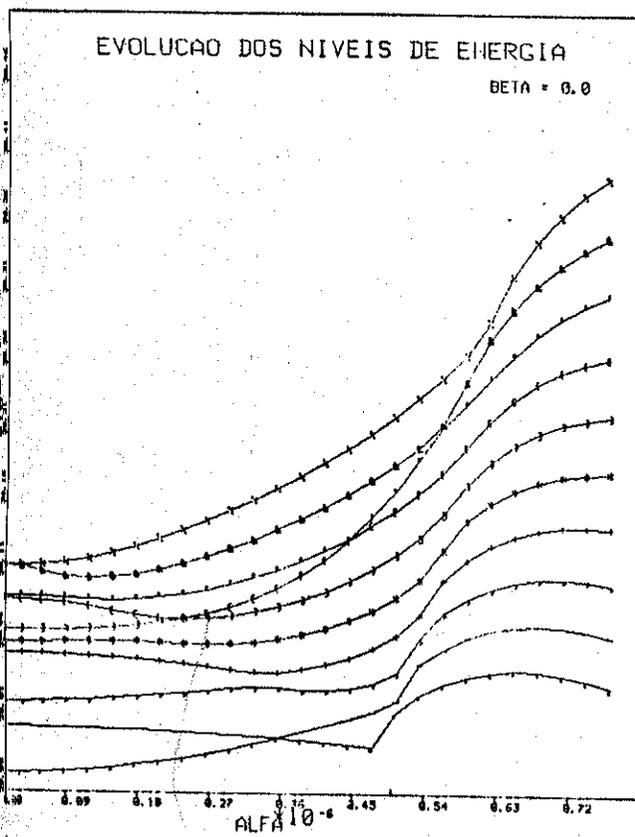
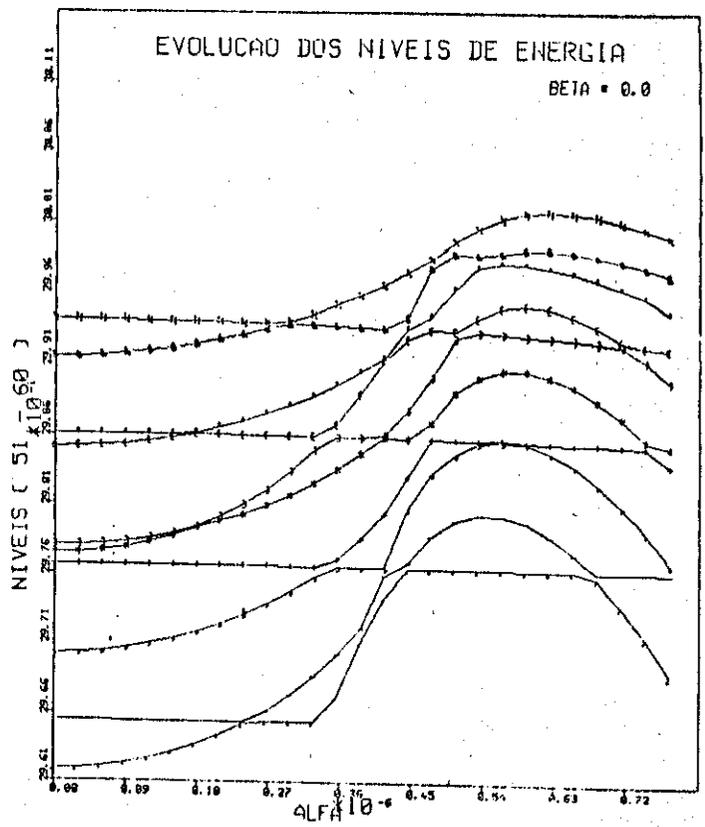
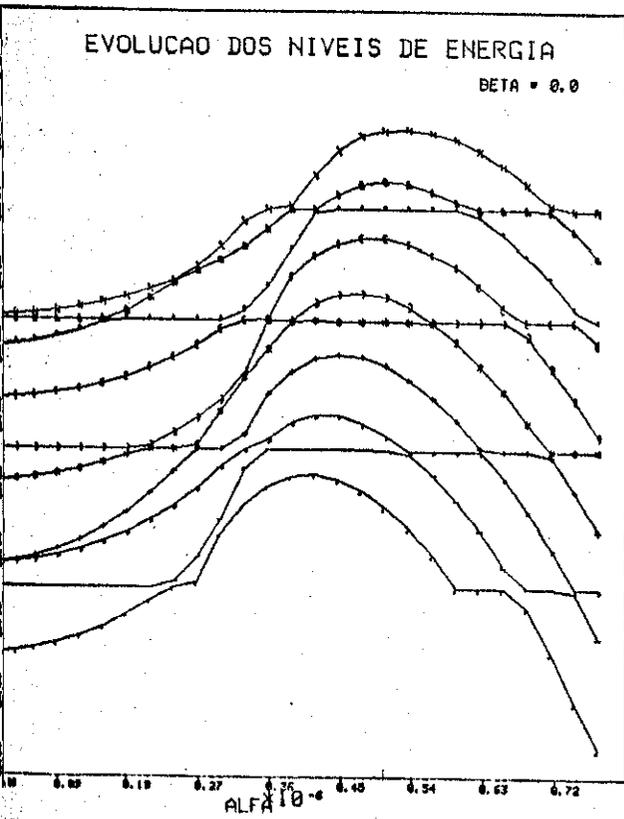
FIGURA 49 :

Estes níveis oscilam com maior amplitude e se evitam em vários valores de  $\alpha$ . A partir do 'overlap' apenas os níveis mais altos continuam oscilando.

FIGURA 50 :

Conforme subimos na escala de energia, os 'avoided crossing' tornam-se, mais frequentes e os níveis mais oscilantes.





FIGURAS 51, 52, 53 :

O padrão da região de 'tunelamento de rotação' do sistema de uma ressonância não se verifica neste sistema.

A maioria dos níveis passa por suas energias diagonais.

Uma vez que é conhecido o efeito do 'overlap' de ressonâncias integráveis na estrutura de toros no espaço de fases e nos respectivos níveis de energias quânticas, podemos ligar a 2ª perturbação periódica, explicitamente dependente de  $\theta_2$ , e começar a estudar o sistema de duas ressonâncias com (ou sem) 'overlap', com caos. A hamiltoniana clássica é dada por,

$$H = J_2 + 6\lambda J_1 - 6^2 c J_1^2 + 6^3 a J_1^3 + 6^3 J_1^3 \cdot (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot (\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2) \quad (117)$$

agora  $(J_2, H)_{(J, \theta)} \neq 0$  e  $[\hat{J}_2, \hat{H}] \neq 0$  tal qual no sistema de uma ressonância; como as perturbações aqui, são as mesmas de anteriormente, a estrutura da matriz hamiltoniana é a mesma, existem infinitos bloquinhos acoplados diagonalmente com os primeiros vizinhos, onde cada bloquinho é tridiagonal; isto tudo imerso em um dos seis possíveis subespaços determinados por  $n_0$ . O que muda são apenas os valores numéricos dos elementos de matriz diagonais. E, para qualquer ordem do polinômio de BIRKHOFF, a estrutura da matriz hamiltoniana pode ser esta apresentada aqui, porque todos os novos termos serão diagonais e as perturbações, que devem ser de ordem mais baixa possível na forma normal, podem sempre acoplar apenas elementos de matriz e blocos primeiros vizinhos respectivamente. Deste modo fica padronizada uma estrutura de matriz hamiltoniana para estudar sistemas quase-integráveis de dois graus de liberdade. Obviamente esta não é única, pois dependendo da perturbação aplicada corresponde um tipo de acoplamento, mas certamente é a mais simples.

As órbitas agora podem pular para outros "chapéus mexicanos amassados" e o sistema é não integrável analiticamente, o movimento caótico é observado nas seções de Poincaré através das figuras a seguir:

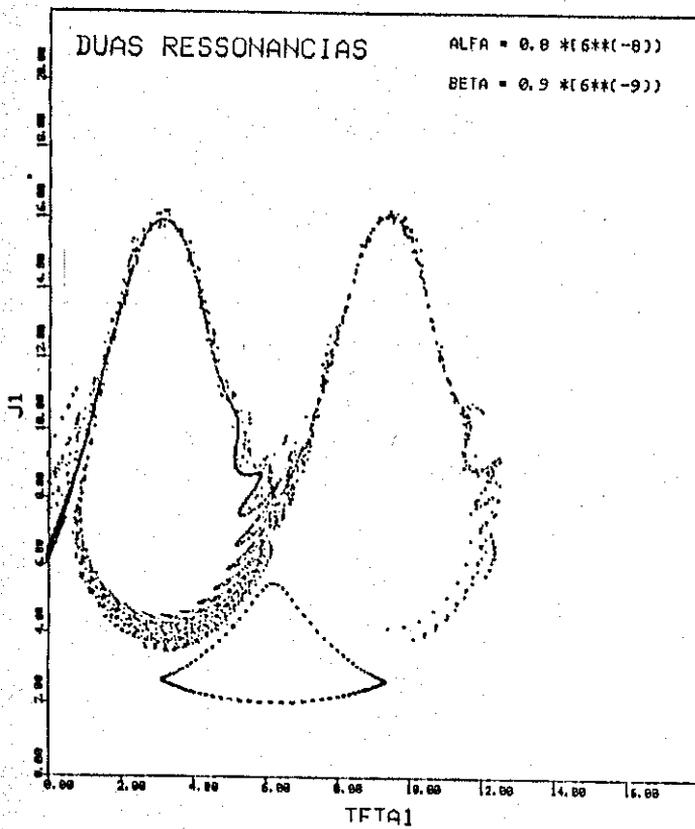
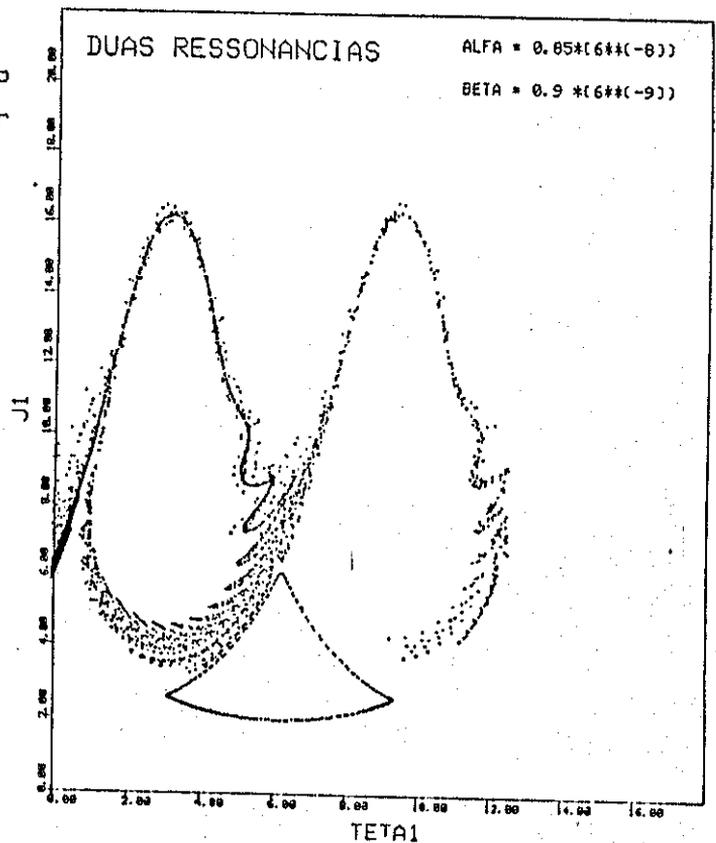


FIGURA 54 :

A separatriz inferior praticamente não sente o efeito da perturbação, apesar de sua energia ser maior do que a da outra separatriz. O aparecimento de caos está relacionado com a não-linearidade da região que as órbitas estão.

FIGURA 55 :

Antes de ocorrer o 'overlap', a separatriz inferior continua 'rígida'.



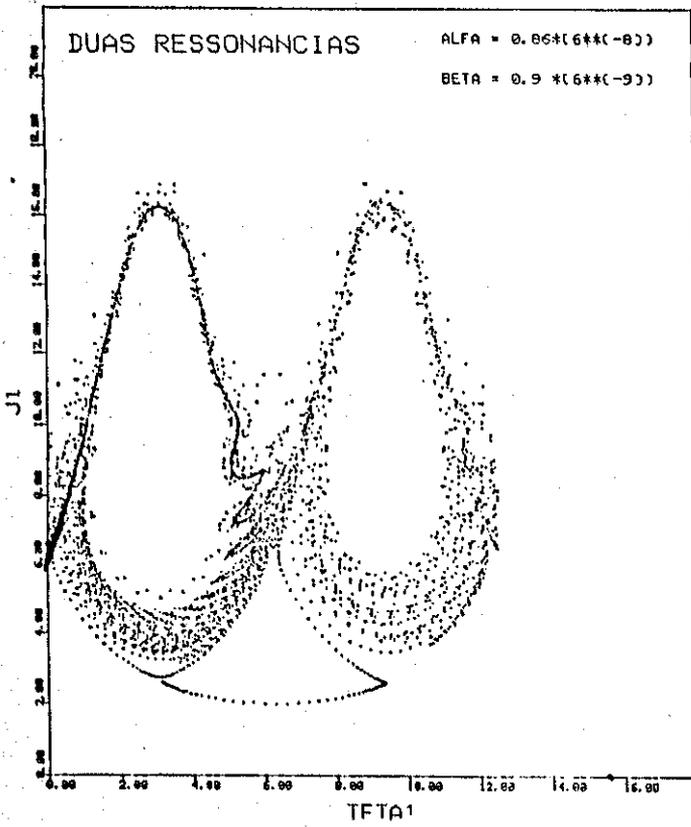
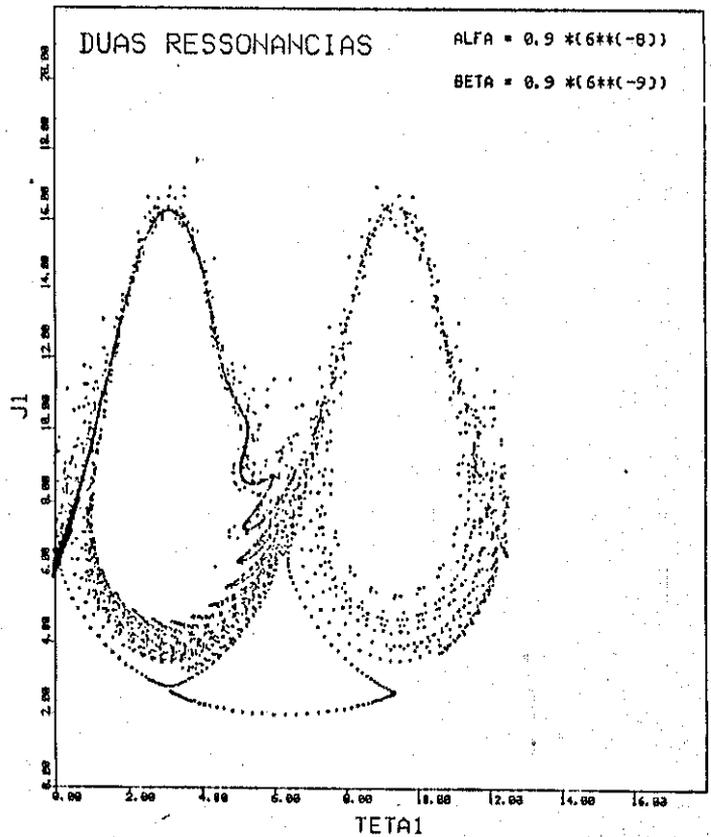


FIGURA 56 :

O 'overlap' leva o ramo superior da antiga separatriz a regiões de movimento caótico.

FIGURA 57 :

Situação logo após o 'overlap'.



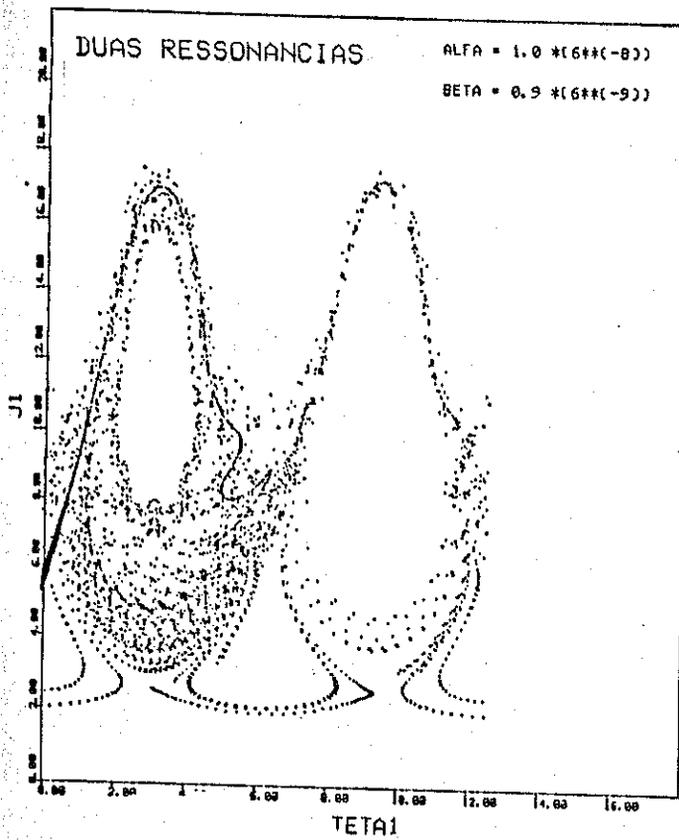


FIGURA 5B :

Existem curvas de libração que permanecem invariantes.

FIGURA 59 :

As órbitas que adentram a região da separatriz inferior, mantêm uma certa regularidade enquanto lá permanecem.

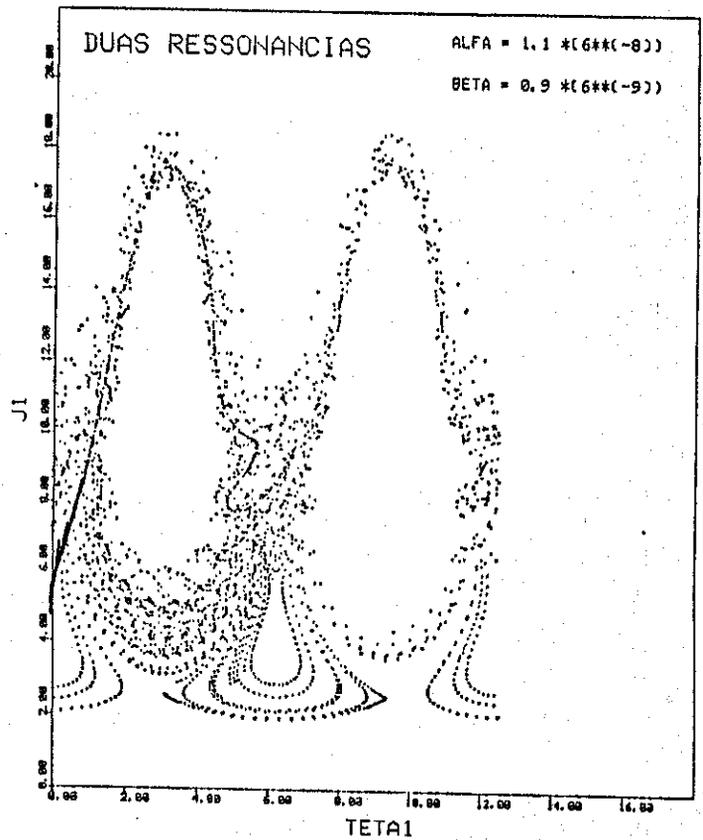
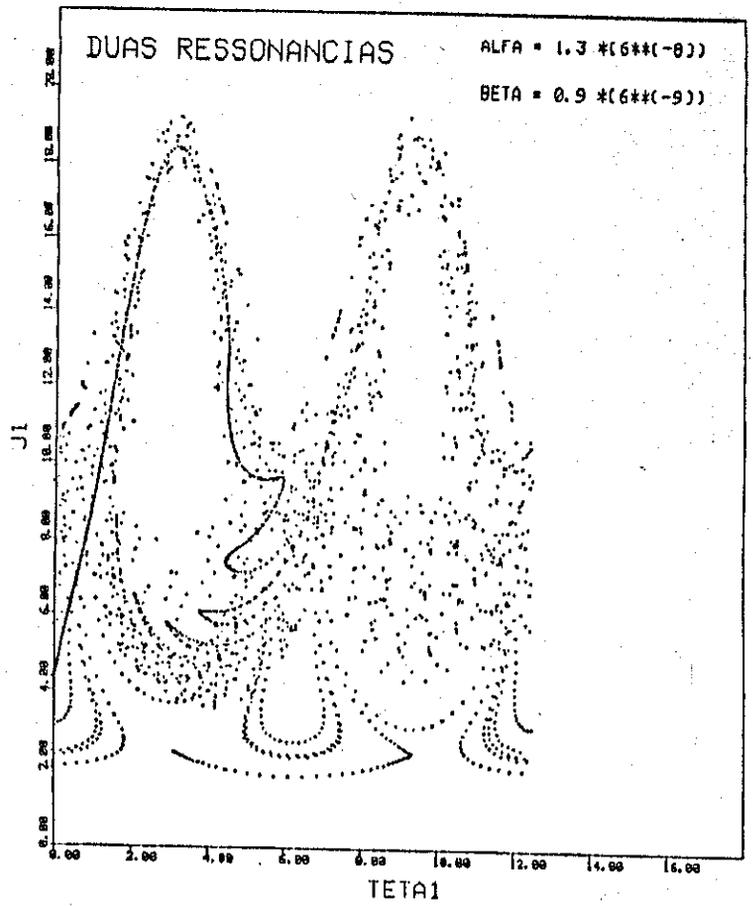


FIGURA 60 :

Esta situação corresponde à 2ª transição, na qual um ponto fixo hiperbólico desapareceu.



O correspondente operador do termo que gerou caos classicamente, é aquele dado no capítulo (4):

$$\beta \hat{H}_2 = \frac{\beta}{2} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \left\{ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{3}{2} \hbar \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \hbar^2 \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{8} \hbar^3 \right\} \quad (118)$$

cujos elementos de matriz são:

$$\left( \frac{\beta}{2} \hbar^{7/2} \right) \cdot \left\{ (6n + n_0 + 1/2)^3 (m - n + 1)^{1/2} \right\} \cdot \delta_{n', n} \cdot \delta_{m', m+1} + h.c. \quad (119)$$

já obtidos no sistema de uma ressonância.

Os elementos de matriz do hamiltoniano são aqueles dados por (116) mais estes, acima, devido à 2ª perturbação.

## GENERALIZAÇÃO DO MODELO DO PÊNDULO

A partir das secções de Poincaré apresentada para o caso integrável, podemos perceber que conforme aumentamos o parâmetro  $\alpha$  passamos do regime de duas ressonâncias independentes ( $\alpha = 0,8$ ) ao regime onde uma separatriz desaparece ( $\alpha = 1,3$ ). Para esse valor de  $\alpha$  um dos pontos fixos hiperbólico torna-se imaginário e no espaço de fases correspondente existe uma única ressonância com curvas de libração e rotação.

Esta configuração difere daquela de Chirikov pelo fato de que a separatriz é descrita por uma cúbica, para um  $\theta_1$  escolhido. Tem-se três valores distintos de  $J_1$  com a mesma energia.

Nesse sentido procuramos representar analiticamente este novo padrão de uma ressonância isolada através de uma expansão em série de Taylor de terceira ordem na ação  $J_1$  mais um termo perturbativo dependente de  $\theta_1$ . Para tanto precisamos conhecer a influência do acoplamento entre  $J_1$  e  $\theta_1$  no termo perturbativo.

Inicialmente, tomamos a hamiltoniana não perturbada,

$$H_0 = J_2 + 6 \lambda J_1 - 6^2 c J_1^2 + 6^3 a J_1^3 \quad (120)$$

e a perturbamos com,

$$H_1 = \alpha J_1^3 J_2^{1/2} \cos\theta_1 \quad (121)$$

onde eliminamos a ação  $J_1$  de  $(J_2 - J_1)^{1/2}$ .

Gradativamente, diminuimos a potência de  $J_1$  em  $H_1$ , até desacoplar  $J_1$  e  $\theta_1$  e traçamos as curvas de nível das várias hamiltonianas resultantes ajustando os parâmetros para gerar uma única ressonância.

Nas figuras seguintes podemos notar que o desaparecimento de uma das separatrizes depende da presença de  $J_1$  na perturbação. A última figura corresponde ao caso,

$$H_1 = \alpha' \cdot \cos\theta_1 \quad (122)$$

onde  $\alpha'$  é uma constante e aí não é possível eliminar uma das ilhas. Isto se deve ao fato de que para um certo  $\theta_1$  fixo (módulo  $2\pi$ ) a intensidade da perturbação é a mesma para qualquer  $J_1$ ; tudo que ocorrer a uma ilha também ocorrerá à outra. Enquanto que, quando

$$\alpha' = \alpha'(J_1) \quad , \quad (123)$$

para um certo  $\theta_1$  a perturbação será mais intensa quanto mais longe estivermos da origem no espaço de fases.

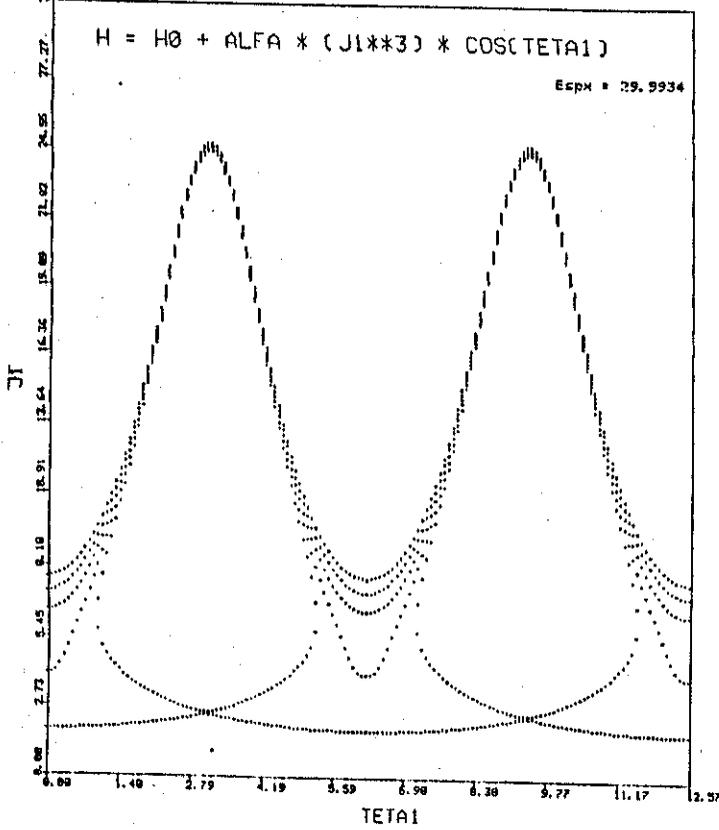


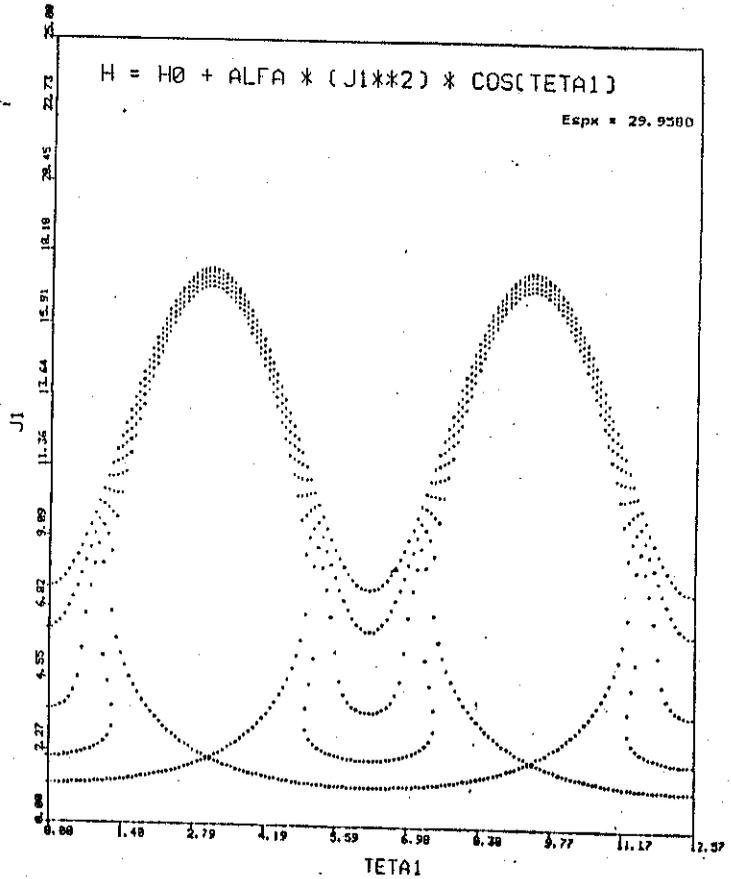
FIGURA 61 :

Curvas de nível da hamiltoniana com perturbação dependente de  $J_1^3$ , exibindo uma ressonância.  $H_0$  é dada por :

$$H_0 = J_2 + 6\lambda J_1 - 6^2 c J_1 + 6^3 a J_1^3$$

FIGURA 62 :

Uma ressonância. A perturbação depende de  $J_1^2$ .



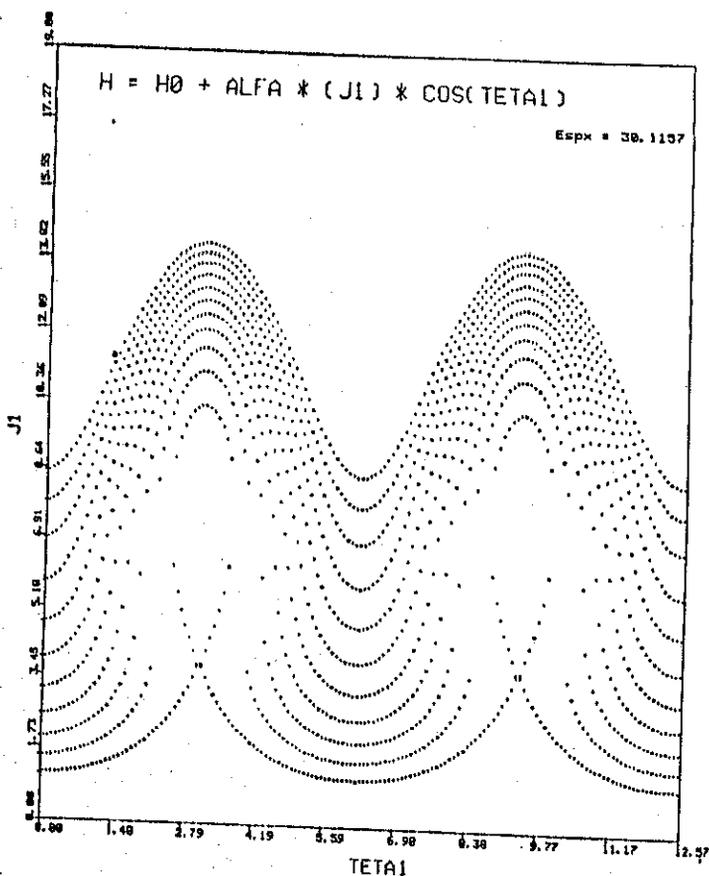
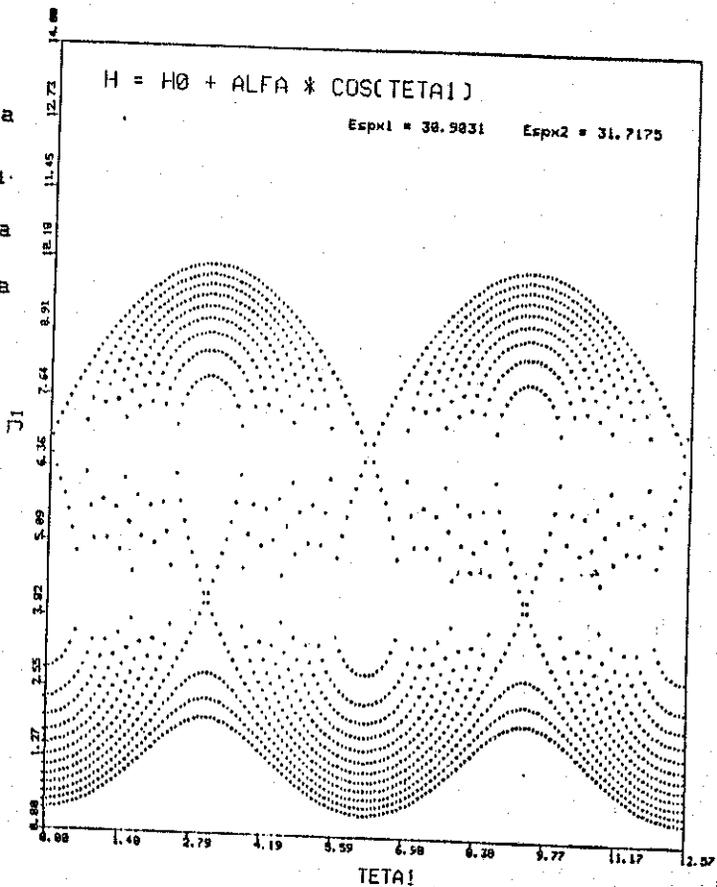


FIGURA 63 :

Uma ressonância. A perturbação depende de  $J_1^1$ .

FIGURA 64 :

Nesta situação, a perturbação não depende da ação  $J_1$ . Não é possível eliminar uma separatriz mesmo após a ocorrência de 'overlap' entre elas.



Assim, a hamiltoniana mais simples que representa este padrão de uma ressonância isolada é,

$$\begin{aligned}
 H(J_1, \theta_1) \approx H(J_R) + \left. \frac{\partial H}{\partial J_1} \right|_{J_1=J_R} \cdot \Delta J + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial J_1^2} \right|_{J_1=J_R} \cdot (\Delta J)^2 + \\
 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial J_1^3} \right|_{J_1=J_R} (\Delta J)^3 + \dots + (\alpha_0 + \alpha_1(J_1) + \dots) \cos\theta_1
 \end{aligned}
 \tag{124}$$

onde  $J_R$  é o valor de  $J_1$  que corresponde ao ponto fixo hiperbólico. No nosso caso,  $H(J_R) = J_2$  e  $\alpha_0 = 0$ .

Nota-se que, se truncarmos a expansão da hamiltoniana na segunda ordem e tomarmos apenas o primeiro termo da expansão do parâmetro  $\alpha$  recuperamos a aproximação do pêndulo. Daí, a generalidade da expansão apresentada e da topologia da ressonância obtida.

## CAPÍTULO 7 - RESULTADOS E CONCLUSÃO

A partir dos sistemas estudados separamos o caos propriamente dito da estrutura integrável subjacente, tanto para uma ressonância isolada quanto para um par de ressonâncias. A existência de cadeias de ressonâncias integráveis possibilita uma melhor compreensão da manifestação de 'overlap' de ressonâncias.

O sistema de duas ressonâncias fornece um exemplo onde, aumentar a energia não implica em aumentar a não-linearidade do problema. E como o aparecimento de caos está relacionado com a não-linearidade do movimento, ele surge em regiões de baixas energias preferencialmente. Isto é uma decorrência da forma cúbica da hamiltoniana. Em princípio, a hamiltoniana quando descrita por formas normais, pode ser dada por um polinômio de grau  $n$  na ação  $J_1$  e o espaço de fases correspondente exibirá  $(n - 1)$  cadeias de ressonâncias isócronas integráveis.

O 'overlap' das ressonâncias ocorre quando aumentamos a amplitude da perturbação ressonante, isto impõe um aumento na não-linearidade das velocidades  $\dot{J}_1$  e  $\dot{\theta}_1$ , o que por si só torna o movimento mais instável. Portanto, a ligação entre 'overlap' e instabilidade é que ambos ocorrem quando efeitos não-lineares tornam-se importantes. Nesse contexto, quando ligamos a segunda perturbação, podemos dizer que o caos é mais intenso no regime de 'overlap' do que antes.

No espectro de energias do sistema quântico, correspondente ao caso clássico de uma ressonância, observamos que a energia de muitos níveis passa a oscilar conforme variamos a intensidade de uma perturbação integrável, e que estes níveis se repelem, apresentando assim diversos 'avoided crossings'. Estes não são relacionados com movimento caótico, mas sim com efeitos de tunelamento de rotação. As regiões irregulares do espectro correspondem a manifestações coletivas.

No sistema integrável de duas ressonâncias, a presença da segunda

separatriz possibilita a ocorrência de tunelamento entre ilhas de cadeias diferentes. Isto acarreta novas regiões irregulares no espectro de energias, pois ocorrem 'avoided crossings' em outros valores do parâmetro de perturbação, inclusive antes de ocorrer o 'overlap' das ressonâncias. Daí pode-se inferir que a quantidade de regiões irregulares no espectro de energias é diretamente proporcional à quantidade de ressonâncias isócronas no sistema clássico correspondente.

Usualmente, 'avoided crossings' são relacionados com movimento clássico caótico. Aqui damos um exemplo onde aparecem 'avoided crossings' em um sistema integrável. Isto nos faz pensar que o comportamento oscilatório dos níveis e os 'avoided crossings' sejam propriedades impostas por perturbações periódicas independentemente de suas características físicas.

Pudemos notar que, apesar de existir um acoplamento entre os estados quando a primeira perturbação está ligada, muitos níveis passam por suas energias diagonais em alguns valores ( $\alpha = \alpha^* \neq 0$ ), isto significa que eles são insensíveis globalmente aos efeitos da perturbação quando esta é ligada em  $\alpha^*$ . Apesar da existência de efeitos de tunelamento e do efeito da própria ressonância, a energia dos níveis é dada pelas regras de Bohr-Sommerfeld. Estes níveis são 'níveis semiclassicos' em algum sentido.

O efeito da perturbação, que gera caos classicamente, no espectro de energias é pequeno com relação à perturbação ressonante. Apesar disso, a estabilização dos primeiros autovalores é bastante difícil. Foram necessários 13 bloquinhos (2301 funções de base) para estabilizar em 6 casas decimais os 40 primeiros autovalores do sistema de uma ressonância e, 17 bloquinhos (3026 funções de base) para estabilizar os primeiros 50 autovalores no caso de duas ressonâncias. Mesmo com estas dimensões das matrizes hamiltonianas, não foi possível estudar regimes de intensas perturbações. Até os valores atingidos e para o valor de  $\hbar$  usado, os níveis quase não alteram suas energias. Contudo, pôde-

se observar que os níveis do sistema de duas ressonâncias são mais sensíveis à variação da perturbação.

A matriz hamiltoniana que obtivemos é a mais simples possível para representar um sistema clássico não integrável de dois graus de liberdade. Cada acoplamento representa a destruição de uma constante de movimento.

As energias diagonais, de bloquinhos vizinhos, com mesmo  $N$ , diferem seus valores em uma unidade de  $\hbar$ . A intensidade do acoplamento, entre bloquinhos, é diretamente proporcional ao número quântico  $M$ . Estes dados justificam a correção sempre negativa da fórmula (64) de Rayleigh-Schrodinger. A expansão de Brillouin-Wigner não é uma série de potências de um parâmetro porque no denominador aparece a energia procurada. Portanto, em princípio não se pode exigir que esta expansão seja convergente, o que explica os resultados obtidos. A expansão em determinantes deve ser aplicada a matrizes menores. Nesse sentido não foi possível obter analiticamente aproximações, ao espectro perturbado, melhores do que as próprias energias ressonantes. Salientamos também que, para estudar vizinhanças de 'avoided crossings' é preciso trabalhar com teorias degeneradas.

As distribuições de Husimi obtidas fornecem um exemplo da conexão entre a mecânica quântica e a mecânica clássica; isto é, as distribuições de probabilidades,  $\rho_H$ , concentram-se nas vizinhanças de curvas invariantes clássicas.

## APÊNDICE A : CURVAS DE NÍVEL E SECÇÃO DE POINCARÉ

O conceito de hamiltoniana reduzida é fundamental para entender como as curvas de nível calibram as curvas na secção de Poincaré.

Temos uma hamiltoniana independente do tempo com  $L = 2$  graus de liberdade:  $H(J_1, \theta_1, J_2, \theta_2)$ . Escolhemos uma coordenada como sendo o "novo tempo", por exemplo  $\theta_2$ ; então a coordenada canonicamente conjugada a ela ( $J_2$ ), representa uma hamiltoniana dependente do tempo  $\theta_2$ , com  $L - 1 = 1$  grau de liberdade gerando um movimento no espaço de fases reduzido de  $(2L - 2) = 2$  dimensões.

$$\text{Tomando assim, } H(J_1, \theta_1, J_2, \theta_2) = \text{cte} \quad \text{A-1}$$

colocamos

$$\bar{J}_1 = J_1 \quad \bar{\theta}_1 = \theta_1 \quad \text{A-2}$$

e resolvemos (A-1) para

$$J_2 = J_2(J_1, \theta_1, \theta_2)_E \quad \text{A-3}$$

Fazemos então

$$\bar{H} = J_2 \quad \text{e} \quad -\tau = \theta_2 \quad \text{A-4}$$

de modo que a dinâmica governada por  $\bar{H}$ , tem as seguintes equações de movimento:

$$\dot{\bar{J}}_1 = \frac{d\bar{J}_1}{d(-\tau)} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\theta}_1} = -\frac{\partial J_2}{\partial \theta_1} \quad \text{A-5}$$

$$\dot{\bar{\theta}}_1 = \frac{d\bar{\theta}_1}{d(-\tau)} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{J}_1} = \frac{\partial J_2}{\partial J_1} \quad \text{A-6}$$

cujo espaço de fases reduzido é  $(\bar{J}_1, \bar{\theta}_1)$ ; e a hamiltoniana reduzida é  $\bar{H} = \bar{H}(\bar{J}_1, \bar{\theta}_1, -\tau)_E$ .

Por outro lado as trajetórias caem sobre uma superfície de energias 3-dimensional  $H(J_1, \theta_1, J_2, \theta_2) = \text{cte}$  no espaço de fases 4-dimensional. Esta expressão determina  $J_2$  em termos das outras 3 variáveis,

$$J_2 = J_2(J_1, \theta_1, \theta_2)_E \quad \text{A-7}$$

Isto nos leva a considerar a projeção das trajetórias sobre um volume 3-dimensional no espaço  $(J_1, \theta_1, \theta_2)$ . Se o movimento é limitado então o plano  $\theta_2 = \text{cte}$  dentro deste volume deve ser atravessado repetidamente pelas trajetórias. Este plano consistindo de uma coordenada  $\theta_1$  e seu momentum conjugado  $J_1$  é uma escolha conveniente para a secção de Poincaré. Com isso podemos notar que a secção de Poincaré  $(J_1, \theta_1)$ , é o próprio espaço de fases reduzido do sistema hamiltoniana original.

Se em adição à energia existir uma segunda constante de movimento,

$$I(J_1, \theta_1, J_2, \theta_2)_E = \text{cte} \quad \text{A-8}$$

por exemplo  $J_2$ , então a combinação de (A-7) com (A-8) produz,

$$J_1 = J_1(\theta_1)_{E, J_2} \quad \text{A-9}$$

Portanto, os cruzamentos sucessivos do movimento com a secção de Poincaré  $\theta_2 = 2n\pi$  devem cair sobre uma única curva dada por (A-9). Em outras palavras, para o sistema em que  $J_2$  e a energia se conservam a configuração das trajetórias na secção de Poincaré coincidem exatamente com as curvas de nível de  $J_2$ .

Para plotar a separatriz do movimento é preciso conhecer as coordenadas do ponto de equilíbrio instável e a energia correspondente.

Seja a hamiltoniana ressonante,

$$H = J_2 - 6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2 + \alpha 6^3 J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot \cos\theta_1 \quad , \quad \text{A-10}$$

a partir das equações de movimento

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H / \partial J_1}{\partial H / \partial J_2} = 0 \quad , \quad \dot{J}_1 = - \frac{\partial H / \partial \theta_1}{\partial H / \partial J_2} = 0 \quad \text{A-11}$$

obtemos as singularidades do fluxo de órbitas. Por  $\theta_1 = 2n\pi$  passa a órbita periódica instável, enquanto que por  $\theta_1 = n\pi$  ( $n \neq 0$ ) passa a órbita periódica estável da ilha.

Para obter a ação,  $(J_1)_{\text{spx}}$ , correspondente à separatriz, fazemos a aproximação  $J_2 \gg J_1$  para transformar a hamiltoniana (A-10) numa cúbica,

$$-J_2 = -E - 6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2 + \alpha 6^3 J_1^3 J_2^{1/2} \cdot \cos\theta_1 \quad \text{A-12}$$

tal que

$$\frac{\partial(-J_2)}{\partial J_1} = 0 = -6\lambda + 2 \cdot 6^2 c J_1 + 3 \cdot 6^3 \alpha J_1^2 J_2^{1/2} \cos\theta_1 + \alpha 6^3 J_1^3 \frac{\partial(J_2^{1/2})}{\partial J_1} \cos\theta_1 \quad \text{A-13}$$

e

$$(J_1)_{\text{spx}} \Big|_{\theta_1=0} \equiv J_R = \frac{-72c + \sqrt{4 \cdot 6^4 \cdot c^2 - 2 \cdot 6^5 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot J_2^{1/2}}}{6^4 \cdot \alpha \cdot J_2^{1/2}}$$

A-14

Define-se, então a energia da separatriz aproximadamente por:

$$E_{spx} = H(J_R, \theta_1 = 0, J_2) = J_2 - 6\lambda J_R + 6^2 c J_R^2 + \alpha 6^3 J_R^3 (J_2 - J_R)^{1/2}$$

A-15

Se colocarmos  $\cos\theta_1 = -1$  em (A-13), obtemos a partir de (A-14) a ação correspondente à órbita periódica estável dentro da ilha.

Assim, temos definidos todos os parâmetros do sistema dinâmico em questão.

A condição de ressonância  $\dot{\theta}_1=0$

$$\dot{\theta}_{1,0} = \frac{\partial H_0}{\partial J_1} = -6\lambda + 72cJ_1 = 0$$

A-16

define a posição do toro ressonante que irá abrigar a ressonância:

$$J_{1,0} = \frac{\lambda}{12c}$$

A-17

de modo que quando  $\lambda \rightarrow 0$  a ressonância cai sobre a órbita periódica estável central.

## APÊNDICE B - COMPUTAÇÃO DO MOVIMENTO PERTURBADO

### I - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O SISTEMA COMPLETO (UMA RESSONÂNCIA)

A partir da hamiltoniana clássica (54),  $H(\underline{J}, \underline{\theta})$ , podemos obter as equações do movimento  $J_1, \theta_1$  governadas pela hamiltoniana reduzida  $J_2(J_1, \theta_1, \theta_2, E)$  que depende explicitamente do 'tempo  $\theta_2$ ' quando  $\beta \neq 0$  e assim descrever o movimento na superfície de energia,

$$H = (J_2 - 6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2) + 6^3 J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot [\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2] \quad \text{B-1}$$

$$\dot{\theta}_1 = \left( \frac{\partial H / \partial J_1}{\partial H / \partial J_2} \right) \quad , \quad \dot{J}_1 = - \left( \frac{\partial H / \partial \theta_1}{\partial H / \partial J_2} \right) \quad , \quad \dot{J}_2 = - \left( \frac{\partial H / \partial \theta_2}{\partial H / \partial J_2} \right) \quad \text{B-2}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{(J_2 - J_1)^{1/2} [-6\lambda + 72cJ_1] + 648J_1^2(J_2 - J_1)(\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2) - 108J_1^3(\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2)}{((J_2 - J_1)^{1/2} + 108 J_1^3 (\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2))} \quad \text{B-3}$$

$$\dot{J}_1 = \frac{\alpha \cdot 6^3 \cdot J_1^3 \cdot (J_2 - J_1) \cdot \sin\theta_1}{((J_2 - J_1)^{1/2} + 108 \cdot J_1^3 \cdot (\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2))} \quad \text{B-4}$$

$$\dot{J}_2 = \frac{\beta \cdot 6^3 \cdot J_1^3 \cdot (J_2 - J_1) \cdot \sin\theta_2}{((J_2 - J_1)^{1/2} + 108 \cdot J_1^3 \cdot (\alpha \cdot \cos\theta_1 + \beta \cdot \cos\theta_2))} \quad \text{B-4'}$$

Caso seja conveniente obter as equações de movimento diretamente a partir da hamiltoniana reduzida, tem-se

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial J_2}{\partial J_1} \quad , \quad \dot{J}_1 = - \frac{\partial J_2}{\partial \theta_1} \quad , \quad \dot{J}_2 = - \frac{\partial J_2}{\partial \theta_2} \quad \text{B-5}$$

onde

$$J_2 = J_2^2 + J_1 \quad \text{e} \quad \text{B-6}$$

$$j_2 = - \frac{[6^3 J_1^3 (\alpha \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2)] + \sqrt{[6^3 J_1^3 (\alpha \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2)]^2 - 4 [J_1 - 6\lambda J_1 + 6^2 c J_1^2 - E]}}{2}$$

B-7

A partir das equações de movimento ( $\dot{J}_1$ ) e ( $\dot{\theta}_1$ ) podemos calcular numericamente a seção de Poincaré do fluxo de órbitas.

O algoritmo usado é o de RUNGE-KUTTA de 4ª ordem com passo fixo  $h = 2\pi/170$ . Isto significa que dividimos a superfície toroidal em 170 diferentes seções de Poincaré. Coletamos apenas as iterações que caem sobre uma dada seção escolhida, por exemplo  $\theta_2 = 0$ . Dependendo das condições iniciais obtemos toros de libração, toros de rotação, órbitas caóticas, ilhas secundárias dentro das ilhas, cadeias de ilhas na região de rotação. Para acompanhar a evolução e "splitting" da separatriz é preciso fazer a aproximação do pêndulo para a hamiltoniana ressonante. Liga-se então a 2ª perturbação e obtemos a hamiltoniana reduzida para o pêndulo perturbado. A partir daí lineariza-se o movimento na vizinhança de um ponto fixo e obtem-se explicitamente  $J_1 = J_1(\theta_2)$  e  $\theta_1 = \theta_1(\theta_2)$ .

## II - APROXIMAÇÃO DO PÊNULO E LINEARIZAÇÃO

É útil fazer esta aproximação para podermos visualizar o efeito da perturbação através de seu efeito no modelo do pêndulo. O ponto de equilíbrio instável do sistema ressonante  $H_R = H_0 + H_1$  que tínhamos antes da perturbação é identificado por  $(J_1, \theta_1) = (J_R, 0)$ , onde  $(J_R, 0)$  define a energia da separatriz.

A aproximação consiste em expandir  $(H_R - J_2)$  na vizinhança de  $(J_R, 0)$  até 2ª ordem em  $(\Delta J_1)^2$  e avaliar  $H_0(J_R)$  e  $H_1(J_R)$ ,

$$\Delta J_1 \cdot \left. \frac{\partial}{\partial J_1} \cdot (H_R - J_2) \right|_{\substack{J_1=J_R \\ \theta_1=0}} = 0 \quad , \quad \text{condição de equilíbrio} \quad \text{B-8}$$

$$\frac{(\Delta J_1)^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2}{\partial J_1^2} \cdot (H_R - J_2) \right|_{\substack{J_1=J_R \\ \theta_1=0}} = C_1 \cdot (\Delta J_1)^2 \quad \text{B-9}$$

onde,

$$C_1 = \frac{\{72c(J_{2,0} - J_R)^{3/2} + \alpha \cdot 6^4 \cdot J_R (J_{2,0} - J_R)^2 - 3 \cdot 6^3 \cdot \alpha \cdot J_R^2 (J_{2,0} - J_R) - 54 \cdot \alpha \cdot J_R^3\}}{2 (J_{2,0} - J_R)^{3/2}} \quad \text{B-10}$$

e  $J_{2,0}$  é o valor de  $J_2$  quando  $\beta=0$ ,

$$H_0(J_R) = C_2 \equiv -6\lambda \cdot J_R + 6^2 c J_R^2 \quad \text{B-11}$$

$$H_1(J_R) = \alpha \cdot 6^3 J_R^3 (J_{2,0} - J_R)^{1/2} \cdot \cos\theta_1 \equiv \alpha' \cdot \cos\theta_1 \quad \text{B-12}$$

Assim

$$H = J_2 + C_2 + C_1(\Delta J_1)^2 + \alpha' \cos \theta_1 \equiv E(\Delta J_1, \theta_1) \quad \text{B-13}$$

ou

$$J_2 = E - C_2 - C_1(\Delta J_1)^2 - \alpha' \cos \theta_1 \quad \text{B-14}$$

Para  $J_1 = J_R$  e  $\theta_1 = 0$  obtemos a energia da separatriz e sua meia largura ( $\Delta J_1$ ) dada por,

$$(\Delta J_1)^2 = \frac{\alpha'}{C_1} (1 - \cos \theta_1) \quad \text{B-15}$$

Agora perturbamos o pêndulo (B-13) com a perturbação  $H_2$ ,

$$H = J_2 + C_2 + C_1(\Delta J_1)^2 + \alpha' \cos \theta_1 + \beta \cdot 6^3 \cdot J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot \cos \theta_2 \quad \text{B-16}$$

fazemos

$$j_2 = (J_2 - J_1)^{1/2} \quad \text{B-17}$$

tal que a hamiltoniana reduzida do pêndulo perturbado é,

$$J_2 = - \frac{[\beta \cdot 6^3 \cdot J_1^3 \cdot \cos \theta_2]}{2} \cdot \sqrt{(\beta \cdot 6^3 \cdot J_1^3 \cdot \cos \theta_2)^2 - 4(J_1 + C_2 + C_1(\Delta J_1)^2 + \alpha' \cos \theta_1 - E)} + \\ + [E - C_2 - C_1(\Delta J_1)^2 - \alpha' \cos \theta_1] \quad \text{B-18}$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{(\beta \epsilon^3 J_1 \cos \theta_2)^4 - 4(\beta \epsilon^3 J_1^3 \cos \theta_2)^2 (J_1 + C_2 + C_1 (\Delta J_1)^2 + \alpha' \cos \theta_1 - E)} + \\ + (E - C_2 - C_1 (\Delta J_1)^2 - \alpha' \cos \theta_1) \quad \text{B-19}$$

negligenciamos os termos de  $O(\beta^2)$  e  $O(\beta^2 \cdot \alpha')$ , tal que

$$J_2 = (E - C_2 - C_1 (\Delta J_1)^2 - \alpha' \cos \theta_1) - (\beta \epsilon^3 J_1^3 \cos \theta_2) \sqrt{(E - J_1 - C_2)} \quad \text{B-20}$$

A presença da perturbação  $H_2(\theta_2)$  no sistema faz com que a 'energia  $J_2$ ' não seja mais constante e passe a depender do 'tempo  $\theta_2$ '. Isto faz com que o ponto fixo do sistema ressonante que unia as variedades da separatriz deixe de ser ponto de equilíbrio no sistema perturbado. A órbita periódica que caracterizava o ponto fixo como de equilíbrio adquire outro grau de liberdade e passa a viajar numa helicóide em torno do antigo ponto de equilíbrio.

Quando a órbita periódica atravessar a secção de Poincaré no mesmo ponto após um período múltiplo de  $2\pi$ , identificará este ponto, como ponto fixo do sistema perturbado.

Consideramos a linearização do movimento, utilizando a expansão binomial linear,

$$J_1^n \approx J_R^n + n \cdot J_R^{n-1} \cdot \Delta J_1 \quad \text{B-21}$$

e a vizinhança de  $\theta_1=0$ ,

$$\cos \theta_1 \approx 1 - \frac{\theta_1^2}{2} \quad \text{B-22}$$

Então, (B-20) é dada por:

$$J_2 = \left[ E - C_2 - C_1(\Delta J_1)^2 - \alpha' \left( 1 - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \right] - \left[ \beta 6^3 (J_R^3 + 3J_R^2 \Delta J_1) \cos \theta_2 \right] \sqrt{E - J_R - C_2}$$

B-23

$$J_2 = E' + C_0 \cdot \theta_1^2 - C_1(\Delta J_1)^2 - C_3 \cdot \cos \theta_2 + C_4 \cdot \Delta J_1 \cdot \cos \theta_2$$

B-24

onde

$$\begin{aligned} E' &= E - C_2 - \alpha' \\ C_0 &= \frac{\alpha'}{2} \\ C_3 &= \beta 6^3 \cdot J_R^3 \cdot (E - J_R - C_2)^{1/2} \\ C_4 &= 3 \cdot \beta 6^3 \cdot J_R^2 \cdot (E - J_R - C_2)^{1/2} \end{aligned}$$

B-25

Podemos agora obter as equações do movimento linearizado do pêndulo perturbado, a partir de (B-24):

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial J_2}{\partial (\Delta J_1)} = -2C_1(\Delta J_1) + C_4 \cdot \cos \theta_2$$

B-26

$$(\Delta \dot{J}_1) = -\frac{\partial J_2}{\partial \theta_1} = -2C_0 \cdot \theta_1$$

B-27

de modo que:

$$(\Delta \ddot{J}_1) = 4 \cdot C_0 \cdot C_1 (\Delta J_1) - 2 \cdot C_0 \cdot C_4 \cdot \cos \theta_2$$

B-28

$$(\Delta \ddot{J}_1) - C_5 (\Delta J_1) + C_6 \cdot \cos \theta_2 = 0$$

B-29

com

$$C_5 = 4 \cdot C_0 \cdot C_1$$

$$C_6 = 2 \cdot C_0 \cdot C_4$$

A solução homogênea de B-29 é:

$$(\Delta J_1)_H = A \cdot e^{\sqrt{C_5} \cdot \theta_2} + B \cdot e^{-\sqrt{C_5} \cdot \theta_2} \quad \text{B-31}$$

onde

$$(A, B) = \begin{cases} (0, 1) \\ \text{ou} \\ (1, 0) \end{cases} \quad \text{B-32}$$

quando

$$\begin{cases} \theta_2 \rightarrow \infty, A=0, B=1, (\Delta J_1)_H \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Variedade estável } H^+ \\ \theta_2 \rightarrow -\infty, A=1, B=0, (\Delta J_1)_H \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Variedade instável } H^- \end{cases} \quad \text{B-33}$$

Uma solução particular de B-29 é dada por,

$$(\Delta J_1)_P = M \cdot \cos \theta_2 + N \sin \theta_2 \quad \text{B-34}$$

cuja solução explícita é,

$$(\Delta J_1)_P = \frac{C_6}{[C_5 + 1]} \cdot \cos \theta_2 \quad \text{B-35}$$

finalmente

$$\Delta J_1 = (\Delta J_1)_H + (\Delta J_1)_P \quad \text{B-36}$$

$$\Delta J_1 = \left\{ A \cdot e^{\sqrt{C_5} \cdot \theta_2} + B \cdot e^{-\sqrt{C_5} \cdot \theta_2} \right\} + \frac{C_6}{[1 + C_5]} \cdot \cos \theta_2 \quad \text{B-37}$$

$$H^+ : (0,1) : \Delta J_1 = e^{-\sqrt{C_5} \theta_2} + \frac{C_6}{(1 + C_5)} \cdot \cos \theta_2 \quad B-38$$

$$H^- : (1,0) : \Delta J_1 = e^{\sqrt{C_5} \theta_2} + \frac{C_6}{(1 + C_5)} \cdot \cos \theta_2 \quad B-39$$

De (B-27) vemos que:

$$\theta_1 = - \frac{1}{2C_0} (\Delta J_1) \quad B-40$$

Portanto,

$$H^+ : (0,1) : \theta_1 = - \frac{1}{2C_0} \left\{ - \sqrt{C_5} \cdot e^{-\sqrt{C_5} \theta_2} - \frac{C_6}{1 + C_5} \cdot \sin \theta_2 \right\} \quad B-41$$

$$H^- : (1,0) : \theta_1 = - \frac{1}{2C_0} \left\{ \sqrt{C_5} \cdot e^{\sqrt{C_5} \theta_2} - \frac{C_6}{1 + C_5} \cdot \sin \theta_2 \right\} \quad B-42$$

A cada  $2\pi$  de  $\theta_2$ ,  $H^+$  aproxima-se um passo do ponto fixo e  $H^-$  afasta-se um passo. Para  $\theta_2 = 2n\pi$  com  $n \rightarrow \pm \infty$  determina-se o ponto fixo por,

$$\begin{cases} \Delta J_1 = \frac{C_6}{1 + C_5} \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow J_1 = J_R + \frac{C_6}{1 + C_5} \quad B-43$$

E a aproximação linear é obtida pelo mapa formado pelas variedades da

separatriz na secção de Poincaré.

Sendo assim, damos  $n$  condições iniciais simultâneas ao longo de (B-38 e B-41) ou (B-39 e B-42) substituindo  $\theta_2$  por  $\mp 2.n.\pi$  respectivamente. A partir daí evoluímos-las no 'tempo  $\theta_2$ ' através das equações de movimento (B-3), (B-4) e (B-4') e a hamiltoniana reduzida (B-7) e (B-6) e todas as vezes que elas cruzarem a secção de Poincaré estipulada, coletamos a iteração e por fim, fazemos os gráficos. Em média, foram gastas 200.000 iterações para desenhar a separatriz. Em todos os gráficos deste sistema a energia usada foi a energia da separatriz, a qual permaneceu constante até oito casas decimais quando  $\beta \neq 0$ .

O conjunto de parâmetros disponíveis tem os seguintes valores,

$$\lambda = 3 * 6^{-2}$$

$$c = 6^{-3}/4$$

$$\hbar = 0.9917/6$$

$$J_{2,0} = \hbar.(160 + 1/12)$$

B-44

$$\alpha = 1.5 * 6^{-8}$$

$$\beta \approx 6^{-9}$$

**APÊNDICE C - CÁLCULO DO COMPUTADOR  $[\hat{H}_2, \hat{J}_2]$  E  
DO PARÊNTESES DE POISSON  $(H_2, J_2)$**

De acordo com a equação (35) com  $s=1$ ,  $r=6$  negligenciando  $\epsilon$  e com a equação (55), vamos calcular:

$$[\hat{H}_2, \hat{J}_2] = \hat{H}_2 \hat{J}_2 - \hat{J}_2 \hat{H}_2 \quad \text{C-1}$$

tendo em conta que

$$[\hat{p}_j, \hat{q}_k] = -i\hbar \delta_{j,k} \quad \text{e} \quad [\hat{a}_j^+, \hat{a}_k] = \hbar \delta_{j,k} \quad \text{C-2}$$

Desenvolvendo cada termo de C-1 temos:

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 \hat{J}_2 = \frac{\beta}{\Sigma} & \left( (\hat{a}_2^+ + \hat{a}_2) (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{2}\hbar \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4}\hbar^2 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{\hbar^3}{8}) \left( \frac{\hat{a}_1^+ \hat{a}_1}{6} + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \right) \right) \quad \text{C-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_2 \hat{H}_2 = \frac{\beta}{\Sigma} & \left( \frac{\hat{a}_1^+ \hat{a}_1}{6} + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \right) \left( (\hat{a}_2^+ + \hat{a}_2) (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}\hbar \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{3}{4}\hbar^2 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{\hbar^3}{8}) \right) \quad \text{C-4} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}_2, \hat{J}_2] &= \frac{\beta}{2} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2 + \hat{a}_2 - \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^+) \left( \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \hbar \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{3}{4} \hbar^2 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{\hbar^3}{8} \right) + (\hat{a}_2 \hat{a}_2 + \hat{a}_2 - \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2) \\
 &\quad \left( \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{3}{2} \hbar \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{3}{4} \hbar^2 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{\hbar^3}{8} \right) \quad \text{C-5}
 \end{aligned}$$

e utilizando as relações de comutação para  $(\hat{a}_2$  e  $\hat{a}_2^+)$  temos

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}_2, \hat{J}_2] &= \frac{\beta}{2} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^+) \hbar \left\{ \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{3}{2} \hbar \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4} \hbar^2 \hat{a}_1 + \hat{a}_1 + \frac{\hbar^3}{8} \right\} \quad \text{C-6}
 \end{aligned}$$

E, como o operador  $\hat{H}_0 + \alpha \hat{H}_1$  comuta com  $\hat{J}_2$ , a relação C-5 expressa a comutação do hamiltoniano completo do sistema:

$$[\hat{H}, \hat{J}_2] = [\hat{H}_2, \hat{J}_2] \quad \text{C-7}$$

Para calcular  $\langle H, J_2 \rangle_{(J, \phi)}$  vamos usar as equações (51) e (52) e  $J_2 = I_2 + \frac{I_1}{6}$ , de acordo com (28);

$$\langle H_2, J_2 \rangle_{(J, \phi)} = \sum_i \left( \frac{\partial H_2}{\partial \phi_i} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial I_i} - \frac{\partial H_2}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \phi_i} \right) \quad \text{C-8}$$

$$\langle H_2, J_2 \rangle_{(J, \phi)} = \left( \frac{\partial H_2}{\partial \phi_1} \frac{\partial J_2}{\partial I_1} - \frac{\partial H_2}{\partial I_1} \frac{\partial J_2}{\partial \phi_1} \right) + \left( \frac{\partial H_2}{\partial \phi_2} \frac{\partial J_2}{\partial I_2} - \frac{\partial H_2}{\partial I_2} \frac{\partial J_2}{\partial \phi_2} \right) \quad \text{C-9}$$

$$\{H_2, J_2\}_{(J, \phi)} = \left( \frac{\partial H_2}{\partial \phi_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial I_2} \right) \quad \text{C-10}$$

$$\{H_2, J_2\}_{(J, \phi)} = -\beta I_1^3 I_2 \sin \phi_2 = i \frac{\beta}{2} I_1^3 (a_2 - a_2^*) \quad \text{C-11}$$

onde usamos a transformação (12). Analogamente ao caso quântico

$$\{H_2, J_2\}_{(J, \phi)} = \{H_2, J_2\}_{(J, \phi)} \quad \text{C-12}$$

Comparando a equação C-10 com a C-5 notamos que:

$$[ , ] \rightarrow -\frac{1}{i\hbar} [ , ]$$

com variáveis simetrizadas e o limite semiclássico

$$J = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

**APÊNDICE D - COMPUTAÇÃO DO MOVIMENTO PERTURBADO**  
( DUAS RESSONÂNCIAS )

A hamiltoniana é dada por:

$$H = (J_2 + 6\lambda J_1 - 6^2 c J_1^2 + 6^3 a J_1^3) + 6^3 J_1^3 (J_2 - J_1)^{1/2} \cdot \{ \alpha \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2 \} \quad D-1$$

e as equações de movimento são:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H / \partial J_1}{\partial H / \partial J_2}, \quad \dot{J}_1 = - \frac{\partial H / \partial \theta_1}{\partial H / \partial J_2}, \quad \dot{J}_2 = - \frac{\partial H / \partial \theta_2}{\partial H / \partial J_2} \quad D-2$$

Utiliza-se o apêndice B, trocando o sinal de  $\lambda$  e de  $c$  em todas equações. Assim a equação para  $\dot{\theta}_1$  é dada por (B-3) acrescida no numerador da contribuição,

$$(J_2 - J_1)^{1/2} \cdot [648 a J_1^2]$$

A equação para  $\dot{J}_1$  é a própria (B-4) e à hamiltoniana reduzida (B-7) adicionamos  $(6^3 a J_1^3)$  no último termo entre colchetes.

Para fazer a aproximação do pêndulo e a linearização do movimento seguimos procedimento análogo ao do apêndice B. Deve-se ter em conta que agora existem dois pontos fixos hiperbólicos, um em  $\theta_1=0$  e outro  $\theta_1 = \pi$ . Assim as novas constantes que aparecem são dadas por:

$$C_1 = \frac{\{-72c(J_{2,0}-J_R)^{3/2} + 6^4 a J_R (J_{2,0}-J_R)^{3/2} \pm \alpha 6^4 J_R (J_{2,0}-J_R)^2 \mp 648 \alpha J_R^2 (J_{2,0}-J_R) \mp 54 \alpha J_R^3\}}{2(J_{2,0} - J_R)^{3/2}} \quad D-3$$

$$C_2 = 6\lambda J_R - 6^2 c J_R^2 + 6^3 a J_R^3 \quad D-4$$

onde o sinal superior que aparece em D-3 corresponde ao ponto fixo hiperbólico em  $\theta_1=0$  e o sinal inferior ao outro em  $\theta_1=\pi$ . Deve-se salientar que em cada caso existe um  $J_R$  apropriado. As demais equações do apêndice B se aplicam diretamente aqui.

Para desenhar as separatrizes fazemos esta aproximação do pêndulo com a linearização de  $J_1$  e  $\theta_1$  na vizinhança de cada ponto fixo hiperbólico e damos um conjunto de condições iniciais cujas evoluções são governadas pelas equações D-2. Na separatriz maior foram calculadas 500.000 iterações para cada gráfico enquanto que na separatriz menor 200.000 iterações, utilizando o passo fixo  $h = 2\pi/170$  no algoritmo de Runge-Kutta.

Os parâmetros que aparecem em D-1 são dados por,

$$\kappa = 0.9917/6$$

$$J_2 = \kappa(180 + 1/12)$$

$$\lambda = 1/32.1$$

$$c = (6^{**}(-3))/4$$

$$a = (6^{**}(-6))/2$$

$$\alpha = [0.8 \quad -1.3] * (6^{**}(-8))$$

$$\beta \approx (6^{**}(-9))$$

## APÊNDICE E - DISTRIBUIÇÃO DE HUSIMI

Uma possibilidade para entender a mecânica quântica de sistemas que possuem análogos clássicos é estudar aproximações semiclássicas que forneçam resultados no espaço de fases.

Frequentemente utiliza-se a função de Wigner<sup>(56)</sup>

$$\rho_W(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int dQ e^{-ipQ/\hbar} \psi^*(q - Q/2) \cdot \psi(q + Q/2) \quad E-1$$

como sendo a função densidade de probabilidade.

O inconveniente no uso de (E - 1) é que ela pode assumir valores negativos<sup>(56)</sup>. Porém mostra-se<sup>(57)</sup> que, quando a função de Wigner é suavizada por uma gaussiana cuja largura é da ordem de  $\hbar$ , ela será não negativa em todos estados quânticos. Daí pode-se definir a função de Husimi como uma distribuição de probabilidade em termos de estados coerentes<sup>(58)</sup>.

$$\rho_H(q, p) = |\langle \psi | Z \rangle|^2 \quad E-2$$

onde

$$|Z\rangle = e^{-ZZ^*/2} \cdot e^{Z\hat{a}^+} |0\rangle \quad E-3$$

e

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{q}{b} + i \frac{pb}{\hbar} \right\} \quad E-4$$

é uma variável complexa e  $b$  uma constante.

A interpretação de E-2 é que o valor de  $\rho_H(q, p)$  nos dá a distribuição de probabilidade em  $q \pm b$  e  $p \pm \frac{\hbar}{b}$ .

E expandindo os autoestados  $|\psi\rangle$  em termos dos estados  $|n\rangle$ , temos

$$\rho_H^i(q, p) = \left| \sum_n a_n^i \cdot e^{-ZZ^*/2} \cdot \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 \quad \text{E-5}$$

onde o índice  $i$  especifica o autoestado ao qual  $\rho_H$  se refere.

Computamos  $\rho_H^i$  para o problema integrável de duas ressonâncias. Os coeficientes  $a_n^i$  são obtidos da diagonalização computacional de um bloquinho. Para cada  $i$  obtém-se uma combinação linear dos  $n$  autoestados da matriz diagonal. Dividimos o espaço de fases em um reticulado e cada par  $(p, q)$  fornece um valor para a variável  $Z$ . Assim traçamos curvas de nível de  $\rho_H^i$  para cada autoestado  $i$ .

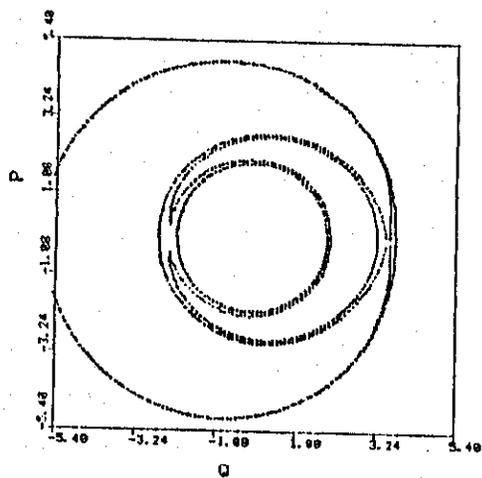
As variáveis  $(p, q)$  que aparecem em (E-4) são relacionadas às variáveis  $(J_1, \theta_1)$  por:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2 J_1} \cdot \sin\theta_1 \\ q &= \sqrt{2 J_1} \cdot \cos\theta_1 \end{aligned} \quad \text{E-6}$$

Deve-se salientar que  $(p, q)$  são diferentes dos momentum  $p_1$  e posição  $q_1$  definidos em (13).

Nas figuras a seguir vemos algumas distribuições de Husimi para três valores de  $\alpha$  e as respectivas separatrizes. As computações foram feitas por Marcus Aguiar,

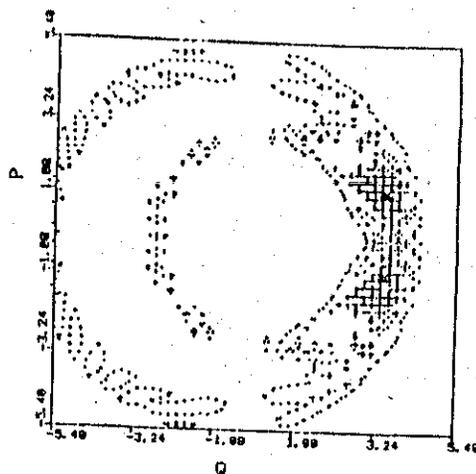
CURVAS DE NIVEL



INBILIONARIA COM BUNS RESSOURCINGS

a)

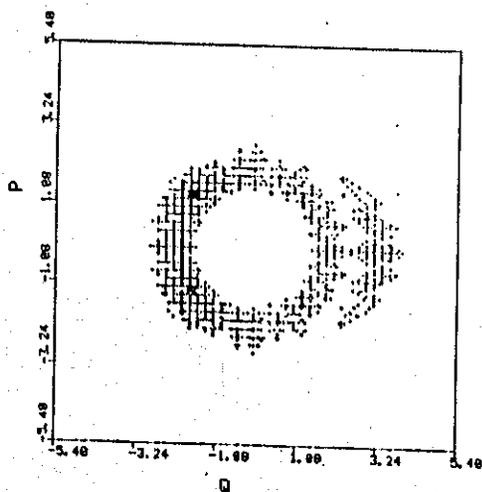
DISTRIBUICAO DE HUSIMI



AUTO-ESTADO NUMERO 55

b)

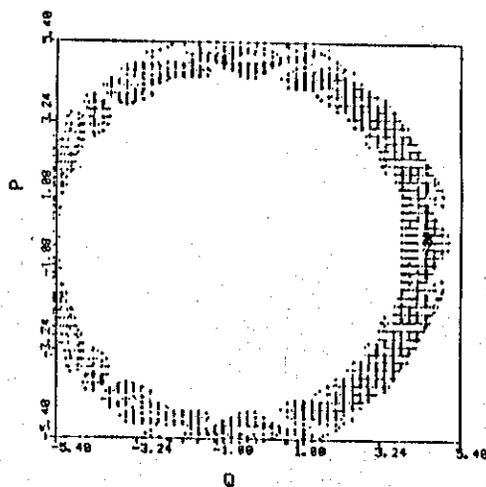
DISTRIBUICAO DE HUSIMI



AUTO-ESTADO NUMERO 61

c)

DISTRIBUICAO DE HUSIMI



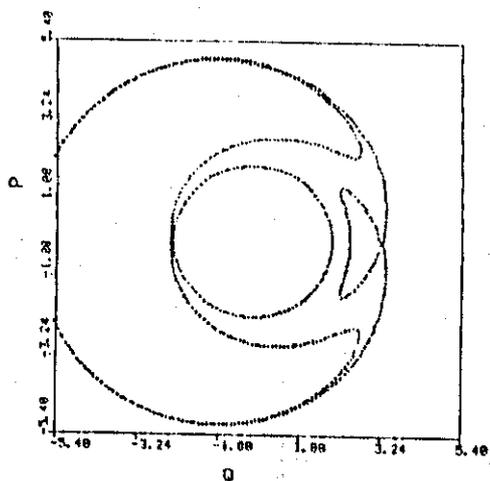
AUTO-ESTADO NUMERO 88

d)

FIGURA 65 :  $(\alpha = 0.8 * (6 ** (-8)))$

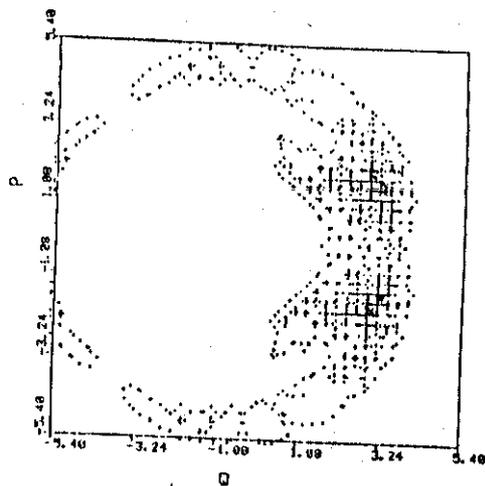
A figura (a) é equivalente à figura 31. Em (b)  $\rho_H$  concentra-se na vizinhança de um ponto hiperbólico e distribui-se ao longo de uma separatriz. Em (c)  $\rho_H$  concentra-se na vizinhança do outro ponto hiperbólico e está próxima à outra separatriz. Em (d)  $\rho_H$  corresponde a uma rotação.

CURVAS DE NIVEL



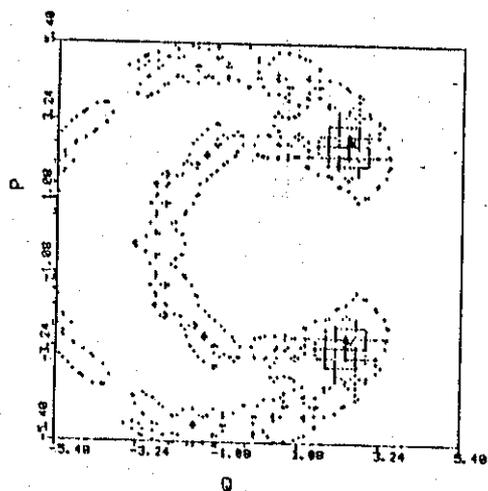
INILTONIAN COM DUAS RESSONANCIAS  
a)

DISTRIBUICAO DE HUSINI



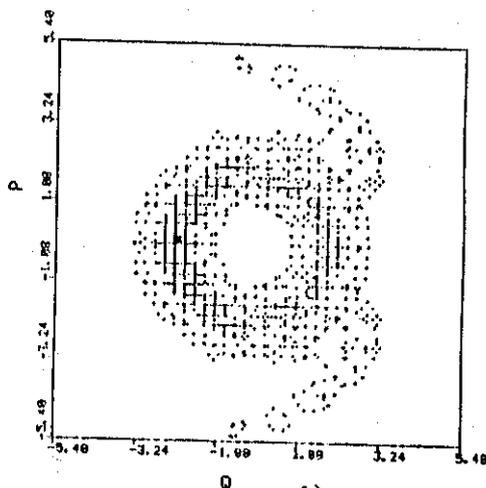
AUTO-ESTADO NUMERO 67 b)

DISTRIBUICAO DE HUSINI



AUTO-ESTADO NUMERO 55 c)

DISTRIBUICAO DE HUSINI

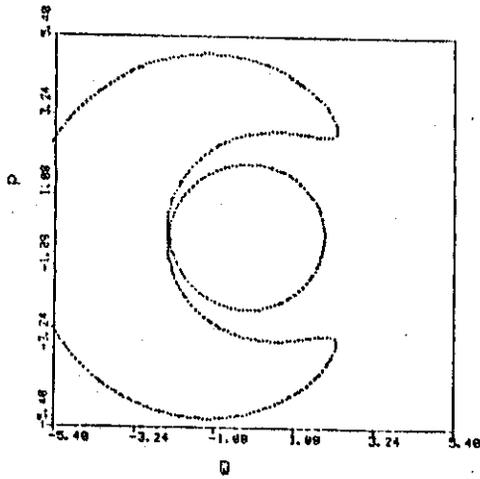


AUTO-ESTADO NUMERO 56 d)

FIGURA 66 :  $(\alpha = 1.1 * (6 ** (-8)))$

A curva de nível (a) é equivalente à figura 36. Em (b)  $\rho_H$  concentra-se na vizinhança de um ponto hiperbólico e distribui-se próxima a uma separatriz clássica. Em (c)  $\rho_H$  corresponde a uma libração. Em (d)  $\rho_H$  concentra-se na vizinhança do outro ponto hiperbólico e distribui-se ao longo da outra separatriz.

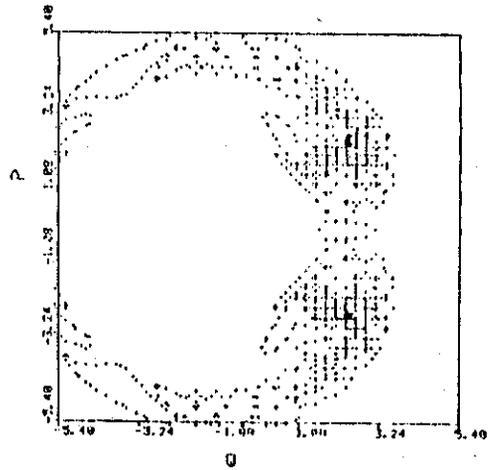
CURVAS DE NIVEL



HAMILTONIANA COM DUAS RESSONANCIAS

a)

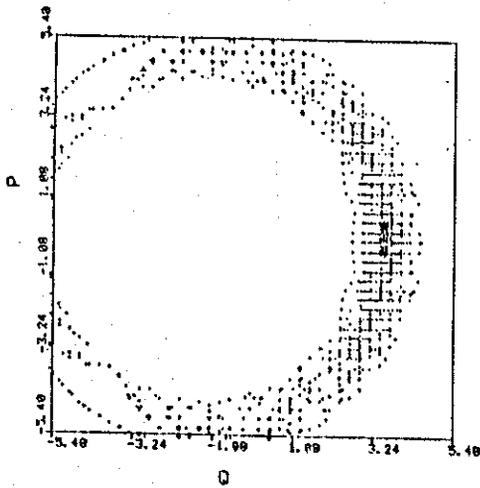
DISTRIBUICAO DE HUSIMI



AUTO-ESTADO NUMERO 67

b)

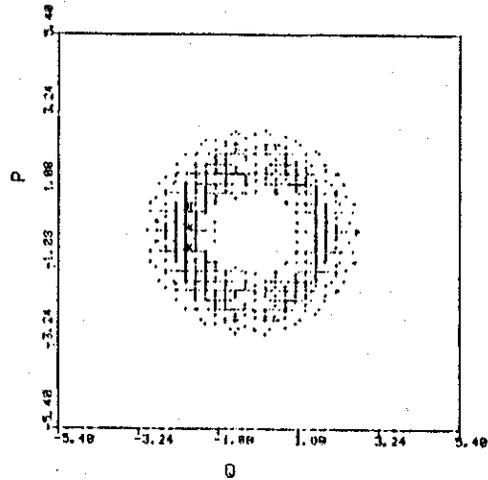
DISTRIBUICAO DE HUSIMI



AUTO-ESTADO NUMERO 75

c)

DISTRIBUICAO DE HUSIMI



AUTO-ESTADO NUMERO 55

d)

FIGURA 67 :  $(\alpha = 1.3 * (6 ** (-8)))$

A figura (a) é equivalente à figura 38. Em (b) a distribuição de Husimi concentra-se na vizinhança do ponto hiperbólico imaginário. A figura (c) corresponde à uma rotação. Em (d)  $\rho_H$  concentra-se na vizinhança do ponto hiperbólico real e corresponde a uma rotação.

## REFERÊNCIAS

- 1) BERRY M.V. , 1983 in Proc. July 1981 "Les Houches Summer School on Chaotic Behaviour of Deterministic Systems" ed. R.H. G.Helleman and G.Iooss (Amsterdam: North-Holland)
- 2) MASLOV V.P. , FEDORINK M.V. , "Semiclassical Aproximation in Quantum Mechanics" (Reidel, Dordrecht, 1981)
- 3) OZÓRIO DE ALMEIDA, A.M. ; Rev. Bras. Fis., 14, 62, (1984)
- 4) MEHTA M.L. , "Randon Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels" - 1967 - Academic Press Inc.
- 5) BOHIGAS O. , GIANNONI M.J. , SCHIMIT C. , Phys. Rev. Lett. 52 (1984), 1
- 6) BOHIGAS O. , GIANNONI M.J. , "Proceedings of the Sixth Granada Workshop", Springer-Verlag, 1984, 1
- 7) GUTZWILLER M.C. , J. Math. Phys., 12 (3), 1971, 343
- 8) BERRY M.V. , "AIP Conference Proceedings", New York, 1978
- 9) CHIRIKOV, B.V. , Phys. Reports 52, 265, (1979)
- 10) PERCIVAL I.C. , Adv. Chem. Phys. 36, (1977), 1
- 11) ROBNIK M. , J. Phys. Math. A: Math. Gen 17 (1984) , 109
- 12) HÉNON M. and HEILES C. ; 1964, Astron. J., 69,73
- 13) ROBNIK M. 1981, J.Phys. A: Math. Gen. 14, 3195
- 14) CHURCHILL R.C., PECILLI G. and ROD D.L. ; 1978 in "Lectures Notes in Physics", Vol. 93 (Berlim: Springer)
- 15) CHANG Y.F., TABOR M. and WEISS J. ; 1982, J. Math. Phys. 23, 531
- 16) BRAUN M., 1973 ; J. Differential Equations 13, 300
- 17) KUMMER M. ; 1976, Commun Math. Phys. 48, 53
- 18) SIEGEL C.L. ; 1941, Ann. Math. 42, 806
- 19) ARNOLD V.I. ; "Mathematical Methods of Classical Mechanics" , 1978, Springer-Verlag, New York

- 20) OZÓRIO DE ALMEIDA A.M. ; "Sistemas hamiltonianos: Caos e Quantização",  
1987, Editora Unicamp, Campinas-SP
- 21) EGYDIO DE CARVALHO R. ; Tese de Mestrado (UNICAMP 1985)
- 22) LEAF B. ; J. Math. Phys., 10, 11, 1971
- 23) GUSTAVSON F.G. 1966; Astron. J. , 71, 670
- 24)
- 25) SHEWELL J.R. ; Am. J. Phys., 27, (1959), 16
- 26) CASTELLANI L. ; Il Nuovo Cimento, 10, 1978
- 27) ECKHARDT B. ; J. Phys. A: Math. Gen., 19, (1986), 2961
- 28) ALI M. K. ; J. Math. Phys., 26, (10), October 1985, 2565
- 29) SWIMM R.T. and DELOS J.B.; 1979; J. Chem. Phys., 71, 1706
- 30) REINHARDT W.P. and FARELLY D.; 1982, J. Physique (coloque) 43, C2-29
- 31) WILLIAMS R.A. and KOONINS S.E.; 1982; "Semiclassical Quantization of the  
Shell Model" , Preprint Caltech, april, 1982
- 32) GUCKENHEIMER J. and HOLMES P. ; "Nonlinear Oscillations, Dynamical  
Systems and Bifurcations of Vector Fields" (Springer-Verlag, New York  
1983)
- 33) ARNOLD V.I. ; "Chapitres Suplementaires de La Théorie des Equations  
Differentielles Ordinaires" (Mir, Moscou, 1980)
- 34) OZÓRIO DE ALMEIDA, A.M. ; J. Phys. Chem., 88 , 6139, (1984)
- 35) RAMASWAMY R. , MARCUS R.A. ; J. Chem. Phys., 1981, 74, 1379
- 36) NOID D.W. , KOSZYKOWSKI M.L. , MARCUS R.A. ; J. Chem. Phys., 1983, 78, 4018
- 37) UZER T. , NOID D.W. , MARCUS R.A. ; J. Chem. Phys., 1983, 79, 4412
- 38) DRAGT A.J. and FINN J.M. ; J. Geophys. Res., 81, 2327, (1976)
- 39) GREENE J.M. ; J. Math. Phys., 9, (1968), 760
- 40) MACKAY R.S. ; Physica 7D, (1983), 283
- 41) ESCANDE D.F. , Phys. Reports, 121, (1985), 165
- 42) MACKAY R.S. , MEISS J.D. and PERCIVAL I.C. ; Physica, 13D, (1984), 55

- 43) ZIMAN J.R. , "Elements of Advanced Quantum Theory", Cambridge University Press, 1969
- 44) OZÓRID DE ALMEIDA A.M. ; notas manuscritas
- 45) SMIRNOV V.I. , "A course of Higher Mathematics", Vol. III, Pergamon Press, (1964), London
- 46) CHIRIKOV, B.V. ; Plasma Phys. (J.N.E. pt. C) 1, 253, (1960)
- 47) SMITH G.R. ; "Ph. D. Thesis, University of California", Berkeley, Califórnia (Lawrence Berkeley Lab. Report LBL-6824), (1977)
- 48) SMITH G.R. and PEREIRA ; Phys. Fluids, 21, 2253, (1978)
- 49) LICHTENBERG A.J. , LIEBERMAN M.A. ; "Regular and Stochastic Motion", 1983, Springer-Verlag, New York
- 50) WALKER G.H. and FORD J. ; Phys. Rev. 186, 41, (1969)
- 51) ROSEMBLUTH M.N. , SAGDEEV R.Z. , TAYLOR J.B. , ZASLAVSKII G.M. ; Nucl Fusion, 6, 207, (1966)
- 52) POINCARÉ H. ; "Les Méthodes Nouvelles de la Mecanique celeste", Vols. 1-3 (1892, 1893, 1899)
- 53) KOLMOGOROV A.N. ; Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 98, (1954), 527; "General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics" , Proc. Intern. Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1958, Vol. I pg. 315
- 54) ARNOLD V.I. ; Usp. Mat. Nauk., 18, No 6, (1983) 91; ARNOLD V.I. , AVEZ A. ; "Ergodic Problems of Classical Mechanics", (Benjamin, Inc., New York, 1968)
- 55) MOSER J. ; Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. K. L., No 1 (1962), 1 ; "Stable and Random Motions in Dynamical Systems" Annals of Mathematics Studies, No 77, (University Press, Princeton, 1973)
- 56) TAKAHASHI K.; J. Phys. Soc. Jpn., 55, (1986), 762
- 57) CARTWRIGHT N.D.; Physica 83A, (1976), 210
- 58) AGUIAR M.; Notas manuscritas