

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

Aplicações Caóticas no Toro e sua Quantização

Mário Basílio de Matos

*Este exemplar corresponde à redação final de
tese defendida pelo aluno e aprovada pela comissão
juladora.*

22/11/93

Alfredo Ozório de Almeida

Trabalho realizado sob a orientação do professor Alfredo M.
Ozório de Almeida no IFGW para a obtenção do título de
Doutor em Física - dezembro de 1992

UNIDADE IF

N.º CHAMADA:

TUNICA MP/D

M 428a

V. _____ Ex. _____

TCMBO BC/ 20191

PROC. 26493

C D

PREÇO CR. \$ 800,00

DATA 05/04/94

N.º CPD cm 005 2627-2

M/D/929/7Fou

Agradecimentos

Ao professor Alfredo pela orientação.

Aos professores Marcus e Kyoko pelas críticas e sugestões durante a fase final do trabalho.

À Dalvinha que, mesmo quando esteve longe, foi fundamental.

Aos meus pais por simplesmente tudo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Neste trabalho se apresenta um estudo de perturbações de mapas lineares hiperbólicos no toro (mapa do Gato) e de sua quantização. É feita uma pequena revisão dos principais resultados da área, principalmente para sistemas em toros. São definidas as características clássicas de cada tipo de perturbação e a sua relação com mapas do Gato. A quantização é obtida e analisadas as estatísticas de níveis. Além disso se apresenta uma teoria semiclássica de órbitas periódicas para mapas no toro e se aplica tal teoria aos sistemas aqui estudados. Se verifica que estas perturbações são sistemas tipicamente caóticos tanto clássica como quanticamente.

Aplicações Caóticas no Toro e sua Quantização

Mário Basílio de Matos

14 de dezembro de 1992

Conteúdo

I	Introdução	3
I.1	Caos e Quantização	4
I.1.1	Sistemas Clássicos	4
I.1.2	Quantização	11
I.2	Sistemas em Toros	18
I.2.1	Aplicações no Toro	19
I.2.2	Quantização	22
II	Estudo Clássico	24
II.1	Mapas do Gato	25
II.2	Perturbações de Mapas do Gato	27
III	Estudo Quântico	33
III.1	Quantização de Mapas do Gato	34
III.2	Quantização de Perturbações	37
III.3	Estatísticas	40
IV	Teoria de Órbitas Periódicas	73
IV.1	Teoria no Toro	74
IV.2	Resultados	78
V	Conclusão	101

A Média de exponenciais complexas	103
B Cálculo analítico da variância numérica	105
Referências	108

I Introdução

Os sistemas cuja dinâmica é definida em um espaço de fase toroidal, para os quais tanto as coordenadas como os momentos são tratados como variáveis angulares, possuem características topologicamente diferentes dos sistemas usuais em física. Apesar disso mantém uma relação estreita com esses últimos, principalmente no que diz respeito às propriedades locais. Devido à esta ligação é de grande interesse o estudo desses sistemas pois mesmo sistemas lineares no toro podem apresentar os diversos níveis de caos. Como sistemas lineares são acessíveis ao cálculo, tanto analítico como computacional, podemos em princípio tomar exemplos típicos de cada tipo de caos, resolvê-los completamente e abstrair deles características genéricas deste tipo de caos.

Nesta introdução farei um rápido resumo das principais características de sistemas caóticos clássicos e das diversas técnicas utilizadas para estudá-los e a seus análogos quânticos. Para sistemas em toros tanto a sua dinâmica clássica como as técnicas utilizadas para estudá-los estão bem estabelecidas, entretanto sua quantização e posterior interpretação dos resultados apresenta certas dificuldades conceituais, às quais dedicarei parte deste trabalho, particularmente com relação a aplicações.

I.1 Caos e Quantização

Neste capítulo apresentarei um resumo da teoria de sistemas dinâmicos e sua extensão para aplicações. Serão introduzidos o conceito de integrabilidade e critérios para determinar se um sistema apresenta caos ou não. Também discutirei regras de quantização e teorias semiclássicas para o espectro de sistemas quânticos. A quantização de aplicações é descrita tanto do ponto de vista de um sistema contínuo como do ponto de vista formal.

I.1.1 Sistemas Clássicos

O que chamo de sistemas clássicos aqui são os sistemas de equações ordinárias, resultantes ou não de uma função Hamiltoniana, e aplicações de um espaço de dimensão finita sobre si mesmo. Esses dois tipos de sistemas, equações diferenciais e aplicações, guardam entre si uma estreita relação. Um conjunto de equações diferenciais define um fluxo no espaço de suas variáveis dinâmicas, se tomarmos uma superfície que intercepta esse fluxo transversalmente, teremos definido sobre essa superfície uma aplicação que preserva todas as propriedades deste fluxo. É o que chamamos de aplicação de Poincaré.

Nesta seção me referirei principalmente aos sistemas hamiltonianos, sistemas de equações diferenciais resultantes de uma função Hamiltoniana, apesar de muitos resultados se aplicarem a sistemas gerais.

-Integrabilidade

Podemos dizer, de uma maneira não rigorosa, que os sistemas integráveis são aqueles que conseguimos resolver completamente, com funções analíticas para as trajetórias.

Formalmente, o teorema de Liouville-Arnold [1] nos diz que, um sistema é integrável quando, além de possuir um número N igual de graus de liberdade e integrais de movimento (F_i) independentes, tiver essas integrais em involução ($\{F_i, F_j\} = 0$). Com essas condições podemos ver que as integrais de movimento definem uma superfície N -dimensional no espaço de fases e que o movimento sobre essa superfície é quasi-periódico, resolvendo assim o sistema.

-Variáveis ângulo-ação

Torna-se evidente então que para sistemas integráveis o movimento fica restrito àquela superfície, não podendo apresentar comportamentos mais complexos tais como ergodicidade e outros. Mas existem resultados mais fortes. Se a superfície for compacta e conexa ela é difeomorfa a um toro N -dimensional, portanto podemos descrever o movimento por N coordenadas angulares φ_i nas quais o movimento é retilíneo e uniforme. Entretanto as integrais F_i e os ângulos φ_i não são em geral canonicamente conjugados e a forma das equações de Hamilton não é a mesma nessas coordenadas. Definimos então novas integrais $I_i(\underline{F})$ que sejam canonicamente conjugadas a φ_i . Como a superfície do espaço de fases onde ocorre o movimento é equivalente a um toro N -dimensional, temos sobre ela N circuitos irredutíveis independentes, assim definimos as ações:

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \underline{p} d\underline{q}$$

onde γ_i é o i -ésimo circuito irredutível.

Podemos verificar imediatamente que como os I_i são constantes para essa superfície, eles são integrais do movimento. Também é possível demonstrar [1] que essas variáveis I_i e φ_i são canonicamente conjugadas e portanto o Hamiltoniano pode ser escrito exclusivamente em termos das ações I_i .

-Teorema KAM

Dada a Hamiltoniana $H(\underline{I})$, podemos ver que para cada \underline{I} temos um toro no espaço de fase e o movimento sobre esse toro é dado por

$$\underline{\dot{\varphi}} = \Delta_{\underline{I}} H(\underline{I}) = \underline{\omega}(\underline{I})$$

Se este vetor $\underline{\omega}(\underline{I})$ satisfizer $(N - 1)$ relações do tipo

$$\underline{\omega} \cdot \underline{m} = 0$$

onde \underline{m} é um vetor com componentes inteiras diferentes de zero, então o movimento sobre esse toro será periódico. Se pelo contrário não houver nenhuma relação deste tipo o movimento cobrirá densamente o toro. Chamamos aos primeiros de toros racionais ou ressonantes e aos últimos toros irracionais ou não ressonantes refletindo a relação entre as componentes de $\underline{\omega}$. Se tivermos

uma situação intermediária, onde temos n relações ($0 < n < N - 1$) então o movimento preencherá uma variedade de dimensão $(N - n)$ do toro.

Como as frequências ω dependem de I então para um sistema integrável genérico teremos toros de todos os tipos, os racionais os irracionais e os intermediários, entretanto, assim como os números irracionais são um conjunto de medida total nos reais, o mesmo ocorre com os toros irracionais, formando os toros racionais e intermediários um conjunto de medida nula [1]. Apesar disso como ocorre nos reais, os toros racionais são densos no espaço de fases, estando portanto próximos de qualquer ponto que se tome.

O problema que se apresenta então é saber se sob uma perturbação suficientemente pequena esses toros de um sistema integrável se mantêm ou desaparecem. Poincaré demonstrou que, a menos de alguns tipos excepcionais, pequenas perturbações conservativas destroem todas as constantes de movimento exceto a energia, indicando que possivelmente todos os toros, ou sua maioria, seriam destruídos. O teorema KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) demonstra que exatamente o contrário ocorre, apesar de os toros racionais serem quase todos destruídos e estarem densamente distribuídos no espaço de fases, a maioria dos toros irracionais sobrevive levemente deformados. O teorema KAM só vale para sistemas integráveis não degenerados, nos quais as frequências dependam das ações, e para perturbações conservativas suficientemente pequenas.

A demonstração do teorema KAM é longa e complexa mas um argumento simples em favor da destruição dos toros racionais é o seguinte. Tomemos uma seção de Poincaré de um sistema integrável com dois graus de liberdade, então a aplicação definida em duas dimensões tem como curvas invariantes circunferências (cortes dos toros). Os pontos dessas circunferências têm dois tipos de comportamentos, dependendo do toro ao qual estão associadas. Se estiver associada a um toro irracional então dado um ponto nessa circunferência, suas imagens sucessivas irão cobri-la toda, jamais voltando sobre si. Se for um toro racional, todo ponto da circunferência será um ponto periódico, como esses pontos periódicos não estarão isolados e esse não é um comportamento genérico para aplicações, é razoável supor que uma perturbação qualquer deste sistema leve a pontos isolados na seção de Poincaré destruindo os toros associados (racionais).

O teorema KAM tem implicações distintas para sistemas com dois graus de liberdade e sistemas com mais graus de liberdade. Para dois graus de liberdade a superfície de energia tem tres dimensões e portanto os toros divi-

dem essa superfície como circunferências num plano, desta maneira apesar de os toros racionais serem destruídos, a dinâmica ocorre sempre entre dois toros irracionais adjacentes, não permitindo a existência de trajetórias que se afastem da região do toro racional destruído. Portanto as órbitas periódicas existentes nessa região (existência garantida pelo teorema de Poincaré-Birkhoff) só deverão se tornar todas instáveis quando todos os toros irracionais forem destruídos. Em um trabalho de MacKay *et al.* [2] é feito um estudo do afastamento das órbitas após a destruição do último toro irracional. Quando o último toro é destruído o movimento não deixa de ser quasi-periódico imediatamente mas surgem ilhas de movimento quasi-periódico às quais chamaram de Cantoros, em analogia aos conjuntos de Cantor, portanto o afastamento das órbitas fica diminuído por essas estruturas. Em mais de dois graus de liberdade esses efeitos não existem pois os toros não separam a superfície de energia e , quando os toros racionais se destroem temos uma estrutura nessa superfície assemelhada a linhas no espaço tridimensional com os toros irracionais envolvidos pelos "restos" dos toros racionais.

—Movimento em sistemas não integráveis

O movimento em sistemas integráveis é de certa maneira trivial, movimento uniforme sobre um toro. Para certos sistemas como o movimento sob potencial central da forma $\frac{1}{r}$ e r^2 , o movimento é ainda mais simples devido à presença de uma constante de movimento extra, tais sistemas são chamados superintegráveis. Indo na direção oposta, dos sistemas mais complexos, aparecem os sistemas quasi-integráveis, pode se dizer que são aqueles nos quais o teorema KAM é válido. Como já descrito, tais sistemas têm regiões do espaço de fases em que o movimento é essencialmente igual ao de um sistema integrável envolvidas por regiões em que o movimento pode apresentar maior complexidade.

No limite dos sistemas cujo movimento apresenta maior complexidade temos os sistemas ergódicos, "mixing", instáveis e de Bernouilli, com grau crescente de complexidade.

Os sistemas ergódicos são aqueles em que quase todas as órbitas cobrem a superfície de energia para $t \rightarrow \infty$, ou seja fazer uma média sobre o tempo é equivalente a fazer uma média sobre a superfície de energia.

Os sistemas "mixing" são sistemas ergódicos com a propriedade de que se tomarmos uma área A sobre a superfície de energia e acompanharmos a evolução dos pontos desta área eles se espalharão sobre toda a superfície de

energia uniformemente. De uma maneira mais formal, dadas a medida σ e as áreas A e B sobre a superfície de energia S e T_t a aplicação que leva um ponto do espaço de fases em sua posição depois de um tempo t , vale a seguinte relação

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma(B \cap T_t A)}{\sigma(B)} = \frac{\sigma(A)}{\sigma(S)}$$

ou seja a fração da área de B ocupada por $T_t A$ é igual à fração da área de S ocupada por A .

Sistemas “mixing” têm ainda uma propriedade importante, duas funções quadrado-integráveis sobre S são estatisticamente independentes para $t \rightarrow \infty$, ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_S f(\underline{x})g(T_t \underline{x})d\sigma = \left[\int_S f(\underline{x})d\sigma \right] \left[\int_S g(\underline{x}) \right]$$

Portanto sistemas “mixing” podem atingir o equilíbrio no sentido da Física Estatística, mas apenas para $t \rightarrow \infty$.

Os sistemas instáveis (ou K-systems) são o que usualmente se chama de sistemas caóticos (hiperbólicos), são “mixing” com a condição extra de que suas órbitas têm separação exponencial com o tempo ou seja, dados dois pontos próximos depois de um tempo t serão levados a uma distância exponencialmente dependente do tempo um do outro. Devido a essa característica esses sistemas são “imprevisíveis” apesar de terem um movimento determinístico. Do ponto de vista matemático esses são os sistemas nos quais a entropia métrica é positiva. A entropia métrica é uma medida da quantidade de informação que se pode conseguir do sistema, por exemplo um sistema periódico não oferece nenhuma informação nova uma vez que se tenha acompanhado o sistema durante um período, sua entropia então é nula. Esta entropia é uma medida do sistema todo e não de uma condição inicial do mesmo, não devendo ser confundida com a entropia da Física Estatística.

O caso extremo são os sistemas de Bernouilli, para os quais o movimento é associado ao deslocamento de seqüências de símbolos, sendo portanto indistinguíveis de um processo randômico.

—Órbitas periódicas

É interessante notar que através de todo o espectro de sistemas Hamiltonianos temos a presença de órbitas periódicas, e estas são densas no espaço de fases para cada um desses sistemas. Para um sistema integrável devido à existência de toros racionais (em sistemas não degenerados), as órbitas

periódicas são densas no espaço de fases pois os toros racionais são constituídos de órbitas periódicas. No outro extremo os sistemas possuem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas e graças ao teorema de Smale-Birkhoff [3] sabemos que nas proximidades dessas órbitas as órbitas periódicas são densas, apesar de serem todas instáveis. Entre esses dois tipos de sistemas podemos acompanhar com o auxílio do teorema KAM a evolução das órbitas periódicas. Com a destruição dos toros racionais surgem no lugar destes pares de órbitas estáveis e instáveis, às quais em geral estão associadas órbitas homoclínicas ou heteroclínicas, repetindo o padrão de um sistema totalmente caótico. Aumentando-se a perturbação os toros irracionais são destruídos e as órbitas periódicas estáveis se bifurcam em cascatas, gerando mais órbitas periódicas instáveis até chegarmos no limite de sistemas totalmente caóticos. Durante todo esse trajeto as órbitas periódicas são, em geral, densas no espaço de fases, mas sua distribuição é desconhecida. Em um trabalho de Hannay e Ozório de Almeida [4] se apresenta o princípio de uniformidade segundo o qual o número de órbitas periódicas com período arbitrariamente alto cresce exponencialmente e cobre uniformemente o espaço de fases.

Essa presença constante das órbitas periódicas nos sistemas Hamiltonianos sugere que se possa descrever o movimento local através de órbitas periódicas e linearização na sua vizinhança e o movimento global pela sua distribuição. Ainda não é possível esse tipo de descrição apesar de o movimento local estar resolvido.

--Aplicações

Devido à relação entre um sistema dinâmico e sua seção de Poincaré, muitos dos resultados descritos anteriormente se estendem à aplicações. Tomando-se a seção de Poincaré de um sistema integrável encontramos curvas invariantes fechadas, formadas de órbitas periódicas não isoladas ou de órbitas ergódicas sobre essas curvas, associadas respectivamente a toros racionais e irracionais. Podemos dizer que uma aplicação é "integrável" se ela só tiver curvas deste tipo. O teorema KAM tem sua analogia no estudo de aplicações estruturalmente estáveis ou seja, aquelas para as quais uma pequena perturbação pode ser reduzida a um homeomorfismo da aplicação não perturbada. Nesse sentido como foi feito na discussão do teorema KAM as aplicações "integráveis" não são estruturalmente estáveis perdendo as curvas invariantes formadas por órbitas periódicas.

Como a definição de sistemas ergódicos, "mixing", instáveis e de Ber-

nouilli está baseada em uma medida definida, podemos estender essas definições trivialmente para aplicações. Para órbitas periódicas e suas relações com sistemas integráveis e caóticos existem teoremas equivalentes.

-Indecidibilidade

Para terminar essa seção coloco aqui, a título de curiosidade, um resultado recente [5] sobre a decidibilidade de sistemas integráveis e caóticos. A questão é saber se, dada uma função Hamiltoniana, existe um algoritmo que possa nos dizer num tempo finito se um sistema é integrável ou não ou se é caótico ou não (se possui uma ferradura de Smale). Usando técnicas de teorias de conjuntos os autores demonstram que tais questões são indecidíveis ou seja, não existe algoritmo que as decidam. Entretanto isso não significa que para casos específicos não seja possível demonstrar a existência de caos ou integrabilidade, apenas indica que essas demonstrações podem ser muito complexas e longas.

I.1.2 Quantização

Quando se fala em quantização esta, em geral, se refere a sistemas Hamiltonianos, sobre os quais a Mecânica Quântica foi construída. Apesar disso a Mecânica Quântica possui um formalismo matemático próprio que pode, em princípio ser estendido a sistemas não Hamiltonianos, tais como sistemas dinâmicos em geral, aplicações, etc. Assim com certos cuidados é possível fazer Mecânica Quântica, falar de limite semiclássico, análogo clássico, etc, em sistemas para os quais a Mecânica Quântica não foi originalmente desenvolvida. A analogia entre mecânica e óptica é um exemplo bem conhecido, onde se associa a Mecânica Clássica à Óptica Geométrica e Mecânica Quântica à Óptica Física.

Nesta seção descreverei principalmente a quantização de sistemas Hamiltonianos ou a Mecânica Quântica de sistemas cujo análogo clássico é Hamiltoniano. Apenas no final discorrerei sobre outros tipos de sistemas quânticos.

-Regras de quantização

O problema geral da quantização de um determinado sistema Hamiltoniano ainda está em aberto, entretanto para alguns sistemas temos soluções bem definidas. Para uma partícula livre a representação de Schroedinger é a única quantização possível que satisfaz a relação de Weyl [6]. Dados dois grupos de transformações unitárias associadas respectivamente a p e q

$$U(t) = e^{it\hat{p}/\hbar}$$

$$V(s) = e^{is\hat{q}/\hbar}$$

a relação de Weyl se escreve

$$U(t)V(s) = e^{its/\hbar}V(s)U(t)$$

A semelhança desta relação e os colchetes de Poisson para as coordenadas e momentos sugere que talvez possamos fazer uma extensão desta condição para sistemas interagentes. Dirac [7] propôs a relação

$$i\hbar Q(\{f, g\}) = [Q(f), Q(g)]$$

para o operador de quantização Q , entretanto em geral um operador que satisfaça essa relação não é invariante por transformações canônicas e gera

representações redutíveis para as quais não temos regras de superseleção (spin, número bariônico, etc) para associar.

Outra possibilidade é relaxar essa relação para

$$[Q(f), Q(g)] = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n a_n(f, g)$$

onde a_n são operadores diferenciais. Essa relação também apresenta alguns problemas tais como a questão da ordenação dos operadores.

É importante verificar que tais tentativas de quantização são necessárias para sistemas menos comuns, para sistemas com energia cinética quadrática em p e potencial dependente de q ou apenas com dependência fraca em p não existem dificuldades e correções de ordem mais altas não são esperadas.

-Quantização de sistemas integráveis

A quantização semiclássica de sistemas integráveis está baseada, como não podia deixar de ser, em seus toros invariantes. O bem conhecido método WKB [8] supõe uma função de onda do tipo

$$\psi(q) = A(q)e^{iS(q)/\hbar}$$

longe dos pontos de retorno ($\dot{q} = 0$), nestas regiões temos que usar uma expansão assintótica para ligar as regiões acessíveis às proibidas. Se tomamos as contribuições de todos os pontos de retorno ao longo de uma órbita fechada obtemos a condição de quantização

$$\frac{1}{2\pi} \oint p \cdot dq = (n + 1/2)\hbar$$

onde n é tal que os autovalores sejam sempre maiores que a energia clássica mínima.

Podemos generalizar este procedimento, tomando a regra de quantização EBK (Einstein, Brillouin, Keller)

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} \underline{p} \cdot d\underline{q} = (n_i + 1/2)\hbar$$

onde C_i são os N circuitos irredutíveis sobre um toro invariante. Essa condição de quantização é preservada por transformações canônicas, mas ainda pode ser melhorada utilizando-se o método de Maslov.

O método de Maslov consiste basicamente em tomar uma aproximação para a função de onda do tipo WKB longe dos pontos de retorno e sobre estes tomar uma aproximação equivalente na representação dos momentos

$$\psi(p) = B(p)e^{i\sigma(p)/\hbar}$$

e ligar as duas funções de onda consistentemente através da transformada de Fourier nas regiões do espaço de fases onde não existam singularidades nessas funções. Ao fazer a transformada usando-se o método de fase estacionária obtemos uma fase extra na função de onda. De modo geral a mudança de fase em um circuito fechado qualquer é igual a

$$(n_+ - n_-)\frac{\pi}{2} = \mu\frac{\pi}{2}$$

onde n_+ é o número de dobras do circuito em que $\frac{\partial q}{\partial p}$ é positivo e n_- o número de dobras onde é negativo e μ é o índice de Maslov, um invariante topológico.

Desta forma a condição de quantização EBK pode ser escrita como

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} \underline{p} \cdot d\underline{q} = (n_i + \mu_i/4)\hbar$$

Com essa condição a função de onda $\psi(q)$ é uma aproximação uniforme em \hbar da função de onda exata.

–“Teorema KAM quântico”

O sucesso da quantização de sistemas integráveis indica a possibilidade de se quantizar semiclassicamente sistemas quasi-integráveis (aqueles que satisfazem as condições do teorema KAM) via perturbações. O próprio teorema KAM poderia ter uma extensão quântica no sentido de que a obtenção de formas normais em torno de pontos fixos elípticos estaria ligada à teoria de perturbação aplicada a sistemas quânticos de análogo clássico integrável.

Do ponto de vista clássico uma Hamiltoniana está em sua forma normal quando ela pode ser escrita em termos de potências de $t = (q^2 + p^2)/2$, ou seja tem a forma de um oscilador não linear. Analogamente podemos dizer que um operador Hamiltoniano está em sua forma normal se ele for diagonal em uma base de osciladores harmônicos.

Dado um sistema integrável perturbado, em princípio podemos, através da eliminação dos termos $k, k + 1, \text{etc}$, reduzi-lo à sua forma normal. Em

geral a série assim obtida não convergirá, caso contrário teríamos um sistema integrável (o que para mais de uma dimensão é improvável pelo teorema KAM), mas a série truncada mesmo assim é útil para se estudar o movimento em torno do ponto de expansão.

Quanticamente podemos fazer o estudo desse sistema perturbado por teoria de perturbação usando potências de operadores de criação (a^\dagger) e destruição (a) do oscilador harmônico, de modo a obter o Hamiltoniano escrito em termos de $a^\dagger a$. É possível demonstrar que se obtém os níveis de energia exatos através dessa série assintótica de perturbação para osciladores anarmônicos pelo método de somabilidade de Borel [9]. Assim podemos ver a ligação entre teoria de perturbação e formas normais desde que o sistema tenha regiões caóticas pequenas.

-Matrizes aleatórias

O estudo de sistemas gerais (não integráveis) do ponto de vista quântico é extremamente complicado se feito caso a caso, pois apesar de em certos casos ser possível escrever o Hamiltoniano deste sistema, sua diagonalização é quase sempre muito custosa. Entretanto como estamos pensando em analisar estruturas genéricas deste tipo de sistemas podemos tentar fazer um estudo estatístico. Podemos então "esquecer" o conhecimento exato do nosso Hamiltoniano, tomar ensembles de Hamiltonianos que compartilhem de certo tipo de simetria (inversão temporal, invariância rotacional, etc) e fazer uma estatística sobre esses ensembles.

A origem deste tipo de tratamento vem do estudo de núcleos atômicos, cujos níveis de energia podem ser bem determinados para certas faixas de energias correspondentes a grandes números quânticos. Tais níveis dificilmente poderiam ser explicado por algum modelo do núcleo, então abandona-se os modelos em favor de simetrias e se estuda as correlações entre os níveis.

Da mesma forma se espera que sistemas não integráveis com determinada simetria tenham certos tipos de correlações que sejam compartilhadas por todos (ou sua maioria). Assim o uso de ensembles de matrizes aleatórias é de grande utilidade no estudo dessas correlações. Existem diversos tipos de ensembles: gaussianos, ortogonais, unitários, de interação entre dois corpos, etc, muitos deles se equivalem em diversos resultados ou mesmo são subensembles de outros mas os principais são GOE e GUE. O primeiro é o ensemble dos sistemas que tenham invariância rotacional e por inversão temporal, e GUE dos sistemas que não têm invariância por inversão temporal.

Os ensembles gaussianos (GOE e GUE) têm como propriedade geral a independência estatística dos diversos componentes das matrizes. Podemos também definir GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) pela sua invariância por transformações ortogonais e GUE (Gaussian Unitary Ensemble) pela sua invariância por transformações unitárias.

Os principais resultados de GOE e GUE estão em [10] ou referências lá citadas, mas é bem conhecido o resultado para o espaçamento de níveis, que exhibe repulsão de níveis para ambos os ensembles. Para GOE tomamos $\beta = 1$ e para GUE $\beta = 2$, a estatística de espaçamento de níveis adjacentes é

$$P(s) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{64}{\pi^2} \right)^{\beta-1} s^\beta e^{-s^2 \left(\frac{16}{\pi^2} \right)^{\beta-3/2}}$$

-Teoria de órbitas periódicas

Uma outra maneira de se fazer um estudo semiclássico de sistemas não integráveis é através da teoria de órbitas periódicas desenvolvida inicialmente por Gutzwiller [11]. A idéia é, a partir da representação de Feynman do propagador, obter o espectro de energia do sistema em função das órbitas clássicas do sistema. Dado o propagador

$$K(q', q, t) = \int D[q] e^{iS(q', q, t)/\hbar}$$

onde $S(q', q, t)$ é a ação clássica através do caminho $q(\tau)$ e a integral é feita sobre todos os caminhos entre q e q' , queremos obter a função de Green

$$G(q', q, E) = \frac{1}{\pi \hbar} \int_0^\infty e^{iEt/\hbar} K(q', q, t) dt$$

O traço (integral sobre q de $G(q, q, E)$) nos dá a densidade de estados

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n)$$

Quando as integrais são resolvidas (usando o método de fase estacionária para o propagador e o traço) obtemos após razoável quantidade de cálculos a fórmula do traço de Gutzwiller

$$\rho(E) \approx \bar{\rho}(E) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{o.p.} T \sum_{n=1}^{\infty} |A| e^{in(S/\hbar - i\pi/\hbar)}$$

onde $\bar{\rho}(E)$ é a densidade média, T é o período da órbita, a soma sobre n é sobre repetições da órbita, $A = (2i \sin n\theta/2)$ para órbitas estáveis, θ ângulo de estabilidade, $A = (2 \sinh n\mu/2)$ para órbitas instáveis, μ expoente de instabilidade, $A = (2i \cosh n\mu/2)$ para órbitas instáveis com inversão, l é o número de pontos conjugados e S é a ação da órbita.

Este cálculo é válido apenas para órbitas isoladas e portanto não vale para sistemas integráveis. A versão para sistemas regulares foi feita por Berry e Tabor [12].

-Quantização de aplicações

A quantização de aplicações pode ser feita de duas maneiras: formalmente ou através da interpolação por uma Hamiltoniana. Do ponto de vista formal podemos associar um operador a uma dada aplicação impondo que no limite clássico (definido de alguma maneira) o operador seja equivalente à aplicação. Se supusermos que a aplicação de interesse é resultado de uma transformação canônica $(p, q) \rightarrow (p', q')$, semiclassicamente podemos escrever o operador unitário correspondente em termos da função geratriz S desta transformação. Em alguns casos, particularmente se a transformação for linear, esse operador unitário é o operador exato que leva $\psi(q) \rightarrow \psi'(q)$ tal que $\psi(q') = \psi'(q)$. Tomando uma Hamiltoniana como função geratriz da transformação o operador unitário obtido será o propagador $e^{i\hat{H}t/\hbar}$. Finalmente, para algumas aplicações pode ser difícil encontrar uma transformação canônica, ou mesmo impossível, nestes casos ainda se pode, através de algum artifício, definir um operador que no limite clássico seja equivalente à aplicação. Um exemplo deste tipo de procedimento é a quantização do mapa do Padeiro feita por Balazs e Voros [13].

Tanto as teorias de matrizes aleatórias (TMA) como as de órbitas periódicas podem ser adaptadas para aplicações com algum cuidado. No caso das TMA as matrizes utilizadas em geral são unitárias e assim os ensembles necessários para a dedução das estatísticas de níveis são diferentes. Os ensembles correspondentes a GOE e GUE são os ensembles circulares ortogonal e unitário respectivamente [14]. A principal diferença é que a estatística é feita sobre matrizes unitárias e os resultados associados aos chamados auto-ângulos θ_j , já que os auto-valores de matrizes unitárias são da forma $e^{i\theta_j}$.

Para a teoria de órbitas periódicas o estudo deve ser feito caso a caso pois a maneira de se obter o operador pode influir na forma da teoria, que depende da definição de ação de uma órbita periódica.

-Bilhares de ação

Em todos os casos aqui discutidos partiu-se de um sistema clássico e se obteve sua quantização, ou tendo um sistema quântico seu análogo clássico era evidente. Dessa maneira as maiores dificuldades estão no cálculo quântico que, quando feito numericamente implica no truncamento da matriz Hamiltoniana ou propagador, resultando em imprecisão nos níveis de energia e auto-funções.

Partindo do ponto de vista oposto ou seja, supondo-se que o Hamiltoniano truncado é exato deseja-se saber qual é seu análogo clássico, Aguiar e Ozório de Almeida [16] propuseram os bilhares de ação. Truncar o Hamiltoniano significa limitar o movimento da partícula clássica de tal forma que sua ação nunca seja maior que um certo valor. Analogamente aos bilhares comuns onde o movimento é restrito a uma região do espaço de configuração, os bilhares de ação limitam o movimento a uma região do espaço de ações. Apesar de estranhos tais sistemas também apresentam comportamento integrável ou caótico e sua principal característica é o cálculo quântico exato, tanto analítico como numérico. Outros sistemas quânticos que apresentam essas características são os sistemas no toro.

I.2 Sistemas em Toros

A dinâmica de sistemas definidos no toro, apesar de apresentar características não usuais em física, é uma extensão da dinâmica clássica. A principal diferença é a imposição de que as funções definidas sobre o toro sejam periódicas tanto em posição como em momento, a periodicidade em coordenadas é algo comum em sistemas físicos mas em momentos é algo não compartilhado pela maioria dos sistemas.

Preservando a periodicidade do toro podemos definir adequadamente Hamiltonianas, equações de Hamilton-Jacobi, transformações canônicas, integrabilidade, “teorema KAM”, classificar o movimento não integrável, etc.

Para um grau de liberdade, qualquer sistema Hamiltoniano no toro é integrável. Para Hamiltonianas dependentes do tempo poderemos ter movimento não integrável mas a análise dos sistemas dependentes do tempo não está bem desenvolvida e nesses casos é preferível estudar estroboscopicamente o sistema, definindo uma aplicação sobre o toro.

Do ponto de vista quântico existem certas restrições devidas ao fato de estarmos estudando um espaço de fases compacto (cuja área é finita). Todo sistema quântico no toro deve ter um espectro discreto de energia e um número finito de níveis, além disso as funções de onda admissíveis também devem ser periódicas.

I.2.1 Aplicações no Toro

O estudo de aplicações no toro é a maneira mais simples de se analisar um sistema caótico no toro, pois mesmo aplicações lineares geram uma dinâmica hiperbólica. A seguir irei analisar alguns exemplos típicos de aplicações caóticas no toro.

—mapa do Padeiro [17]

O mapa do Padeiro pode ser definido sobre um quadrado de lado 1, representando o toro, por

$$T(p, q) = (2q - [2q], (p + [2q])/2)$$

onde $[2q]$ é a parte inteira de $2q$. Podemos ver que T atua de modo diferente para $q < 1/2$ e $q > 1/2$. Se $q < 1/2$, $[2q] = 0$ e T pega a metade esquerda do quadrado, dobra sua largura e divide pela metade sua altura, e leva na metade inferior, se $q > 1/2$ a mesma coisa levando a metade direita na metade superior, num processo parecido com o de amassar o pão.

O interessante do mapa do Padeiro é que ele pode ser inteiramente descrito em termos de deslocamentos de sequências de símbolos. Particularmente, tomando-se dígitos binários podemos associar a uma órbita duas sequências de dígitos separados por um ponto e, a ação do mapa é apenas o deslocamento deste ponto para a direita.

Associando-se a p a sequência de antes do ponto lida para a esquerda e a q a sequência restante lida para a direita, essas sequências serão a representação binária de p e q . Devido a esta característica o mapa do Padeiro é um sistema de Bernoulli típico.

As órbitas periódicas deste sistema podem ser facilmente calculadas para cada período. Como o mapa se reduz a deslocamentos do ponto na sequência de símbolos temos que tomar pontos cujas coordenadas p e q sejam "dízimas periódicas" na representação binária, com p sendo a dízima inversa de q . Para uma órbita de período L tomamos uma dízima de L dígitos, assim analogamente ao caso decimal onde a dízima $0.151515\dots$ é escrita como $15/99$ ou $15/(10^2 - 1)$, dada a sequência de dígitos $d_1 \dots d_L$ teremos

$$q^* = \frac{d_1 \dots d_L}{2^L - 1}$$

$$p^* = \frac{d_L \cdots d_1}{2^L - 1}$$

Como o mapa do Padeiro é descontínuo separando-se em duas partes em uma iteração, em L iterações o mapa terá separado o toro em 2^L partes, para cada parte a representação será dada por $\nu = d_1 \cdots d_L$ pois qualquer ponto nesta parte é representado por $(a.\nu b)$, onde a e b são seqüências infinitas quaisquer de dígitos. Para essa parte a L -ésima iteração do mapa é dada pela seguinte função geratriz [18]

$$F_\nu(q, p') = 2^L p' q - \nu p' - \bar{\nu} q$$

onde $\bar{\nu}$ é a seqüência inversa de ν , $d_L \cdots d_1$.

Com essa função geratriz se pode calcular a ação de uma órbita periódica através da transformação de Legendre

$$S_\nu = p' q' - F_\nu(q, p')|_{p^*, q^*} = \frac{\nu \bar{\nu}}{2^L - 1}$$

ou

$$S_\nu = \frac{\nu \bar{\nu}}{2^L - 1} \pmod{1}$$

se quisermos que a ação seja invariante pelas simetrias do mapa e através da órbita periódica.

-mapa do Gato [17]

Definimos o mapa do Gato através da transformação sobre um quadrado de lado 1

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \pmod{1}$$

onde os t_{ij} são inteiros para que a aplicação seja contínua sobre o toro, a matriz $[t_{ij}]$ tem determinante unitário e módulo do traço maior que 2 para que o sistema seja hiperbólico.

Como os t_{ij} são inteiros é fácil ver que se tomarmos p e q racionais a ação do mapa sobre eles não muda o divisor e portanto, como temos um número finito de números racionais com um dado divisor entre 0 e 1, esse ponto deve ser periódico. Assim todos os pontos de coordenadas racionais são pontos periódicos e todos os pontos periódicos têm coordenadas racionais.

Se reescrevermos a transformação em termos de q e q'

$$p = \frac{1}{t_{12}}(q' + m - t_{11}q)$$
$$p' = \frac{1}{t_{12}}(t_{22}(q' + m) - q - t_{12}n)$$

onde m e n são os números inteiros subtraídos quando fazemos (mod 1), a função geratriz ($p = -\frac{\partial S}{\partial q}$ e $p' = \frac{\partial S}{\partial q'}$) será dada por

$$S(q', q, m, n) = \frac{1}{2t_{12}}[t_{11}q^2 - 2q(q' + m) + t_{22}(q' + m)^2 - 2t_{12}nq']$$

que também é a ação entre q e q' .

O mapa do Gato é o estereótipo do sistema caótico, suas órbitas todas tem afastamento exponencial, possui órbitas homoclínicas nas quais as órbitas periódicas se acumulam, etc. Além disso é um sistema simples e contínuo, o que facilita muito os cálculos.

I.2.2 Quantização

A quantização de aplicações no toro envolve alguns conceitos não usuais em sistemas físicos, mas ao mesmo tempo é uma das poucas maneiras que se tem de obter sistemas quânticos cujo cálculo numérico e analítico exato seja acessível. Além disso aplicações no toro são exemplos típicos de sistemas caóticos, sendo razoável supor que sua quantização também apresente características típicas.

-Critérios de quantização

A quantização de sistemas em toros impõe certas restrições à dinâmica que se pode obter. Independentemente de qualquer sistema definido o espaço de fase é compacto e portanto tem uma área finita, isto implica que teremos um número finito de níveis de energia para um dado valor de \hbar .

A imposição de periodicidade da função de onda, tanto na representação de coordenadas como na representação de momentos, leva a funções de onda que sejam "pentes" de funções δ tanto em q como em p . Se a função em q tem período Δq e espaçamento entre as δ de $\Delta q/N$, na representação de momentos terá um período $\Delta p = N\hbar/\Delta q$ e espaçamento $\hbar/\Delta q$, assim vemos que $\Delta p\Delta q = Nh$. Se tomarmos $\Delta p\Delta q$ fixo o limite semiclássico $\hbar \rightarrow 0$ será obtido quando $N \rightarrow \infty$.

-Padeiro

A quantização de uma iteração do mapa do Padeiro foi feita inicialmente por Balazs e Voros [13], usando condições de fronteiras periódicas no toro, entretanto levando a quebra de uma simetria do mapa. Essa simetria que é equivalente a uma reflexão através do centro do quadrado onde definimos o mapa, pode ser expressa como $p \rightarrow 1 - p$ e $q \rightarrow 1 - q$. Saraceno [20] usando condições antiperiódicas consegue levar em conta essa simetria.

O procedimento de quantização do mapa do Padeiro é formal, se constrói um operador unitário em representação mista de coordenadas e momentos que produza o mesmo efeito do mapa clássico. Cria-se uma base $|n\rangle$ em representação de coordenadas e uma base $|k\rangle$ em momentos, cada uma delas com N vetores. O operador é definido da seguinte maneira, os vetores $|n\rangle$ com $n < N/2$ são levados no subespaço $\{|k\rangle, k < N/2\}$ e os vetores $|n\rangle$ com $n \geq N/2$ são levados no subespaço $\{|k\rangle, k \geq N/2\}$.

Esta aplicação parece ser um exemplo típico de sistema caótico, classicamente sua dinâmica está bem determinada mas quanticamente ainda necessitamos de uma descrição mais completa. Recentemente Ozório de Almeida e Saraceno [18] obtiveram uma teoria semiclássica para o mapa do Padeiro baseada na função geratriz $F_\nu(q, p')$ da L -ésima potência do mapa com bons resultados para a densidade de quasi-energias suavizada.

–Gato

Usando a aproximação semiclássica para o propagador quântico do mapa do Gato se obtém o propagador exato pois o mapa é linear [21]. Assim

$$U(q', q) = \left(\frac{-i\partial^2 S}{\hbar\partial q\partial q'} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{S(q', q)}{\hbar}}$$

onde $S(q', q)$ é a ação entre os pontos q e q' .

Como estamos trabalhando em um toro e não queremos que o operador seja multívoco, utiliza-se a analogia óptica considerando que $U(q', q)$ é o campo produzido por q visto em q' e se toma uma média sobre todos os pontos equivalentes $q + n$. Essa média é o propagador exato no toro.

Esta quantização ao contrário daquela feita para o Padeiro tem uma ligação com a física mais evidente, entretanto o sistema que classicamente é um estereótipo de sistema caótico, quanticamente não apresenta a maioria das características esperadas, notadamente o propagador U por ser periódico com período menor que sua dimensão apresenta degenerescências.

Keating [22] desenvolveu uma teoria exata de órbitas periódicas para o Gato e também verificou que o espectro quântico do mapa não corresponde a nenhuma classe de universalidade.

II Estudo Clássico

Classicamente, o estudo de pequenas perturbações de automorfismos lineares do toro (mapas do Gato) se concentra na relação entre os sistemas não perturbado e perturbado. A idéia é que estabelecendo-se um isomorfismo entre os dois sistemas, se possa descrever seu comportamento de um modo unificado.

Mapas do Gato são sistemas “estereótipos”, ou seja sistemas que exibem as características desejadas de sistemas caóticos. Além disso sua extrema simplicidade permite que boa parte dos cálculos envolvidos na obtenção destas características sejam feitos analiticamente e de forma exata. Esta simplicidade fez com que o mapa do Gato se tornasse um dos mais estudados sistemas da literatura e por consequência também um dos mais conhecidos.

Todas as perturbações de mapas do Gato que satisfaçam o teorema de Anosov compartilham este conhecimento devido à existência de homeomorfismo ligando a ambos.

Neste capítulo apresentarei alguma propriedades de mapas do Gato e as condições nas quais o teorema de Anosov é válido. Esboço também algumas características de perturbações que não satisfazem o teorema mas que de de uma maneira mais “fraca” são equivalentes aos mapas do Gato.

II.1 Mapas do Gato

Mapas do Gato são automorfismos lineares do toro de duas dimensões que apresentam hiperbolicidade. Podemos portanto representá-los como matrizes agindo sobre o toro através da equação:

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = G \circ \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \pmod{1} \quad (1)$$

Para garantir a continuidade sobre o toro tomamos os coeficientes inteiros, seu traço deve ser maior do que dois para que haja hiperbolicidade e seu determinante unitário, pois estamos interessados na analogia com sistemas hamiltonianos.

Os mapas do Gato foram inicialmente estudados por Arnold e Sinai [23] e recentemente analisados à luz da teoria de números por Percival e Vivaldi [24] e Keating [22]. Desta forma mapas do Gato se tornaram sistemas bastante conhecidos dentre os que apresentam dinâmica caótica, principalmente do ponto de vista de cálculo de suas órbitas periódicas.

-Órbitas periódicas

É bastante simples verificar que devido aos coeficientes inteiros, as órbitas periódicas são pontos de coordenadas racionais. Além disso, se de 1 escrevermos a condição sobre as órbitas periódicas de período l obtemos:

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = G^l \circ \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

onde m e n são os inteiros que devemos subtrair para obter o módulo.

Resolvendo esta equação encontramos:

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = (G^l - 1)^{-1} \circ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde m e n pertencem ao paralelogramo gerado por $(G^l - 1)$ aplicado ao quadrado unitário na origem. Como a área deste paralelogramo é dada por $\det(G^l - 1) = 2 - \text{Tr}(G^l)$, e translações deste paralelogramo cobrem todo o espaço dos (m, n) , então existem $\text{Tr}(G^l) - 2$ pontos periódicos de período l .

Podemos reescrever $\text{Tr}(G^l) - 2$ como $\lambda_1^l + \lambda_2^l - 2$ onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de G . Assim o número de pontos periódicos aumenta exponencialmente

com o período. Além disso essas órbitas se distribuem uniformemente sobre o toro [4]. Estes fatos mais a hiperbolicidade uniforme fazem com que os mapas do Gato sejam sistemas estereótipos de dinâmica caótica.

Utilizando-se técnicas de teorias de números é possível ir além do cálculo dessas órbitas e estudar a distribuição dos períodos e propriedades assintóticas com o período. Como tais técnicas não podem ser estendidas à sistemas não lineares, não as apresentarei aqui.

-Ação

Definimos a ação de mapas do Gato como a função geratriz $S_G(q', q, m, n)$. Reescrevendo o mapa (1) como

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{g_{12}}(q' + m - g_{11}q) \\ p' &= \frac{1}{g_{12}}(g_{22}(q' + m) - q - g_{12}n) \end{aligned}$$

onde novamente m e n são os inteiros necessários para que q' e p' estejam entre 0 e 1, podemos então escrever a ação, através das relações $p = -\frac{\partial S_G}{\partial q}$ e $p' = \frac{\partial S_G}{\partial q'}$, como:

$$S_G(q', q, m, n) = \frac{1}{2g_{12}}[g_{11}q^2 - 2q(q' + m) + g_{22}(q' + m)^2 - 2g_{12}nq']$$

-Interpolação por uma Hamiltoniana

Podemos considerar também que o mapa (1) é gerado por observações em intervalos de tempo unitários pela Hamiltoniana:

$$H_G(q, p) = \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\text{Tr}G)^2 - 4}\right)}{\sqrt{(\text{Tr}G)^2 - 4}}[g_{12}p^2 - g_{21}q^2 + (g_{11} - g_{22})pq]$$

onde se toma $(q, p) \bmod 1$ a cada passo.

II.2 Perturbações de Mapas do Gato

Nesta seção irei abordar basicamente dois tipos de perturbações de mapas do Gato, as que satisfazem o teorema de Anossov e as que não satisfazem mas são suficientemente próximas dos mapas do Gato.

-Teorema de Anossov

O teorema de Anossov [25] pode ser enunciado como: *Os automorfismos lineares hiperbólicos do toro são estruturalmente estáveis, ou em outros termos, todo difeomorfismo B suficientemente próximo de G juntamente com sua parte linear, pode ser escrito $B = H^{-1} \circ G \circ H$ com H sendo um homeomorfismo.*

Se escrevermos $B(\underline{x}) = G\underline{x} + \underline{f}(\underline{x})$ com $\underline{f}(\underline{x})$ periódico no toro e \underline{x} sendo o par de coordenadas do toro, então a condição sobre B para que ele satisfaça o teorema é:

$$\|f\| = \max \left(\frac{\left| \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{x} \right|}{|\underline{x}|} \right) < 1 - \lambda$$

onde λ é o menor autovalor de G .

Do teorema de Anossov concluímos imediatamente que toda perturbação de G que satisfizer a condição acima será topologicamente equivalente a G . Assim do ponto de vista da dinâmica clássica ambos os sistemas apresentam as mesmas características e o estudo de um deles implica na extensão destes resultados aos outros. De modo particular, conhecidas as órbitas periódicas de G se obtém diretamente, utilizando-se H , as órbitas periódicas de B e estas estarão associadas 1 a 1 àquelas.

-Quasi-Anossov

Outro tipo interessante de perturbação é aquela que é bastante próxima do mapa do Gato mas que, por modificar sua parte linear em uma ordem de grandeza maior, não pode ser escrita em termos de um homeomorfismo atuando sobre o mesmo. Serão chamados aqui de quasi-Anossov.

Apesar de não ser possível encontrar uma associação 1 a 1 entre as órbitas do sistema perturbado e não perturbado, em diversas situações pode ser possível encontrar uma relação apenas entre suas órbitas periódicas. Neste

caso teríamos uma associação mais “fraca” que o teorema mas que em diversos aspectos pode ser útil.

Nesse sentido dois trabalhos sobre mapas lineares por partes no toro (“sawtooth maps”) [26] [27] associam as órbitas destes mapas àquelas de mapas do Gato. Na verdade esses trabalhos conseguem fazer uma associação de todas as órbitas de uma classe de sistemas lineares (que incluem os mapas do Gato e sawtooth) à órbitas simbólicas. Mostram que não só as órbitas de sistemas lineares próximos de mapas do Gato são descritas da mesma maneira, mas também qualquer mapa que pertença àquela classe terá suas órbitas descritas de uma mesma maneira.

Para perturbações não lineares o problema é mais complexo, mas um raciocínio análogo pode ser feito. Como uma perturbação linear é muito grande longe da origem e em geral, como estamos tratando de perturbações periódicas, uma perturbação não linear tende a ser menor que as lineares longe da origem, então em princípio perturbações não lineares devem ter mais órbitas periódicas em comum com mapas do Gato do que os sawtooth.

Isto nos permitiria descrever as órbitas de perturbações gerais que não satisfazem o teorema de Anossov em termos de órbitas de mapas do Gato. Seria possível então fazer uma descrição unificada, em diversos aspectos, de mapas do Gato, mapas de Anossov e quasi-Anossov.

–Decomposição de perturbações

Sem sacrifício da generalidade e para facilitar a obtenção de funções geratrizes e posterior quantização os sistemas tratados neste trabalho estarão sempre na forma:

$$A = G \circ P = G \circ (1 + \delta) \quad (3)$$

onde G é um mapa do Gato e P é uma perturbação periódica nas coordenadas do toro e próxima da identidade.

É fácil ver que todo mapa B que satisfaça o teorema de Anossov pode sempre ser escrito nessa forma. Pelo teorema

$$B = H^{-1} \circ G \circ H$$

Mas como G é inversível podemos escrever,

$$B = G \circ [G^{-1} \circ H^{-1} \circ G \circ H] = G \circ P$$

e o teorema pressupõe $B = G + f$ com f pequeno, temos

$$P = 1 + G^{-1} \circ f = 1 + \delta$$

Assim em termos de δ o teorema impõe a condição

$$\|G \circ \delta\| < 1 - \lambda$$

outra condição imposta sobre as perturbações é que $\delta(0) = 0$ para que o ponto fixo na origem não mude de posição. Isto é necessário para que o propagador quântico não se anule (ver apêndice A).

-Órbitas periódicas

Para os sistemas que satisfazem o teorema de Anossov, o problema de se calcular as órbitas periódicas é facilmente resolvido através de um método iterativo de Newton generalizado, usando como aproximação inicial as órbitas do mapa do Gato. Neste caso utilizo uma adaptação para espaço de fases toroidal do método de Baranger [28]. Como cada órbita do mapa do Gato é definida univocamente por m e n (equação (2)), fixando-os obtemos as órbitas associadas do mapa perturbado.

Para os mapas Quasi-Anossov, o mesmo método pode ser utilizado, mas com alguns cuidados pois é possível que não existam órbitas associadas a determinados m e n no mapa perturbado. Além disso também podem existir órbitas no mapa perturbado não associadas a nenhum m e n do mapa do Gato. O que se verifica é que muito poucas órbitas aparecem no sistema perturbado mas esse número cresce mais rápido com o período que o número total de órbitas de mesmo período. Assim podemos descrever quase a totalidade das órbitas de períodos baixos em termos de órbitas do mapa do Gato, mas para períodos longos isso não é mais verdade.

-Ação

Para escrever ação (função geratriz) no toro dos sistemas da forma (3) é necessário utilizar composição de ações. Como o sistema A é decomposto em uma parte linear e outra próxima da identidade podemos escrever a ação como uma soma de dois termos, um devido à parte linear e outra devido à perturbação:

$$S(q', q, m, n) = S_G(q', q_i, m, n) + S_P(q_i, q) \quad (4)$$

onde q_i é a coordenada do sistema depois da aplicação de P , mas antes da aplicação de G .

Como estou supondo ou que o sistema satisfaz o teorema de Anossov, ou que suas órbitas sejam próximas das órbitas do mapa do Gato, a aplicação de P não faz com que o ponto dê mais uma volta alterando m ou n . Portanto temos diretamente S_G como a função geratriz de G e S_P como a função geratriz de P , independentemente de o sistema satisfazer ou não o teorema de Anossov.

Se tomarmos δ em (3) como dependendo apenas da coordenada q e modificando somente o valor de p a equação (4) se simplifica para:

$$S(q', q, m, n) = S_G(q', q, m, n) + S_P(q)$$

onde $\frac{dS_P(q)}{dq} = \delta(q)$, pois neste caso $q_i = q$.

-Interpolação por uma hamiltoniana

Ao contrário do que acontece com os mapas do Gato que são lineares e portanto a interpolação por uma hamiltoniana é única a menos de constantes, para mapas não lineares existem muitas maneiras de se interpolar o mapa. Se pode interpolá-lo por um fluxo contínuo e diferenciável ou até mesmo com hamiltonianas dependentes do tempo e descontínuas.

Como um dos objetivos desta tese é obter uma quantização aproveitando a já conhecida quantização de mapas do Gato, optou-se por uma hamiltoniana descontínua no tempo. O sistema (3) é separável em duas hamiltonianas: H_G que gera estroboscopicamente o mapa do Gato e H_P que gera estroboscopicamente a perturbação. Se ambas gerarem os mapas em intervalos de tempo unitário teremos:

$$H = \begin{cases} H_P & 2n < t < 2n + 1 \\ H_G & 2n + 1 < t < 2n + 2 \end{cases}$$

Novamente, se tomarmos δ dependente apenas de q e modificando somente o valor de p , a solução é mais simples com $-\frac{dH_P(q)}{dq} = \delta(q)$. Note-se que o período de tempo em que H_P fica "ligado" não altera o resultado, bastando tomar:

$$-\frac{dH_P(q)}{dq} = \frac{\delta(q)}{T} \quad (5)$$

onde T é o período de tempo em que H_P age.

-Sistemas exemplo

Neste trabalho utilizarei como exemplo sistemas simples que satisfaçam as condições clássicas e quânticas. Assim, como mapa do Gato foi escolhido

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

e não o conhecido mapa do Gato de Arnold pois este último não satisfaz a condição de quantização descrita no capítulo seguinte e o mapa acima é o mais simples que satisfaz essa condição.

Para que o teorema de Anossov seja válido é necessário que a perturbação e sua parte linear sejam da mesma ordem de grandeza. É mais simples nesse caso tomar a parte linear nula, satisfazendo trivialmente as condições do teorema. Assim,

$$\delta(q) = \frac{k}{2\pi} (\cos(2\pi q) - \cos(4\pi q)) \quad (7)$$

Onde se tomou dois cossenos subtraídos para anular a parte linear da perturbação. A condição de validade do teorema se escreve:

$$\|G \circ \delta\| = \max \left(\frac{5q^2 k^2 (2 \sin(4\pi q) - \sin(2\pi q))^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}} < 1 - \lambda = \sqrt{3} - 1$$

ou $k < 0.11$.

E finalmente como perturbação que gera um quasi-Anossov:

$$\delta(q) = \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q) \quad (8)$$

Neste caso quanto menor o k mais próximo estamos do mapa do Gato e portanto mais órbitas estão associadas 1 a 1 entre o sistema não perturbado e perturbado.

Esses dois sistemas perturbados são muito próximos do Gato quando o parâmetro de perturbação k é pequeno e portanto compartilham com ele suas características caóticas. Entretanto, mesmo para valores muito altos de k ambos continuam basicamente caóticos em todo o espaço de fases, com regiões integráveis muito pequenas quando existem. A razão deste comportamento é que a parte linear das perturbações varia rapidamente através do

espaço de fases, fazendo com que mesmo que surjam regiões integráveis elas sejam muito pequenas. É claro que para k muito grande não existe associação com o Gato, o que faz surgir o problema de se calcular as órbitas periódicas.

III Estudo Quântico

A quantização de mapas do Gato foi feita com bastante sucesso utilizando-se técnicas de teoria de números [21] [22]. No entanto a mesma característica que permitiu tal sucesso na quantização, o fato de o sistema ser linear e descrito através de teoria de números, faz com que do ponto de vista quântico esses sistemas sejam atípicos. Sua dinâmica quântica é fortemente dependente da natureza discreta da constante de Planck. Tal comportamento não foi encontrado em outros sistemas no toro, como o “standard map” [29] [30] e o mapa do Padeiro [13] [20]. Na verdade mapas do Gato parecem estar fora de qualquer classe de universalidade quântica.

No entanto, como foi dito no capítulo anterior, mapas do Gato são sistemas típicos do ponto de vista clássico. Como a origem do comportamento quântico atípico desses sistemas está na sua linearidade, é de se esperar que seus equivalentes clássicos não lineares sejam mais “estereótipos” quanticamente. E é isso que se verifica aqui, mapas de Anosov e quasi-Anosov são sistemas que apresentam os comportamentos esperados de sistemas caóticos.

III.1 Quantização de Mapas do Gato

Farei aqui uma breve descrição do procedimento de quantização de mapas do Gato, uma vez que o utilizarei, de maneira modificada, para quantizar mapas não lineares. A exposição é baseada no clássico artigo de Hannay e Berry [21].

–Critérios de quantização

Para se quantizar qualquer sistema em toros se torna necessário fazer algumas restrições de ordem topológica.

Como o espaço de fases que estamos estudando (toro) é compacto e portanto tem uma área finita, teremos um número finito de níveis de energia para um dado valor de h . Esta é uma característica bem vinda pois torna possível o cálculo numérico de todos os níveis de energia sem recorrer a truncamentos de bases.

Devido ao fato de tanto as coordenadas como os momentos serem periódicos no toro, a função de onda deve ser periódica tanto na representação de coordenadas como em momentos. Esta imposição leva necessariamente a funções de onda que sejam “pentas” de funções delta, em coordenadas e momentos. Não há violação do princípio de incerteza pois estes pentas se estendem infinitamente.

Tomando-se uma função de onda na representação de coordenadas com período Δq e espaçamento entre as deltas de $\Delta q/N$, verificamos, através da transformada de Fourier, que na representação de momentos o período será $\Delta p = Nh/\Delta q$ com espaçamento de $h/\Delta q$. Resulta então que $\Delta p \Delta q = Nh$ e se fixarmos $\Delta p = \Delta q = 1$ implica que $h = 1/N$ e o limite semiclássico $h \rightarrow 0$ será atingido através de $N \rightarrow \infty$. Assim nos sistema em toros o limite semiclássico não é atingido de modo contínuo mas através de recíprocos de inteiros.

–Propagador quântico unitário

Para um valor fixo de h teremos um espaço de Hilbert de N dimensões e poderemos escrever o propagador como uma matriz $N \times N$ agindo sobre um vetor cujas componentes são as amplitudes de cada função delta.

Contruímos este propagador a partir de um propagador contínuo nas coordenadas do plano referente a um intervalo de tempo unitário. Como o

sistema é linear e canônico, então sua aproximação semiclássica é exata para qualquer \hbar . Escreve-se o propagador em termos da ação $S(q', q)$ ao longo da órbita clássica:

$$U(q', q) = (-1)^r \left(\frac{-i\partial^2 S(q', q)}{\hbar \partial q' \partial q} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S(q', q)}$$

onde r é a assinatura do mapa que depende da maneira como o mapa foi obtido. O propagador é definido unicamente a menos de um sinal. Por exemplo: se impusermos que a raiz acima é definida $-\pi/2 < \arg \sqrt{\leq} \pi/2$, então r é o número de revoluções feitas pelo vetor $(0, 1)$ no espaço de fases sob a ação do mapa. Não o consideraremos aqui pois sua influência é apenas de sinal e pode ser descartada.

Como $S(q', q)$ é a função geratriz do mapa então pode ser escrita em termos dos coeficientes de G e a menos de uma fase o propagador fica:

$$U^G(q', q) = \left(\frac{N}{ig_{12}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i\pi N}{g_{12}} (g_{11}q^2 - 2q'q + g_{22}q'^2) \right]$$

Se, por analogia com um sistema óptico, considerarmos $U^G(q', q)$ como o campo em q' devido à fonte em q , o propagador no toro será dado pela média (definida no Apêndice A) sobre m em todos os pontos da forma

$$q = Q/N + m$$

onde Q é um número inteiro entre 1 e N e m é um inteiro qualquer.

Assim temos:

$$U_{Q'Q}^G = \left(\frac{g_{12}}{iN} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{Ng_{12}} (g_{11}(Q + mN)^2 - 2Q'(Q + mN) + g_{22}Q'^2) \right] \right\rangle_m$$

onde a amplitude foi normalizada.

Médias da forma acima são as chamadas somas de Gauss e seu valor pode ser obtido em livros de teoria elementar de números [31]. Como o resultado depende das relações numéricas entre os coeficientes, se demonstra em [21] que apenas mapas do Gato na forma:

$$\begin{bmatrix} \text{par} & \text{ímpar} \\ \text{ímpar} & \text{par} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \text{ímpar} & \text{par} \\ \text{par} & \text{ímpar} \end{bmatrix}$$

podem ser quantizados para todo valor de N .

O sistema exemplo de mapa do Gato aqui estudado tem o propagador escrito de uma forma bastante simples:

$$U_{Q',Q}^G = \left(\frac{1}{iN}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i2\pi}{N} (Q^2 - QQ' + Q'^2) \right]$$

-Autovalores

Também se pode demonstrar que o propagador $U_{Q',Q}^G$ é periódico e portanto seus autovalores devem ser da forma:

$$\exp \left[\frac{i(2m\pi + \phi)}{n} \right]$$

onde n é o período do propagador e $1 \leq m \leq n$.

O propagador quântico obedece a mesma lei de composição do propagador no plano, ou seja

$$U^{G_1} U^{G_2} = U^{G_1 \circ G_2}$$

Assim a condição de periodicidade pode ser escrita como:

$$U^{G^n} = (U^G)^n = I e^{i\phi}$$

o que leva, através de argumentos oriundos de teoria de números, às seguintes condições:

$$G^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \text{inteiro} & \text{inteiro} \\ \text{inteiro} & \text{inteiro} \end{bmatrix} \text{ para } N \text{ ímpar}$$

$$G^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \text{inteiro} & \text{par} \\ \text{par} & \text{inteiro} \end{bmatrix} \text{ para } N \text{ par}$$

O problema é que em geral n é menor que N e alguns autovalores são obrigatoriamente degenerados. Na verdade n é uma função errática de N (ou seja, varia muito com N) mas em média a degenerescência tende muito lentamente ao infinito no limite semiclássico. Keating [22] demonstrou que esse limite é dado por

$$\left\langle \log \left(\frac{n(N)}{N} \right) \right\rangle \approx -\frac{2\sqrt{\pi}}{e^2} (\log \log N) (\log \log \log N)$$

III.2 Quantização de Perturbações

Os critérios de quantização descritos na seção anterior são válidos para qualquer sistema no toro. Portanto também são aplicáveis aos sistemas não lineares tratados aqui.

Ao contrário de sistemas lineares, não é possível definir de modo único o procedimento de quantização. Além das dificuldades usuais de se definir a quantização de sistemas não lineares contínuos, citadas na introdução, adicionalmente existe a dependência do propagador com o tipo de interpolação utilizada para gerar o mapa.

Digamos que fosse possível, no caso de mapas de Anossov, interpolá-los por uma hamiltoniana contínua e independente do tempo, próxima da hamiltoniana que gera o mapa do Gato. Neste caso a mesma transformação que leva o mapa de Anossov no mapa do Gato, se for canônica, levará esta hamiltoniana na hamiltoniana do Gato. Assim quantizar esse sistema é o mesmo que quantizar o mapa do Gato, não oferecendo nenhuma novidade em termos da análise do propagador, já que será equivalente ao propagador para o mapa do Gato.

Para quantizar as perturbações utilizei dois procedimentos distintos que, no entanto, fornecem o mesmo resultado (propagador).

-Quantização através da função geratriz

Pode-se utilizar o mesmo procedimento aplicado aos mapas do Gato e tomar a aproximação semiclássica como sendo a quantização exata para todo \hbar .

No plano, podemos obter um mapa da forma (3) através da função geratriz:

$$S(q', q) = S_G(q', q) + S_P(q)$$

onde S_G é a geratriz de G e S_P é a geratriz de P . Por uma questão de simplicidade tomamos o caso em que a perturbação é dependente apenas de q .

Substituindo esta ação S na aproximação semiclássica obtemos

$$U(q', q) = \left(\frac{N}{i g_{12}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i\pi N}{g_{12}} (g_{11} q^2 - 2q'q + g_{22} q'^2) + i2\pi N S_P(q) \right]$$

E quando fazemos a média sobre os pontos $q = Q/N + m$ resulta:

$$U_{Q'Q} = \left(\frac{g_{12}}{iN} \right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{Ng_{12}} (g_{11}(Q + mN)^2 - 2Q'(Q + mN) + g_{22}Q'^2) \right] \right\rangle_m e^{i2\pi N S_P(Q/N)}$$

ou

$$U_{Q'Q} = U_{Q'Q}^G U_{Q'Q}^P$$

onde é necessário que $S_P(q)$ seja uma função de período 1 em q e portanto pode ser retirada da média, caso contrário a média acima se anula para todo Q e Q' (ver apêndice A).

Além disso note-se que a amplitude que multiplica a exponencial é a mesma que foi obtida para o caso linear. Isto decorre de ser esta amplitude dependente da amplitude semiclassical, e esta é a mesma no caso linear e não linear pois a contribuição de S_P é nula.

Vemos então que o propagador para o mapa perturbado é simplesmente o produto do propagador para o mapa do Gato com um propagador diagonal associado a P . A condição sobre $\delta(q)$ para que $S_P(q)$ seja periódico é que sua expansão em séries de Fourier não contenha o termo constante (independente de q), ou de modo equivalente, que sua média sobre um período seja nula.

-Quantização através de hamiltoniana

Outra maneira de se obter a mesma quantização é utilizar a interpolação por uma hamiltoniana descontínua no tempo do tipo (5). Com esta escolha podemos escrever imediatamente o propagador em duas partes distintas que atuam uma após a outra. Tomando

$$H = \begin{cases} H_P & n(T+1) < t < n(T+1) + T \\ H_G & n(T+1) + T < t < (n+1)(T+1) \end{cases}$$

escrevemos diretamente o propagador como $U = U^G \circ U^P$ com U^G calculado da maneira usual e U^P calculado a partir do hamiltoniano H_P em um período T .

$$U^P = e^{-iH_P T/\hbar}$$

ou, em representação de coordenadas

$$U^P(q', q) = \delta(q - q') e^{-iH_P(q)T/\hbar}$$

fazendo-se a média sobre os pontos $q = Q/N + m$ para reduzir o propagador ao toro obtemos

$$U_{Q'Q}^P = \delta_{Q'Q} e^{-i2\pi H_P(Q/N)TN}$$

onde $\delta_{Q'Q}$ é a delta de Kroenecker e a novamente a média só é diferente de zero se $H_P(q)$ tiver período 1. Como

$$\frac{dS_P(q)}{dq} = \delta(q) \quad \text{e} \quad -\frac{dH_P(q)}{dq} = \frac{\delta(q)}{T}$$

vemos que $H_P(q) = -S_P(q)/T + \text{const.}$, assim os propagadores obtidos dessas duas maneiras diferentes são iguais a menos de um fator de fase constante que pode ser desprezado.

Nota-se imediatamente que, com a quantização definida desta maneira, o propagador não será periódico e portanto seus autovalores não serão raízes da unidade e não deverão apresentar degenerescências. Como era de se esperar, a parte não linear do mapa evita que as características associadas à teoria de números apareçam.

Os sistemas exemplo a serem estudados aqui são quantizados com os seguintes propagadores. Para o mapa de Anossov:

$$U_{Q'Q} = \left(\frac{1}{iN}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i2\pi}{N}(Q^2 - QQ' + Q'^2) + \frac{iNk}{2\pi}(\sin(2\pi Q/N) - \frac{1}{2} \sin(4\pi Q/N)) \right]$$

e para o mapa quasi-Anossov:

$$U_{Q'Q} = \left(\frac{1}{iN}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i2\pi}{N}(Q^2 - QQ' + Q'^2) - \frac{iNk}{2\pi} \cos(2\pi Q/N) \right]$$

Deve-se salientar que do ponto de vista da quantização, não existe diferença entre Anossov e quasi-Anossov. O procedimento de quantização é o mesmo e como veremos na seção seguinte, as estatísticas também têm o mesmo comportamento.

III.3 Estatísticas

Nesta seção apresento os resultados de computação numérica para os sistemas exemplos citados anteriormente. Entretanto farei uma apresentação resumida do tipo de estatísticas que foram calculadas.

-Estatísticas de níveis

Os resultados de estatísticas de níveis de energia foram inicialmente obtidos através dos chamados “ensembles” de Matrizes Aleatórias, desenvolvidas para o estudo de núcleos atômicos. Estes sistemas possuem muitos graus de liberdade e são muito difíceis de serem tratados analiticamente. Por essa razão se propôs que seus níveis de energia poderiam seguir a estatística de um “ensemble” de sistemas cuja única característica em comum é o fato de possuírem a mesma simetria.

Surpreendentemente se verificou pouco mais tarde que sistemas com poucos graus de liberdade, mas com dinâmica clássica caótica, também seguiam as previsões desses teorias. Um bom artigo de revisão com os principais resultados de teorias de Matrizes Aleatórias é o de Bohigas e Giannoni [10].

O “ensemble” adequado aos cálculos desenvolvidos aqui é o “ensemble” circular ortogonal (COE) de Dyson [14], que trata do conjunto das matrizes unitárias invariante por transformações ortogonais.

O COE prevê que o espaçamento entre níveis adjacentes siga a famosa conjectura de Wigner:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{s^2\pi}{4}}$$

portanto a distribuição cumulativa (uma quantidade muito mais facilmente computada) resulta:

$$IP(s) = \int_0^s P(s') ds' = 1 - e^{-\frac{s^2\pi}{4}}$$

Para $s \ll 1$ a quantidade acima é aproximadamente $s^2\pi/4$, que é um comportamento típico de sistemas com simetria de inversão temporal.

Definimos a variância numérica $V(L)$ como a variância de $n(x, L)$. Este último é o número de níveis entre $x - L/2$ e $x + L/2$, onde estamos supondo que o espaçamento médio é 1. Assim

$$V(L) = \int_0^N (n(x, L) - L)^2 dx$$

A previsão para $L \ll 1$ é simplesmente L para qualquer sistema, o que reflete o caráter de longo alcance desta estatística. Para $L > 1$ a previsão é [15].

$$V(L) \approx \frac{2}{\pi^2} \ln(L) + 0.44 \quad (9)$$

Na referência [10] se apresenta a expressão exata da média sobre COE de $V(L)$ para todo L , que é,

$$V(L) = \frac{2}{\pi^2} \left[\log(2\pi L) + \gamma + 1 + \frac{1}{2}(\text{Si}(\pi L))^2 - \frac{\pi}{2}\text{Si}(\pi L) - \cos(2\pi L) - \text{Ci}(2\pi L) + \pi^2 L \left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Si}(2\pi L)\right) \right]$$

onde γ é a constante de Euler e Si e Ci são o seno e cosseno integrais.

A rigidez do espectro pode ser medida através do seu afastamento com relação à reta que melhor ajusta a distribuição cumulativa de autovalores $N(x)$. Definimos então a quantidade

$$\Delta(x, L) = \frac{1}{L} \min_{AB} \int_x^{x+L} [N(x') - Ax - B]^2 dx'$$

Como o espaçamento médio é 1, a reta deve ser próxima de $N(x) = x$. Na prática Δ flutua muito com x , então tomamos uma média sobre vários segmentos de largura L .

$$\Delta(L) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta(x_i, L) \quad (10)$$

Esta também é uma estatística de longo alcance e para $L \ll 1$ o resultado é independente do sistema e vale $L/15$. Quando $L > 15$ a teoria prevê

$$\Delta(L) \approx \frac{1}{N} \ln(L) - 0.007$$

Como estamos interessados também no intervalo $1 < L < 15$ necessitamos obter a previsão de COE neste intervalo. A relação entre a variância numérica e a rigidez para as suas médias em COE é

$$\Delta(L) = \frac{2}{L^4} \int_0^L (L^3 - 2L^2x + x^3)V(x)dx$$

Assim integrando-se numericamente essa equação para a expressão exata de $V(L)$ obtemos o valor da rigidez no intervalo desejado.

Para evitar a aproximação numérica das integrais envolvidas no cálculo destas quantidades é possível expressá-las em termos de somas sobre os níveis de energia, supondo-os ordenados. Assim, para $V(L)$, como está demonstrado no apêndice B,

$$V(L) = L - L^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N [(x_i - x_j + L)\theta(x_i - x_j + L) + (x_j - x_i - N + L)\theta(x_j - x_i - N + L)]$$

e para $\Delta(x, L)$ [32], tomando os n níveis do intervalo $[x, x + L]$ na forma $\hat{x}_i = x_i - (x + L/2)$,

$$\Delta(x, L) = \frac{n^2}{16} - \frac{1}{L^2} \left[\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \right]^2 + \frac{3n}{2L^2} \left[\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2 \right] - \frac{3}{L^4} \left[\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2 \right]^2 + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \hat{x}_i$$

Para que estas previsões e cálculos sejam comparados é necessário que o sistema tenha seus níveis separados em classes de simetria. Caso se misture níveis de simetrias distintas as previsões não serão válidas, assim a determinação das simetrias do sistema estudado é fundamental para a análise.

-Espaçamento

Devido ao tamanho das matrizes e longo tempo de execução para a diagonalização dos propagadores foi utilizado um IBM 3090 e o pacote ESSL de rotinas matemáticas.

Para que se possa ter um termo de comparação efetuei os cálculos destas estatísticas também para o mapa do Gato (6). A densidade cumulativa do espaçamento (fig 1), como não podia deixar de ser, é bastante afastada do comportamento típico. No caso mostrado (a melhor situação, pois para a maioria das dimensões N a degenerescência é dominante e neste caso não), fica claro o efeito da periodicidade do propagador. Note-se que a regularidade

dos espaçamentos é tão grande que não se torna necessária a separação da simetria por inversão $(p, q) \rightarrow (-p, -q)$.

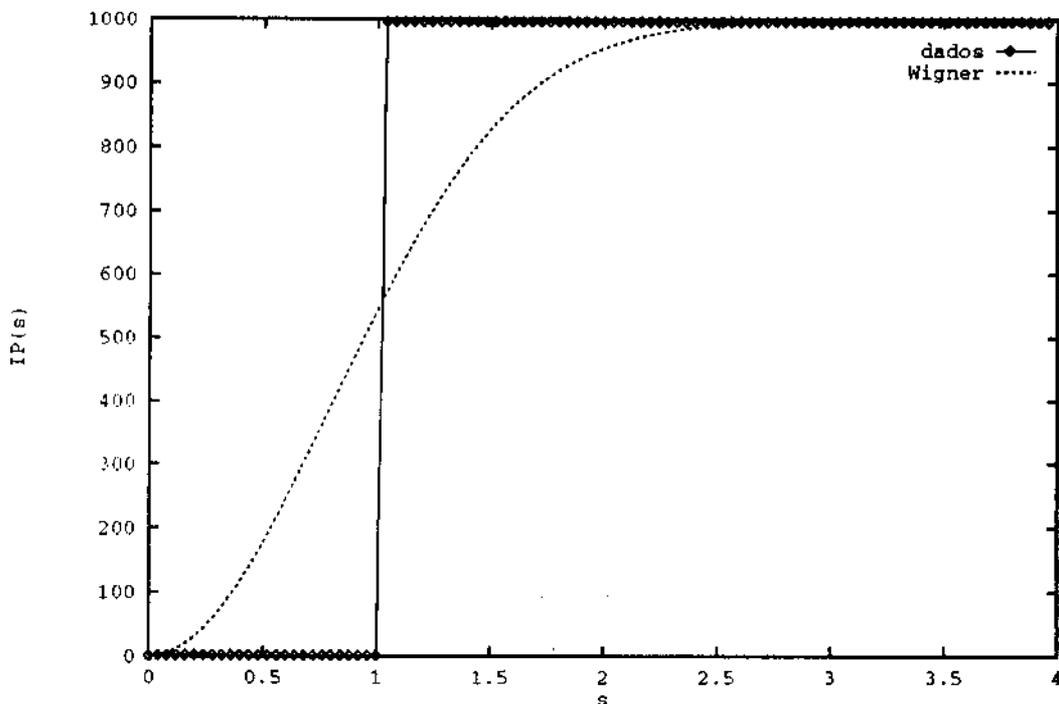


Figura 1- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa do Gato com $N = 997$.

O mapa de Anossov (7) não possui nenhuma simetria além da inversão temporal, a existente no mapa do Gato é quebrada pela forma da perturbação. Para este sistema vemos uma concordância perfeita com a previsão de Wigner (fig 2,3 e 4), e além disso essa concordância melhora tanto com o aumento do parâmetro de perturbação k (de fig. 2 a 3) como com a diminuição de $h = 1/N$ (de fig. 2 a 4). Note-se em especial o comportamento quadrático para $s < 1$.

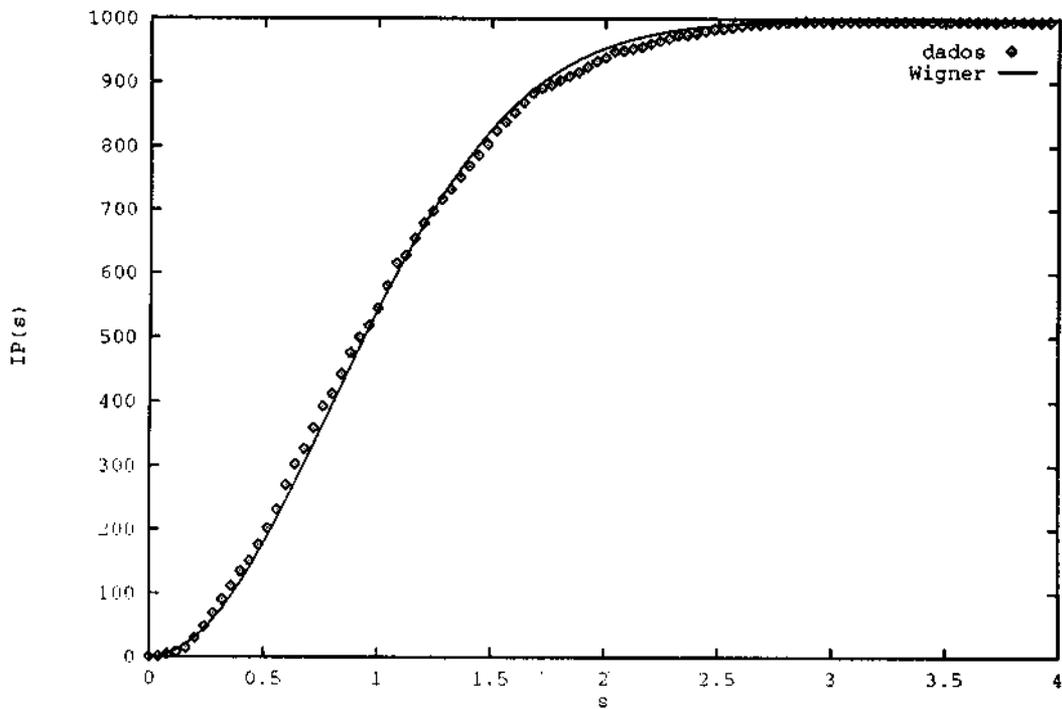


Figura 2- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa de Anosov com $N = 997$ e $k = 0.01$.

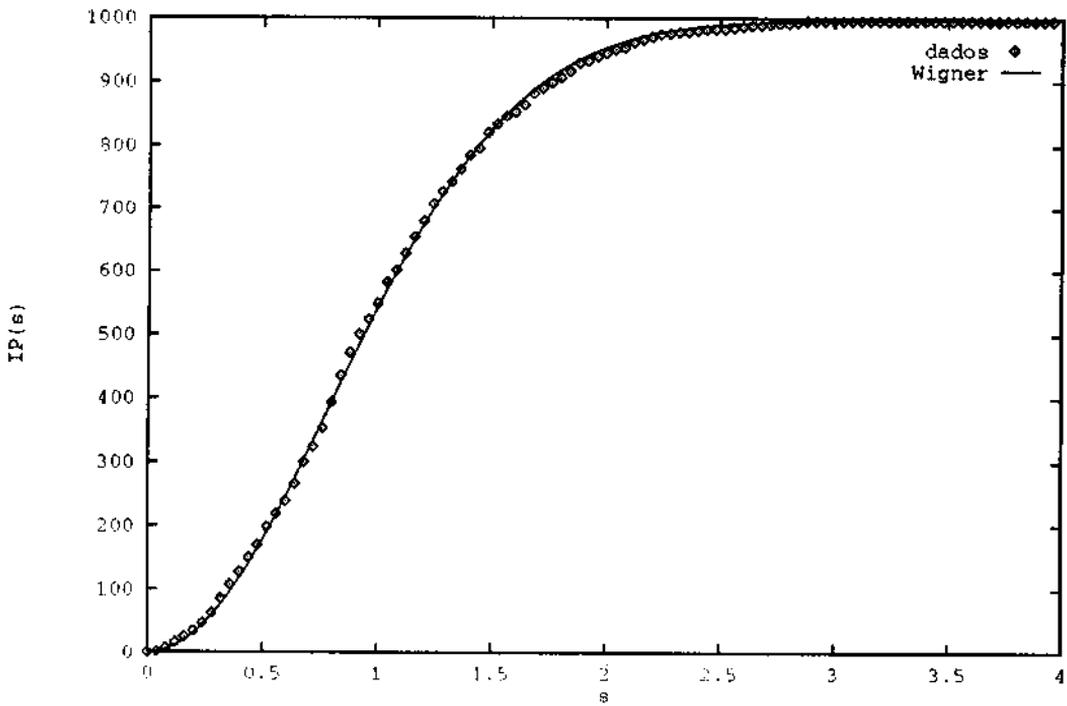


Figura 3- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa de Anosov com $N = 997$ e $k = 0.1$.

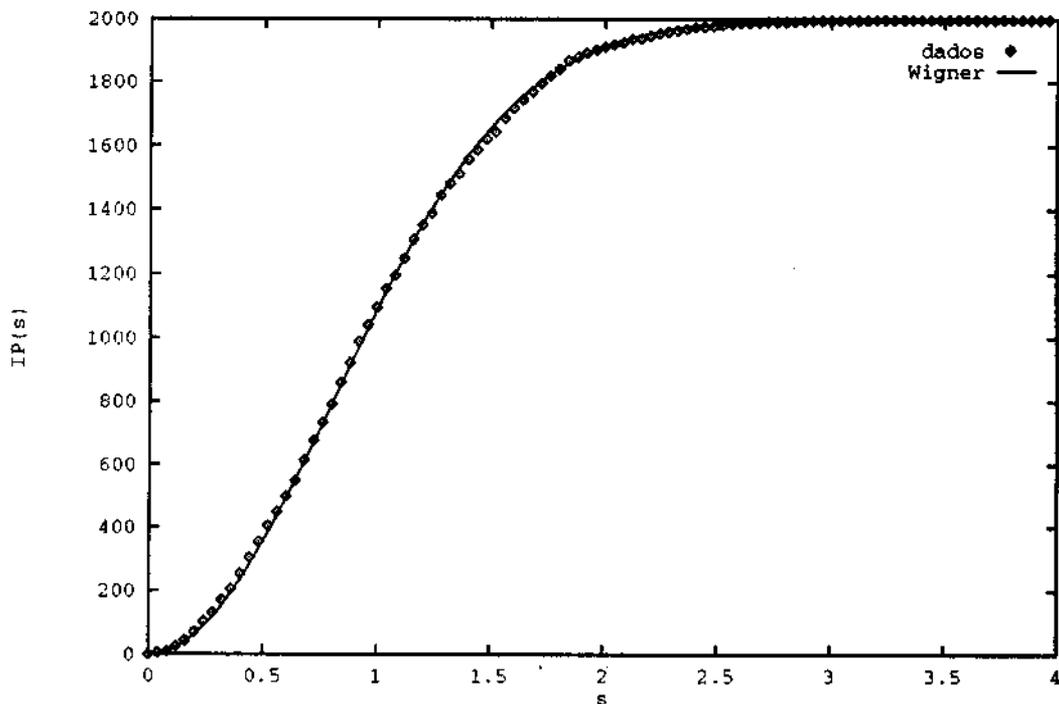


Figura 4- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa de Anosov com $N = 1999$ e $k = 0.01$.

A título de ilustração mostro na figura 5 o caso em que o parâmetro de perturbação k está bem longe da região de validade do teorema de Anosov e o mapa (7) possui uma região integrável (o sistema está próximo de uma bifurcação que cria um par de pontos fixos, sendo um deles estável). O interessante é que não há o aparecimento de degenerescências, indicando que o caráter hiperbólico é dominante, com regiões integráveis pequenas, e não dependente da proximidade do mapa do Gato.

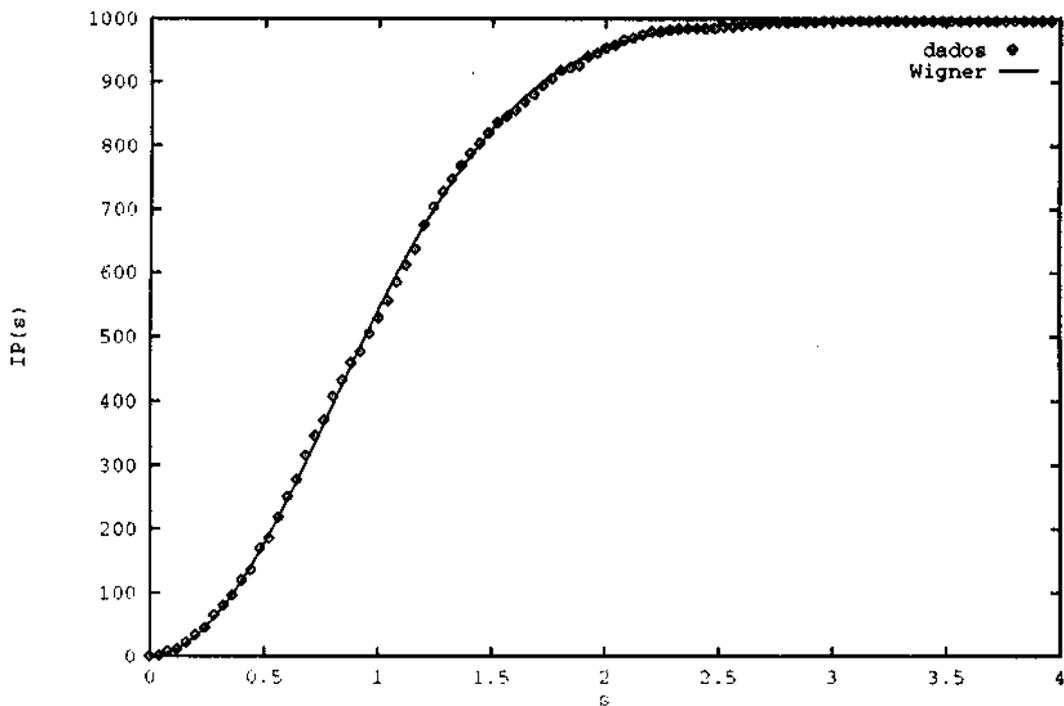


Figura 5- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa de Anossov com $N = 997$ e $k = 5$.

O mapa quasi-Anossov (8) não quebra a simetria do mapa do Gato então se torna necessário, antes da análise dos resultados, a separação dos níveis simétricos e anti-simétricos. Feito esse passo, se verifica mais uma vez que a concordância com a previsão é grande (figuras 6 a 9) e melhora com o aumento de k ou de N . É interessante notar que os dois conjuntos de níveis (simétricos na figura 6 e anti-simétricos na figura 7) têm o mesmo comportamento e essa separação faz com que o limite semiclássico seja atingido mais lentamente que para o mapa de Anossov. No entanto esta lentidão maior para alcançar o limite semiclássico não está associada à inexistência de homeomorfismo ligando os mapas quasi-Anossov aos mapas do Gato, mas unicamente à existência de simetrias adicionais. A mesma lentidão ocorreria se o mapa de Anossov escolhido preservasse a simetria de inversão.

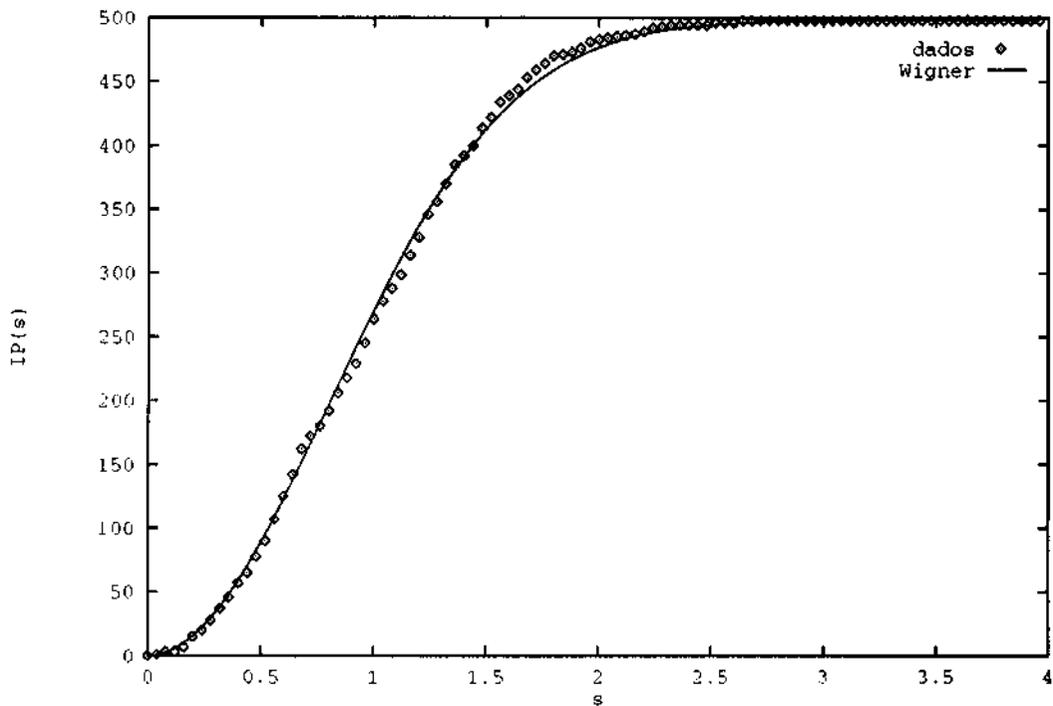


Figura 6- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.01$, parte simétrica.

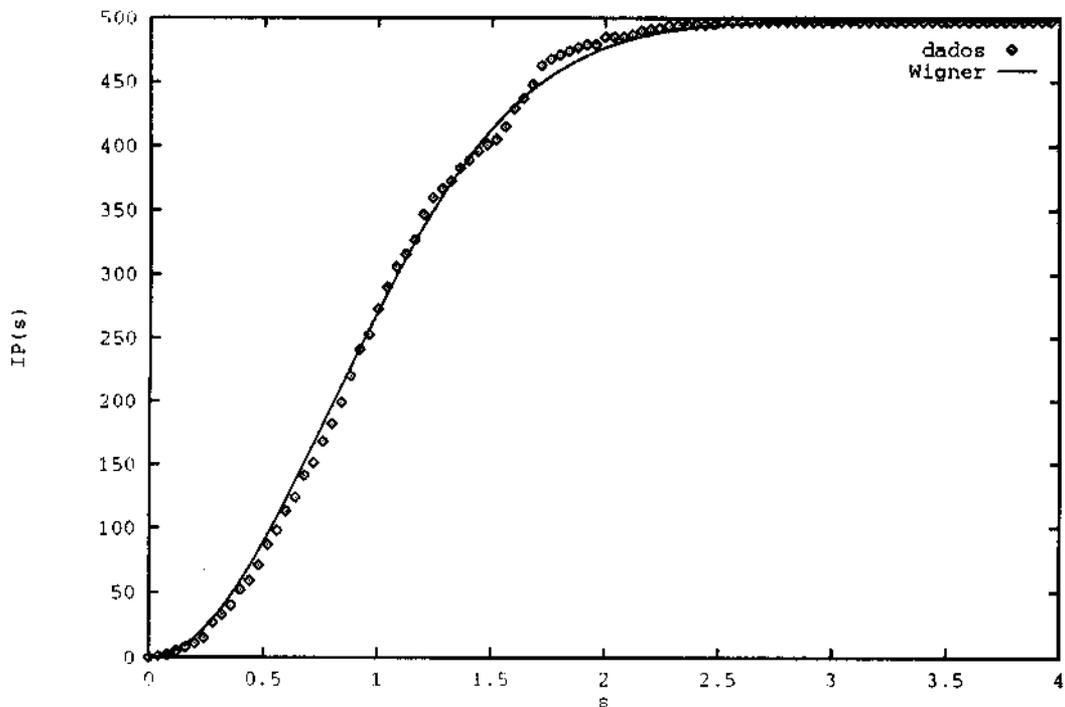


Figura 7- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.01$, parte anti-simétrica.

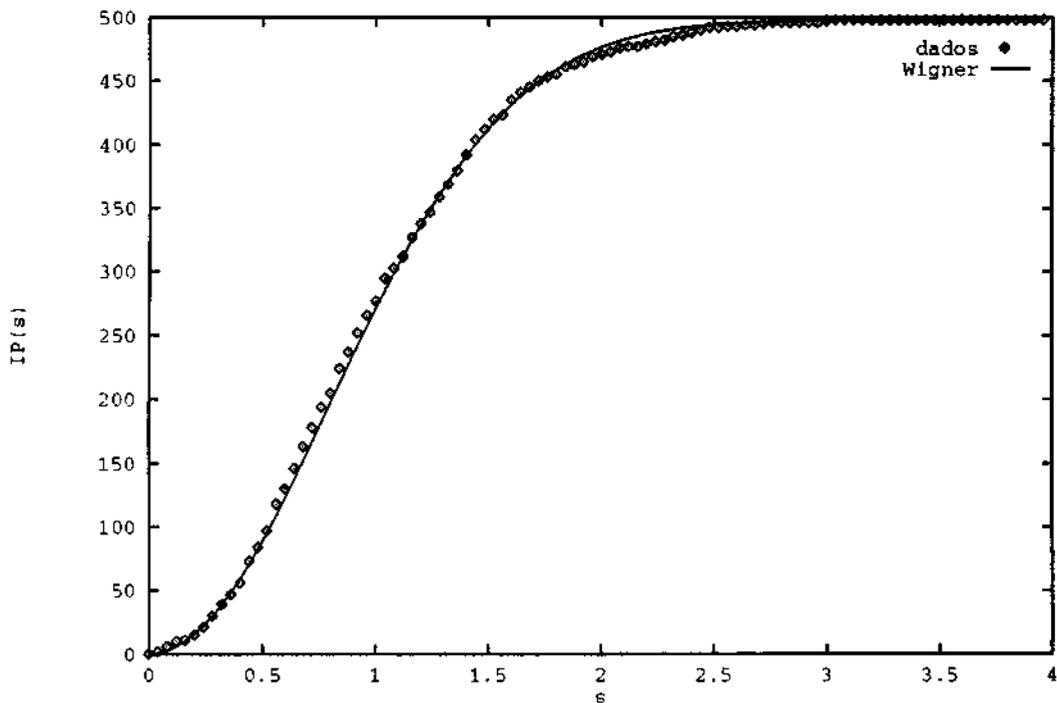


Figura 8- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.1$, parte simétrica.

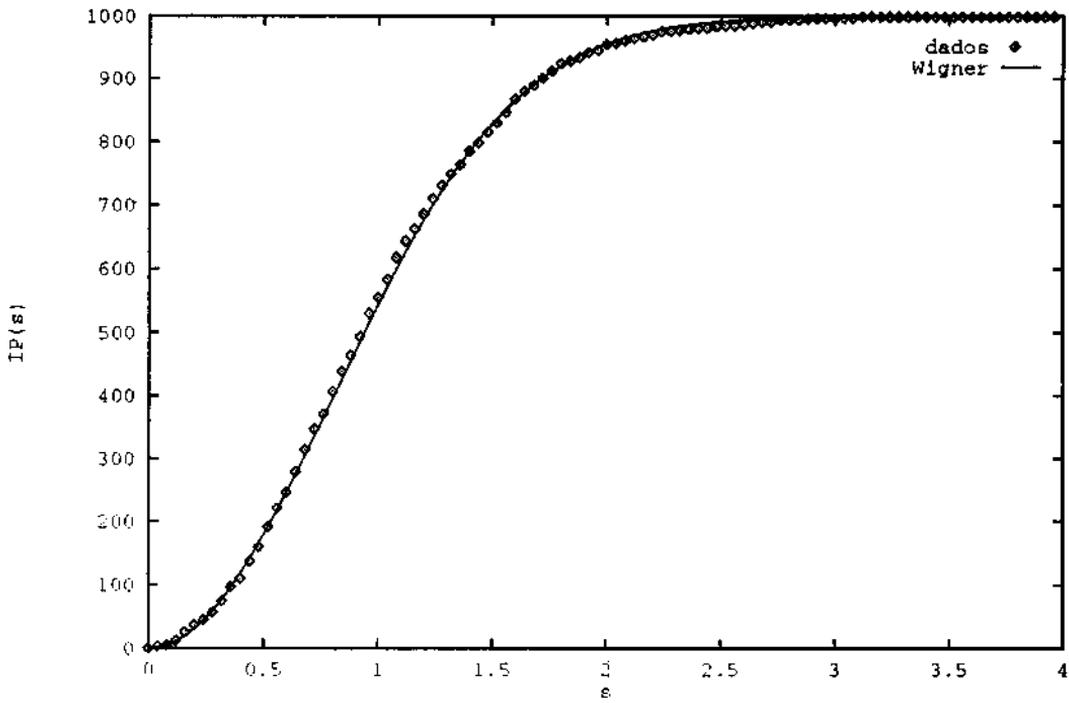


Figura 9- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa quasi-Anossov com $N = 1999$ e $k = 0.01$, parte simétrica.

Na figura 10 mostro um caso em que o mapa (8) possui uma região integrável e se verifica que a sua influência no espectro novamente é muito pequena.

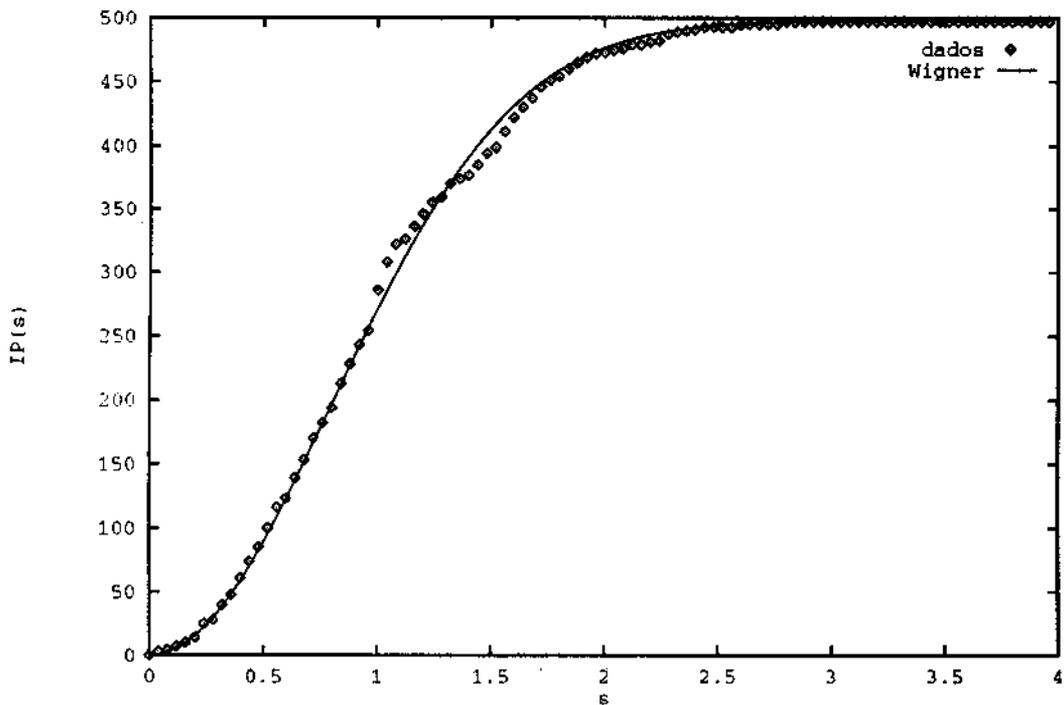


Figura 10- Distribuição cumulativa dos espaçamentos para o mapa quasi-Anosov com $N = 997$ e $k = 9$, parte simétrica.

Note-se que em ambos os sistemas o aumento da perturbação ou de N não apenas melhora a concordância para a região de s pequeno, mas também melhora o ajuste em toda a região de variação de s .

-Variância

No cálculo da variância numérica para o mapa do Gato este se mostra mais uma vez bastante atípico (figura 11). Sua variância não segue nenhum padrão de universalidade. Keating [22] demonstra que existe um comportamento genérico “especial” para mapas do Gato. No entanto esta “previsão” é apenas para mapas lineares no toro e não se inclui nos esquemas usuais de classificação.

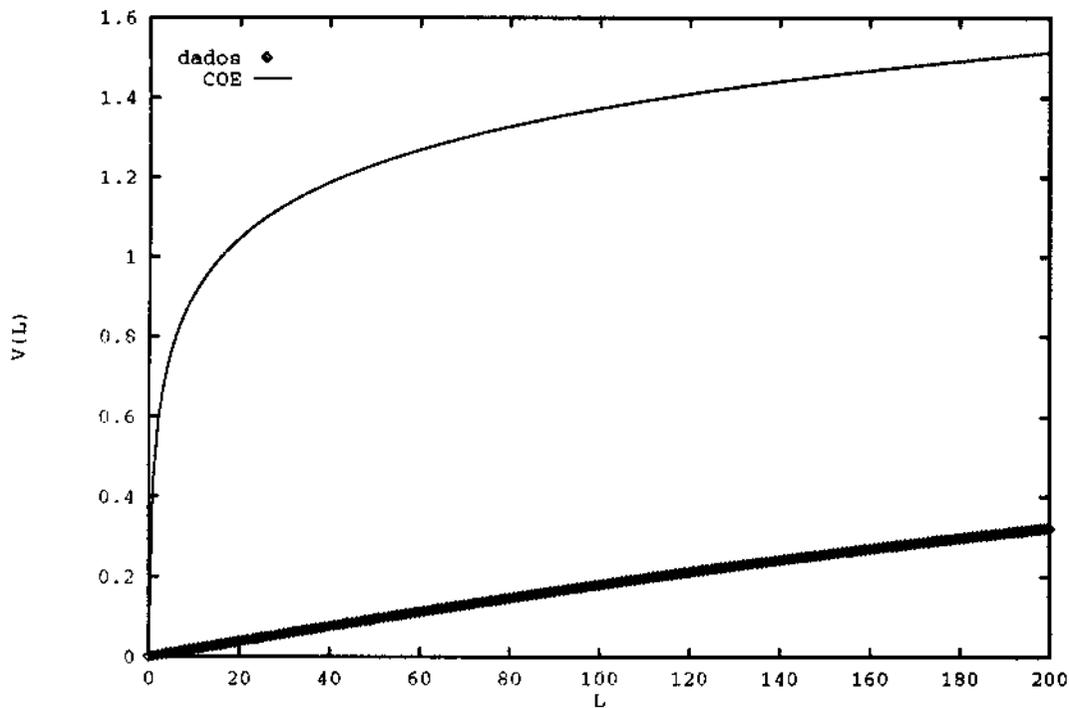


Figura 11- Variância numérica para o mapa do Gato com $N = 997$.

Para o mapa de Anosov a variância exibe todas as características esperadas de um sistema quântico cujo análogo clássico é caótico. Quando L é da ordem da unidade a concordância entre a previsão (9) e o cálculo exato é muito boa e a partir de um certo valor começam as oscilações não genéricas devidas às órbitas periódicas (figuras 12 a 14). Note que com o aumento de N (limite semiclássico) a região de concordância também aumenta.

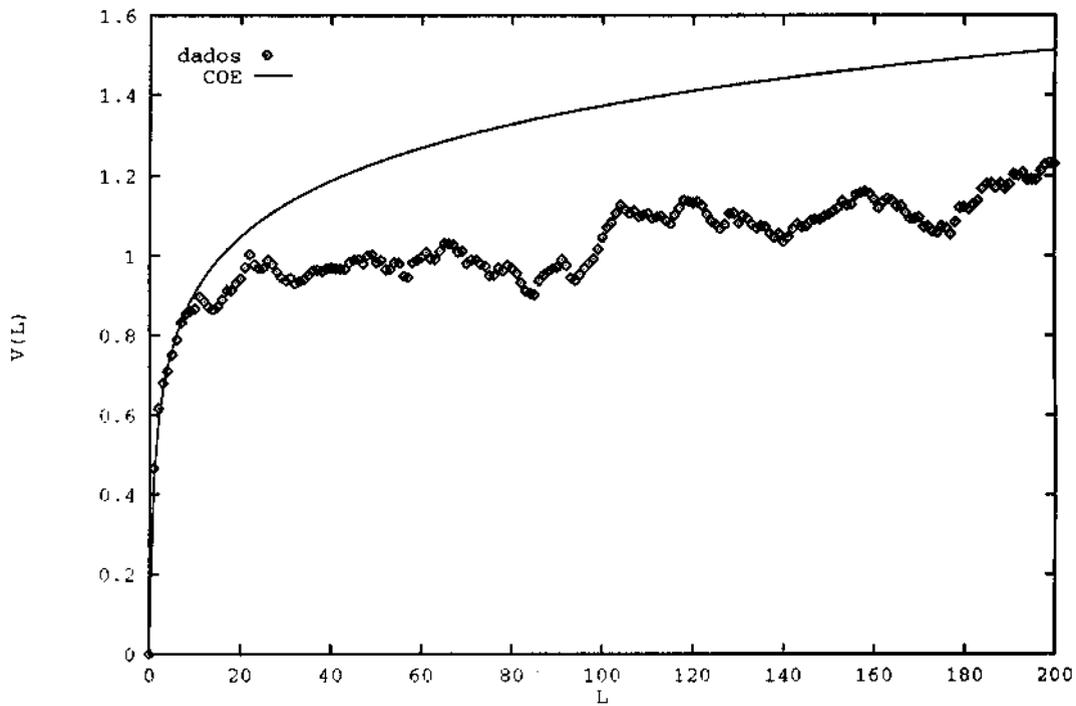


Figura 12- Variância numérica para o mapa do Anossov com $N = 997$ e $k = 0.01$.

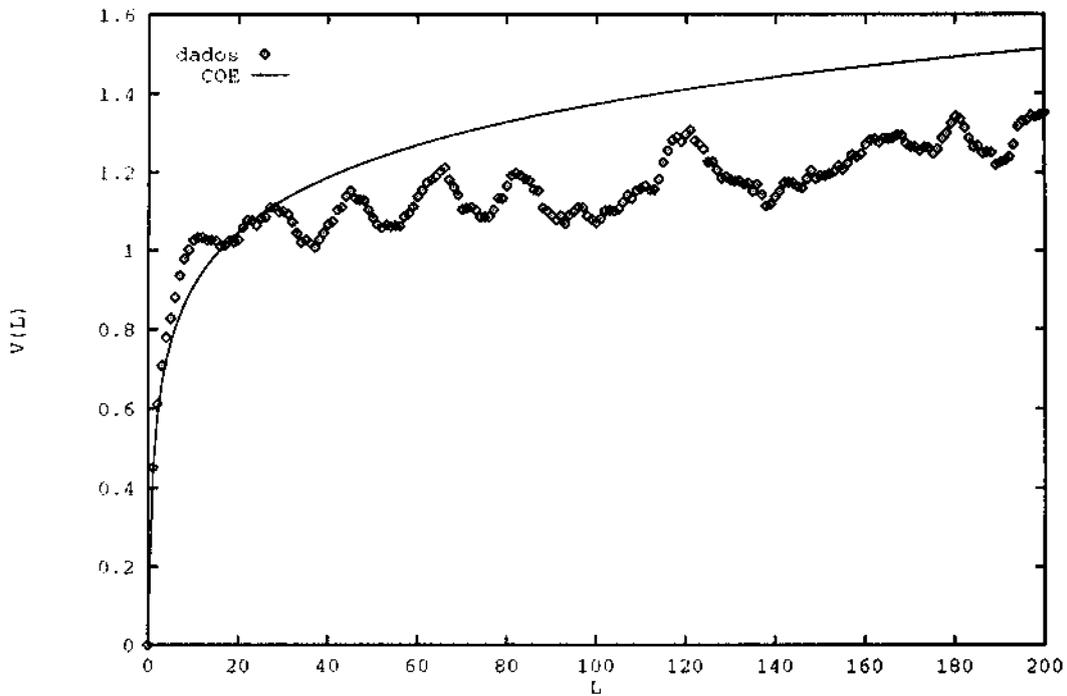


Figura 13- Variância numérica para o mapa do Anossov com $N = 997$ e $k = 0.1$.

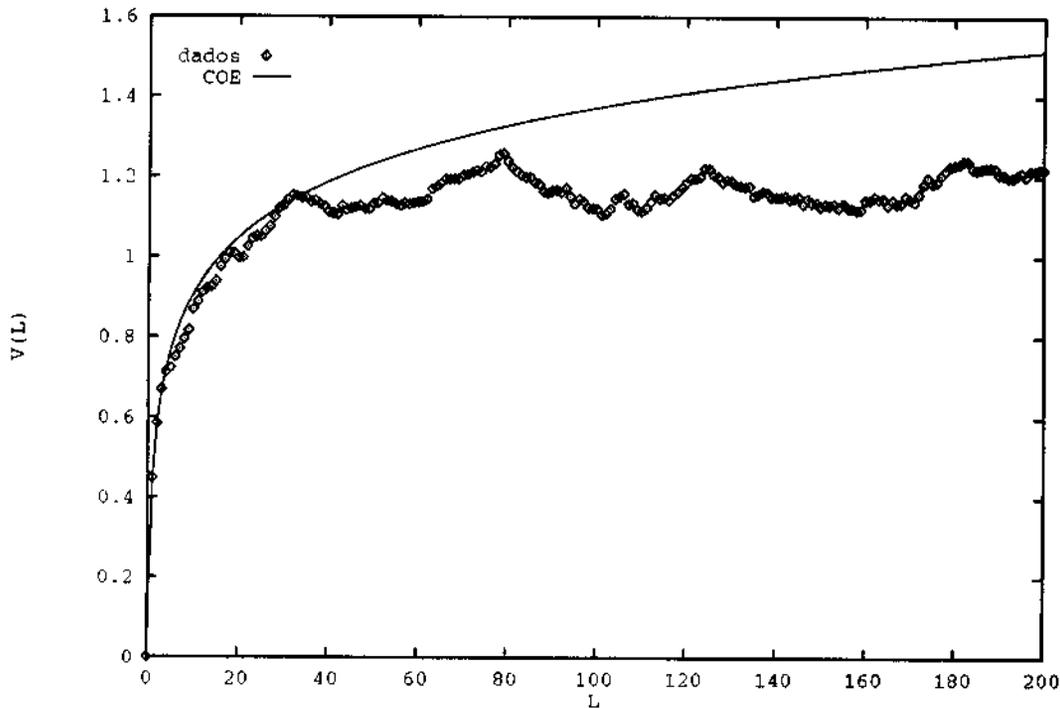


Figura 14- Variância numérica para o mapa do Anossov com $N = 1999$ e $k = 0.01$.

A variância para o caso semi-integrável (figura 15) também sofre pouca influência da região integrável como o espaçamento. O afastamento da previsão de COE só ocorre na região onde o sistema sofre a influência das órbitas periódicas.

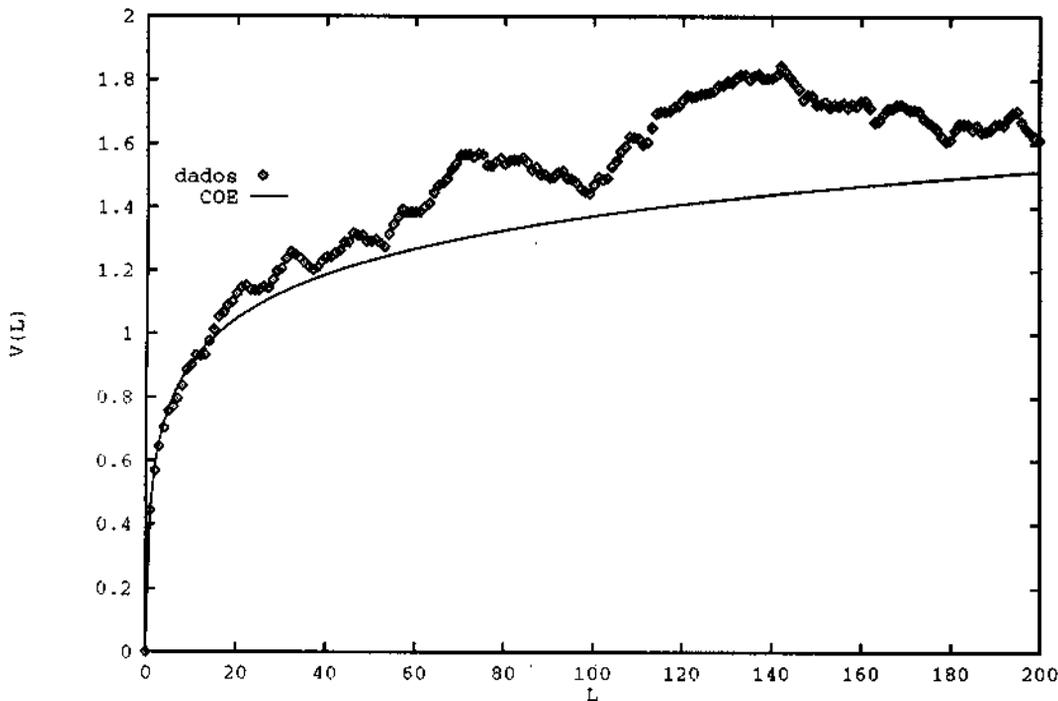


Figura 15- Variância numérica para o mapa do Anossov com $N = 997$ e $k = 5$.

O mapa quasi-Anossov tem essencialmente o mesmo comportamento que os mapas de Anossov. Neste caso a separação das simetrias é necessária, fazendo com que o “limite semiclássico” seja atingido para valores maiores de N . O que ocorre em relação a Anossov é que a separação das simetrias divide pela metade os níveis utilizados no cálculo da estatística, tornando necessário ir a valores maiores de $N = 1/h$. É claro que o valor de h é o mesmo nos dois sistemas para um mesmo N entretanto do ponto de vista das estatísticas o limite semiclássico é mais próximo para Anossov.

Nas figuras 16 e 17 vemos que para valores relativamente grandes de N ou k a estatística é essencialmente a esperada de um sistema cujo análogo clássico é caótico, com uma região em que a previsão de COE é confirmada seguida por uma região de oscilações dependentes do sistema (não universais).

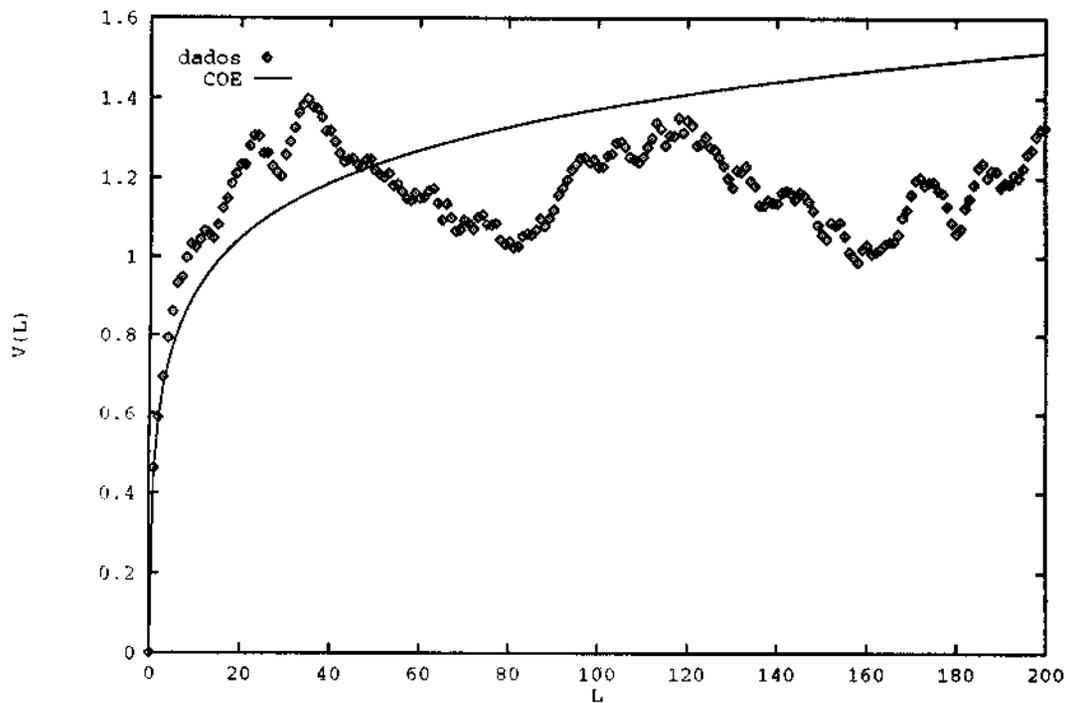


Figura 16- Variância numérica para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.1$.

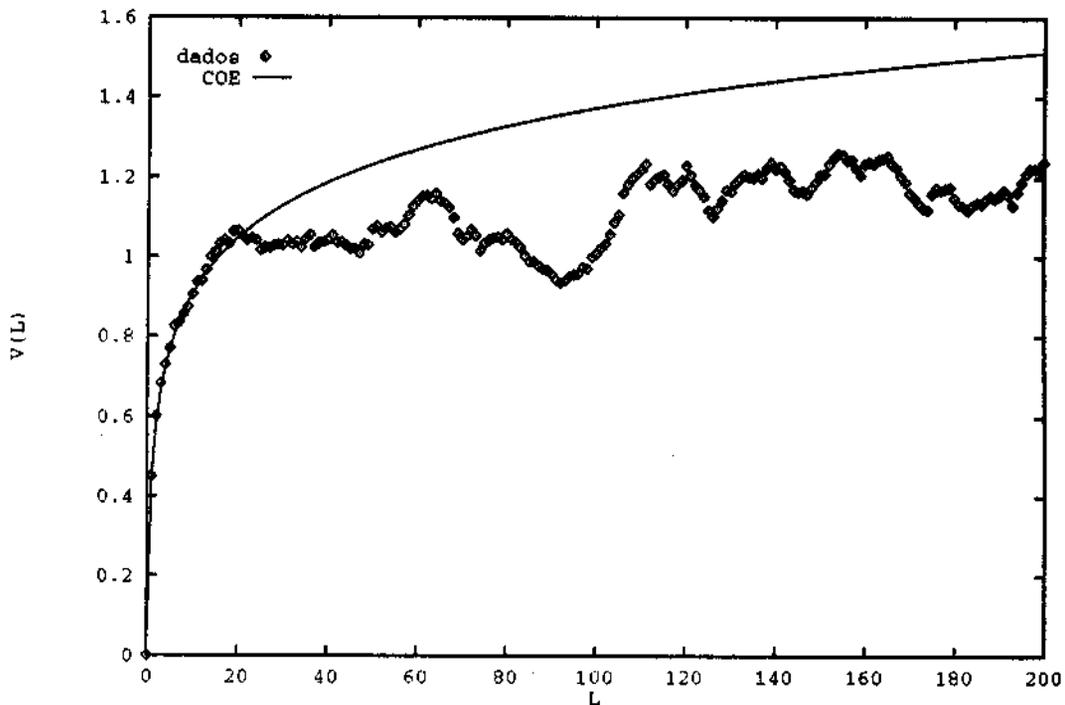


Figura 17- Variância numérica para o mapa quasi-Anossov com $N = 1999$ e $k = 0.01$.

Quando tomamos um valor bastante grande de k para que o sistema tenha uma região integrável (que devido às razões expostas no capítulo anterior é muito pequena) vemos na figura 18 que como no caso do espaçamento a influência da região integrável é pequena.

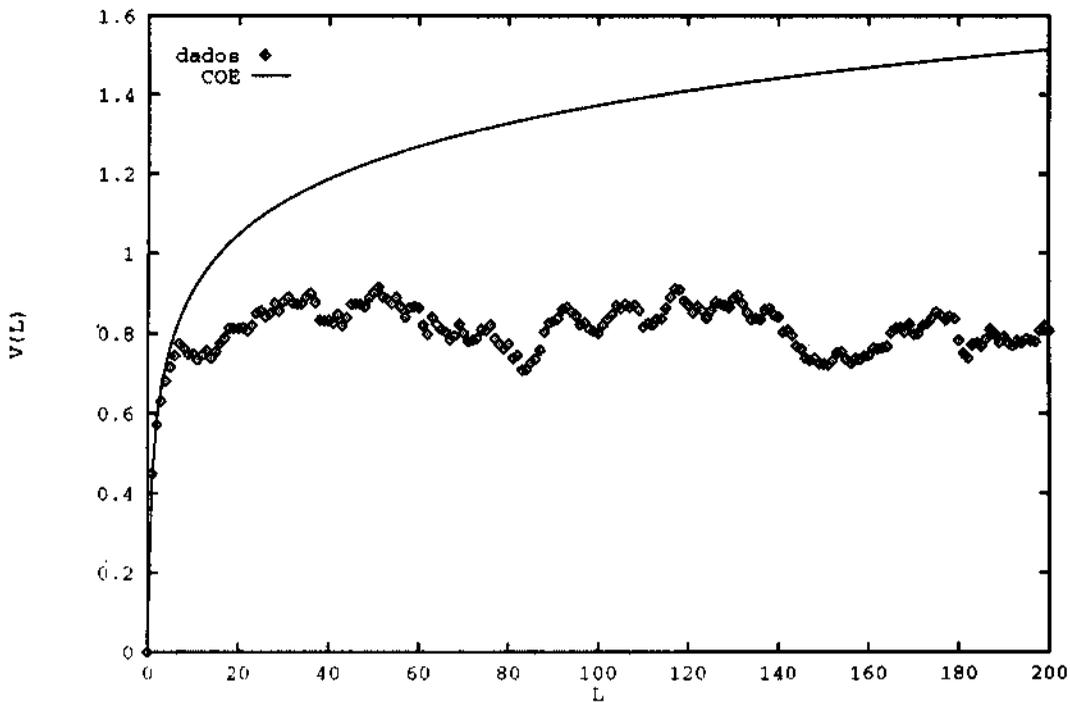


Figura 18- Variância numérica para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 9$.

No caso de tomarmos um valor pequeno de k e N não muito grande vemos que ao contrário do que acontece com o espaçamento a variância ainda é próxima daquela associada ao mapa do Gato (figura 19). Esse efeito pode ser explicado pela extrema sensibilidade das degenerescências a perturbações, enquanto que pequenas perturbações não chegam a alterar significativamente a estrutura do espectro em escalas maiores que níveis adjacentes. Como estamos longe do limite semiclássico o efeito quântico (mapa do Gato) é forte. Note que para esse mesmo valor de k quando temos um N maior a concordância é muito melhor (figura 17).

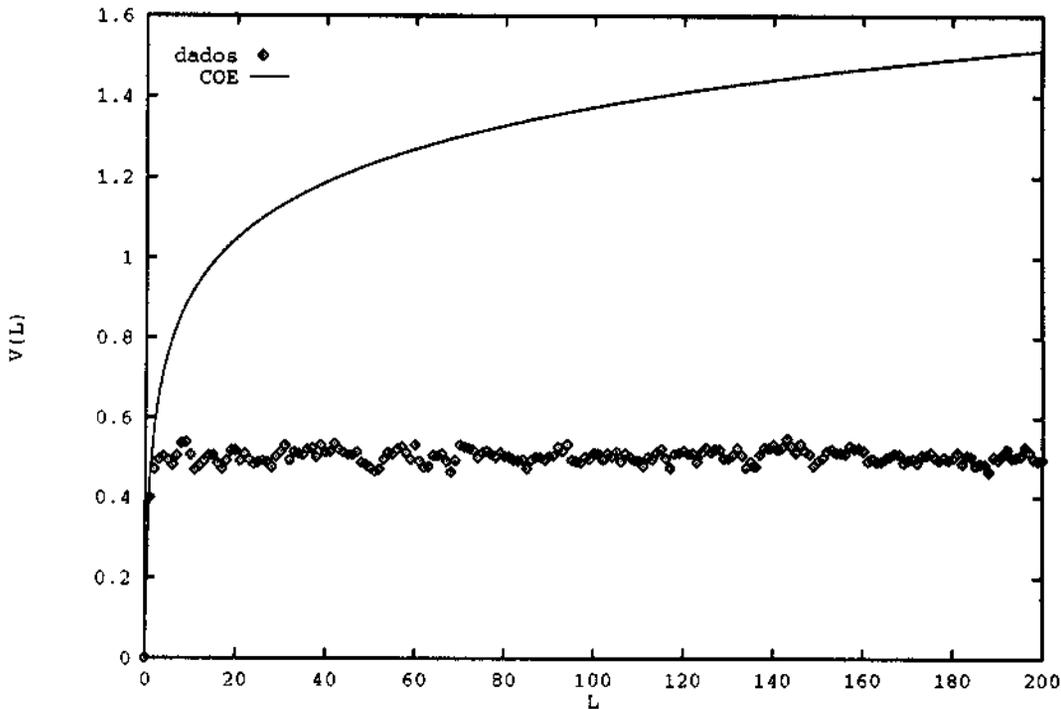


Figura 19- Variância numérica para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.01$.

-Rigidez

Como a rigidez calculada em determinado ponto do espectro é diferente da calculada em outro ponto este tipo de valor não é uma característica do sistema e sim do particular ponto do espectro. O que é característico de um sistema é a média destes valores tomados em diversos pontos. Portanto o que apresento aqui, e chamo de rigidez, é a média (10).

Também para a rigidez, o comportamento do análogo quântico do mapa do Gato é completamente não genérico, exceto para $L \ll 1$ mas nesta região é inevitável a concordância para qualquer sistema. Na figura 20 mostro a rigidez para o mapa do Gato.

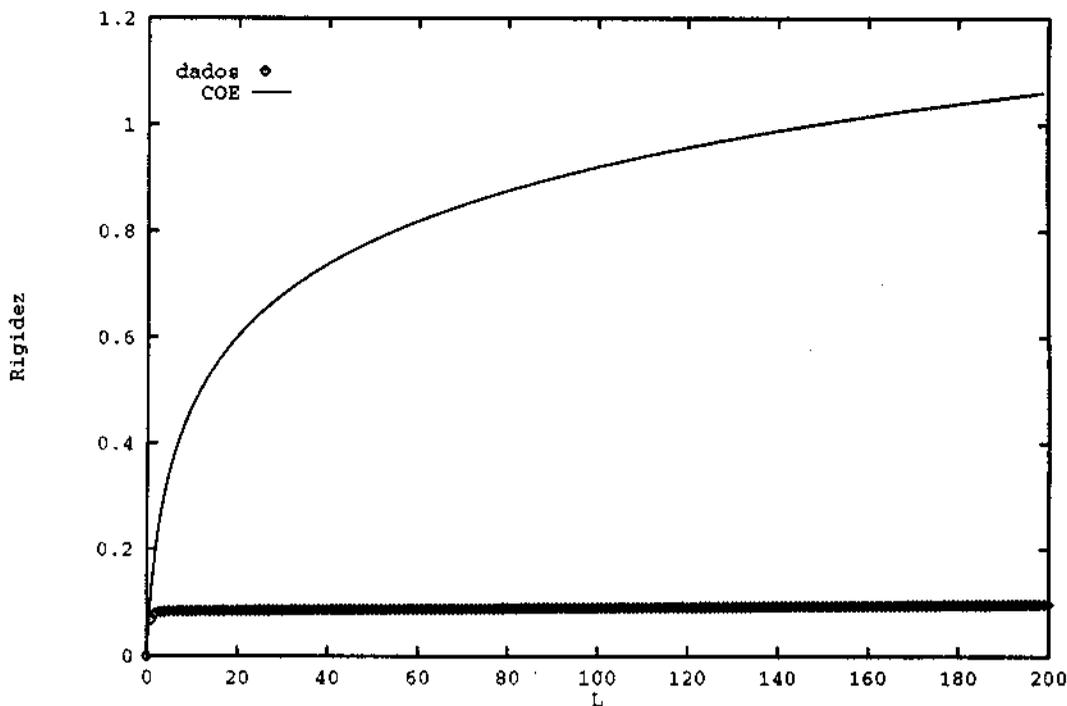


Figura 20- Rigidez do espectro para o mapa do Gato com $N = 997$.

Mapas de Anosov mais uma vez demonstram ter uma concordância bastante boa com as previsões para sistemas caóticos (figuras 21 a 23). Como todo sistema segue a previsão para $L \ll 1$, mas também acompanha, dentro da margem de erro, a previsão da teoria de Matrizes Aleatórias. E também, ao se afastar da região de validade da aproximação $L > 15$, parece saturar em torno de algum valor dependente do sistema. Além disso a região de concordância aumenta quando nos aproximamos do limite semiclássico ($N \rightarrow \infty$).

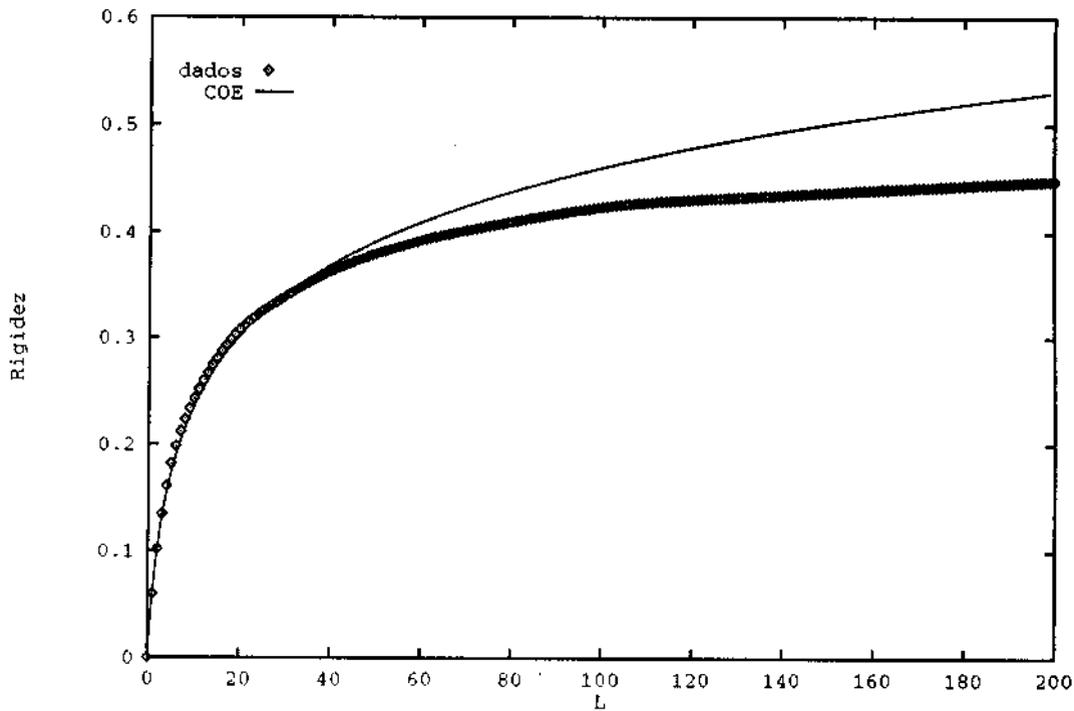


Figura 21- Rigidez do espectro para o mapa de Anossov com $N = 997$ e $k = 0.01$.

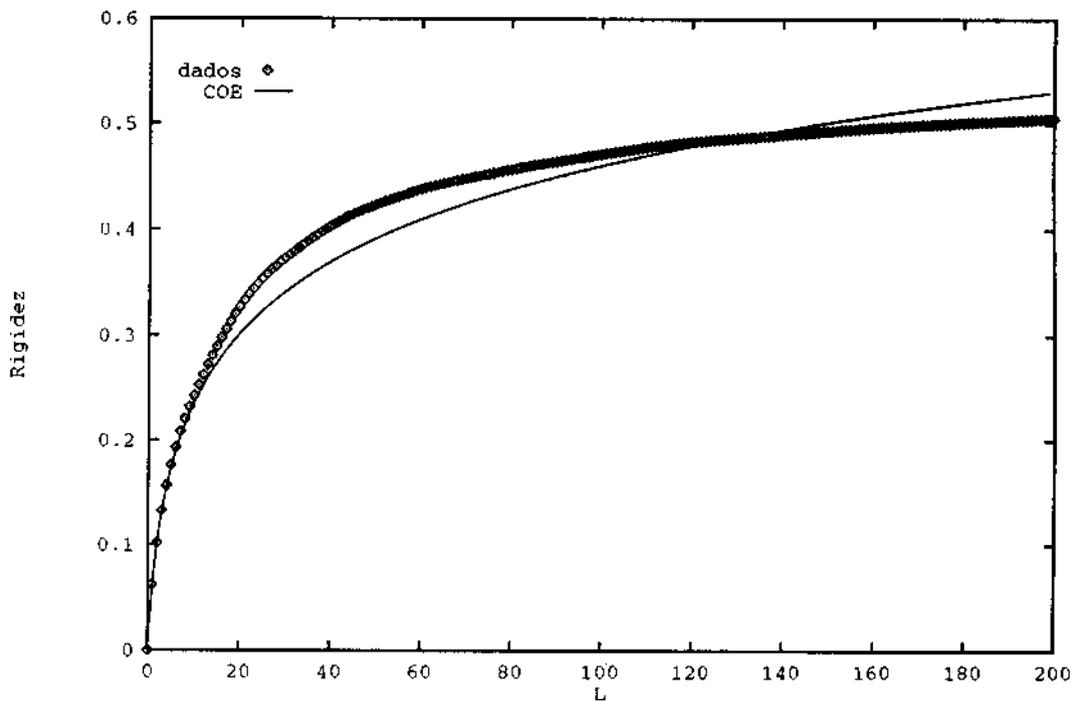


Figura 22- Rigidez do espectro para o mapa de Anosov com $N = 997$ e $k = 0.1$.

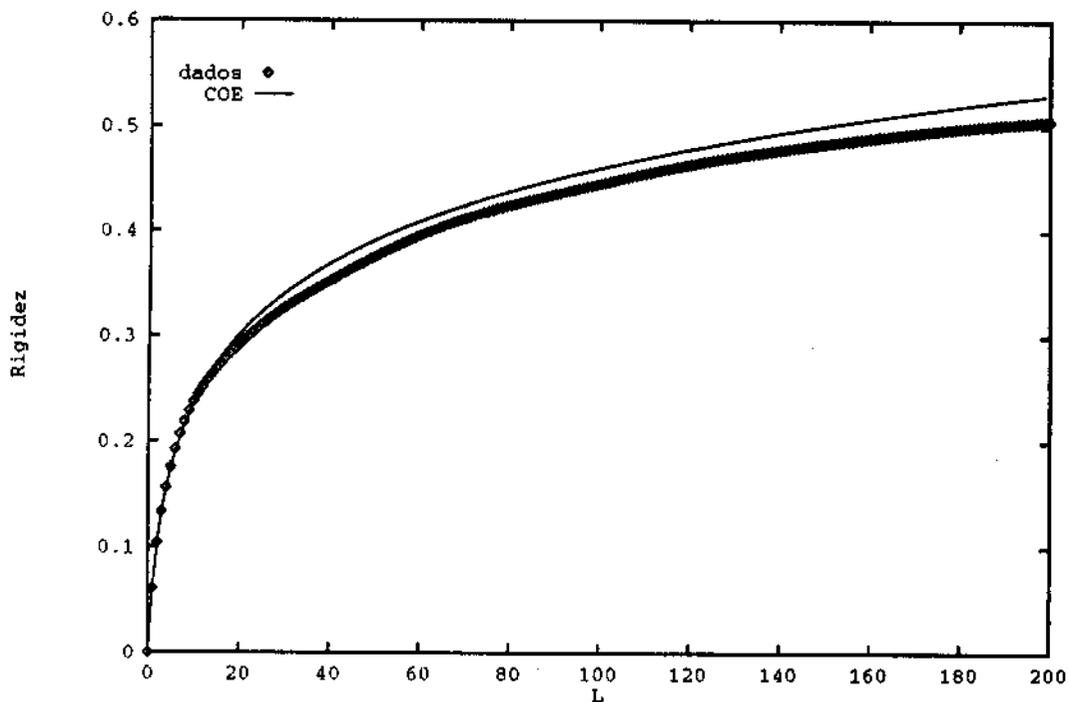


Figura 23- Rigidez do espectro para o mapa de Anosov com $N = 1999$ e $k = 0.01$.

Novamente podemos ver o caráter fortemente hiperbólico destes sistemas se tomarmos um valor alto para k (figura 24). Pode-se verificar claramente que a concordância com a previsão de COE é muito boa.

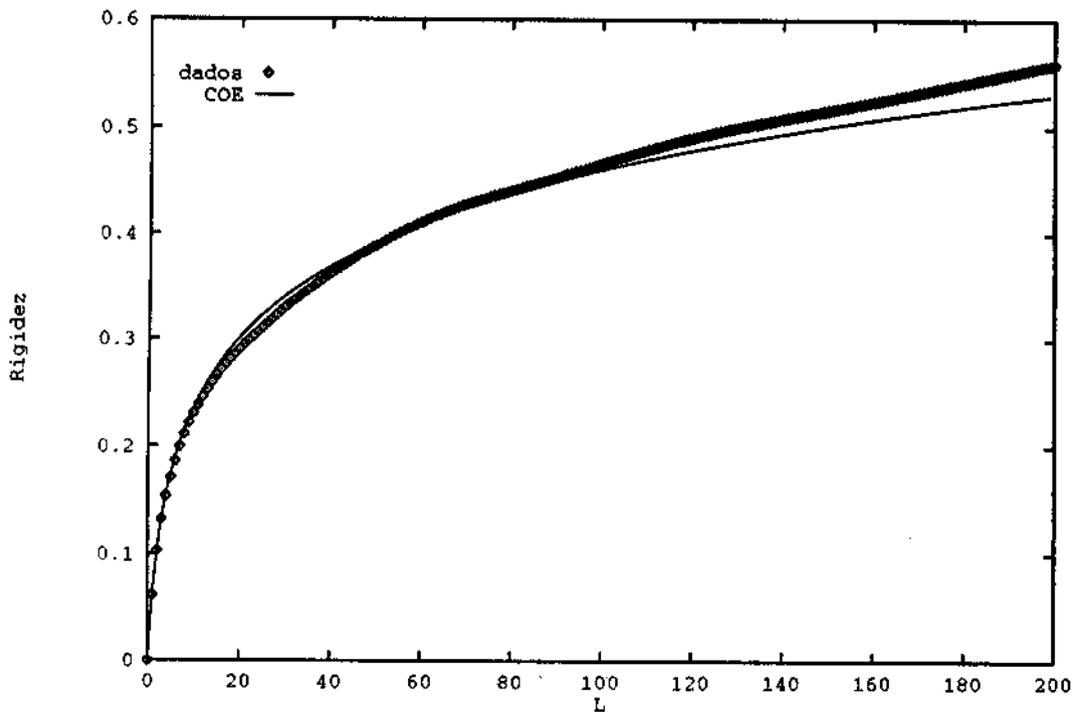


Figura 24- Rigidez do espectro para o mapa de Anossov com $N = 997$ e $k = 5$.

Os mapas quasi-Anossov também apresentam um comportamento razoavelmente típico comparado com os mapas do Gato para valores grandes de N e k (figuras 25 e 26). Como no caso da variância se fez a separação das simetrias e novamente ocorre a mesma "dificuldade" de se atingir o limite semiclassical.

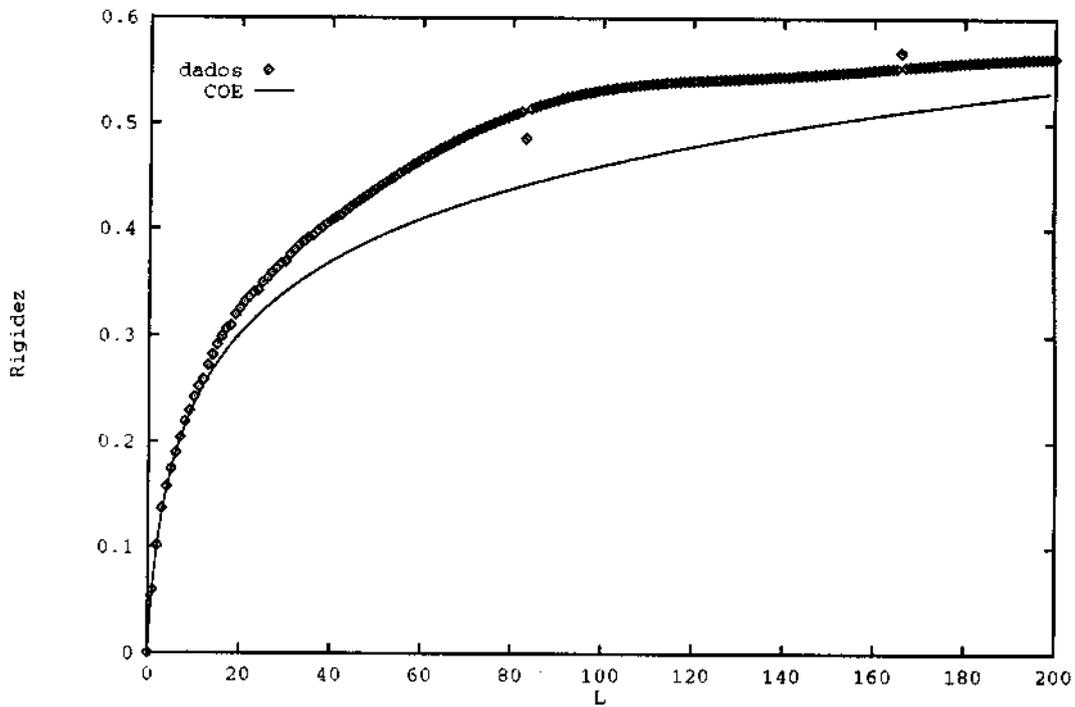


Figura 25- Rigidez do espectro para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.1$.

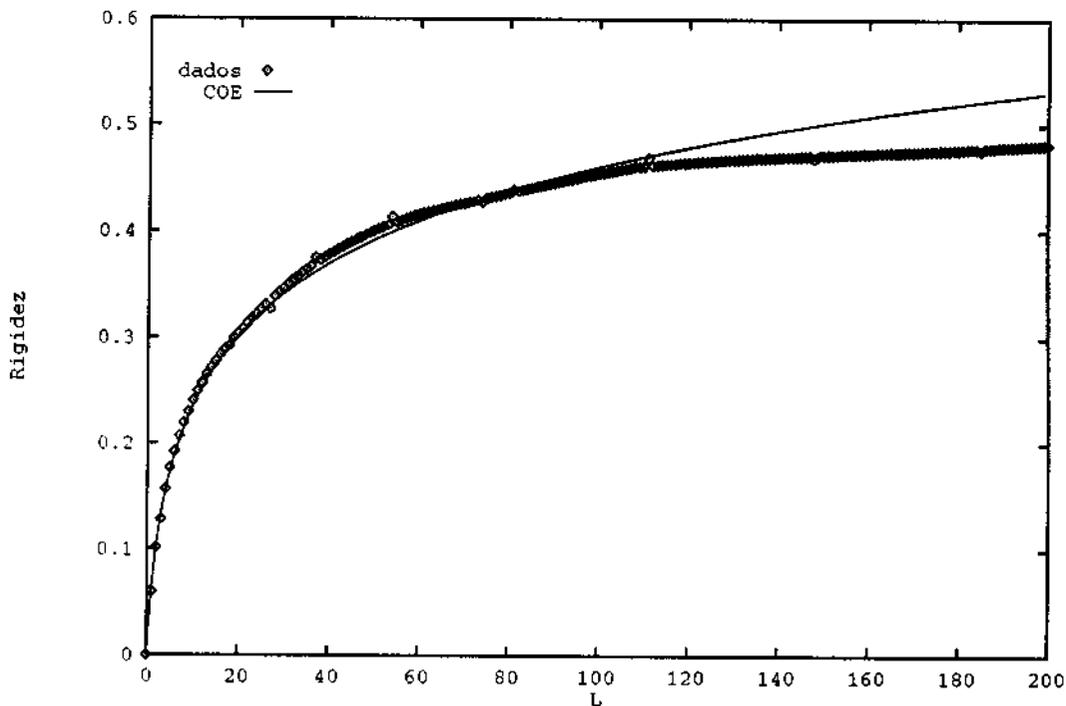


Figura 26- Rigidez do espectro para o mapa quasi-Anossov com $N = 1999$ e $k = 0.01$.

Podemos ver na figura 27 que a existência de uma região integrável não afeta a rigidez.

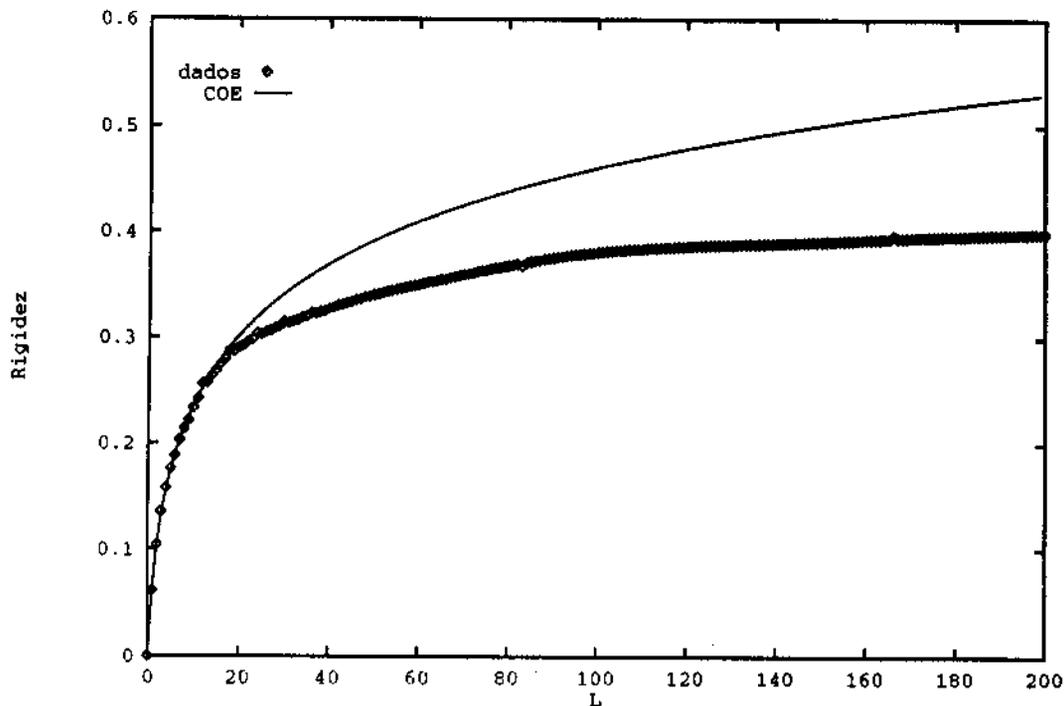


Figura 27- Rigidez do espectro para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 9$.

Também a rigidez, como se observa na figura 28, sofre a mesma influência do comportamento quântico (Gato) quando o parâmetro de perturbação é pequeno e estamos longe do limite semiclassico.

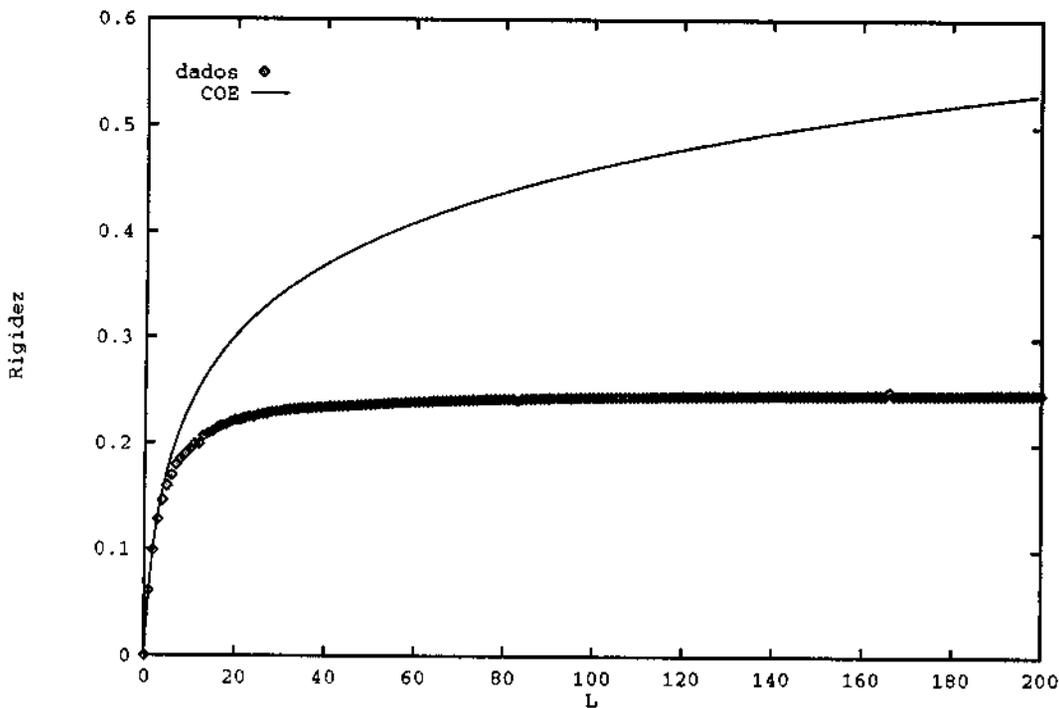


Figura 28- Rigidez do espectro para o mapa quasi-Anossov com $N = 997$ e $k = 0.01$.

Dos resultados expostos podemos ver que tanto os mapas de Anossov, quanto os mapas quasi-Anossov são sistemas cujo comportamento quântico, com relação à estatística de níveis, é perfeitamente típico no limite semiclássico. Note-se que apesar de haver um certo aumento da concordância com o aumento da perturbação k , mesmo para pequenas perturbações o comportamento semiclássico é marcadamente diferente daquele associado ao mapa do Gato. Na prática o que ocorre para pequenas perturbações é que seu limite semiclássico é mais difícil de ser atingido do que para perturbações maiores, mas fora isso não há nenhuma diferença. Outro fato a se notar é que mesmo para valores de k muito grandes os sistemas estudados mantém razoável concordância com a previsão para sistemas caóticos, indicando que as regiões de movimento integrável, quando existem, têm muito pouca influência no espectro deste tipo de sistemas.

-Funções de Wigner

Voros [33] e Heller [34] propuseram que os autoestados de um dado sistema, no seu limite semiclássico devam estar associados a estruturas invariantes clássicas. No caso de sistemas caóticos isso implica que os autoestados devam estar uniformemente espalhados sobre a superfície de energia. O que ocorre na prática é que em vários sistemas caóticos existem também as chamadas "cicatrices", regiões em torno de órbitas periódicas que apresentam uma concentração maior do autoestado.

Para mapas do Gato, Eckhardt [35] apresenta argumentos em favor de que as autofunções no limite semiclássico são funções randômicas. Como ilustração apresento aqui uma função de Wigner típica de mapas de Anossov, onde se verifica que ela se distribui uniformemente sobre todo o espaço de fases, tal qual a conjectura acima.

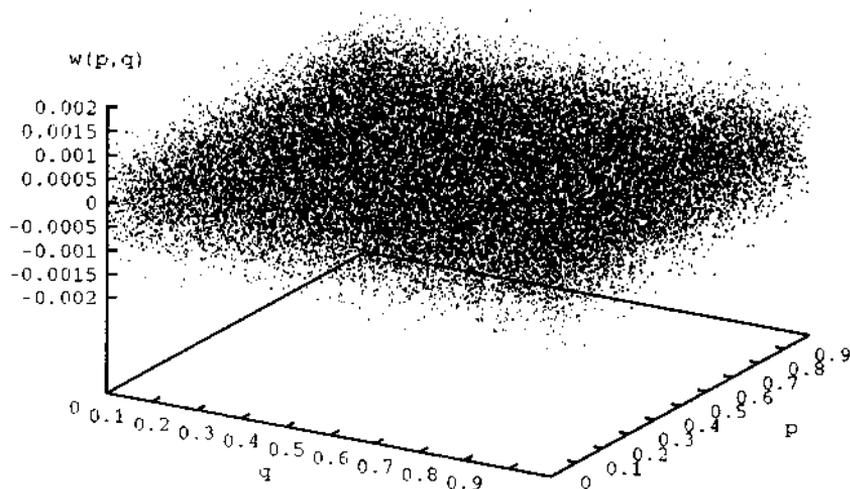


Figura 29- Função de Wigner para $N = 100$ e $k = 0.1$ do mapa de Anossov.

Para que se possa confirmar que não há nenhuma estrutura, na figura 30

há uma sequência de “curvas de nível” para diversos valores da função de Wigner.

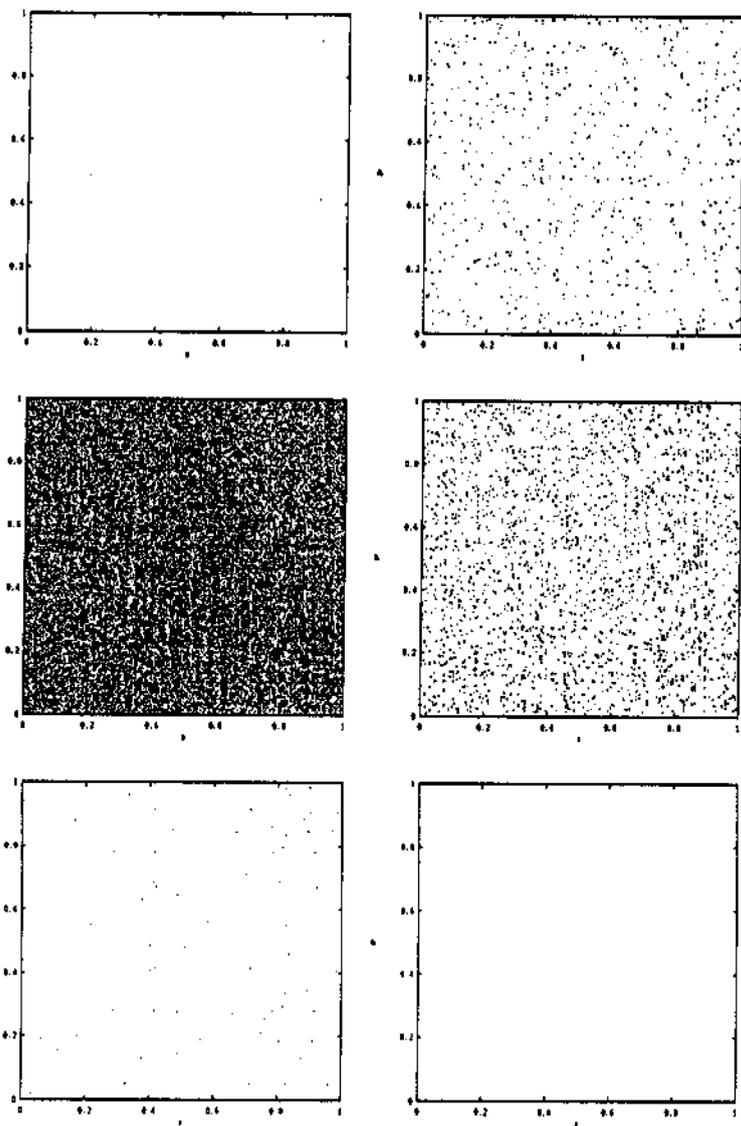


Figura 30- Curvas de nível para 1%, 25%, 50%, 70%, 85%, 99% do máximo da função de Wigner, respectivamente da esquerda para a direita e de cima para baixo.

IV Teoria de Órbitas Periódicas

A utilização de órbitas periódicas para se tentar descrever características semiclassicas de sistemas quânticos começou com Gutzwiller [11]. As chamadas teorias de órbitas periódicas podem prever com sucesso o comportamento das estatísticas de níveis apesar de em geral não levarem a séries convergentes para a densidade de níveis.

A forma geral de uma teoria de órbitas periódicas para análogos quânticos de mapas foi desenvolvida inicialmente por Tabor [36]. Entretanto existem algumas imprecisões neste trabalho e neste capítulo apresentarei uma teoria de órbitas periódicas adequada a mapas no toro. Também exponho alguns resultados numéricos para o traço do propagador quântico, pois estes envolvem sempre um número finito de órbitas periódicas.

IV.1 Teoria no Toro

A densidade de níveis de um mapa no toro pode ser escrita como:

$$\rho(\theta) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_n - 2\pi j)$$

onde θ_n são os níveis (auto-ângulos, uma vez que os autovalores são unitários). Usando a fórmula de soma de Poisson obtemos:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(\theta - \theta_n)l} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i\theta l} \text{Tr}(U^l)$$

com U sendo o propagador associado ao mapa.

Como a densidade de níveis pode ser expressa em termos do traço do propagador e de suas potências, basta escrever estes em termos de órbitas periódicas para obter uma teoria que descreva a densidade de níveis. Como o propagador é unitário $\text{Tr}(U^{-l}) = (\text{Tr}(U^l))^*$, podemos nos restringir às potências positivas de U . Veremos a seguir estes traços podem ser descritos por um número finito de órbitas periódicas. No entanto como a densidade de níveis é escrita como a soma de traços de todas as potências positivas do propagador ela depende de todas as órbitas periódicas do sistema, cujo número é infinito.

O procedimento seguido aqui é análogo ao utilizado para sistemas contínuos. Escreveremos o traço da l -ésima potência do propagador como uma soma de exponenciais complexas das ações de órbitas de período l , cujas amplitudes dependem de sua estabilidade.

No nosso caso, a ação é definida como a função geratriz $S(q', q, m, n)$ do mapa no toro. Os inteiros m e n são os “números de rotação” e garantem a periodicidade no toro, eles são os inteiros que devem ser subtraídos de q' e p' após uma iteração do mapa para que estes estejam entre 0 e 1. Esta função geratriz gera mapas da forma:

$$\left. \begin{aligned} q' &= f(q, p) \\ p' &= g(q, p) \end{aligned} \right\} \text{mod } 1$$

Para o tipo de teoria desenvolvida aqui, o propagador quântico deve ser escrito na forma de uma média sobre o toro da aproximação semiclássica. Ou seja

$$U_{Q'Q} = \left\langle \left(\frac{-i\partial^2 S(q', q, m, n)}{h\partial q'\partial q} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{h}S(q', q, m, n)} \right\rangle_m$$

com $q = Q/N$, $q' = Q'/N$ e Q e Q' inteiros entre 1 e N . Note-se que esta definição é idêntica àquela de Hannay e Berry [21], para mapas lineares. O uso aqui da ação sobre o toro ao invés da ação sobre o plano tal como foi feito no artigo original, não afeta em nada o resultado. As únicas diferenças no procedimento adotado são: a média tomada sobre a coordenada q' , mas como o artigo mesmo indica isto não altera o resultado; e uma fase extra nq' , esta fase sempre dá uma contribuição que é múltiplo de 2π quando q' é um racional, não fazendo nenhuma diferença no resultado.

Consequentemente o propagador na forma acima é suficientemente geral para incluir mapas do Gato, mapas de Anosov, mapas quasi-Anosov e outros sistemas com periodicidade no toro.

Como estamos interessados no traço de potências deste propagador, deve-se obter uma expressão aproximada para a l -ésima potência. Farei o caso $l = 2$, sendo imediata sua extensão para qualquer l . A segunda potência do propagador é

$$U_{Q'Q}^2 = \sum_{Q_1=1}^N U_{Q'Q_1} U_{Q_1Q}$$

Substituímos as expressões de $U_{Q'Q}$ e invertemos a ordem de cálculo da média e da soma (o que pode ser feito sem problemas pois a média é uma soma finita também). Mas no toro o limite semiclássico é obtido através de $N \rightarrow \infty$. Assim podemos reescrever a soma acima na forma de uma integral e o propagador fica,

$$U_{Q'Q}^2 = \left\langle \int_0^1 dq_1 \left(\frac{-i\partial^2 S(q', q_1, m', n')}{h\partial q'\partial q_1} \frac{-i\partial^2 S(q_1, q, m_1, n_1)}{h\partial q_1\partial q} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{h}S(q', q_1, m', n') + S(q_1, q, m_1, n_1)} \right\rangle_{m'm_1}$$

Para $h \rightarrow 0$ pode-se resolver esta integral pelo método de fase estacionária. A condição para que a fase seja estacionária é então

$$\frac{\partial}{\partial q_1} [S(q', q_1, m', n') + S(q_1, q, m_1, n_1)] = -p_1(q', q_1) + p_1(q_1, q) = 0$$

Ou seja, q_1 deve ser um ponto da “trajetória” clássica (única) que leva de q a q' . Portanto definimos $S^2(q', q, m, n) = S(q', q_1, m', n') + S(q_1, q, m_1, n_1)$ com $m = f(n_1, m_1) + m'$ e $n = g(n_1, m_1) + n'$. Mas como $f(n_1, m_1)$ e $g(n_1, m_1)$ são inteiros fixos, pois m_1 e n_1 ficam definidos em consequência da escolha de q_1 , a média sobre m_1 desaparece. Esta ação S^2 é justamente a ação de duas iterações sucessivas do mapa e então obtemos:

$$U_{Q'Q}^2 \approx \left\langle \left(\frac{-i\partial^2 S^2(q', q, m', n')}{h\partial q' \partial q} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S^2(q', q, m', n')} \right\rangle_{m'}$$

A amplitude acima é a obtida naturalmente da integração, usando o fato de que q_1 é o ponto intermediário entre q e q' . Assim vemos que a segunda potência de U é escrita em termos da ação de duas iterações do mapa exatamente na mesma forma do propagador para uma iteração. Se o mapa for linear este resultado não é apenas uma aproximação, mas o resultado exato. Com uma argumentação análoga podemos obter a l -ésima potência do propagador em termos da ação da l -ésima iteração do mapa.

$$U_{Q'Q}^l \approx \left\langle \left(\frac{-i\partial^2 S^l(q', q, m', n')}{h\partial q' \partial q} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S^l(q', q, m', n')} \right\rangle_{m'} \quad (11)$$

Agora, tendo as diversas potências do propagador expressas em termos de quantidades clássicas, podemos calcular o traço

$$\text{Tr}(U^l) = \sum_{Q=1}^N U_{QQ}^l$$

Usando a expressão (11) e invertendo a ordem de cálculo da soma e da média resulta, depois de tomar mais uma vez o limite semiclássico para substituir a somatória por uma integral sobre a coordenada q ,

$$\text{Tr}(U^l) \approx \left\langle \int_0^1 dq \left(\frac{-i\partial^2 S^l(q', q, m', n')}{h\partial q' \partial q} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S^l(q', q, m', n')} \right\rangle_{m'}$$

Esta integral pode ser resolvida por método de fase estacionária e então a condição é

$$\left[\frac{\partial}{\partial q'} S^l(q', q, m', n') + \frac{\partial}{\partial q} S^l(q', q, m', n') \right]_{q'=q} = p'(q, q) - p(q, q) = 0$$

Assim, além de $q' = q$ temos $p' = p$ o que define uma órbita de período l . Portanto o traço é escrito como

$$\text{Tr}(U^l) = \left\langle \sum_{O.P.} \frac{1}{\sqrt{-R_l}} e^{i\hbar S^l(q, q, m_q, n_q)} \right\rangle_m = \sum_{O.P.} \frac{1}{\sqrt{-R_l}} e^{i\hbar S^l(q, q, m_q, n_q)} \quad (12)$$

onde a soma é sobre as órbitas periódicas de período l , ou cujo período é divisor de l . A média sobre m deixa de ter sentido uma vez que fixamos as órbitas e conseqüentemente m_q e n_q . R_l é o chamado resíduo da órbita e está ligado à estabilidade desta pela matriz de monodromia

$$R_l = 2 - \text{Tr}[M]$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_l}{\partial q_0} & \frac{\partial p_l}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q_l}{\partial p_0} & \frac{\partial p_l}{\partial p_0} \end{bmatrix}_{(q,p)}$$

com (q_l, p_l) sendo a l -ésima iteração de $(q_0, p_0) = (q, p)$.

Para mapas lineares as equações (12) e (11) são exatas para qualquer \hbar e não meras aproximações semiclássicas e R_l é constante para todas as órbitas de mesmo período. Além disso como o propagador para esses mapas é periódico, também a densidade de níveis é escrita como uma soma de um número finito de órbitas periódicas, implicando na convergência desta soma.

IV.2 Resultados

Aplicando os resultados da seção anterior aos nossos sistemas exemplo, podemos ter uma idéia da validade dessas aproximações semiclássicas. O mapa do Gato tem suas órbitas periódicas calculadas diretamente da equação (2). Dado um período podemos encontrar facilmente todas as órbitas com este período e como suas coordenadas são racionais estas órbitas podem ser obtidas numericamente de modo exato.

Os mapas de Anossov são sistemas homeomorfos a mapas do Gato e portanto dadas as órbitas periódicas destes últimos podemos obter diretamente as órbitas dos primeiros. Na prática o homeomorfismo que liga ambos sistemas é difícil de ser obtido e o procedimento adotado aqui é usar as órbitas do mapa do Gato como uma aproximação para um método iterativo de Newton, generalizado de rápida convergência (método de Baranger), que calcula as órbitas associadas do mapa de Anossov. O método original se aplica a sistemas contínuos discretizados ou mapas num espaço euclidiano. A adaptação deste método para espaço de fases toroidal traz uma vantagem adicional, ele depende do número de rotação da órbita calculada. Como cada órbita periódica do mapa do Gato é determinada a partir de seu número de rotação e este é o mesmo para a órbita associada do mapa de Anossov o método só pode obter a órbita desejada. Mesmo que haja uma órbita de mesmo período próxima, ela terá um número de rotação distinto.

Para se calcular as órbitas de mapas quasi-Anossov necessitamos de alguns cuidados. Como não existe uma correspondência 1 a 1 entre estes e mapas do Gato, não há garantias de que ambos sistemas tenham o mesmo número de órbitas com determinado período. Quanto maior o período maior a diferença de número de órbitas entre quasi-Anossov e Gato. Basta ver que o número de órbitas periódicas de um mapa linear é grosso modo o traço da mapa menos 2 (para um mapa contínuo no toro isso é exato) e a diferença entre o traço do Mapa do Gato e de quasi-Anossov aumenta exponencialmente com o período. Para mapa lineares temos duas possibilidades qualitativamente diferentes. Se o parâmetro de perturbação k for positivo, o mapa tem mais órbitas periódicas e se k for negativo tem menos. A idéia é que em ambos os casos se o módulo de k for pequeno a maioria das órbitas "sobrevive" à perturbação. Como o mapa aqui estudado tem regiões onde a perturbação é negativa e outras onde é positiva, é razoável supor que ape-

nas poucas órbitas não terão correspondência com mapas do Gato. Assim em princípio podemos usar o mesmo procedimento seguido para mapas de Anossov. É claro que a partir de certo período o número de órbitas que não sobrevivem ou aparecem é muito grande fazendo com que o erro no cálculo semiclássico sofra um aumento súbito.

Como a equação (12) é exata e não uma mera aproximação quando o mapa é linear, é interessante verificar o quanto esta equação perde em precisão quando aumentamos o parâmetro de perturbação. Nas figuras 31 e 32 estão plotadas respectivamente as partes reais e imaginárias do traço exato do propagador do mapa de Anossov (7) e sua aproximação semiclássica. É evidente o alto grau de concordância em toda a região de validade do teorema de Anossov, as curvas são sobrepostas, só sendo possível ver que existem duas curvas devido à concentração de pontos quando a derivada é pequena formando uma curva contínua.

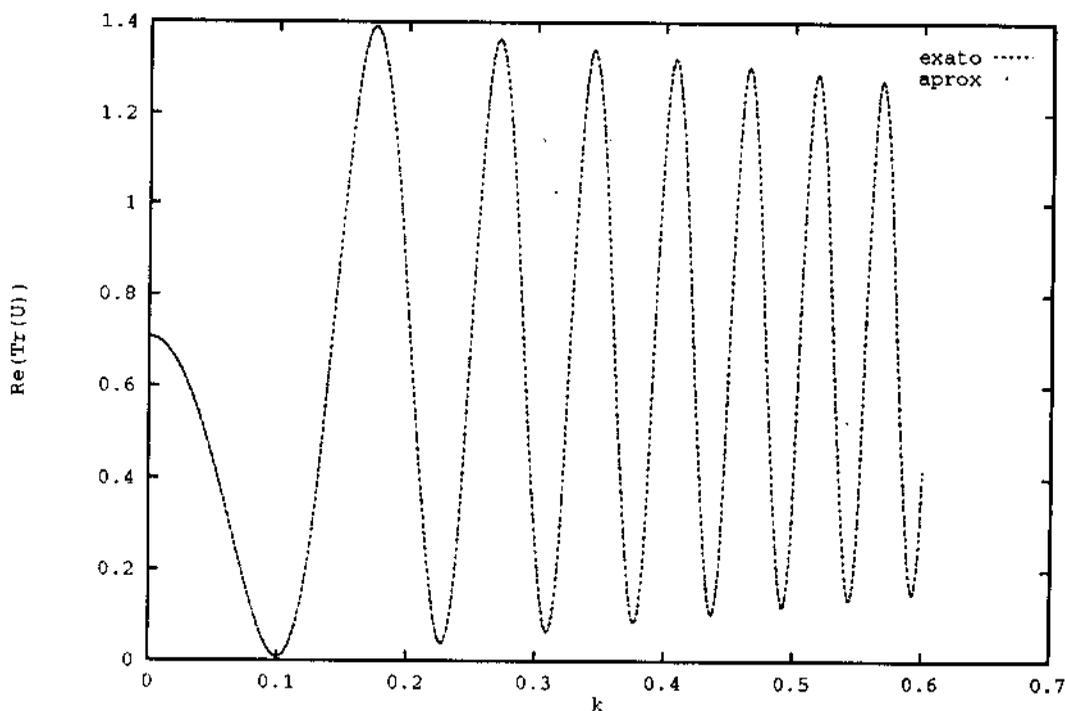


Figura 31- Traço em função de k para Anossov, $N = 997$.

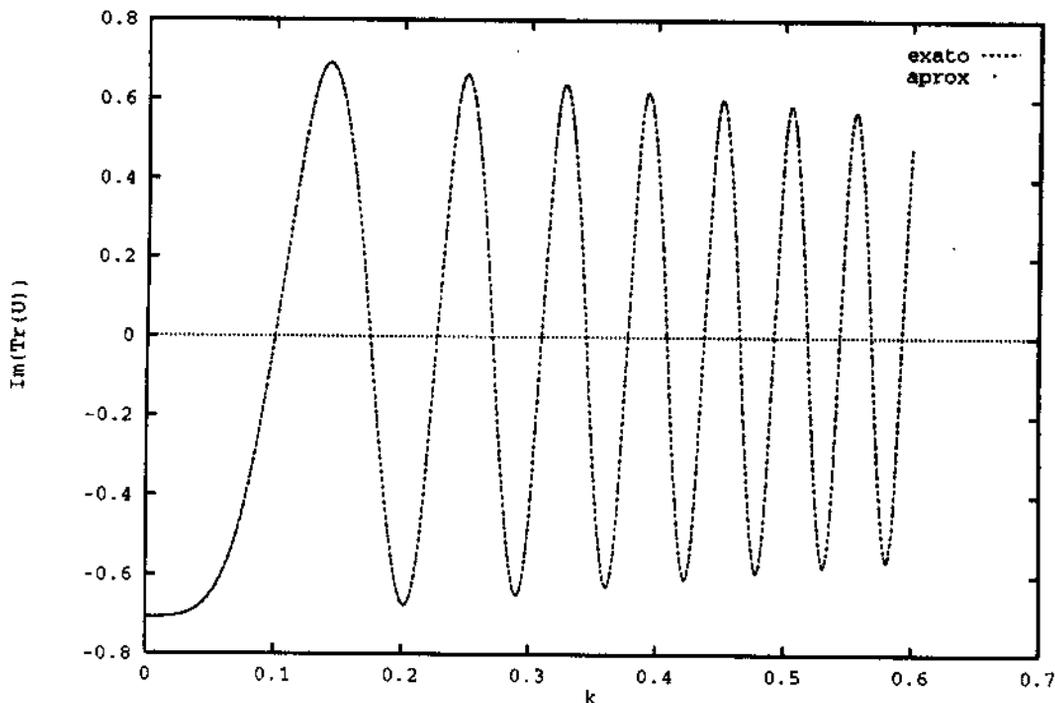


Figura 32- Traço em função de k para Anosov, $N = 997$.

Para que seja possível avaliar o aumento do erro com k apreseto na figura 33 o erro (diferença entre exato e aproximação). Note-se que o erro é oscilante e a amplitude de oscilação aumenta com k tanto para a parte real como para a imaginária. No entanto, frente ao valor do traço o erro é muito pequeno mostrando que a aproximação é muito boa.

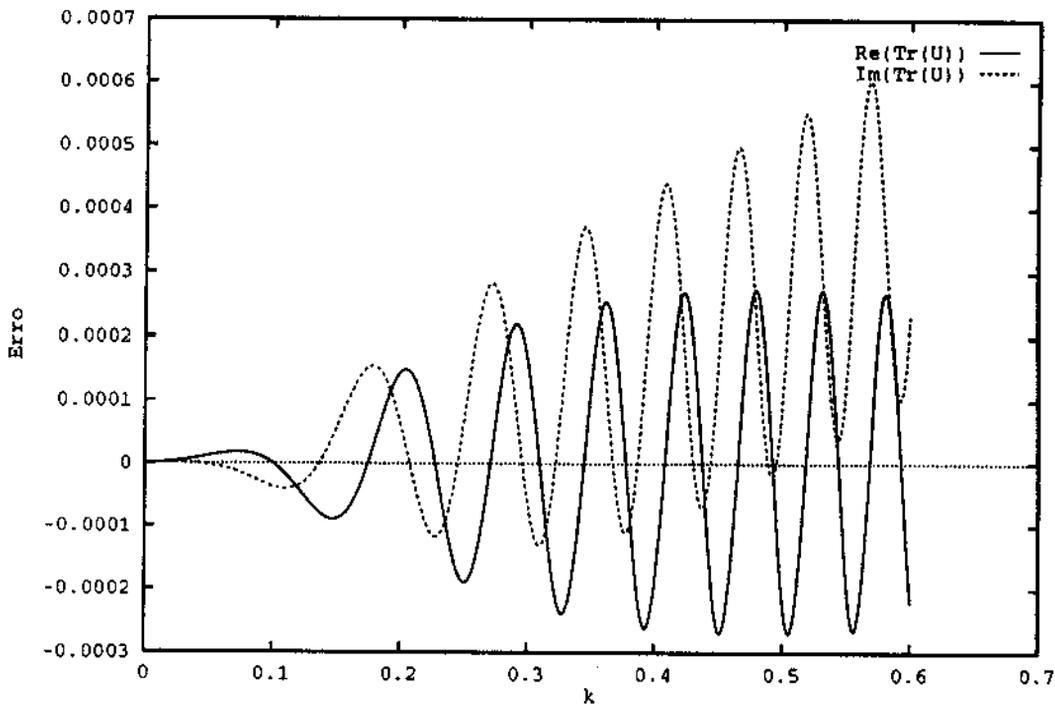


Figura 33- Diferença entre o cálculo exato e o semiclássico em função de k para Anossov, $N = 997$.

O mapa quasi-Anossov (8) tem essencialmente o mesmo comportamento com relação ao parâmetro de perturbação. Nas figuras 34 e 35 estão respectivamente a parte real e imaginária do traço do propagador juntamente com sua aproximação semiclássica. Novamente as curvas se sobrepõem visualmente.

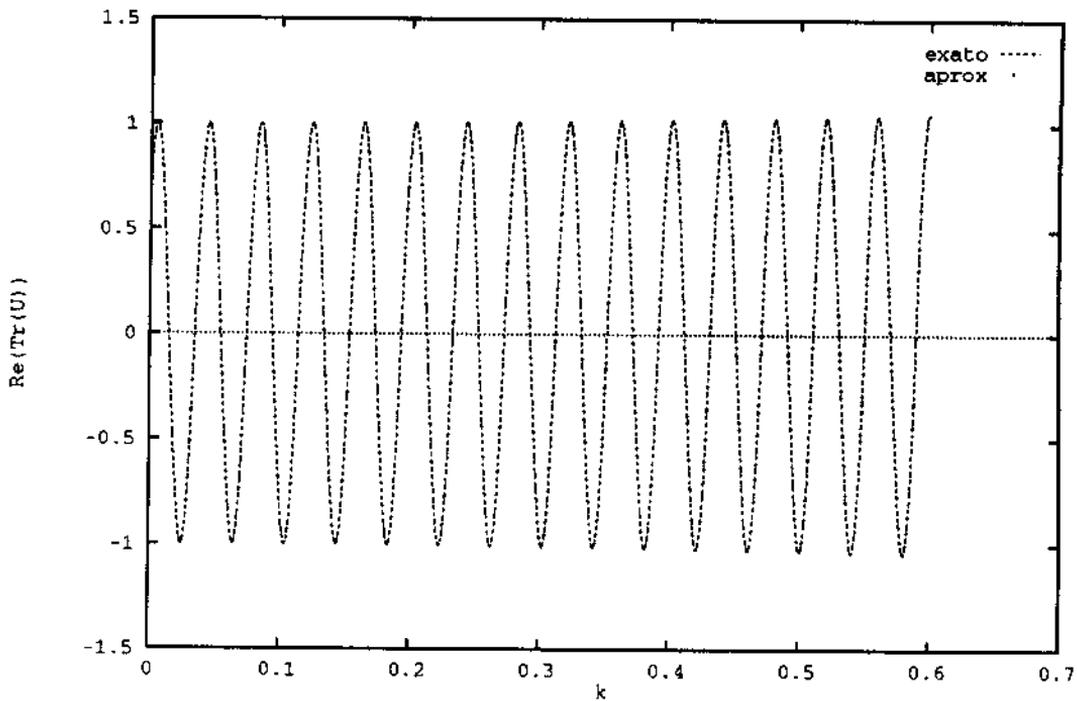


Figura 34- Traço em função de k para quasi-Anossov, $N = 997$.

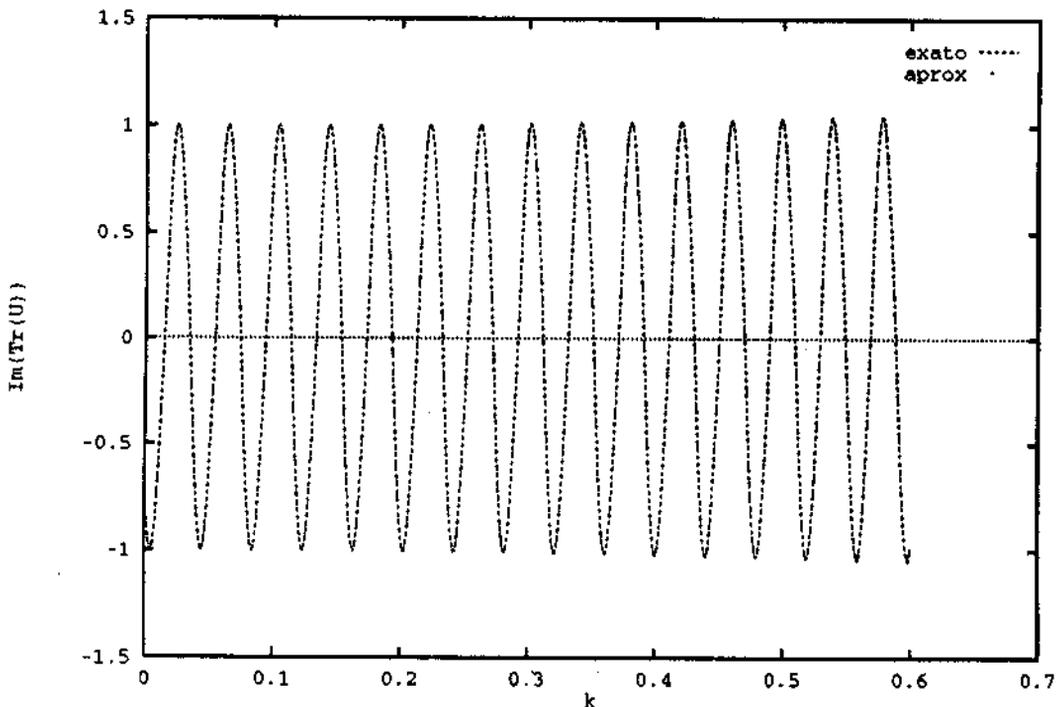


Figura 35- Traço em função de k para quasi-Anossov, $N = 997$.

Devido à esta sobreposição das curvas exata e semiclássica na figura 36 mostro a diferença entre elas plotada contra k . Pode se ver imediatamente que o erro é oscilante mas aumenta sua amplitude com k , entretanto este erro é muito pequeno frente ao traço.

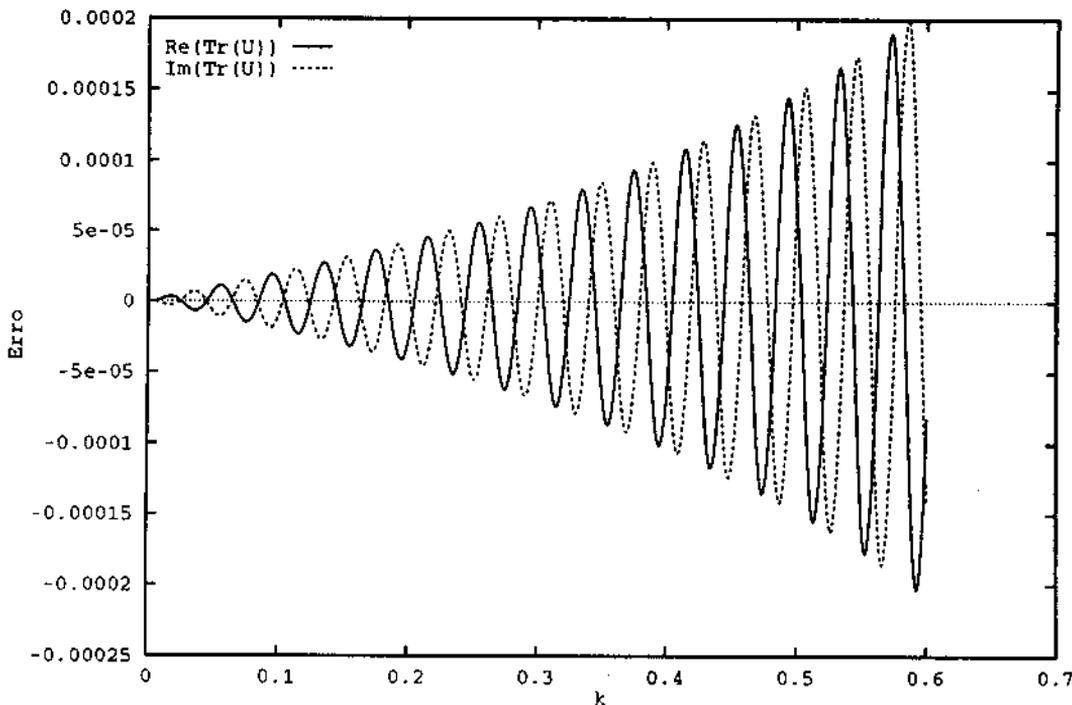


Figura 36- Diferença entre o cálculo exato e o semiclássico em função de k para quasi-Anossov, $N = 997$.

Em ambos sistemas a aproximação semiclássica se mostra útil mesmo para valores grandes de k . No caso de mapas de Anossov se verifica que mesmo fora da região de validade do teorema de Anossov a aproximação é muito boa não mostrando nenhuma mudança brusca de precisão.

A aproximação semiclássica deve melhorar quando estamos próximos deste limite. Nas figuras 37 e 38 estão o traço do propagador para o mapa de Anossov (7) e sua aproximação semiclássica em função de N . Note-se que o que parecem ser quatro curvas distintas é na verdade apenas uma. O que ocorre é que as componentes real e imaginária do traço são quase periódicas em N com um “período” 4. Para entender melhor o que acontece podemos ver o comportamento do traço para o mapa do Gato (figura 39). O traço neste caso tem período 8 com N mas suas componentes real e imaginária só assumem 3 valores distintos formando 3 retas. Para o mapa de Anossov essas

retas se deformam em curvas senoidais e uma delas (a central, que é visitada duas vezes mais) se separa em duas, produzindo as 4 curvas observadas.

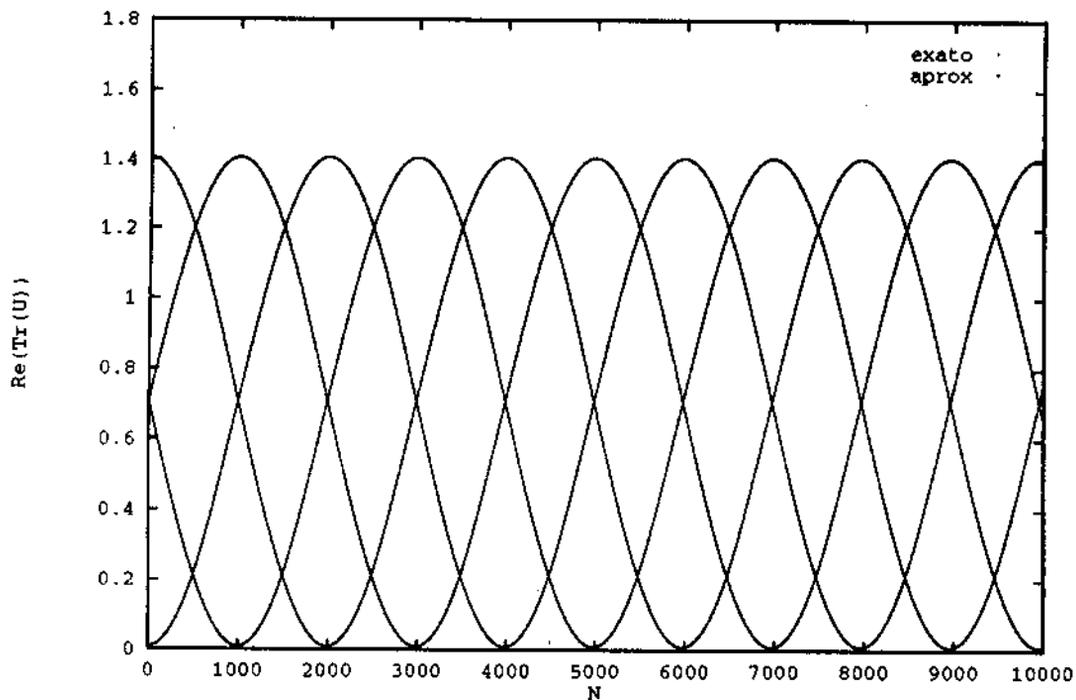


Figura 37- Traço em função de N para Anosov, $k = 0.1$.

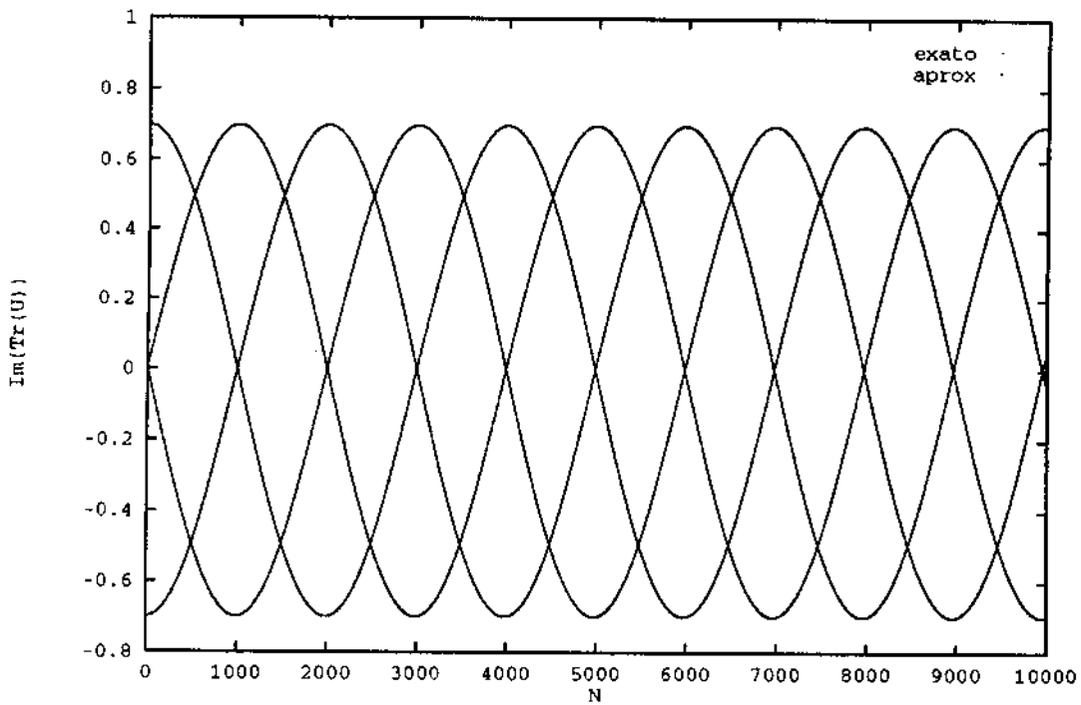


Figura 38- Traço em função de N para Anossov, $k = 0.1$.

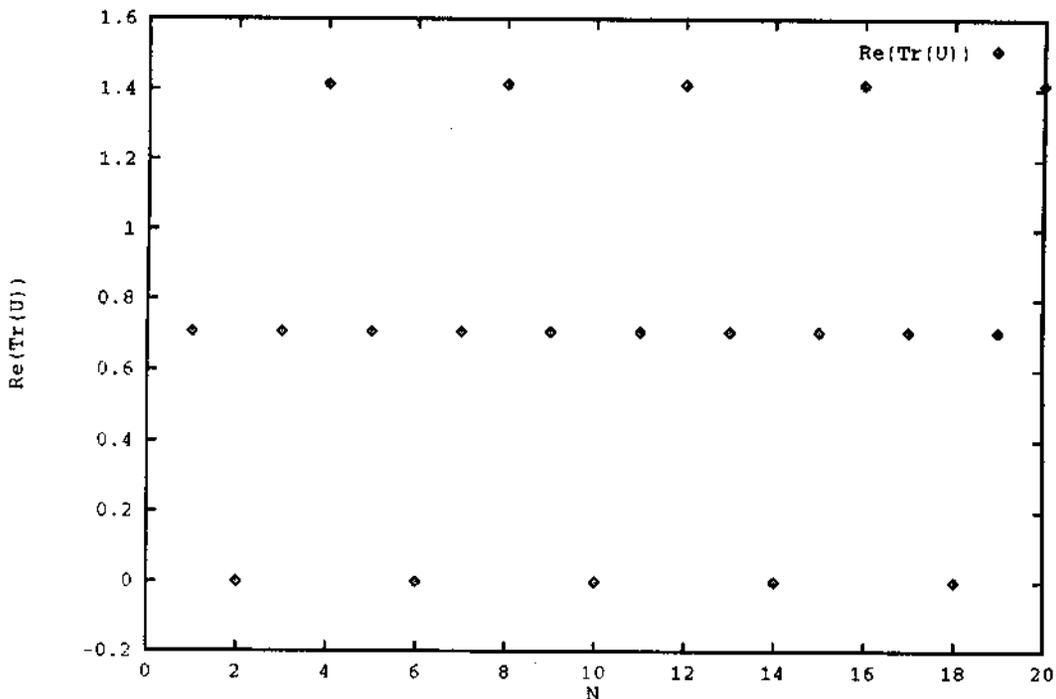


Figura 39- Parte real do traço do propagador para o Gato em função de N .

É essencialmente impossível distinguir visualmente entre o cálculo exato e o semiclássico, as duas curvas se sobrepõem perfeitamente. Só é possível verificar o aumento da precisão da aproximação semiclássica através da diferença entre os dois cálculos. Por uma questão de clareza, na figura 40 apresento o erro a cada quase período, caso contrário existiriam 8 curvas de erro (4 da parte real e 4 da imaginária). O comportamento é o mesmo para as outras curvas. Apesar de o erro ser oscilante ele diminui muito rapidamente com o aumento de N mostrando que o limite semiclássico é atingido facilmente.

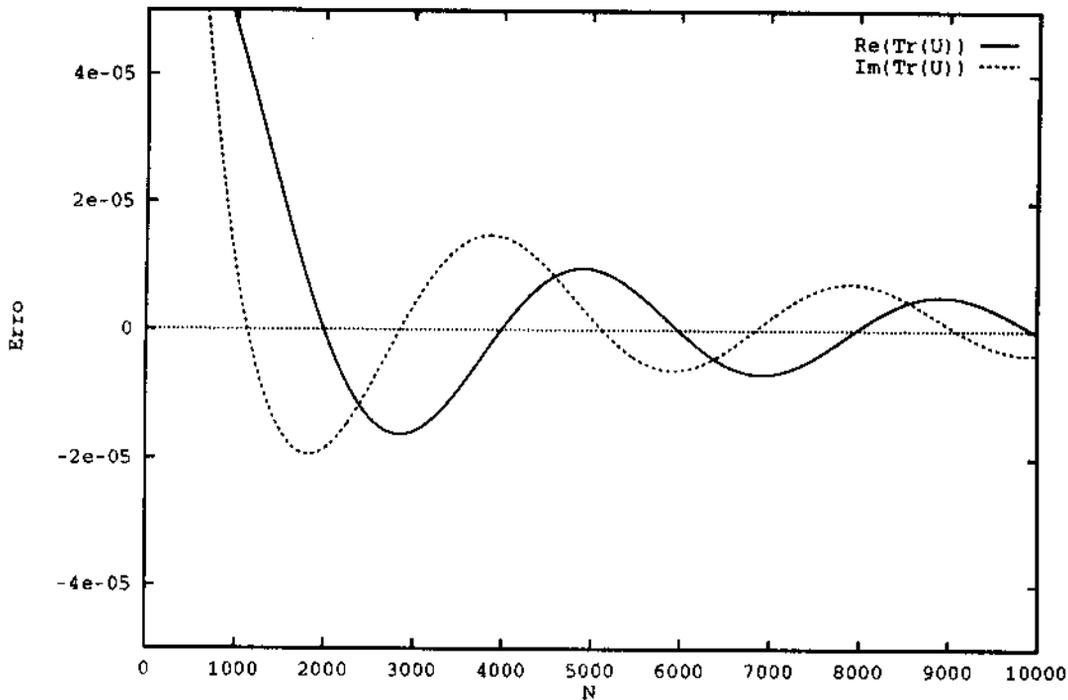


Figura 40- Diferença entre o cálculo exato e o semiclássico em função de N para Anossov, $k = 0.1$.

O mapa quasi-Anossov tem essencialmente o mesmo tipo de comportamento com relação a dependência do traço do propagador com N . Nas figuras 41 e 42 estão plotadas as partes real e imaginária do traço, juntamente com a sua aproximação semiclássica. Novamente ocorre uma sobreposição quase perfeita entre o cálculo exato e o semiclássico, note a inexistência quase completa de “pontos duplos” (sobreposição imperfeita dos pontos calculados exata e semiclasticamente). Aqui também ocorre o mesmo fenômeno de quase periodicidade das componentes real e imaginária do traço, gerando quatro curvas distintas.

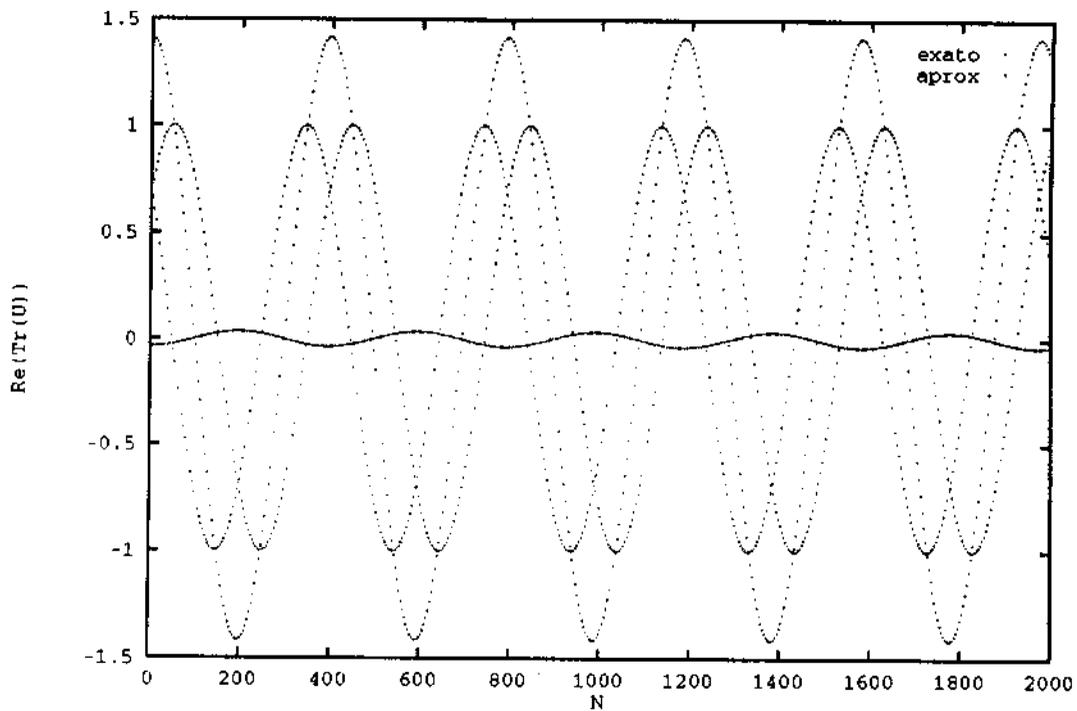


Figura 41- Traço em função de N para quasi-Anossov, $k = 0.1$.

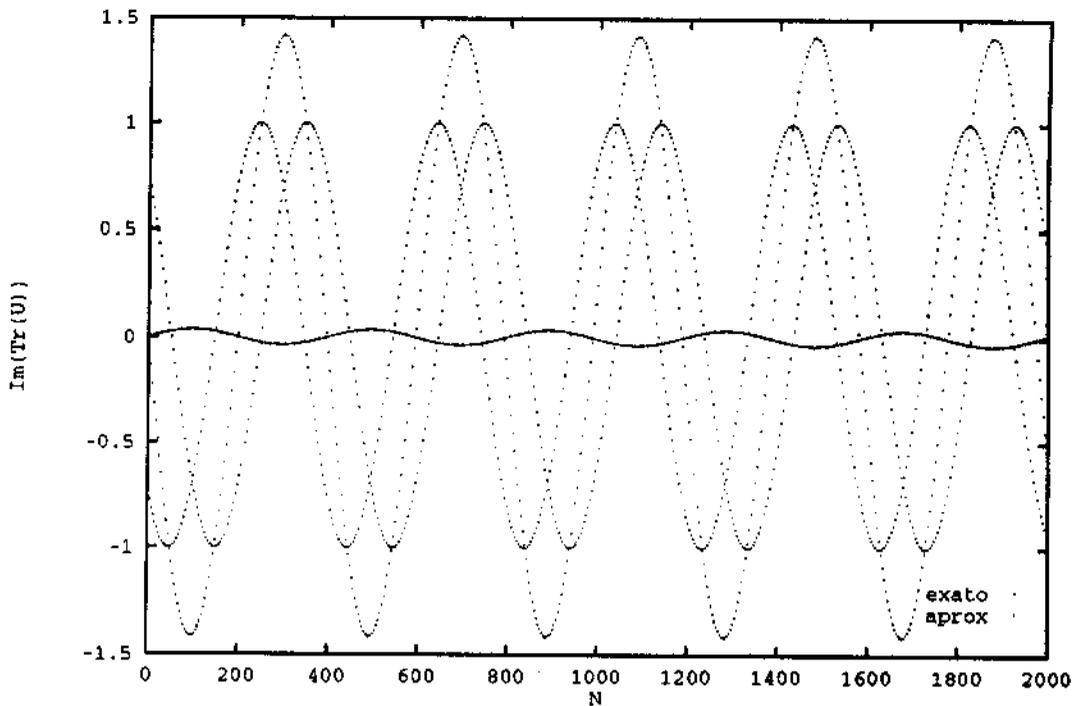


Figura 42- Traço em função de N para quasi-Anossov, $k = 0.1$.

Para se verificar o aumento da precisão com a aproximação do limite semiclássico estão plotadas na figura 43 as diferenças entre o cálculo exato e aproximado, tanto para a parte real como para a parte imaginária. Nota-se claramente a diminuição do erro com o aumento de N , apesar do seu caráter oscilatório.

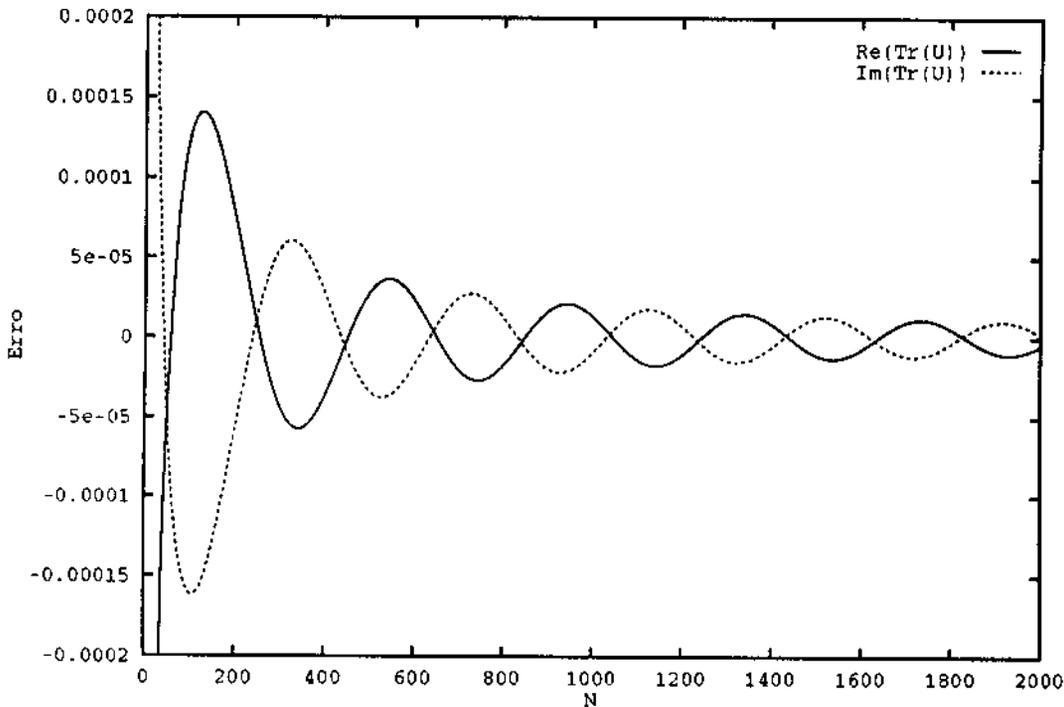


Figura 43- Diferença entre o cálculo exato e o semiclássico em função de N para quasi-Anossov, $k = 0.1$.

Como a densidade de energia é expressa em termos de traços de potências do propagador, temos que verificar até que potência do propagador a aproximação semiclássica é razoável. Segundo argumento de Berry *et al.* [30] a aproximação semiclássica deve perder sua validade quando o sistema começa a provar estruturas menores que \hbar^G no espaço de fases, G sendo o número de graus de liberdade. Quando tomamos um mapa hiperbólico, devido à existência de uma variedade estável, sua l -ésima potência prova estruturas da ordem de λ^l , com λ sendo o autovalor menor do mapa. Assim para cada N fixo temos $\lambda^{-l_{max}} = N$ e podemos achar a potência máxima como:

$$l_{max} = -\log_{\lambda} N$$

Como o tempo envolvido na multiplicação de matrizes grandes é proporcional à dimensão das matrizes ao cubo, se torna inviável calcular potências

muito altas. Apresento aqui os resultado para dimensões 100 e 200 e potências até 8. Para $N = 100$, $l_{max} < 4$ e para $N = 200$, $l_{max} < 5$.

Nas figuras 44 e 45 estão os traços do propagador para o mapa de Anossov e sua aproximação semiclássica. Note que não se pode distinguir os dois cálculos visualmente indicando que a aproximação semiclássica vai muito além da previsão baseada no argumento de Berry *et al.*.

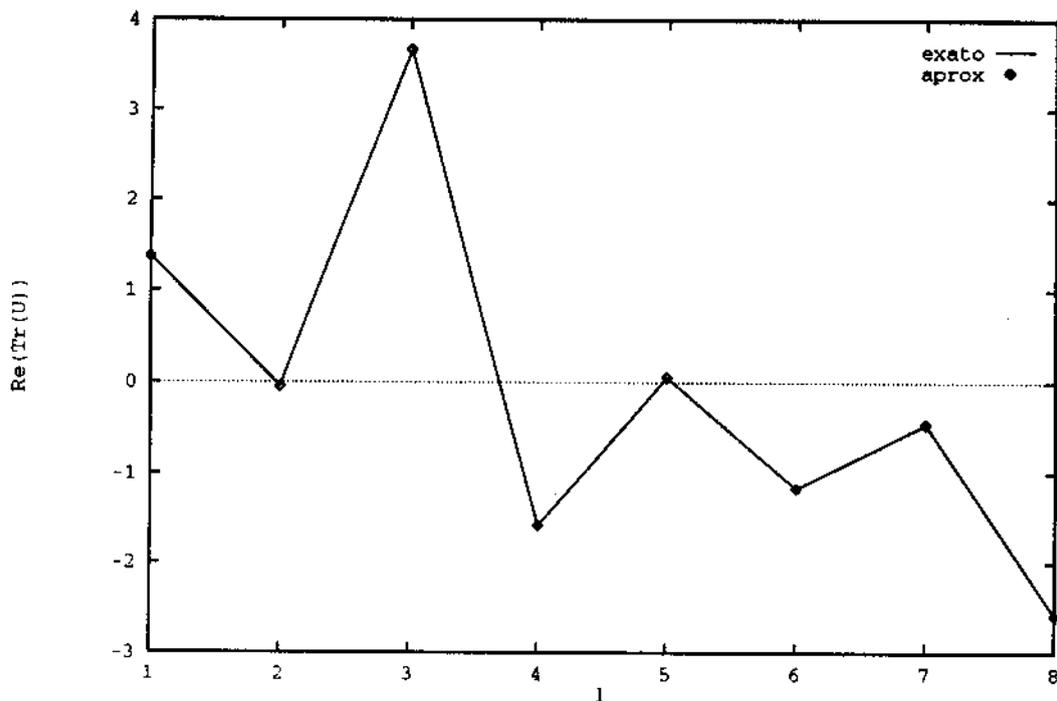


Figura 44- Traço de potências l do propagador para Anossov, $N = 200$ e $k = 0.1$.

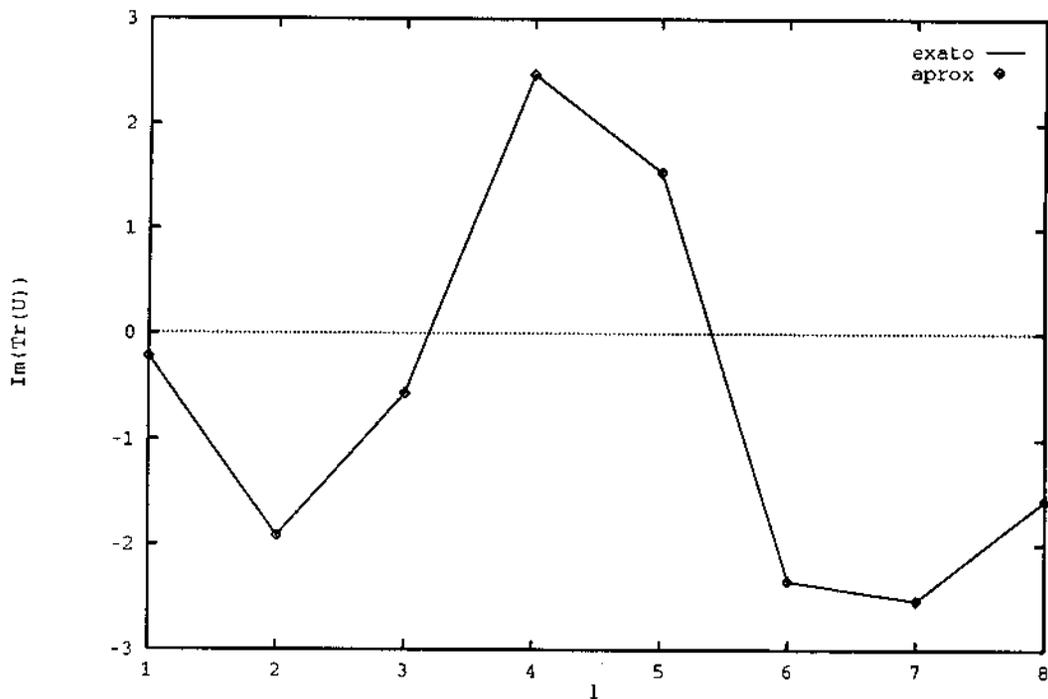


Figura 45- Traço de potências l do propagador para Anossov, $N = 200$ e $k = 0.1$.

Podemos ver a confirmação da suposição de que a aproximação semiclássica mantém sua validade muito além de l_{max} na figura 46. O erro é muito pequeno e aumenta muito lentamente parecendo não sentir nenhum efeito da passagem por l_{max} .

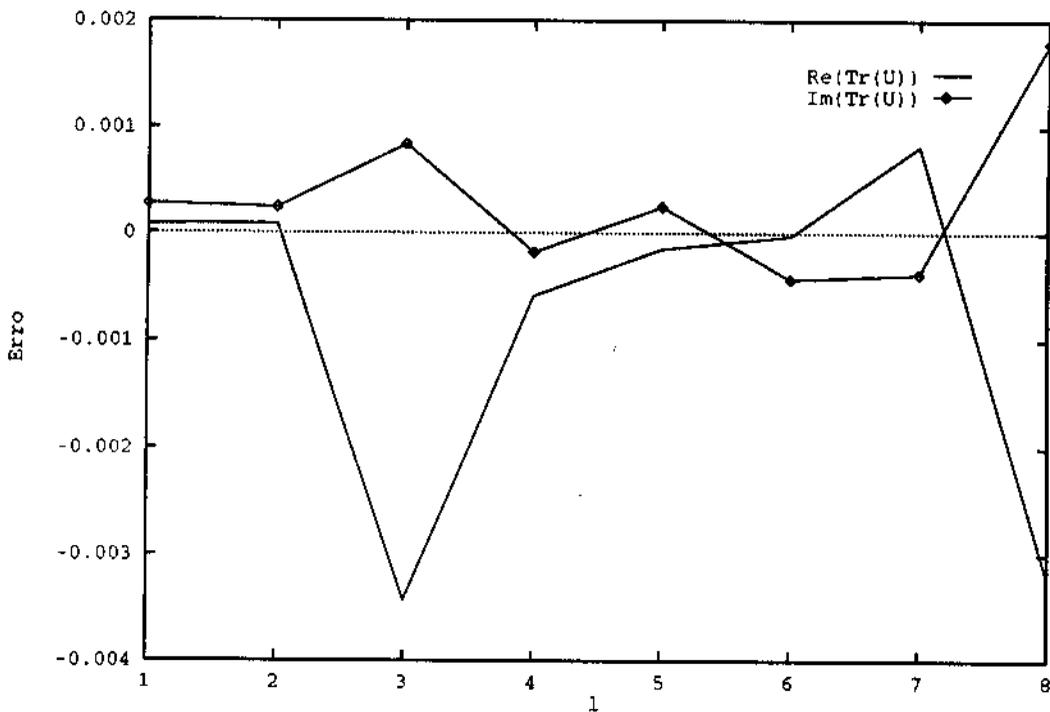


Figura 46- Diferença entre o cálculo exato e semiclássico do traço de potências l do propagador para Anossov, $N = 200$ e $k = 0.1$.

Para os mapas quasi-Anossov, temos que tomar certos cuidados, pois existem duas fontes de erro associadas a potências do propagador. Uma é o próprio argumento de Berry *et al.* de que a partir de l_{max} a aproximação perde sua validade, outra fonte é a falta de órbitas periódicas no cálculo semiclássico. A maneira utilizada aqui para se obter as órbitas dos mapas quasi-Anossov é baseada nas órbitas do mapa do Gato, e como já discuti anteriormente o número de órbitas que aparecem a mais aumenta com a potência. No caso de k negativo o argumento é o mesmo com relação às órbitas que desaparecem. Portanto para evitar esse problema utilizo também uma perturbação pequena o que permite utilizar potências relativamente altas sem perder muitas órbitas. Nas figuras 47 e 48 estão os resultados para quasi-Anossov, onde podemos ver que a precisão é boa mesmo além de l_{max} . Na figura 49 apresento a diferença entre o cálculo semiclássico e exato.

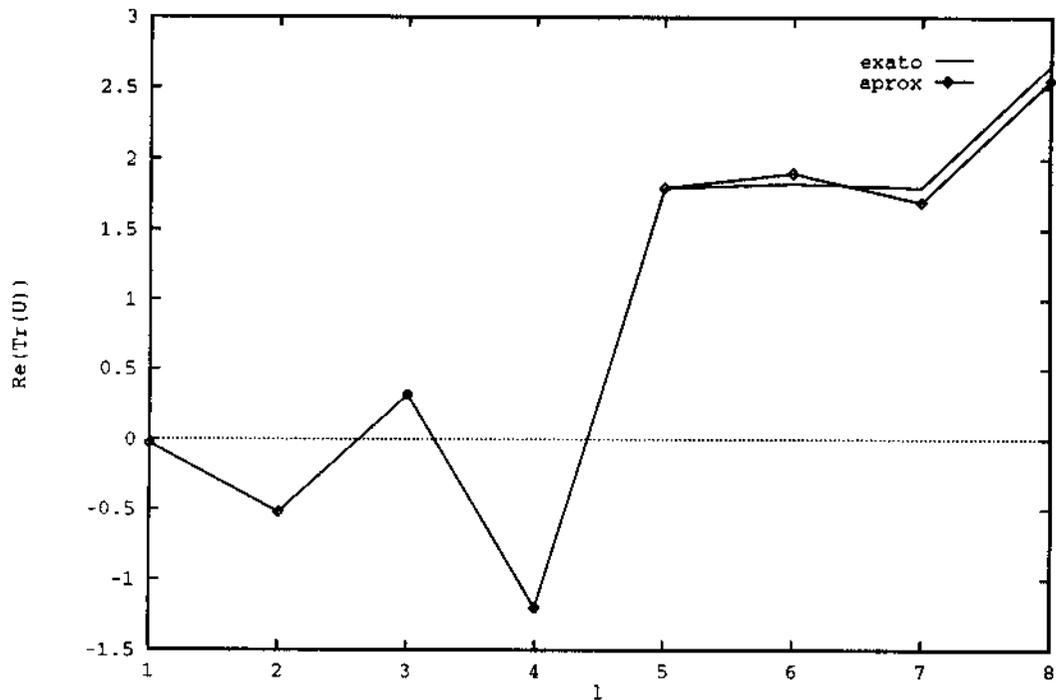


Figura 47- Traço de potências l do propagador para quasi-Anossov, $N = 100$ e $k = 0.1$.

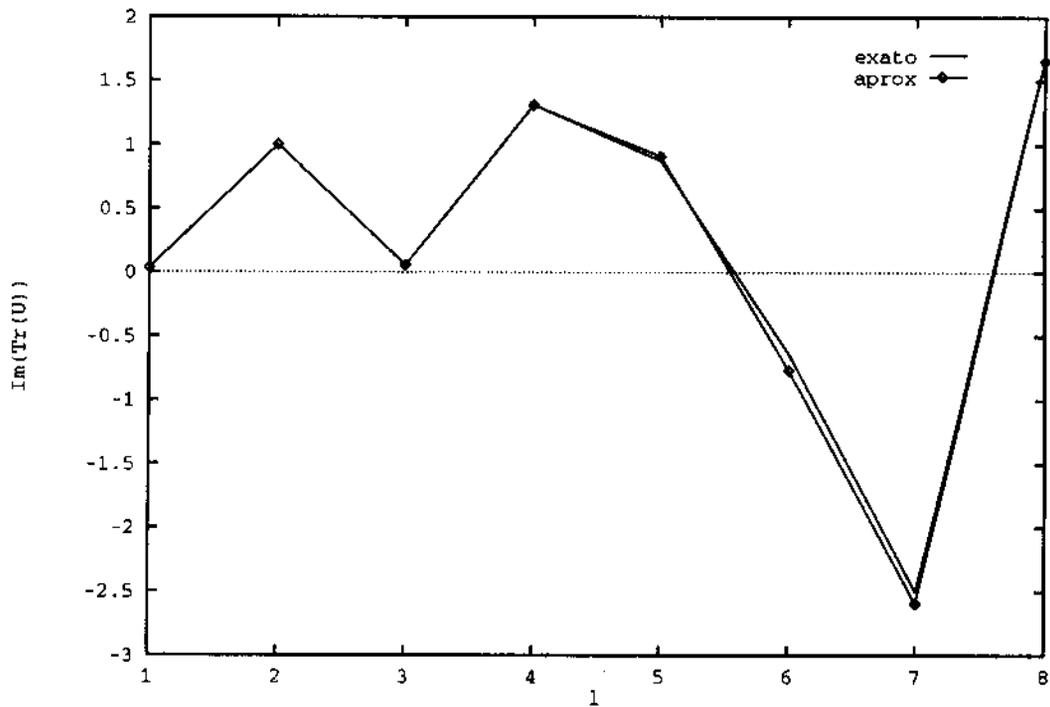


Figura 48- Traço de potências l do propagador para quasi-Anossov, $N = 100$ e $k = 0.1$.

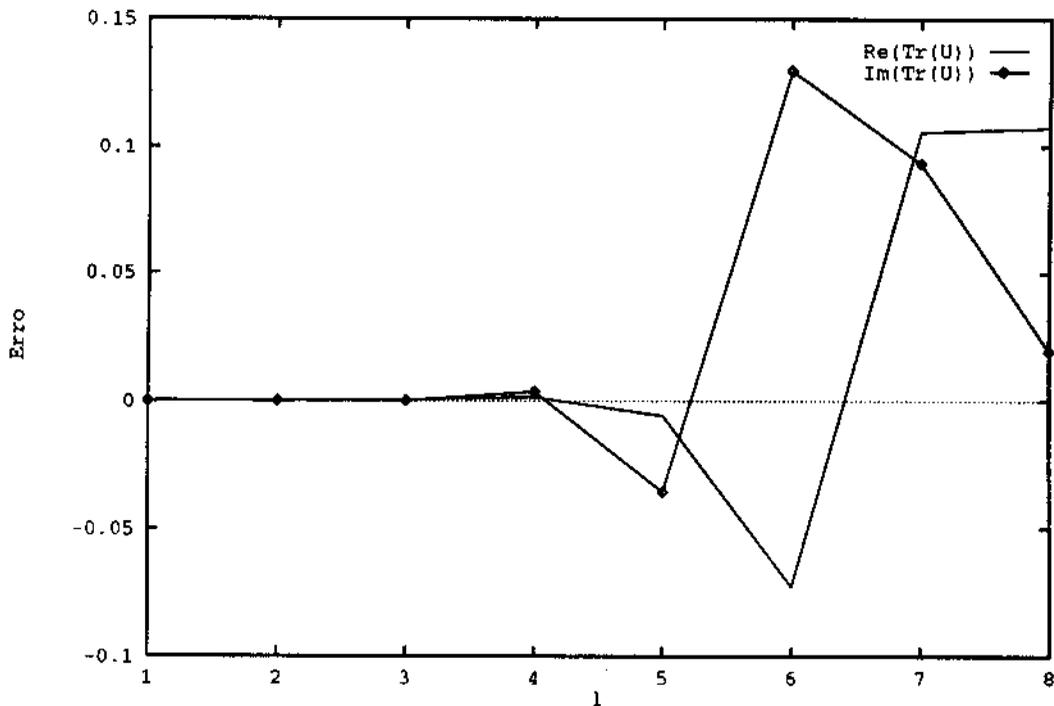


Figura 49- Diferença entre o cálculo exato e semiclássico do traço de potências l do propagador para quasi-Anossov, $N = 100$ e $k = 0.1$.

O aumento súbito do erro em $l = 4$ se deve à falta de órbitas periódicas no cálculo semiclássico. Isso se pode verificar com uma perturbação menor. A diferença entre o cálculo exato e semiclássico está na 50, onde se vê que a aproximação semiclássica mantém sua precisão muito além de l_{max} .

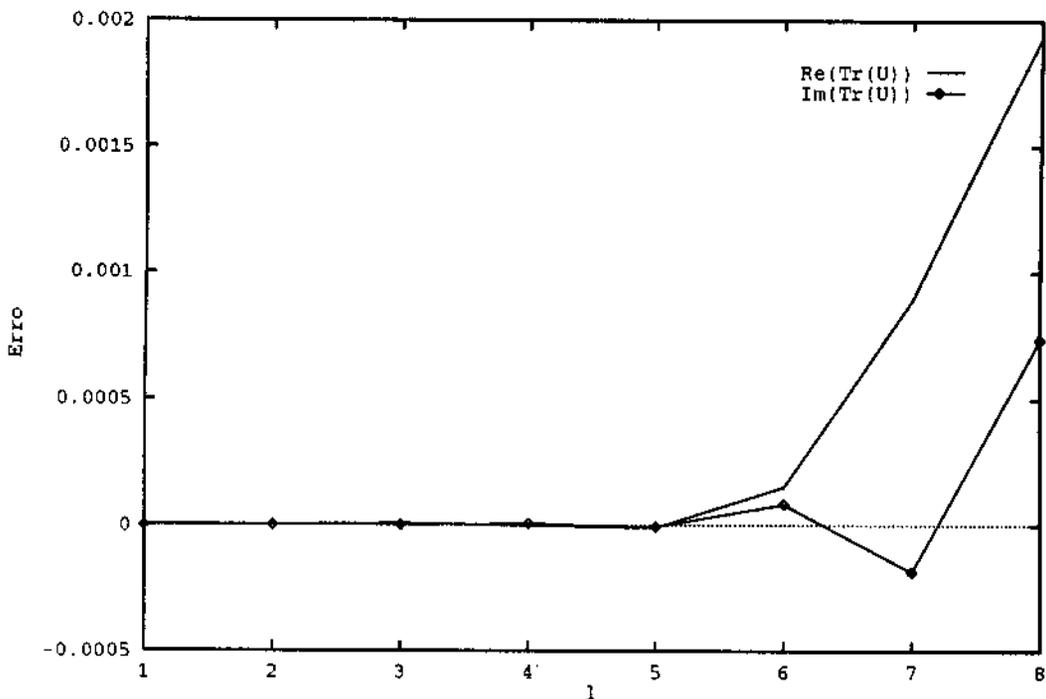


Figura 50- Diferença entre o cálculo exato e semiclássico do traço de potências l do propagador para quasi-Anossov, $N = 100$ e $k = 0.01$.

Dos resultados acima podemos concluir que a aproximação semiclássica é muito precisa desde valores razoavelmente grandes de h , e bem além do que se esperaria em termos do argumento de Berry. Deve-se notar que a perturbação de mapas do Gato faz com que a teoria de órbitas periódicas não seja exata mas mesmo assim ela mantém uma precisão bastante grande, mesmo para perturbações grandes.

O fato de podermos usar a aproximação semiclássica para potências mais altas do propagador permite que se possa descrever algumas características do espectro. A densidade de níveis suavizada é uma aplicação óbvia, mas também é possível descrever a variância numérica em termos dos traços. Usando a definição de variância e substituindo nela a densidade de níveis escrita em termos dos traços temos o seguinte resultado.

$$V(L) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\sin(\pi l L / N))^2}{l^2} |\text{Tr}(U^l)|^2$$

Truncando a soma acima podemos observar a influência das órbitas de período mais curto sobre a variância numérica. Na figura 51 e 52 estão a variância calculada exatamente e a contribuição das órbitas de período até 8, respectivamente para o mapa de Anossov e quasi-Anossov.

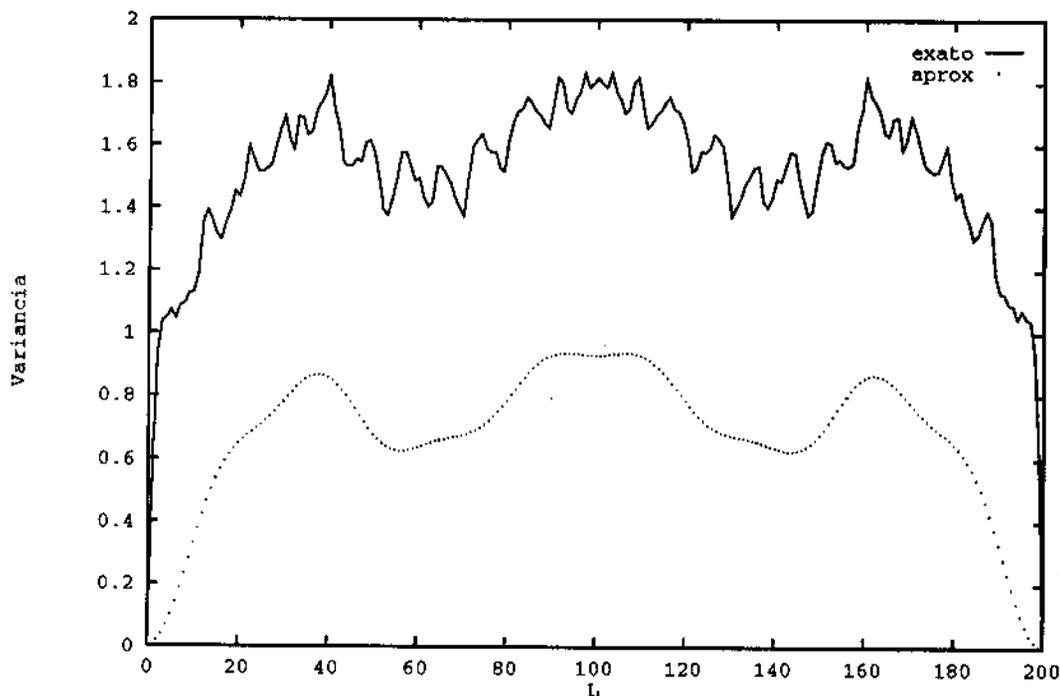


Figura 51- Variância numérica exata e calculada a partir dos traços semiclássicos até potência 8 do propagador para Anossov, $N = 200$ e $k = 0.1$.

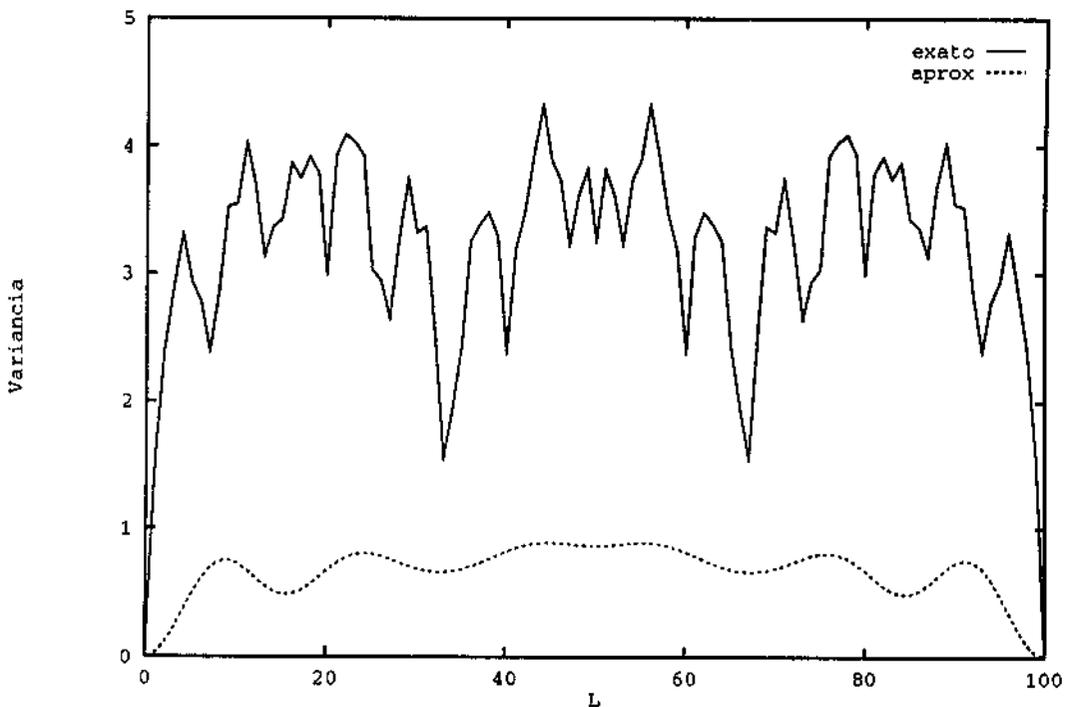


Figura 52- Variância numérica exata e calculada a partir dos traços semiclássicos até potência 8 do propagador para quasi-Anossov, $N = 100$ e $k = 0.01$.

Note-se que as oscilações mais longas da variância estão razoavelmente bem explicadas para Anossov e um pouco menos para quasi-Anossov. É claro que para poder descrever completamente a variância necessitaríamos de potências arbitrariamente altas do propagador e neste caso a aproximação semiclássica perderia sua validade. Como a variância é uma soma de termos positivos, só podemos obter contribuições para a amplitude das oscilações.

V Conclusão

Os dois tipos de perturbações apresentadas nesse trabalho compartilham, enquanto sistemas clássicos, diversas características. São sistemas de caráter hiperbólico uniforme, no caso de mapas de Anossov, garantidos pelo teorema de Anossov e no caso de mapas quasi-Anossov, devido a sua forma e proximidade do mapa do Gato.

O teorema de Anossov traz uma série de propriedades de mapas do Gato para mapas de Anossov, particularmente permite que a obtenção das órbitas periódicas destes últimos seja essencialmente tão simples quanto as dos primeiros. Além disso a existência de homeomorfismo ligando a ambos permite dizer que essencialmente estes dois tipos de sistemas são idênticos do ponto de vista clássico.

Apesar desta forte ligação clássica, do ponto de vista quântico ambos sistemas se comportam de modo radicalmente diferente. Essa diferença reflete o caráter único dos mapas do Gato quantizados. Devido à sua linearidade todo seu comportamento é regido pela teoria de números, e isso faz com que este seja um sistema atípico. Já os mapas de Anossov, que possuem uma componente não linear, são um exemplo típico de sistema quântico cujo análogo clássico é caótico.

As estatísticas de níveis têm seu comportamento governado pelas previsões do Ensemble Circular Ortogonal (COE). É importante notar que este tipo de comportamento não está restrito à região de validade do teorema de Anossov, se estende muito além, indicando que a ligação com mapas do Gato não é o fator determinante neste comportamento. De fato os mapas quasi-Anossov que não possuem nenhuma ligação formal com os mapas do Gato também são bons exemplos de sistemas que seguem COE.

Do ponto de vista de teorias semiclássicas de órbitas periódicas para o espectro, novamente temos dois comportamentos distintos. Os mapas do Gato têm seu espectro descrito exatamente em termos de órbitas periódicas, uma característica incomum. Em geral tais teorias sofrem graves problemas de convergência e métodos de ressonância para essas teorias têm sido muito procurados. Mapas de Anossov acabam ficando entre os dois extremos, apesar de não serem descritos exatamente em termos de órbitas periódicas, essa é uma aproximação muito boa, tendo sua validade estendida inclusive para estruturas bem menores que h , quando em geral seria de se esperar que tais aproximações falhassem.

A análise desta teoria de órbitas periódicas ficou restrita a região de validade do teorema de Anossov, pois além desta região as órbitas não podem mais serem descritas em termos das órbitas de mapas do Gato. Neste caso a ligação com os mapas do Gato é determinante devido à existência de um código bem definido para essas órbitas. Quando saímos da região do teorema de Anossov não é mais possível usar este código e se torna muito difícil enumerar todas as órbitas periódicas.

O sucesso em se descrever o propagador de quasi-Anossov em termos de órbitas periódicas obtidas dos mapas do Gato, indica que esse tipo de aproximação não é dependente da sua relação com mapas do Gato. O problema principal é a enumeração destas órbitas, e uma vez que isto esteja resolvido a precisão da aproximação é muito boa.

O fato de se trabalhar com um sistema cujo espaço de fases seja limitado e finito trouxe diversas vantagens para a análise. Como os níveis são discretos e finitos, se pode estudar todo o espectro e não apenas seus níveis mais baixos com um ganho importante em precisão.

A Média de exponenciais complexas

Queremos calcular médias do tipo:

$$\left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{b} (am^2 + cm) + i2\pi f(m) \right] \right\rangle_m \quad (13)$$

onde $f(m)$ é a integral indefinida de uma função de período 1, a , b e c são inteiros e a média é definida como

$$\langle X \rangle_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N X$$

Assim $f(x)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int dx \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)) \right] \\ &= a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2\pi n} \cos(2\pi nx) - \frac{b_n}{2\pi n} \sin(2\pi nx) \right) \\ &= a_0 x + g(x) \end{aligned}$$

onde $g(x)$ é periódica. Podemos então reescrever (13) como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{i2\pi g(0)}}{N} \sum_{m=1}^N \exp \left[\frac{i\pi}{b} (am^2 + cm) + i2\pi a_0 m \right]$$

Como o primeiro termo da exponencial fornece uma função periódica com período p fixo, tomando apenas os N que sejam divisíveis por p , obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{i2\pi g(0)}}{N} \sum_{n=1}^{N/p} \sum_{l=1}^p \exp \left[\frac{i\pi}{b} (al^2 + cl) + i2\pi a_0 (np + l) \right]$$

Invertendo a ordem da soma e passando o limite para dentro

$$e^{i2\pi g(0)} \sum_{l=1}^p \exp \left[\frac{i\pi}{b} (al^2 + cl) + i2\pi a_0 l \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N/p} e^{i2\pi a_0 np}$$

A somatória em n é a soma de raízes da unidade se a_0 for racional e portanto é nula a menos que $a_0 = 0$. Se a_0 for um irracional então quando o limite for tomado a soma também se anulará, pois as potências de $e^{i2\pi p a_0}$ cobrirão o círculo unitário uniformemente. O caso $a_0 = 0$ é trivial e a soma dá N/p , assim a média é:

$$e^{i2\pi g(0)} \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \exp \left[\frac{i\pi}{b} (al^2 + cl) \right] = e^{i2\pi g(0)} \left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{b} (al^2 + cl) \right] \right\rangle_l$$

B Cálculo analítico da variância numérica

Podemos escrever a densidade de níveis no toro da seguinte forma:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i - Nl)$$

onde x_i são os níveis de energia normalizados para o intervalo $[0, N)$. Como a densidade de níveis é escrita em termos de somatórias, o objetivo é fazer o mesmo com a variância numérica. Esta é definida como:

$$V(L) = \frac{1}{N} \int_0^N [n(x, L) - L]^2 dx$$

com

$$n(x, L) = \int_{x-L/2}^{x+L/2} \rho(x') dx'$$

Como tanto x como L são tomados no intervalo $[0, N)$, a densidade de níveis fornecerá contribuições de três tipos

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^N [\delta(x - x_i - N) + \delta(x - x_i) + \delta(x - x_i + N)]$$

Desta forma obtemos

$$\begin{aligned} n(x, L) = \sum_{i=1}^N & [\theta(x_i + N - x + L/2)\theta(x + L/2 - x_i - N) + \\ & + \theta(x_i - x + L/2)\theta(x + L/2 - x_i) + \\ & + \theta(x_i - N - x + L/2)\theta(x + L/2 - x_i + N)] \end{aligned}$$

com $\theta(x)$ sendo a função degrau. Cada produto representa uma “barreira” de altura 1 centrada em x_i (ou $x_i + N$ ou $x_i - N$) com largura L . Para calcular $[n(x, L) - L]^2$ devemos notar que o produto de duas barreiras é uma outra barreira com largura igual à superposição das anteriores. Definindo a barreira n_i como $\theta(x_i - x + L/2)\theta(x + L/2 - x_i)$ obtemos,

$$n(x, L) = \sum_{i=1}^N (n_{i+N} + n_i + n_{i-N})$$

assim

$$n^2(x, L) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (n_{i+N} + n_i + n_{i-N})(n_{j+N} + n_j + n_{j-N})$$

Mas como a soma é simétrica e não pode haver sobreposição entre uma barreira em $x_i - N$ e outra em $x_i + N$ a equação acima se reduz a

$$n^2(x, L) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (n_{i+N}n_{j+N} + n_{i+N}n_j + n_i n_j + n_i n_{j-N} + n_{i-N}n_{j-N}) + n(x, L)$$

consequentemente a variância fica

$$V(L) = L^2 - \frac{1}{N} \int_0^N n(x, L)(2L - 1)dx + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \int_0^N (n_{i+N}n_{j+N} + n_{i+N}n_j + n_i n_j) + (n_i n_{j-N} + n_{i-N}n_{j-N})$$

Como a integral de $n(x, L)$ é NL e os termos dentro de cada parentesis da somatória dupla dão a mesma contribuição, mas nunca simultaneamente, obtemos

$$V(L) = L - L^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N [(x_i - x_j + L)\theta(x_i - x_j + L) + (x_j - x_i - N + L)\theta(x_j - x_i - N + L)]$$

O limite para L pequeno pode ser obtido trivialmente pois os argumentos das funções θ para L pequeno em geral são negativos e a soma não contribui. Como L^2 é pequeno frente a L sobra apenas $V(L) = L$.

Note-se que essa forma é facilmente estendida a outros sistema com níveis discretos. Se sua densidade de energia se escreve

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n)$$

A variância é simplesmente

$$V(L) = L - L^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (x_i - x_j + L)\theta(x_i - x_j + L)$$

No caso geral as somas se estendem ao infinito (espectro não limitado) e a variância numérica não é uma estatística tão boa quanto a rigidez.

Para sistemas no toro, ou que possuam um espectro finito e discreto as expressões aqui desenvolvidas fornecem resultados exatos com pouco esforço computacional.

Referências

- [1] V. I. Arnold, **Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica**, Mir, Moscou, 1979.
- [2] R. S. MacKay, J. B. Meiss, I. C. Percival, *Physica* **13D** (1984), 55.
- [3] J. Guckenheimer e P. Holmes, **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] J. H. Hannay e A. M. Ozório de Almeida, *J. Phys. A* **17** (1984), 3429.
- [5] N. C. A. da Costa e F. A. Doria, *Int. J. Theor. Phys.* (1991).
- [6] M. Reed e B. Simon, **Methods of Modern Mathematical Physics**, vol I, Academic Press, NY, 1972.
- [7] P. A. M. Dirac, **The Principles of Quantum Mechanics**, Oxford University Press, 1958.
- [8] M. V. Berry e K. E. Mount, *Rep. Prog. Phys.*, **35** (1972), 315.
- [9] M. Reed e B. Simon, **Methods of Modern Mathematical Physics**, vol IV, Academic Press, NY, 1978.
- [10] O. Bohigas e M. J. Giannoni, **Chaotic Motion and Random Matrix Theory in Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics**, NY, 1984
- [11] M. C. Gutzwiller,
 J. Math. Phys., **8** (1967), 1979.
 J. Math. Phys., **10** (1969), 1004.
 J. Math. Phys., **11** (1970), 1721.
 J. Math. Phys., **12** (1971), 343.
- [12] M.V. Berry e M. Tabor,
 Proc. R. Soc. London Ser. A, **349** (1976), 101.
 Proc. R. Soc. London Ser. A, **356** (1977), 375.
 J. Phys. A, **10** (1977), 371.

- [13] M. L. Balazs e A. Voros, *Ann. Phys. NY*, **190** (1989), 1.
- [14] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 140, 157 e 166.
- [15] F. J. Dyson e M. L. Mehta, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 701.
- [16] M. A. M. de Aguiar e A. M. Ozório de Almeida, *Nonlinearity*, **5** (1992), 523.
- [17] V. I. Arnold e A. Avez, **Ergodic Problems of Classical Mechanics**, Benjamin, NY, 1968.
- [18] A. M. Ozório de Almeida e M. Sarraceno, *Ann. Phys. NY*, **210** (1991), 1.
- [19] M. Saraceno, *Ann. Phys. NY*, **199** (1990), 37.
- [20] J. H. Hannay e M. V. Berry, *Physica 1D* (1980), 267.
- [21] J. P. Keating, *Nonlinearity* **4** (1990), 277 e 309.
- [22] V. I. Arnold e Ya G. Sinai,
 Dokl. Acad. Nauk. **144** (1962), 695.
 Sov. Math. Dokl. **3** (1962), 783.
- [23] I. Percival e F. Vivaldi, *Physica 25D* (1987), 105.
- [24] V. I. Arnold, **Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires**, Mir, Moscou, 1980.
- [25] I. Percival e F. Vivaldi, *Physica 27D* (1987), 373.
- [26] N. Bird e F. Vivaldi, *Physica 30D* (1988), 164.
- [27] M. Baranger, K. T. R. Davies e J. H. Mahoney, *Ann. Phys. NY*, **186** (1988), 95.
- [28] G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford e F. M. Izrailev, In **Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian System**, Springer Lecture Notes in Physics N° 93, 1979.

- [29] M. V. Berry, N. L. Balazs, M. Tabor e A. Voros, *Ann. Phys. NY*, **122** (1979), 26.
- [30] S. Lang, **Algebraic Number Theory**, Addison-Wesley, NY, 1970.
- [31] O. Bohigas e M. J. Giannoni, *Ann. Phys. NY*, **89** (1975), 393.
- [32] A. Voros, In **Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian System**, Springer Lecture Notes in Physics N° 93, 1979.
- [33] E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 1515.
- [34] B. Eckhardt, *J. Phys. A* **19** (1986), 1823.
- [35] M. Tabor, *Physica* **6D** (1983), 195.