

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

**ASPECTOS SEMICLÁSSICOS DOS
BILHARES DE AÇÃO**

César Augusto Rodrigues Castilho

Orientador: Alfredo Miguel Ozório de Almeida

Dissertação submetida ao
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
sob orientação do Professor
Dr. Alfredo Miguel Ozório de Almeida
para obtenção do título de Mestre em Física.

1993

*Este exemplar corresponde à redação final
da Tese defendida pelo aluno César Augusto Rodrigues
Castilho e aprovada pela Comissão Julgadora*

3/10/94

Alfredo M. Ozório de Almeida

Aos amigos Edmundo, Iracema e Cacá.

RESUMO

As famílias de órbitas periódicas estáveis do Bilhar de Ação do potencial $V(x, y) = 0.05x^2 + (y - (\frac{x}{2}))^2$ foram determinadas numericamente. Estudou-se a influência da órbitas periódicas encontradas sobre o espectro quântico da Hamiltoniana referente ao potencial. A análise foi feita utilizando-se a Fórmula do Traço de Gutzwiller.

ABSTRACT

We determined numerically the families of Stable Periodic Orbits of the potential $V(x, y) = 0.05x^2 + (y - (\frac{x}{2}))^2$. We studied the influence of the Periodic Orbits of the potential over the eigenvalues of the Quantum Hamiltonian of the potential. The analysis was carried out using the Trace Formula of Gutzwiller

Índice

Página

0 - Introdução	5
1 - Considerações Sobre os Sistemas Hamiltonianos	6
1.1 Fluxos Hamiltonianos e Mapas Simpléticos	6
1.2 Invariantes de Poincaré e Seção de Poincaré	13
2 - Bilhares no Espaço de Configurações	17
2.1 Coordenadas de Birkhoff e Mapa do Bilhar	17
2.2 O Invariante Integral	21
2.3 O Teorema Geométrico de Poincaré	24
2.4 Estabilidade das órbitas periódicas	24
2.5 Bilhar Circular	28
2.6 Bilhar Elíptico	29
2.7 Bilhares Ovais	37
2.8 Bilhar de Bunimovich	39
3 - Bilhar de Ação do Potencial Nelson	42
3.1 Introdução	42
3.2 Aspectos Qualitativos	50
3.3 Algoritmo para Acompanhamento de Órbitas Periódicas	51
3.4 Aplicação ao Potencial Nelson	53
3.5 Mapas de Fronteira para o Potencial Nelson	57
3.6 Órbitas Periódicas	67
4- Aspectos Semiclássicos	77
4.1 Introdução	77
4.2 Quantização do Bilhar de Ação	82
4.3 Análise Semiclássica do Bilhar de Ação do Potencial Nelson	84

5- Conclusões	96
Apêndice 1	98
Apêndice 2	100
Apêndice 3	103
Bibliografia	106
Agradecimentos	107

Introdução

A relevância teórica dos Bilhares de Ação pode ser melhor compreendida a partir de uma análise dos cálculo dos autovalores de uma Hamiltoniana genérica. Um dos procedimentos usuais empregado no cálculo dos autovalores consiste em representarmos a nossa matriz hamiltoniana na base de oscilador harmônico. Como o espaço não é compacto, tal representação gerará uma matriz de dimensão infinita. De forma a obtermos o espectro da Hamiltoniana o truncamento torna-se portanto inevitável. O problema então transforma-se. Ao invés da diagonalização da matriz infinita estaremos interessados na diagonalização de um bloco de matriz e da relação dos autovalores do nosso bloco com os autovalores da matriz original (o conhecido problema da convergência). Evidentemente os autovalores do bloco e os autovalores da matriz original diferem entre si. Dizemos que os autovalores do bloco são os autovalores da matriz original perturbados pelo processo de truncamento(o papel da perturbação aqui foi o de desacoplar o nosso bloco de matriz da matriz infinita). Uma pergunta se impõem: Existe algum sistema clássico, compacto no espaço de fase, cuja representação de sua Hamiltoniana na base de oscilador harmônico seja igual ao nosso bloco de matriz? A resposta é sim e esse sistema é o Bilhar de Ação gerado pela nossa Hamiltoniana. Em outras palavras: O Bilhar de Ação é o análogo clássico de nosso bloco de matriz.

No artigo " Action Billiards " M A M Aguiar e A M Ozorio de Almeida [16] mostram que o análogo clássico do bloco de matriz efetivamente diagonalizado de uma hamiltoniana genérica é um Bilhar generalizado ou " Bilhar no Espaço de Fases". O sistema recebe essa nomenclatura porque pode ser compreendido como um Bilhar com campo de forças no seu interior e com bordos definidos no Espaço de fases do sistema, ao invés de, como usual, no espaço de configurações. A definição de tal sistema, aparentemente abstrata, é a nosso ver, simplesmente mais uma realização da proposta da Mecânica Hamiltoniana de se tratar de forma equivalente as variáveis canonicamente conjugadas. Ilustremos esse ponto com um exemplo: Considere um Bilhar de partícula livre com o bordo no espaço de configurações. A partícula colidirá com o bordo do Bilhar e como resultado da conservação da energia (colisão elástica) a componente transversal ao bordo do momento da partícula

trocará de sinal. Um bordo definido na variável momento trocará os papéis desempenhados pelas variáveis momento e coordenada da partícula. A partícula então colidirá com o bordo que está definido no momento e em consequência dessa colisão, a coordenada conjugada a esse momento trocará de sinal (tal fato sendo também deduzido a partir da aplicação do princípio de conservação da energia). O bordo definido no espaço de fases induz portanto que tanto as variáveis momento quanto as variáveis coordenadas realizem colisões e apresentem comportamento descontínuo; em consequência, os Bilhares de Ação possuem dinâmica mais geral e complexa que a dos Bilhares usuais.

A quantização do Bilhar de Ação nos possibilita então darmos uma interpretação física a todo o bloco de matriz que efetivamente é diagonalizado e não somente, como usual, a parte convergida. Veremos que a parte convergida do espectro estará associada às trajetórias do Bilhar que não colidem com o bordo do Bilhar e que a parte divergida do espectro estará associada às trajetórias que colidem com o bordo do Bilhar. Tal fato atribui conteúdo físico ao termo "perturbação causada pelo truncamento" e abre, pelo menos teoricamente, a possibilidade de criarmos filtros que eliminem essa perturbação da totalidade do espectro diagonalizado. Tal fato seria uma importante conquista teórica visto as dificuldades numéricas inerentes ao processo de diagonalização e convergência de autovalores de uma Hamiltoniana genérica. Ressaltamos entretanto que tal problema, devido a sua dificuldade e as nossas limitações não foi abordado na presente monografia.

O objetivo dessa tese, muito mais simples em proposta, é investigar um Bilhar de Ação específico. A Hamiltoniana estudada é a Hamiltoniana do potencial Nelson [17]. O Bilhar estudado é um Bilhar quadrado, correspondente, como veremos, ao procedimento usual de truncamento da expansão na base de oscilador harmônico. Ao longo da tese desenvolvemos métodos para integração numérica e determinação da estrutura de órbitas periódicas do Bilhar de Ação estudado. Devido a limitação do algoritmo usado somente as famílias de órbitas periódicas estáveis são estudadas. A análise semi-clássica é realizada do ponto de vista da Fórmula do Traço de Gutzwiller.

A tese está organizada da seguinte forma:

No capítulos 1 e 2 desenvolvemos parte do instrumental teórico que será empregado nos capítulos subsequentes. No capítulo 1 mostramos que todo fluxo Hamiltoniano pode ser

compreendido como uma composição de mapas. Tal fato será utilizado para mostrarmos que o Bilhar de Ação estudado nessa tese não é simplético. No capítulo 2 fazemos uma revisão das principais ferramentas teóricas para o estudo qualitativo dos bilhares no espaço de configurações. Desenvolvemos os conceitos de coordenadas de Birkhoff e mostramos a existência do invariante integral para os Bilhares convexos. Os conceitos desenvolvidos são, a título de ilustração, empregados no estudo de bilhares tradicionais (circular, elíptico, oval e estádio).

No capítulo 3 estudamos o Bilhar de Ação do potencial Nelson. Aqui a utilização das coordenadas de Birkhoff nos permite o estudo do comportamento qualitativo do Bilhar de Ação. A grande vantagem das coordenadas de Birkhoff consiste em que através de sua utilização separamos as órbitas que colidem com o bordo do Bilhar das que não colidem. O mapa de fronteira gerado a partir de sua utilização nos permite ainda desenvolvermos o algoritmo para determinação de suas órbitas periódicas estáveis.

No capítulo 4 fazemos, a propósito de introdução, uma breve consideração sobre a Fórmula do traço de Gutzwiller e procedemos a análise semi-clássica do Bilhar de Ação do potencial Nelson.

No capítulo 5 apresentamos nossas conclusões.

Uma observação final com respeito as referências se faz obrigatória: Devido a uma limitação do editor de texto utilizado a numeração das referências segue a ordem de aparição no texto e não a sua relevância com respeito ao trabalho. Assim sendo, o artigo motivador desse trabalho, e portanto o mais importante, possui referência [16] e não referência [1])

Capítulo 1

Considerações sobre os Sistemas Hamiltonianos

1.1 Fluxos Hamiltonianos e Mapas Simpléticos

Seja $H(q, p, t)$ uma Hamiltoniana. Estamos interessados nas grandezas conservadas pelo fluxo gerado por essa Hamiltoniana. Para tanto, seja $f(q, p, t)$ uma função qualquer definida sobre as variáveis q, p e sobre o parâmetro t . A taxa de variação de f será dada por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (1)$$

Considerando as equações de movimento, isto é, considerando a taxa total de variação de f no movimento, segue que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (2).$$

Definimos os parênteses de Poisson de duas funções f e g como

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (3).$$

Portanto escrevemos (2) como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]. \quad (4)$$

Se a função f não depende explicitamente do tempo, isto é se $f = f(q, p)$, a função f será preservada ao longo do movimento se $[f, H] = 0$. O parênteses de poisson adquire portanto enorme importância no estudo das grandezas conservadas por um fluxo Hamiltoniano. Para duas dimensões escrevemos o parênteses de Poisson em termos matriciais como

$$[f, g] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z_1} \\ \frac{\partial g}{\partial z_2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

onde fizemos $z_1 = x$ e $z_2 = p_x$. Para dimensões maiores que 2 ($2n > 2$) escrevemos que

$$[f, g] = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial z_j} \right), \quad (6)$$

onde a matriz J é formada por blocos e dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

onde I representa a matriz unitária. Supondo as $2n$ quantidades $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ como as componentes de um vetor $\partial_z f$ e as $2n$ quantidades $\frac{\partial g}{\partial z_i}$ como as componentes de um vetor $\partial_z g$, escrevemos (6) compactamente como

$$[f, g] = (\partial_z f, J \partial_z g), \quad (8)$$

onde $(\ , \)$ representa o produto escalar usual. Em termos dos parênteses de Poisson as equações de Hamilton podem ser escritas como

$$\dot{q}_i = [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (9)$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (10)$$

onde $i = 1, \dots, n$. Criando o vetor $\eta = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ as equações (9) e (10) podem ser escritas como

$$\dot{\eta}_i = (J \partial_n H)_i, \quad (11)$$

para $i = 1, \dots, 2n$. Portanto as equações de Hamilton podem ser escrita em função de J . A importância de J é tão grande que faremos a seguinte definição [1]: Seja uma matriz M tal que

$$M^T J M = J, \quad (12)$$

dizemos então que M é simplética.

Vemos imediatamente que

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

é simplética. Temos também que se M é simplética e $\text{Det}M \neq 0$, segue que M^{-1} é simplética, pois

$$\begin{aligned} I^T J I = J, \quad \text{então,} \quad (M M^{-1})^T J (M M^{-1}) = J, \\ M^{-1 T} M^T J M M^{-1} = J \quad \Rightarrow \quad M^{-1 T} J M^{-1} = J. \end{aligned} \quad (14)$$

Vemos ainda que se M é simplética e P também o é, segue que MP e PM também são simpléticas pois

$$P^T J P = J, \quad P^T (M^T J M) P = J, \quad P^T M^T J M P = J. \quad \text{isto é,}$$

$$(MP)^T J M P = J. \quad (15)$$

Raciocínio análogo nos permite mostrar que PM também é simplética.

Mostramos que as matrizes simpléticas formam um grupo sobre a multiplicação usual. Essa propriedade das matrizes simpléticas será extremamente importante para demonstrarmos a relação entre os fluxos Hamiltonianos e uma dada classe de mapas.

As matrizes simpléticas possuem uma representação em série que será de nosso particular interesse. Definimos a exponencial de uma matriz A a partir da expansão em série da função exponencial, isto é

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (16)$$

Suponha M uma matriz simplética próxima a identidade. Escrevemos M como

$$M = e^{\epsilon B} = I + \epsilon B + \frac{\epsilon^2 B^2}{2!} + \dots \quad \text{onde,} \quad \epsilon \ll 1. \quad (17)$$

Usando a condição simplética, segue que

$$(I + \epsilon B^T) J (I + \epsilon B) = J + O(\epsilon^2),$$

$$I J I + \epsilon I J B + \epsilon B^T J I + \epsilon^2 B^T B = J + O(\epsilon^2),$$

$$J + \epsilon (J B + B^T J) = J + O(\epsilon^2). \quad (18)$$

Para a expressão anterior se verificar é necessário que o termo em ϵ se anule, isto é que

$$J B + B^T J = 0. \quad (19)$$

Escrevendo B como o produto $J S$, segue que

$$J J S + S^T J J = 0, \quad \text{isto é,} \quad S^T = S. \quad (20)$$

Portanto S é uma matriz simétrica.

Mostramos que uma matriz simplética M , próxima a matriz identidade, admite uma expansão em série do tipo

$$M = I + \epsilon JS + \frac{\epsilon^2 JSJS}{2!} + \dots, \quad ,$$

onde S é uma matriz simétrica. Mostraremos a seguir o inverso, isto é, que se $M = e^{\epsilon JS}$, com S simétrica, então M é simplética.

$$M = e^{\epsilon JS} \quad (21)$$

$$M^T = e^{\epsilon(JS)^T} = e^{\epsilon S^T J^T} = e^{-\epsilon SJ}. \quad (22)$$

Usando a relação simplética segue que

$$\begin{aligned} M^T J M &= e^{-\epsilon SJ} J e^{\epsilon JS} = I e^{-\epsilon SJ} J e^{\epsilon JS}, \\ &= J(J^{-1} e^{-\epsilon SJ} J) e^{\epsilon JS}, \\ &= J \left[J^{-1} (I - \epsilon SJ + \frac{\epsilon^2 SJSJ}{2} + \dots) J \right] e^{\epsilon JS}, \end{aligned}$$

inserindo a matriz identidade JJ^{-1} no terceiro termo do colchete, segue que

$$\begin{aligned} M^T J M &= J \left[1 - \epsilon J^{-1} S J^2 + \frac{\epsilon^2 (J^{-1} S J^2)(J^{-1} S J^2)}{2} + \dots \right] e^{\epsilon JS}, \\ &= J e^{J^{-1} S J^2} e^{\epsilon JS}, \\ &= J e^{-\epsilon JS} e^{\epsilon JS}, \end{aligned}$$

$$M^T J M = J,$$

como queríamos mostrar. Resumindo: qualquer matriz simplética próxima à matriz identidade pode ser escrita na forma $e^{\epsilon JS}$ com $\epsilon \ll 1$ e S simétrica, e inversamente, qualquer matriz $A = e^{\epsilon JS}$ com $\epsilon \ll 1$ e S simétrica é uma matriz simplética próxima a identidade.

Definiremos os Mapas Simpléticos que, como veremos, estão intimamente relacionados aos fluxos hamiltonianos. Sejam z_1, \dots, z_{2n} variáveis canonicamente conjugadas de um Hamiltoniano H . Suponha uma transformação de coordenadas M ,

$$M : Z \rightarrow \bar{Z}.$$

Seja $\mathcal{M}(z, t)$ o Jacobiano do mapa M ,

$$\mathcal{M}_{ij}(z, t) = \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_j}. \quad (23)$$

O mapa M é dito simplético se sua matriz jacobiana for uma matriz simplética para todos os valores de z e t . Veremos que para que o mapa M seja simplético, basta que preserve os parênteses de Poisson das coordenadas z_i . Consideremos os parênteses de Poisson das coordenadas \bar{z}_j . Pela equação (8) segue que

$$[\bar{z}_i, \bar{z}_j] = \sum_{l,m} \left(\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_l} J_{lm} \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial z_m} \right).$$

Pela definição (12)

$$[\bar{z}_i, \bar{z}_j] = \sum_{l,m} \mathcal{M}_{il} J_{lm} \mathcal{M}_{mj},$$

$$[\bar{z}_i, \bar{z}_j] = \sum_{l,m} \mathcal{M}_{il} J_{lm} \mathcal{M}_{jm}^T,$$

$$[\bar{z}_i, \bar{z}_j] = (\mathcal{M}J\mathcal{M}^T)_{ij}.$$

Como \mathcal{M} é por hipótese simplética, segue que

$$[\bar{z}_i, \bar{z}_j] = (\mathcal{M}J\mathcal{M}^T)_{ij} = J_{ij} = [z_i, z_j], \quad (24)$$

como afirmamos.

Um mapa simplético possui uma interpretação geométrica simples. Seja um ponto z^0 mapeado em \bar{z}^0 pela ação de M . Seja δz e dz dois vetores tangentes a z^0 mapeados em $\delta \bar{z}$ e $d\bar{z}$ respectivamente, tangentes a \bar{z}^0 . Pela regra da cadeia escrevemos que

$$d\bar{z}_i = \sum_j \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_j} dz_j \quad (25)$$

ou

$$d\bar{z} = M dz. \quad (26)$$

Analogamente

$$\delta \bar{z} = M \delta z. \quad (27)$$

Definimos a quantidade $(\delta\bar{z}, Jd\bar{z})$. Chamamos essa quantidade de 2-forma simplética fundamental. Usando (26) e (27) segue que

$$(\delta\bar{z}, Jd\bar{z}) = (M\delta z, JMdz) = (\delta z, M^T JMdz) = (\delta z, Jdz),$$

ou seja, o mapa simplético preserva o valor da 2-forma simplética fundamental $(\delta z, Jdz)$. Mostraremos a seguir que um fluxo Hamiltoniano, gerado por uma Hamiltoniana H , equivale a um mapa simplético. Consideremos em um tempo t^0 as condições iniciais $z_1(t^0), \dots, z_{2n}(t^0)$. Em um tempo t^f , o ponto z^0 no espaço de fases especificado por essas condições iniciais evoluirá através das equações de movimento dadas por H para o ponto z^f determinado por $z_1(t^f), \dots, z_{2n}(t^f)$. Afirmamos então que

$$M : z^0 \rightarrow z^f$$

é um mapa simplético.

Suponha que

$$\begin{aligned} T = t^f - t^0, \quad \text{isto é, que} \\ t^f = t^0 + T. \end{aligned} \tag{28}$$

Dividindo o intervalo T em N passos de duração h temos que

$$T = Nh. \tag{29}$$

Definimos os tempos intermediários t^m pela relação

$$t^m = t^0 + mh, \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, N. \tag{30}$$

M será então dado pela composição de mapas entre tempos vizinhos t^m e t^{m+1} , isto é,

$$M = M_{t^{N-1}}^{t^f} \dots M_{t^m}^{t^{m+1}} \dots M_{t^0}^{t^1}, \tag{31}$$

onde $M_{t^m}^{t^{m+1}}$ representa o mapa entre os pontos

$$z^m = z_1(t^m), \dots, z_{2n}(t^m), \quad \text{e} \quad z^{m+1} = z_1(t^{m+1}), \dots, z_{2n}(t^{m+1}).$$

Queremos mostrar então que M é simplética. Pela definição, M é um mapa simplético se sua matriz Jacobiana \mathcal{M} for uma matriz simplética. A matriz jacobiana de M pode ser obtida usando a regra da cadeia no produto de matrizes (31). Sendo a derivação uma operação linear, o Jacobiano de M será dado pelo produto dos jacobianos que compõem o produto (31), isto é

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{t^{n-1}}^{t^j} \dots \mathcal{M}_{t^m}^{t^{m+1}} \dots \mathcal{M}_{t^0}^{t^1}, \quad (32)$$

expandindo em série de Taylor, a relação entre z^{m+1} e z^m pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} z_i^{m+1} &= z_i(t^{m+1}) = z_i(t^m + h), \\ &= z_i(t^m) + h \dot{z}_i(t^m) + O(h^2), \\ &= z_i(t^m) + h(J\partial_z H)_i + O(h^2), \end{aligned} \quad (33)$$

onde na última equação usamos as equações de Hamilton na forma (11). Derivando essa última expressão em relação a z_j^m segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i^{m+1}}{\partial z_j^m} &= \frac{\partial z_i^m}{\partial z_j^m} + h \frac{\partial}{\partial z_j^m} (J\partial_z H) + O(h^2), \\ (\mathcal{M}_{t^m}^{t^{m+1}})_{i,j} &= \delta_{i,j} + h \sum_l J_{i,l} \frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_j} + O(h^2); \end{aligned}$$

de forma compacta escrevemos que

$$\mathcal{M}_{t^m}^{t^{m+1}} = I + hJS + O(h^2), \quad (34)$$

onde S é a matriz simétrica $S_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}$.

A expansão (34) é a expansão de uma matriz simplética próxima à identidade. Portanto a matriz $\mathcal{M}_{t^m}^{t^{m+1}}$ é, a menos de termos da ordem de h^2 , simplética. Como as matrizes simpléticas formam um grupo, o produto \mathcal{M} definirá uma matriz simplética a menos de termos da ordem de Nh^2 . No limite $h \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, termos proporcionais a Nh^2 desaparecem, então

$$Nh^2 = \left(\frac{T}{h}\right)h^2 = Th, \quad (35)$$

ou seja, Th desaparece quando $h \rightarrow 0$. Segue que \mathcal{M} é uma matriz simplética e M um mapa simplético. Portanto, descrever um fluxo Hamiltoniano é equivalente a calcular e representar um mapa simplético.

Exemplo : O Oscilador Harmônico

Para o oscilador harmônico temos que

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{w^2 x^2}{2}.$$

fazendo-se $z_1 = x$ e $z_2 = p_x$ o mapa $M : z^0 \rightarrow z^f$ será dado por

$$\begin{aligned} z_1^f &= z_1^0 \cos(\phi) + \frac{z_2^0 \sin(\phi)}{w}, \\ z_2^f &= -w z_1^0 \sin(\phi) + z_2^0 \cos(\phi). \end{aligned}$$

onde $\phi = w(t^f - t^0)$. O Jacobiano será então dado por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \frac{\sin(\phi)}{w} \\ -w \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix};$$

segue que

$$\mathcal{M}^T = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -w \sin(\phi) \\ \frac{\sin(\phi)}{w} & \cos(\phi) \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}^T J \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -w \sin(\phi) \\ \frac{\sin(\phi)}{w} & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \frac{\sin(\phi)}{w} \\ -w \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

como tinha de ser.

1.2 Invariantes de Poincaré e Seção de Poincaré

Considere um conjunto de condições iniciais no espaço de fases ocupando uma região R^i . O volume desse conjunto será dado por

$$V^i = \int_{R^i} dz_1^i \dots dz_{2n}^i. \quad (36)$$

Após um tempo t^f a região R^i será levada pelo fluxo do Hamiltoniano H para uma região R^f . O volume dessa região será dado por

$$V^f = \int_{R^f} dz_1^f \dots dz_{2n}^f. \quad (37)$$

Como vimos, a relação entre z^i e z^f é dada por um mapa simplético M . A relação entre as diferenciais z_i e z_f será dada por

$$dz^f = M dz^i, \quad (38)$$

onde M é uma matriz simplética. Segue portanto que

$$V^f = \int_{R^i} |Det M| dz_1^i \dots dz_{2n}^i. \quad (39)$$

Mas $|Det M| = +1$ pois

$$Det(M^T J M) = Det J = 1, \quad Det M^T Det J Det M = 1,$$

$$Det^2 M = 1, \quad Det M = \pm 1. \quad (40)$$

Decorre que

$$V^f = \int_{R^i} dz_1^i \dots dz_{2n}^i = V^i; \quad (41)$$

ou seja, o fluxo hamiltoniano preserva volume no espaço de fases. O volume é um dos Invariantes Integrais de Poincaré. É um dentre toda uma classe de invariantes integrais. Suponha que no instante t^i um conjunto de condições iniciais ocupe a região bidimensional R^i . Considere a integral sobre essa superfície dada por

$$I^i = \int_{R^i} (\delta z^i, J dz^i). \quad (42)$$

No instante de tempo t^f , $t^f > t^i$, teremos que

$$I^f = \int_{R^f} (\delta z^f, J dz^f). \quad (43)$$

Usando a relação (38) segue que

$$I^f = \int_{R^i} (M \delta z^i, J M dz^i), \quad (44)$$

ou seja,

$$I_2^f = I_2^i. \quad (45)$$

Segue que a integral baseada na 2-forma simplética fundamental é conservada pelo fluxo. A integração na 2-forma é, evidentemente, uma integração de área. Em coordenadas, e em duas dimensões, escrevemos a 2-forma fundamental como

$$(dz, Jdz) = \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} dx & dy & dp_x & dp_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dp_x \\ dp_y \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Efetuando o produto segue que

$$(dz, Jdz) = \frac{1}{2} (dx dp_x + dy dp_y - dp_x dx - dp_y dy). \quad (47)$$

$$(dz, Jdz) = dx dp_x + dy dp_y. \quad (48)$$

Podemos escrever portanto que

$$(dz, Jdz) = \sum_i dq_i dp_i. \quad (49)$$

Vimos que a Integral

$$I = \int_R \sum_i dq_i dp_i \quad (50)$$

é um invariante. Usando o teorema de Green podemos escrever que

$$I = \oint_{\partial R} \sum_i p_i dq_i. \quad (51)$$

onde ∂R é a borda da região R . Dada portanto a aplicação simplética $z(i) \rightarrow z(f)$ vemos que (51) é preservado ao longo do fluxo. Como o sistema preserva energia e estamos integrando para circuitos irredutíveis, segue que podemos escrever que

$$\oint_{\partial R_1} \sum_i (p_i dq_i - H dt) = \oint_{\partial R_2} \sum_i (p_i dq_i - H dt) \quad (52)$$

para um tempo t qualquer. (Na verdade, (52) é mais geral que (51)). Se considerarmos os instantes t^{f_i} como os instantes em que a partícula cruza uma superfície de Seção qualquer, segue de (52) que o mapa de Poincaré é simplético. Como para a seção de Poincaré teremos que $p_i = 0$ ou $q_i = 0$ segue de (51) que a seção de Poincaré preserva área [2]. (Nesse caso a área na seção de Poincaré é a própria Ação reduzida).

Uma interpretação geométrica bastante útil, que resume o conteúdo do teorema integral de Poincaré-Cartan pode ser dada para a expressão (52): Seja um tubo apoiado na curva ∂_{R_1} no espaço de fases estendido (p, q, t) . (52) expressa o fato de que qualquer outra curva irreduzível sobre o tubo terá a mesma ação completa $\oint_{\partial R} (p_i dq_i - H dt)$ que ∂_{R_1} . Como o teorema não restringe as curvas ∂_R a estarem no mesmo tempo t nem na mesma energia E , (51) segue pelo fato do sistema ser Hamiltoniano.

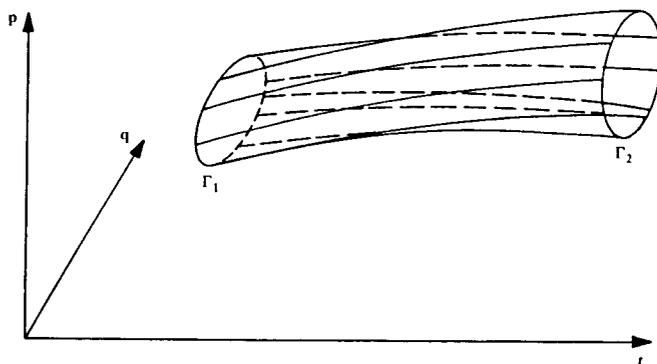


Fig 1.1 Interpretação de (52) para Espaço de Fases com Duas Dimensões

Ressaltamos aqui que tais propriedades são características de mapas simpléticos. Como veremos o Bilhar de Ação considerado nessa tese não será simplético e violará essas condições.

Bilhares no Espaço de Configurações

2.1 Coordenadas de Birkhoff e Mapa do Bilhar

A dinâmica do Bilhar é relativamente simples. O movimento da partícula entre duas colisões é o de uma partícula livre. Como a colisão é elástica a trajetória da partícula é independente de sua energia. Evidentemente para energias menores teremos um movimento mais lento e para energias maiores movimentos mais rápidos, entretanto, como estamos interessados em aspectos mais fundamentais da dinâmica dos Bilhares, como constantes de movimento e a topologia das suas órbitas periódicas, a velocidade do movimento será irrelevante.

A conservação do momento linear aplicada a colisão da partícula com a borda do Bilhar nos impõem que o ângulo de incidência da partícula em relação a normal à fronteira do Bilhar, seja igual ao ângulo de reflexão da partícula em relação a mesma normal (Lei de Fermat). Podemos, utilizando esse fato determinar a dinâmica do Bilhar. Consideremos uma condição inicial da partícula. Esta será determinada por um ponto s_0 sobre a curva B e uma direção p_0 associada ao ponto s_0 . Tomaremos s_0 como o comprimento de arco da curva B considerado em relação a uma origem arbitrária e p_0 como o cosseno do ângulo formado pela trajetória da partícula com a tangente (positivamente orientada) à curva B no ponto s_0 . s_0 e p_0 determinam a trajetória do Bilhar antes da próxima colisão com a fronteira. A colisão se dará no ponto s_1 , especificado pela interseção da reta definida por s_0 e p_0 com a curva B . A direção p_1 será obtida pela lei de Fermat. A reta determinada por s_0 e p_0 fará um ângulo α com a normal à curva no ponto s_1 . A nova direção p_1 é tal que a reta determinada por s_1 e p_1 faz um ângulo α com a normal no ponto s_0 . Considerando agora s_1 e p_1 como novas condições iniciais, geramos um mapa que representa a evolução temporal da partícula no Bilhar. As coordenadas s e p são chamadas de coordenadas de Birkhoff [3] e determinam univocamente a dinâmica do Bilhar. Mostraremos como calcular numericamente o mapa $(s_{n+1}, p_{n+1}) = M(s_n, p_n)$ para qualquer curva convexa [4].

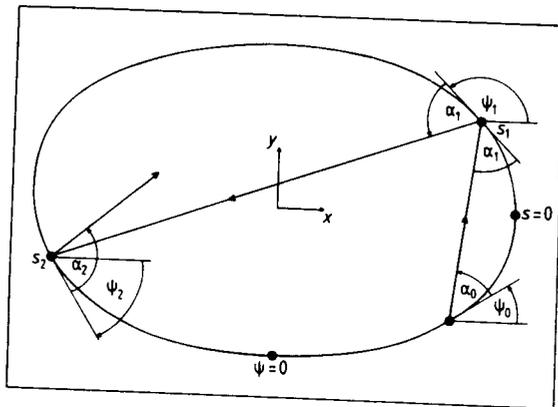


Fig. 2.1 Geometria do Bilhar

Seja ψ o ângulo entre a tangente (positivamente orientada) e o eixo x (vide Fig.1). Como a curva B é convexa ela não possui pontos de inflexão. Portanto podemos determinar univocamente um ponto na curva B especificando o valor de ψ (que vai de 0 a 2π). Seja $\beta(s)$ a curva B parametrizada em termos do comprimento de arco s (parâmetro natural). A curvatura $\kappa(s)$ da curva é definida como

$$\kappa(s) = \frac{1}{\left| \frac{d^2\beta(s)}{ds^2} \right|} \tag{1}$$

e o raio de curvatura como o seu inverso

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}. \tag{2}$$

O raio de curvatura no ponto s nos dá o raio do círculo tangente a curva B no ponto s . Da figura 2 vemos que ψ é ângulo externo do triângulo OSP .

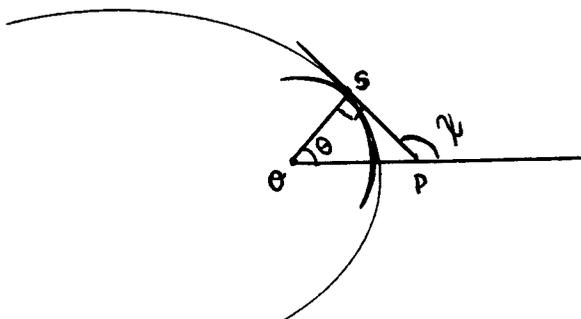


Fig. 2.2 Raio de Curvatura

Portanto

$$\psi = \theta + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou seja,} \quad d\psi = d\theta.$$

Para o círculo γ ,

$$s = R(s)\theta \tag{3}$$

$$ds = R(s(\psi))d\theta; \tag{4}$$

$$ds = R(\psi)d\psi; \tag{5}$$

$$R(\psi) = \frac{ds}{d\psi}. \tag{6}$$

Que nos dá o raio de curvatura para o ponto s em função de ψ .

O segmento de reta que começa em (ψ_0, α_0) (vide Fig.2) e termina em (ψ_1, α_1) tem uma inclinação dada por

$$\varsigma = \frac{x(\psi_1) - x(\psi_0)}{y(\psi_1) - y(\psi_0)}; \tag{7}$$

mas ,

$$x(\psi_1) - x(\psi_0) = \int \cos(\psi)ds = \int \cos(\psi) \frac{ds}{d\psi} d\psi; \tag{8}$$

$$x(\psi_1) - x(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \cos(\psi)d\psi; \tag{9}$$

analogamente para y temos que

$$y(\psi_1) - y(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \sin(\psi)d\psi. \tag{10}$$

Como $\varsigma = \tan(\psi_0 + \alpha_0)$ segue que

$$\frac{\int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \sin(\psi)d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \cos(\psi)d\psi} = \tan(\psi_0 + \alpha_0) \tag{11}$$

Esta equação nos determina numericamente ψ_1 dados ψ_0 e α_0 . α_1 é calculado observando-se que

$$(\psi_0 + \alpha_0) \neq \alpha_1 = \psi_1 \quad \text{ou seja,} \quad \alpha_1 = \psi_1 - \psi_0 + \alpha_0. \tag{12}$$

As equações (11) e (12) nos fornecem a evolução do mapa do Bilhar. A variável ψ pode ser transformada facilmente na variável s via equação (12). A variável s é periódica e com período igual ao perímetro do Bilhar. Podemos reescalonar a variável s de maneira que s tenha uma variação entre 0 e 2π . Para tanto fazemos

$$S = \left(\frac{2\pi}{L}\right)s \tag{13}$$

onde L é o perímetro do Bilhar. Sendo p o cosseno de um ângulo, p variará entre 1 e -1 . Portanto o domínio do Mapa do Bilhar

é dado pelo produto direto de S com p , ou seja por um anel.

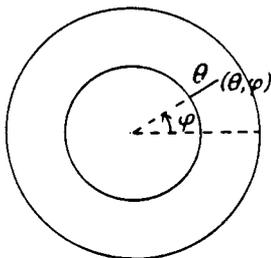


Fig. 2.3 Topologia do Bilhar

A dinâmica do Bilhar pode ser vista como uma aplicação do anel sobre si mesmo. O mapa

$$M : \alpha_1 = F(\alpha_0, s_0), s_1 = G(\alpha_0, s_0) \tag{14}$$

é chamado de Mapa do Bilhar [3].

Considere uma partícula no Bilhar, tendo como condição inicial um comprimento de arco s_0 . Para $\alpha_0 = \pi$ ou $\alpha_0 = 0$ a partícula é mapeada no mesmo ponto, ou seja ela não muda de posição. Tal fato se dará para qualquer s_0 , ou seja, os círculos internos e externos são invariantes pela ação do mapa. Consideremos agora a ação do mapa sobre um segmento de reta T radial ao anel. Seus pontos serão dados por $s_0 = constante$ e $\alpha_0 \in (0, \pi)$. Como vimos, $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_0 = \pi$ são invariantes. A medida que fazemos α_0 variar de 0 a π , estamos aumentando o ângulo da partícula com a tangente à curva B no ponto s_0 , ou seja, a partícula tocará a curva B em comprimentos de arco cada vez maiores. O segmento de reta T então se espirala em torno do anel, iniciando-se no ponto ($constante = 0$) $s_0 = 0, \alpha_0 = 0$ e terminando no ponto $s_0 = 0, \alpha_0 = \pi$. O Mapa do Bilhar pode ser visto como uma rotação do círculo externo de um ângulo de 2π ou, equivalentemente, como uma rotação do círculo interno de um ângulo -2π . Na verdade, ao considerarmos sucessivas aplicações do Mapa do Bilhar, faremos sempre as rotações em sentido inverso, isto é, a primeira aplicação girará o círculo exterior de 2π a segunda girará o círculo interior de -2π , a terceira girará o círculo exterior de 2π e assim sucessivamente.

Um importante fato, que demonstraremos a seguir, é que a transformação M admite um invariante integral.

2.2 O Invariante Integral

Teorema: A função

$$\int \int \sin(\alpha) d\alpha ds \quad (15)$$

avaliada em uma área σ do anel, tem o mesmo valor quando avaliada sobre as sucessivas imagens de M sobre σ .

Demonstração: Para fazermos a demonstração [3] percebamos que se $\int N(\alpha, s) d\alpha ds$ é invariante, teremos que

$$\int_{\sigma_1} \int N(\alpha_1, s_1) d\alpha_1 ds_1 = \int_{\sigma_0} \int N(\alpha_0, s_0) d\alpha_0 ds_0, \quad (16)$$

mas $d\alpha_1 ds_1 = J d\alpha_0 ds_0$, aonde J é o Jacobiano da transformação. Portanto para (16) se verificar, basta que

$$N(\alpha_1, s_1) = JN(\alpha_0, s_0). \quad (17)$$

Decorre que para provarmos que (15) é um invariante, basta mostrarmos que

$$J = \frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\alpha_1)}. \quad (18)$$

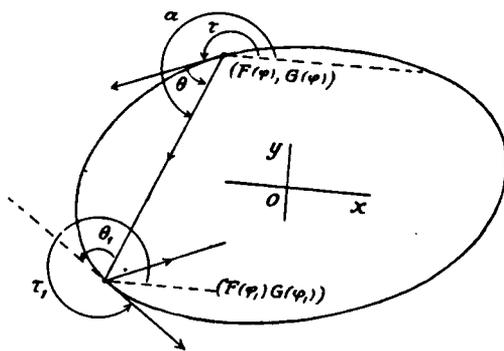


Fig. 2.4 Geometria do Bilhar

Seja $x = f(s), y = g(s)$ as equações de B em coordenadas retangulares. Segue que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}} = \frac{g'(s)}{f'(s)}. \quad (19)$$

Da figura (4) vemos que

$$\tan(\psi) = \frac{dx}{dy}, \quad \psi = \arctan\left(\frac{dx}{dy}\right). \quad (20)$$

Considerando χ como sendo o ângulo entre o eixo x (positivamente orientado) e a direção do movimento inicial, segue que

$$\alpha = \chi - \psi \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \psi_1 - \chi. \quad (21)$$

Escrevendo $\tan(\chi)$ como

$$\tan(\chi) = \frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \quad (22)$$

segue de (21) que

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)}\right) - \arctan\left(\frac{g'(s_0)}{f'(s_0)}\right) \equiv L(s_0, s_1) \quad (23)$$

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{g'(s_1)}{f'(s_1)}\right) - \arctan\left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)}\right) \equiv M(s_0, s_1). \quad (24)$$

Tomando os diferenciais de α_0 e α_1

$$d\alpha_0 = L_{s_0} ds_0 + L_{s_1} ds_1 \quad (25)$$

$$d\alpha_1 = M_{s_0} ds_0 + M_{s_1} ds_1 \quad (26)$$

e resolvendo para $d\alpha_0$ e $d\alpha_1$

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= \frac{M_{s_1}}{L_{s_1}} d\alpha_0 + \left(M_{s_0} - M_{s_1} \frac{L_{s_0}}{L_{s_1}}\right) ds_0 \\ ds_1 &= \frac{1}{L_{s_1}} d\alpha_0 - \frac{L_{s_0}}{L_{s_1}} ds_0 \end{aligned} \quad (27)$$

temos que matriz Jacobiana será dada por

$$J_m = \begin{pmatrix} \frac{M_{s_0}}{L_{s_0}} & M_{s_0} - M_{s_1} \frac{L_{s_0}}{L_{s_1}} \\ \frac{1}{L_{s_1}} & -\frac{L_{s_0}}{L_{s_1}} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

O Jacobiano da transformação será

$$J = -\frac{M_{s_0}}{L_{s_1}}, \quad (29)$$

como

$$M_{s_0} = \sec^2\left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)}\right) [g'(s_0)(f(s_1) - f(s_0)) - f'(s_0)(g(s_1) - g(s_0))] \quad (30)$$

e

$$L_{s_1} = \sec^2\left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)}\right) [g'(s_1)(f(s_1) - f(s_0)) - f'(s_1)(g(s_1) - g(s_0))] \quad (31)$$

o Jacobiano será dado por

$$J = -\frac{[g'(s_0)(f(s_1) - f(s_0)) - f'(s_0)(g(s_1) - g(s_0))]}{[g'(s_1)(f(s_1) - f(s_0)) - f'(s_1)(g(s_1) - g(s_0))]} \quad (32)$$

Mas da figura (2.4) vemos que $(f(s_1) - f(s_0))$ é proporcional a $\cos(\chi)$ e que $(g(s_1) - g(s_0))$ é proporcional a $\sin(\chi)$. Temos ainda que $f'(s_0) = \cos(\psi_0)$, $g'(s_0) = \sin(\psi_0)$, $f'(s_1) = \cos(\psi_1)$ e $g'(s_1) = \sin(\psi_1)$. Segue que

$$J = -\frac{\cos(\chi) \sin(\psi_0) - \sin(\chi) \cos(\psi_0)}{\cos(\chi) \sin(\psi_1) - \sin(\chi) \cos(\psi_1)}; \quad (33)$$

$$J = -\frac{\sin(\chi - \psi_0)}{\sin(\psi_1 - \chi)}; \quad (34)$$

usando as relações (21)

$$J = \frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\alpha_1)} \quad (35)$$

e demonstramos a invariância da expressão (15).

A existência do invariante integral e o fato de sua dinâmica ser limitada tem importante implicações. A integral (15) calculada sobre $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ onde, $\sigma_1 = M\sigma_0$, $\sigma_2 = M\sigma_1$, etc. tem, como demonstrado, sempre o mesmo valor. Como a área total do anel é finita, necessariamente duas imagens σ_i e σ_j terão uma interseção não nula. Aplicando a transformação inversa a essa interseção temos que σ_{i-1} e σ_{j-1} também terão uma interseção não nula. Aplicando novamente a transformação inversa a essa interseção teremos que σ_{i-2} e σ_{j-2} também terão uma interseção não nula. Aplicando sucessivamente a transformação inversa às interseções geradas teremos finalmente que (para $i < j$) σ_{i-j} e σ_0 se sobrepõem. Tal fato possui uma interpretação muito simples. Se a partícula iniciar seu movimento na posição s_0, p_0 necessariamente, após um tempo finito, a partícula voltará a uma vizinhança de s_0, p_0 . Dizemos que existe uma probabilidade um da partícula retornar a uma vizinhança da sua condição inicial. Poincaré chamou essa propriedade de " *Estabilidade no Sentido de Poisson* ".

Claramente vemos que as órbitas periódicas do Bilhar serão dadas pelos pontos fixos do Mapa do Bilhar. Demonstraremos a seguir o Teorema Geométrico de Poincaré que nos assegura a existência de infinitas órbitas periódicas para um Bilhar qualquer.

2.3 O teorema Geométrico de Poincaré

Teorema: *Dados um anel $0 < a \leq r \leq b$ no plano r, θ (r, θ sendo coordenadas polares), uma transformação M do anel sobre si próprio, unívoca, contínua e que preserve área, que avance os pontos de $r = b$ de 2π e os pontos de $r = a$ de 2π ; existirão pelo menos dois pontos do anel, invariantes sobre a transformação M .*

Este teorema foi enunciado por Poincaré pouco antes de sua morte. Birkhoff apresentou a demonstração. Foi esse teorema que permitiu Birkhoff demonstrar a proliferação de órbitas periódicas no Problema Restrito de Três Corpos. Através de sucessivas mudanças de coordenadas Birkhoff reduziu o problema de três corpos à transformação do Anel sobre si mesmo. Arnold [5] faz os seguintes comentários sobre a demonstração de Birkhoff:

” Entretanto, até hoje permanecem sem solução muitas questões relacionadas com este teorema e principalmente com as tentativas para sua generalização multidimensional, que é importante para o estudo das soluções periódicas do problema com um número grande de graus de liberdade.

O caso é que o raciocínio pelo qual Poincaré chegou ao seu teorema é plenamente aplicável numa série de outros casos. Entretanto a demonstração engenhosa dada por Birkhoff é difícil de ser generalizada. Por conseguinte, não se sabe se estão corretas ou não as conclusões sugeridas pelo raciocínio de Poincaré, fora dos limites do teorema sobre o anel bidimensional ”.

A demonstração de Birkhoff encontra-se feita no apêndice 1.

2.4 Estabilidade das Órbitas Periódicas

A estabilidade das órbitas periódicas pode ser estudada através de uma linearização da trajetória do Bilhar [4]. Para tanto consideremos a trajetória de uma partícula tendo como condição inicial s_0, α_0 e sua primeira colisão o ponto s_1, α_2 .

Ao perturbarmos a condição inicial s_0, α_0 para $s_0 + \delta s_0, \alpha_0 + \delta \alpha_0$ a partícula colidirá , dentro de nossa aproximação linear, no ponto $s_1 + \delta s_1, \alpha_1 + \delta \alpha_1$. Como primeira aproximação, a aproximação linear considera que a partícula, ao colidir no ponto s , não o faz com a curva B , o que nos daria o cálculo exato, mas com a tangente à curva B no ponto s_1 .

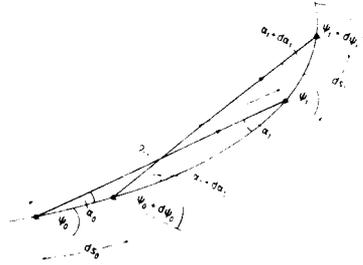


Fig. 2.5 Linearização do Bilhar

Pela geometria da Fig.4 temos que

$$\delta s_0 \sin(\alpha_0) + \delta s_1 \sin(\alpha_1) = \rho_{01}(\delta \alpha_0 + \delta \psi_0). \quad (40)$$

Utilizando as relações (21) segue que

$$\delta s_0 + \delta \psi_0 = \delta \psi_1 - \delta \alpha_1. \quad (41)$$

Utilizando a equação (6) obtemos que

$$\delta \psi = \frac{\delta s}{R} \quad (42)$$

e como $p \equiv \cos(\alpha)$

$$\delta \alpha = -\frac{\delta p}{\sin(\alpha)}. \quad (43)$$

Substituindo (42) e (43) em (40),

$$\delta s_1 \sin(\alpha_1) = \rho_{01} \left(\frac{-\delta p_0}{\sin(\alpha_0)} + \frac{\delta s_0}{R(\psi_0)} \right) - \delta s_0 \sin(\alpha_0), \quad (44)$$

$$\delta s_1 = \left(\frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_1)R(\psi_0)} - \frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\alpha_1)} \right) \delta s_0 - \frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_0)\sin(\alpha_1)} \delta p_0. \quad (45)$$

Utilizando a expressão (41) segue que,

$$\frac{\delta s_1}{R(\psi_1)} + \frac{\delta \psi_1}{\sin(\alpha_1)} = -\frac{\delta p_0}{\sin(\alpha_0)} + \frac{\delta s_0}{R(\psi_0)}, \quad (46)$$

substituindo δs_1 dado por (45) temos que,

$$\frac{\delta p_1}{\sin(\alpha_1)} = -\frac{\delta p_0}{\sin(\alpha_0)} - \left(\frac{\frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_1)R(\psi_0)} - \frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\alpha_1)}}{R(\psi_1)} \delta s_0 - \frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_0)\sin(\alpha_1)} \right) + \frac{\delta s_0}{R(\psi_0)}, \quad (47)$$

colocando δp_0 e δs_0 em evidência temos que,

$$\delta p_1 = \left(-\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_0)} + \frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_0)R(\psi_1)} \right) \delta p_0 + \left(-\frac{\rho_{01}}{R(\psi_0)R(\psi_1)} + \frac{\sin(\alpha_0)}{R(\psi_1)} + \frac{\sin(\alpha_1)}{R(\psi_0)} \right) \delta s_0. \quad (48)$$

As equações (45) e (48) podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \delta p_1 \\ \delta s_1 \end{pmatrix} = m_{10} \begin{pmatrix} \delta p_0 \\ \delta s_0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

onde

$$m_{10} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_1)R(\psi_0)} - \frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\alpha_1)} & -\frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_0)\sin(\alpha_1)} \\ -\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_0)} + \frac{\rho_{01}}{\sin(\alpha_0)R(\psi_1)} & -\frac{\rho_{01}}{R(\psi_0)R(\psi_1)} + \frac{\sin(\alpha_0)}{R(\psi_1)} + \frac{\sin(\alpha_1)}{R(\psi_0)} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Para uma órbita periódica de período N (N colisões com a fronteira) a matriz m será dada por

$$m_N = m_{0,N-1}m_{N-1,N-2}\dots\dots m_{2,1}m_{1,0}. \quad (51)$$

Observemos que o determinante da matriz $m_{1,0}$ é unitário, o que nos mostra de forma menos formal do que já foi feito que a transformação M preserva área.

A estabilidade das trajetórias dependerá dos auto-valores da Matriz m_N . Sejam $m^{i,j}$ para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$ os elementos dessa matriz. Calculando os seu auto-valores:

$$MX = \lambda X, \quad (52)$$

onde λ é autovalor e X autovetor de M , segue que

$$(M - \lambda I)X = 0, \quad (53)$$

onde I é a matriz identidade. O sistema (53) admite solução se,

$$Det(M - \lambda I) = 0;$$

ou seja se

$$Det \begin{pmatrix} m^{11} - \lambda & m^{12} \\ m^{21} & m^{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (54)$$

$$\lambda^2 - \lambda(m^{11} + m^{22}) + (m^{11}m^{22} - m^{21}m^{12}) = 0, \quad (55)$$

isto é

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(m) + \text{Det}(m) = 0, \quad (56)$$

onde $\text{Tr}(m)$ é o traço da matriz m . Como $\text{Det}(m) = 1$ segue que

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}(m) \pm [\text{Tr}^2(m) - 4]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (57)$$

teremos então as seguintes possibilidades:

$$\lambda_{\pm} \in \begin{cases} \Re - \{1\}, & \text{se } |\text{Tr}(m)| > 2; \\ \{1\}, & \text{se } |\text{Tr}(m)| = 2; \\ \Im, & \text{se } |\text{Tr}(m)| < 2. \end{cases} \quad (58)$$

As possibilidades destacadas em (58) correspondem respectivamente a instabilidade, estabilidade neutra e estabilidade.

Um caso particular interessante será o de órbitas periódicas de período dois, isto é, que colidem duas vezes com a borda. Para todo Bilhar convexo existem pelo menos duas dessas trajetórias. Imagine uma corda inscrita a um Bilhar qualquer. Chamemos de A e B os pontos de interseção de corda com o Bilhar. Variando A e B arbitrariamente, teremos que para determinado par A, B a corda assumirá o seu valor máximo. Claramente teremos outro valor A, B tal que a corda será mínima. Para tais valores, mínimo e máximo, a corda será normal ao Bilhar. Portanto, essa corda será uma trajetória periódica da partícula para esse Bilhar. Chamaremos essas trajetórias periódicas, com um pequeno abuso de linguagem, de Órbitas Periódicas Diametraais. Teremos para essas órbitas que $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Se o raio de curvatura for o mesmo para ambos os impactos dessas órbitas (esse será o caso dos exemplos tratados nesse capítulo) e o comprimento da corda for dado por ρ teremos que $m_2 = m_{21}m_{10}$ (onde $m_{21} = m_{10}$) será dado por

$$m_{10} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\rho}{R} & -\rho \\ -\frac{\rho}{R^2} + \frac{2}{R} & -1 + \frac{\rho}{R} \end{pmatrix}, \quad (59)$$

portanto temos que m_2 é dado por,

$$m_2 = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\rho}{R} - 1\right)^2 - 1 & 2\rho\left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \\ \frac{2}{R}\left(\frac{\rho}{R} - 1\right)\left(2 - \frac{\rho}{R}\right) & 2\left(\frac{\rho}{R} - 1\right)^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

O traço de m_2 será dado por

$$Tr(m_2) = 4\left(2\left(\frac{\rho}{R} - 1\right)^2 - 1\right) - 2; \quad (61)$$

$$Tr(m_2) = \frac{8\rho}{R}\left(\frac{\rho}{2R} - 1\right) + 2. \quad (62)$$

Temos, considerando (58), que

$$\left(\frac{\rho}{2R} - 1\right) \begin{cases} > 0, & \text{Instabilidade;} \\ = 0, & \text{Estabilidade Neutra;} \\ < 0, & \text{Estabilidade.} \end{cases} \quad (63)$$

Aplicaremos a teoria desenvolvida para alguns Bilhares.

2.5 Bilhar Circular

Para o Círculo temos que o Raio de Curvatura é o seu próprio raio. Da equação (11) segue que

$$\frac{\int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \sin(\psi) d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \cos(\psi) d\psi} = \frac{-\cos(\psi_1) + \cos(\psi_0)}{\sin(\psi_1) - \sin(\psi_0)} = \tan(\psi_0 + \alpha_0), \quad (64)$$

e da equação (12) temos que $\psi_1 = \psi_0 + \alpha_0 + \alpha_1$. Substituindo ψ_1 na relação anterior segue que

$$\frac{-\cos(\psi_0 + \alpha_0 + \alpha_1) + \cos(\psi_0)}{\sin(\psi_0 + \alpha_0 + \alpha_1) - \sin(\psi_0)} = \frac{\sin(\psi_0 + \alpha_0)}{\cos(\psi_0 + \alpha_0)}; \quad (65)$$

$$\frac{-\cos(\psi_0 + \alpha_0) \cos(\alpha_1) + \sin(\psi_0 + \alpha_0) \sin(\psi_1) + \cos(\psi_0)}{\sin(\psi_0 + \alpha_0) \cos(\alpha_1) + \cos(\psi_0 + \alpha_0) \sin(\alpha_1) - \sin(\psi_0)} = \frac{\sin(\psi_0 + \alpha_0)}{\cos(\psi_0 + \alpha_0)}; \quad (66)$$

reduzindo a expressão anterior ao mesmo denominador,

$$\cos(\alpha_1) - \sin(\psi_0) \sin(\psi_0 + \alpha_0) - \cos(\psi_0) \cos(\psi_0 + \alpha_0) = 0; \quad (67)$$

$$\cos(\alpha_1) = \sin(\psi_0) \sin(\psi_0 + \alpha_0) + \cos(\psi_0) \cos(\psi_0 + \alpha_0); \quad (68)$$

$$\cos(\alpha_1) = \cos(\psi_0 - (\psi_0 + \alpha_0)) = \cos(\alpha_0). \quad (69)$$

Segue que

$$\alpha_1 = \alpha_0, \quad (70)$$

ou seja, α_0 é uma constante de movimento. Portanto temos para o Bilhar Circular duas constantes de movimento, a Energia e o ângulo α , ou seja, o Bilhar Circular é integrável.

No caso do círculo, temos que a invariância de α nos permite inferir o comportamento das trajetórias do Bilhar; basta que especifiquemos a sequência s_n . Temos que

$$s = R\theta, \quad (71)$$

como $\psi = \theta + \frac{\pi}{2}$ segue que

$$s = R(\psi - \frac{\pi}{2}), \quad (72)$$

escrevendo s_1 em termos de s_0 ,

$$s_1 = R(\psi_1 - \frac{\pi}{2}) = r(\psi_0 + 2\alpha_0 - \frac{\pi}{2}); \quad (73)$$

onde usamos a equação (12) e o fato de que $\alpha_0 = \alpha_1$. Segue que,

$$s_1 = R(\frac{s_0}{R} + \frac{\pi}{2} + 2\alpha_0 - \frac{\pi}{2}) \quad (74)$$

ou seja,

$$s_1 = [s_0 + R(2\alpha_0)] \text{Mod}(2\pi). \quad (75)$$

E o termo geral fica,

$$s_n = [s_{n-1} + R(2\alpha_0)] \text{Mod}(2\pi). \quad (76)$$

Portanto se α_0 for um múltiplo racional de π , ou seja se $\alpha = \frac{k}{n}\pi$, onde k e n são números inteiros, a órbita será periódica com N colisões; caso contrário, a órbita nunca se fechará.

A estabilidade das órbitas diametraes será determinada pela relação (63). Para o círculo temos que $\rho = 2R$. Portanto,

$$(\frac{\rho}{2R} - 1) = 0, \quad (77)$$

ou seja, as órbitas periódicas diametraes do Bilhar Circular tem estabilidade neutra.

2.6 Bilhar Elíptico

O Bilhar Elíptico é integrável. Mostraremos isso mostrando a existência de uma constante de movimento diferente da Energia.

A dinâmica do Bilhar é descrita pela Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y), \quad (78)$$

onde $V(x, y) = 0$ dentro do Bilhar e $V(x, y) = \infty$ fora. Introduziremos as coordenadas de Jacobi λ_1 e λ_2 definidas pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A - \lambda_1} + \frac{y^2}{B - \lambda_1} &= 1 \\ \frac{x^2}{A - \lambda_2} + \frac{y^2}{B - \lambda_2} &= 1, \end{aligned} \quad (79)$$

onde $-\infty < \lambda_1 < B$ e $B < \lambda_2 < A$. Variando λ_1 geramos Elipses Confocais, ao passo que variando λ_2 geramos Hipérboles Confocais.

Estamos interessados em escrever a Lagrangeana (78) em termos das variáveis de Jacobi. De (79) podemos escrever que

$$x^2 = (A - \lambda_1)\left(1 - \frac{y^2}{B - \lambda_1}\right), \quad (80)$$

e

$$x^2 = (A - \lambda_2)\left(1 - \frac{y^2}{B - \lambda_2}\right), \quad (81)$$

igualando (80) e (81) e explicitando y segue que

$$y = \sqrt{\frac{(B - \lambda_1)(B - \lambda_2)}{B - A}}. \quad (82)$$

Procedimento análogo nos fornece

$$x = \sqrt{\frac{(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)}{A - B}}. \quad (83)$$

Segue que

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \frac{-\dot{\lambda}_1(B - \lambda_2) - \dot{\lambda}_2(B - \lambda_1)}{\sqrt{(B - \lambda_1)(B - \lambda_2)(B - A)}}, \quad (84)$$

e

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{-\dot{\lambda}_1(A - \lambda_2) - \dot{\lambda}_2(A - \lambda_1)}{\sqrt{(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)(A - B)}}, \quad (85)$$

Portanto segue que

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2); \quad (86)$$

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4(B-A)} \left[\frac{\dot{\lambda}_1(B-\lambda_2)}{(B-\lambda_1)} + \frac{\dot{\lambda}_2(B-\lambda_1)}{(B-\lambda_2)} - \frac{\dot{\lambda}_1(A-\lambda_2)}{(A-\lambda_1)} - \frac{\dot{\lambda}_2(A-\lambda_1)}{(A-\lambda_2)} \right] \right\}; \quad (87)$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{4(B-A)} \left\{ \dot{\lambda}_1^2 \left[\frac{B-\lambda_2}{B-\lambda_1} - \frac{A-\lambda_2}{A-\lambda_1} \right] + \dot{\lambda}_2^2 \left[\frac{B-\lambda_1}{B-\lambda_2} - \frac{A-\lambda_1}{A-\lambda_2} \right] \right\}. \quad (88)$$

Podemos rescrever o termo

$$\frac{\frac{B-\lambda_2}{B-\lambda_1} - \frac{A-\lambda_2}{A-\lambda_1}}{4(B-A)} \quad (89)$$

como

$$\frac{-\lambda_2 A - \lambda_1 B + \lambda_1 A + \lambda_2 B}{4(B-\lambda_1)(A-\lambda_1)(B-A)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(B-\lambda_1)(A-\lambda_1)} \quad (90)$$

Cálculo análogo para o termo

$$\frac{\frac{B-\lambda_1}{B-\lambda_2} - \frac{A-\lambda_1}{A-\lambda_2}}{4(B-A)} \quad (91)$$

nos fornece que

$$L = \frac{1}{2}(g_1 \dot{\lambda}_1^2 + g_2 \dot{\lambda}_2^2) \quad (92)$$

onde

$$g_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(B-\lambda_1)(A-\lambda_1)} \quad e \quad g_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(B-\lambda_2)(A-\lambda_2)}. \quad (93)$$

Os momentos conjugados serão dados por

$$p_1 = g_1 \dot{\lambda}_1 \quad e \quad p_2 = g_2 \dot{\lambda}_2. \quad (94)$$

O Hamiltoniano do sistema será escrito como

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{g_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{g_2}. \quad (95)$$

A equação de Hamilton-Jacobi será escrita como

$$\frac{1}{2} \left[\frac{4(A-\lambda_1)(B-\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{4(A-\lambda_2)(B-\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_2} \right)^2 \right] = E; \quad (96)$$

$$\frac{1}{2} \left[4(A-\lambda_1)(B-\lambda_1) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_1} \right)^2 \right] + E\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[4(A-\lambda_2)(B-\lambda_2) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_2} \right)^2 \right] + E\lambda_2. \quad (97)$$

Como λ_1 e λ_2 são independentes a equação acima só é válida se cada um dos termos for igual a uma constante. Escrevendo essa constante como $E\beta$ segue

$$\frac{1}{2} \left[4(A - \lambda_1)(B - \lambda_1) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_1} \right)^2 \right] = E(\beta - \lambda_1) \quad (98)$$

e

$$\frac{1}{2} \left[4(A - \lambda_2)(B - \lambda_2) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_2} \right)^2 \right] = E(\beta - \lambda_2). \quad (99)$$

Portanto a equação de Hamilton-Jacobi é separável nas variáveis de Jacobi λ_1 e λ_2 . Escrevemos que

$$S(\lambda_1, \lambda_2) = S_1(\lambda_1) + S_2(\lambda_2); \quad (100)$$

$$S_1(\lambda_1) = \int p(\lambda_1) d\lambda_1 \quad \text{e} \quad p_1 = \sqrt{2E} \left[\frac{\beta - \lambda_1}{4(A - \lambda_1)(B - \lambda_2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (101)$$

Vemos portanto o significado das variáveis de Jacobi. A colisão do Bilhar acontece para $\lambda_1 = 0$. Como p_1 é o momento conjugado a λ_1 , p_1 variara de $+p_1$ a $-p_1$. As variáveis λ_1, λ_2 e p_2 permanecem inalteradas durante e colisão. Claramente a grandeza p_1^2 será conservada pela colisão, conseqüentemente será uma constante de movimento e será dada por

$$2E \left[\frac{\beta - \lambda_1}{4(A - \lambda_1)(B - \lambda_2)} \right] = \text{Constante}. \quad (102)$$

A constante de movimento na expressão (102) não possui um significado físico evidente. Demonstraremos a seguir que a constante de movimento do Bilhar Elíptico é o produto escalar dos momentos angulares da partícula tomados em relação a cada um dos focos da Elipse [6]. Antes faremos um comentário sobre as cáusticas do Bilhar Elíptico.

Exigindo que os momentos, dados pela equação (101), sejam reais teremos duas possibilidades:

$$\begin{aligned} a) \quad & 0 < \lambda_1 < \beta < B < \lambda_2 < A \\ & \text{ou} \\ b) \quad & 0 < \lambda_1 < B < \beta < \lambda_2 < A \end{aligned} \quad (103)$$

Vemos aqui a íntima relação entre cáusticas e constantes de movimento nos Bilhares. β sendo uma constante de movimento, limitará os possíveis valores das variáveis λ_1 e λ_2 . Para o caso (a) a variável λ_1 estará limitada ao intervalo $0 < \beta < \lambda_1$, ou seja, a partícula



estará confinada ao intervalo de duas elipses confocais. Como o movimento da partícula no interior do Bilhar é o de uma partícula livre, ela necessariamente tangenciará a elipse interior, que será portanto uma cáustica. Para o caso (b) o raciocínio é inteiramente análogo e a cáustica será dada por uma Hipérbola.

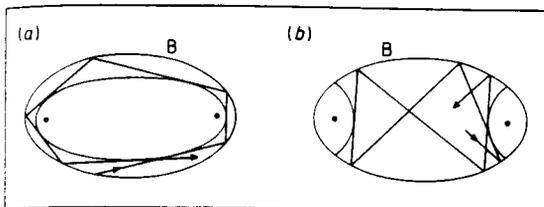


Fig. 2.6 Cáusticas do Bilhar Elíptico

Antes de demonstrarmos a constância do produto escalar dos momentos angulares da partícula em relação a um dos focos, demonstraremos um fato que será extremamente útil para as nossas considerações: Uma partícula cuja trajetória no Bilhar Elíptico passe por um dos focos da Elipse, após a colisão passará pelo outro foco e assim sucessivamente.

Em termos geométricos mostraremos que a normal a um dado ponto P da elipse é a bissetriz do ângulo formado pelos raios focais no ponto P .

Tomemos a equação da elipse

$$f(x, y) = 0; \tag{104}$$

onde

$$f(x, y) = B^2x^2 + A^2y^2 - A^2B^2. \tag{105}$$

A normal no ponto $P_1(x_1, y_1)$ será dada por

$$n = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{A^2y_1}{B^2x_1} \tag{106}$$

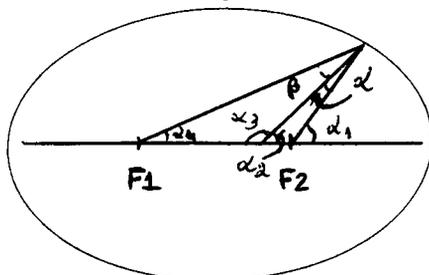


Fig. 2.7 Geometria do Bilhar Elíptico

Da Figura vemos que α_1 é ângulo externo do triângulo $\alpha_1\alpha_2\alpha$. Segue que

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha; \quad (107)$$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2; \tan(\alpha) = \tan(\alpha_1 - \alpha_2); \quad (108)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1)\tan(\alpha_2)}. \quad (109)$$

Mas

$$\tan(\alpha_1) = \frac{y_1}{x_1 - c} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha_2) = \frac{A^2 y_1}{B^2 x_1}. \quad (110)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{A^2 y_1}{B^2 x_1}}{1 + \frac{y_1}{x_1 - c} \frac{A^2 y_1}{B^2 x_1}}; \\ \tan(\alpha) &= \frac{B^2 x_1 y_1 - A^2 x_1 y_1 + A^2 C y_1}{B^2 x_1^2 - B^2 C x_1 + A^2 y - 1^2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Fazendo $B^2 x_1^2 + A^2 y^2 = A^2 B^2$ no denominador e $C = A - B$ temos que

$$\tan(\alpha) = \frac{x_1 y_1 (B^2 - A^2) + A^2 C y_1}{A^2 B^2 - B^2 C x_1} = \frac{-C^2 x_1 y_1 + A^2 C y_1}{B^2 (A^2 - C x_1)} = C y_1 B^2 \quad (112)$$

Percebendo que α_2 é ângulo externo do triângulo $\alpha_3\beta\alpha_4$ e fazendo cálculos análogos aos realizados para α teremos que

$$\tan(\beta) = \frac{\frac{A^2 y_1}{B^2 x_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \frac{A^2 y_1}{B^2 x_1} \frac{y_1}{x_1 + c}} = C y_1 B^2. \quad (113)$$

Portanto

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$$

como queríamos demonstrar. Temos aqui uma visão completa da dinâmica do Bilhar Elíptico: 1) Caso uma trajetória não cruze os focos ela terá uma cáustica Elíptica e nunca cruzará os focos. 2) Caso a trajetória cruze os focos ela terá uma cáustica Hiperbólica e sempre cruzará os focos. 3) Caso a trajetória cruze os focos ele ficará "presa" isto é ela sempre cruzará os focos.

Façamos finalmente a demonstração prometida. Considere dois pontos quaisquer do Bilhar Elíptico. Chamaremos esses pontos de A e B . Façamos, sem perda de generalidade $|v| = 1$. O momento angular \vec{L}_a da partícula em relação ao ponto A será dado por

$$\vec{L}_a = |v||r_a| \sin(\theta_a), \quad (114)$$

onde $|r_a|$ é o raio vetor da partícula em relação ao ponto A e θ_a é o ângulo entre \vec{r}_a e \vec{v} . Como $|v| = 1$ temos que \vec{L}_a será dado pelo braço (Vide figura) \vec{AF} .

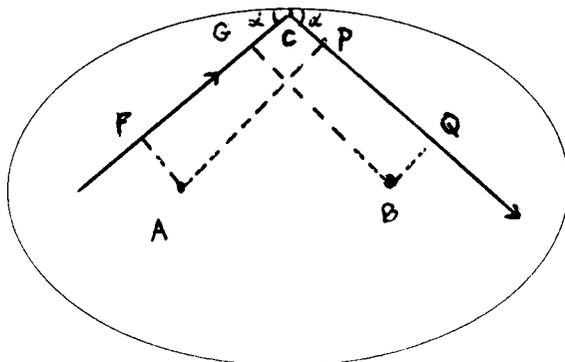


Fig. 2.8 Trajetória que Não Cruza os Pontos

Para o ponto B teremos que

$$\vec{L}_b = |v||r_b| \sin(\theta_b), \quad (114)$$

onde $|r_b|$ é o raio vetor da partícula em relação ao ponto B e θ_b é o ângulo entre \vec{r}_b e \vec{v} . Analogamente \vec{L}_b será dado pelo braço \vec{BG} .

Após a colisão, representada na figura pelo ponto C , a partícula seguirá a trajetória \vec{CD} . Teremos portanto, utilizando a mesma notação antes da colisão

$$\vec{L}_a = |r_a| \sin(\theta_a)$$

e

$$\vec{L}_b = |r_b| \sin(\theta_b)$$

representados na figura respectivamente pelos braços \vec{AP} e \vec{BQ} .

Demonstrar a invariância do produto escalar dos momentos angulares da partícula em relação aos focos é demonstrar que

$$\vec{AF}\vec{BG} = \vec{AP}\vec{BQ}$$

ou seja é demonstrar a semelhança dos triângulos $\triangle AFP$ e $\triangle BGQ$.

Para tanto percebamos que os retângulos $AFCQ$ e $BGCQ$ são semelhantes, isto é possuem os mesmos ângulos. \bar{FP} e \bar{GQ} são respectivamente diagonais desses retângulos. Portanto \bar{FP} e \bar{GQ} dividem os retângulos em triângulos semelhantes. Particularmente, os triângulos $\triangle AFP$ e $\triangle BGQ$ serão semelhantes. Portanto demonstramos a semelhança desses triângulos para qualquer trajetória que não cruze esses dois pontos. Consideremos agora uma trajetória que cruze esses dois pontos e seja refletida em uma nova trajetória que também cruze os dois pontos.

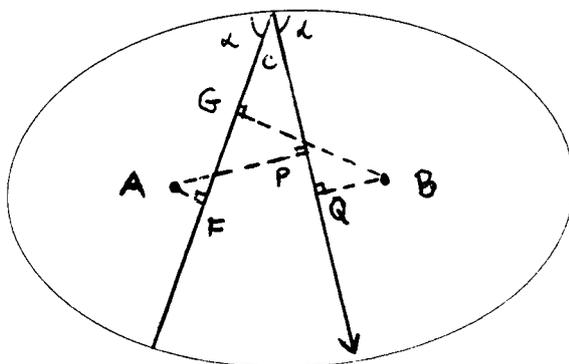


Fig. 2.9 Trajetória que Cruza os Pontos Duas Vezes

Aqui os retângulos $APQF$ e $BQFG$ são semelhantes e temos mais uma vez que os triângulos $\triangle AFP$ e $\triangle BGQ$ são semelhantes. Para uma trajetória que cruze os dois pontos e seja refletida em uma trajetória que não cruze os dois pontos teremos que

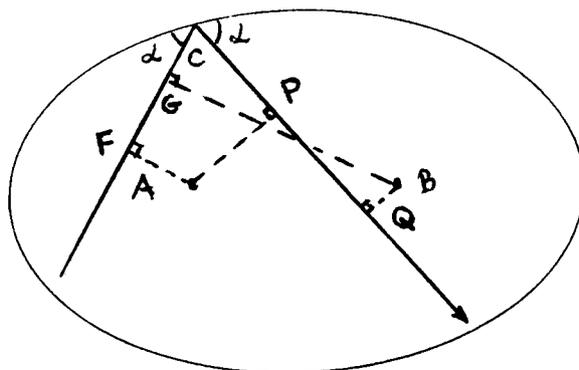


Fig.2.10 Trajetória que Cruza os Pontos uma Vez

os retângulos $BQFG$ e $AFCQ$ não são semelhantes, portanto os triângulos $\triangle AFP$ e $\triangle BGQ$ não são semelhantes.

Temos então que dados dois pontos quaisquer do Bilhar Elíptico o produto escalar dos momentos angulares em relação a esses pontos será conservado ou se a trajetória da partícula

não cruzar esses dois pontos ou se sempre cruzá-los. Os dois únicos pontos do interior do Bilhar que satisfazem essa condição são os focos e o teorema está demonstrado.

Estudemos agora a estabilidade das órbitas diametrais do Bilhar Elíptico. Para tanto parametrizemos a elipse da seguinte forma

$$x = a \cosh(M) \cos(\lambda)$$

$$y = a \sinh(M) \sin(\lambda)$$

onde $M > 0$. A excentricidade, definida como a razão da distância entre os focos da Elipse e a soma das distâncias de um de seus pontos em relação aos focos (por definição constante), será dada por

$$\epsilon = \frac{\overline{DF}}{\overline{DP}} = \sqrt{\frac{A^2 \cosh(M)^2 - A^2 \sinh(M)^2}{A^2 \cosh(M)^2}} = \frac{1}{\cosh(M)}$$

e seus focos estão em $y = 0$ e $x = \pm A$. ψ será dado por

$$\tan(\psi) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{A \sinh(M) \cos(\lambda)}{-A \cosh(M) \sin(\lambda)};$$

$$\tan(\psi) = -\tanh(M) \cot(\lambda)$$

O Raio de curvatura será dado por

$$R(\psi) = \frac{A \cosh(M) \sinh(M)}{(\cosh^2(M) \sinh^2(\psi) + \sinh^2(M) \cos^2(\psi))^{\frac{3}{2}}}.$$

Para a maior órbita diametral teremos que $\rho = 2x(\lambda = 0)$ e $R = R(\frac{1}{2}\pi)$. Segue que

$$\frac{\rho}{2R} = \frac{2A \cosh(M)}{\frac{2A \cosh(M) \sinh(M)}{\cosh^3(M)}} = \frac{\cosh^2(M)}{\tanh(M)},$$

portanto $\frac{\rho}{2R} > 1$ e a órbita é instável.

Para a menor órbita diametral teremos que $\rho = 2y(\lambda = \frac{1}{2}\pi)$ e que $R = R(0)$. Cálculo análogo ao anterior nos fornece que $\frac{\rho}{2R} < 1$ e a órbita é estável.

2.7 Bilhares Ovais

Vimos que os Bilhares Circular e Elíptico são integráveis. Apresentam comportamento singular. Sistemas Dinâmicos em geral não são integráveis. Consideraremos a seguir

um sistema que apresenta comportamento genérico, o chamado Bilhar Oval, ou melhor, Bilhares Ovais pois da forma como o definiremos geraremos uma família a um parâmetro de Bilhares Ovais [4].

Percebamos que $R(\psi)$, o Raio de curvatura de qualquer Bilhar deve ser uma função periódica de ψ . Consequentemente

$$x(\psi_1) - x(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \cos(\psi) d\psi$$

e

$$y(\psi_1) - y(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} R(\psi) \sin(\psi) d\psi$$

devem ser funções periódicas de ψ . Portanto a expansão em série de Fourier de $R(\psi)$ começará com termos envolvendo 2ψ . Para o círculo temos que $R(\psi)$ é constante, portanto a deformação mais suave do círculo será dada por

$$R(\psi) = a(1 + \delta \cos(2\psi)).$$

Como $R(\psi)$ deve ser positivo segue que $\delta < 1$. (Caso $\delta \geq 1$ o bilhar será degenerado e terá cúspides. Tal caso não será considerado).

Fazendo $R(\psi_0) = x(\psi_0) = y(\psi_0) = 0$ segue que

$$x(\psi) = \int_0^\psi a(1 + (\delta \cos(2\psi)) \cos(\psi) d\psi = a \sin(\psi) + \delta \int_0^\psi \cos(2\psi) \cos(\psi) d\psi,$$

Fazendo a última integração por partes temos que

$$x(\psi) = a \left[\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) \sin(\psi) + \frac{1}{6}\delta \sin(3\psi) \right].$$

Cálculo análogo para $y(\psi)$ nos fornece

$$y(\psi) = a \left[\left(-1 + \frac{1}{2}\delta\right) \cos(\psi) - \frac{1}{6}\delta \cos(3\psi) \right].$$

Teremos para a menor órbita diametral do Bilhar que $\psi = \frac{1}{2}\pi$, o que nos dá

$$R(\psi) = a(1 - \delta) \quad \text{e} \quad 2x = a\left(1 + \frac{1}{3}\delta\right).$$

segue que

$$\frac{\rho}{2R} = \frac{a(1 + \frac{1}{3}\delta)}{2a(1 - \delta)};$$

donde vemos que

$$\frac{\rho}{2R} < 1$$

e a menor órbita diametral é estável. Para a maior órbita diametral temos que $\psi = \pi$, o que nos dá

$$R(\psi) = a(1 + \delta) \quad \text{e} \quad 2y = a(1 - \frac{1}{3}\delta).$$

Para os bilhares ovais, assim como para os Bilhares Elípticos, a órbita diametral menor é instável e a órbita diametral maior é estável. No caso das Elipses entretanto, somente as órbitas periódicas diametraes são isoladas (cercadas por curvas suaves no espaço de fases representado pelas coordenadas de Birkhoff). Estudos numéricos realizados por Berry [4] indicam que todas as órbitas periódicas dos bilhares ovais são isoladas. Uma idéia da riqueza da dinâmica dos bilhares ovais pode ser obtida a partir da figura 2.11 .

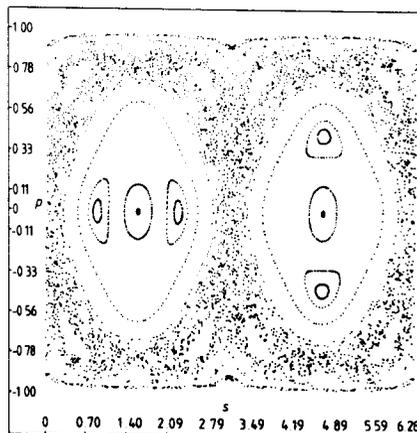


Fig. 2.11 Espaço de Fase do Bilhar Oval. $\delta = 0.6$

2.8 Bilhar de Bunimovich

O Bilhar de Bunimovich ou Estádio, pode ser visto como uma perturbação do Bilhar circular [4]: Cortando o círculo ao meio e conectando as duas metades obtidas com dois segmentos de reta paralelos e de comprimento η . A medida que $\eta \rightarrow 0$ o Bilhar de Bunimovich tende ao Bilhar Circular e torna-se integrável. O comprimento η ser'a portanto um parâmetro que determinará a caoticidade do sistema.

Em 1974, Bunimovich [7] demonstrou a ergodicidade do Estádio. Desde então o Estádio tem desempenhado ao lado do Bilhar de Sinai (outro sistema cuja ergodicidade foi demonstrada analiticamente) a condição de paradigma de sistemas ergódicos.

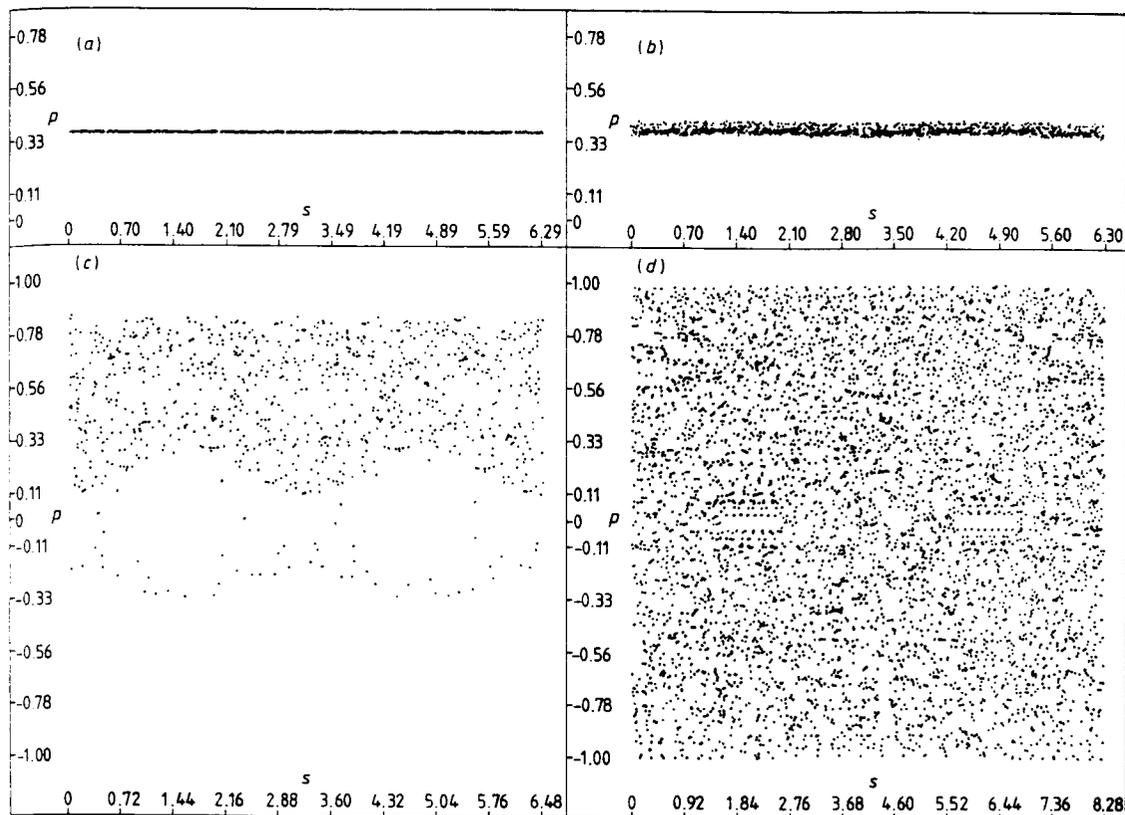


Fig. 2.11 Mapa do Bilhar para o Estádio para diferentes valores de η

Vários experimentos numéricos foram, e continuam sendo realizados, com o intuito de testar hipóteses sobre os sistemas ergódicos. Em 1976, Casartelli et al [8] preocupavam-se em definir uma grandeza que estimasse quantitativamente a extensão da região do espaço de fases ocupada por toros invariantes para um sistema dinâmico qualquer e também o grau de estocasticidade da região caótica (O expoente de Lyapounov apresentava fortes inconvenientes numéricos, entre eles o fato de que a função distância entre duas condições iniciais vizinhas tende a ser extremamente irregular e deixa de crescer após um tempo de saturação característico do sistema *). Propuseram então, a quantidade definida por

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int^t \ln\left(\frac{d(t)}{d(0)}\right)$$

* Como o espaço de fases para um Sistema Hamiltoniano é limitado a função distância deixa de crescer após esse tempo

onde $d(t)$ é distância no tempo t entre duas condições iniciais que no distem no instante inicial ($t = 0$) uma distância $d(0)$. Numericamente K é calculado especificando-se um passo Δt e calculando

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{d_i}{d_0}\right),$$

onde $t = n\Delta t$, o que elimina o problema da saturação de t .

Em suas aplicações Casartelli et al mostraram a existência do limite $K = 0$ para alguns sistemas integráveis.

Em um trabalho posterior, Bennetin e Galgani [9] demonstraram a relação entre K (que eles chamam de "Entropy Like Quantity") e a entropia de Kolmogorov para fluxos em campos vetoriais sem pontos singulares.

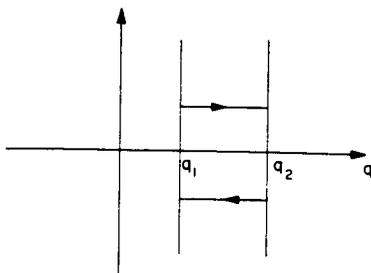
Em 1978 Bennetin e Strelcyn [10] calculam a "Entropy Like Quantity" para o bilhar circular e para o Estádio, mostrando a conveniência dessa grandeza na caracterização de sistemas dinâmicos.

Capítulo 3

BILHAR DE AÇÃO DO POTENCIAL NELSON

3.1 Introdução

Construiremos um bilhar usual nas variáveis ângulo-ação do oscilador harmônico [14] (I e ϕ respectivamente). Para tanto consideremos um bilhar unidimensional no espaço de configurações representado pelas variáveis x, p_x e pela sua borda $B : (x = \pm b)$. Como vimos a dinâmica do Bilhar é a dinâmica da partícula livre sendo refletida elasticamente por B . Assim quando $x = \pm b$, $\pm p_x$ será transformado em $\mp p_x$. Como I e ϕ são canonicamente conjugadas a x e p_x definiremos o bilhar nas variáveis ângulo-ação do oscilador harmônico como sendo uma partícula cuja trajetória é uma reta $\phi = \text{constante}$ no plano I, ϕ e que é refletida pela borda $I = \aleph$, onde \aleph é uma constante, de tal forma que ϕ se transforme em $-\phi$.

Fig 3.1 Bilhar em I e ϕ

Para que nas variáveis de ângulo-ação do oscilador harmônico tenhamos ϕ constante, basta que $\dot{\phi} = 0$, ou seja, que a Hamiltoniana não dependa da variável I . A condição de reflexão $+\phi \rightarrow -\phi$ é obtida fazendo-se $H(\phi)$ uma função par. Como ϕ é uma variável angular, a escolha mais simples é

$$H(\phi) = \cos(\phi). \quad (1)$$

A preservação da energia aplicada a colisão nos impõem que

$$\cos(\phi_a) = \cos(\phi_d). \quad (2)$$

onde ϕ_a é o ângulo de incidência e ϕ_d é o ângulo de reflexão. Segue que

$$\phi_d = 2\pi - \phi_a = -\phi_a. \quad (3)$$

como queríamos. Interpretando as coordenadas I e ϕ como coordenadas no espaço de fases usual (x, p_x) temos a seguinte interpretação do Bilhar (veja a Fig. 3.2).

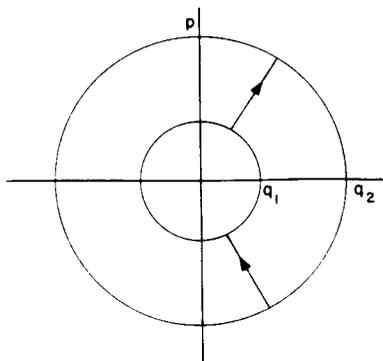


Fig. 3.2 Representação da Fig. 3.1 no plano x, p_x

A partícula segue uma trajetória radial no plano x, p_x ; ao colidir com a fronteira, a partícula pula em um tempo zero para uma outra coordenada angular, ou seja, a partícula ao colidir com a fronteira adquire velocidade angular infinita. De acordo com a equação (2) ela "retoma" o movimento para o interior do Bilhar no ponto da borda onde a conservação da energia é verificada. Chamaremos os círculos que representam a borda do Bilhar no plano x, p_x de cortes do Bilhar. O círculo maior será chamado de corte superior e o círculo menor de corte inferior.

A generalização desse Bilhar para duas dimensões pode ser facilmente feita. Como as variáveis canônicas ϕ_1 e ϕ_2 são independentes fazemos

$$H(\phi_1, \phi_2) = \cos(\phi_1) + \cos(\phi_2).. \quad (4)$$

A borda será representado por

$$B(I_1, I_2) = \aleph. \quad (5)$$

onde \aleph é uma constante, B uma função contínua de I_1 e I_2 , fechada, que divide o plano I_1, I_2 em dois conjuntos disjuntos chamados de interior do Bilhar (Υ) e exterior do Bilhar(Σ).

Evidentemente o Bilhar não é representado pela Hamiltoniana (4). A Hamiltoniana (4) representa uma partícula que descreve uma trajetória radial no espaço de fase x, p_x . Nenhuma informação sobre a borda do Bilhar está contida na Hamiltoniana. Essa informação é fornecida como uma condição de contorno ao problema representado por H . Uma forma de se introduzir a informação sobre a borda do Bilhar na própria Hamiltoniana pode ser encontrada em um procedimento usual na Mecânica Quântica: Podemos calcular as leis clássicas de reflexão em barreiras tomando o limite de potenciais suaves que tendem a potenciais degraus. Adotaremos procedimento análogo para o Bilhar nas variáveis ângulo-ação. Aqui a barreira é representada por $I = \aleph$. Consideraremos então a Hamiltoniana

$$H_\lambda(I, \phi) = H(\phi)\theta_\lambda^2(I - \aleph). \quad (6)$$

onde

$$\theta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \theta_\lambda. \quad (7)$$

é a função degrau definida por

$$\theta_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } (I_1, I_2) \in \Upsilon; \\ 0, & \text{se } (I_1, I_2) \in \Sigma. \end{cases} \quad (8)$$

O parâmetro λ nos permite considerar barreiras cada vez mais acentuadas. A Hamiltoniana H_λ será chamada de Bilhar suavizado da Hamiltoniana H . Antes de justificarmos a adoção de (6), abriremos um pequeno parênteses de forma a definirmos melhor o objeto central de nosso interesse.

Até aqui abordamos Bilhares de partícula livre, isto é, Bilhares cuja dinâmica dentro do Bilhar é livre. Sistemas dinâmicos interessantes são produzidos quando o interior do Bilhar possui um campo de forças. Vários desses sistemas tem importância teórica e prática. (Destacamos os Bilhares sob ação de campo magnético constante e perpendicular ao plano do Bilhar). Nosso interesse será dotar o Bilhar nas variáveis de ângulo-ação com um campo de forças específico (Potencial Nelson). Para tanto abordaremos hamiltonianas mais gerais do que as consideradas até aqui, isto é, relaxaremos a exigência de que $H = H(\phi)$ permitindo que haja uma dependência explícita de H em relação a I mesmo longe da borda do Bilhar.

Para o caso genérico portanto

$$H_\lambda(I, \phi) = H(I, \phi)\theta_\lambda^2(I - \aleph). \quad (9)$$

O Bilhar de Ação da Hamiltoniana H será definido como

$$H_0(I, \phi) = H(I, \phi) \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\theta_\lambda^2(I - \aleph)). \quad (10)$$

ou seja, o Bilhar de Ação é definido como o limite do Bilhar Suavizado. Como agora existe dependência de H em relação a I , a lei de reflexão elástica não necessariamente será verificada. Para a determinação da nova regra de reflexão para o Bilhar de Ação analisaremos o comportamento do limite do Bilhar Suavizado [15]. Suas equações de movimento serão dadas por

$$\dot{I}_\lambda = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial \phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \theta_\lambda^2(I - \aleph). \quad (11)$$

$$\dot{\phi}_\lambda = \frac{\partial H_\lambda}{\partial I} = \frac{\partial H}{\partial I} \theta_\lambda^2(I - \aleph) + H \frac{d}{dI} \theta_\lambda^2(I - \aleph). \quad (12)$$

Da equação (12) vemos que, à semelhança do caso da partícula livre, a partícula assumirá perto da borda uma velocidade angular infinita, isto é, na borda teremos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \dot{\phi}_\lambda = \pm \infty. \quad (13)$$

onde o sinal de ∞ dependerá do valor do sinal de H e da variação de θ com I ; em outras palavras, a direção em que se dará o pulo da variável ϕ , se positiva ou negativa, dependerá do valor do produto de H com $\frac{d}{dI} \theta_\lambda^2(I - \aleph)$. Teremos evidentemente duas situações distintas. O caso em que λ é muito pequeno e diferente de zero, e o caso em que $\lambda = 0$. Analisemos o primeiro caso; Ao se aproximar do corte a partícula sentirá o seu efeito. Esse efeito será maior quanto menor for λ . No caso do corte superior teremos que a função degrau suavizada passará de $+1$, no interior do Bilhar, para 0 no exterior do Bilhar. Portanto, para H positivos o termo $H \frac{d}{dI} \theta_\lambda^2(I - \aleph)$ será negativo e portanto $\dot{\phi}$ será negativo. Para trajetórias que não sintam a ação do corte o único termo significativo será o termo $\frac{d}{dI} H(I, \phi)$, que em geral será positivo. A existência de $\dot{\phi} > 0$ para trajetórias

que não sintam a ação do corte e de $\dot{\phi} < 0$ para trajetórias que sofram essa ação pode ser entendida através da criação de pontos de equilíbrio instável e estável na vizinhança da fronteira. Ilustremos essa discussão através de um exemplo [15].

Exemplo

Seja o Hamiltoniano unidimensional dado por

$$H(I, \phi) = I(1 + a \cos(\phi)) \quad ; \quad a < 1, \quad (14)$$

as curvas de nível serão dadas por

$$I_E(\phi) = \frac{E}{1 + a \cos(\phi)} \quad (15)$$

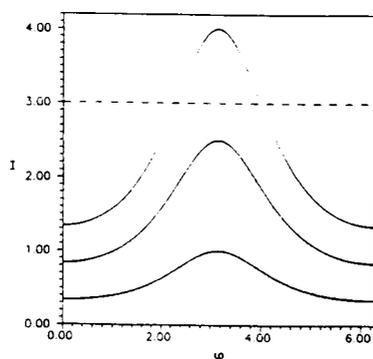


Fig. 3.3 Curvas de Nível de (14)

O corte, representado na figura pela linha pontilhada, está dado por $\aleph = 3.0$. O pulo será determinado por

$$\aleph(1 + \cos(\phi_a)) = \aleph(1 + \cos(\phi_d)), \quad (16)$$

$$\phi_d = 2\pi - \phi_a, \quad (17)$$

As curvas de nível que tocam o corte, são "cortadas", e seus pedaços abaixo de \aleph são conectados por uma reta de (\aleph, ϕ_a) a (\aleph, ϕ_d) , que é atravessada em um tempo zero no sentido $-\phi$.

O Bilhar Suavizado será dado por

$$H(I, \phi) = I(1 + a \cos(\phi)) \left[\frac{1 - \tanh\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)}{2} \right]^2 \quad (18)$$

onde θ_0 foi definida como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \tanh\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)}{2} \right] = \begin{cases} 1 & \text{se } I - \aleph < 0; \\ 0 & \text{se } I - \aleph > 0. \end{cases} \quad (19)$$

As mesmas curvas de nível da figura 3.3 estão representadas para o Bilhar suavizado para três diferentes valores de λ . Observemos que a medida que $\lambda \rightarrow 0$, o ponto hiperbólico se aproxima do corte. Isto pode ser obtido diretamente das equações de movimento.

$$\dot{I} = -Ia \sin(\phi) \theta_\lambda^2. \quad (20)$$

$$\dot{\phi} = (1 + a \cos(\phi)) \left[\theta_\lambda^2 - \frac{I\theta_\lambda}{\lambda \cosh^2\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)} \right].$$

Os pontos críticos serão dados por

$$-Ia \sin(\phi) \theta_\lambda^2 = 0. \quad (21)$$

e

$$(1 + a \cos(\phi)) \left[\theta_\lambda^2 - \frac{I\theta_\lambda}{\lambda \cosh^2\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)} \right] = 0.. \quad (22)$$

Da primeira equação temos que

$$\phi = 0, \pi. \quad (23)$$

que na segunda nos fornece

$$\theta_\lambda - \frac{I}{\lambda \cosh^2\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)} = 0. \quad (24)$$

Para $\lambda \rightarrow 0$ temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tanh\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)} - e^{-\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)}}{e^{\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)} + e^{-\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)}}, \quad (25)$$

como $I - \aleph < 0$, pois estamos dentro do Bilhar,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tanh\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right) = -1 \quad (26)$$

Temos também que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \cosh\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)} + e^{-\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)}}{2} = \frac{e^{-\left(\frac{I-\aleph}{\lambda}\right)}}{2}. \quad (27)$$

usando (26) e (27) em (25) segue que

$$1 - \frac{4I}{\lambda e^{-2\frac{(I-\aleph)}{\lambda}}} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{4I}{\lambda} = e^{-2(I-\aleph)}, \quad (30)$$

que nos mostra que a medida que $\lambda \rightarrow 0$, $I \rightarrow \aleph$, como queríamos mostrar. No limite $\lambda = 0$ a separatriz passando por $\phi = 0$ coincidirá com a órbita tangente à linha $I = \aleph$.

Bilhar de Ação Bidimensional

Para o caso bidimensional o corte será dado por

$$B(I) = \aleph \quad \text{onde,} \quad I = (I_1, I_2) \quad e \quad \aleph = (\aleph_1, \aleph_2). \quad (31)$$

Para um ponto qualquer do corte, consideramos, à semelhança do que foi feito com os bilhares no espaço de configurações, uma linearização do corte no ponto da colisão. Assim, em uma vizinhança do ponto de colisão teremos que

$$W.I = \aleph \quad \text{onde,} \quad W = (w_1, w_2). \quad (32)$$

Podemos fazer uma transformação canônica de tal forma que $\aleph = I'_L$ seja uma das novas ações [2]. Aplicando a transformação idêntica aos ângulos ϕ obtemos uma transformação canônica. Nas novas variáveis, segue que

$$H_\lambda(I', \phi') = H(I', \phi') \theta_\lambda^2(\aleph - I'_L). \quad (33)$$

No limite em que $\lambda \rightarrow 0$, mantemos as variáveis $I'_1, I'_2, \dots, I'_L, \phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_{L-1}$ fixas e determinamos, pela conservação da energia o ângulo de reflexão ϕ'_L , que determinará o ramo da curva de fase para o qual a partícula pula.

Abordaremos no decorrer desse trabalho cortes bem específicos, determinados por

na forma de um corte unidimensional, dado por $I_1 = \aleph_1$ e $I_2 = \aleph_2$. Consideremos o caso bidimensional

por $I'_2 = \aleph_2$. O Bilhar de Ação será dado por

$$\begin{aligned} &, I_2 \leq \aleph_2, \\ &, I_2 > \aleph_2. \end{aligned}$$

$$(34)$$

$$H_0(I, \phi, \aleph_2) = \begin{cases} H(I, \phi) \\ 0 \end{cases}$$

Quando $I_2' = \aleph_2$, ϕ_2 recebe um impulso proporcional a $\delta(I_2 - \aleph_2)$. Todas as outras variáveis permanecerão constantes. O ângulo de reflexão é determinado especificando-se o zero da equação

$$H(I_{1a}, \aleph_2, \phi_{1a}, \phi_{2a}) = H(I_{1a}, \aleph_2, \phi_{1a}, \phi_{2d}). \quad (34)$$

Adicionaremos um corte adicional em $I_1 = \aleph_1$. A definição do Bilhar de Ação pode ser facilmente generalizada para este corte bidimensional. Assumindo que uma órbita genérica não tocará os cortes \aleph_1 e \aleph_2 simultaneamente (numericamente este é o caso), todo raciocínio anterior pode ser aplicado a variável I_1 . Assim, definimos o Bilhar de Ação

$$H_0(I, \phi, \aleph) = \begin{cases} H(I, \phi) & , I \leq \aleph, \\ 0 & , I > \aleph, \end{cases} \quad (35)$$

onde $\aleph = (\aleph_1, \aleph_2)$, e $I \leq \aleph$ significa que $I \in \Upsilon$, o interior do Bilhar especificado por \aleph .

Por sua vez, o Bilhar Suavizado pode ser escrito como

$$H_\lambda = H(I, \phi) \theta_\lambda^2(\aleph_1 - I_1) \theta_\lambda^2(\aleph_2 - I_2). \quad (36)$$

Como vimos, (35) é definido como limite de (36). O estudo analítico desse limite no caso unidimensional nos mostrou a existência de pontos de equilíbrio instável e estável nas proximidades do corte. Como o corte definido para o caso bidimensional compõem-se de dois cortes disjuntos, um em cada coordenada I , o raciocínio desenvolvido para o caso unidimensional segue valendo para duas dimensões. Os pontos de equilíbrio instável e estável são pontos onde a variável ϕ_i (em uma colisão com I_i) não muda, ou melhor, retorna ao mesmo valor. Correspondem, nos Bilhares no espaço de Configurações as órbitas de $\alpha = \pm 1$ (ver *Capítulo 2*, Coordenadas de Birkhoff) . Os ponto fixos Hiperbólicos são o limite de órbitas que não colidem com o corte. Nesse sentido assemelham-se às "quinas" dos Sistemas Pseudo-Integráveis [16] (apêndice 3) e exercem efeito desfocalizador semelhante. Veremos, em um exemplo tratado a seguir, que é justamente o " corte ", produzindo a descontinuidade no movimento, que destrói o caráter simplético do movimento. Os pontos fixos elípticos, ao contrário, são o limite de órbitas que colidem repetidamente com o corte. Os pontos vizinhos aos pontos fixos elípticos, colidirão sucessivamente com a fronteira do Bilhar, assemelhando-se nos Bilhares no espaço de configurações as órbitas da "whispering gallery".

A medida que $\lambda \rightarrow 0$, a partícula, ao se aproximar do corte adquire velocidade paralela à fronteira muito rápida. Esse fenômeno é traduzido matematicamente pelo fato de que se linearizarmos as equações de movimento do Bilhar Suavizado em um ponto vizinho à fronteira, o autovalor associado ao autovetor paralelo à fronteira, será significativamente maior que os outros autovalores do problema. Sistemas que apresentam essa propriedade são conhecidos como sistemas "stiff" e sua integração numérica é lenta e delicada. Como estamos interessados nos Bilhares de Ação, ou seja no limite em que $\lambda \rightarrow 0$, vemos que a aproximação numérica de H_0 por H_λ para λ pequeno é inoportuna e imprecisa. Surge, então, antes de qualquer consideração de ordem qualitativa uma importante dificuldade: A de se construir um método numérico que trate com estabilidade e precisão suficiente a descontinuidade intrínseca dos Bilhares de Ação. Tal método encontra-se no apêndice 2

3.2 Aspectos Qualitativos

De posse de um método numérico de integração eficiente, que nos permita o acompanhamento numérico das soluções do Bilhar de Ação por um tempo grande (número grande de colisões com o corte) podemos criar elementos de análise que nos possibilite o estudo de seus aspectos qualitativos. Neste capítulo notamos que alguns efeitos dos Bilhares de Ação encontravam análogos nos Bilhares no espaço de Configuração, entre eles que o efeito desfocalizador que um ponto fixo elíptico exercia sobre as órbitas do Bilhar de Ação se assemelha ao efeito desfocalizador dos vértices de Bilhares côncavos. Explorando essa analogia, criaremos um Mapa da Fronteira que, a semelhança do Mapa do Bilhar, nos dará informações sobre as trajetórias que colidem com a borda do Bilhar. A analogia será completa:

Comprimento de Arco : Com os cortes $I_1 = \aleph_1$ e $I_2 = \aleph_2$ a coordenada s será facilmente definida orientando-se o Bordo do Bilhar de Ação com o sentido anti-horário e definindo-se a origem do comprimento de arco na origem do sistema de coordenadas.

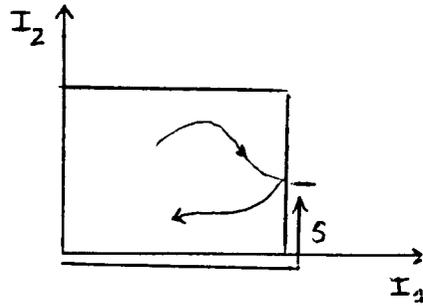


Fig 3.4 Coordenada S

Ângulo de Reflexão : Como vimos, a segunda coordenada de Birkhoff era definida a partir do ângulo de reflexão α . O tangente do ângulo α era escrita como

$$\tan(\alpha) = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}}, \quad (37)$$

onde p_{\perp} é a componente perpendicular à tangente a borda no ponto de colisão e p_{\parallel} é a componente paralela. No caso do Bilhar de Ação a variável angular representa o papel de momento conjugado. Portanto a componente normal da variável θ pulará de um valor $\theta_{\perp a}$ para um valor $\theta_{\perp d}$. Fazendo uma translação em θ_{\perp} de tal forma que a origem do nosso eixo coincida exatamente com o ponto médio de $\overline{\theta_{\perp a}\theta_{\perp d}}$ temos que a componente transversal de θ a ser considerada na construção da variável α será dada por

$$\theta_{\perp} = \frac{\theta_{\perp d} - \theta_{\perp a}}{2}, \quad (38)$$

e $\cos(\alpha)$ será dado por

$$\cos(\alpha) = \frac{\theta_{\perp}}{\theta_{\parallel}}. \quad (39)$$

A grande utilidade da utilização dessas coordenadas é que teremos uma visão somente das órbitas que colidem com o corte. Como vimos as órbitas que não tocam a fronteira do Bilhar de Ação permanecem inalteradas. As órbitas que são perturbadas pela presença do corte são as que nos interessarão e possuem coordenadas s e p diferentes de zero.

3.3 Algoritmo para Acompanhamento de Órbitas Periódicas

O Mapa de fronteira, construído a partir de uma analogia com o mapa do Bilhar nos permitirá a determinação numérica das suas órbitas periódicas estáveis. O algoritmo é

relativamente simples: Considere uma condição inicial p_1 associada a uma ilha do mapa. O ponto representado por essa condição inicial é levado pelo fluxo. Considere o ponto p_2 , dado pelo retorno do ponto p_1 a ilha considerada. Consideraremos como próxima condição inicial o ponto mediano do segmento de reta $\overline{p_1 p_2}$. Claramente esse ponto está mais ao interior da ilha que p_1 ou p_2 . O procedimento é sucessivamente aplicado e converge para o centro da ilha, isto é, para a órbita periódica estável.

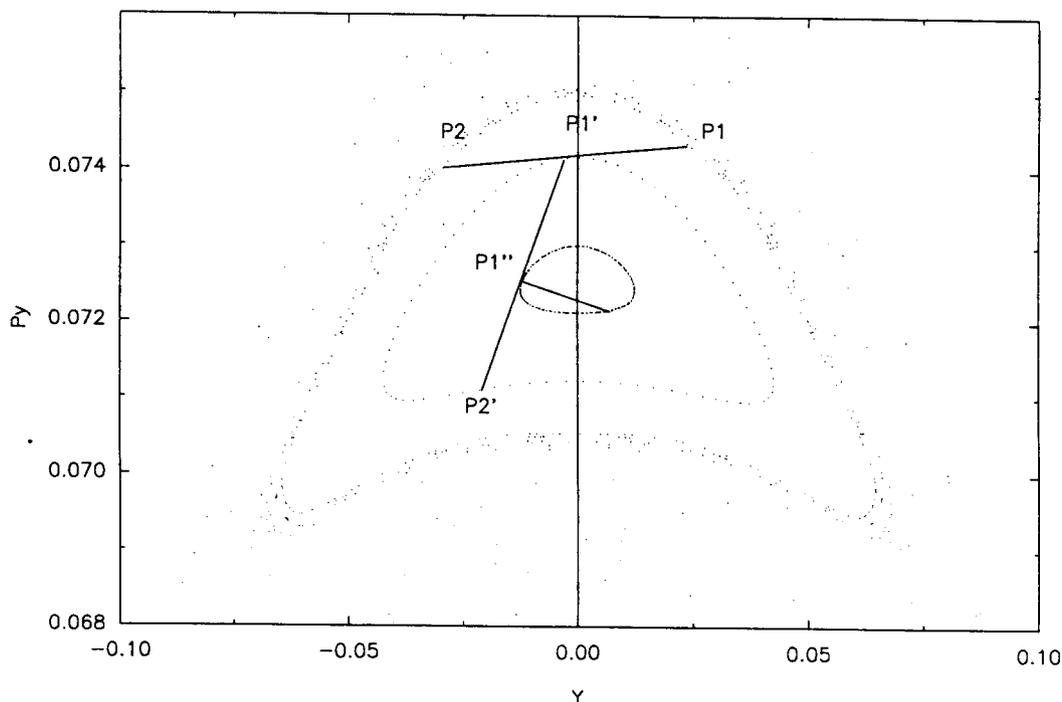


Fig 3.5 Algoritmo

Evidentemente o algoritmo possui um inconveniente do ponto de vista numérico: A velocidade da convergência diminui ao nos aproximarmos da órbita periódica. Tal fato pode ser compensado através de uma linearização do mapa. Ao nos aproximarmos do centro da Ilha (utilizando o método exposto), supomos que o mapa M é suficientemente bem representado pelo seu Jacobiano \mathcal{M} e os seus pontos dados pelo mapa linear

$$X_{n+1} = \mathcal{M}X_n + D. \quad (40)$$

Com um número suficiente de interações obtemos X_n tais que podemos inverter (40) e determinarmos \mathcal{M} . A partir de então calculamos o ponto fixo estável do mapa (40) e supomos esse ponto como a órbita periódica estável. Geramos assim um processo iterativo que convergirá tão mais rápido quanto maior a proximidade da órbita periódica estável.

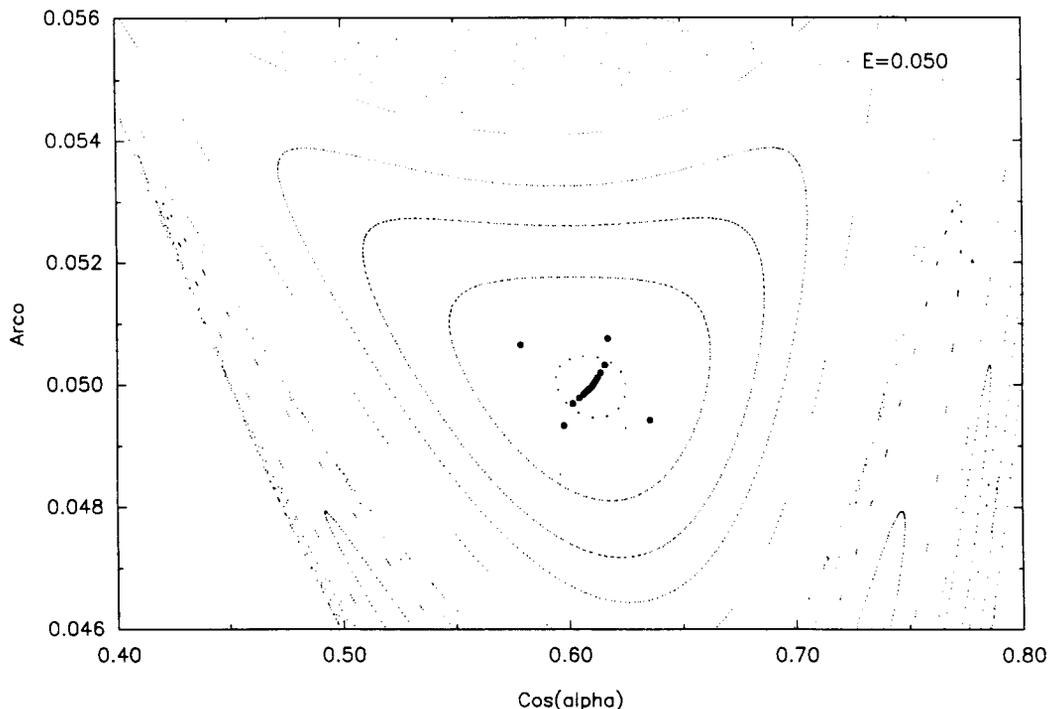


Fig 3.6 Aplicação

3.4 Aplicação ao Potencial Nelson

Consideremos o Bilhar de Ação do Potencial Nelson. O potencial Nelson é dado por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\mu x^2 + \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2 \quad \text{para} \quad \mu = 0.1. \quad (41)$$

A Hamiltoniana será dada por

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2}\mu x^2 + \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2. \quad (42)$$

Transformando H para as variáveis de ângulo-ação do oscilador harmônico, fazemos

$$x = \sqrt{\frac{2I_1}{w_1}} \cos(\phi_1), \quad y = \sqrt{\frac{2I_2}{w_2}} \cos(\phi_2), \quad (43)$$

$$p_x = \sqrt{2I_1 w_1} \sin(\phi_1), \quad p_y = \sqrt{2I_2 w_2} \sin(\phi_2). \quad (44)$$

Segue que

$$H = I_1 w_1 + I_2 w_2 - \frac{I_1}{w_1} \sqrt{\frac{8I_2}{w_2}} \cos(\phi_2) \cos^2(\phi_1) + \frac{I_1^2}{w_1^2} \cos^4(\phi_1), \quad (45)$$

onde fizemos $w_1 = \sqrt{\mu}$ e $w_2 = \sqrt{2}$. o Bilhar Suavizado será escrito como

$$H = \left[I_1 w_1 + I_2 w_2 - \frac{I_1}{w_1} \sqrt{\frac{8I_2}{w_2}} \cos(\phi_2) \cos^2(\phi_1) + \frac{I_1^2}{w_1^2} \cos^4(\phi_1) \right] \Theta_{\lambda_1}^2(\aleph_1) \Theta_{\lambda_2}^2(\aleph_2) \quad (46)$$

onde

$$\Theta_{\lambda_1}(\aleph_1) = \frac{1 - \tanh\left(\frac{I_1 - \aleph_1}{\lambda_1}\right)}{2} \quad \text{e} \quad \Theta_{\lambda_2}(\aleph_2) = \frac{1 - \tanh\left(\frac{I_2 - \aleph_2}{\lambda_2}\right)}{2}. \quad (47)$$

O Bilhar de Ação por sua vez é dado por

$$H = \left[I_1 w_1 + I_2 w_2 - \frac{I_1}{w_1} \sqrt{\frac{8I_2}{w_2}} \cos(\phi_2) \cos^2(\phi_1) + \frac{I_1^2}{w_1^2} \cos^4(\phi_1) \right] \Theta_0^2(\aleph_1) \Theta_0^2(\aleph_2). \quad (48)$$

A determinação da regra de reflexão é feita através da conservação da energia. Para uma colisão em I_1 teremos que

$$H_a = H_d, \quad (49)$$

$$I_1 w_1 + I_2 w_2 - \frac{I_{1a}}{w_1} \sqrt{\frac{8I_{2a}}{w_2}} \cos(\phi_{2a}) \cos^2(\phi_{1a}) + \frac{I_{1a}^2}{w_1^2} \cos^4(\phi_{1a}) = \quad (50)$$

$$I_1 w_1 + I_2 w_2 - \frac{I_{1a}}{w_1} \sqrt{\frac{8I_{2a}}{w_2}} \cos(\phi_{2a}) \cos^2(\phi_{1d}) + \frac{I_{1a}^2}{w_1^2} \cos^4(\phi_{1d}).$$

Simplificando e fazendo $A \equiv -\frac{I_{1a}}{w_1} \sqrt{\frac{8I_{2a}}{w_2}} \cos(\phi_{2a})$ e $B \equiv \frac{I_{1a}^2}{w_1^2}$ segue que

$$A \cos^2(\phi_{1a}) + B \cos^4(\phi_{1a}) = A \cos^2(\phi_{1d}) + B \cos^4(\phi_{1d}). \quad (51)$$

Evidentemente a solução da equação (51) não é única. A solução de (51) correspondente ao Bilhar de Ação pode ser obtida através do limite $\lambda \rightarrow 0$ para o Bilhar Suavizado. Como vimos, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \dot{\phi} = -\infty$, o que significa que a variável ϕ_1 ao colidir em ϕ_{1a} retornará o movimento no Bilhar para o ponto ϕ_{1d} dado pela primeira raiz de (51) à esquerda de ϕ_{1a} . De forma a analisarmos as suas soluções reescrevemos (51) como

$$(\cos^2(\phi_{1a}) - \cos^2(\phi_{1d})) [A + B(\cos^2(\phi_{1a}) + \cos^2(\phi_{1d}))] = 0. \quad (52)$$

Temos então dois conjuntos de soluções para a equação (52); o primeiro conjunto (tipo 1) corresponde as soluções obtidas ao igualarmos o primeiro termo do produto do lado esquerdo da equação a zero. Resolvendo esse termo segue que

$$\cos^2(\phi_{1a}) = \cos^2(\phi_{1d}); \quad (53)$$

o primeiro conjunto de soluções é dado por

$$\phi_{1d} \in \{\phi_{1a}, \pi - \phi_{1a}, \pi + \phi_{1a}, 2\pi\phi_{1a}\}. \quad (54)$$

O segundo conjunto (tipo 2) de soluções será obtido ao igualarmos o segundo termo do lado esquerdo de (52) a zero, isto é

$$\cos^2(\phi_{1d}) = -\frac{A}{B} - \cos^2(\phi_{1a}); \quad (55)$$

$$\phi_{1d} \in \left\{ \pm \arccos \pm \sqrt{-\frac{A}{B} - \cos^2(\phi_{1a})} \right\}. \quad (56)$$

Ao contrário do primeiro conjunto, o segundo apresenta fatores limitantes. Observamos que as soluções (56) só ocorrerão se tivermos as seguintes condições satisfeitas

$$0 < -\frac{A}{B} - \cos^2(\phi_{1a}) \leq 1; \quad (57)$$

ou seja

$$0 < \frac{w_1}{I_1} \sqrt{\frac{8I_2}{w_2}} \cos(\phi_{2a}) - \cos^2(\phi_{1a}) \leq 1. \quad (58)$$

As desigualdades serão satisfeitas se

$$0 < \cos(\phi_{2a}), \quad \text{e se} \quad \frac{I_1}{w_1} \geq \sqrt{\frac{2I_2}{w_2}} \cos(\phi_{2a}); \quad (59)$$

mas pela transformação (43) podemos escrever as desigualdades como

$$0 < y \leq \frac{I_1}{w_1}. \quad (60)$$

Para a colisão em I_1 teremos que $I_1 = 0.03$ e $w_1 = \sqrt{0.1}$ e segue que para termos soluções possíveis do tipo 2, y tem de ser tal que

$$0 < y < 0.094. \quad (61)$$

A solução do Bilhar de Ação do Potencial Nelson será dada pela solução do tipo 1 ou tipo 2 que estiver imediatamente a esquerda de ϕ_{1a} . A região do espaço de fases I_2 representada por (61) encontra-se destacada na figura 3.7.

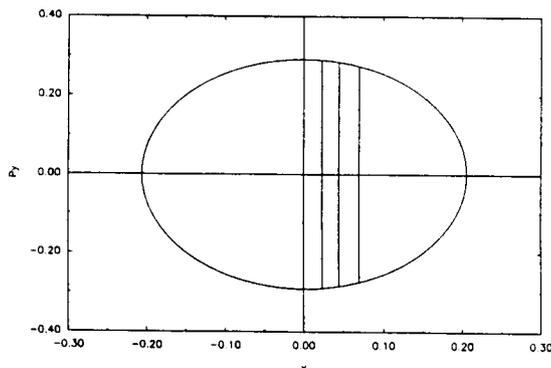


fig 3.7 Região onde não existem soluções do tipo 2 para o pulo em I_1

Apesar de representar uma parcela significativa do corte o fator limitante é forte o suficiente para praticamente eliminar as raízes do tipo 2. Numericamente essas soluções representam menos de 5 % das colisões. No caso em que as condições (59) não forem satisfeitas as únicas raízes de (51) serão as raízes do tipo 1. O pulo se dará então para $\phi_{1d} = 2\pi - \phi_{1a}$, que das quatro raízes é a que está imediatamente à esquerda de ϕ_{1a} . Para um colisão em I_2 o mesmo procedimento nos leva a seguinte equação

$$\cos(\phi_{2a}) = \cos(\phi_{2d}), \quad (62)$$

que admite como única solução

$$\phi_{2d} = 2\pi - \phi_{2a}. \quad (63)$$

Essa solução pode ser interpretada nas coordenadas y, p_y . Temos que o pulo em ϕ_2 será representado por:

$$\text{Colisão em } I_2 : \quad p_y \rightarrow -p_y. \quad (63)$$

Assim, se representarmos um ponto no espaço de fases por um vetor $\eta = (x, y, p_x, p_y)$ teremos que

$$\eta_d = P_i \eta_a \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \quad (64)$$

Em I_2 o pulo será representado pela matriz P_2 ,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Assim ao colidir com o corte em I_2 , a partícula será mapeada em um outro ponto da fronteira dado pela matrix matriz P_2 . Podemos portanto considerar que o movimento do Bilhar de Ação é representado pela composição do mapa simplético determinado pela Hamiltoniana do Potencial Nelson (ver *capítulo 1*) e pelos mapas representados por P_1 ou P_2 (onde P_1 representa a matriz que determina o pulo em ϕ_1). Como P_2 não é simplético, a composição com H também não o será. Temos portanto que o Bilhar de Ação do Potencial Nelson não é Simplético.

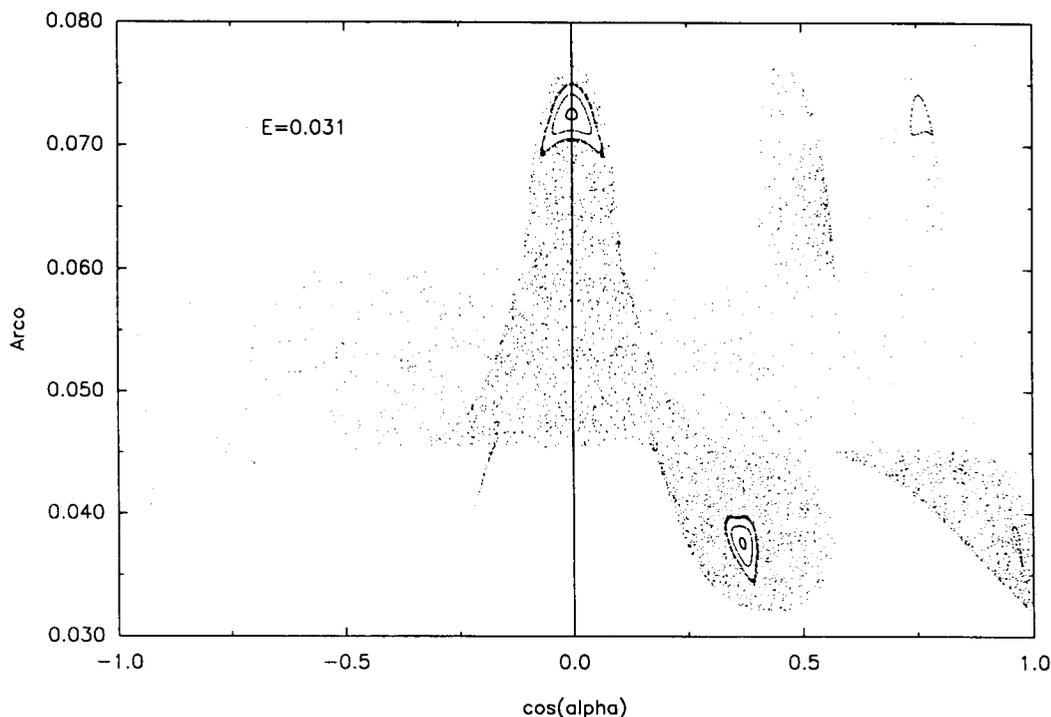
Nesse trabalho os mapas de fronteira foram todos utilizados usando a raiz de tipo (1). Tal raiz pode causar uma pequena alteração no mapa omitindo algumas das famílias de órbitas periódicas do Bilhar de Ação do Potencial Nelson. Entretanto, todas as famílias de órbitas periódicas encontradas realizam colisões do tipo (1) e estão rigorosamente corretas. Acreditamos que as famílias encontradas fornecem uma boa amostragem das famílias de órbitas periódicas do Bilhar de Ação.

3.5 Mapas de Fronteira para o Potencial Nelson

Nossa análise numérica foi realizada com os cortes $\aleph_1 = 0.03$ e $\aleph_2 = 0.03$. A motivação para esse corte foi encontrada ao analisarmos a estrutura de órbitas periódicas do Potencial Nelson. Analisando o valor de Energia $E = 0.1$, vemos que todas as órbitas periódicas que se encontram abaixo desse valor são estáveis. Assim, fazendo

$$E \approx \aleph_1 w_1 \quad \text{segue que,} \quad \aleph_1 = \frac{E}{w_1} \approx 0.03,$$

portanto o corte unidimensional em \aleph_1 limita somente órbitas periódicas estáveis. O corte $\aleph_2 = 0.03$ foi adotado de forma a termos um Bilhar quadrado. Para Energias menores que 0.03 nenhuma estrutura estável foi encontrada no Mapa. Para a Energia $E = 0.031$ podemos observar o surgimento de uma família de órbitas estável. Vemos na Fig.4.5 o surgimento de duas ilhas no centro da figura. A ilha da parte superior da figura, representada por $s > 0.06$, está associada a uma colisão com o corte em I_2 . Da mesma forma, a ilha inferior está associada a uma colisão com o corte em I_1 . Vemos que estrutura inteiramente análoga aparece na parte esquerda da figura. Na verdade essa "segunda" estrutura de ilhas está relacionada à simetria em $x \rightarrow -x$ do potencial Nelson.

Fig. 3.8 Mapa de Fronteira $E=0.031$

Veremos que a cada estrutura de ilhas que surge no centro da figura, surgirá uma semelhante na parte esquerda. Entretanto o limite esquerdo do mapa ($\cos(\alpha) \approx +1$) apresenta forte inconveniente numérico. Para $\cos(\alpha) \approx 1$ temos que $\alpha \approx 0$ (ou 2π), mas lembremos que α é obtido mediante a inversão de uma função tangente. Assim estamos obtendo que $0 = \arctan(\gamma)$, onde γ é um ângulo qualquer. Portanto, basta uma variação muito pequena de γ nessa região para termos uma variação significativa de α . O problema numérico surge pois essa variação é menor que o erro da nossa integração. A consequência desse fato é que as ilhas pertencentes a essa região $\cos(\alpha) \approx 1$ serão caracterizadas por invadirem umas as outras. Entretanto, visto estarem associadas as simetrias das ilhas que aparecem no centro da figura nossa análise não será prejudicada. Acreditamos que ao analisarmos as órbitas periódicas associadas as ilhas e ao destacarmos suas simetrias essa questão ficará mais esclarecida.

Aqui introduzimos uma notação que se prestará a uma classificação das famílias de órbitas periódicas estáveis. Classificaremos a órbita periódica, associada a essa estrutura de ilhas como $B11$. A letra latina refere-se ao número total de colisões. Os números especificam quais as colisões que as órbitas efetuam. Assim $C12$ refere-se a uma órbita periódica que realiza um total de três colisões, uma com \aleph_1 e duas com \aleph_2 . Para $E = 0.032$ notamos o surgimento de uma bifurcação $F33$ em torno de $B11$.

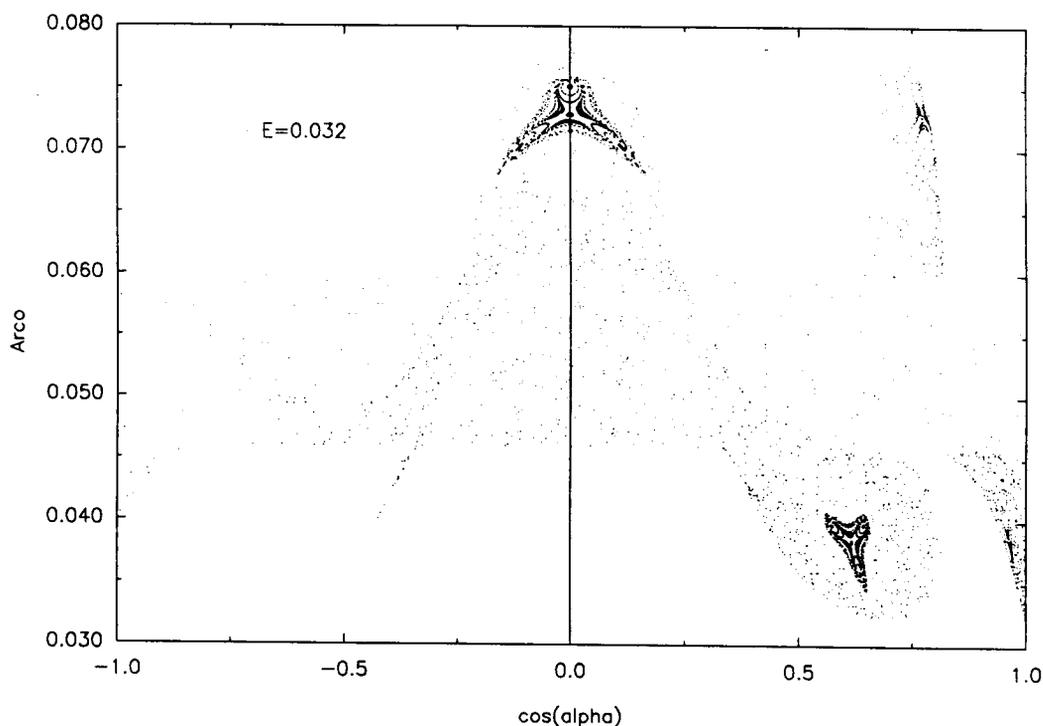


Fig 3.9 Mapa para $E=0.032$

Para $E = 0.033$ vemos que $F33$ já desapareceu e nenhuma estrutura adicional foi criada.

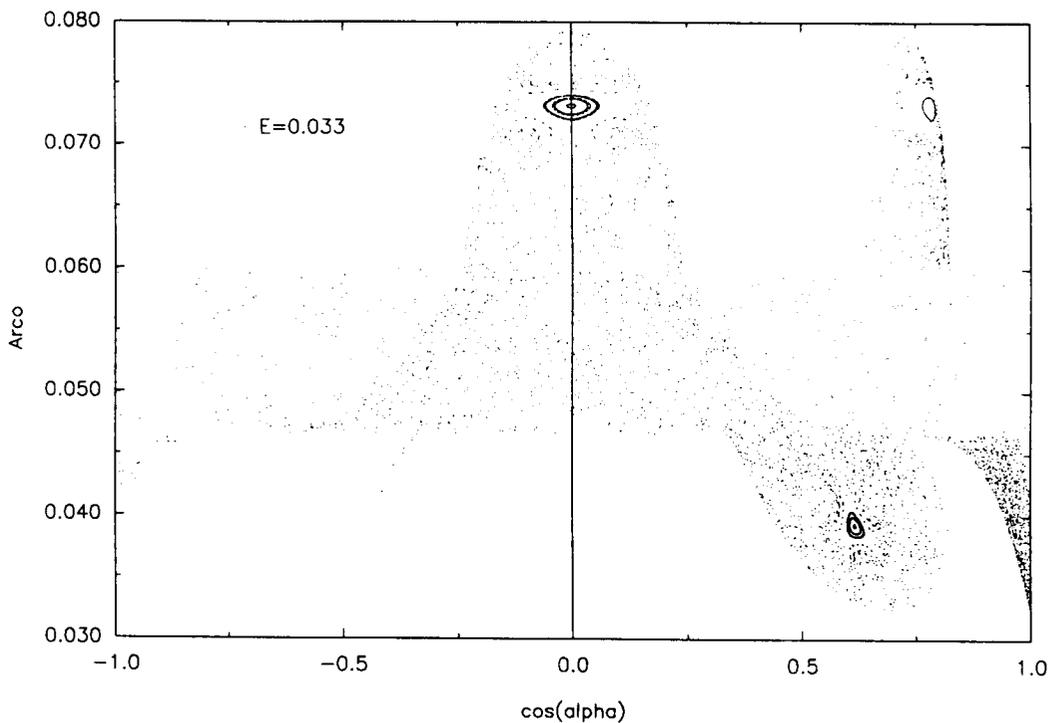


Fig 3.10 Mapa para $E=0.033$

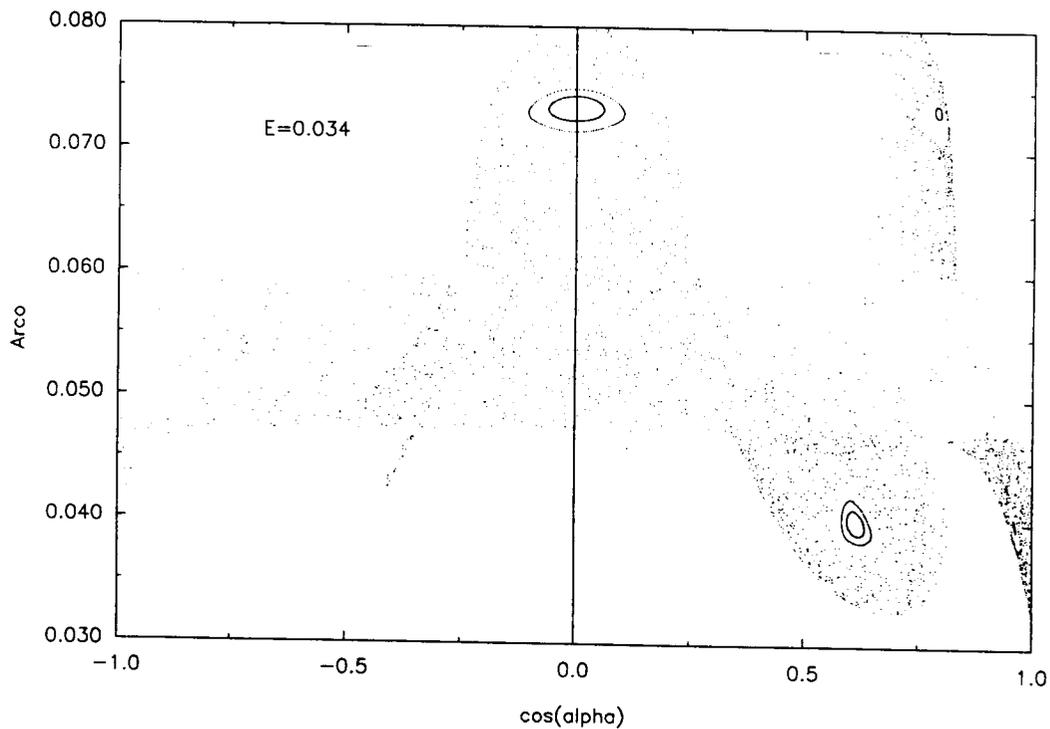


Fig 3.11 Mapa para $E=0.034$

Para $E = 0.034$ observamos o surgimento de uma família $C21$ em torno de $B11$. O gráfico

em $E = 0.036$ nos mostra a persistência dessa família. Na parte esquerda vemos as simetrias de $B11$ e $C21$.

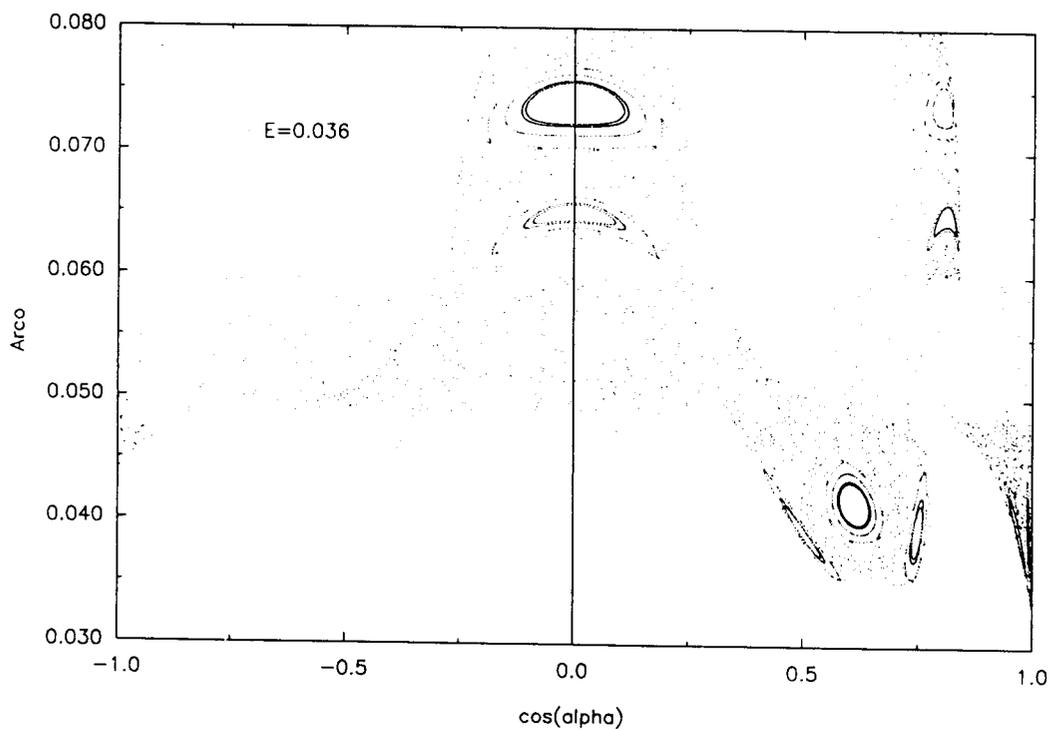


Fig 3.12 Mapa para $E=0.036$

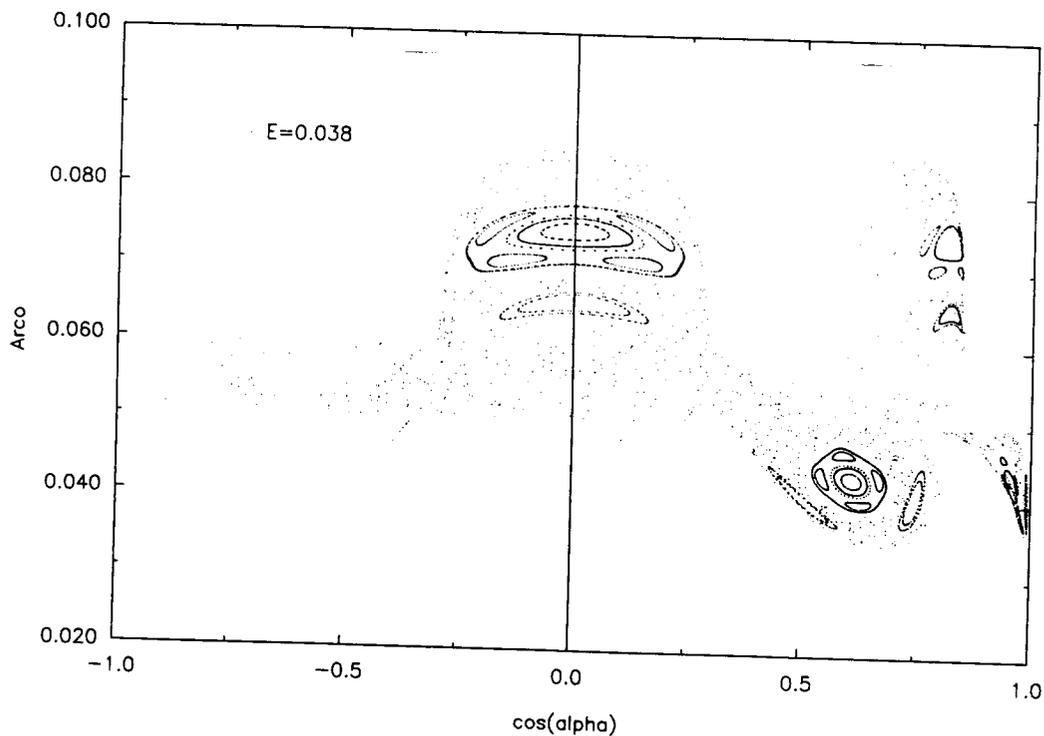


Fig 3.13 Mapa para $E=0.038$

Para $E = 0.038$ vemos uma ressonância $H44$ em torno de $B11$.

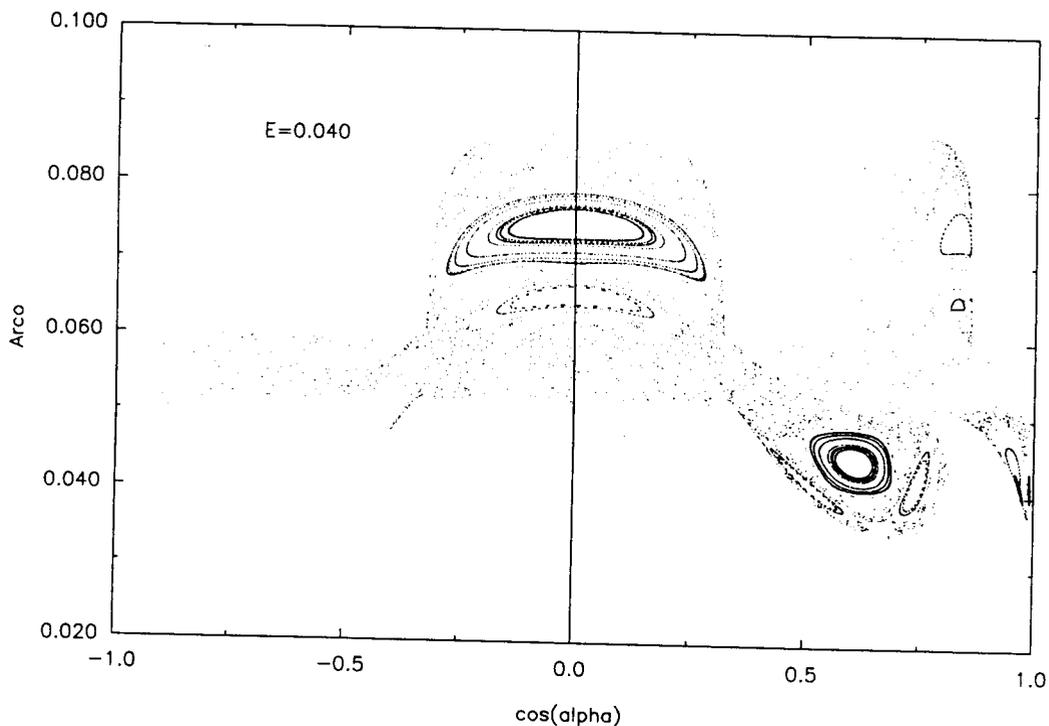


Fig 3.14 Mapa para $E=0.040$

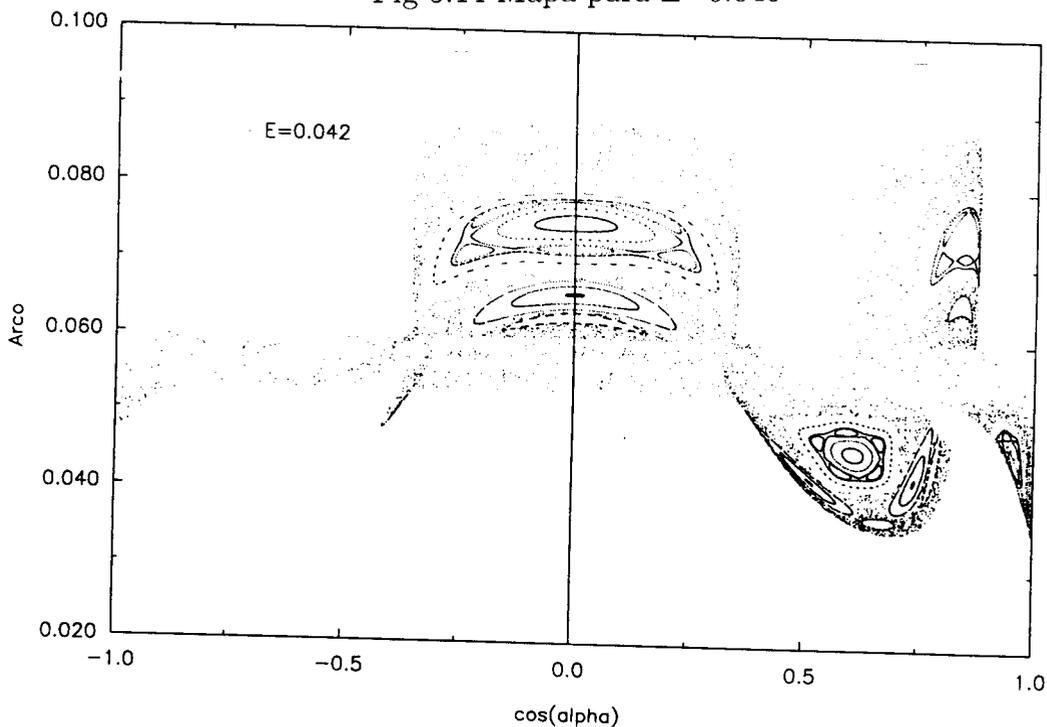


Fig 3.15 Mapa para $E=0.042$

A energia $E = 0.040$ apresenta somente $B11$ e $C21$. Em $E = 0.042$ vemos o surgimento de

uma família $D31$. Vemos ainda em torno de $B11$ o surgimento de uma ressonância $M66$. Para $E = 0.044$ surge uma família $E14$ em torno de $D31$.

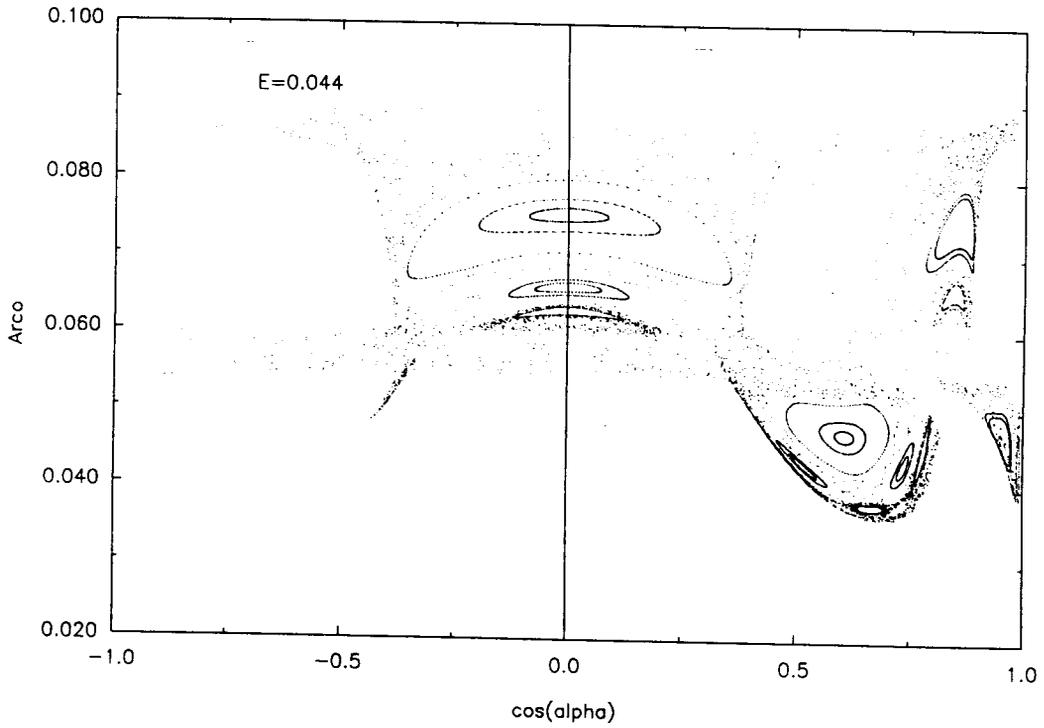


Fig 3.16 Mapa para $E=0.044$

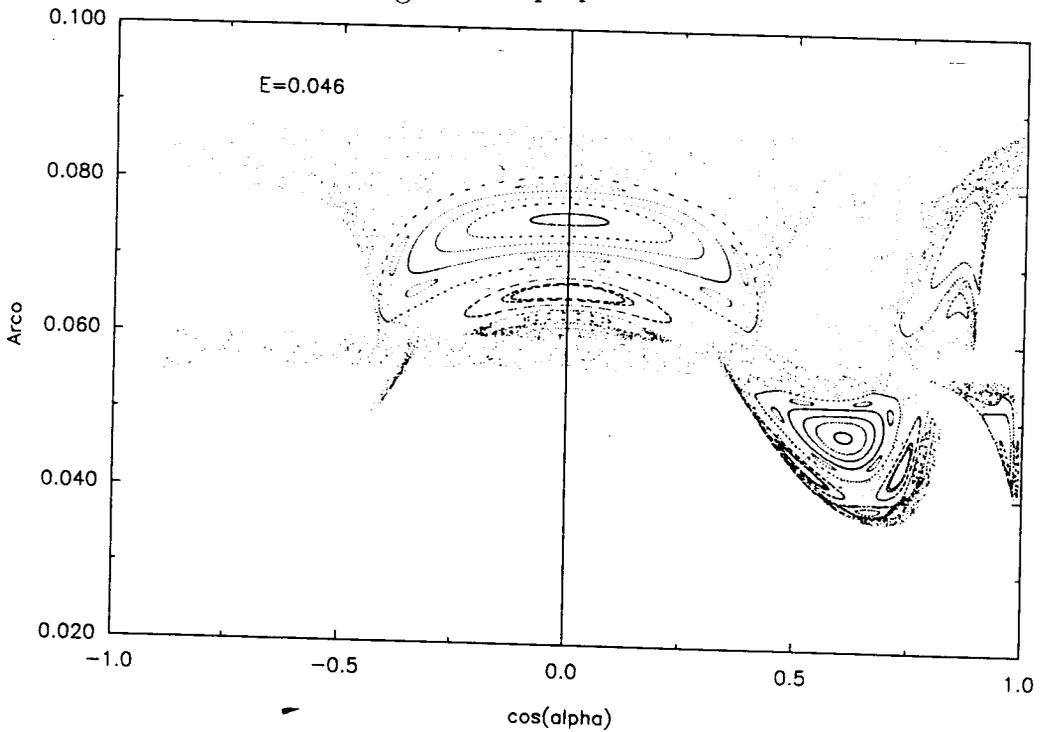


Fig 3.17 Mapa para $E=0.046$

Em $E = 0.046$ surge nove ressonância em $M66$ em torno de $B11$. Para $E = 0.048$ surge entre $B11$ e $C21$ uma família $E23$.

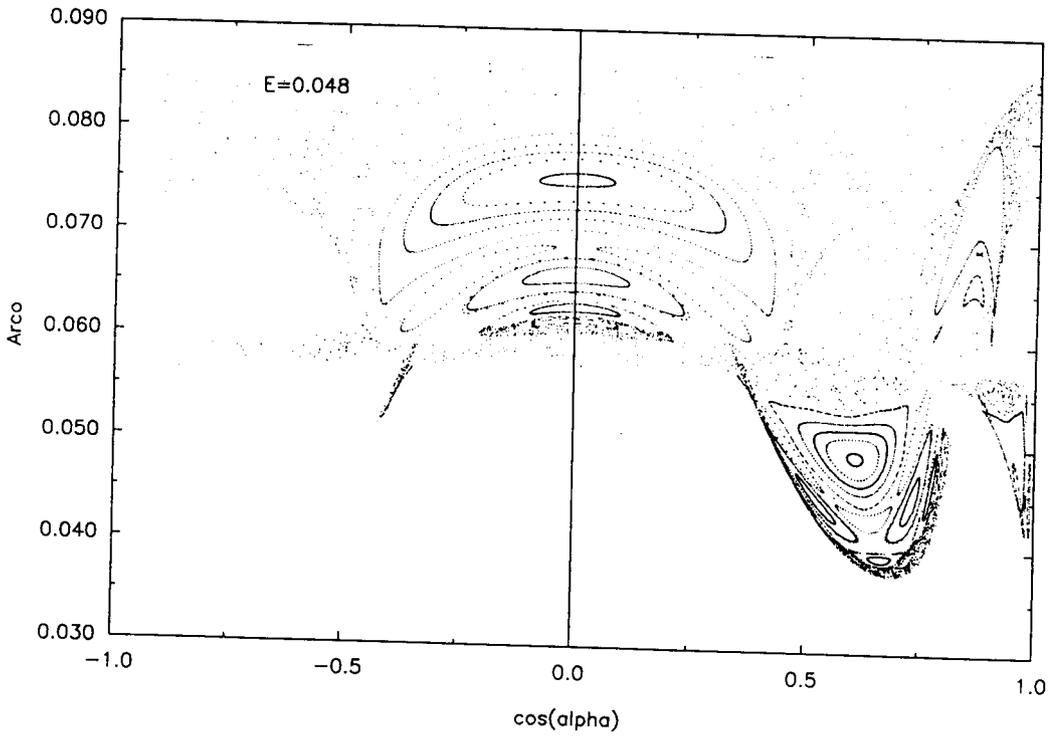


Fig 3.18 Mapa para $E=0.048$

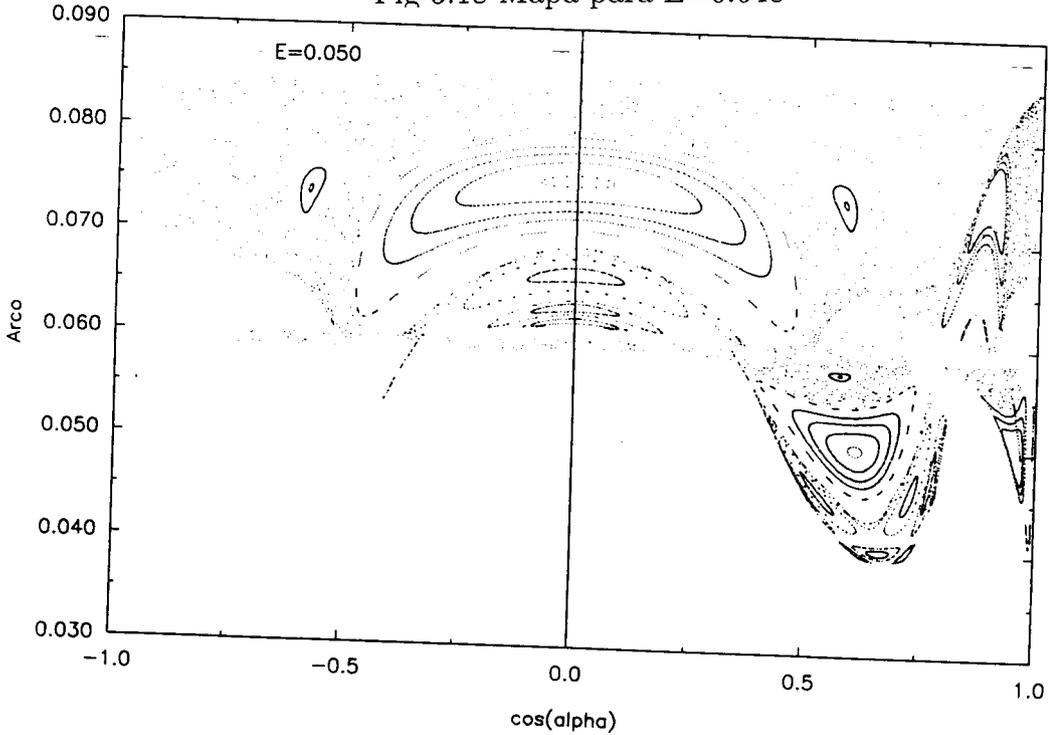


Fig 3.19 Mapa para $E=0.050$

Para $E = 0.050$ surge uma família $C21$.

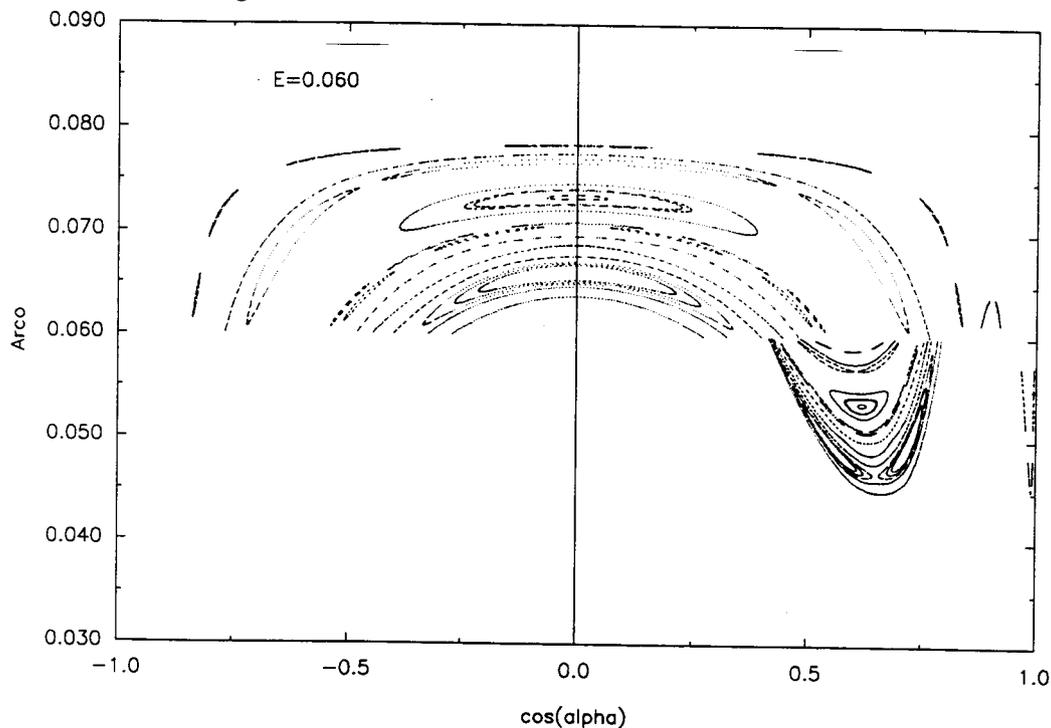


Fig 3.20 Mapa para $E=0.060$

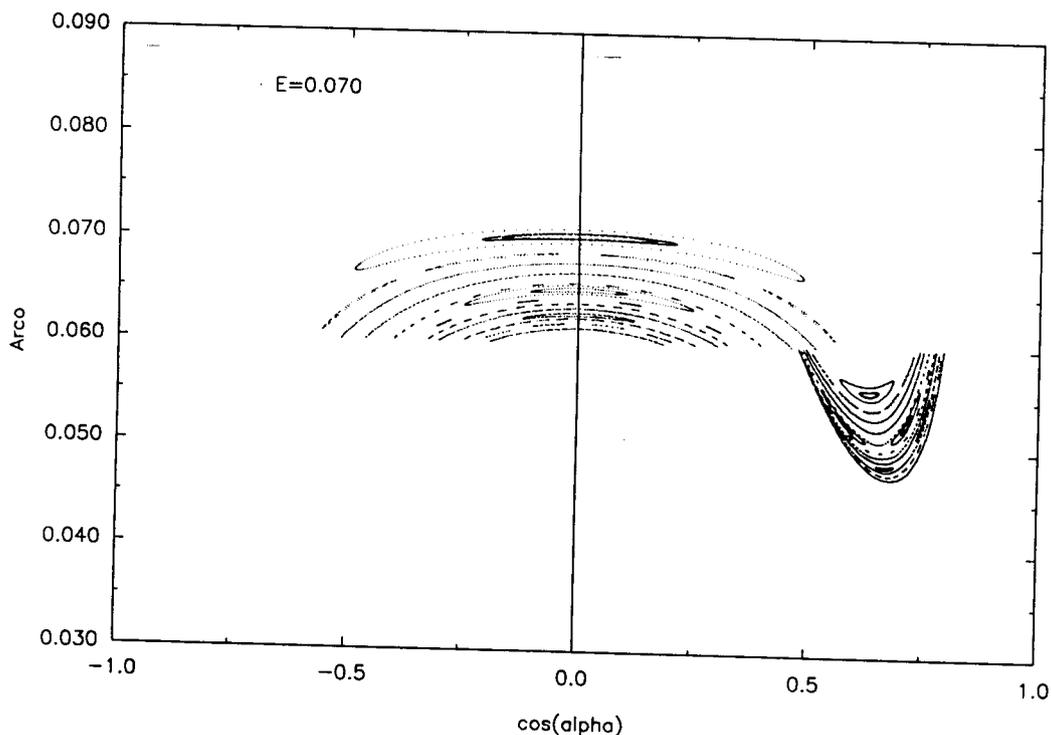


Fig 3.21 Mapa para $E=0.070$

Para uma energia $E = 0.060$ vemos que o mapa apresenta características completa-

mente diferentes. Note-se a ausência de regiões caóticas e a sensível diminuição da área do espaço de fases ocupada pela partícula. Para $E = 0.070$ notamos que essa diminuição se acentua ainda mais.

Acreditamos que tais fatos estão intimamente relacionados. Observemos o comportamento médio da energia no plano I_1, I_2 , isto é, observemos $\langle E \rangle$ definida como

$$\langle E(I_1, I_2) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \langle E(I_1, I_2) \rangle = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} I_1 w_1 + I_2 w_2 - \frac{I_1}{w_1} \sqrt{\frac{8I_2}{w_2}} \cos(\phi_2) \cos^2(\phi_1) \\ & + \frac{I_1^2}{w_1^2} \cos^4(\phi_1) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\langle E(I_1, I_2) \rangle = I_1 W_1 + I_2 W_2 + \frac{3}{8} \frac{I_1^2}{W_1^2}. \quad (67)$$

As curvas de nível de (67) são, para os valores de ação considerados, essencialmente retas e mostram que a medida que $\langle E \rangle$ aumenta as trajetórias vão sendo empurradas para o corte. A partir do valor em que as as trajetórias começarem a tocar ambos os cortes a velocidade de diminuição da área do espaço de fases deve aumentar significativamente. Esse comportamento é o comportamento mostrado pelos mapas para $E = 0.060$ e $E = 0.070$. A inexistência de comportamento caótico pode ser interpretada a partir dos pontos fixos instáveis na borda do bilhar. Esse ponto fixo exerce o efeito de um "vértice desfocalizador" à semelhança do que acontece nos sistemas pseudo-integráveis [16]. Esse vértice desfocaliza feixes de trajetórias, separando as órbitas que colidem com o Bilhar das órbitas que não colidem. A medida em que todas as trajetórias colidem com a borda do Bilhar o vértice deixa de desfocalizar as trajetórias e o Bilhar de Ação sente menos a influência desse ponto fixo instável, isto é, o Bilhar de Ação se torna mais regular. Nesta seção mostraremos o comportamento das órbitas periódicas estáveis do Bilhar de Ação do Potencial Nelson. Discutiremos como o fato das trajetórias do sistema serem "empurradas" para o corte determina o comportamento das famílias das órbitas periódicas estáveis e sugere a existência de um ponto para o qual as órbitas periódicas convergem

3.6 Órbitas Periódicas

Utilizando o algoritmo descrito, obtivemos as famílias de órbitas periódicas do Bilhar de Ação. A figura (3.41) mostra o gráfico dessas famílias em um diagrama do tipo EnergiaXPeríodo. Note-se o caráter suave das famílias e a tendência à diminuição do período em função da Energia. A família vertical do potencial Nelson também encontra-se plotada. Essa família colida com ao Bordo do Bilhar para uma energia $E \approx 0.043$ e então deixa de existir. Veremos que ela será importante para a nossa análise semiclássica.

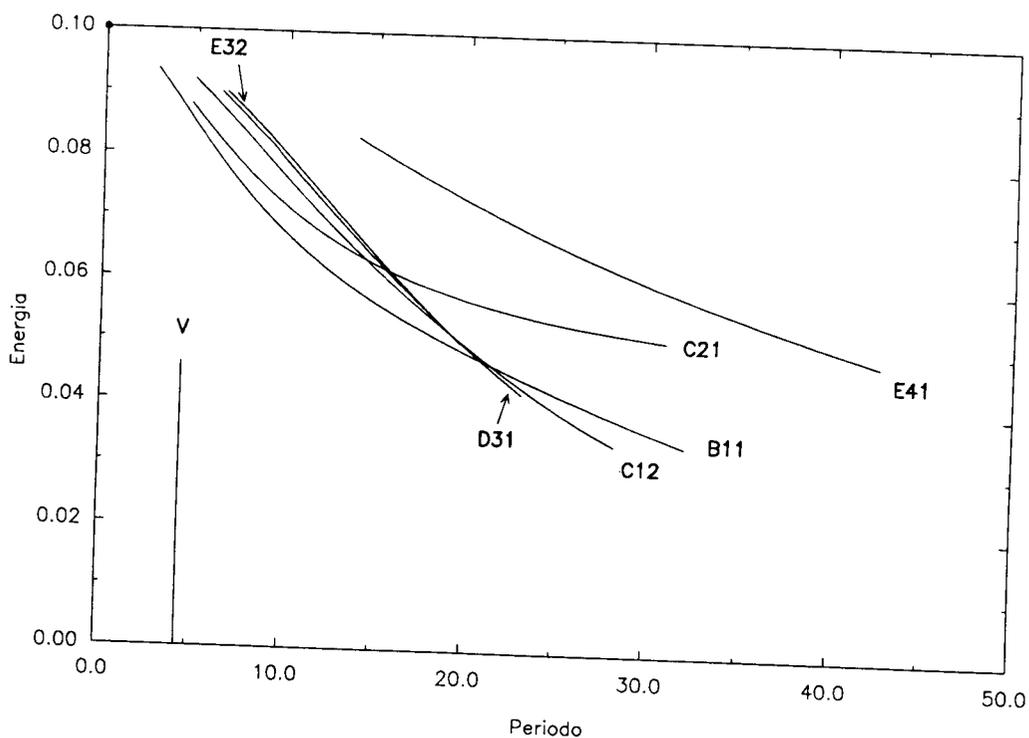


Fig. 3.22 Famílias de órbitas Periódicas Estáveis

A tendência das órbitas periódicas em convergir para o ponto $I_1 = I_2 = 0.03$ levou-nos a observar que o limite da energia das famílias estará na própria borda do Bilhar. O ponto de máxima energia na borda do Bilhar tem energia $E \approx 0.099945$. Esse é o ponto que encontra-se plotado na figura (*). Vemos que as famílias de órbitas periódicas tendem a convergir para esse ponto. Chamamos esse ponto, com uma grande liberdade de linguagem de ponto de convergência das órbitas periódicas do Bilhar de Ação. Discutiremos como o fato das trajetórias do sistema serem "empurradas" para o corte determina o comportamento das famílias das órbitas periódicas estáveis e sugere a existência de um ponto para o qual as órbitas periódicas convergem. Estudaremos em detalhe as órbitas periódicas da família B_{11} . Como veremos o comportamento das órbitas periódicas de todas as famílias que colidem como o Bilhar é semelhante.

Na figura (3.23) vemos a projeção I_1, I_2 da trajetória periódica B_{11} para $E = 0.035$. Os limites da figura representam as próprias bordos do Bilhar.

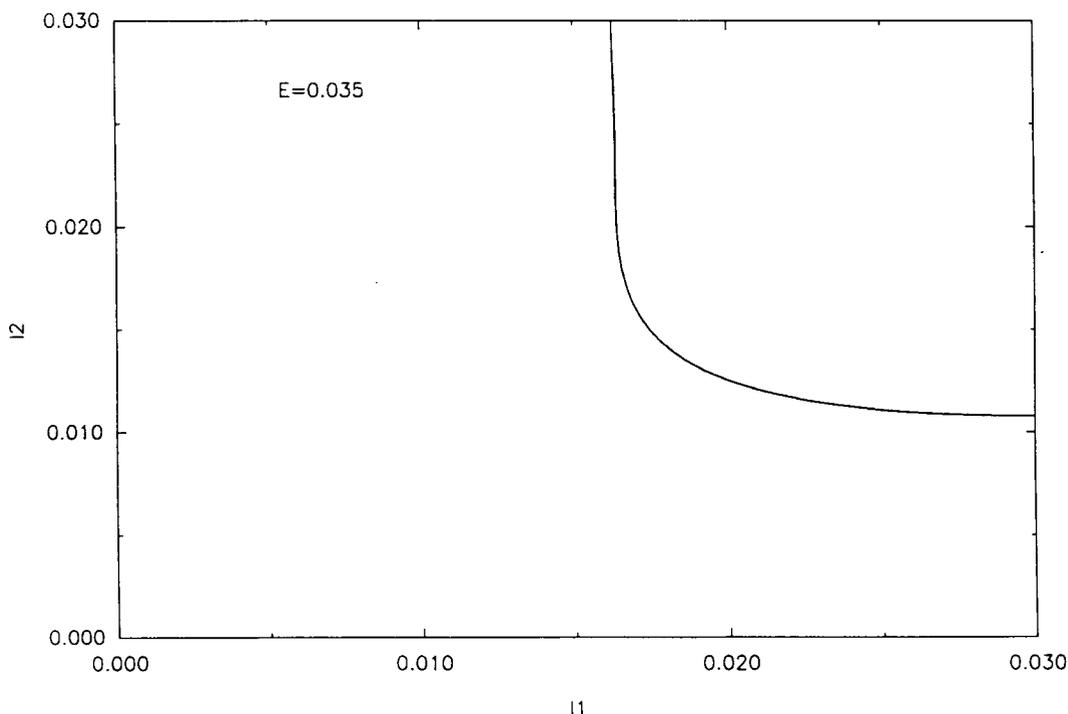


Fig 3.23 Projeção I_1, I_2 de B_{11} - $E = 0.035$

Na figura (3.24) vemos a projeção de B_{11} para a energia $E = 0.035$ em x, p_x . O círculo da figura representa o corte, dado por $N_1 = 0.03$.

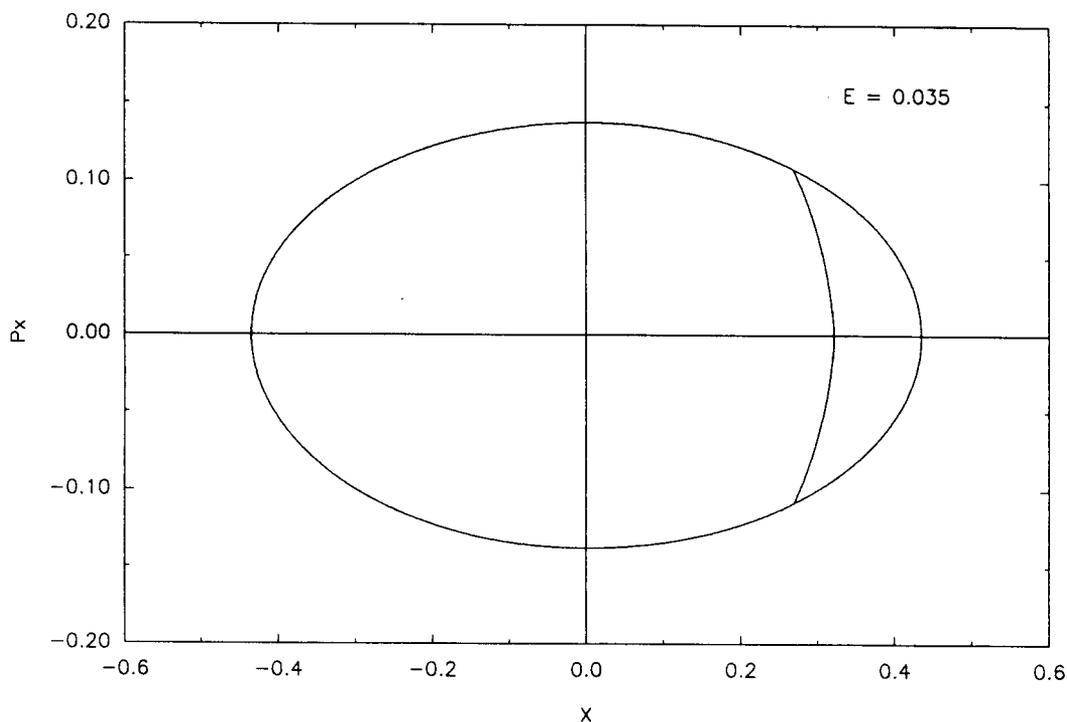


Fig 3.24 Projeção x, P_x de $B_{11} - E = 0.035$

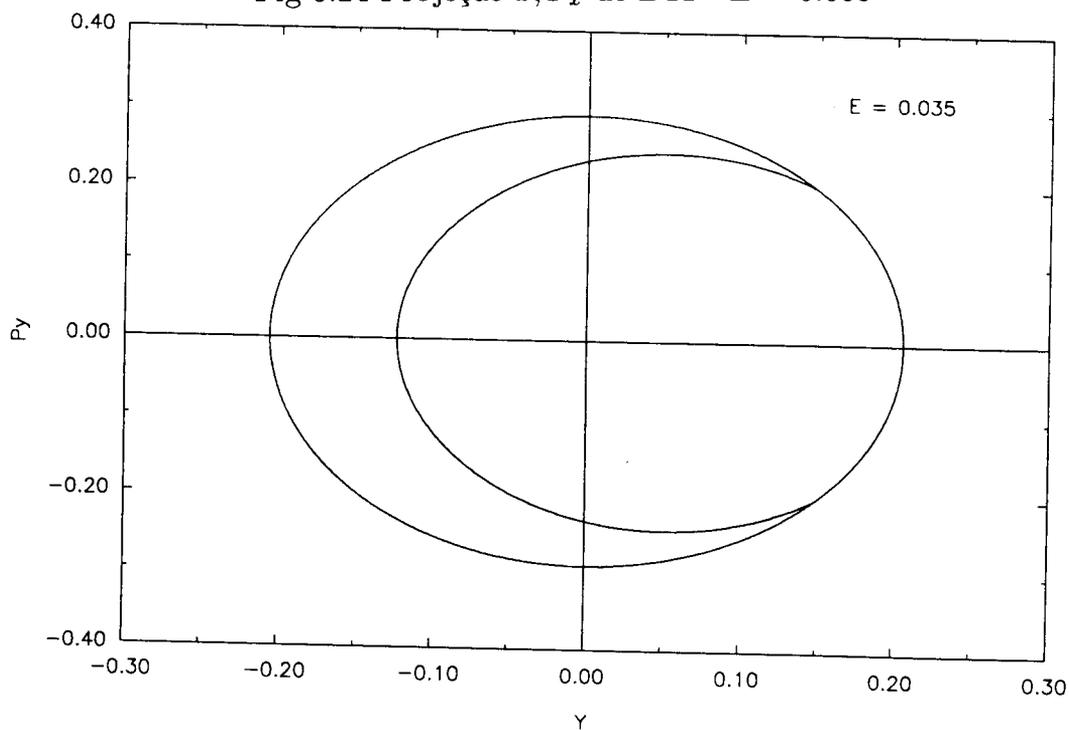


Fig 3.25 Projeção y, P_y de $B_{11} - E = 0.035$

Na figura (3.25) vemos a projeção de $B11$ para a energia $E = 0.035$ em y, p_y . O círculo da figura representa o corte, dado por $\aleph_2 = 0.03$. Aumentando a energia $B11$ tende a ser expulsa de dentro do Bilhar. As figuras (3.26-3.28) mostram as projeções de $B11$ para três valores de energia diferentes.

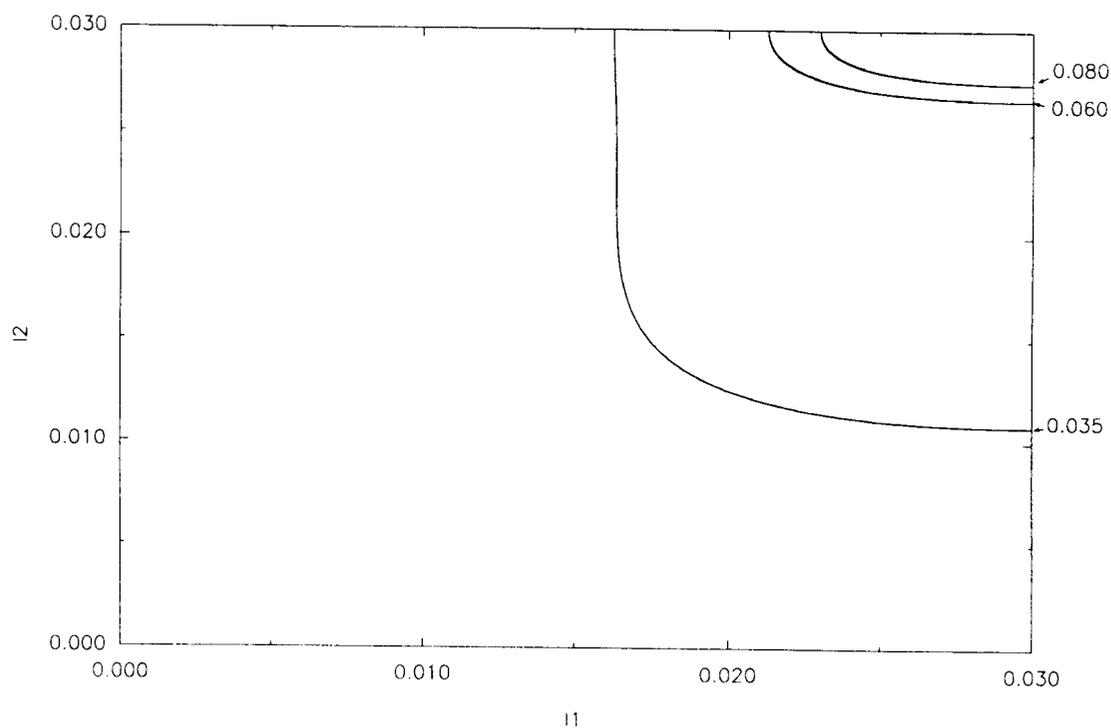


Fig 3.26 Projeções I_1, I_2 de $B11$

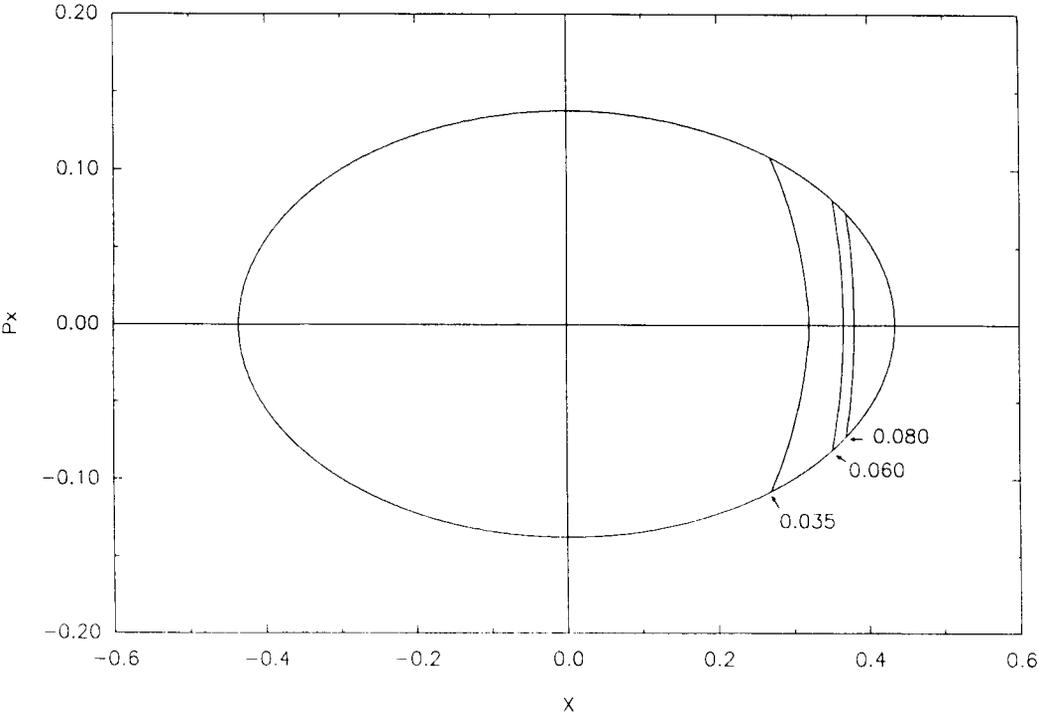


Fig 3.27 Projeções x, P_x de B11

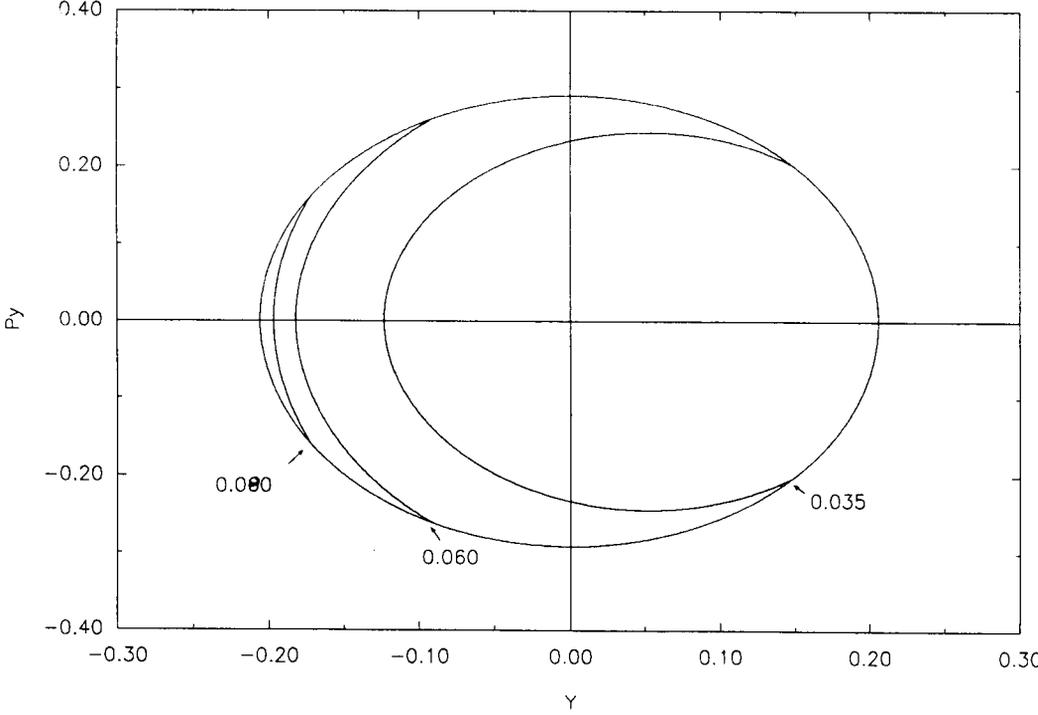


Fig 3.28 Projeções y, P_y de B11

As figuras (3.29-3.31) nos explicam o comportamento de B_{11} no gráfico EnergiaX-Período. A medida que aumentamos a energia da órbita periódica ele vai sendo progressivamente " cortada " pela borda do Bilhar e sua energia vai diminuindo gradativamente. Abaixo mostramos as projeções de C_{21} para três valores de energia diferentes.

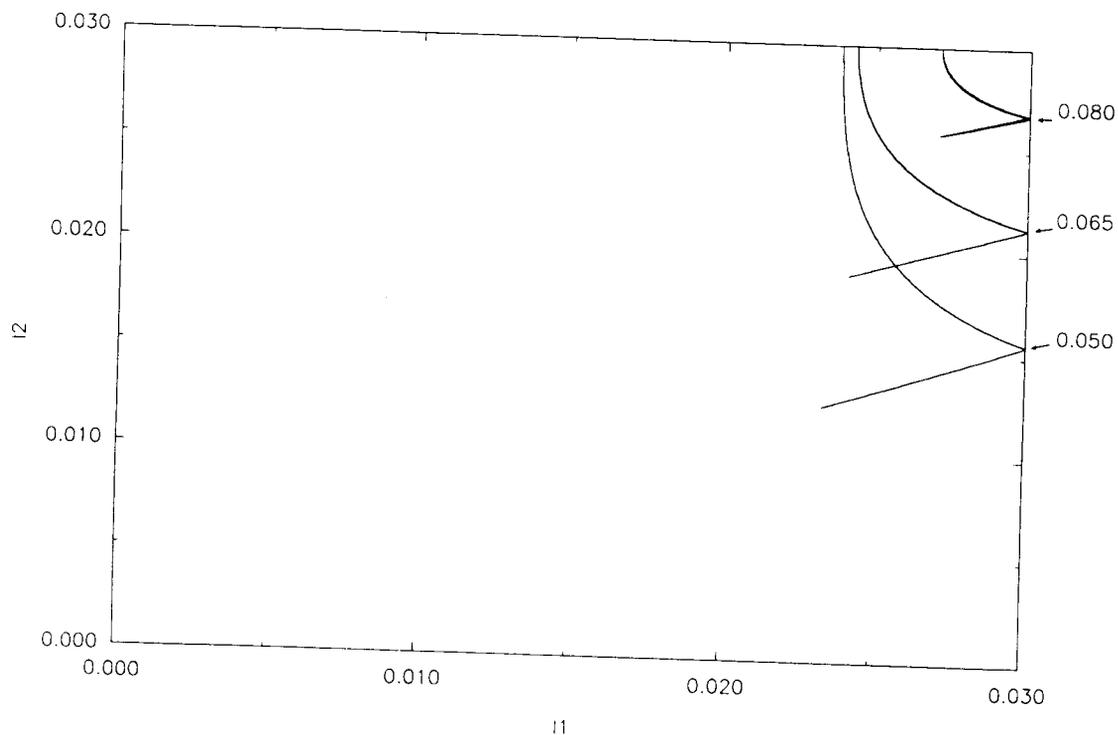


Fig 3.29 Projeções I_1, I_2 de C_{21}

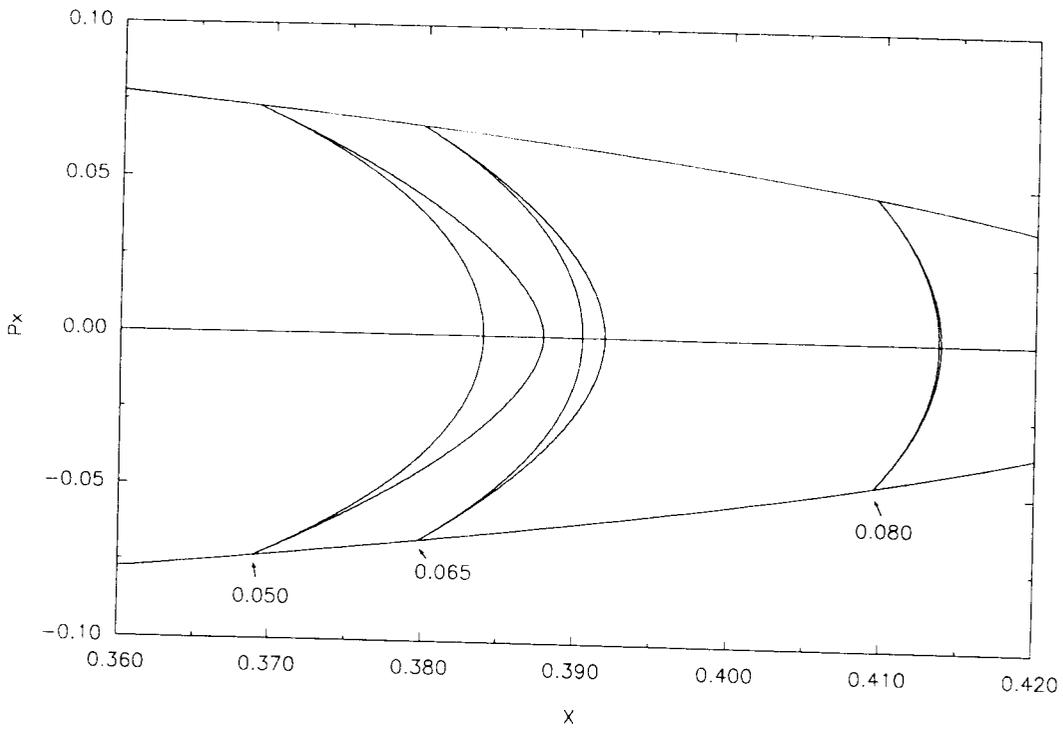


Fig 3.30 Projeções x, P_x de $C21$

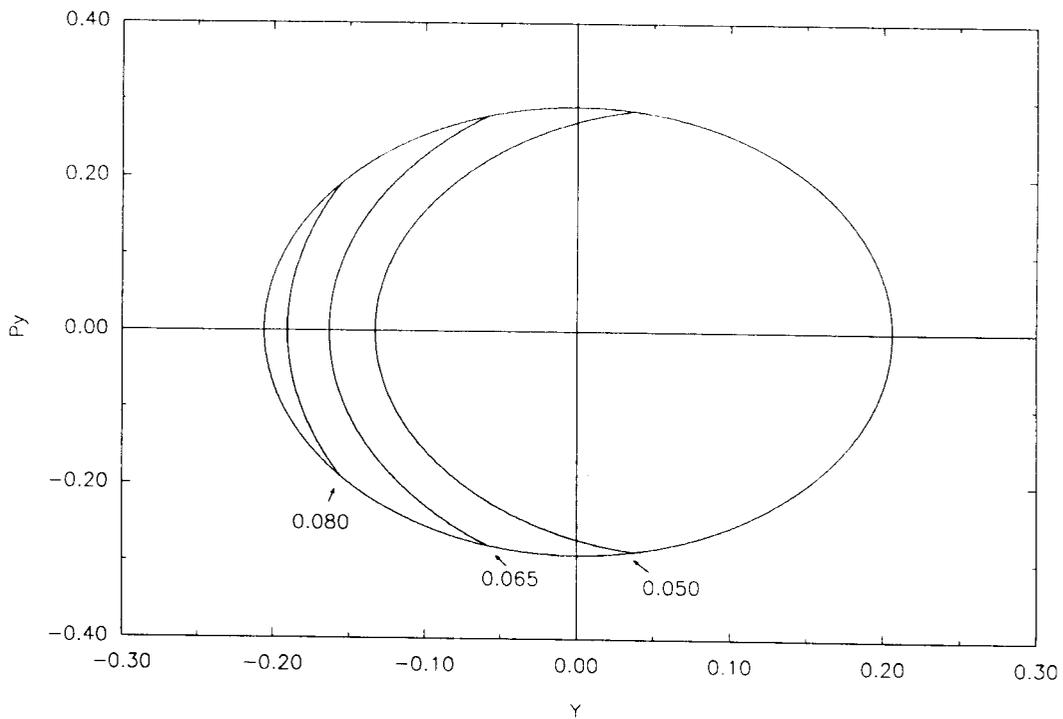


Fig 3.31 Projeções y, P_y de $C21$

Temos que o comportamento de $C21$ é qualitativamente o mesmo que o de $B11$. Todas

as famílias analisadas nesse trabalho (são elas B_{11} , C_{21} , C_{12} , D_{31} , E_{32} , E_{41}) possuem exatamente as mesmas características que B_{11} . Por completeza mostramos a seguir as projeções em I_1, I_2 de C_{12} , D_{31} , E_{32} e E_{41} para um dado valor de energia.

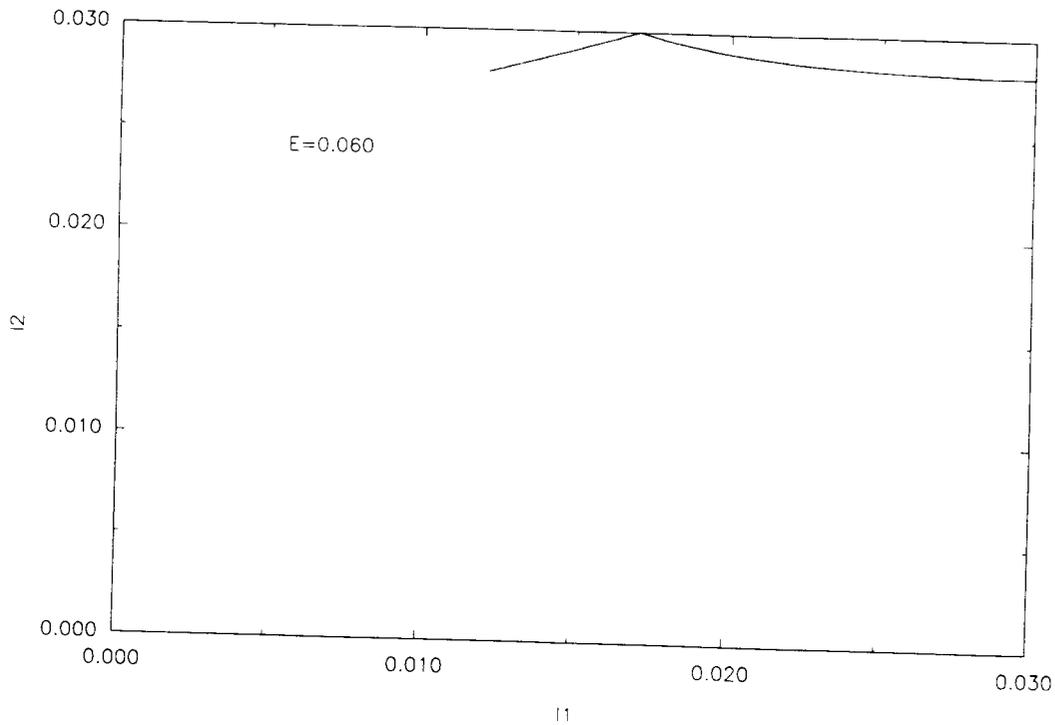


Fig 3.32 Projeção I_1, I_2 de C_{12} - $E=0.060$

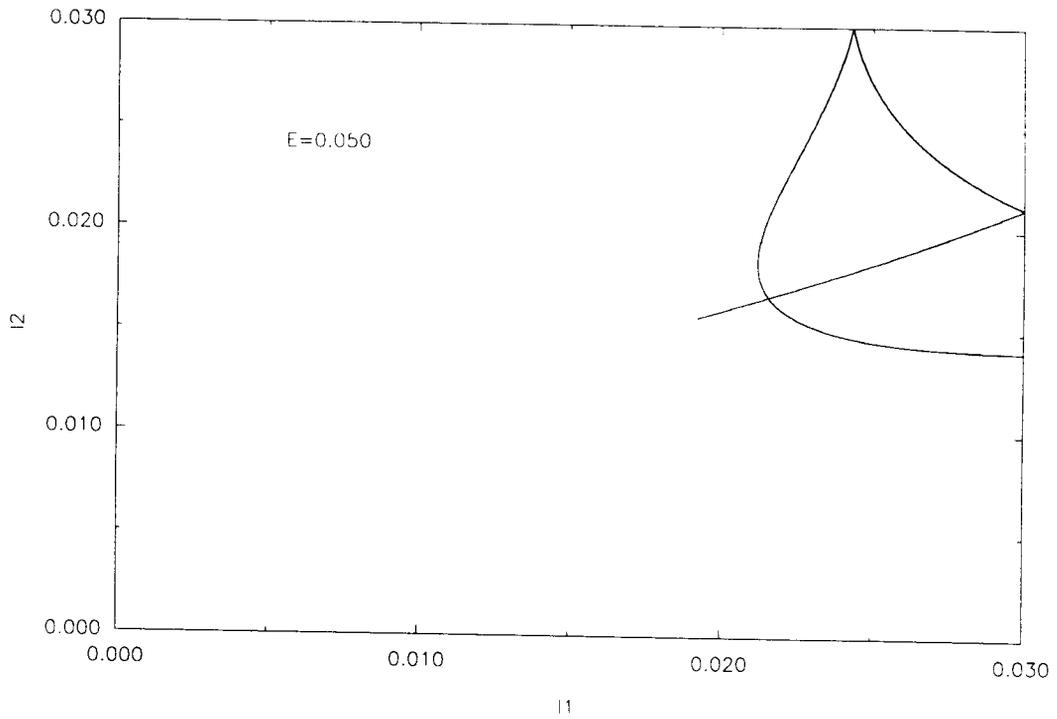


Fig 3.33 Projeção I_1, I_2 de D_{31} - $E=0.050$

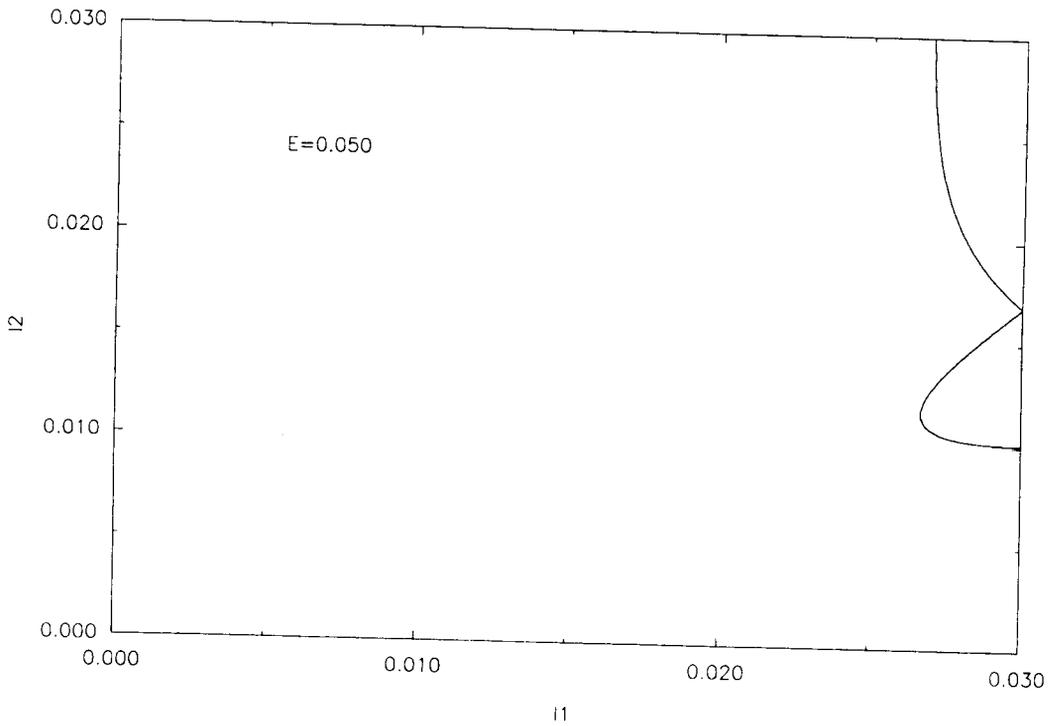


Fig 3.34 Projeção I_1, I_2 de E_{32} - $E=0.050$

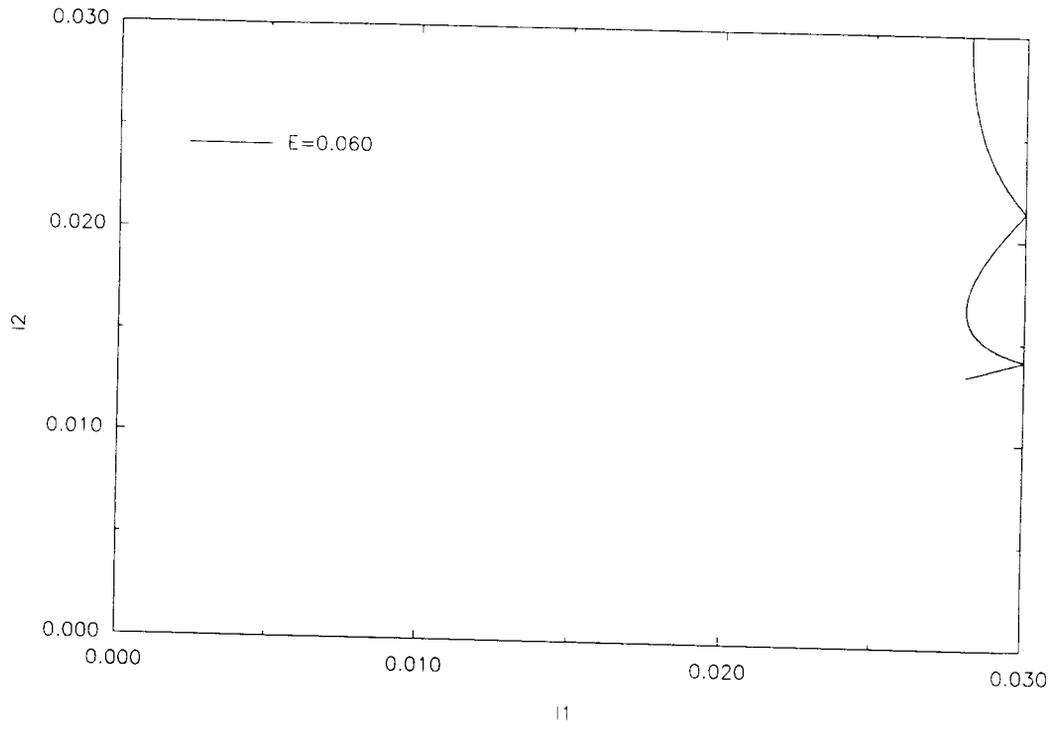


Fig 3.35 Projeção I_1, I_2 de $E41 - E=0.060$

Capítulo 4

ASPECTOS SEMICLÁSSICOS

4.1 Introdução

Nesta seção faremos uma breve discussão da Fórmula do Traço de Gutzwiller. Tal fórmula se constitui hoje em poderosa ferramenta para o estudo do limite semiclássico dos sistemas caóticos. A obtenção da Fórmula baseia-se na relação do operador de propagação temporal com a densidade de estados. A seguir mostramos explicitamente essa relação [17].

O propagador $\hat{K}(t)$ pode ser visto como a função de Green temporal da equação de Schroedinger, isto é

$$i\hbar \frac{\partial \hat{K}}{\partial t} - H\hat{K} = I\delta(t); \quad (1)$$

onde I é o operador unidade. A solução dessa equação é dada por

$$\hat{K}^+ = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0; \\ -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{iHt}{\hbar}}, & \text{se } t \geq 0; \end{cases} \quad (2)$$

ou

$$\hat{K}^- = \begin{cases} 0, & \text{se } t > 0; \\ -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{iHt}{\hbar}}, & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Calculando a transformada de Fourier de $\langle x'' | \hat{K}(t) | x' \rangle$ segue que

$$G^+(x'', x', E) = \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x'' | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x' \rangle e^{\frac{iEt}{\hbar}} dt, \quad (4)$$

$$G^+(x'', x', E) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n \phi_n^*(x') \phi_n(x'') \int_0^{\infty} e^{-\frac{i(E-E_n)t}{\hbar}} dt. \quad (5)$$

onde $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$. De forma a eliminarmos a divergência do integrando, fazemos $E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E + i\epsilon$. Supomos ainda que o limite e a integração comutam. Segue que

$$G^+(x'', x', E) = \sum_n \frac{-i}{\hbar} \phi_n^*(x') \phi_n(x'') \left[\frac{e^{\frac{i(E-E_n)t}{\hbar} - \epsilon t}}{\frac{i}{\hbar}(E - E_n + i\epsilon)} \right]_0^{\infty}; \quad (6)$$

$$G^+(x'', x', E) = \sum_n \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x'')}{E - E_n + i\epsilon}. \quad (7)$$

Cálculo análogo para $G^-(x'', x', E)$ nos mostra * que

$$G^\pm(x'', x', E) = \sum_n \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x'')}{E - E_n \pm i\epsilon}, \quad (8)$$

Mostramos então que a transformada de Fourier do propagador é a função de Green. Portanto se relacionarmos a função de Green com a densidade de níveis estaremos, indiretamente relacionando o Propagador com a Função de Green. De forma a prosseguir em nossas considerações reescreveremos a função de Green considerando que

$$\frac{1}{E - E_n \pm i\epsilon} = \frac{E - E_n}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2} \mp \frac{i\epsilon}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2}. \quad (9)$$

No limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ o primeiro termo nos fornece $\frac{1}{E - E_n}$, isto é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E - E_n}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2} = P\left(\frac{1}{E - E_n}\right); \quad (10)$$

onde $P\left(\frac{1}{E - E_n}\right)$ é o valor principal de Cauchy. O segundo termo divergirá para $\epsilon \rightarrow 0$ se $E = E_n$ e será zero se $E \neq E_n$, isto é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(E - E_n)^2 + \epsilon^2} = A\delta(E - E_n). \quad (11)$$

Integrando ambos os lados da equação (11) em E , de $-\infty$ a $+\infty$ segue que $A = \pi$. Escrevemos então (9) como

$$\frac{1}{E - E_n \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{E - E_n}\right) \mp i\pi\delta(E - E_n). \quad (12)$$

A função de Green será escrita como

$$G^\pm(x'', x', E) = P\left[\sum_n \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x'')}{E - E_n \pm i\epsilon}\right] \mp i\pi \sum_n \phi_n^*(x')\phi_n(x'')\delta(E - E_n). \quad (13)$$

Tomando o traço de $G^\pm(x'', x', E)$ obtemos a Função Resposta,

$$G^\pm \equiv Tr(G^\pm(x'', x', E)) = \int G^\pm(x, x, E)dx; \quad (14)$$

* O termo em ϵ foi mantido para indicar o processo de integração utilizado

$$G^{\pm} = P\left(\sum_n \frac{1}{E - E_n}\right) \mp i\pi \sum_n \delta(E - E_n). \quad (15)$$

A densidade de níveis $n(E)$ será dada por

$$n(E) = \mp \frac{1}{\pi} \Im(G(E)); \quad (16)$$

$$n(E) = \sum_n \delta(E - E_n).$$

A equação (16) nos fornece a relação desejada entre a densidade de níveis e a função de Green.

A relação entre as descrições clássica e quântica de um sistema Hamiltoniano pode ser estabelecida a partir da interpretação de Feynmann para o propagador. Nessa interpretação o propagador é visto como uma soma sobre todos os possíveis caminhos clássicos. No limite semiclássico mostra-se que os caminhos que mais contribuem para a soma são as trajetórias clássicas. O que a equação (16) nos indica é a possibilidade de relacionarmos a densidade de níveis com as trajetórias clássicas de um sistema Hamiltoniano no limite semiclássico. O cálculo para a obtenção dessa relação segue a seguinte ordem:

- Calcula-se o propagador no limite semiclássico utilizando o método de fase estacionária(MFE). O propagador, como vimos, é a solução da equação de Schroedinger dependente do tempo com a condição inicial dada por

$$K(x'', x', 0) = \delta(x'' - x'). \quad (17)$$

Em termos clássicos esse estado inicial corresponde a pontos uniformemente distribuídos em p ao longo do plano $x = x'$. A evolução dessa superfície é determinada pelo fluxo da Hamiltoniana. Para $t \rightarrow \pm\infty$ essa superfície estará com um número infinito de cústicas [2] o que impossibilitará o estudo do propagador para tempos grandes. Mesmo para o caso de sistemas integráveis o problema das cústicas se apresentará. Mostra-se entretanto que ao somarmos um caminho que possui cústicas o propagador ganha uma fase a cada cústica que é cruzada.

- De posse do propagador calcula-se a sua transformada de Fourier utilizando o MFE de forma a obtermos a função de Green.

• Calcula-se então o traço da função de Green utilizando-se mais uma vez o MFE. Nesse cálculo mostra-se que no limite semiclássico as órbitas que mais contribuem para o traço são as órbitas periódicas.

Portanto a densidade dos níveis de energia de um sistema quântico pode ser escrita como uma soma sobre todas as órbitas periódicas do sistema clássico associado. A expressão matemática que traduz esse fato é conhecida por Fórmula do Traço de Gutzwiller.

De forma a obtermos a Fórmula do Traço uma importante distinção entre as órbitas periódicas deve ser traçada. A soma, considerando **todas** as órbitas periódicas, considera também as órbitas periódicas de período $t = 0$ (cada ponto tem associado a si uma órbita que permanece em q no intervalo $t = 0$). Tal fato possibilita que calculemos as duas "classes" de órbitas periódicas separadamente. Calcularemos a seguir o termo da Fórmula do Traço de Gutzwiller correspondente as trajetórias de período zero [2].

Considere o propagador em sua representação de coordenadas

$$\langle x'' | \hat{K} | x' \rangle = \sum_n \phi_n(x'') \phi_n(x') e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}. \quad (18)$$

A equação (18) pode ser invertida tomando-se a sua transformada de Fourier. Entretanto, como ressaltamos, o comportamento do propagador para tempos grandes impossibilita esse cálculo. Uma forma de se contornar essa dificuldade é multiplicarmos o propagador por um termo de *cut-off* no tempo. Utilizamos como *cut-off* uma gaussiana normalizada,

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x'' | \hat{K} | x' \rangle e^{\frac{iEt}{\hbar} - \frac{t^2\lambda^2}{2\hbar^2}} dt = \sum_n \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{E-E_n}{2\lambda^2}} \phi_n(x'') \phi_n(x'), \quad (19)$$

onde fizemos a integração do lado direito da equação completando o quadrado.

Para $t \approx 0$, $x'' \approx x'$ e podemos considerar H como uma função somente de p , isto é, podemos considerar o potencial como sendo constante. Escrevemos o propagador na representação de momentos como

$$\langle p'' | \hat{K} | p' \rangle \approx \langle p'' | e^{-\frac{itH(p,x)}{\hbar}} | p' \rangle = e^{-iH(p,x)} \delta(p'' - p'). \quad (20)$$

Transformando para o espaço das coordenadas segue que

$$\langle x'' | \hat{K} | x' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^L} \int \langle p'' | \hat{K} | p' \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(p'' \cdot q'' - p' \cdot q')} dp'' dp'. \quad (21)$$

A contribuição do termo oscilatório [17] á densidade de estados é dada pela soma das órbitas periódicas com $t \neq 0$. O termo oscilante é escrito como

$$n_{osc} = \sum_j \frac{\tau_{0j} e^{\frac{\epsilon \tau_j}{\hbar}}}{\pi \hbar \sqrt{\text{Det} M - I}} \cos\left(\frac{S_j(E)}{\hbar} - \frac{\sigma_j \pi}{2}\right); \quad (25)$$

onde I é a matriz identidade, ϵ é o *cut-off* utilizado para calcularmos a função de Green, S_j é a ação da órbita periódica, τ_{0j} é o período primitivo das órbitas periódicas e finalmente M é a matriz monodromia da órbita j . Para o caso bidimensional mostra-se que

$$\text{Det}(M - I) = \begin{cases} 4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), & \text{se } j \text{ estável,} \\ -4 \sinh^2\left(\frac{\mu}{2}\right), & \text{se } j \text{ instável direta,} \\ -4 \cosh^2\left(\frac{\mu}{2}\right), & \text{se } j \text{ instável inversa;} \end{cases} \quad (26)$$

portanto para o caso bidimensional vemos que o termo que mais contribui para a parte oscilante do espectro é o termo relacionado ás órbitas periódicas estáveis; os outros termos, não sendo nunca zerados (o expoente de Lyapounov de uma órbita periódica instável é sempre maior que zero) contribuem mais para o termo médio da densidade de estados.

4.2 Quantização do Bilhar de Ação

Mostraremos a seguir que um operador hamiltoniano, representado na base de oscilador truncada, isto é, com um número finito de vetores de base, terá como análogo clássico o seu Bilhar de Ação. Para tanto considere uma Hamiltoniana analítica representada por sua série de Taylor,

$$H(p, q) = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_L \\ m_1, \dots, m_L}} H_{lm} p_1^{l_1} \dots p_L^{l_L} q_1^{m_1} \dots q_L^{m_L}. \quad (27)$$

Fazendo a transformação

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j), \\ a_j^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j); \end{aligned} \quad (28)$$

segue que

$$\begin{aligned} H'(a, a^*) &= \sum_{\substack{l_1, \dots, l_L \\ m_1, \dots, m_L}} H_{lm} \left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{l_1 + \dots + l_L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m_1 + \dots + m_L} (a_1 + a_1^*)^{l_1} \dots \\ &\quad (a_L + a_L^*)^{l_L} (a_1^* - a_1)^{m_1} \dots (a_L^* - a_L)^{m_L} \end{aligned}, \quad (29)$$

redefinindo os coeficientes,

$$H'(a, a^*) = \sum_{l,m} H'_{l,m} a_1^{l_1} \dots a_L^{l_L} a_1^{*m_1} \dots a_L^{*m_L}. \quad (30)$$

De forma a representar a Hamiltoniana em coordenadas polares. faremos a seguinte transformação

$$\begin{aligned} a_j &= I_j^{\frac{1}{2}} e^{i\phi_j} \\ a_j^* &= I_j^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi_j}, \end{aligned} \quad (31)$$

e redefinindo novamente os coeficientes, segue que

$$H''(I, \phi) = \sum_{k,r} H''_{k,r} I_1^{\frac{1}{2}} \dots I_L^{\frac{1}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\phi}}. \quad (32)$$

Consideremos agora a função chapéu $\Theta_\lambda(I)$ tal que

$$\Theta_\lambda(I) = \begin{cases} \Theta_\lambda < \epsilon, & \text{se } I \in \Sigma; \\ 1 \geq \Theta_\lambda > 1 - \epsilon, & \text{se } I \in \Gamma, \end{cases} \quad (33)$$

onde a medida que $\lambda \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$. Γ e Σ assumem aqui o mesmo significado do capítulo anterior, isto é, no caso da Hamiltoniana do Bilhar de Ação $H = H(\Theta)$, Γ será o interior do bilhar e Σ será o exterior do Bilhar. Representemos $\Theta_\lambda(I)$ por sua série de taylor

$$\Theta_\lambda(I) = \sum_s \Theta_{\lambda(I),s} I_1^{s_1} \dots I_L^{s_L},$$

que em termos de a_j e a_j^* pode ser escrita como

$$\Theta_\lambda(a, a^*) = \sum_s \Theta_{\lambda,s} (a_1 a_1^*)^{s_1} \dots (a_L a_L^*)^{s_L}. \quad (34)$$

O Bilhar de Ação suavizado pode ser escrito nas variáveis I e ϕ ,

$$H'_\lambda(I, \phi) = H''(I, \phi) \Theta_\lambda^2(I), \quad (35)$$

ou

$$H''_\lambda(I, \phi) = \Theta_\lambda(I) H''(I, \phi) \Theta_\lambda(I). \quad (35)$$

O Bilhar de Ação será dado por

$$H''_0(I, \phi) = \Theta_0(I) H''(I, \phi) \Theta_0(I). \quad (36)$$

escrevendo $H''(I, \phi)$ e $\Theta_0(I)$ em termos de a e a^* , a quantização do Bilhar de Ação é imediata. Fazendo-se a equivalência entre grandezas físicas e operadores do espaço de Hilbert (quantização canônica) escrevemos que

$$\begin{aligned}\hat{a}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_j + i\hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_j - i\hat{p}_j).\end{aligned}\tag{37}$$

Segue que

$$\hat{\Theta}_\lambda = \sum_s \Theta_{\lambda,s}(\hat{a}_1 \hat{a}_1^*)^{s_1} \dots (\hat{a}_L \hat{a}_L^*)^{s_L}.\tag{38}$$

Mas

$$\langle n' | \hat{\theta}_\lambda | n \rangle = \delta_{nn'} \Theta_\lambda \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) h \right].\tag{39}$$

e no limite $\lambda \rightarrow 0$ identificamos

$$\hat{\Theta}_0 = \sum_{n=0}^N |n\rangle \langle n|.\tag{40}$$

Segue que

$$\hat{H}_0 = \sum_{\substack{n=0 \\ n'=0}}^N |n'\rangle \langle n'| \hat{H} |n\rangle \langle n|,\tag{41}$$

ou seja o Bilhar de Ação é quantizado em um bloco de matriz da representação de \hat{H}_0 na base de oscilador harmônico .

4.3 Análise Semiclássica do Bilhar de Ação do Potencial Nelson

Nesta seção relacionaremos a estrutura de órbitas periódicas estáveis do Bilhar de Ação do potencial Nelson com a densidade de estados do seu espectro quântico. Como acabamos de ver o Bilhar de Ação é quantizado em um bloco de matriz. A significação desse fato reside em que todos os autovalores da matriz são representativos do sistema, isto é, não existe distinção entre autovalores convergidos e autovalores não-convergidos. A perturbação causada nos autovalores pelo processo de truncamento pode ser traduzida classicamente pelo corte introduzido na variável de ação da representação do sistema nas variáveis ângulo-ação.

O espectro do Bilhar de Ação foi obtido considerando como corte superior o valor $\aleph_1 = \aleph_2 = 0.03$. A diagonalização deve ser feita de forma a respeitar o limite superior de I_1 e I_2 . Para tanto observemos que para o oscilador harmônico

$$I = (n + \frac{1}{2})\hbar, \quad (42)$$

$$n = \frac{I}{\hbar} - \frac{1}{2}, \quad (43)$$

Portanto n é o inteiro mais próximo de $\frac{I}{\hbar} - \frac{1}{2}$. Para o valor de \hbar utilizado ($\hbar = 0.00095$) segue que $n = 31$. Considerando ainda o estado $n = 0$, a bidimensionalidade do problema nos fornece um bloco de matriz quadrada de dimensão $(n + 1) \times (n + 1)$. A matriz a ser considerada é uma matriz de dimensão 1024×1024 .

De posse do espectro do Bilhar de Ação nos perguntamos pela convergência desse espectro. Essa pergunta tem um objetivo claro: Uma análise da estrutura de órbitas periódicas estáveis apresentada na figura (4.4) nos mostra que a família vertical do Potencial Nelson persiste no Bilhar de Ação até colidir com a borda em uma energia $E \approx 0.043$. Se o espectro estiver convergido até essa energia confundiremos na região do espectro de $E < 0.043$ as descrições quânticas do Potencial Nelson com a do Bilhar de Ação do Potencial Nelson. Como critério de convergência do espectro comparamos a densidade de Weyl calculada numericamente com a densidade de Weyl calculada analiticamente para o Potencial Nelson, cuja expressão é dada por

$$d_{Weyl}(E) = \frac{E}{\hbar^2 \sqrt{2\mu}}. \quad (44)$$

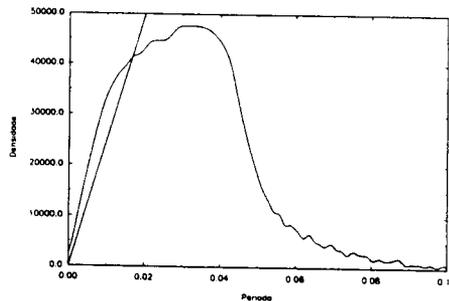


Fig 4.1 Análise da Convergência do Espectro.

Vemos que a densidade de Weyl calculada numericamente diverge rapidamente da reta que representa a sua previsão teórica. Tal fato nos garante que estamos com um Bilhar

de Ação completamente representativo, isto é, com uma região de interseção entre as descrições desprezível.

Consideraremos agora a intensidade da transformada de Fourier do termo oscilatório da densidade de estados suavizada. Como vimos na introdução desse capítulo tal transformada de Fourier irá apresentar picos de intensidade nos períodos das órbitas periódicas que mais contribuem na soma da Fórmula do Traço. Vimos ainda que o valor da suavização determina diretamente o valor do período das órbitas periódicas a serem observadas: Quanto menor o valor da largura do *cut-off* (dizemos "quanto menor a suavização"), maior o período a ser considerado. Para $\lambda = 0.00004$ observaremos períodos até ≈ 23.7 o que é suficiente para as órbitas periódicas consideradas.

A transformada de Fourier do termo oscilatório da densidade de estados para uma suavização de $\lambda = 0.0004$ está apresentada na figura (4.2). Nesse cálculo consideramos a totalidade do espectro.

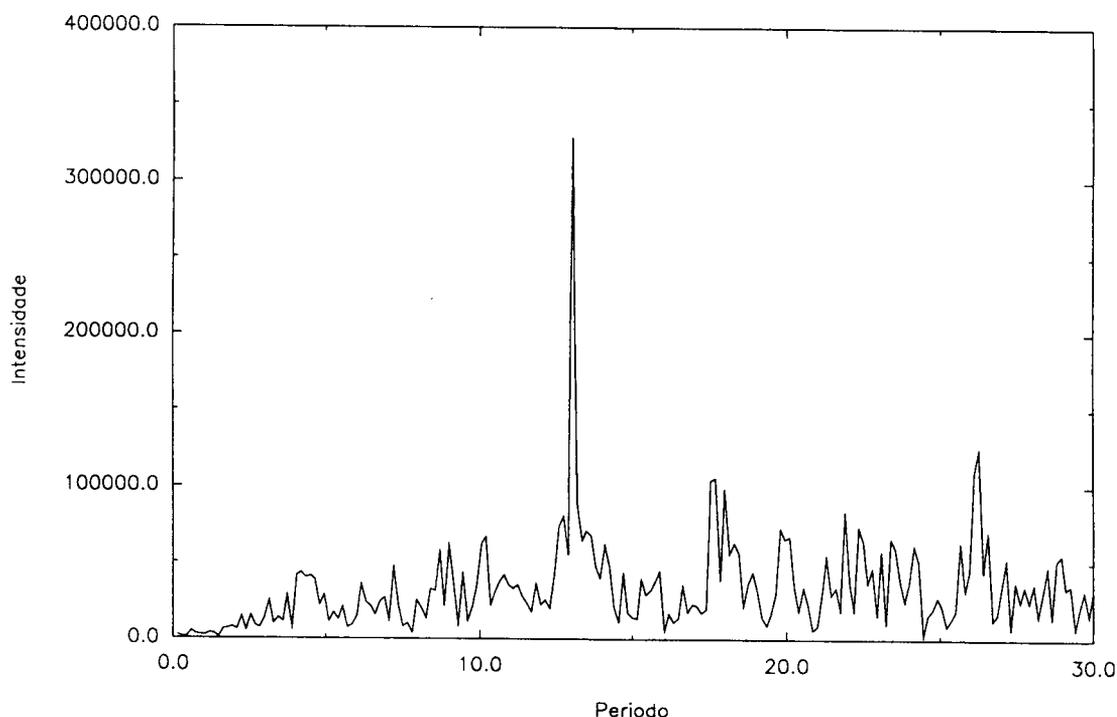


fig 4.2 Intensidade da Transformada de Fourier do termo oscilatório

A figura 4.2 apresenta um pico em $T \approx 13$. Entretanto a região de períodos pequenos sofre grande influência das órbitas periódicas estáveis que colidem com o bordo do Biliar. Como vimos no capítulo 3 essas órbitas apresentam um ponto de acumulação no gráfico

EnergiaXPeríodo. Isso faz com que a interferência das contribuições dessas órbitas na densidade de estados seja forte na região de T pequeno. Uma forma de confirmarmos essa hipótese é considerarmos somente uma parte do espectro e desprezar a parte correspondente a altas energias. Assim eliminamos a influência (para períodos pequenos) das órbitas periódicas que colidem com a fronteira.

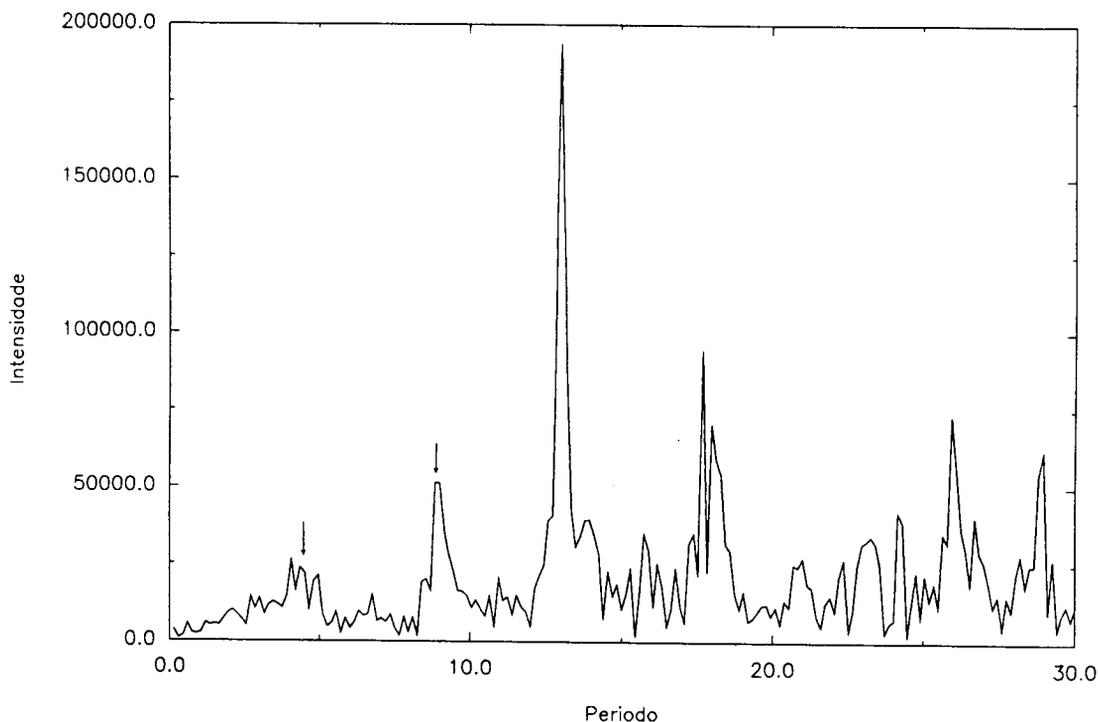


Fig4.3 Intensidade da Transformada de Fourier do Termo Oscilatório- Espectro até $E=0.0040$

Vemos então que aparecem pequenos picos em $T \approx 4.2$ e $T \approx 9.0$. Temos também uma rica estrutura de picos para períodos maiores que $T \approx 20$. Pela figura 3.22 vemos que essas contribuições são dadas pelas famílias de órbitas periódicas que colidem com o corte do Biliar. Os picos observados mostram a influência da família vertical (que colide com o corte para uma energia $E \approx 0.043$) na densidade de espectro . O período dessa família é constante na energia e igual a $t = 4.4$. Sua forte influência no espectro é devida exatamente a essa constância. Os picos observados correspondem as repetições dessa órbita periódica. Assim $T \approx 4.2$ corresponde ao período primitivo $T = 4.4$, $T \approx 9.0$ corresponde a uma segunda repetição $T = 2 \times 4.4 = 8.8$ e $T \approx 13$ corresponde a uma terceira repetição $T = 3 \times 4.4 = 13.2$. A relação das intensidades desses picos entretanto não é exatamente a esperada. De acordo com a fórmula do Traço esperamos que a intensidade das sucessivas

repetições diminua gradativamente. Uma explicação para esse fato pode ser encontrada observando-se a estrutura de órbita periódicas do Potencial Nelson [18].

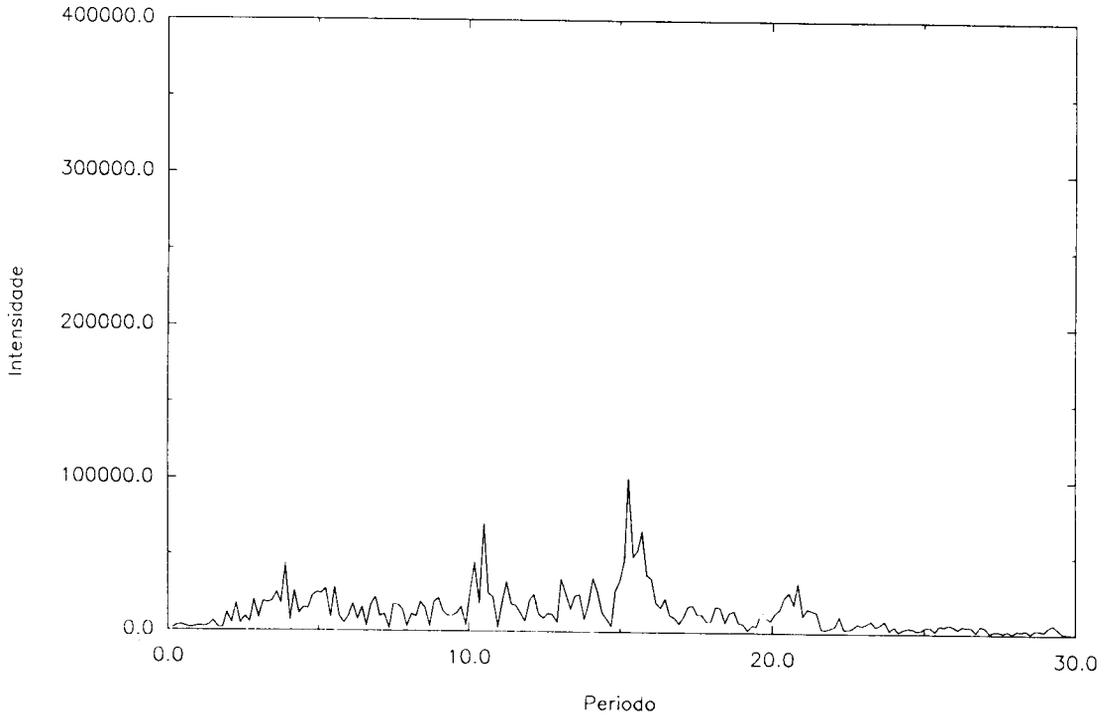


Fig 4.5 atenuação do pico em $T \approx 13$

Outra forma de mostrarmos a influência da família vertical sobre o espectro é fazermos a análise do espectro para energias maiores que a energia da colisão de V com o corte do Bilhar. Como V não existe para essas energias V não poderá influenciar o espectro nessa região. A figura 4.6 mostra a ITFTO para uma região do espectro maior que $E = 0.044$. repare que o pico em $T \approx 13$ não existe mais o que confirma a nossa hipótese.

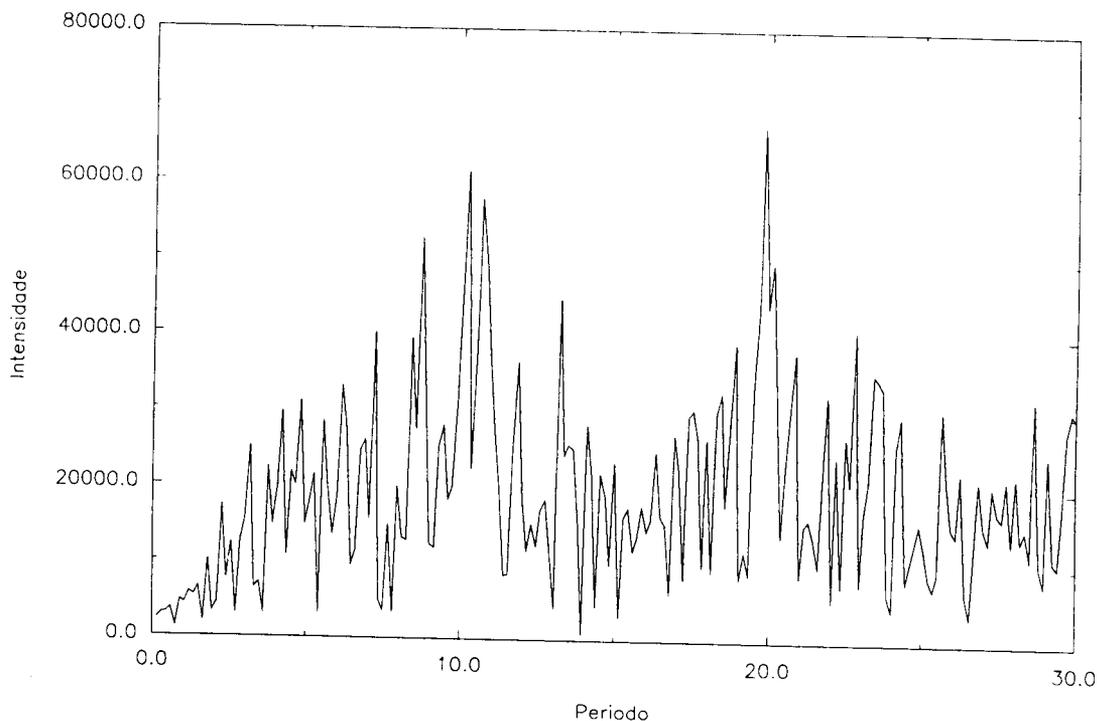


Fig 4.6 Eliminação de V para $E > 0.044$

Como vimos no *capítulo 3* as famílias que colidem com o bordo do Bilhar apresentam comportamento extremamente suave. Tal característica impossibilita a observação da influência individual de uma dessas famílias no espectro. Entretanto se definirmos adequadamente os intervalos de energia a serem considerados no processo de suavização esperamos observar a influência do conjunto de famílias como um todo sobre o espectro. Assim, por exemplo, se considerarmos um intervalo de energia entre $E = 0.08$ e $E = 0.065$ esperamos observar na ITFTO desse intervalo picos significativos para $T > 5$. Na figura 4.6 mostramos os intervalos de energia que serão considerados.

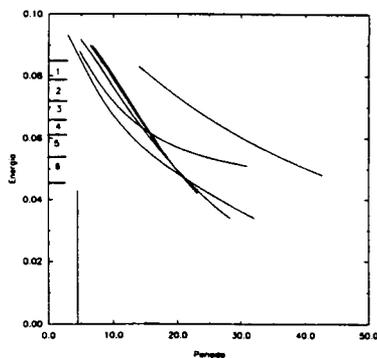


Fig 4.6 Intervalos de Energia

Os intervalos estão definidos da seguinte forma:

Intervalo 1 : $E \in [0.079, 0.087]$ $T_e > 4.5$.

Intervalo 2 : $E \in [0.072, 0.079]$ $T_e > 6.4$.

Intervalo 3: $E \in [0.066, 0.072]$ $T_e > 8.2$.

Intervalo 4: $E \in [0.061, 0.066]$ $T_e > 10.4$.

Intervalo 5: $E \in [0.054, 0.061]$ $T_e > 12.2$.

Intervalo 6: $E \in [0.046, 0.054]$ $T_e > 16.2$.

onde T_e representa o período a partir do qual esperamos ver os picos significativos (os períodos esperados para cada corte são determinados a partir de uma observação da fig 4.6). Para a análise dos intervalos utilizamos os seguintes valores de λ : Intervalos (1-3)- $\lambda = 0.000040$, intervalos (4-5) - $\lambda = 0.000035$ e intervalo (6) - $\lambda = 0.000030$. A diminuição de λ ao abaixarmos as energias consideradas pode ser compreendida a partir da figura 4.1 . Vemos que a medida que diminuimos a energia o termo de Weyl cresce significativamente, isto é o espaçamento entre os níveis está diminuindo. A diminuição de λ gerando suavizações menores leva em conta essa diminuição de espaçamento.

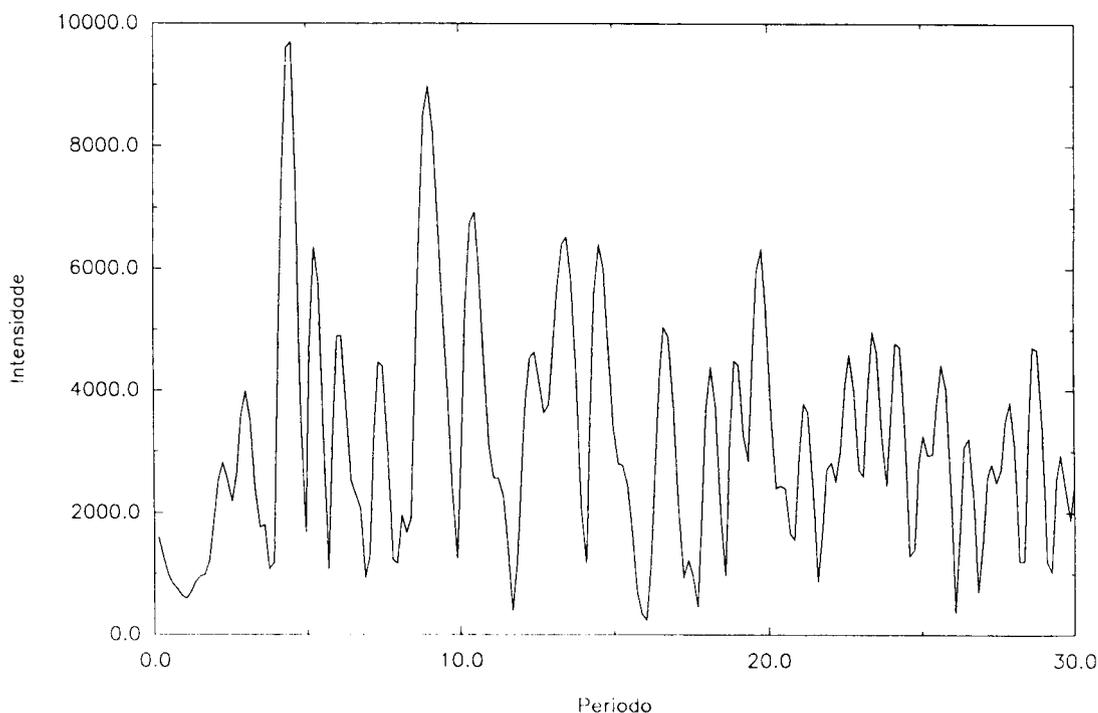


Fig 4.7 ITFTO para o Intervalo 1

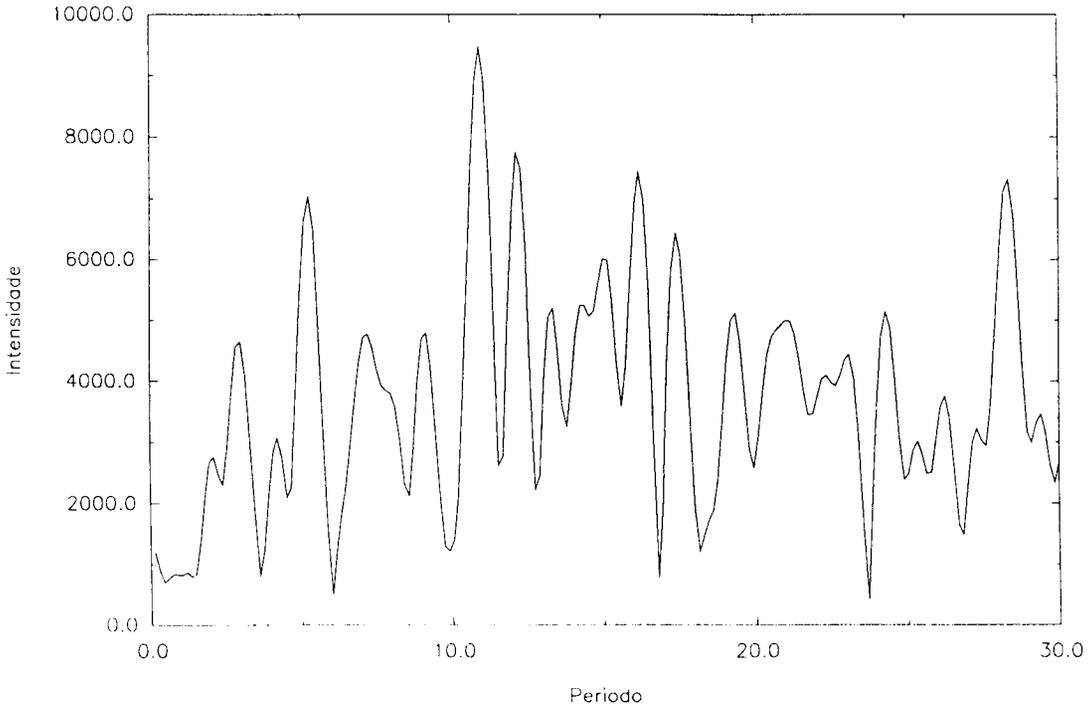


Fig 4.8 ITFTO para o Intervalo 2

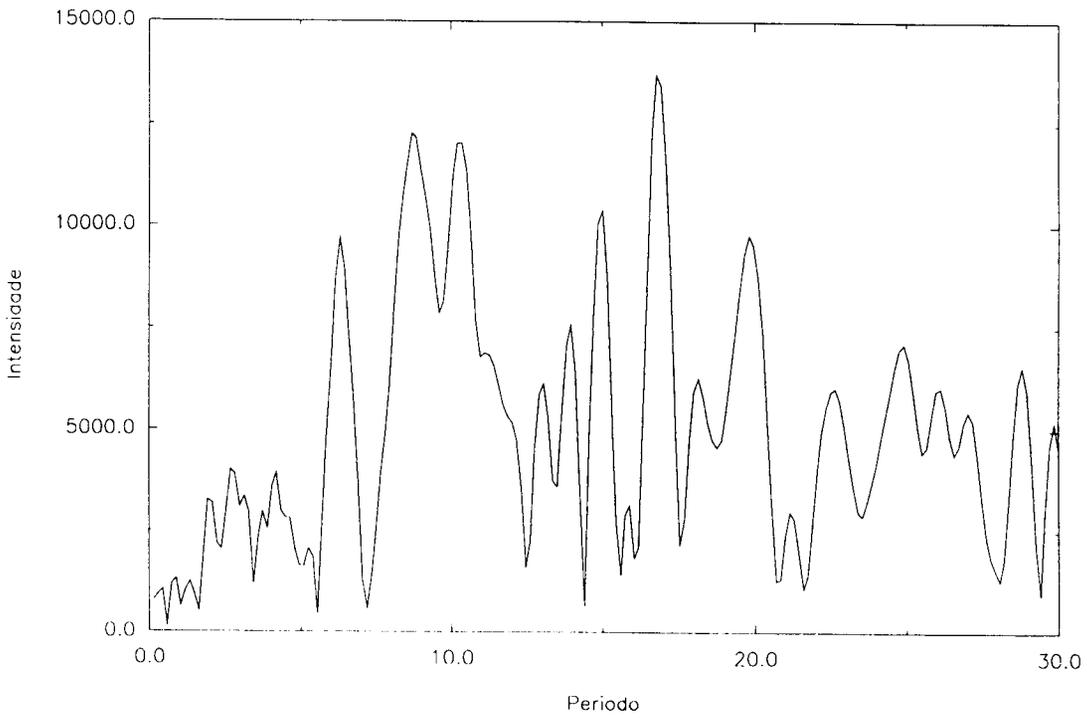


Fig 4.9 ITFTO para o Intervalo 3

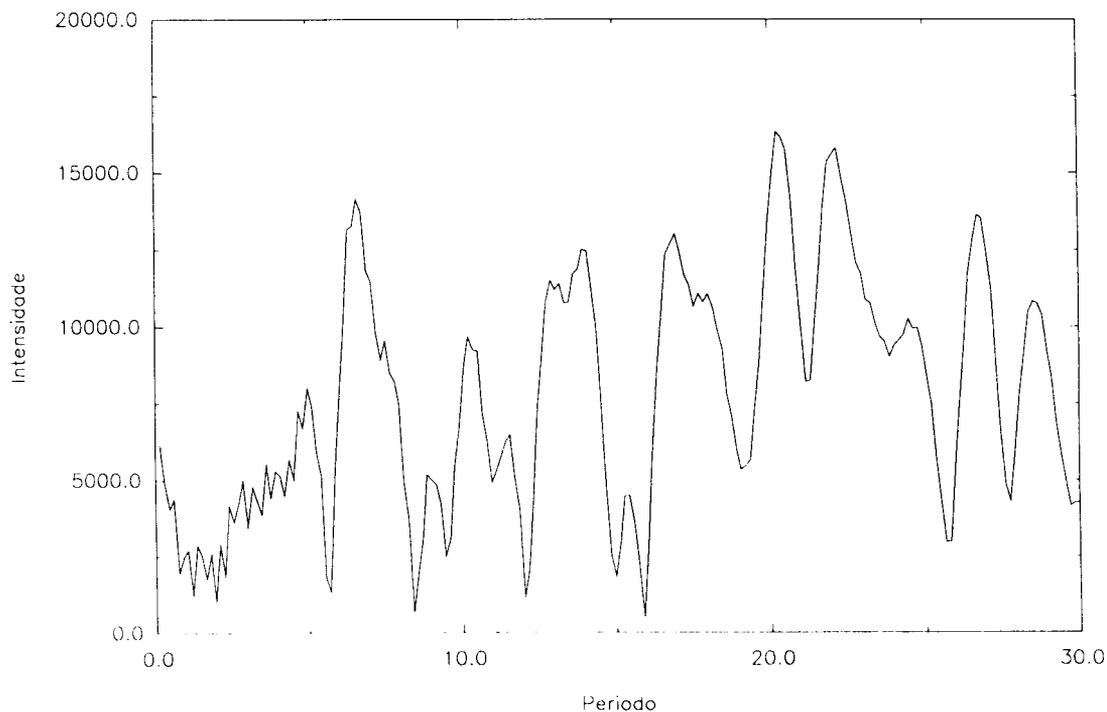


Fig 4.10 ITFTO para o Intervalo 4

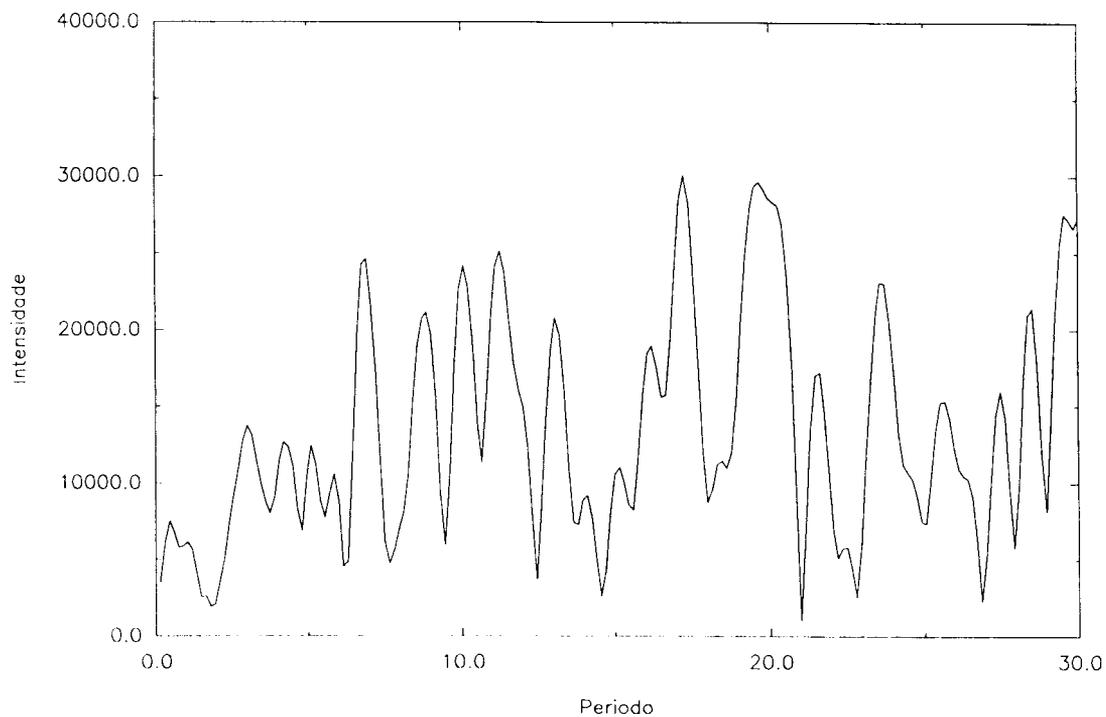


Fig 4.11 ITFTO para o Intervalo 5

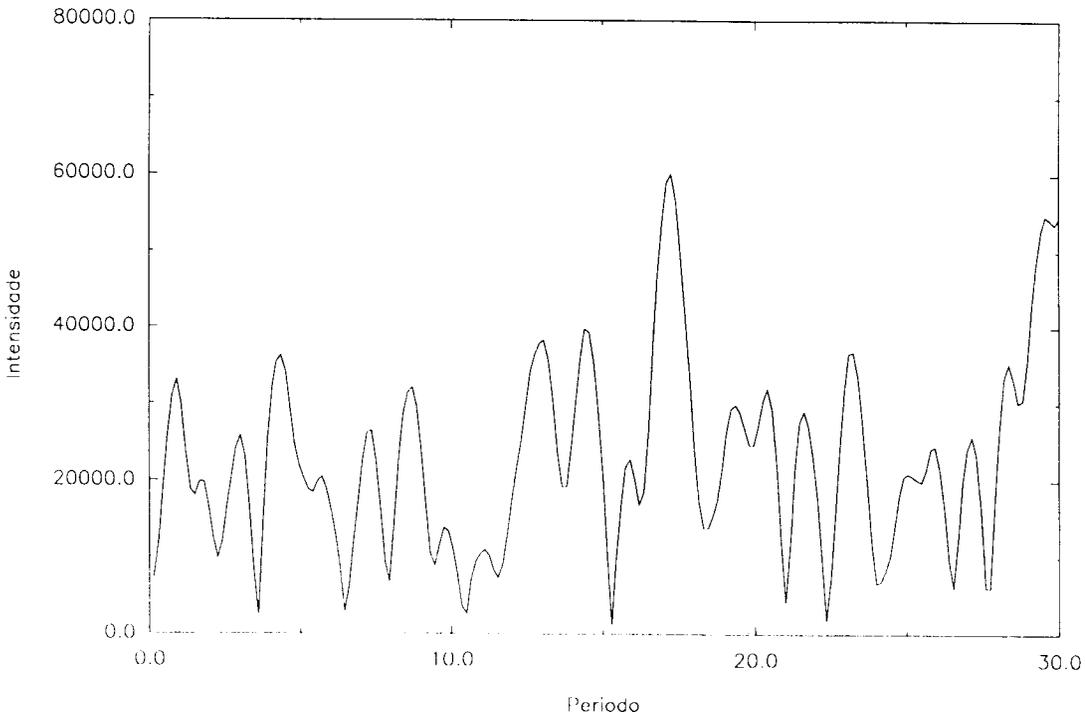


Fig 4.12 ITFTO para o Intervalo 6

Das figuras vemos que o intervalo 1 (fig. 4.7) apresenta o comportamento esperado, isto é, observamos picos significativos para $T > 5.0$.

O intervalo 2 apresenta essencialmente o mesmo comportamento que o intervalo 1.

O intervalo 3 (fig 4.9) apresenta picos significativos para $T > 6.5$.

O intervalo 4 apresenta picos intensos para $T > 13.0$. Vemos que o pico em $T \approx 6.5$ observado no intervalo 4 persiste no intervalo 5. A existência desse pico não está prevista pela figura (4.6).

No intervalo 5 percebemos que picos em períodos menores que o previsto começam a ser significativos. Esses picos não estão previstos pela figura (4.6).

No intervalo 6 vemos a rica estrutura para períodos pequenos e um pico relativamente intenso em $T \approx 17$. Uma observação de (4.6) nos mostra que o intervalo 6 inclui exatamente a interseção de três famílias de órbitas periódicas estáveis do Biliar de Ação. O pico em $T \approx 17$ está provavelmente associado a uma ressonância dessas famílias.

Em resumo podemos dizer que os intervalos 1, 2 e 3 estão em bom acordo com as nossas previsões. Os intervalos 4, 5 e 6 apresentam picos para períodos baixos, fato que

não está previsto pela nossa figura (4.6). A existência desses picos deve refletir a existência de famílias de órbitas periódicas que foram desprezadas pelo nosso método. (Nesse caso incluímos as órbitas periódicas instáveis e as órbitas periódicas das famílias que pulam para uma raiz do tipo (2) (ver *capítulo 3*).). O intervalo (6) entretanto apresenta uma forte evidência de estarmos observando uma ressonância em $T \approx 17$. A confirmação numérica desse fato, entretanto só pode ser feita a partir do momento que compararmos as "ações" das órbitas periódicas envolvidas na suposta ressonância. Tal comparação esbarra no problema técnico de definirmos a "ação" para uma trajetória do Biliar de Ação.

Capítulo 5

Conclusões

O Bilhar de Ação foi definido como o limite de um Sistema Dinâmico Hamiltoniano. Portanto é extremamente justificável que esperemos que a Fórmula do Traço de Gutzwiller se verifique para esse sistema. Mesmo a descontinuidade intrínseca dos Bilhares de Ação não representa, nesse caso, nenhum problema. Lembremos que os Bilhares no Espaço de Configuração são descontínuos por definição e confirmam de forma particularmente clara a Fórmula do Traço de Gutzwiller.

Os resultados do capítulo anterior apresentam evidências da correspondência entre o Espectro Quântico do Bilhar de Ação e as famílias de órbitas periódicas clássicas do Bilhar de Ação. Entretanto tais resultados estão longe de ser conclusivos. As dificuldades encontradas para estabelecermos a relação semiclássica são muitas e algumas parecem ter um caráter intrínseco. A seguir apresentaremos as principais dificuldades:

A) A análise da estrutura de órbitas periódicas do bilhar de Ação mostrou a dificuldade de observarmos a sua influência no espectro. O comportamento das famílias de órbitas periódicas é bastante suave para que observemos influências individuais (de uma só família) no espectro. Entretanto essa dificuldade poderá ser contornada de duas formas:

1) Construindo Bilhares de Ação que possuam famílias de órbitas periódicas que tenham um comportamento " vertical " no gráfico PeríodoXEnergia. Basta que uma das famílias mantenha o seu período aproximadamente constante em um intervalo significativo do espectro. Nesse caso a sua influência seria facilmente observável. A construção de um bilhar desse tipo entretanto é completamente indeterminada, isso é, não há aparentemente, critérios para orientar tal construção.

2) Procedendo ao tipo de " análise coletiva" das famílias que efetuamos. Nesse caso há de se avaliar a extensão das órbitas periódicas que estão sendo desprezadas pelo fato de estarmos realizando somente pulos do tipo (1)(ver *capítulo 3*). Há também a necessidade de se construir métodos numéricos que consigam acompanhar as famílias de órbitas periódicas instáveis e determinar de alguma forma o expoente de Lyapounov dessas

órbitas. Surgem aqui então dois problemas:

a) A construção do método: São poucos os Métodos Numéricos que acompanham órbitas periódicas instáveis. O Algoritmo desenvolvido por Baranger [19] encontra-se nessa categoria. O método de Baranger utiliza uma discretização das Equações de Newton e pressupõem a continuidade do sistema de equações. A descontinuidade poderá ser inserida no método via (ver *capítulo 3*) mapa $P1$ ou mapa $P2$. A questão da convergência fica então, completamente em aberto e deverá merecer um estudo numérico atento.

b) A determinação do Expoente de Lyapounov: No *capítulo 2*, ao estudarmos o Bilhar de Bunimovich vimos que Casartelli et al [8] definiram uma grandeza diretamente relacionada ao Expoente de Lyapounov e viável de ser calculada numericamente. Bennetin e Galgani [9] demonstraram essa relação para campos vetoriais não-singulares. Bennetin e Strelcyn [10] demonstraram a aplicabilidade dessa grandeza para campos vetoriais não singulares. Aparentemente então é possível definirmos o Expoente de Lyapounov para o Bilhar de Ação através da "Entropy Like Quantity".

B) A densidade de Weyl de um espectro quântico necessariamente irá a zero nos limites do espectro. Sendo essa região a região de convergência das famílias de órbitas periódicas surge a impossibilidade de estudarmos o termo Oscilatório da densidade de estados suavizada para período pequenos. Essa dificuldade, aparentemente, é incontornável.

Um estudo futuro dos Bilhares de Ação, com o intuito de confirmar as evidências por nós levantadas deve portanto concentrar-se em dois objetivos:

1) Desenvolvimento de Algoritmo que acompanhe as órbitas periódicas instáveis e considere as raízes de tipo (2)

e

2) Obtenção de novo Bilhar de Ação com estrutura de órbitas periódicas que influencie de forma mais significativa o espectro quântico.

Apêndice 1

Demonstração do Teorema Geométrico de Poincaré

Teorema: *Dados um anel $0 < a \leq r \leq b$ no plano r, θ (r, θ sendo coordenadas polares), uma transformação M do anel sobre si próprio, unívoca, contínua e que preserve área, que avance os pontos de $r = b$ de 2π e os pontos de $r = a$ de -2π ; existirão pelo menos dois pontos do anel, invariantes sobre a transformação M .*

Demonstração: Façamos $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e representemos o anel nas coordenadas x e y . O Anel então se transforma na faixa $a^2 \leq y \leq b^2$. A transformação M avança os pontos de $y = a^2$ para a direita e os pontos $y = b^2$ para a esquerda.

Seja uma transformação M_ϵ que translada o plano x, y na direção do eixo y de uma distância $\epsilon > 0$. A transformação M seguida da transformação M_ϵ nos dá a transformação composta MM_ϵ que preserva área e cujo efeito é deslocar a faixa dada para a faixa $a^2 + \epsilon \leq y \leq b^2 + \epsilon$.

Faremos a demonstração por redução ao absurdo.

Suponha que a transformação M não admite pontos invariantes. Então existirá uma distância d tal que todos os pontos são deslocados de no mínimo d . Tomando $\epsilon < d$ temos que MM_ϵ não admite nenhum ponto fixo.

Consideremos agora a faixa $a^2 \leq y \leq a^2 + \epsilon$. A transformação MM_ϵ leva o lado inferior dessa faixa no lado superior e a faixa como um todo é levada em outra faixa acima da primeira, as duas possuindo um lado em comum. Aplicando sucessivamente MM_ϵ geramos um "estrato" de faixas. Como MM_ϵ preserva área, temos que, necessariamente alguma dessas faixas para a k -ésima interação interceptará a linha $y = b^2$.

Seja Q um ponto no plano x, y no limite superior da k -ésima faixa. Seja P_0 o ponto de $y = a^2$ que gerou a sequência $P_0, P_1, P_2, \dots, P_K = Q$. Considere agora o vetor LP_0 desenhado do ponto L a sua imagem \tilde{L} . Considerando o ponto inicial como sendo os pontos P_0, P_1, \dots, P_{K-1} o ponto final variará de P_1, P_2, \dots, P_K . Considerando o vetor P_1P_2 vemos que o ângulo que esse vetor faz com o eixo x é um ângulo agudo positivo (pois P_1 está à direita de P_2). Conforme L varia de P_0 a P_{K-1} esse ângulo poderá estar no segundo

ou terceiro quadrante pois P_K estará á direita de P_{K-1} .

Estamos interessados nos ângulos que os vetores $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{K-1}P_K$ fazem entre si. Como P_0P_1 e P_1P_2 estão perto da borda a sua variação angular será menos positiva que a de P_1P_2 para P_2P_3 e assim sucessivamente. Temos portanto que a variação angular total é a menor variação angular positiva compatível com a condição inicial P e a final Q . Como qualquer caminho pode ser deformado continuamente em um outro qualquer (que se inicie em $y = a^2$ e termine em $y = b^2$) a afirmativa anterior é genérica. No limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ o vetor $L\tilde{L}$ continua tendo uma direção definida, pois MM_ϵ , por construção, não admite pontos fixos.

Afirmativa 1) Para a transformação M a variação angular total de $L\tilde{L}$ será a menor variação angular positiva compatível com as posições inicial e final.

Consideremos agora a transformação inversa M^{-1} que moverá os pontos em $y = a^2$ para a esquerda e os pontos em $y = b^2$ para a direita. Por raciocínio inteiramente análogo ao desenvolvido para M temos que :

afirmativa 2) para um vetor LL^{-1} com ponto final $L^{-1} = M^{-1}L$ a variação angular total será dada pela menor variação angular negativa compatível com as posições inicial e final.

Mas a rotação de LL^{-1} sobre M^{-1} tem de necessariamente ser a de seu vetor inverso $L^{-1}L$ sobre M . E isso é uma contradição com as duas afirmativas anteriores.

Apêndice 2

Integração Numérica dos Bilhares de Ação

Numericamente o problema dos Bilhares de Ação é o problema da Seção de Poincaré. No problema da seção, integramos uma condição inicial e a cada passo da integração numérica nos perguntamos se a superfície de seção foi atravessada pela trajetória. Evidentemente, estamos interessados nos pontos em que a partícula cruza a seção. Como a integração não nos permite controlar o passo de forma que, ao final de um passo de integração caíamos exatamente em cima da superfície de seção, temos em geral de fazer uma aproximação. Essa aproximação é usualmente feita através de uma interpolação: Consideramos um número n de pontos da trajetória antes e depois de cruzarmos a seção. Construímos a curva interpoladora desses pontos e determinamos numericamente a interseção dessa curva com a superfície de seção. Quanto maior a precisão exigida, maior o número de pontos interpolantes, maior o tempo de computação e exigências de memória (lembramos que em última análise o problema da interpolação é o problema da resolução de sistemas lineares).

No caso do Bilhar de Ação, dada uma condição inicial, evoluímos o sistema no tempo; a cada passo da integração nos perguntamos se "tocamos" o corte. Ao tocarmos o corte a integração é interrompida. Determinamos então, pela conservação da energia, o ângulo de reflexão e iniciamos nova integração, considerando como condição inicial as coordenadas da colisão, trocando apenas o ângulo de incidência pelo ângulo de reflexão calculado. Temos aqui uma diferença importante em relação ao problema da Seção de Poincaré: Enquanto na Seção, a determinação do ponto de interseção da trajetória da partícula com a superfície de Seção não interfere na própria integração, nos Bilhares de Ação isso não acontece, visto que o ponto de interseção da partícula com o corte determinará a nova condição inicial. Procedimentos usuais utilizados nos cálculos de seções de Poincaré, como a interpolação linear, levaram, nos Bilhares de Ação, a um erro percentual na energia maior que 1 por cento após um número de colisões menor que 10. A solução foi encontrada em um artigo de Henon [20] e encontra-se apresentada a seguir. O método de Henon, baseia-se em uma transformação de coordenadas simples que nos permite alterar o passo de integração de

tal forma que caíamos, a menos do erro intrínseco do integrador, em cima da superfície de seção desejada. Com a aplicação do método obtivemos um erro menor que 10^{-4} por cento na energia.

Considere um sistema autônomo definido por N equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \tag{1}$$

Considere uma superfície de Seção trivial, dada por $x_N = a$. Queremos transformar as equações diferenciais (1) de tal forma que a nova variável independente seja x_N . Para tanto dividamos as $N - 1$ primeiras equações pela última e invertamos a última equação.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_N} &= \frac{f_1(x_1, \dots, x_N)}{f_N(x_1, \dots, x_N)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dx_{N-1}}{dx_N} &= \frac{f_{N-1}(x_1, \dots, x_N)}{f_N(x_1, \dots, x_N)} \\ \frac{dt}{dx_N} &= \frac{1}{f_N(x_1, \dots, x_N)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Numericamente integramos o sistema (1) até que $S = x_N - a$ troque de sinal, isto é, até que cruzemos a Seção de Poincaré. Passamos então para o sistema (2) considerando o último ponto computado como condição inicial e integramos somente uma vez com um passo de integração dado por

$$\Delta x_N = -S$$

Desta forma caímos, a menos dos erros do integrador, exatamente em cima da Seção de Poincaré. Os sistemas (1) e (2) podem ser tratados simultaneamente fazendo-se $K = \frac{dt}{d\tau}$, onde τ é a nova variável independente. Escrevemos então

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= K f_1(x_1, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{d\tau} &= K f_N(x_1, \dots, x_N) \\ \frac{dt}{d\tau} &= K. \end{aligned} \tag{3}$$

Vemos que para $K = 1$ recuperamos o sistema (1) e para $K = \frac{1}{f_N}$ recuperamos o sistema (2).

O caso que nos interessa será o de uma Seção de Poincaré geral, dada por

$$S(x_1, \dots, x_N) = 0.$$

Introduziremos uma nova variável dada por

$$x_{N+1} = S(x_1, \dots, x_N), \quad (4)$$

e somamos a equação diferencial correspondente a x_{N+1} ,

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = f_{N+1}(x_1, \dots, x_N)$$

onde

$$f_{N+1} = \sum_i f_i \frac{\partial S}{\partial x_i},$$

ao sistema (1). Obtemos então um sistema de ordem $N + 1$ com a Superfície de Seção dada por $X_{N+1} = 0$. Conseguimos então, acrescentando uma equação ao sistema (1) reduzir o problema da Seção $S(x_1, \dots, x_N) = 0$ ao problema da Seção $x_{N+1} = 0$ que é exatamente o problema que acabamos de resolver. Assim basta empregar a técnica desenvolvida ao sistema de equações ampliado.

Apêndice 3

Sistemas Pseudo-Integráveis

Neste apêndice daremos, através de um exemplo, uma visão sucinta dos sistemas Pseudo-Integráveis. Consideremos um bilhar quadrado com os seus lados opostos identificados e com um obstáculo rígido, também quadrado no seu interior.

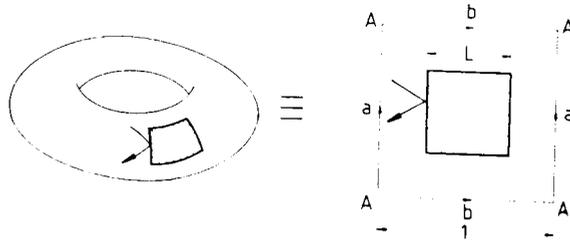


Fig Ap3.1 Bilhar no Toro com Obstáculo quadrado.

Esse sistema apresenta o seguinte paradoxo (daí o termo Pseudo-Integrável): Como a partícula colide elasticamente com o obstáculo segue que p_x^2 e p_y^2 são conservados. Como p_x^2 e p_y^2 estão em involução o Teorema de Arnold-Liouville estabelece que o movimento da partícula está vinculado a um toro. Entretanto, como veremos a seguir, a partícula nesse bilhar está vinculada a uma esfera de genus 5. Claramente alguma hipótese do Teorema de Arnold-Liouville está sendo violada. Segundo o teorema, no caso bidimensional, dois campos de vetores não singulares no espaço de fases podem ser construídos a partir das constantes de movimento. O campo de vetor associado p_x^2 (raciocínio análogo para p_y^2) será dado por

$$V = \left(\frac{\partial p_x^2}{\partial p_x}, -\frac{\partial p_x^2}{\partial x} \right),$$

$$V = 2p_x \hat{x}.$$

Esse campo de vetores é singular nos vértices do obstáculo quadrado do bilhar. A Figura Ap3.2 mostra esse campo de vetores perto do vértice X do obstáculo.

Fig Ap3.2 Campo $2p_x \hat{x}$ perto do vértice X

Considerando o efeito dos demais vértices, pegamos cada pedaço de 270 graus e "entortamos" em 90 graus. Tomando o cuidado de etiquetarmos os vértices, podemos, respeitando a continuidade, cola-los e geramos para o vértice X o seu campo de vetores. O índice de Poincaré da singularidade associada ao vértice X é -2 . Como os quatros vértices possuem a mesma singularidade, o índice total do obstáculo é -8 . Pelo teorema de Poincaré o genus de uma superfície bidimensional está relacionado ao índice de Poincaré do campo de vetores sobre essa superfície pela relação

$$G = 1 - \frac{1}{2}P, \quad \text{isto é,} \quad G = 5.$$

Portanto, o fato dos campos de vetores gerados pelas constantes de movimento serem não singulares violou as condições do Teorema de Arnold-Liouville viculando o movimento da partícula não a um torus mas a superfícies de genus maiores.

O efeito causador do caos nos sistemas Pseudo-Integráveis não é portanto a divergência exponencial das trajetórias vizinhas, visto a inexistência desse fenômeno, mas o efeito dos vértices do obstáculo sobre o movimento, gerando campos de vetores não triviais. O efeito de um desses vértices é melhor ilustrado pela figura Ap. 3.3. Nela vemos que os vértices exercem efeito desfocalizador sobre um feixe de trajórias vizinhas gerando assim, comportamento sensível as consdições iniciais.

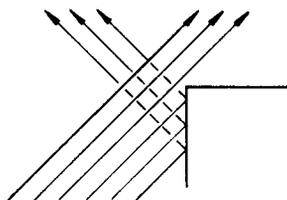


Fig Ap3.3 Efeito desfocalizador de um Vértice do Bilhar.

Bibliografia

- [1] Dragt J *Notas de Aula* Maryland, University of Maryland
- [2] Ozorio de Almeida A M 1988 *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Birkhoff G D 1927 *Acta Math* **50** 359
- [4] Berry M V 1981 *Eur. J. Phys* **2** 91
- [5] O'neil B *Elementary Differential Geometry* (New York: Academic)
- [6] Birkhoff G D 1917 *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** 199
- [7] Arnold V I 1978 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer)
- [8] Bruno Crespi and Shau-Jin Chang 1993 *J.Math.Phys* **43** 2257
- [9] Lehmann C 1985 *Geometria Analítica* (Porto Alegre: Globo)
- [10] Bunimovich L A 1974 *Funct. Anal. Appl.* **8** 254
- [11] Casartelli et al 1976 *Phys. Rev. A* **13** 1921
- [12] Bennetin G e Galgani A 1976 *Phys. Rev. A* **14** 2338
- [13] Bennetin G e Strelcyn J M 1978 *Phys. Rev. A* **17** 773
- [14] Ozorio de Almeida A M e Aguiar M A M 1993 *Chaos, Solitons and Fractals* **2** 377
- [15] Richens P J and Berry M V 1981 *Physica 2D* **495**
- [16] Aguiar M A M de and Ozorio de Almeida A M 1992 *Nonlinearity* **5** 523
- [17] Aguiar M A M de 1993 *Notas de Aula* Campinas, UNICAMP
- [18] Baranger M and Davies K T R 1987 *Annals of Physics* **177** 330
- [19] Baranger M et al 1988 *Annals of Physics* **186** 95
- [20] Henon M 1982 *Physica D* **5D** 412

Agradecimentos

Ao Prof. A.M. Ozorio de Almeida pelo tema, pela orientação e por ter sempre incentivado esse trabalho

Ao Prof. M. A. M. Aguiar por sugestões, dicas e conselhos que sempre se mostraram da maior valia.

A Prof. Teresinha Stuchy por ter me apresentado o trabalho que permitiu a integração numérica do Bilhar de Ação.

A Prof. Sueli (Observatório do Valongo) por ter me comunicado oralmente o método numérico de determinação de órbitas periódicas empregado nessa tese.

Ao amigo Ronaldo, pela cumplicidade.