

Bosonização no primeiro nível de Landau

Ricardo Luís Doretto

Orientador: Prof. Dr. AMIR ORDACGI CALDEIRA

Tese apresentada ao Instituto de Física
“Gleb Wataghin”, da Universidade Es-
tadual de Campinas, para a obtenção
do grau de Doutor em Ciências.

CAMPINAS, ABRIL, 2004

Bosonização no primeiro nível de Landau

Esta pagina corresponde a ficha catalografica.

Bosonização no primeiro nível de Landau

Esta pagina corresponde a carta de aprovacao.

... à minha amada,
Hosana Celeste.

O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; estuda-a porque se
delicia com ela, e se delicia com ela porque ela é bela.
Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la e,
se não valesse a pena conhecer a natureza, não valeria a pena viver.
Henri Poincaré

Baldo, você carecia mesmo de estudar e tirar carta-de-doutor,
porque para cuidar do trivial você jeito não tem.
Você não é habilitoso.
João Guimarães Rosa, em Grande sertão: veredas

Agradecimentos

Aos meus pais Maria e Hélio e à minha irmã Juliana que, mesmo não compreendendo muito bem o motivo para eu ter escolhido este caminho, sempre me apoiaram.

Ao Prof. Amir Caldeira pela dedicação durante os últimos quatro anos, pelas discussões sobre o trabalho, sobre física, etc, etc, ...

Ao Prof. Eduardo Miranda, Harry Westfhal e Armando Villares pelas discussões e dicas sobre o trabalho.

Ao Prof. Steven M. Girvin pela dedicação durante o estágio (com neve) realizado na universidade de Yale.

Aos amigos Vítor e Sandro pelos bons anos de convivência sob o mesmo teto.

Ao pessoal 94 (já faz tempo que tudo começou), Ana Lúcia (+Helena), Adriano, Bruno, Cínthia, Daltrini, Henrique, Herculano, Marcelo, Ricardo Aparício, Ricardo Urbano, Júlio, Márcio e Alexandre (+Iara).

Aos amigos da pós-graduação Demétrio, Luís Gregório, Cibelle, Lázaro, Fred, Fernando, Jeferson, Sérgio, Tércio, ... pelo prazer de dividir um café nas horas de descanso.

Ao IFGW pelo suporte técnico, em particular ao pessoal da CPG, da secretaria do DFMC e da biblioteca.

À Fapesp, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, foi desenvolvido um método de bosonização para o gás bidimensional de elétrons, sujeito a um campo magnético uniforme e perpendicular, quando o fator de preenchimento é unitário ($\nu = 1$). Mostramos que as excitações elementares neutras do sistema, conhecidas como magneto excitons, podem ser tratadas aproximadamente como bósons. Em seguida, aplicamos o método para estudar o sistema interagente. Neste caso, o Hamiltoniano do sistema fermiônico é mapeado em um modelo bosônico interagente, cuja relação de dispersão dos bósons é igual àquela anteriormente calculada por Kallin e Halperin. Além disso, o termo interagente leva à formação de estados ligados de dois bósons. Discutimos uma possível relação entre estas excitações e aquelas do tipo par skyrmion-antiskyrmion, de modo análogo ao encontrado para o modelo de Heisenberg ferromagnético. O limite semiclássico do Hamiltoniano bosônico interagente também é analisado e, aqui, o resultado encontrado está de acordo com aquele derivado a partir do modelo de Sondhi *et al.* para o *quantum Hall skyrmion*. O espectro de fotoluminescência do gás bidimensional de elétrons interagentes com $\nu = 1$ também foi calculado. Consideramos um modelo análogo àquele adotado para o estudo do problema do *X-ray edge* em metais, que foi resolvido analiticamente através de nosso método de bosonização. Calculamos os espectros de emissão das radiações circularmente polarizadas à direita e à esquerda para as situações onde a distância entre os planos do gás de elétrons e do buraco da banda de valência é menor ou maior que o comprimento magnético. Para o primeiro caso, é mostrado que o espectro de fotoluminescência pode ser entendido como a recombinação do chamado estado excitônico com o buraco de valência, enquanto, para o segundo caso, o espectro observado está relacionado à recombinação de um estado constituído por um elétron de spin *down* ligado a n -ondas de spin. Este estado mostra-se bastante adequado para descrever o *quantum Hall skyrmion*.

Abstract

We develop a bosonization scheme for the two-dimensional electron gas in the presence of an uniform magnetic field perpendicular to the two-dimensional system when the filling factor is one ($\nu = 1$). It is shown that the elementary neutral excitations of this system, known as magnetic excitons, can be treated approximately as bosons and the method is applied to the interacting system. It is shown that the Hamiltonian of the fermionic system is mapped into an interacting bosonic Hamiltonian, where the dispersion relation of the bosons agrees with previous Kallin and Halperin calculations. The interacting term accounts for the formation of two-boson bound states. We also discuss a possible relation between these excitations and the skyrmion-antiskyrmion pair one, in analogy with the ferromagnetic Heisenberg model. The semiclassical limit of the interacting bosonic Hamiltonian is analyzed and it is shown that the results are in agreement with those derived from the model of Sondhi *et al.* for the quantum Hall skyrmion. The photoluminescence spectra of the interacting two-dimensional electron gas at $\nu = 1$ is also calculated. We consider a model similar to the one adopted to study the X-ray spectra of metals and solve it analytically using the bosonization method. We calculated the emission spectra of the right and left circularly polarized radiations for the situations where the distance between the two-dimensional electron gas and the valence band hole are smaller and greater than the magnetic length. For the former, it was shown that the polarized photoluminescence spectra can be understood as the recombination of the so-called excitonic state with the valence band hole whereas, for the latter, the observed emission spectra can be related to the recombination of a state constituted by a spin down electron bound to n -spin waves. This state seems to be a good description for the quantum Hall skyrmion.

Conteúdo

Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de abreviações	xi
1 Introdução	1
2 Método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$	7
2.1 Partícula carregada em 2-D sob campo magnético	7
2.2 Definição dos operadores bosônicos	11
2.3 Operador densidade de elétrons	18
2.4 Operadores densidade de spin	20
2.5 Projeção no primeiro nível de Landau	22
2.6 Espaço de Hilbert	25
2.7 Gás bidimensional de elétrons interagentes com $\nu = 1$	29
2.7.1 Elétrons não interagentes	30
2.7.2 Interação Coulombiana	31
3 Bósons interagentes em 2-D	35
3.1 <i>Quantum Hall skyrmion</i>	35
3.2 Estados ligados de dois bósons	41
3.3 Bosonização e estados coerentes	49

4	Espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$	54
4.1	Introdução	54
4.2	O modelo	59
4.3	Estado inicial excitônico	62
4.4	Estado inicial skyrmion-buraco	67
	Conclusões	74
A	Bosonização em sistemas unidimensionais	78
B	Escalas de energia e comprimento para o 2DEG	81
C	Propriedades da função $G_{m,m'}(lq)$	82
D	O magneto exciton	85
E	Cálculo do comutador $[S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-]$	88
	Bibliografia	90

Lista de abreviações

Para auxiliar a leitura, segue abaixo a lista dos termos utilizados no texto.

- 2DEG - gás bidimensional de elétrons
- QHF - ferromagneto de Hall quântico
- Projeção no LLL - projeção no primeiro nível de Landau
- $\text{NL}\sigma\text{M}$ - modelo sigma não linear
- RPA - *Random phase approximation*
- ν - fator de preenchimento
- RCP - radiação circularmente polarizada à direita
- LCP - radiação circularmente polarizada à esquerda

Capítulo 1

Introdução

A bosonização de sistemas fermiônicos é um método não perturbativo que tem se mostrado bastante útil para o tratamento de sistemas unidimensionais fortemente correlacionados. A idéia básica deste método consiste em descrever as excitações elementares neutras do sistema fermiônico como bósons. Através deste procedimento, é possível mapear um sistema fermiônico, na maioria dos casos bastante complicado, em um modelo bosônico mais simples.

A primeira abordagem neste sentido foi feita por Bloch, que descreveu os estados excitados de um gás de férmions não como elétrons e buracos separadamente, mas como modos de oscilação do gás (ondas de som) e verificou que estas excitações obedeciam à estatística de Bose-Einstein [1]. Posteriormente, Tomonaga estendeu as idéias de Bloch para um sistema unidimensional de elétrons interagentes [2].

No modelo proposto por Tomonaga, que descreve um sistema unidimensional de elétrons interagentes cuja relação de dispersão é linear em momento, foi verificado que as excitações elementares neutras (pares elétron-buraco) poderiam ser tratadas como excitações coletivas e que estas apresentavam, aproximadamente, características bosônicas. Como consequência, o Hamiltoniano fermiônico original, que é *quártico* em operadores de campo fermiônico ψ , foi mapeado em um Hamiltoniano bosônico *quadrático* em operadores de campo bosônico ϕ , que pode ser diagonalizado através de uma transformação canônica [2, 3].

Um modelo análogo ao de Tomonaga foi proposto em seguida por Luttinger para descrever um sistema unidimensional de férmions interagentes sem spin [4]. A

solução correta deste modelo foi encontrada posteriormente por Mattis e Lieb, que verificaram que as relações de comutação entre os operadores densidade de elétrons, $\hat{\rho}_k$, seguiam uma álgebra análoga àquela apresentada por operadores de criação e destruição de bósons. Este fato permitiu a determinação de uma solução exata para o modelo de Luttinger [5].

Desde então, seguiu-se uma série de trabalhos, como relacionados na seção introdutória de [6], que contribuíram para a consolidação do método de bosonização de sistemas fermiônicos unidimensionais. Dentre estes, deve-se citar o trabalho de Haldane [7], que construiu explicitamente o chamado fator de Klein (operador que cria e destrói férmions no formalismo bosônico) em termos dos operadores fermiônicos originais e estabeleceu a chamada conjectura do líquido de Luttinger. Dentre as inúmeras aplicações da bosonização de sistemas fermiônicos unidimensionais, destacamos o estudo do problema Kondo [6], de nanotubos de carbono [8] e estados de borda do efeito Hall quântico [9]. Uma revisão detalhada sobre o método de bosonização bem como exemplos de aplicações podem ser encontrados em [6, 10, 11].

Alguns esforços têm sido feitos a fim de se estender este formalismo para sistemas de dimensões superiores. A primeira tentativa foi feita por Luther [12], que procurou generalizar o método de bosonização unidimensional, construindo uma fórmula de bosonização em termos das flutuações do mar de Fermi ao longo de direções radiais no espaço de momento. Entretanto, este formalismo não apresentou grande sucesso. Baseado nas idéias de Haldane [13], Castro Neto e Fradkin [14] e, independentemente, Houghton e Marston [15, 16] desenvolveram um método de bosonização para um líquido de Fermi em dimensão $D > 1$. Recentemente, Westfahl Jr. *et al.* desenvolveram um método de bosonização para o gás bidimensional de elétrons (2DEG) sob um campo magnético externo perpendicular ao plano da amostra (sistema Hall quântico) [17, 18].

O efeito Hall quântico é um dos fenômenos mais interessantes encontrados na física da matéria condensada. Este efeito foi observado inicialmente por von Klitzing e colaboradores [19] que, estudando um gás bidimensional de elétrons sujeito a um campo magnético perpendicular ao seu plano ($B \sim 5T$) e a baixas temperaturas ($T \sim 2K$), verificaram que para determinados valores do campo magnético externo a condutividade Hall, σ_{xy} , permanecia constante e simultaneamente a condutividade longitudinal $\sigma_{xx} \rightarrow 0$. Mais especificamente, definindo o fator de preenchimento

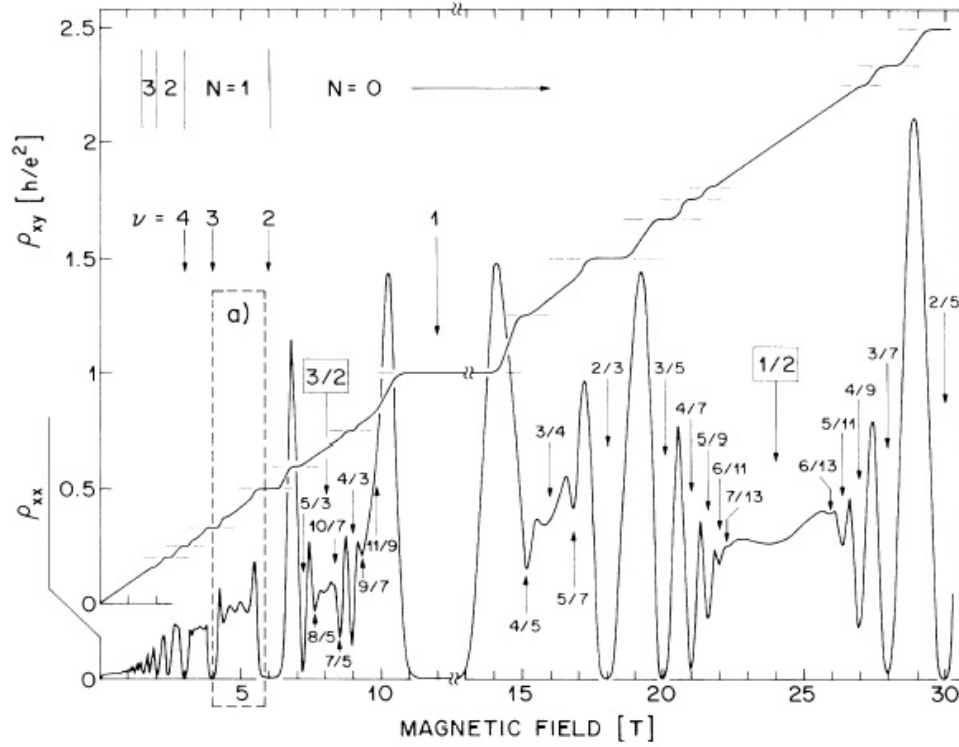


Figura 1.1: Resistividades longitudinal, ρ_{xx} , e Hall, ρ_{xy} de um 2DEG de alta mobilidade ($\mu \sim 1.3 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$) em função do campo magnético externo [20].

$\nu = n\phi_0/B$, onde n é a densidade de portadores do 2DEG e $\phi_0 = hc/e$ é o quantum de fluxo magnético, observou-se que os platôs na condutividade Hall ocorriam apenas para valores inteiros de ν e que $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$. Dessa forma, este fenômeno foi denominado efeito Hall quântico inteiro. A Fig. 1.1 mostra os resultados experimentais obtidos para as *resistividades* Hall e longitudinal do 2DEG [20].

Posteriormente, Tsui, Stömer e Gossard [21] encontraram um comportamento análogo para a condutividade de um 2DEG quando o fator de preenchimento era fracionário ($\nu = 1/3$). Neste caso, foram utilizadas amostras cuja mobilidade dos portadores de carga era maior que aquela das amostras utilizadas em [19] e o sistema foi submetido a campos magnéticos mais intensos ($B \sim 20\text{T}$) e a temperaturas mais baixas ($T \sim 0.5\text{K}$). Foi verificado que a condutividade longitudinal era desprezível, enquanto a condutividade Hall era igual a $e^2/(3h)$. Este fenômeno, em

seguida observado para outros valores fracionários de ν , foi chamado de efeito Hall quântico fracionário. Uma apresentação bastante detalhada deste assunto pode ser encontrada nas Refs.[22, 23, 24, 25, 26].

O efeito Hall quântico inteiro pode ser entendido em termos de um modelo de elétrons não interagentes num campo magnético externo, sujeitos a um potencial externo devido às impurezas (dopantes) presentes nas heteroestruturas de GaAs/AlGaAs, onde o 2DEG é formado [22, 25, 26]. Por outro lado, para compreendermos o efeito Hall quântico fracionário é necessário considerar o efeito da interação Coulombiana entre os elétrons. Em 1983, Laughlin [27] propôs uma função de onda variacional que descreve as características essenciais do efeito Hall quântico fracionário com $\nu = 1/p$, onde p é um número ímpar. Nesta formulação, a incompressibilidade do líquido quântico quando $\nu = 1/p$ é uma manifestação da energia de gap necessária para a criação de uma quasi-partícula (vortex) com carga fracionária $\pm e/p$ quando elétrons são adicionados ou retirados do sistema. Um formalismo que também tem se mostrado bastante adequado para descrever o efeito Hall quântico fracionário é a chamada teoria de férmions compostos proposta por Jain [28, 29]. Neste formalismo, o sistema eletrônico interagente original, sujeito a um campo magnético forte, é mapeado em um sistema de férmions compostos (elétrons ligados a um número par de quantas de fluxo, ϕ_0) sujeitos a um campo magnético fraco, de modo que o efeito Hall quântico fracionário pode ser compreendido como o efeito Hall quântico inteiro de férmions compostos [28, 29]. Aqui, a função de onda tentativa sugerida por Jain é essencialmente uma generalização daquela de Laughlin. Recentemente, Shankar e Murthy [30] sugeriram uma teoria Hamiltoniana de férmions compostos para o efeito Hall quântico fracionário.

Uma exceção ao quadro acima ocorre quando o fator de preenchimento é unitário ($\nu = 1$), i.e., quando todos os elétrons estão restritos ao primeiro nível de Landau. Neste caso, como no efeito Hall fracionário, temos um sistema eletrônico fortemente correlacionado. O estado fundamental do sistema é um estado spin polarizado, pois todos os elétrons preenchem completamente o primeiro nível de Landau de spin *up*, constituindo o estado denominado ferromagneto de Hall quântico [22, 23, 24]. As excitações elementares neutras são descritas por magneto excitons [31] que, no limite de longos comprimentos de onda, podem ser interpretados como excitações do tipo onda de spin do ferromagneto de Hall quântico. Além disso, as excitações

elementares carregadas não são descritas apenas por uma quasi-partícula, mas por uma textura de spins denominada *quantum Hall skyrmion* [32]. Esta excitação será discutida com mais detalhes no Cap. 3.

O método de bosonização para o 2DEG sob campo magnético externo desenvolvido por Westfahl Jr. *et al.* [17, 18] permitiu estudar o sistema Hall apenas no limite de campos magnéticos fracos, i.e., quando há um número inteiro e suficientemente grande de níveis de Landau completamente preenchidos, $\nu \gg 1$. Neste caso, foi mostrado que as excitações elementares neutras do sistema podem ser descritas em uma linguagem bosônica. O Hamiltoniano do sistema bidimensional de elétrons interagentes foi mapeado em um hamiltoniano bosônico quadrático, cuja relação de dispersão dos bósons está de acordo com os resultados anteriormente obtidos por Kallin e Halperin através de cálculos do tipo RPA (*Random Phase Approximation*).

Dado que o sistema Hall quântico com $\nu = 1$ é um sistema eletrônico fortemente correlacionado bastante interessante e que o método de bosonização apresentado em [17, 18] se mostrou bem sucedido para estudar o sistema Hall quântico no limite $\nu \gg 1$, seria interessante procurar estender esta técnica para o caso de campos magnéticos fortes, em particular, quando o fator de preenchimento é unitário. Este é precisamente o objetivo do presente trabalho.

O próximo capítulo será dedicado ao desenvolvimento do método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$. Partindo da descrição do sistema eletrônico não-interagente na base dos níveis de Landau, verificaremos que as excitações elementares neutras podem ser tratadas aproximadamente como bósons e, assim, o operador bosônico será definido. A representação bosônica dos operadores densidade de elétron e densidade de spins será derivada e será mostrada a relação entre o presente método de bosonização e o formalismo da projeção no primeiro nível de Landau, desenvolvida por Girvin e Jach [33] para o estudo da mecânica quântica no subespaço do primeiro nível de Landau. A reorganização do espaço de Hilbert também será discutida. O capítulo se encerra com a aplicação da técnica ao 2DEG interagentes com $\nu = 1$. Veremos que o Hamiltoniano fermiônico é mapeado em um modelo bosônico interagente.

No capítulo 3, o modelo bosônico interagente obtido no capítulo anterior será estudado. Vamos verificar através de dois procedimentos diferentes (cálculo da energia dos estados ligados de dois bósons e “limite semiclássico”) se este modelo pode

ser utilizado para descrever o *quantum Hall skyrmion*.

O capítulo 4 será dedicado à segunda aplicação do método, i.e., ao cálculo do espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$. Será adotado um modelo análogo àquele utilizado por Schotte e Schotte para o estudo do problema do *X-ray edge* em metais [34]. Veremos como a técnica de bosonização desenvolvida permite calcular analiticamente o espectro de emissão de radiação circularmente polarizada.

Finalmente, no último capítulo, será feito um resumo dos resultados obtidos e as principais conclusões serão apresentadas.

Capítulo 2

Método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$

Neste capítulo, será apresentado o método de bosonização que foi desenvolvido para o gás bidimensional de elétrons (2DEG) quando o fator de preenchimento é unitário ($\nu = 1$). Nossa proposta é baseada no trabalho de Westfahl Jr. e colaboradores [17, 18] que elaboraram um método de bosonização para o 2DEG, porém no limite de campo magnético fraco quando há um número inteiro e suficientemente grande de níveis de Landau completamente preenchidos, e nos resultados obtidos para a generalização deste método para o caso de elétrons com spin apresentados em [35].

2.1 Partícula carregada em 2-D sob campo magnético

Vamos inicialmente considerar um único elétron se movimentando no plano $x - y$ sob a ação de um campo magnético perpendicular constante $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. O Hamiltoniano do sistema é dado por,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{p}$ é o momento canonicamente conjugado a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{A}$ é o potencial vetor. No gauge simétrico,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2} B_0 (y\hat{x} - x\hat{y}).$$

Classicamente, o elétron se movimenta em uma órbita circular com frequência angular $w_c = eB/mc$ (frequência ciclotrônica). Neste caso, o módulo da velocidade da partícula

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})),$$

e a posição do centro da órbita ciclotrônica (centro de órbita)

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} + \hat{z} \times \frac{\mathbf{v}}{w_c}$$

são constantes de movimento.

Definindo as variáveis complexas $V = v_x + iv_y$, $P = p_x + ip_y$, $Z = x + iy$ e $Z_0 = R_{0x} + iR_{0y}$, no gauge simétrico, as constantes de movimento são escritas como

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{m}P + \frac{1}{2}iw_cZ, \\ Z_0 &= Z + \frac{i}{w_c}V. \end{aligned}$$

Aplicando o método de quantização canônica para as variáveis canonicamente conjugadas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$, verifica-se que as relações de comutação entre V e Z_0 são dadas por

$$\begin{aligned} [V, V^\dagger] &= -\frac{2\hbar w_c}{m} = -2l^2w_c^2, \\ [Z_0, Z_0^\dagger] &= \frac{2\hbar}{mw_c} = 2l^2, \\ [V^\dagger, Z_0] &= [V, Z_0] = 0, \end{aligned}$$

onde $l = \sqrt{\hbar c/(eB)}$ é o comprimento magnético. Introduzindo dois operadores escada independentes d e g , tais que $[d, d^\dagger] = [g, g^\dagger] = 1$ e $[d, g] = [d, g^\dagger] = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} V &= -i\sqrt{2}lw_cd^\dagger, \\ Z_0 &= \sqrt{2}lg. \end{aligned} \tag{2.2}$$

É fácil verificar que os operadores V e Z_0 definidos pela Eq. (2.2) satisfazem as relações de comutação acima.

Dessa forma, o Hamiltoniano (2.1) pode ser escrito como

$$H_0 = \hbar w_c (d^\dagger d + \frac{1}{2}), \quad (2.3)$$

cujos auto-valores, níveis de oscilador harmônico degenerados denominados *níveis de Landau*, são dados por

$$E_{n,m} = \hbar w_c (n + \frac{1}{2}), \quad (2.4)$$

e os respectivos auto-vetores por

$$\begin{aligned} |n\ m\rangle &= \frac{(d^\dagger)^n (g^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}} |0\ 0\rangle, \\ \langle \mathbf{r} | 0\ 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-r^2/4l^2}, \\ \langle \mathbf{r} | n\ m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4l^2}} G_{m+n,n}\left(\frac{i\mathbf{r}}{l}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

A função $G_{m+n,n}(x)$ está definida no apêndice C.

Semiclassicamente, um elétron no estado $|n\ m\rangle$ pode ser interpretado como uma partícula se movimentando em uma órbita ciclotrônica com raio igual a $l\sqrt{2n+1}$ e cujo centro está localizado a uma distância $l\sqrt{2m+1}$ da origem do sistema de coordenadas, como ilustrado na figura 2.1. De fato, considerando que o sistema é um disco de área $\mathcal{A}$, cujo centro está localizado na origem do sistema de coordenadas, a distância do centro da órbita ciclotônica à origem é dada por

$$\sqrt{R_{0x}^2 + R_{0y}^2} |n\ m\rangle = \sqrt{2l^2(g^\dagger g + 1/2)} |n\ m\rangle = \underbrace{l\sqrt{2m+1}}_r |n\ m\rangle,$$

enquanto o raio da órbita ciclotrônica por

$$\sqrt{(R_{0x} - x)^2 + (R_{0y} - y)^2} |n\ m\rangle = \sqrt{2l^2(d^\dagger d + 1/2)} |n\ m\rangle = \underbrace{l\sqrt{2n+1}}_{r_c} |n\ m\rangle.$$

Considerações análogas podem ser feitas para uma partícula de carga positiva $+e$. Neste caso, $w_c = -eB/mc$ e assim, os operadores V e Z_0 obedecem às relações de comutação

$$[V, V^\dagger] = \frac{2\hbar w_c}{m} = 2l^2 w_c^2,$$

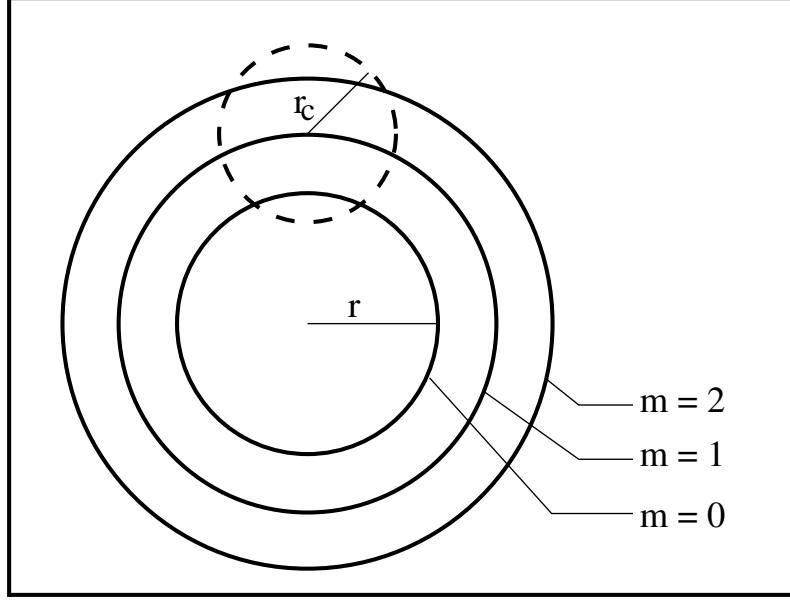


Figura 2.1: Representação esquemática das órbitas ciclotrônicas no gauge simétrico.

$$[Z_0, Z_0^\dagger] = -\frac{2\hbar}{mw_c} = -2l^2,$$

$$[V^\dagger, Z_0] = [V, Z_0] = 0.$$

Neste caso, as definições (2.2) são modificadas para

$$V = i\sqrt{2}lw_cd_h, \quad (2.6)$$

$$Z_0 = \sqrt{2}lg_h^\dagger, \quad (2.7)$$

de modo que o hamiltoniano (2.1) assume a forma

$$H_0 = -\hbar w_c(d_h^\dagger d_h + \frac{1}{2}). \quad (2.8)$$

Uma análise detalhada deste problema é feita em [24]. O formalismo aqui apresentado segue aquele descrito no apêndice A de [17], o qual é análogo àquele discutido em [24] com as seguintes alterações $g \rightarrow b^\dagger$ e $d^\dagger \rightarrow -ia$.

2.2 Definição dos operadores bosônicos

Vamos considerar um sistema constituído por N elétrons sem spin, não interagentes, se movimentando no plano $x - y$ (2DEG) sob a ação de um campo externo $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. O sistema é descrito pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \int d^2r \Psi^\dagger(\mathbf{r}) (-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

onde m^* é a massa efetiva do elétron no semiconductor (veja apêndice B) e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ é o potencial vetor no gauge simétrico. $\Psi^\dagger(\mathbf{r})$ é o operador de campo fermiônico que pode ser escrito na base dos níveis de Landau como

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) &= \sum_{n,m} \langle n \ m | \mathbf{r} \rangle c_{nm}^\dagger \\ &= \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-|r|^2/4l^2} G_{m+n,n}^*(ir/l) c_{nm}^\dagger, \\ \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{n,m} \langle \mathbf{r} | n \ m \rangle c_{nm} \\ &= \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-|r|^2/4l^2} G_{m+n,n}(ir/l) c_{nm}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $r = x + iy$. O operador fermiônico $c_{nm}^\dagger$ cria um elétron no nível de Landau n com centro de órbita m e obedece às relações de anti-comutação

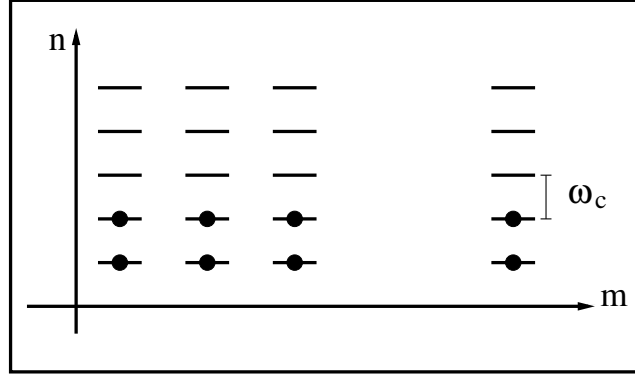
$$\{c_{nm}^\dagger, c_{n'm'}^\dagger\} = \{c_{nm}, c_{n'm'}\} = 0 \quad (2.11)$$

$$\{c_{nm}^\dagger, c_{n'm'}\} = \delta_{nn'} \delta_{mm'},$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots, N_\phi$. Aqui, $N_\phi = \mathcal{A} n_B$ é a degenerescência de cada nível de Landau, com $n_B = 1/(2\pi l^2)$ e $\mathcal{A}$ é a área do sistema. Substituindo as Eqs. (2.10) em (2.9), verifica-se que o Hamiltoniano do sistema é diagonal na base dos níveis de Landau,

$$\mathcal{H} = \sum_{n,m} \hbar w_c (n + \frac{1}{2}) c_{nm}^\dagger c_{nm}, \quad (2.12)$$

onde $w_c = eB/(m^*c)$ é a frequência ciclotrônica. Definindo o fator de preenchimento $\nu = N/N_\phi$ como o número de níveis de Landau preenchidos, para ν inteiro, o estado


 Figura 2.2: Representação do estado fundamental do 2DEG com $\nu = 2$.

fundamental do 2DEG é obtido preenchendo-se completamente os ν níveis de Landau de menor energia,

$$|GS\rangle = \prod_{n=0}^{\nu-1} \prod_{m=0}^{N_\phi-1} c_{nm}^\dagger |0\rangle, \quad (2.13)$$

onde $|0\rangle$ é o estado do vácuo. A Fig. 2.2 ilustra o estado $|GS\rangle$ acima quando $\nu = 2$.

Vamos agora considerar o spin eletrônico e restringir o espaço de Hilbert apenas ao nível de Landau de mais baixa energia ($n = 0$). Neste caso, os operadores de campo fermiônico (2.10) assumem a forma

$$\Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-|\mathbf{r}|^2/4l^2} G_{0,m}(-i\mathbf{r}^*/l) c_{m\sigma}^\dagger, \quad (2.14)$$

$$\Psi_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-|\mathbf{r}|^2/4l^2} G_{m,0}(i\mathbf{r}/l) c_{m\sigma},$$

onde $c_{m\sigma}^\dagger$ cria um elétron com spin σ no primeiro nível de Landau com centro de órbita m e segue às seguintes relações de anti-comutação

$$\{c_{m\sigma}^\dagger, c_{m'\sigma'}^\dagger\} = \{c_{m\sigma}, c_{m'\sigma'}\} = 0, \quad (2.15)$$

$$\{c_{m\sigma}^\dagger, c_{m'\sigma'}\} = \delta_{m,m'} \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad \text{com } \sigma = \uparrow \text{ ou } \downarrow.$$

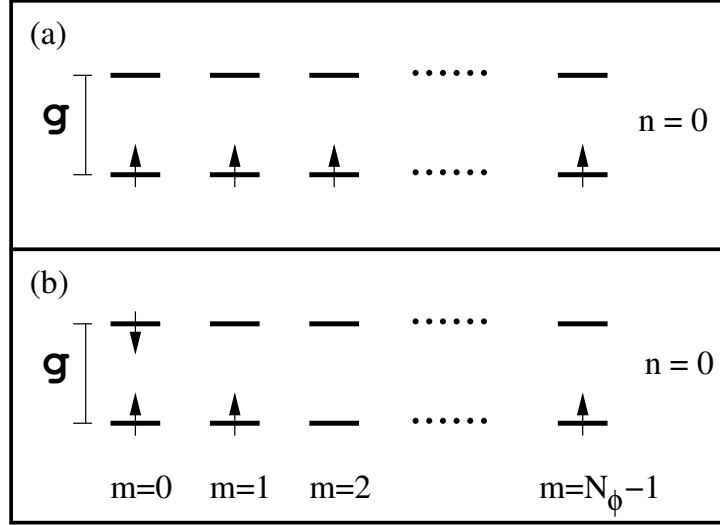


Figura 2.3: Representação esquemática: (a) estado fundamental do 2DEG com $\nu = 1$ (ferromagneto de Hall quântico) e (b) excitação elementar neutra (par partícula-buraco). $g = g^* \mu_B B$ é a energia Zeeman.

Além do termo de energia cinética $\mathcal{H}_0$ [Eq. (2.9)], é necessário incluir o termo de energia Zeeman $\mathcal{H}_Z$ no Hamiltoniano total do sistema,

$$\mathcal{H}_Z = -\frac{1}{2}g^* \mu_B B \sum_{\sigma} \int d^2r \sigma \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Aqui, $g^* > 0$ é o fator giromagnético do elétron (veja apêndice B) e μ_B é o magneton de Bohr. Substituindo as Eqs. (2.14) nas expressões (2.9) e (2.16), o Hamiltoniano total do 2DEG, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_Z$, é escrito como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{m,\sigma} \hbar \omega_c c_{m\sigma}^{\dagger} c_{m\sigma} - \frac{1}{2} g^* \mu_B B \sum_{m,\sigma} \sigma c_{m\sigma}^{\dagger} c_{m\sigma}. \quad (2.17)$$

Nota-se que $\mathcal{H}$ é diagonal na base dos níveis de Landau e que o termo de energia cinética é apenas uma constante. As energias dos estados de uma partícula são dadas por $-g^* \mu_B/2$ e $g^* \mu_B/2$ e a degenerescência dos respectivos auto-estados é igual a N_{ϕ} .

Para $\nu = 1$, o estado fundamental do 2DEG, $|FM\rangle$, é obtido completando-se inteiramente o primeiro nível de Landau de spin *up* (ferromagneto de Hall quântico)

$$|FM\rangle = \prod_{m=0}^{N_\phi-1} c_{m\uparrow}^\dagger |0\rangle, \quad (2.18)$$

como ilustrado na Fig. 2.3 (a). Neste caso, cada centro de órbita é ocupado por um único elétron de spin *up* (cada elétron de spin *up* está associado a um único quanta de fluxo). $|FM\rangle$ é um autovetor do operador S_z (componente z do spin total do sistema) cujo autovalor é igual a $N_\phi/2$.

As excitações elementares neutras do sistema são descritas por pares elétron-buraco ou spin-*flips*, já que um elétron de spin *up* é destruído e um elétron de spin *down* é criado no ferromagneto de Hall quântico [Fig. 2.3 (b)]. Estes estados excitados podem ser construídos aplicando-se o operador de spin $S^- = S_x - iS_y$ no estado fundamental $|FM\rangle$,

$$|\Psi\rangle \propto S^- |FM\rangle.$$

Como descrito no apêndice A, no método de bosonização para o gás unidimensional de elétrons, os operadores de criação e destruição de bósons são derivados a partir do operador densidade de elétrons, $\hat{\rho}(k)$, pois as excitações do tipo elétron-buraco são obtidas pela ação do operador $\hat{\rho}(k)$ sob o estado fundamental do sistema. A fim de se definir os operadores bosônicos, a relação de comutação entre os operadores $\hat{\rho}(k)$ de momentos diferentes é analisada. Aqui, será seguido o mesmo procedimento entretanto, neste caso, é necessário analisar os operadores densidade de spin $S^+(\mathbf{r}) = S_x(\mathbf{r}) + iS_y(\mathbf{r})$ e $S^-(\mathbf{r}) = S_x(\mathbf{r}) - iS_y(\mathbf{r})$, mais especificamente, analisar a transformada de Fourier destes operadores.

Vamos, inicialmente, estudar o operador densidade de elétrons de spin σ , que é definido como

$$\rho_\sigma(\mathbf{r}) = \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\Psi_\sigma(\mathbf{r}).$$

Utilizando as expressões (2.14) e a definição da função $G_{m,m'}(x)$ (veja apêndice C), pode-se mostrar que a transformada de Fourier deste operador é dada por

$$\rho_\sigma(\mathbf{q}) = \int d^2r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\Psi_\sigma(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m,m'} \int d^2r \, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle m|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|m'\rangle c_{m\sigma}^\dagger c_{m'\sigma} \\
 &= \sum_{m,m'} \langle m|e^{-i(qz^\dagger + q^*z)/2}|m'\rangle c_{m\sigma}^\dagger c_{m'\sigma} \\
 &= e^{-|lq|^2/2} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lq) c_{m\sigma}^\dagger c_{m'\sigma}, \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

onde $q = q_x + iq_y$ e o operador z é definido como na equação (C.1). Note que a ação do operador $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{q})$ sobre o estado $|FM\rangle$ não gera uma excitação do tipo par partícula-buraco.

Por outro lado, o operador densidade de spin é definido como ($\hbar = 1$)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\sigma}_{\alpha,\beta} \Psi_\beta(\mathbf{r}),$$

onde as componentes do vetor $\hat{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Entretanto, vamos definir os operadores densidade de spin $S^+(\mathbf{r})$ e $S^-(\mathbf{r})$ apenas pelos respectivos elementos de matriz não nulos. Em termos dos operadores de campo fermiônico, temos que

$$\begin{aligned}
 S^+(\mathbf{r}) &\equiv \Psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\downarrow(\mathbf{r}), \\
 S^-(\mathbf{r}) &\equiv \Psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

De modo análogo à equação (2.19), é possível calcular a transformada de Fourier dos operadores densidade de spin acima e mostrar que

$$S^+(\mathbf{q}) = e^{-|lq|^2/4} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(-lq) c_{m\uparrow}^\dagger c_{m'\downarrow}, \tag{2.20}$$

$$S^-(\mathbf{q}) = e^{-|lq|^2/4} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(-lq) c_{m\downarrow}^\dagger c_{m'\uparrow}. \tag{2.21}$$

É fácil verificar que a relação de comutação entre os operadores $S^+(\mathbf{q})$ e $S^-(\mathbf{q})$ é proporcional à transformada de Fourier dos operadores densidade $\rho_\uparrow(\mathbf{r})$ e $\rho_\downarrow(\mathbf{r})$ (veja o apêndice E para detalhes),

$$[S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-] = e^{l^2 q q'^*/2} \rho_\uparrow(\mathbf{q} + \mathbf{q}') - e^{l^2 q' q^*/2} \rho_\downarrow(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \tag{2.22}$$

Como os valores esperados de $\rho_{\uparrow}(\mathbf{q})$ e $\rho_{\downarrow}(\mathbf{q})$ no estado fundamental (2.18) são $\langle \rho_{\uparrow}(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \rangle = N_{\phi} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}$ e $\langle \rho_{\downarrow}(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \rangle = 0$, o valor esperado do comutador $[S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-]$ é simplesmente

$$\langle [S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-] \rangle = e^{-|lq|^2/2} N_{\phi} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}. \quad (2.23)$$

Note que, a partir da relação acima, podemos construir operadores bosônicos em função dos operadores fermiônicos $c_{m\sigma}^{\dagger}$ e $c_{m\sigma}$.

Vamos definir os seguintes operadores $b_{\mathbf{q}}$ e $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ por

$$b_{\mathbf{q}} \equiv \frac{1}{\sqrt{N_{\phi}}} e^{i|q|^2/4} S_{-\mathbf{q}}^+ \quad (2.24)$$

$$b_{\mathbf{q}}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{N_{\phi}}} e^{i|q|^2/4} S_{\mathbf{q}}^-. \quad (2.25)$$

e aproximar a relação de comutação entre $b_{\mathbf{q}}$ e $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ pelo seu valor esperado no estado fundamental (2.18),

$$[b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] \approx \langle [b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] \rangle = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}. \quad (2.26)$$

Desse modo, pode-se afirmar que $b_{\mathbf{q}}$ e $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ são aproximadamente operadores bosônicos. De modo análogo ao modelo de Tomonaga para o gás unidimensional de elétrons (apêndice A), a relação (2.26) será considerada exata. Esta é a principal aproximação do método. Note que esta aproximação é similar àquela adotada em cálculos do tipo RPA (uma revisão sobre o método RPA pode ser encontrada em [36]). A partir deste ponto, será considerado que

$$b_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\phi}}} e^{-|lq|^2/4} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(-lq) c_{m\uparrow}^{\dagger} c_{m'\downarrow} \quad (2.27)$$

$$b_{\mathbf{q}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{N_{\phi}}} e^{-|lq|^2/4} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lq) c_{m\downarrow}^{\dagger} c_{m'\uparrow}, \quad (2.28)$$

são operadores bosônicos, que obedecem às relações canônicas de comutação

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] &= [b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}] = 0, \\ [b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}] &= \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

O ferromagneto de Hall quântico, $|FM\rangle$, é o vácuo para os bósons, já que $b_{\mathbf{q}} \propto c_{m\uparrow}^{\dagger} c_{m'\downarrow}$ e a ação do operador fermiônico $c_{m'\downarrow}$ sobre $|FM\rangle$ é igual a zero. Logo, o

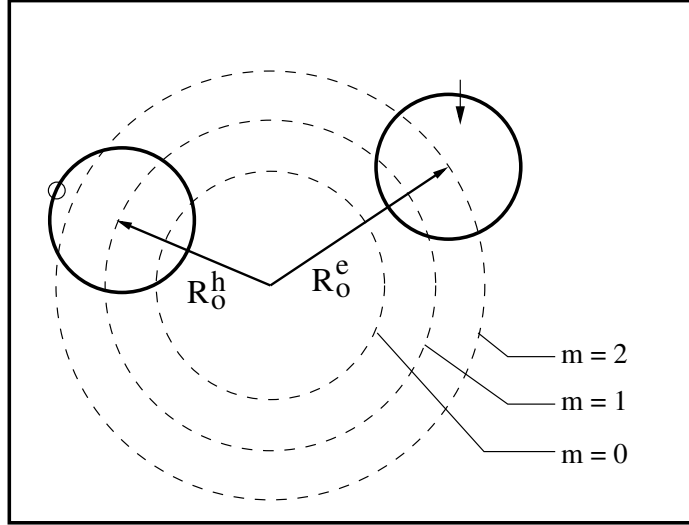


Figura 2.4: Representação esquemática do magneto exciton: elétron e buraco excitados localizados respectivamente nos centros de órbita $m = 2$ e $m = 1$. $\mathbf{R}_0^e$ e $\mathbf{R}_0^h$ são os vetores posição dos centros de órbita do elétron e do buraco, respectivamente.

espaço de Hilbert bosônico é gerado pela aplicação do operador $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ sobre $|FM\rangle$, i.e., os autovetores deste espaço são escritos como

$$|\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle = \prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} |FM\rangle, \quad n_{\mathbf{q}} \geq 0, \quad (2.30)$$

e $\sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} \leq N_\phi$, pois, caso contrário, o estado obtido não é físico.

O estado $b_{\mathbf{q}}^\dagger |FM\rangle$ é uma combinação linear de excitações do tipo partícula-buraco, como ilustrado na Fig. 2.3 (b), onde o buraco e o elétron apresentam spin *down*. De fato, o operador $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ é análogo ao operador $e_{n,p}^\dagger(q)$, com $n = p = 0$, discutido nas Refs. [17, 18] e no apêndice D, que cria uma excitação elementar neutra, denominada *magneto exciton* [31], quando aplicado sobre o estado fundamental (2.13).

O momento $\mathbf{q}$ do bóson $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ corresponde ao “momento do centro de massa dos centros de órbita do par elétron-buraco” [31]. De fato, definindo $\mathbf{P}_0$ como o momento canonicamente conjugado ao vetor $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{R}_0^e + \mathbf{R}_0^h)/2$, o qual é definido como o centro de massa dos centros de órbita do elétron e do buraco, e escrevendo $\mathbf{P}_0$ na

forma complexa como na Sec. 2.1, verifica-se que (veja o apêndice D para detalhes)

$$P_0 b_{\mathbf{q}}^\dagger |FM\rangle = \hbar q b_{\mathbf{q}}^\dagger |FM\rangle.$$

Aqui, os vetores $\mathbf{R}_0^e$ e $\mathbf{R}_0^h$ descrevem, respectivamente, as posições dos centros de órbita do elétron e do buraco que constituem o magneto exciton, como ilustrado na Fig. 2.4. Além disso, $\mathbf{q}$ é um bom número quântico pois o momento total de um sistema bidimensional de partículas carregadas sob a ação de um campo magnético externo é conservado quando a carga total do sistema é nula [37]. Lembrar que o bóson $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ é eletricamente neutro pois é constituído por pares elétron-buraco.

Dessa forma, verificamos que as excitações elementares neutras do 2DEG podem ser tratadas aproximadamente como bósons e que estes correspondem às excitações do tipo magneto exciton, definidas anteriormente por Kallin e Halperin [31]. A próxima etapa consistirá no cálculo da representação bosônica do Hamiltoniano do 2DEG interagentes com $\nu = 1$, onde a associação feita entre o bóson $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ e o magneto exciton ficará evidente. Entretanto, antes desta etapa, vamos determinar a forma bosônica do operador densidade de elétrons, dos operadores densidade de spin e verificar a relação entre estes.

2.3 Operador densidade de elétrons

Apesar do operador bosônico b não ser derivado diretamente do operador densidade de elétrons, como no gás unidimensional, este operador será bastante importante quando a interação Coulombiana entre os elétrons no sistema bidimensional for considerada. Nesta seção, será mostrado que é possível escrever o operador densidade de elétrons como um produto dos operadores bosônicos $b_{\mathbf{q}}$ and $b_{\mathbf{q}}^\dagger$.

A representação bosônica de um operador qualquer $\mathcal{O} = \mathcal{O}(c_{m,\sigma}^\dagger, c_{m',\sigma})$ pode ser obtida aplicando-se este operador aos autoestados (2.30), os quais geram o espaço de Hilbert bosônico, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}|\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle &= \mathcal{O}\left(\prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}}\right)|FM\rangle \\ &= [\mathcal{O}, \prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}}]|FM\rangle + \prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} \mathcal{O}|FM\rangle. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Utilizando as expressões de $\mathcal{O}$ e $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ em função dos operadores fermiônicos $c_{m\sigma}^\dagger$ and $c_{m'\sigma}$, podemos calcular o valor de $\mathcal{O}|FM\rangle$, além da relação de comutação $[\mathcal{O}, b_{\mathbf{q}}^\dagger]$ que permitirá a determinação do valor do comutador da Eq. (2.31).

Seguindo o procedimento descrito acima, vamos calcular a forma do operador densidade de elétrons de spin up , $\rho_\uparrow(\mathbf{k})$, em função dos operadores b 's. É fácil verificar que

$$[\rho_\uparrow(\mathbf{k}), b_{\mathbf{q}}^\dagger] = -e^{-|lk|^2/4} e^{-i\mathbf{k}\wedge\mathbf{q}/2} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger, \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{k} \wedge \mathbf{q} = l^2 \hat{z} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{q})$. Através da propriedade (C.14) da função $G_{m,m'}(x)$, verifica-se que $\rho_\uparrow(\mathbf{k})|FM\rangle$ é simplesmente uma constante,

$$\begin{aligned} \rho_\uparrow(\mathbf{k})|FM\rangle &= e^{-|lk|^2/2} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lk) c_{m\uparrow}^\dagger c_{m'\uparrow} |FM\rangle \\ &= \delta_{\mathbf{k},0} N_\phi |FM\rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Utilizando (2.32) e após um pouco de álgebra, temos que

$$\begin{aligned} \rho_\uparrow(\mathbf{k})|\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle &= - \sum_{p \in \{n_{\mathbf{q}}\}} e^{-|lk|^2/4 - i\mathbf{k}\wedge\mathbf{p}/2} b_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}^\dagger \frac{n_{\mathbf{p}}(b_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}-1}}{\sqrt{n_{\mathbf{p}}!}} \\ &\quad \times \prod_{q \in \{n_{\mathbf{q}}\}, q \neq p} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} |FM\rangle + \delta_{\mathbf{k},0} N_\phi |\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle \\ &= -e^{-|lk|^2/4} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{k}\wedge\mathbf{p}/2} b_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} |\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle + \delta_{\mathbf{k},0} N_\phi |\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Na segunda etapa da relação acima, foi considerado que

$$b_{\mathbf{p}}(b_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}} = [b_{\mathbf{p}}, (b_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}}] + (b_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}}(b_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}-1} + (b_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}$$

e que $b_{\mathbf{p}}|FM\rangle = 0$. Como a equação (2.34) é válida para qualquer estado do espaço de Hilbert bosônico, temos uma identidade entre operadores, donde pode-se concluir que

$$\rho_\uparrow(\mathbf{k}) = \delta_{\mathbf{k},0} N_\phi - e^{-|lk|^2/4} \sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{k}\wedge\mathbf{q}/2} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} \quad (2.35)$$

é a representação bosônica do operador densidade $\rho_\uparrow(\mathbf{k})$.

De modo análogo, a expressão do operador $\rho_{\downarrow}(\mathbf{k})$ em termos dos bósons é dada por

$$\rho_{\downarrow}(\mathbf{k}) = e^{-|l\mathbf{k}|^2/4} \sum_{\mathbf{q}} e^{+i\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}, \quad (2.36)$$

já que $\rho_{\downarrow}(\mathbf{k})|FM\rangle = 0$ e

$$[\rho_{\downarrow}(\mathbf{k}), b_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = e^{-|l\mathbf{k}|^2/4} e^{+i\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger}.$$

Um procedimento alternativo para o cálculo de (2.35) e (2.36) consiste em determinar uma expressão em termos do b 's que satisfaça a relação de comutação $[\mathcal{O}, b_{\mathbf{q}}^{\dagger}]$. Por exemplo, para o operador densidade de elétrons $\rho_{\uparrow}(\mathbf{k})$, o comutador $[\rho_{\uparrow}(\mathbf{k}), b_{\mathbf{q}}^{\dagger}] \propto b_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{\dagger}$ e assim, podemos concluir que a expressão de $\rho_{\uparrow}(\mathbf{k})$ em função dos b 's deve ser proporcional a $b_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}$. Escolhendo apropriadamente os coeficientes, encontramos facilmente o primeiro termo da Eq. (2.35). Para completar a expressão, é necessário apenas adicionar o termo referente à ação do operador $\rho_{\uparrow}(\mathbf{k})$ sobre $|FM\rangle$. Na sequência, este procedimento será utilizado pois é mais simples que o primeiro aqui apresentado.

Finalmente, a partir das equações (2.35) e (2.36), temos a forma bosônica do operador densidade de elétrons

$$\hat{\rho}_{\mathbf{k}} = \rho_{\uparrow}(\mathbf{k}) + \rho_{\downarrow}(\mathbf{k}) \quad (2.37)$$

$$= \delta_{\mathbf{k},0} N_{\phi} + 2ie^{-|l\mathbf{k}|^2/4} \sum_{\mathbf{q}} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}.$$

Observe que $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$ é quadrático em operadores bosônicos.

2.4 Operadores densidade de spin

Nesta seção, será determinada a representação bosônica dos operadores densidade de spin $S_{\mathbf{k}}^z$, $S_{\mathbf{k}}^{+}$ e $S_{\mathbf{k}}^{-}$. Veremos que a representação obtida é análoga àquela proposta por Dyson para estudar ondas de spin em sistemas ferromagnéticos [38].

Como a componente z do operador densidade de spin pode ser definida como

$$S^z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) - \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r})),$$

a expressão da transformada de Fourier deste operador em função dos operadores bosônicos segue imediatamente das Eqs. (2.35) e (2.36),

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{k}}^z &= \frac{1}{2}(\rho_{\uparrow}(\mathbf{k}) - \rho_{\downarrow}(\mathbf{k})) \\ &= \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{k},0}N_{\phi} - e^{-|lk|^2/4} \sum_{\mathbf{q}} \cos(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Apesar dos operadores bosônicos $b_{\mathbf{q}}$ e $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ serem definidos a partir das equações (2.24) e (2.25) respectivamente, estas não correspondem às representações bosônicas de $S_{\mathbf{k}}^{+}$ e $S_{\mathbf{k}}^{-}$ pois

$$[S_{\mathbf{q}}^{+}, S_{\mathbf{q}'}^{-}] \neq \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}.$$

De fato, é necessário seguir o procedimento apresentado na Sec. 2.3 a fim de calcular a forma bosônica dos operadores $S_{\mathbf{k}}^{+}$ e $S_{\mathbf{k}}^{-}$.

A partir das Eqs. (2.21) e (2.28) verifica-se que $[S_{\mathbf{k}}^{-}, b_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = 0$. Dessa forma, a ação de $S_{\mathbf{k}}^{-}$ sobre os autoestados (2.30) está relacionada apenas à ação deste operador sobre o ferromagneto de Hall quântico $|FM\rangle$,

$$S_{\mathbf{k}}^{-}|\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle = \underbrace{[S_{\mathbf{k}}^{-}, \prod_{\mathbf{q} \in \{n_{\mathbf{q}}\}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}}]}_0 |FM\rangle + \prod_{\mathbf{q} \in \{n_{\mathbf{q}}\}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} S_{\mathbf{k}}^{-} |FM\rangle. \quad (2.39)$$

Diferentemente do resultado encontrado para o operador densidade de elétrons, $S_{\mathbf{k}}^{-}|FM\rangle$ não é simplesmente uma constante, mas este estado é proporcional a uma combinação linear de termos do tipo $G_{m,m'}(-lq)c_{m\downarrow}^{\dagger}c_{m'\uparrow}|FM\rangle$. Neste caso, é bastante razoável utilizar a Eq. (2.25) para definir a representação bosônica do operador $S_{\mathbf{k}}^{-}$ como

$$S_{\mathbf{k}}^{-} \equiv \sqrt{N_{\phi}} e^{-|lk|^2/4} b_{\mathbf{k}}^{\dagger}. \quad (2.40)$$

Na próxima seção, veremos que (2.40) está bem definida pois esta satisfaz as relações de comutação entre os operadores densidade de spin, bem como entre estes e o operador densidade de elétrons.

Por outro lado, $S_{\mathbf{k}}^{+}|FM\rangle = 0$ [veja Eq. (2.20)] e, assim, a forma bosônica do operador $S_{\mathbf{k}}^{+}$ é completamente determinada pela relação de comutação entre este

operador e $b_{\mathbf{q}}^\dagger$,

$$\begin{aligned}
 [S_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{e^{lq^2/4}}{\sqrt{N_\phi}} (e^{l^2 k q^*/2} \rho_\uparrow(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - e^{+l^2 k^* q/2} \rho_\downarrow(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \\
 &= \sqrt{N_\phi} e^{-|lk|^2/4} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{q}} - \frac{2e^{-|lk|^2/4}}{\sqrt{N_\phi}} \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{p}} \cos\left(\frac{1}{2}(\mathbf{k} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{p}) - \mathbf{q} \wedge \mathbf{p})\right) b_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}}. \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Como o primeiro termo da Eq. (2.41) é proporcional a $\delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{q}}$, podemos concluir que o operador $S_{\mathbf{k}}^+$ deve apresentar um termo linear do tipo $b_{\mathbf{k}}$. Além disso, o segundo termo é uma combinação linear de produtos da forma $b_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$, implicando que $S_{\mathbf{k}}^+$ deve apresentar um termo proporcional ao produto $b^\dagger b b$. Escolhendo adequadamente os coeficientes, temos que

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{k}}^+ &= \sqrt{N_\phi} e^{-|lk|^2/4} b_{-\mathbf{k}} \\
 &\quad - \frac{e^{-|lk|^2/4}}{\sqrt{N_\phi}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \cos\left(\frac{1}{2}(\mathbf{k} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{p}) - \mathbf{q} \wedge \mathbf{p})\right) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{q}}, \tag{2.42}
 \end{aligned}$$

que satisfaz a relação de comutação (2.41).

Como dito inicialmente, a representação (2.38), (2.40) e (2.42) é análoga àquela considerada anteriormente por Dyson para estudar ondas de spin em sistemas ferromagnéticos [38]. Um ponto interessante deste formalismo é que, apesar do requerimento de hermiticidade, $S_{\mathbf{k}}^+ = (S_{-\mathbf{k}}^-)^\dagger$, não ser satisfeito, as relações de comutação usuais entre os operadores de spin são obedecidas. Uma revisão detalhada do formalismo de Dyson pode ser encontrada em [39]. Veremos na próxima seção que a representação (2.38), (2.40) e (2.42), derivada através do método de bosonização, preserva as relações de comutação entre os operadores densidade de spin projetados no subespaço formado apenas pelo primeiro nível de Landau.

2.5 Projeção no primeiro nível de Landau

Nesta seção, será mostrado que, utilizando as representações bosônicas dos operadores $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$, $S_{\mathbf{k}}^z$, $S_{\mathbf{k}}^+$ e $S_{\mathbf{k}}^-$, as relações de comutação entre estes estão de acordo com os

resultados obtidos a partir do formalismo da projeção no primeiro nível de Landau (projeção no LLL).

A projeção no LLL é uma formulação da mecânica quântica no subespaço formado apenas pelo primeiro nível de Landau, desenvolvida por Girvin e Jach [33] (uma revisão deste formalismo é apresentada nas Refs. [22] e [24]). Uma consequência importante da projeção dos operadores densidade de elétrons e densidade de spin neste subespaço é que as relações de comutação entre estes operadores são modificadas, i.e., os operadores de spin projetados não seguem as relações canônicas de comutação além de não comutarem com o operador densidade de elétrons.

Vamos considerar inicialmente o operador densidade de elétrons. A partir da equação (2.37), é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}_{\mathbf{k}}, \hat{\rho}_{\mathbf{q}}] &= 4e^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \sin(\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}/2) e^{-|l\mathbf{k} + l\mathbf{q}|^2/4} \\ &\times \sum_{\mathbf{p}} \sin((\mathbf{k} + \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p}/2) b_{\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nota-se que $[\hat{\rho}_{\mathbf{k}}, \hat{\rho}_{\mathbf{q}}]$ é proporcional a uma combinação linear do produto $b_{\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ com coeficientes iguais a $\sin((\mathbf{k} + \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p}/2)$. Este resultado implica que o comutador acima deve estar relacionado ao operador densidade de elétrons $\hat{\rho}_{\mathbf{q} + \mathbf{k}}$. Comparando-se (2.43) com a Eq. (2.37), encontramos que

$$[\hat{\rho}_{\mathbf{k}}, \hat{\rho}_{\mathbf{q}}] = -2ie^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \sin(\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}/2) \hat{\rho}_{\mathbf{q} + \mathbf{k}}, \quad (2.44)$$

que está de acordo com o resultado obtido através da projeção no LLL. De fato, através deste formalismo mostra-se que os operadores densidade de elétrons projetados, $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$, seguem uma álgebra análoga à dos operadores de translação no campo magnético. Quando uma partícula é transladada ao longo de um paralelogramo formado pelos vetores $\mathbf{k}l^2$ e $\mathbf{q}l^2$ (veja Fig. 2.5) em uma região onde há um campo magnético externo, a partícula adquire uma fase igual a $\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}$. Como consequência, o comutador $[\hat{\rho}_{\mathbf{k}}, \hat{\rho}_{\mathbf{q}}]$ é diferente de zero e igual a (2.44), em oposição ao resultado esperado para operadores não projetados [22].

Do mesmo modo, a partir das expressões (2.37) e (2.38), verifica-se que o comutador entre os operadores $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$ e $S_{\mathbf{q}}^z$ é também não nulo

$$[\hat{\rho}_{\mathbf{k}}, S_{\mathbf{q}}^z] = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{k},0} \delta_{\mathbf{q},0} N_{\phi}^2 - 2ie^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) e^{-|l\mathbf{k} + l\mathbf{q}|^2/4}$$

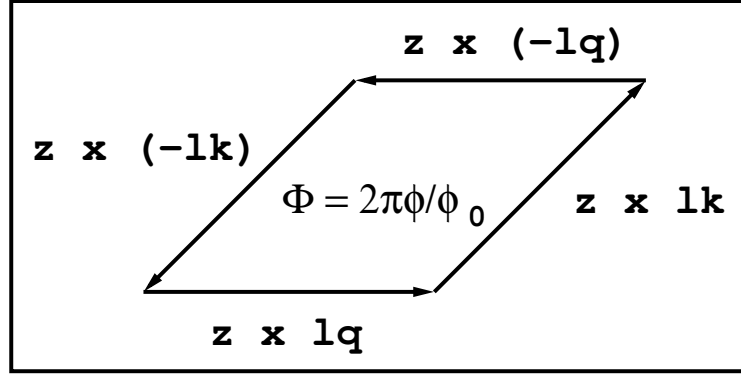


Figura 2.5: Ilustração de uma translação magnética e do fator de fase. Quando um elétron se movimenta ao longo do paralelogramo, este adquire uma fase $\Phi = 2\pi\phi/\phi_0 = q \wedge k$, onde ϕ é o fluxo magnético através do paralelogramo e ϕ_0 é o quantum de fluxo magnético [22].

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{\mathbf{p}} \cos((\mathbf{k} + \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \\
 & = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{k},0} \delta_{\mathbf{q},0} N_\phi^2 - 2ie^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^z.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

O resultado acima implica que, no subespaço do primeiro nível de Landau, as excitações de carga e de spin estão emaranhadas [22]. Como será discutido no Cap. 3, a excitação elementar carregada do gás bidimensional de elétrons interagentes com $\nu = 1$ é descrita por uma textura de spins, denominada *quantum Hall skyrmion* [32].

Finalmente, seguindo cálculos análogos, é possível verificar que as relações de comutação entre os operadores densidade de spin $S_{\mathbf{q}}^z$, $S_{\mathbf{k}}^+$ e $S_{\mathbf{q}}^-$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 [S_{\mathbf{k}}^-, S_{\mathbf{q}}^z] & = e^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/2} \cos(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) \sqrt{N_\phi} e^{-|lk+lq|^2/4} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \\
 & = e^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \cos(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^-
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$[S_{\mathbf{k}}^+, S_{\mathbf{q}}^z] = -e^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/2} \cos(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) (\sqrt{N_\phi} e^{-|lk+lq|^2/4} b_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e^{-|lk+lq|^2/4}}{\sqrt{N_\phi}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \cos\left(\frac{1}{2}(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{p}) \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{p}')\right) b_{(\mathbf{k}+\mathbf{q})+\mathbf{p}+\mathbf{p}'}^\dagger b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}'} \\
 & = -e^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/2} \cos(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [S_{\mathbf{k}}^+, S_{\mathbf{q}}^-] & = N_\phi e^{-|lk|^2/2} \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}} \\
 & -2e^{-|lk|^2/4 - |lq|^2/4} \sum_{\mathbf{p}} \cos\left(\frac{1}{2}((\mathbf{k} + \mathbf{q}) \wedge \mathbf{p})\right) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \\
 & = 2e^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/2} \cos(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^z + ie^{l^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) \hat{\rho}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}. \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

Novamente, todas as relações de comutação (2.46) - (2.48) concordam com os resultados obtidos através da projeção no LLL.

Podemos compreender facilmente porque o método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$ recupera os resultados obtidos a partir da projeção no LLL. Inicialmente, devemos lembrar que todos os operadores considerados até este momento foram expandidos em termos dos operadores de criação e destruição de férmions, $c_{m\sigma}^\dagger$ e $c_{m\sigma}$, utilizando as expressões (2.14), que são os operadores de campo fermiônico projetados no primeiro nível de Landau. Além disso, como discutido em detalhes no apêndice C, a função $G_{m,m'}(x)$ é o elemento de matrix, na base dos níveis de Landau, do operador projetado $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$. Quando a transformada de Fourier de qualquer operador é calculada utilizando o formalismo da projeção no LLL, é necessário considerar a forma deste operador.

Retornando à seção anterior, podemos concluir que o operador $S_{\mathbf{q}}^-$ está bem definido pela Eq. (2.40), já que esta preserva as relações de comutação entre o operador densidade de elétrons e os demais operadores densidade de spin projetados no subespaço considerado.

2.6 Espaço de Hilbert

No método de bosonização para o gás unidimensional de elétrons, Haldane [7] mostrou que o espaço de Hilbert fermiônico, gerado pela ação de operadores de criação e destruição de férmions sobre o vácuo $|N = 0\rangle_0$, é idêntico ao espaço de

Hilbert bosônico, gerado pela ação de operadores de criação de bósons sobre os estados fundamentais de N -partículas, $|N\rangle_0$ ($N \in \mathbb{Z}$), que são o vácuo para os bósons [6].

A afirmação acima pode ser elegantemente demonstrada, calculando-se as funções de partição grand canônicas para os Hamiltonianos dos sistemas fermiônico e bosônico não interagentes, onde o segundo Hamiltoniano é derivado a partir do primeiro através do método de bosonização para o gás unidimensional de elétrons. Uma vez que todos os termos da função de partição são positivos, a relação entre as duas funções de partição nos permite comparar o grau de degenerescência dos espaços de Hilbert fermiônico e bosônico. Para o 2DEG com $\nu = 1$, estamos considerando um sistema constituído por um número fixo de partículas $N = N_\phi$, de modo que a análise da função de partição canônica é mais adequada.

Na Sec. 2.2, foi mostrado que o Hamiltoniano do 2DEG a $\nu = 1$ é dado apenas pelo termo de energia Zeeman, que é diagonal na base dos níveis de Landau [veja Eq.(2.17)]. Os autovalores de energia podem ser escritos como $E_n = ng - gN_\phi/2$, onde $0 \leq n \leq N_\phi$ é o número de elétrons com spin *down*. A degenerescência $\mathcal{P}_n^F$ de cada autoestado de energia é facilmente calculada,

$$\mathcal{P}_n^F = \binom{N_\phi}{n} \cdot \binom{N_\phi}{n} = \left(\frac{N_\phi!}{n!(N_\phi - n)!} \right)^2,$$

de modo que a função de partição fermiônica assume a forma

$$\mathcal{Z}_0^F = \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}_0^F}) = e^{\beta g N_\phi/2} \sum_{n=0}^{N_\phi} \binom{N_\phi}{n}^2 e^{-n\beta g}, \quad (2.49)$$

com $\beta = 1/(K_B T)$.

Por outro lado, como será discutido na Sec. 2.7.1, o Hamiltoniano bosônico [Eq. (2.55)], derivado a partir daquele dos férmions não interagentes utilizando o método de bosonização, é diagonal na base dos autoestados $|\{n_{\mathbf{q}}\}\rangle$ [Eq. (2.30)]. Logo, a função de partição canônica é simplesmente dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^B &= \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}_0^B}) \sum_{\{n_{\mathbf{q}}\}} \langle \{n_{\mathbf{q}}\} | e^{-\beta\mathcal{H}_0^B} | \{n_{\mathbf{q}}\} \rangle \\ &= e^{\beta g N_\phi/2} \sum_{n=0}^{N_\phi} \mathcal{P}_n^B e^{-n\beta g}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aqui $\mathcal{P}_n^B$ é o número de autoestados com n -bósons e $n = \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}}$. Note que os autoestados com $n > N_\phi$ foram excluídos da soma acima, pois estes correspondem aos estados constituídos por um número de excitações elétron-buraco maior que o número de férmions N_ϕ .

Os valores de $\mathcal{P}_n^B$ são determinados pelo número de pontos no espaço de momento. O valor máximo do momento pode ser estimado, considerando o fato de que um bóson de momento $\mathbf{q}$, criado a partir da ação do operador $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ sobre o estado $|FM\rangle$, pode ser descrito como um par elétron-buraco cuja distância entre os centros dos centros de órbita do elétron e do buraco é igual a $|\mathbf{r}| = l^2|\mathbf{q}|$ (veja apêndice D). Além disso, como discutido na Sec. 2.1, uma partícula no primeiro nível de Landau localizada no centro de órbita m corresponde a uma partícula se movendo em uma órbita ciclotrônica com raio igual ao comprimento magnético l , cujo centro de órbita está localizado a uma distância $l\sqrt{2m+1}$ da origem do sistema de coordenadas. Dessa forma, a maior separação possível entre um elétron e um buraco no magneto exciton é aproximadamente igual a $\sqrt{2N_\phi}l$, correspondendo a $m = N_\phi$. Assim, o valor máximo do momento é igual a $q_{max} = \sqrt{2N_\phi}/l$, de modo que o número de pontos no espaço de momento é dado por

$$\sum_{\mathbf{q}} 1 = \frac{\mathcal{A}}{4\pi^2} \int d^2q = \frac{2\pi l^2 N_\phi}{4\pi^2} \int_0^{q_{max}} q dq \int d\theta = N_\phi^2. \quad (2.51)$$

Lembrar que $\mathcal{A}$ é a área do sistema.

A partir da análise acima, o número de estados com n -bósons é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^B &= 1 \\ \mathcal{P}_1^B &= N_\phi^2 \\ \mathcal{P}_2^B &= N_\phi^2 + \frac{N_\phi^2!}{(N_\phi^2 - 2)!2!} \\ &\dots \\ \mathcal{P}_n^B &= \frac{1}{n!} N_\phi^2 (N_\phi^2 + 1) \dots (N_\phi^2 + (n - 1)), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

e, assim, a função de partição para o Hamiltoniano bosônico pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}_0^B = e^{\beta g N_\phi/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{N_\phi} \mathcal{P}_n^B e^{-n\beta g} \right). \quad (2.52)$$

Observe que $\mathcal{Z}_0^B \gg \mathcal{Z}_0^F$, donde podemos concluir que o espaço de Hilbert bosônico é maior que o fermiônico. Apesar dos estados com $n \geq N_\phi$ terem sido removidos do cálculo da função de partição (2.52), ainda há estados não físicos presentes no espaço de Hilbert bosônico.

Esta supercompleteza do espaço de Hilbert bosônico pode ser facilmente compreendida. A partir de (2.49) e (2.52), verificamos que o número de estados de dois bósons é aproximadamente igual ao dobro do número de estados fermiônicos com dois elétrons de spin *down* ($n = 2$). Consideremos, por exemplo, um estado de dois bósons constituído por bósons cujos momentos são $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$, tais que $|lq_1|, |lq_2| < 1$. Na linguagem fermiônica, este estado pode ser visto como esquematizado na Fig. 3.2.a. Note que este estado é equivalente àquele formado por dois bósons de momentos $\mathbf{q}_3$ e $\mathbf{q}_4$, tais que $|lq_3|, |lq_4| \gg 1$ [Fig. 3.2.b]. Dessa forma, podemos concluir que há uma “dupla contagem” no número de estados de dois bósons. Este problema se agrava à medida que estados formados por n bósons ($n > 2$) são considerados. Apesar disto, é possível estudarmos a física de baixa energia do 2DEG com $\nu = 1$ através do método de bosonização já que, neste caso, há um pequeno número de bósons com momento $|lq| < 1$ presentes no sistema. Como veremos na próxima seção, a energia dos bósons aumenta com o aumento do módulo do momento [Eq. (2.62)].

Este problema poderia ser contornado, por exemplo, introduzindo-se um vínculo que restringiria o espaço de Hilbert bosônico apenas aos estados físicos. Entretanto, esta se mostrou uma tarefa bastante complicada. Por exemplo, não é possível seguir as idéias empregadas nas conhecidas representações dos operadores de spin em termos de bósons, tais como a representação de Schwinger [40]. Neste caso, os operadores de spin *locais* são escritos em função dos operadores bosônicos *locais* a_i e $\tilde{a}_i$,

$$S_i^+ = a_i^\dagger \tilde{a}_i, \quad S_i^- = \tilde{a}_i^\dagger a_i, \quad S_i^z = (a_i^\dagger a_i - \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i)/2.$$

O vínculo é facilmente determinado pois este está relacionado ao fato de que o número de bósons no sítio i deve ser igual a duas vezes o spin S , i.e., $a_i^\dagger a_i + \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i = 2S$. Esta mesma idéia não pode ser empregada aqui, já que os operadores bosônicos $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ e $b_{\mathbf{q}}$ não são locais. De fato, estes são combinações lineares de excitações elétron-buraco onde as partículas estão localizadas em diferentes centros de órbita. Até o

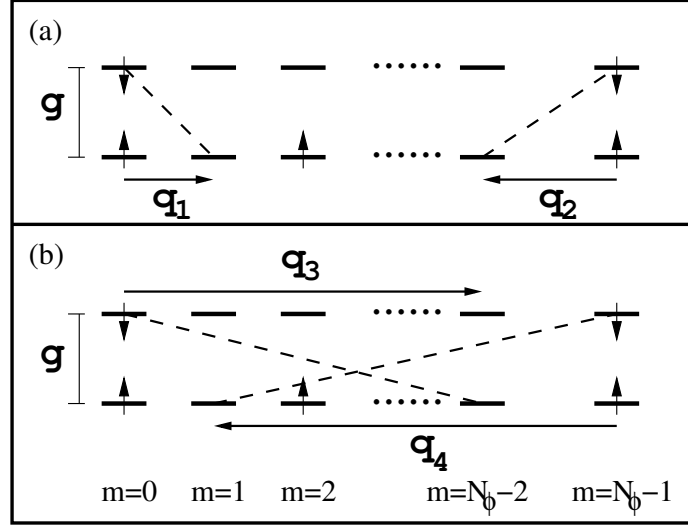


Figura 2.6: Representação esquemática de um estado de dois bósons: (a) $|lq_1|, |lq_2| < 1$ e (b) $|lq_3|, |lq_4| \gg 1$.

momento, não foi encontrado um modo sistemático para se restringir o espaço de Hilbert bosônico.

Entretanto, há subespaços bosônico e fermiônico correspondentes aos respectivos espaços de Hilbert que são idênticos. Note que os dois primeiros termos das equações (2.49) e (2.52) são iguais, implicando que o subespaço fermiônico gerado pelo ferromagneto de Hall quântico, $|FM\rangle$, e os estados constituídos por um único spin *down* é idêntico ao subespaço de Hilbert bosônico gerado pelo estado do vácuo e pelos estados de 1-bóson $b_q^\dagger|FM\rangle$.

2.7 Gás bidimensional de elétrons interagentes com $\nu = 1$

Nesta seção, o método de bosonização desenvolvido para o 2DEG com $\nu = 1$ será aplicado para estudar o gás bidimensional de elétrons interagentes com $\nu = 1$. Mostraremos que o Hamiltoniano do sistema de férmions interagentes é mapeado em um modelo de bósons interagentes.

2.7.1 Elétrons não interagentes

Vamos inicialmente considerar um sistema formado por N_ϕ elétrons não interagentes, restritos ao subespaço constituído apenas pelo primeiro nível de Landau. Como discutido na última seção, o Hamiltoniano que descreve o 2DEG não interagentes com $\nu = 1$ é dado apenas pelo termo Zeeman [Eq. (2.17)]. Vimos que, na base dos níveis de Landau, este pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_Z = -\frac{1}{2}g \sum_{\sigma} \sum_m \sigma c_{m\sigma}^\dagger c_{m\sigma}, \quad (2.53)$$

onde $g = g^* \mu_B B > 0$ é a energia Zeeman.

A fim de se determinar a forma bosônica do Hamiltoniano (2.53), é necessário calcular a relação de comutação entre $\mathcal{H}_0$ e o operador de criação de bósons $b_{\mathbf{q}}^\dagger$,

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_0, b_{\mathbf{q}}^\dagger] &= -\frac{1}{2}g \sum_{\sigma} \sum_{m,n,n'} \frac{e^{-|lq|^2/4}}{\sqrt{N_\phi}} \sigma G_{n,n'}(lq) [c_{m\sigma}^\dagger c_{m'\sigma}, c_{n\downarrow}^\dagger c_{n'\uparrow}] \\ &= g \sum_{n,n'} \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} e^{-|lq|^2/4} G_{n,n'}(lq) c_{n\downarrow}^\dagger c_{n'\uparrow} \\ &= g b_{\mathbf{q}}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Como o comutador acima é proporcional a $b_{\mathbf{q}}^\dagger$, $\mathcal{H}_0$ deve apresentar um termo da forma $g \sum_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}$ o que reproduz a relação de comutação (2.54). Além disso, a ação de $\mathcal{H}_0$ sobre $|FM\rangle$ é igual a uma constante, $-gN_\phi/2$. Assim, podemos concluir que a forma bosônica do termo de energia Zeeman é

$$\mathcal{H}_0 = g \sum_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}gN_\phi. \quad (2.55)$$

O mesmo resultado pode ser obtido através de uma forma mais rigorosa, calculando-se explicitamente a ação de $\mathcal{H}_0$ sobre os autoestados (2.30),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 | \{n_{\mathbf{q}}\} \rangle &= \mathcal{H}_0 \left(\prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} |FM\rangle \right) \\ &= [\mathcal{H}_0, \prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}}] |FM\rangle + \prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} \mathcal{H}_0 |FM\rangle \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$= (g \sum_{k \in \{n_{\mathbf{q}}\}} n_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} g N_{\phi}) \prod_{\mathbf{q}} \frac{(b_{\mathbf{q}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}}!}} |FM\rangle.$$

A análise acima mostra que o Hamiltoniano do 2DEG não interagentes com $\nu = 1$, restrito ao primeiro nível de Landau, é mapeado em um sistema de bósons não interagentes, cuja relação de dispersão é constante.

2.7.2 Interação Coulombiana

Vamos, agora, incluir a interação Coulombiana entre os elétrons. Neste caso, o Hamiltoniano total do sistema pode ser escrito como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}, \quad (2.57)$$

onde $\mathcal{H}_0$ é dado pela Eq. (2.53) e o termo interagente é dado por

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^2r d^2r' \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}). \quad (2.58)$$

Aqui, $V(|\mathbf{r}|) = e^2/(\epsilon r)$ é o potencial Coulombiano em 2-D e ϵ é a constante dielétrica do semiconductor onde está localizado o sistema eletrônico (veja o apêndice B). Substituindo (2.14) em $\mathcal{H}_{int}$ e reordenando os operadores fermiônicos $c_{m\sigma}^{\dagger}$ e $c_{m'\sigma'}$, é possível escrever o termo de interação em função dos operadores densidade de elétrons de spin σ como

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^2k}{8\pi^2} V(k) \rho_{\sigma}(\mathbf{k}) \rho_{\sigma'}(-\mathbf{k}), \quad (2.59)$$

onde $V(k)$ é a transformada de Fourier do potencial Coulombiano em 2-D,

$$V(k) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon k},$$

e $k = |\mathbf{k}|$.

A partir da forma bosônica dos operadores densidade, $\rho_{\sigma}(\mathbf{k})$, podemos escrever o termo interagente em função dos operadores de criação e destruição de bósons. Substituindo as equações (2.35) e (2.36) em (2.59), encontramos quatro termos distintos $\mathcal{H}_{int} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4$. O primeiro termo é simplesmente uma constante

relacionada ao fundo de cargas positivas necessárias para garantir a neutralidade elétrica do sistema,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{8\pi^2} \int d^2k V(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k},0}. \quad (2.60)$$

O segundo e o terceiro termos são nulos, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 &= -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{p}} \int d^2k V(\mathbf{k}) N_\phi \delta_{\mathbf{k},0} e^{-|lk|^2/4} \\ &\quad \times \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{p}/2) b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} = 0, \end{aligned}$$

enquanto o último é *quártico* em operadores bosônicos. Reescrevendo $\mathcal{H}_4$ em ordem normal nos operadores b , obtemos um termo quadrático e outro quártico em operadores bosônicos, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \int d^2k V(\mathbf{k}) e^{-|lk|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{p}/2) \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mathbf{q}} \int d^2k V(\mathbf{k}) e^{-|lk|^2/2} \sin^2(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \int d^2k V(\mathbf{k}) e^{-|lk|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{p}/2) \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}} \\ &= \frac{e^2}{\epsilon l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\mathbf{q}} \left(1 - e^{-|lq|^2/4} I_0(|lq|^2/4) \right) b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \int d^2k V(\mathbf{k}) e^{-|lk|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{p}/2) \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Aqui, $I_0(x)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo [41].

Adicionando a $\mathcal{H}_{int}$ a expressão obtida para o Hamiltoniano não interagente [Eq. (2.55)], encontramos a forma do Hamiltoniano total do 2DEG interagentes com $\nu = 1$ em função dos operadores bosônicos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ &= -\frac{1}{2} g N_\phi + \sum_{\mathbf{q}} w_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

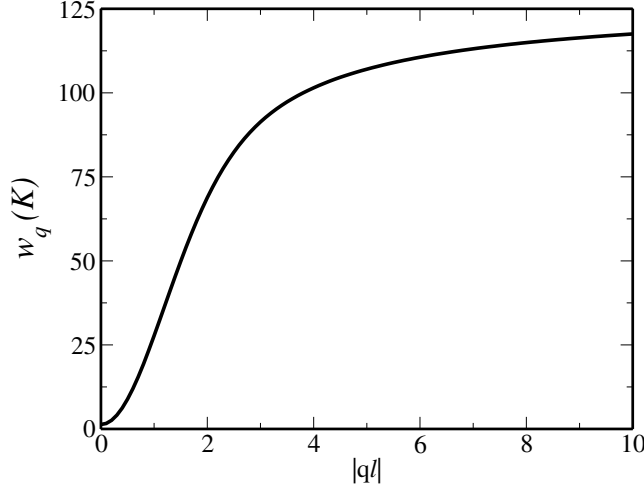


Figura 2.7: Relação de dispersão para os bósons em função do momento $\mathbf{q}$ para $B = 4 T$.

$$+ \frac{2}{\mathcal{A}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} V(k) e^{-|lk|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{p}/2) \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}}, \quad (2.61)$$

onde a relação de dispersão dos bósons é dada por

$$w_{\mathbf{q}} = g + \frac{e^2}{\epsilon l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{-|lq|^2/4} I_0(|lq|^2/4) \right). \quad (2.62)$$

O gráfico da curva acima, para um campo magnético externo $B = 4 T$, está mostrado na Fig. 2.7. Os valores da energia Zeeman g e da constante $\sqrt{\pi/2}e^2/(\epsilon l)$ em função do campo magnético B estão no apêndice B.

O Hamiltoniano (2.61) descreve um sistema bidimensional de bósons interagentes. O estado fundamental corresponde ao estado do vácuo $|FM\rangle$ [Eq. (2.18)] e sua energia é igual a $E_0 = -\frac{1}{2}gN_\phi$. Este resultado mostra que o estado fundamental do gás bidimensional de elétrons com $\nu = 1$ não se altera à medida que a interação Coulombiana entre os elétrons é incluída na descrição do sistema. Como mencionado anteriormente, o estado fundamental do sistema interagente é o ferromagneto de Hall quântico, mesmo no limite de energia Zeeman nula ($g \rightarrow 0$).

A excitação elementar neutra é descrita pelo bóson b , cuja relação de dispersão $w_{\mathbf{q}}$ é igual àquela obtida por Kallin e Halperin em cálculos diagramáticos [31]. As excitações de longo comprimento de onda podem ser consideradas como excitações do tipo onda de spin do ferromagneto de Hall quântico. De fato, considerando a expansão de (2.62) no limite de longos comprimentos de onda,

$$w_{\mathbf{q}} \approx g + \epsilon_B(lq)^2/4,$$

vemos que $w_{\mathbf{q}} \sim q^2$, de acordo com o comportamento observado para um sistema ferromagnético [42]. Por outro lado, as excitações de grande momento correspondem a pares quasilétron-quasiburaco bastante separados. Lembrar que a distância entre os centros de órbita do elétron e do buraco no magneto exciton é $|\mathbf{r}| = l^2|\mathbf{q}|$. À medida que o momento do bóson aumenta, a distância entre o elétron e o buraco também aumenta, de modo que a energia de correlação entre as partículas diminui. Daí, segue o fato de que a relação de dispersão (2.62) torna-se constante para $|lq| \rightarrow \infty$.

O resultado acima confirma a associação inicial (veja Sec. 2.2) feita entre o bóson b e o magneto exciton descrito em [31]. O ponto interessante é que o método de bosonização forneceu resultados além daqueles obtidos através dos cálculos diagramáticos [31], já que foi encontrada uma interação entre os bósons. No próximo capítulo, o modelo bosônico interagente obtido nesta seção será analisado.

Capítulo 3

Bósons interagentes em 2-D

Neste capítulo, vamos estudar o modelo bosônico interagente, obtido através do método de bosonização, a fim de verificar se este é adequado para descrever o *quantum Hall skyrmion*. Duas abordagens distintas serão adotadas. Por um lado, vamos estudar os estados ligados de dois bósons do Hamiltoniano (2.61) e, por outro lado, analisaremos o “limite semiclássico” de (2.61). O capítulo será iniciado com algumas considerações sobre a excitação elementar carregada do sistema Hall quântico com $\nu = 1$.

3.1 *Quantum Hall skyrmion*

Vimos no capítulo anterior que as excitações elementares neutras do 2DEG com $\nu = 1$ são descritas por magneto excitons ou ondas de spin que aproximadamente podem ser tratadas como bósons. Verificamos também que o magneto exciton cujo momento $|ql| \gg 1$ corresponde a um par quasilétron-quasiburaco suficientemente separados (não interagentes). Dessa forma, a partir da relação de dispersão (2.62) poderíamos concluir que a energia de uma excitação elementar carregada do sistema é igual a $1/2(g + \frac{e^2}{\epsilon l} \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ e que a componente z do spin total desta excitação é $S^Z = 1/2$.

Entretanto, a experiência mostra que este modelo não é suficiente para descrever o comportamento do 2DEG com $\nu = 1$. Motivados pelas medidas de magneto-transporte [43], Sondhi e colaboradores [32] sugeriram que a excitação carregada

do sistema Hall quântico com $\nu = 1$ seria descrita por uma textura de spins, que foi denominada *quantum Hall skyrmion*, ou simplesmente skyrmion. Este conceito foi introduzido em 1958 por Skyrme em física nuclear para descrever os núcleons (partículas fermiônicas) como sólitons topológicos do campo bosônico de píons [44]. A partir do trabalho de Sondhi *et al.*, este conceito também passou a ser empregado em física da matéria condensada.

A fim de descrever a excitação carregada do sistema Hall com $\nu = 1$, no limite de energia Zeeman $g \ll 1$, foi proposto um modelo sigma não linear generalizado em termos de um campo vetorial unitário $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, que está relacionado ao spin eletrônico, descrevendo assim a magnetização do sistema. A densidade de Lagrangeana efetiva deste modelo é dada por [32],

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}\bar{\rho}\mathcal{A}(\mathbf{n}) \cdot \partial_t \mathbf{n} - \frac{1}{2}\rho_S(\nabla \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}g^*\rho_0\mu_B \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} - \frac{e^2}{2\epsilon} \int d^2r' \frac{q(\mathbf{r})q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.1)$$

onde ρ_S é a dureza (*stiffness*) de spin, g^* é o fator giromagnético efetivo do elétron (veja apêndice B) e $\mathcal{A}(\mathbf{n})$ é o potencial vetor de monopolo magnético que está relacionado com o campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ por $\epsilon^{abc}\partial_a \mathcal{A}_b = n^c$. $q(\mathbf{r})$ é a densidade de carga topológica que pode ser escrita em termos do campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ como

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{n} \cdot (\partial_\alpha \mathbf{n} \times \partial_\beta \mathbf{n}), \quad (3.2)$$

onde $a, b, c = x, y, z$ e $\alpha, \beta = x, y$. Integrando-se a expressão (3.2) sobre todo o espaço, encontramos a carga topológica associada ao campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$,

$$Q = \int d^2r \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{n} \cdot (\partial_\alpha \mathbf{n} \times \partial_\beta \mathbf{n}). \quad (3.3)$$

O skyrmion corresponde à solução estática localizada (sóliton topológico) da densidade de Lagrangeana (3.1). O sóliton topológico é um objeto cuja estabilidade está relacionada com a estrutura da magnetização do sistema (campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$), sendo caracterizado por sua carga topológica Q . Algumas considerações sobre os conceitos de carga topológica e sóliton topológico podem ser encontradas nas Refs. [45, 46, 47].

Note que os dois primeiros termos de (3.1) descrevem a dinâmica de um sistema ferromagnético bidimensional, constituindo o chamado modelo sigma não linear (NL σ M) (para uma revisão, veja [46, 47]). O último termo de (3.1) está relacionado

à igualdade entre a densidade de skyrmions e a variação na densidade de carga dos elétrons em relação à distribuição uniforme, que corresponde ao ferromagneto de Hall quântico,

$$\rho(\mathbf{r}) - \bar{\rho}_{FM} = \nu q(\mathbf{r}).$$

Dessa forma, a carga elétrica Q_e associada ao skyrmion é proporcional à carga topológica Q do campo vetorial que descreve este objeto, i.e., $Q_e = \nu e Q$.

No limite de energia Zeeman $g \ll 1$, podemos aproximar a solução tipo sóliton de (3.1) por aquela obtida para o NL σ M. Este procedimento é bastante conveniente já que o NL σ M possui expressões analíticas [46, 48] para seu sóliton topológico, i.e.,

$$n_x = \frac{4\lambda x}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad n_y = \frac{4\lambda y}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad n_z = \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2}. \quad (3.4)$$

Aqui, λ é uma constante relacionada ao tamanho do sóliton. Neste caso, a densidade de carga topológica assume a forma

$$q(r) = \frac{1}{\pi} \frac{4\lambda^2}{(4\lambda^2 + r^2)^2} \quad (3.5)$$

e, é fácil verificar que a carga topológica associada a (3.4) é igual a $Q = 1$. O correspondente antisóliton é obtido substituindo-se $n_y \rightarrow -n_y$ em (3.4) e $q(r) \rightarrow -q(r)$ em (3.5), de modo que a sua carga topológica é $Q = -1$. Substituindo as Eqs.(3.4) e (3.5) no funcional de energia

$$E[\mathbf{n}] = - \int d^2r (\mathcal{L}_{NL\sigma M} - \frac{1}{2} \bar{\rho} \mathcal{A}(\mathbf{n}) \cdot \partial_t \mathbf{n}),$$

verifica-se que a energia de (3.4) é igual a $4\pi\rho_S$, independente do valor do parâmetro λ .

Como dito anteriormente, no limite de energia Zeeman pequena, a solução (3.4) é uma boa aproximação para o sóliton estático do modelo (3.1). Note que, neste caso, a invariância de escala observada para o NL σ M é quebrada devido à presença dos termos de energia Zeeman e de interação Coulombiana. Substituindo as expressões (3.4) no funcional de energia derivado a partir de (3.1),

$$E[\mathbf{n}] = - \int d^2r (\mathcal{L}_{eff} - \frac{1}{2} \bar{\rho} \mathcal{A}(\mathbf{n}) \cdot \partial_t \mathbf{n}),$$

e minimizando a expressão obtida em relação ao parâmetro λ , verifica-se que a energia do skyrmion é dada por [32]

$$E(g) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon l} \left[1 + \frac{3\pi}{4} \left(\frac{18}{\pi} \right)^{1/6} \left(\frac{\epsilon a_0}{l} \right)^{1/3} (g^* |\ln g^*|^{1/3}) \right], \quad (3.6)$$

enquanto seu tamanho por

$$\left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 = \frac{9\pi^2 l}{2^8 \epsilon a_0} (g^* |\ln g^*|^{-1}), \quad (3.7)$$

onde a_0 é o raio de Bohr e l é o comprimento magnético. Observe que, no limite de $g \rightarrow 0$, a energia para a criação de um par skyrmion-antiskyrmion é igual a $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon l}$, que corresponde à metade da energia necessária para a criação de um par quasilétron-quasiburaco, como obtido a partir da Eq. (2.62), no limite de momento $|ql| \gg 1$. Este resultado indica que o skyrmion é a excitação carregada de menor energia do 2DEG com $\nu = 1$. Um cálculo mais detalhado da energia e do tamanho do skyrmion pode ser encontrado na Ref. [49].

A solução (3.4) do modelo (3.1), bem como o processo de formação do skyrmion estão esquematicamente ilustrados na Fig. 3.1. Aqui, é representado apenas o campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ ao longo do eixo x do sistema de coordenadas. Como este campo apresenta simetria cilíndrica, a representação completa é obtida através de uma rotação ao longo do eixo z , que corresponde à posição do spin central de cada esquema. A Fig. 3.1(a) corresponde ao ferromagneto de Hall quântico (QHF), $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = 1$. Como o nível de Landau de spin *up* está completamente preenchido, o elétron extra adicionado deve apresentar spin *down*. Para o sistema não interagente, a introdução do elétron extra não altera a polarização de spin do sistema [Fig. 3.1(b)]. Por outro lado, para o sistema interagente, a interação Coulombiana entre os elétrons favorece o alinhamento dos spin vizinhos e, no limite de energia Zeeman nula esta distorção se estende até a fronteira do sistema [Fig. 3.1(c)]. O aumento da energia Zeeman torna o processo de spin-*flip* energeticamente desfavorável, de modo que a distorção adquire um tamanho finito λ [Fig. 3.1(d)], formando uma textura de spins, i.e., o skyrmion. Observe que, em relação ao estado fundamental do sistema (QHF), a componente z do spin total desta excitação é $S^Z > 1/2$, diferentemente do quasilétron discutido no início desta seção. Como mencionado anteriormente, o valor de λ é determinado pela competição entre a energia Zeeman e a interação Coulombiana.

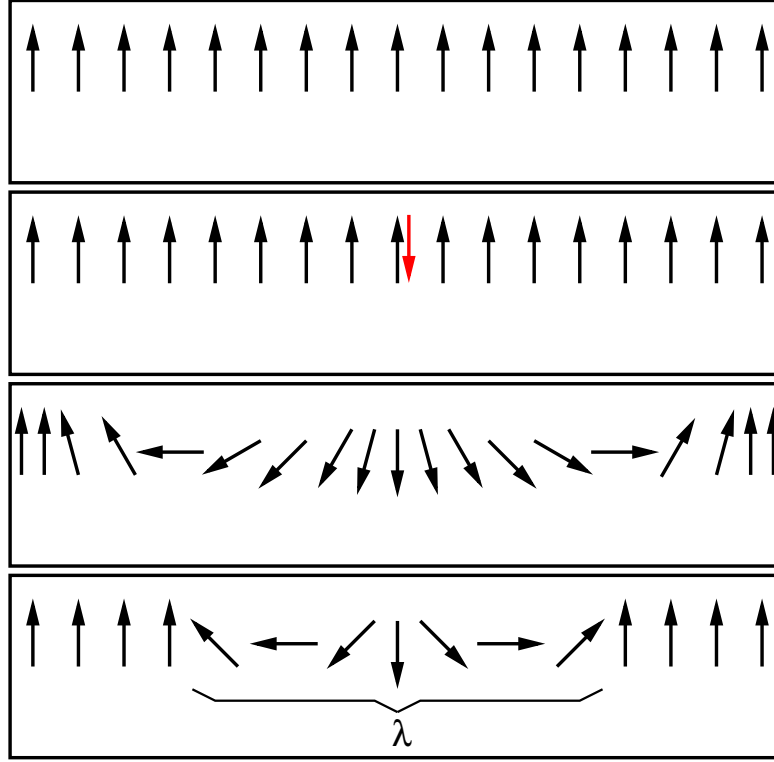


Figura 3.1: Representação esquemática: (a) ferromagneto de Hall quântico; (b) excitação elementar carregada para o sistema não interagente; (c) skyrmion no limite de energia Zeeman nula; (d) skyrmion no limite de energia Zeeman finita.

A evidência experimental para a existência de skyrmions no sistema Hall quântico com $\nu \approx 1$ foi feita através da técnica de ressonância magnética nuclear por bombeamento óptico (OPNMR), que possibilitou a medida do *Knight shift*, $K_s(\nu, T)$, e o do tempo de relaxação longitudinal ($T_1(\nu, T)$) dos núcleos de ^{71}Ga localizados em poços quânticos múltiplos de GaAs/AlGaAs [51, 50]. A fim de aumentar a polarização do spin nuclear nas heteroestruturas de GaAs/AlGaA e, assim, permitir a detecção do sinal de ressonância magnética nuclear (NMR) referente aos núcleos de ^{71}Ga , as medidas de OPNMR foram feitas seguindo a sequência de passos denominados SAT- τ_L - τ_D -DET. Aqui, SAT representa o conjunto de pulsos de frequência de rádio aplicados para destruir a polarização dos spins nucleares; τ_L é o período de

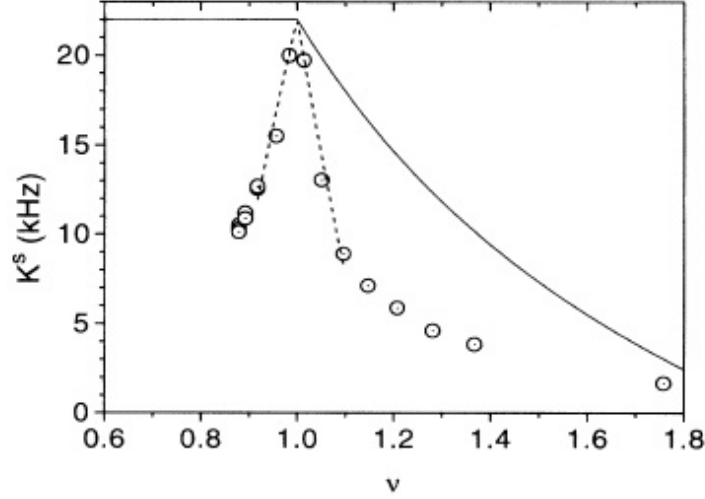


Figura 3.2: *Knight shift* (K^S) do 2DEG em função do fator de preenchimento (ν) para $B = 7.05 \text{ T}$ a 1.55 K . A curva contínua corresponde ao ajuste feito utilizando um modelo de elétrons não interagentes, enquanto a curva tracejada corresponde ao modelo que considera a presença de skyrmions no sistema [50].

iluminação da amostra por laser circularmente polarizado à direita ($\lambda = 806 \text{ nm}$); $\tau_D > 1 \text{ s}$ é o período durante o qual não há iluminação; DET representa a detecção do pulso de NMR.

Durante o período τ_L , o bombeamento óptico provoca transições eletrônicas, gerando elétrons na banda de condução e buracos na banda de valência, cuja polarização de spin não está em equilíbrio. Os elétrons excitados polarizam os spins nucleares através da interação hiperfina. O sistema eletrônico atinge o equilíbrio no início de τ_D , enquanto a polarização dos núcleos é mantida até DET, pois $T_1 \gg 1 \text{ s}$. Este procedimento provoca um aumento na polarização do spin nuclear, permitindo a detecção do sinal de NMR referente aos núcleos de Ga localizados nos poços de GaAs e nas barreiras da heteroestrutura. Para os núcleos localizados nos poços, há uma interação hiperfina extra devido aos elétrons que se encontram confinados (2DEG), que provoca um desvio na frequência de ressonância quando comparada ao valor do sinal referente aos núcleos de Ga localizados nas barreiras. O deslocamento relativo entre os picos referentes aos núcleos localizados nos poços e nas barreiras

define o *Knight shift*, o qual fornece informações sobre a polarização de spin do 2DEG. O resultado experimental encontrado por Barrett *et al.* [50] é mostrado na Fig.3.2. Note que o modelo de partícula independente não se mostra adequado para descrever o 2DEG com $\nu = 1$. Uma descrição detalhada da técnica de OPNMR pode ser encontrada em [52].

Além de novos resultados de OPNMR [53], uma série de experimentos têm sido realizados no sistema Hall quântico com $\nu \approx 1$, cujos resultados têm fornecido informações sobre a excitação elementar carregada deste sistema. Dentre estes, destacam-se as medidas de magnetotransporte [54, 55], capacidade térmica [55, 56] e do espectro de fotoluminescência [37, 57, 58, 59], sendo que esta última será analisada no próximo capítulo.

3.2 Estados ligados de dois bósons

A motivação inicial para verificarmos se o modelo bosônico interagente (2.61) pode levar à formação de estados ligados de dois bósons está relacionada ao comportamento observado no modelo de Heisenberg ferromagnético unidimensional.

O problema de duas ondas de spin (mágnons) interagentes no modelo de Heisenberg ferromagnético foi analisado por Dyson [38], que derivou uma condição para a existência de estados ligados quando o momento total do par é nulo. Para um valor arbitrário de spin S , verificou-se que não seria possível obter um estado ligado de duas ondas de spin em duas e três dimensões, diferentemente do resultado obtido para o sistema unidimensional [60]. Posteriormente, este problema foi analisado por Wortis que, contrariando os resultados obtidos por Dyson, verificou a existência de estados ligados de mágnons, independentemente do valor do spin e da dimensionalidade do sistema ($d \leq 3$). Uma revisão sobre este tópico pode ser encontrado na Ref. [39].

Por outro lado, Tjon e Wright [61] estudaram os sólitons dinâmicos do modelo de Heisenberg ferromagnético unidimensional. O sólito dinâmico é uma solução das equações dinâmicas de movimento, localizada no espaço, com carga topológica nula e cuja energia total, momento total do campo e componente z da magnetização total,

$$M^z = \int dx S^z(x),$$

são constantes de movimento. Escrevendo as componentes do operador de spin como $S^x + iS^y = Se^{i\phi} \sin \theta$ e $S^z = S \cos \theta$, onde S é o spin total do sistema, a forma geral do sóliton dinâmico pode ser escrita como [45]

$$\theta = \theta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t),$$

$$\phi = wt + \phi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

Aqui, $\mathbf{v}$ é a velocidade translacional do sóliton e w é a frequência de precessão da magnetização em um sistema de referência que se movimenta com o sóliton, i.e., um grau de liberdade interno da solução.

Uma possível relação entre o sóliton dinâmico e os estados ligados de n -mágnons do modelo de Heisenberg foi discutida por Schneider [62]. Para o modelo isotrópico, a solução tipo sóliton dinâmico de Tjon e Wright [61] foi quantizada semiclassicamente através da condição de Bohr-Sommerfeld-de Broglie. Seguindo este procedimento, a componente z da magnetização total assume apenas valores inteiros. Como consequência, a frequência de precessão w também é quantizada [62]. Para spin $S = 1/2$, foi verificada uma correspondência entre os espectros de n -mágnons e do sóliton dinâmico. Este resultado implica que o sóliton dinâmico do modelo de Heisenberg ferromagnético pode ser considerado como um estado ligado de n -mágnons. Esta análise também foi estendida para os modelos de Heisenberg de eixo-fácil e com anisotropia de troca, entretanto a correspondência entre os dois tipos de espectros foi encontrada apenas no limite de grandes números quânticos.

Estas características são análogas às soluções do modelo de Sine-Gordon [46]. Duas possíveis soluções das equações clássicas de movimento são o sóliton topológico (solução estática localizada) e a solução tipo *breather*, que corresponde a um par sóliton-antisóliton oscilante (sóliton dinâmico) com carga topológica igual a zero (para uma revisão sobre o conceito de sóliton dinâmico veja Ref. [45]). Após a quantização destas soluções, o sóliton topológico corresponde à quasi-partícula (férmion do modelo de Thirring massivo) enquanto os graus de liberdade internos (modos de oscilação) da solução tipo *breather* a estados ligados. Como o estado ligado de mais baixa energia pode ser interpretado como um *bóson elementar* da teoria, os graus de liberdade internos da solução tipo *breather* correspondem a estados ligados de n -bósons. O número destes depende do valor da constante de acoplamento.

Como o método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$ nos forneceu um modelo bosônico interagente para descrever o 2DEG interagentes com $\nu = 1$, gostaríamos de estudar os estados ligados de dois bósons a fim de verificar uma possível relação entre estes e o espectro de um par skyrmion-antiskyrmion ligados.

Como os momentos total e relativo de um par de bósons são dados por $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ e $\mathbf{Q} = (\mathbf{p} - \mathbf{q})/2$ respectivamente, o termo de interação do Hamiltoniano bosônico (2.61) assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & \frac{2}{\mathcal{A}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}} V(k) e^{-|lk|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge (\mathbf{P}/2 + \mathbf{Q})/2) \\ & \times \sin(\mathbf{k} \wedge (\mathbf{P}/2 - \mathbf{Q})/2) b_{\mathbf{P}/2+\mathbf{k}-\mathbf{Q}}^\dagger b_{\mathbf{P}/2-\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger b_{\mathbf{P}/2+\mathbf{Q}} b_{\mathbf{P}/2-\mathbf{Q}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Verifica-se facilmente que um estado de dois bósons do tipo $|\Phi\rangle = b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}}^\dagger |FM\rangle$ não é um auto-estado do Hamiltoniano total (2.61), de modo que será necessário considerar uma combinação linear destes estados. A forma mais geral de um estado de dois bósons com momento total $\mathbf{P}$ pode ser escrita como

$$|\Phi_{\mathbf{P}}\rangle = \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^\dagger b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^\dagger |FM\rangle. \quad (3.9)$$

Aqui, o momento total do par também é um bom número quântico, pelos mesmos argumentos já discutidos na Sec. 2.2. Lembre-se que um estado de dois bósons pode ser considerado como dois pares elétron-buraco (sistema de carga total nula).

Para um valor fixo do momento total $\mathbf{P}$, a energia do estado (3.9) é dada pela equação de Schrödinger,

$$\mathcal{H}|\Phi_{\mathbf{P}}\rangle = E_{\mathbf{P}}|\Phi_{\mathbf{P}}\rangle. \quad (3.10)$$

Vamos analisar a ação dos termos livre ($\mathcal{H}_0$) e interagente ($\mathcal{H}_{int}$) do Hamiltoniano (2.61) sobre $|\Phi_{\mathbf{P}}\rangle$ separadamente. Para o termo livre, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0|\Phi_{\mathbf{P}}\rangle &= \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) [\mathcal{H}_0, b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^\dagger b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^\dagger] |FM\rangle \\ &+ \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^\dagger b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^\dagger \mathcal{H}_0 |FM\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) \underbrace{(w_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}} + w_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}})}_{E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q})} \times b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^\dagger b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^\dagger |FM\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^{\dagger} E_{FM} |FM\rangle \\
 & = (E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) + E_{FM}) |\Phi_{\mathbf{P}}\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Note que $E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q})$ é a energia de dois bósons não interagentes. Por outro lado, para o termo interagente, após um pouco de álgebra, é possível mostrar que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{int} |\Phi_{\mathbf{P}}\rangle & = \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) [\mathcal{H}_{int}, b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^{\dagger}] |FM\rangle \\
 & + \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^{\dagger} \mathcal{H}_{int} |FM\rangle \\
 & = 2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0, \mathbf{q}} U(\mathbf{k}, \mathbf{P}, \mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger} |FM\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{P}, \mathbf{q}) = \frac{2}{\mathcal{A}} V(k) e^{-|k|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge (\mathbf{P}/2 + \mathbf{q})/2) \sin(\mathbf{k} \wedge (\mathbf{P}/2 - \mathbf{q})/2).$$

Substituindo as expressões (3.11) e (3.12) na equação de Schrödinger (3.10) e fazendo a mudança de variável $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \mathbf{k}$, encontramos

$$\begin{aligned}
 0 & = \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) (E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) + E_{FM} - E_{\mathbf{P}}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^{\dagger} |FM\rangle \\
 & + 2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0, \mathbf{q}} U(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{q}}^{\dagger} |FM\rangle.
 \end{aligned}$$

Transformando a soma sobre momentos em uma integral,

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int \frac{d^2 q}{4\pi^2},$$

encontramos o seguinte problema de autovalores

$$(\epsilon - E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q})) \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) = \int d^2 k K_{\mathbf{P}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}), \tag{3.13}$$

onde $\epsilon = E_{\mathbf{P}} - E_{FM}$ e o núcleo da equação integral é dado por

$$\begin{aligned}
 K_{\mathbf{P}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) & = \frac{\epsilon_c}{\pi} \frac{e^{-|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2/2}}{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \sin((\mathbf{k} - \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{P}/2 + \mathbf{q})/2) \\
 & \times \sin((\mathbf{k} - \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{P}/2 - \mathbf{q})/2).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Na expressão acima, os momentos são medidos em unidades do inverso do comprimento magnético, i.e., $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}/l$.

Para o modelo de Heisenberg unidimensional, o problema de autovalores obtido pode ser resolvido analiticamente, pois o núcleo da equação integral resultante é separável [39, 63]. Entretanto, aqui, $K_{\mathbf{P}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q})$ não é separável e, dessa forma, o problema de autovalores (3.13) será resolvido numericamente.

A solução numérica do problema de autovalores acima pode ser determinada utilizando a técnica de quadraturas [64]. Este método consiste em substituir a integral sobre momentos por um conjunto de equações algébricas

$$(\epsilon - E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_i))\Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_i) \approx \sum_{j \neq i} C_j K_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i) \Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_j), \quad (3.15)$$

onde C_j são denominados de coeficientes da quadratura. O sistema de equações pode ser simetrizado, multiplicando-se pelo fator $\sqrt{C_j}$,

$$(\epsilon - E_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_i))(C_i^{1/2}\Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_i)) \approx \sum_{j \neq i} C_i^{1/2} K_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i) C_j^{1/2} (C_j^{1/2}\Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_j)). \quad (3.16)$$

Após esta discretização, para um valor fixo do momento total $\mathbf{P}$, podemos resolver o problema de autovalores (3.16) através de técnicas matriciais usuais.

A escolha dos pontos $\mathbf{q}_i$ e dos valores dos coeficientes C_i dependem da parametrização adotada. Para problemas unidimensionais, há um grande número de parametrizações, por exemplo, a quadratura Gaussiana [64] que possibilita o cálculo dos autovalores com muito boa precisão. Entretanto, para problemas bidimensionais, há uma pequena quantidade de parametrizações disponíveis e, assim, somente é possível encontrar uma boa estimativa para os autovalores.

A fim de resolver o problema de autovalores (3.16), foi considerada a parametrização que é utilizada para calcular integrais múltiplas sobre uma região circular. Neste caso, é necessário introduzir um corte para grandes valores do momento a fim de definir a região de integração. Todos os parâmetros desta quadratura, bem como um conjunto de diferentes parametrizações para o cálculo de integrais múltiplas podem ser encontradas na Ref. [65].

A Fig. 3.3 mostra a relação de dispersão para os autoestados de dois bósons em função do momento total $\mathbf{P}$ para um campo magnético externo $B = 4T$. O problema de autovalores foi resolvido utilizando uma quadratura de 61 pontos e

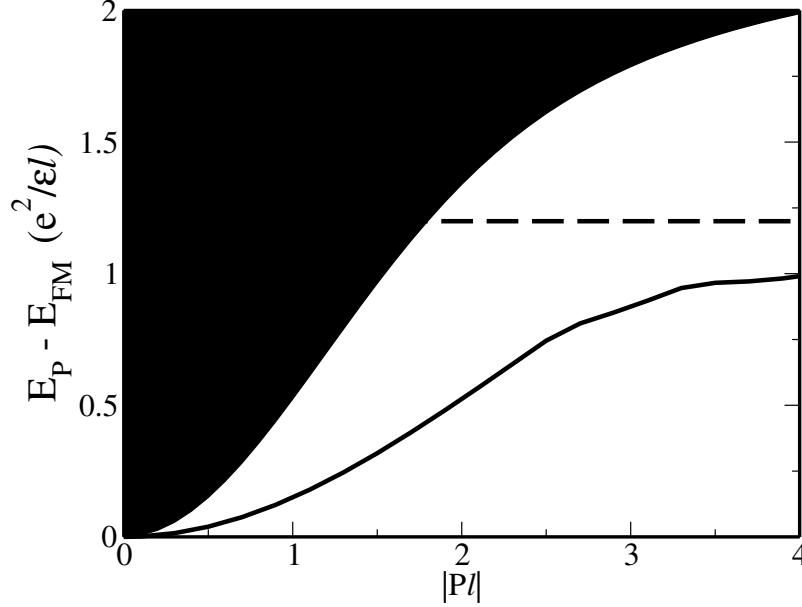


Figura 3.3: Relação de dispersão dos autoestados de dois bósons em função do momento total $\mathbf{P}$ para $B = 4T$. Linha contínua: estado ligado de menor energia; área hachurada: banda de energia dos estados de espalhamento; linha tracejada: energia do par quasilétron-quasiburaco [Eq. (3.17)] calculada por Rezayi [66].

somente bósons cujo momento total $|\mathbf{k}l| \leq 2$ foram considerados. A linha contínua é o estado de menor energia enquanto a área hachurada corresponde à banda de energia dos estados de espalhamento.

Como o estado de dois bósons de menor energia está abaixo do contínuo de estados de espalhamento, podemos concluir que aquele (linha contínua) corresponde a um estado ligado de dois bósons. A distância entre as linhas contínua e o fundo da banda de estados de espalhamento fornece a energia de ligação. De modo análogo à relação de dispersão de uma partícula, para momentos maiores que um determinado valor, $|\mathbf{P}l| > 4$, a relação de dispersão torna-se constante. Há ainda outros estados ligados acima daquele mostrado na Fig. 3.3, entretanto, a análise dos mesmos é

comprometida pelo método numérico utilizado.

Como dito no início desta seção, gostaríamos de comparar o espectro dos estados ligados de dois bósons com aquele referente a um par skyrmion-antiskyrmion ligados, devido à analogia entre nosso problema e o modelo de Heisenberg ferromagnético. Poderíamos, em princípio, comparar nossos resultados com aquele obtido através do modelo de Sondhi e colaboradores para o skyrmion [Eq. (3.1)]. Entretanto, esta comparação não é adequada, pois as excitações apresentam valores diferentes da componente z do spin total (o bom número quântico do problema). Enquanto o estado de dois bósons apresenta $S^z = 2$, em relação ao QHF (estado fundamental do 2DEG com $\nu = 1$), o par skyrmion-antiskyrmion descrito pelo modelo (3.1) apresenta $S^z \gg 2$. Lembre-se que o modelo (3.1) é válido apenas no limite $g \rightarrow 0$, descrevendo assim uma textura de spins constituída por vários *spin-flips*.

Em um trabalho anterior àquele de Sondhi *et al.* [32], Rezayi [66] propôs uma família de funções de onda para descrever as quasi-partículas do 2DEG com $\nu = 1$. Através de cálculos numéricos, foi mostrado que a energia (E_1) do estado constituído pelo QHF acrescido de um elétron de spin *down* é maior que a energia (E_2) de um estado formado pelo QHF acrescido de um elétron de spin *down* além de uma onda de spin ligada ao elétron extra [veja Fig. 3.4]. No limite termodinâmico, foi verificado que $E_1 - E_2 = 0.054e^2/\epsilon l$, indicando, assim, que a quasi-partícula do 2DEG com $\nu = 1$ não seria apenas um elétron de spin *down*, mas um elétron ligado a um determinado número de ondas de spin. Estes resultados levaram Sondhi *et al.* a sugerirem que a quasi-partícula do 2DEG com $\nu = 1$ seria uma textura de spins.

Podemos comparar a energia dos estados ligados de dois bósons com os resultados numéricos de Rezayi [66]. Vamos considerar um estado formado por um par quasilétron-quasiburaco suficientemente separados e por uma onda de spin com momento $|lk| \ll 1$ ligada ao quasilétron ou ao quasiburaco. Observe que a componente z do spin total deste estado é $S^z = 2$. Como a energia de um par quasilétron-quasiburaco suficientemente separados é igual a $\sqrt{\pi/2}e^2/\epsilon l$, o que corresponde ao limite de $|lk| \rightarrow \infty$ da relação de dispersão (2.62), temos que a energia do estado descrito acima é

$$E_{e-h-sw} \approx (\sqrt{\pi/2} - 0.054)e^2/\epsilon l. \quad (3.17)$$

A linha tracejada na Fig. 3.3 corresponde ao valor desta energia para um campo magnético externo $B = 4 T$. Note que nossos resultados estão de acordo com

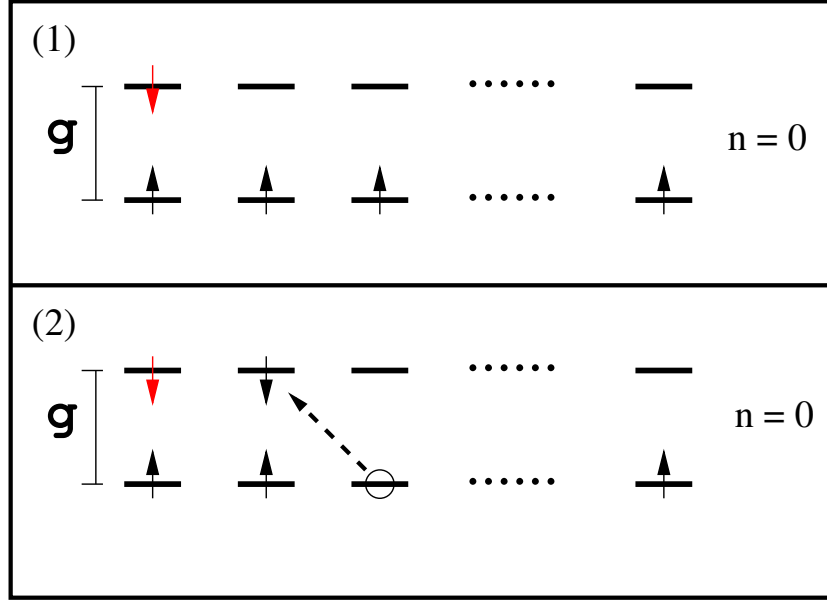


Figura 3.4: Quasipartículas do 2DEG com $\nu = 1$ consideradas por Rezayi em [66]: (1) QHF acrescido de um elétron de spin *down*; (2) elétron de spin *down* e uma onda de spin.

aqueles de Rezayi já que a relação de dispersão dos estados ligados de dois bósons está abaixo da energia E_{e-h-sw} . Assim, podemos concluir que os estados ligados de dois bósons são adequados para descrever pares skyrmion-antiskyrmion no limite de energia Zeeman grande, onde estas excitações são formadas por um pequeno número de spins-*flips*.

Deve-se mencionar que Cooper [67] estudou a solução tipo sóliton dinâmico com carga topológica zero do modelo sigma não linear, sem os termos extras encontrados no modelo (3.1). O espectro calculado é qualitativamente análogo àquele ilustrado na Fig. 2.7. Para pequenos valores do momento, as excitações correspondem a ondas de spin livres e, à medida que o momento aumenta, a relação de dispersão se aproxima continuamente do valor da energia de um par skyrmion-antiskyrmion não interagentes. Dessa forma, temos um limite inferior para a energia de um par skyrmion- antiskyrmion ligados do modelo (3.1) devido à ausência do termo Coulombiano. Entretanto, este resultado é válido somente quando há um grande

número de ondas de spin presentes, bastante diferente da análise aqui realizada.

3.3 Bosonização e estados coerentes

Nesta seção, será analisado o limite semiclássico do modelo bosônico interagente (2.61). Veremos que, partindo de (2.61), é possível recuperar o funcional de energia que descreve o skyrmion.

Como mencionado na Sec. 3.1, as excitações carregadas do 2DEG com $\nu = 1$ são descritas por um modelo sigma não linear generalizado em termos de um campo vetorial unitário $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, que está relacionado ao spin eletrônico. O skyrmion corresponde à solução estática localizada deste modelo, com carga topológica não nula.

Por outro lado, Moon e colaboradores sugeriram um modo alternativo para estudar o skyrmion [68]. Neste caso, este objeto é descrito por um estado do tipo

$$|\mathbf{n}(\mathbf{r})\rangle = e^{-i\mathcal{O}}|FM\rangle, \quad (3.18)$$

onde o operador $\mathcal{O}$ reorienta o spin local da direção $\hat{z}$ para $\hat{n}(\mathbf{r})$, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \int d^2r \, \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^2q \, \Omega^-(\mathbf{q}) S_{-\mathbf{q}}^+ + \Omega^+(\mathbf{q}) S_{-\mathbf{q}}^-, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aqui, $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ é o operador de spin, $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ é o vetor unitário e $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \hat{z} \times \hat{n}(\mathbf{r})$ define o ângulo de rotação. Assumindo que $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r})$ corresponde a pequenos desvios da direção $\hat{z}$, $\Omega^\sigma(\mathbf{q}) \rightarrow 0$ quando $|lq| \gg 1$.

Neste limite de longos comprimentos de onda, foi mostrado que o valor esperado do operador densidade de elétrons no estado (3.18) é igual à densidade de carga topológica do campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ [Eq. (3.2)]. Além disso, após a projeção do potencial Coulombiano no subespaço formado apenas pelo primeiro nível de Landau, verificou-se que o valor esperado deste operador no estado (3.18) é igual ao funcional de energia derivado a partir da densidade de Lagrangeana (3.1).

Na seção anterior, vimos que há uma relação entre a excitação do tipo par skyrmion-antiskyrmion e os estados ligados de dois bósons. Logo, se considerarmos o limite semiclássico do Hamiltoniano bosônico interagente (2.61) do mesmo

modo como feito em [68], podemos verificar se é possível recuperar o funcional de energia derivado a partir de (3.1).

Vamos assumir que a equação (3.18) é uma boa aproximação para descrever o skyrmion. Substituindo as expressões (2.42) e (2.40) em (3.19) e aproximando $S_{\mathbf{q}}^+$ somente pelo termo linear no operador de destruição bosônico, podemos escrever o estado (3.18) em função do operador bosônico b como

$$|sk\rangle = e^{-\mathcal{N}} e^{-i\mathcal{O}} |FM\rangle, \quad (3.20)$$

onde o operador $\mathcal{O}$ é agora redefinido como

$$\mathcal{O} \equiv \frac{1}{8\pi^2} \sqrt{\beta N_\phi} \int d^2q \Omega_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}}^\dagger, \quad (3.21)$$

e a constante $\mathcal{N} = \frac{\beta N_\phi}{2(8\pi)^2} \int d^2q \Omega_{\mathbf{q}}^+ \Omega_{-\mathbf{q}}^-$. O valor da constante β aqui introduzida será determinado posteriormente. Observe que o estado (3.20) é um estado coerente do boson b .

Transformando a soma sobre momentos em uma integral na expressão da representação bosônica do operador densidade de elétrons $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$ [Eq. (2.37)], o valor esperado deste operador no estado (3.20) é dado por

$$\langle sk | \hat{\rho}_{\mathbf{k}} | sk \rangle = i \frac{1}{2} \frac{N_\phi^2 \beta}{(2\pi)^5} e^{-k^2/4} \int d^2q \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) \Omega_{\mathbf{q}}^+ \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^-. \quad (3.22)$$

Na expressão acima, os momentos são medidos em unidades do inverso do comprimento magnético l . Na aproximação de longos comprimentos de onda (lembre-se que $\Omega^\sigma(\mathbf{q})$ é não nulo apenas quando $|lq| \ll 1$), temos que

$$e^{-k^2/4} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) \approx \mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2 = \hat{z} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{q})/2,$$

e, assim, a equação (3.22) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle sk | \hat{\rho}_{\mathbf{k}} | sk \rangle &= \frac{i N_\phi^2 \beta}{2^7 \pi^5} \int d^2q \hat{z} \cdot ((\mathbf{q} + \mathbf{k}) \Omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^-) \times (\mathbf{q} \Omega_{\mathbf{q}}^+) \\ &= -\frac{N_\phi^2 \beta}{2^5 \pi^3} \int d^2r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{z} \cdot (\nabla n^x \times \nabla n^y - \nabla n^y \times \nabla n^x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Na segunda etapa acima, foi utilizado o fato de que $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \hat{z} \times \mathbf{n}(\mathbf{r})$ e, logo, $\Omega^x = -n^y$, $\Omega^y = n^x$ e $\Omega^z = 0$. A partir da Eq. (3.23), encontramos a transformada de

Fourier de $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\mathbf{r}) &\equiv \langle sk | \hat{\rho}_{\mathbf{r}} | sk \rangle \\ &= -\frac{N_{\phi}^2 \beta}{4\pi^2} \frac{1}{8\pi} \hat{z} \cdot (\nabla n^x \times \nabla n^y - \nabla n^y \times \nabla n^x).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Como estamos considerando que $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ corresponde a pequenos ângulos de rotação do spin local, $\nabla n^z \approx 0$ e $n^z \approx 1$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta} \hat{z} \cdot (\nabla n^{\alpha} \times \nabla n^{\beta}) &\approx \epsilon_{\alpha\beta} n^z \hat{z} \cdot (\nabla n^{\alpha} \times \nabla n^{\beta}) \\ &\approx \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{n} \cdot (\partial_{\alpha} \mathbf{n} \times \partial_{\beta} \mathbf{n}),\end{aligned}$$

como feito na Ref. [68]. Além disso, escolhendo o valor da constante $\beta = 4\pi^2/N_{\phi}^2$, vemos que a Eq. (3.24) está de acordo com a definição da densidade de carga topológica (3.2).

Seguindo as mesmas aproximações, podemos calcular o valor esperado da energia do estado $|sk\rangle$ para o Hamiltoniano bosônico interagente (2.61). O valor esperado do termo livre do Hamiltoniano (2.61) é dado por

$$\langle sk | \mathcal{H}_0 | sk \rangle = \frac{l^2}{4(2\pi)^3} \int d^2 q \, w_{\mathbf{q}} \Omega_{-\mathbf{q}}^+ \Omega_{\mathbf{q}}^-. \quad (3.25)$$

Considerando o limite de longos comprimentos de onda da relação de dispersão (2.62), i.e,

$$w_{\mathbf{q}} \approx g + \frac{1}{4} \epsilon_B |lq|^2,$$

a Eq. (3.25) pode ser escrita como

$$\langle sk | \mathcal{H}_0 | sk \rangle \approx \langle \mathcal{H}_Z \rangle + \langle \mathcal{H}_G \rangle, \quad (3.26)$$

onde o termo Zeeman é dado por

$$\langle \mathcal{H}_Z \rangle = \frac{l^2}{4(2\pi)^3} g \int d^2 q \, \Omega_{-\mathbf{q}}^+ \Omega_{\mathbf{q}}^-,$$

e o termo de gradiente por

$$\langle \mathcal{H}_G \rangle = \frac{\epsilon_B}{4} \frac{l^2}{4(2\pi)^3} \int d^2 q \, (lq)^2 \Omega_{-\mathbf{q}}^+ \Omega_{\mathbf{q}}^-.$$

Aqui, a constante ϵ_B está definida no apêndice B.

Reescalando o momento por l^{-1} e calculando a transformada de Fourier, verifica-se que o termo Zeeman pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\langle sk | \mathcal{H}_Z | sk \rangle &= \frac{1}{2} g^* \mu_B B \frac{1}{4\pi} \int d^2 r (n^x)^2 + (n^y)^2 \\ &\approx -\frac{1}{2} g^* \mu_B \frac{1}{2\pi} \int d^2 r \mathbf{n} \cdot (\hat{z} B) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^* \mu_B B \frac{1}{2\pi} N_\phi.\end{aligned}\tag{3.27}$$

No segunda passo acima, foi utilizada a identidade

$$|\mathbf{n} - \hat{z}|^2 = (n^x)^2 + (n^y)^2 + (n^z - 1)^2 = 2 - 2\mathbf{n} \cdot \hat{z}$$

e o fato de que, na aproximação de longos comprimentos de onda $|n^z - 1| \ll 1$. Por outro lado, o termo de gradiente assume a forma,

$$\begin{aligned}\langle sk | \mathcal{H}_0 | sk \rangle &= \frac{1}{2} \rho_S \int d^2 r [(\nabla \Omega^x)^2 + (\nabla \Omega^y)^2] \\ &\approx \frac{1}{2} \rho_S \int d^2 r [\nabla \mathbf{n}(\mathbf{r})]^2,\end{aligned}\tag{3.28}$$

onde ρ_S é o spin stiffness como definido na Eq. (3.1).

Finalmente, para o termo interagente do Hamiltoniano (2.61), é possível verificar que o seu valor esperado no estado $|sk\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{H}_{int} \rangle &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} \frac{V(\mathbf{k})}{2\mathcal{A}N_\phi^2} e^{-|lk|^2/2} \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{p}/2) \sin(\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}/2) \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}^- \Omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^+ \Omega_{\mathbf{p}}^+ \Omega_{\mathbf{q}}^- \\ &\approx \frac{1}{2l^2(8\pi^2)^2} \int d^2 k V(k/l) \left(\int d^2 p \hat{z} \cdot ((\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^-) \times (\mathbf{p} \Omega_{\mathbf{p}}^+) \right) \\ &\quad \times \left(\int d^2 q \hat{z} \cdot ((\mathbf{k} - \mathbf{q}) \Omega_{+\mathbf{k}-\mathbf{q}}^-) \times (\mathbf{q} \Omega_{\mathbf{q}}^+) \right) \\ &= \frac{1}{2l} \int d^2 r d^2 r' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') q(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}'),\end{aligned}\tag{3.29}$$

onde $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^2/(\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ é o potencial Coulombiano, $q(\mathbf{r})$ é a densidade de carga topológica como definido pela Eq. (3.2) e o vetor $\mathbf{r}$ é medido em unidades de

l. Logo, o valor esperado da energia do estado $|sk\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle sk|\mathcal{H}|sk\rangle &= \frac{1}{2}\rho_S^0 \int d^2r [\nabla \mathbf{n}(\mathbf{r})]^2 + \frac{1}{2}g^*\mu_B B \frac{1}{2\pi}N_\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}g^*\mu_B \frac{1}{2\pi} \int d^2r \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \\ &\quad + \frac{e^2}{2\epsilon l} \int d^2r d^2r' \frac{q(\mathbf{r})q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Observe que (3.30) é o funcional de energia derivado a partir da densidade de Lagrangeana (3.1) para uma configuração estática do campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, no limite de energia Zeeman $g \rightarrow 0$. Este resultado confirma o fato observado na seção anterior de que o modelo bosônico interagente (2.61) pode ser utilizado para descrever o skyrmion.

É importante mencionar que a escolha da constante β , baseada no fato de que a Eq. (3.24) deve ser igual à densidade de carga topológica (3.2) relacionada ao campo vetorial $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, forneceu o valor correto dos coeficientes dos termos de gradiente (3.27) e interagente (3.29).

Capítulo 4

Espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$

Neste capítulo, vamos estudar qualitativamente o espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$. Veremos como o método de bosonização desenvolvido no Cap. 2 nos permite calcular analiticamente a forma da linha espectral das radiações emitidas circularmente polarizadas à direita e à esquerda.

4.1 Introdução

O experimento de fotoluminescência consiste em iluminar a amostra, neste caso uma heteroestrutura de GaAs/AlGaAs dopada e sob campo magnético, por um laser, cuja energia é maior que a energia do gap do GaAs e menor que aquela do AlGaAs, que fotoexcita elétrons da banda de valência dos poços quânticos para o 2DEG (Fig. 4.1). Após a relaxação do sistema, ocorre a recombinação entre os elétrons do 2DEG com o buraco da banda de valência, seguida da emissão de radiação circularmente polarizada. Dessa forma, a análise do espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$ nos permite estudar as excitações carregadas deste sistema na presença de um buraco localizado na banda de valência.

Um resultado interessante é que os espectros de emissão das radiações circularmente polarizadas à direita (RCP) e à esquerda (LCP) são bastante distintos. A figura 4.2 mostra os dados experimentais obtidos por Plentz *et al.* [58]. Enquanto o

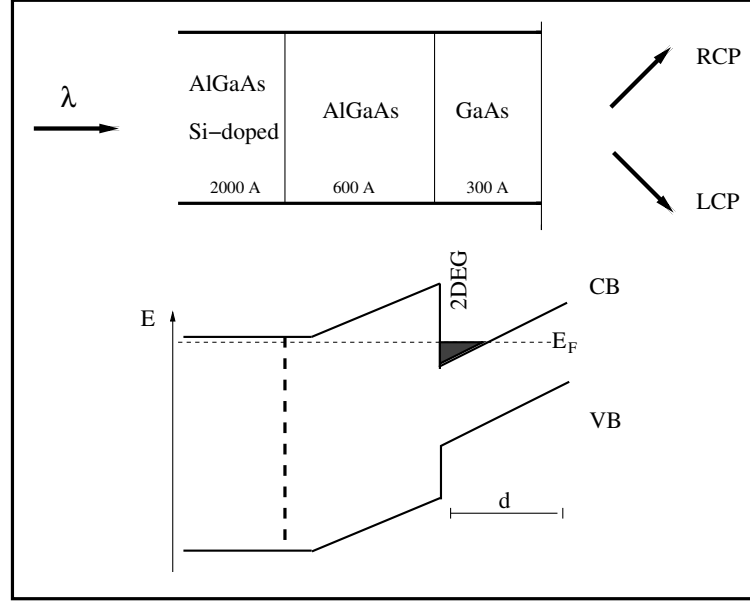


Figura 4.1: Representação esquemática da heteroestrutura de GaAs/AlGaAs e das respectivas bandas de energia. λ é o comprimento de onda da radiação incidente e d é a distância entre os planos do 2DEG e do buraco de valência.

espectro RCP é formado por um único pico, o espectro LCP também é constituído por um único pico, porém com uma cauda de baixa energia. O ponto comum entre os dois casos é que as energias dos picos diminuem continuamente à medida que o fator de preenchimento varia de $\nu < 1$ para $\nu > 1$. Além disso, apenas quando $\nu = 1$, o espectro LCP apresenta dois picos adicionais, localizados a 0.64 meV e 0.83 meV, respectivamente, acima e abaixo do pico principal. Estes picos adicionais são associados à presença de excitons carregados no sistema [58]. Para as amostras consideradas neste experimento, a distância d entre os planos do 2DEG e o do buraco da banda de valência foi estimada em $d < l$, onde l é o comprimento magnético. A distância d é um parâmetro importante para o sistema, já que novas características são observadas no espectro de fotoluminescência quando a distância d aumenta.

Osborne *et al.* [37] realizaram medidas análogas em amostras formadas por um único poço quântico sob a ação de um campo elétrico externo (aplicado na mesma direção do campo magnético externo), que polariza os elétrons e os buracos para

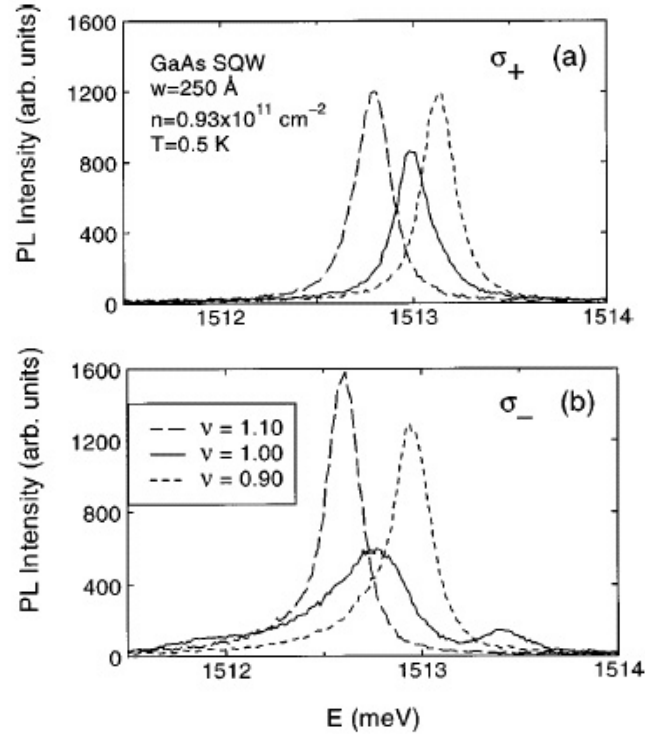


Figura 4.2: Espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu \approx 1$, obtido por Plentz *et al.* [58]. (a) espectro de emissão RCP e (b) espectro de emissão LCP.

lados opostos do poço, aumentando assim o valor da distância d . Para um campo elétrico fraco, as características observadas são análogas às descritas em [58]. À medida que o campo elétrico aumenta, as energias dos picos diminuem e há uma descontinuidade em $\nu = 1$, i.e., ocorre um deslocamento para o azul das energias dos picos quando o fator de preenchimento varia de $\nu < 1$ para $\nu > 1$ [veja Figs. 4.3 e 4.4]. Além disso, note que há um aumento na largura da cauda de baixa energia da linha espectral LCP, como mostrado na Fig. 4.5 (c).

Medidas análogas também foram realizadas em amostras constituídas por dois poços quânticos, onde a distância entre os centros dos dois poços era $d > l$. Aqui, as características encontradas nos espectros relacionados aos poços simples também foram observadas, porém amplificadas. Mais especificamente, denominando de processos direto e indireto os espectros relacionados à recombinação de elétrons e buracos

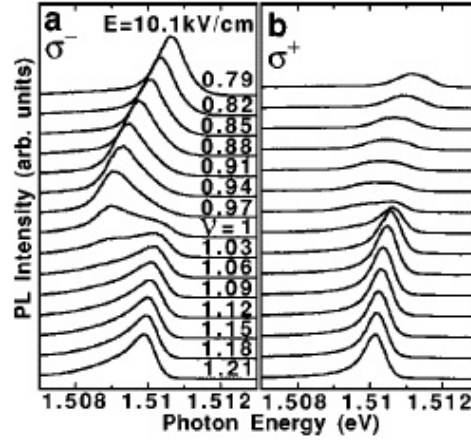


Figura 4.3: Espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu \approx 1$, obtido para amostras constituídas por um único poço quântico e sujeitas a um campo elétrico externo de 10.1 kV/cm [37]. (a) espectro de emissão LCP e (b) espectro de emissão RCP.

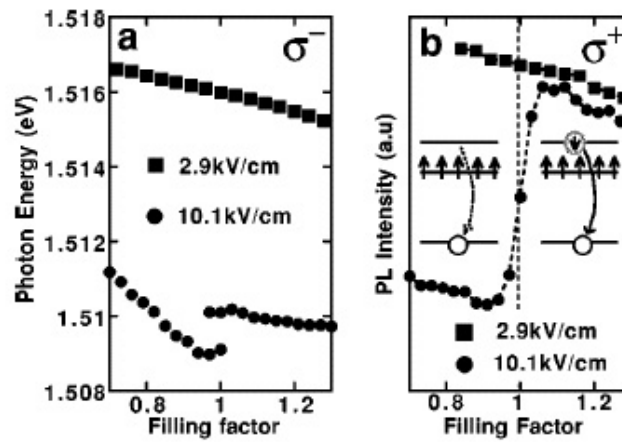


Figura 4.4: (a) Evolução da energia do pico do espectro de emissão LCP em função do fator de preenchimento, obtido para amostras constituídas por um único poço quântico e sujeitas a diferentes campos elétricos externos; (b) intensidade integrada do espectro de emissão RCP em função do fator de preenchimento [37].

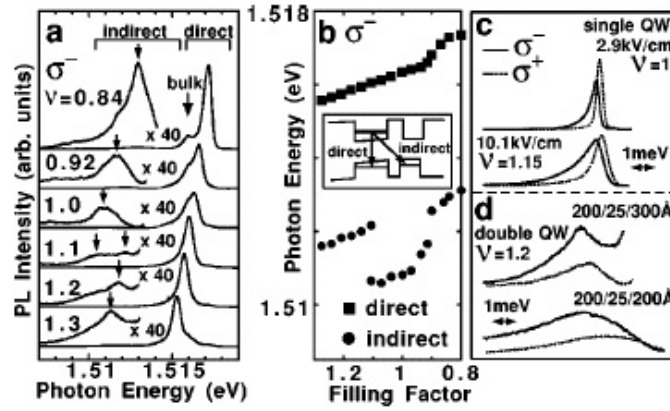


Figura 4.5: (a) Espectro de emissão LCP de amostras constituídas por dois poços quânticos; (b) evolução da energia do pico do espectro de emissão LCP em função do fator de preenchimento, para os processos de recombinação direto e indireto; comparação da forma das linhas espectrais RCP e LCP para amostras constituídas por (c) um único poço e (d) dois poços quânticos.

localizados em poços quânticos iguais e diferentes, respectivamente, vemos que (Fig. 4.5) os dados relacionados aos processos diretos e indiretos são análogos, respectivamente, àqueles referentes às amostras constituídas por um único poço e sujeitas a campos elétricos externos fraco e forte. Em particular, note que o aumento na largura da cauda de baixa energia da linha espectral LCP é mais evidente. Além disso, o espectro de emissão RCP também apresenta uma cauda de baixa energia, diferentemente do caso $d < l$.

A descontinuidade da energia do pico do espectro LCP em função do fator de preenchimento, observada quando há um campo elétrico forte aplicado sob a amostra (Fig. 4.4), pode ser compreendida como uma mudança na natureza do *estado fundamental fotoexcitado* (estado do sistema após a fotoexcitação, que segue após o processo de relaxação térmica e que irá se recombinar com o buraco localizado na banda de valência) à medida que o fator de preenchimento varia de $\nu < 1$ to $\nu > 1$ [37].

A natureza do estado fundamental fotoexcitado está também fortemente relacionada à distância d entre o 2DEG e o buraco de valência. De fato, Cooper e Chklovskii

[69] mostraram que, se $d < l$, o estado fundamental fotoexcitado é constituído pelo primeiro nível de Landau de spin *up* completamente preenchido e por um elétron de spin *down* ligado ao buraco de valência, constituindo o chamado estado *excitônico*. Neste caso, o ferromagneto de Hall quântico permanece inerte após o processo de fotoexcitação, pois a interação Coulombiana entre o elétron de spin *down* e o buraco é maior que a interação entre os elétrons no 2DEG. Por outro lado, como sugerido por Osborne *et al.* [37], para distâncias $d > l$, a interação entre os elétrons de spin *up* e aquele de spin *down* aumenta, de modo que o estado fundamental fotoexcitado evoluiria para um estado formado por um skyrmion (a excitação carregada do ferromagneto de Hall quântico) ligado ao buraco de valência, i.e., o estado *skyrmion-buraco*. Apenas um estado fotoexcitado deste tipo poderia provocar o aparecimento de uma cauda de baixa energia tanto no espectro LCP quanto no espectro RCP do 2DEG com $\nu = 1$ [37].

Neste capítulo, vamos estudar o espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$, nos limites de $d < l$ e $d > l$. O modelo adotado é análogo àqueles considerados por Schotte e Schotte para calcular o espectro de raios-X em metais [34] e por Westfahl Jr. *et al.* para estudar o problema análogo no 2DEG com $\nu \gg 1$ [70]. Veremos como a forma da linha espectral pode ser obtida analiticamente, utilizando o método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$ que foi desenvolvido no Cap. 2, e que os resultados obtidos são qualitativamente comparáveis aos dados experimentais aqui apresentados. Devido às limitações do nosso método será necessário modificar o procedimento seguido em [34, 70].

4.2 O modelo

O experimento de fotoluminescência para o 2DEG com $\nu = 1$ está esquematicamente representado na Fig. 4.6. Após a fotoexcitação, um buraco é criado na banda de valência e um elétron de spin *down* é criado no primeiro nível de Landau. [Fig. 4.6 (a)]. Há dois processos possíveis de recombinação, como ilustrados na Fig. 4.6 (b). Se um elétron de spin *down* se recombina com um buraco de valência, cuja componente z do spin é $S^Z = -3/2$, a variação da componente z do spin total do sistema é $\Delta S^Z = +1$ e, assim, a radiação emitida é circularmente polarizada à direita. Por outro lado, se um elétron de spin *up* se recombina com um buraco de valência

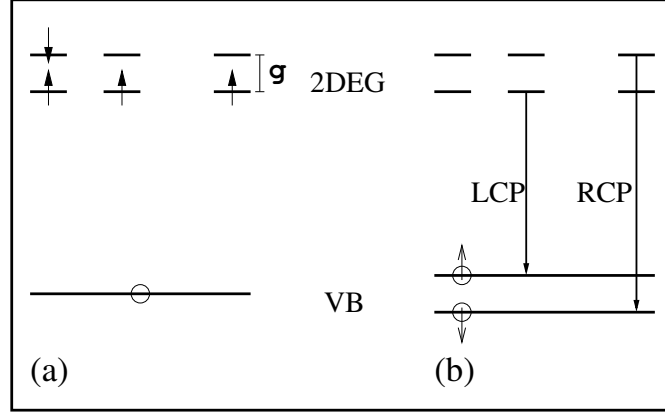


Figura 4.6: Representação esquemática do experimento de fotoluminescência para o 2DEG com $\nu = 1$: (a) buraco de valência criado após a fotoexcitação e elétron extra adicionado ao primeiro nível de Landau do 2DEG; (b) emissão das radiações circularmente polarizadas à direita (RCP) e à esquerda (LCP). VB é a banda de valência e g é a energia Zeeman.

de spin $3/2$, $\Delta S^Z = -1$ e, como consequência, a radiação emitida é circularmente polarizada à esquerda.

Vamos estudar este experimento seguindo o mesmo procedimento adotado em [34, 70]. Neste caso, é necessário descrever o sistema em dois momentos distintos, i.e., antes e após o processo de recombinação. Para o primeiro caso, o sistema é descrito pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}^e + \mathcal{H}_0^h + \mathcal{H}_{int}^{e-h}. \quad (4.1)$$

Aqui, $\mathcal{H}^e$ é o Hamiltoniano do 2DEG interagentes com $\nu \approx 1$, onde todos os elétrons estão restritos ao primeiro nível de Landau. Vimos no Cap. 2 que este Hamiltoniano pode ser escrito na base dos níveis de Landau como

$$\mathcal{H}^e = -\frac{1}{2}g \sum_{\sigma} \sum_m \sigma c_{m\sigma}^{\dagger} c_{m\sigma} + \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^2k}{8\pi^2} V(\mathbf{k}) \rho_{\sigma}(\mathbf{k}) \rho_{\sigma'}(-\mathbf{k}), \quad (4.2)$$

onde $c_{m\sigma}^{\dagger}$ é um operador de criação fermiônico, que cria um elétron de spin σ no primeiro nível de Landau com centro de órbita m . O operador densidade de elétrons

de spin σ é dado pela Eq. (2.19),

$$\rho_\sigma(\mathbf{k}) = e^{-|lq|^2/2} \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lk) c_{m\sigma}^\dagger c_{m'\sigma}.$$

$g = g^* \mu_B B > 0$ é a energia Zeeman, onde g^* é o fator giromagnético efetivo do elétron, μ_B é o magneton de Bohr e B é o campo magnético externo. $V(k) = 2\pi e^2/(\epsilon k)$ é a transformada de Fourier do potencial Coulombiano em 2-D, onde ϵ é a constante dielétrica do semiconductor.

O buraco localizado na banda de valência é descrito pelo Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}_0^h = \hbar w_0 h^\dagger h,$$

onde o operador $h^\dagger$ cria um buraco na banda de valência com energia $-\hbar w_0$ (medida em relação ao potencial químico). Vamos assumir que a função de onda do elétron esteja localizada na origem do sistema de coordenadas e que possua simetria de onda s . Dessa forma, a interação entre o 2DEG e o buraco da banda de valência é dada por um potencial de contato na origem

$$\mathcal{H}_{int}^{e-h} = V_0 \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^\dagger(0) \Psi(0)_{\sigma} h^\dagger h,$$

onde $\Psi_{\sigma}^\dagger(\mathbf{r})$ é o operador de campo fermiônico na origem [Eq. (2.14)],

$$\Psi_{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2}} e^{-|r|^2/4l^2} G_{0,m}(-ir^*/l) c_{m\sigma}^\dagger. \quad (4.3)$$

Para $\mathbf{r} = 0$, a função $G_{0,m}(-ir^*/l)$ é nula exceto para $m = 0$, condição que simplifica bastante os nossos cálculos. Como o momento angular é conservado durante o processo de recombinação (lembrar que o potencial de interação elétron-buraco é esfericamente simétrico), somente os elétrons com centro de órbita $m = 0$ poderão se recombinar com o buraco de valência.

Após o processo de recombinação, teremos apenas o 2DEG, agora com $\nu = 1$. Assim, o Hamiltoniano do sistema é dado simplesmente pela Eq. (4.2),

$$\mathcal{H}_f = \mathcal{H}^e. \quad (4.4)$$

A fim de descrever o espectro de emissão a $T = 0$, é necessário calcular a taxa de transição ($\hbar = 1$),

$$W(w) \propto \sum_f |\langle f | \Psi_{\sigma}(0) | i \rangle|^2 \delta(w - (w_0 + E_i - E_f)), \quad (4.5)$$

onde $|f\rangle$ é o conjunto de todos os estados finais do sistema após o processo de recombinação com energia E_f e $|i\rangle$ é o estado fundamental fotoexcitado com energia E_i . Substituindo a Eq. (4.3) na expressão (4.5), a taxa de transição pode ser escrita como

$$\begin{aligned} W(w) &\propto \sum_f |\langle f | c_{m=0\sigma} | i \rangle|^2 \delta(w - (w_0 + E_i - E_f)) \\ &\propto \sum_f \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(w-w_0-E_i+E_f)t} \langle i | c_{0\sigma}^\dagger | f \rangle \langle f | c_{0\sigma} | i \rangle \\ &\propto \text{Re} \int_0^{\infty} dt e^{-i(w-w_0)t} \langle i | e^{i\mathcal{H}_i t} c_{0\sigma}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{0\sigma} | i \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\propto \text{Re} \int_0^{\infty} dt e^{-i(w-w_0-E_i)t} \langle i | c_{0\sigma}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{0\sigma} | i \rangle. \quad (4.7)$$

Aqui, $\sigma = \uparrow$ e $\downarrow$ se referem às taxas de transição LCP e RCP, respectivamente.

Nas metodologias adotadas em [34, 70], a taxa de transição $W(w)$ é calculada a partir da expressão (4.6), utilizando os respectivos métodos de bosonização. Entretanto, no nosso caso, vamos considerar a equação (4.7) devido às limitações de nosso método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$. Como não possuímos a forma explicitada do operador fermiônico em termos dos operadores bosônicos e como não é possível escrever a forma bosônica do Hamiltoniano $\mathcal{H}_i$, que descreve o 2DEG com $\nu \approx 1$, a Eq. (4.6) não pode ser convenientemente escrita na forma bosônica.

Dessa forma, o Hamiltoniano $\mathcal{H}_i$ não será considerado explicitamente, de modo que a energia E_i será tratada como um parâmetro do modelo. Além disso, será necessário escolher a forma do estado inicial fotoexcitado. Seguindo este procedimento não será possível calcular a energia do estado fundamental fotoexcitado, porém uma vez conhecida a expressão do estado inicial $|i\rangle$, poderemos calcular analiticamente a forma das linhas espectrais RCP e LCP.

4.3 Estado inicial excitônico

Inicialmente, analisaremos o caso onde a distância de separação entre o 2DEG e o buraco localizado na banda de valência é pequena, i.e., $d < l$. Vamos comparar os resultados aqui obtidos com aqueles de Cooper e Chklovskii [69] e com os dados

experimentais de Plentz *et al.* [58] a fim de verificar que a metodologia escolhida é adequada para descrever o espectro de fotoluminescência no limite considerado.

Como mencionado em [69], neste limite o estado fundamental fotoexcitado pode ser descrito como um estado excitônico, o qual é constituído pelo ferromagneto de Hall quântico, $|FM\rangle$, acrescido de um elétron de spin *down* no primeiro nível de Landau e um buraco na banda de valência. Este estado pode ser escrito como

$$|i\rangle = c_{m\downarrow}^\dagger |FM\rangle. \quad (4.8)$$

Como o potencial de interação elétron-buraco é esfericamente simétrico e assumimos que o buraco está localizado na origem do sistema de coordenadas, podemos escolher $m = 0$ na expressão acima, como discutido na seção anterior.

Substituindo a Eq. (4.8) na expressão da taxa de transição LCP [Eq. (4.7)], temos que

$$W_{LCP}^0(w) \propto Re \int_0^\infty dt e^{-i(w-w_0-E_i)t} \underbrace{\langle FM | c_{0\downarrow} c_{0\uparrow}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{0\uparrow} c_{0\downarrow}^\dagger | FM \rangle}_{\mathcal{F}_{LCP}(t)}. \quad (4.9)$$

A função $\mathcal{F}_{LCP}(t)$ pode ser calculada facilmente através do método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$. Vimos que o Hamiltoniano do 2DEG com $\nu = 1$, $\mathcal{H}^e$, é mapeado em um sistema bidimensional de bósons interagentes [Eq. (2.61)]. Entretanto, aqui, $\mathcal{H}^e$ será aproximado apenas pelo termo não interagente do modelo bosônico,

$$\mathcal{H}_f = \mathcal{H}^e = -\frac{1}{2}gN_\phi + \sum_{\mathbf{q}} w_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}, \quad (4.10)$$

onde a relação de dispersão dos bósons é dada por

$$w_{\mathbf{q}} = g + \frac{e^2}{\epsilon l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{-|lq|^2/4} I_0(|lq|^2/4) \right). \quad (4.11)$$

A aproximação acima implica que a interação elétron-elétron será considerada no nível RPA [31].

Como o método de bosonização está restrito ao espaço de Hilbert fermiônico, constituído por $|FM\rangle$ e pelas excitações elementares neutras (pares partícula-buraco) sobre este estado, não é possível aplicar este método para o Hamiltoniano inicial $\mathcal{H}_i$ que descreve o 2DEG com $\nu \approx 1$ e na presença do buraco de valência. Por este motivo, a energia E_i será considerada como um parâmetro do modelo. Além disso,

apesar de não possuímos a expressão do operador de campo fermiônico em função dos operadores bosônicos b , é possível determinar a forma bosônica de produtos de operadores de criação e destruição de férmions, tais como $c_0^\dagger \downarrow c_0 \uparrow$. Daí o fato de que apenas (4.7) pode ser adequadamente escrita na forma bosônica. Seguindo o procedimento apresentado na Sec. 2.3, é possível mostrar que

$$c_{m\downarrow}^\dagger c_{m'\uparrow} \equiv \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_{\mathbf{q}} e^{-|lq|^2/4} G_{m',m}(-lq) b_{\mathbf{q}}^\dagger, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} c_{m\uparrow}^\dagger c_{m'\downarrow} &= \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-|lk|^2/4} G_{m',m}(lk) b_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}} \frac{e^{-|lk|^2/4}}{N_\phi^{3/2}} \\ &\quad \times \cos\left(\frac{1}{2}((\mathbf{k} + \mathbf{p}) \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{q}))\right) G_{m',m}(lk) b_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$c_{m\uparrow}^\dagger c_{m'\uparrow} = \delta_{m,m'} - \frac{1}{N_\phi} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} e^{-|l(k-q)|^2/4} e^{-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}} G_{m',m}(lq - lk) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}}, \quad (4.14)$$

$$c_{m\downarrow}^\dagger c_{m'\downarrow} = \frac{1}{N_\phi} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} e^{-|l(k-q)|^2/4} e^{i\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}} G_{m',m}(lq - lk) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}}, \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{k} \wedge \mathbf{q} = l^2 \hat{z} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{q})$. Observe que as expressões acima são análogas às obtidas para os operadores densidade de spin [Sec. 2.4].

Substituindo as Eqs. (4.10), (4.12) e (4.13) na expressão (4.9) e usando o fato de que $|FM\rangle$ é o vácuo para os bósons b , a função $\mathcal{F}_{LCP}(t)$ assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{LCP}(t) &= \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \frac{e^{-|lq|^2/4 - |lq'|^2/4}}{N_\phi} \langle FM | b_{\mathbf{q}} e^{-i\mathcal{H}_0 t} b_{\mathbf{q}'}^\dagger | FM \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \frac{e^{-|lq|^2/4 - |lq'|^2/4}}{N_\phi} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} e^{-it(w_{\mathbf{q}} + E_f + E_{FM})}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $E_{FM} = -gN_\phi/2$ é a energia do QHF. No segundo passo da expressão acima, utilizamos a relação

$$\exp(-it \sum_{\mathbf{q}} w_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}) b_{\mathbf{k}}^\dagger = b_{\mathbf{k}}^\dagger \exp(-it w_{\mathbf{k}}) \exp(-it \sum_{\mathbf{q}} w_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}),$$

que pode ser demonstrada através da fórmula de Baker-Hausdorff [3]. Note que os termos $e^{-|lq|^2/4}$ na Eq. (4.16) implicam que somente as excitações de longo compri-

mento de onda devem ser consideradas, de modo que podemos escrever a relação de dispersão dos bósons como

$$w_{\mathbf{q}} \approx g + \epsilon_B (lq)^2/4, \quad (4.17)$$

onde $\epsilon_B = \sqrt{\pi/2}e^2/(\epsilon l)$. Transformando a soma sobre momentos em uma integral

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int \frac{d^2 q}{4\pi^2},$$

onde a área do sistema está relacionada com o comprimento magnético e a degenerescência do primeiro nível de Landau N_Φ por $\mathcal{A} = 2\pi l^2 N_\Phi$ [veja Sec. 2.2], é possível calcular a função $\mathcal{F}_{LCP}(t)$ analiticamente,

$$\mathcal{F}_{LCP}(t) = 2(4 + t^2 \epsilon_B^2)^{-1/2} \exp(-it(g + E_{FM})) \exp\left(-it \tan^{-1}(t\epsilon_B/2)\right). \quad (4.18)$$

Substituindo a expressão acima na equação (4.9), é possível também calcular analiticamente a integral temporal e obter a taxa de emissão da radiação circularmente polarizada à esquerda

$$W_{lcp}^0(w) \propto \frac{\pi}{\epsilon_B} \left(1 - \text{sign}(w - w_{lcp}^0)\right) \exp\left(2(w - w_{lcp}^0)/\epsilon_B\right), \quad (4.19)$$

onde $w_{lcp}^0 = w_0 + E_i - E_{FM} - g$ e $\text{sign}(x)$ é a função sinal,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Como pode ser visto na Fig. 4.7 (linha tracejada), o espectro LCP é constituído por um pico em $w = w_{lcp}^0$ com uma cauda de baixa energia, resultado que está de acordo com aqueles anteriormente obtidos por Cooper e Chklovskii [69] e com os dados experimentais de [58]. A presença de uma cauda de baixa energia no espectro está relacionada à onda de spin que é deixada no 2DEG após o processo de recombinação (veja Fig. 4.6). Aqui, devemos ressaltar que a largura de linha observada no espectro experimental está relacionada a efeitos de desordem, como mostrado em [69]. Dessa forma, a presença da cauda de baixa energia é responsável pela assimetria observado no espectro experimental.

Seguindo um procedimento análogo, podemos calcular a taxa de transição da radiação RCP,

$$W_{RCP}^0 \propto \text{Re} \int_0^\infty dt e^{-i(w-w_0-E_i)t} \underbrace{\langle FM | c_{0\downarrow} c_{0\downarrow}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{0\downarrow} c_{0\downarrow}^\dagger | FM \rangle}_{\mathcal{F}_{RCP}(t)}. \quad (4.20)$$

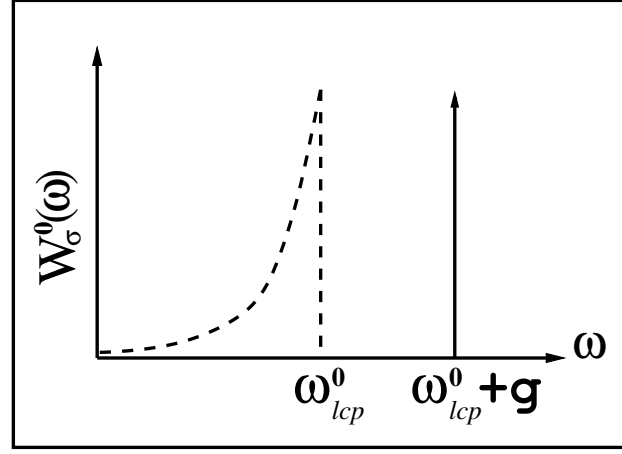


Figura 4.7: Representação esquemática dos espectros de emissão das radiações circularmente polarizadas à esquerda (linha tracejada) e à direita (linha contínua) quando o estado fundamental fotoexcitado é dado pela Eq. (4.8).

Reordenando os operadores fermiônicos, temos que

$$\mathcal{F}_{RCP}(t) = \langle FM | (1 - c_{0\downarrow}^\dagger c_{0\downarrow}) e^{-i\mathcal{H}_f t} (1 - c_{0\downarrow}^\dagger c_{0\downarrow}) | FM \rangle.$$

Como a expressão do operador $c_{0\downarrow}^\dagger c_{0\downarrow}$ em termos dos bósons é uma combinação linear do produto $b^\dagger b$ [Eq. (4.15)], verifica-se que

$$\mathcal{F}_{RCP}(t) = e^{-iE_{FM}t}. \quad (4.21)$$

Este resultado implica que a taxa de emissão da radiação RCP é simplesmente dada por

$$W_{RCP}^0(w) \propto \delta(w - (w_{lcp}^0 + g)), \quad (4.22)$$

ou seja, podemos concluir que o espectro RCP é constituído por um único pico, cuja energia é maior que a energia do pico LCP. Diferentemente do resultado obtido para o espectro LCP, a forma da linha espectral RCP não é assimétrica.

Apesar do modelo aqui adotado não permitir o cálculo da energia do estado fundamental fotoexcitado e, conseqüentemente, não permitir a determinação das energias dos picos dos espectros LCP e RCP, o modelo reproduz qualitativamente

as características observadas nos espectros experimentais de fotoluminescência descritos em [58, 37], onde o valor estimado para a distância d era menor que o comprimento magnético. Dessa forma, vamos estender nossa análise para o caso $d > l$, a fim de verificar a hipótese de Osborne *et al.* [37] que apontam para a presença de skyrmions no 2DEG antes do processo de recombinação.

4.4 Estado inicial skyrmion-buraco

Vamos considerar agora que a distância entre o 2DEG e o buraco localizado na banda de valência é $d > l$. Neste caso, a interação entre o elétron de spin *down* e os demais elétrons de spin *up* é maior que a interação entre aquele e o buraco da banda de valência (lembre-se que, quando $\nu = 1$, o raio da órbita ciclotrônica de cada elétron é igual a l). Como consequência, o estado fundamental fotoexcitado é modificado, sendo agora constituído por um skyrmion ligado ao buraco de valência (estado *skyrmion-buraco*) [37, 71].

A modificação na natureza do estado fundamental fotoexcitado, em relação àquele discutido na seção anterior, pode ser facilmente incluída no nosso modelo. Isto pode ser feito considerando que o skyrmion (excitação elementar carregada do 2DEG com $\nu = 1$) pode ser descrito como um elétron de spin *down* ligado a um determinado número de ondas de spin. Esta idéia foi originalmente sugerida por Palacios e Fertig [72], mas somente Oaknin *et al.* estudaram este modelo em detalhes [73].

Assumindo, inicialmente, que o skyrmion é formado por um elétron de spin *down* ligado a uma única onda de spin com momento $\mathbf{q}$, podemos escrever o estado fundamental fotoexcitado como

$$|i\rangle = b_{\mathbf{q}}^{\dagger} c_{m\downarrow}^{\dagger} |FM\rangle. \quad (4.23)$$

Na expressão acima, foi considerado que, dentro da aproximação do método de bosonização, uma excitação do tipo onda de spin do 2DEG com $\nu = 1$ pode ser descrita aproximadamente como um bóson.

Substituindo a Eq. (4.23) na (4.7), a taxa de transição da radiação circularmente polarizada à esquerda assume a forma,

$$W_{LCP}(w) \propto \text{Re} \int_0^{\infty} dt e^{-i(w-w_0-E_i)t}$$

$$\times \underbrace{\langle FM | c_{m\downarrow} b_{\mathbf{q}} c_{0\uparrow}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{0\uparrow} b_{\mathbf{q}}^\dagger c_{m\downarrow}^\dagger | FM \rangle}_{\mathcal{F}_{LCP}(t)}. \quad (4.24)$$

Aqui, será seguido o mesmo procedimento adotado na seção anterior, ou seja, a energia E_i do estado inicial será tratada como um parâmetro do modelo e a forma bosônica do Hamiltoniano $\mathcal{H}_f$ será considerada como na Eq. (4.10).

A partir da expansão de $b_{\mathbf{q}}^\dagger$ em termos dos operadores de criação e destruição de férmions [Eq. (2.28)], verifica-se que $[b_{\mathbf{q}}^\dagger, c_{m\uparrow}^\dagger] = 0$. Logo, podemos reordenar os operadores fermiônicos na equação (4.24) e, utilizando a representação bosônica do produto de operadores fermiônicos $c_{m\sigma}^\dagger c_{m\sigma'}$ [veja Eqs. (4.12 e (4.13)], encontramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{LCP}(t) &= \frac{1}{N_\phi} \sum_{\mathbf{k}} e^{-|lk|^2/2} G_{m,0}(lk) G_{0,m}(-lk) e^{-it(w_{\mathbf{q}} + w_{\mathbf{k}})} e^{-itE_{FM}} \\ &+ \frac{1}{N_\phi} e^{-|lq|^2/2} G_{m,0}(lq) G_{0,m}(-lq) e^{-2itw_{\mathbf{q}}} e^{-itE_{FM}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Novamente, vamos transformar a soma sobre momentos em uma integral e expandir $w_{\mathbf{k}}$ como em (4.17). Assumindo que $m = 0$ (esta escolha será justificada posteriormente), temos que $G_{0,0}(x) = 1$. Como consequência, a integral sobre momentos pode ser calculada analiticamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{LCP}(t) &= 2(4 + t^2 \epsilon_B^2)^{-1/2} \exp(-it(w_{\mathbf{q}} + g + E_{FM})) \\ &\times \exp\left(-it \tan^{-1}(t\epsilon_B/2)\right) \\ &+ \frac{1}{N_\phi} \exp\left(-|lq|^2/2 - it(2w_{\mathbf{q}} + E_{FM})\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.24), encontramos que a taxa de emissão da radiação LCP é simplesmente dada por

$$\begin{aligned} W_{LCP}(w) &\propto \frac{4\pi}{\epsilon_B} (1 - \text{sign}(w - w_{lcp})) \exp(2(w - w_{lcp})/\epsilon_B) \\ &+ \frac{1}{N_\phi} e^{-|lq|^2/2} \delta(w - \underbrace{(w_{lcp} + g - w_{\mathbf{q}})}_{w_{sw}}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

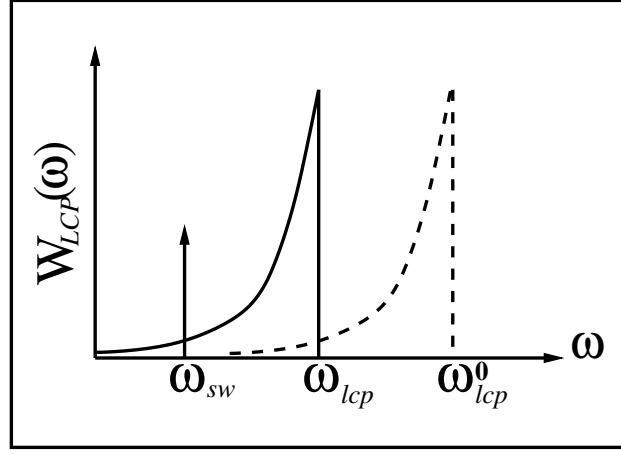


Figura 4.8: Representação esquemática dos espectros de emissão da radiação circularmente polarizada à esquerda, quando o estado fundamental fotoexcitado é dado pela Eq. (4.23) (linha contínua) e pela Eq. (4.8) (linha tracejada).

onde $w_{lcp} = w_0 + E_i - E_{FM} - g - w_{\mathbf{q}}$.

Como ilustrado na Fig. 4.8 (linha contínua), W_{LCP} é formada por um pico principal localizado em w_{lcp} com uma cauda de baixa energia. Lembre-se que estas características já haviam sido observadas em W_{LCP}^0 . É possível estimar a energia E_i do estado fundamental fotoexcitado $|i\rangle$ e mostrar que $w_{lcp} < w_{lcp}^0$. De fato, escrevendo a energia do estado (4.8) como E_i^0 e a energia de ligação bóson-elétron de spin *down* como E_b , temos que $E_i \approx E_i^0 + w_{\mathbf{q}} - E_b$ e, assim $w_{lcp}^0 - w_{lcp} = E_b$. A partir desta análise, podemos concluir que há um deslocamento para o vermelho da energia do pico principal de W_{LCP} em relação àquele de W_{LCP}^0 , e que este deslocamento é dado pela energia de ligação bóson-elétron de spin *down*. Este comportamento está de acordo com os dados experimentais [37], mostrados nas figuras 4.4 (a) e 4.5 (b).

Além disso, o espectro LCP também apresenta um pico secundário em $w_{sw} = w_{lcp} + g - w_{\mathbf{q}}$, cuja intensidade é menor que a intensidade do pico principal. Observe que o deslocamento para o vermelho da energia do pico secundário em relação à energia do pico principal de W_{LCP} é dado principalmente pela energia do bóson presente no estado (4.23).

A análise acima pode ser generalizada para um estado fundamental fotoexcitado constituído por n -ondas de spin ligadas ao elétron de spin *down*. Neste caso, é

possível mostrar que o espectro de emissão LCP apresenta o mesmo pico principal em w_{lcp} e um conjunto de n picos secundários, cujo deslocamento em relação a w_{lcp} é proporcional à energia de cada onda de spin. Logo, podemos concluir que a presença destes picos secundários aumentarão a largura da cauda de baixa energia do espectro LCP, como foi observado experimentalmente [veja Figs. 4.5 (c) e (d)].

Finalmente, seguindo o mesmo procedimento, vamos calcular a taxa de emissão da radiação circularmente polarizada à direita. Neste caso, a Eq. (4.7) assume a forma

$$\begin{aligned}
 W_{RCP}(w) &\propto \text{Re} \int_0^\infty dt e^{-i(w-w_0-E_i)t} \\
 &\times \underbrace{\langle FM | c_{m\downarrow} b_{\mathbf{q}} c_{0\downarrow}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{0\downarrow} b_{\mathbf{q}}^\dagger c_{m\downarrow}^\dagger | FM \rangle}_{\mathcal{F}_{RCP}(t)}. \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Diferentemente de (4.24), aqui os operadores bosônicos e fermiônicos não comutam,

$$\begin{aligned}
 [b_{\mathbf{q}}^\dagger, c_{n\sigma}] &= -\delta_{\sigma,\downarrow} \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_m e^{-|lq|^2/4} G_{n,m}(lq) c_{m\uparrow}, \\
 [b_{\mathbf{q}}, c_{n\sigma}^\dagger] &= -\delta_{\sigma,\downarrow} \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_m e^{-|lq|^2/4} G_{m,n}(-lq) c_{m\uparrow}^\dagger,
 \end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{F}_{RCP}(t)$ é escrita como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{RCP}(t) &= \langle FM | c_{m\downarrow} \left(c_{0\downarrow}^\dagger b_{\mathbf{q}} + N_\phi^{-1/2} \sum_n e^{-|lq|^2/4} G_{n,0}(-lq) c_{n\uparrow}^\dagger \right) \\
 &\times \exp(-i\mathcal{H}_f t) \\
 &\times \left(b_{\mathbf{q}}^\dagger c_{0\downarrow} + N_\phi^{-1/2} \sum_{n'} e^{-|lq|^2/4} G_{0,n'}(lq) c_{n'\uparrow} \right) c_{m\downarrow}^\dagger | FM \rangle \\
 &= \sum_i^4 \mathcal{F}_{RCP}^i.
 \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente os quatro termos acima.

Reordenando os operadores fermiônicos, encontramos que a contribuição do primeiro termo é uma função delta,

$$\mathcal{F}_{RCP}^1(t) = \langle FM | \left(\delta_{m,0} - c_{0\downarrow}^\dagger c_{m\downarrow} \right) b_{\mathbf{q}} e^{-i\mathcal{H}_f t} b_{\mathbf{q}}^\dagger \left(\delta_{m,0} - c_{m\downarrow}^\dagger c_{0\downarrow} \right) | FM \rangle$$

$$= \delta_{m,0} \exp(-it(E_{FM} + w_{\mathbf{q}})). \quad (4.29)$$

Somente os termos resultantes do produto de funções $\delta_{m,0}$ são não nulos, já que a forma bosônica do operador $c_{m\downarrow}^\dagger c_{0\downarrow}$ é uma combinação linear do produto $b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'}$ [veja Eq. (4.15)]. Este resultado justifica a aproximação anteriormente considerada para calcular $W_{LCP}(w)$, i.e., a escolha $m = 0$ na Eq. (4.26).

O segundo termo se divide em duas partes,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{RCP}^2(t) &= N_\phi^{-1/2} \sum_{n'} e^{-|lq|^2/4} G_{0,n'}(lq) \\ &\quad \times \langle FM | (\delta_{m,0} - c_{0\downarrow}^\dagger c_{m\downarrow}) b_{\mathbf{q}} e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{n'\uparrow} c_{m\downarrow}^\dagger | FM \rangle, \end{aligned} \quad (4.30)$$

sendo que apenas aquele que apresenta a função delta $\delta_{m,0}$ é não nulo. Substituindo $c_{m\downarrow}^\dagger c_{n'\uparrow}$ por sua expressão em termos dos bósons [Eq. (4.12)], temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{RCP}^2(t) &= -N_\phi^{-1} e^{-|lq|^2/4} \sum_{\mathbf{k}} e^{-|lk|^2/4} \sum_{n'} G_{0,n'}(lq) G_{n',0}(-lk) \\ &\quad \times \langle FM | b_{\mathbf{q}} e^{-i\mathcal{H}_f t} b_{\mathbf{k}}^\dagger | FM \rangle \\ &= -N_\phi^{-1} \delta_{m,0} \exp(-it(E_{FM} + w_{\mathbf{q}})). \end{aligned} \quad (4.31)$$

O terceiro termo é análogo ao segundo, de modo que aquele é igual a (4.31). Por outro lado, o último termo é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{RCP}^4(t) &= N_\phi^{-1} e^{-|lq|^2/2} \sum_{n,n'} G_{n,0}(-lq) G_{0,n'}(lq) \\ &\quad \times \langle FM | c_{m\downarrow} c_{n\uparrow}^\dagger e^{-i\mathcal{H}_f t} c_{n'\uparrow} c_{m\downarrow}^\dagger | FM \rangle. \end{aligned}$$

Novamente, substituindo as Eqs. (4.12) e (4.13) na relação acima, reagrupando as funções $G_{m,m'}(x)$ e utilizando a propriedade (C.11), substituindo $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$, escolhendo $m = 0$, transformando a soma sobre momentos em uma integral e reescalando a variável de integração $k \rightarrow lk$, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{RCP}^4(t) &= N_\phi^{-1} e^{-i(E_{FM} + w_{\mathbf{q}})t} \int dk k \exp(-(2k^2 + it\epsilon_B k^2)/4) J_0(klqt\epsilon_B/2) \\ &= -2iN_\phi^{-1} e^{-i(E_{FM} + w_{\mathbf{q}})t} \frac{1}{t\epsilon_B - 2i} \exp\left(\frac{-i(lqt\epsilon_B)^2}{8i - 4t\epsilon_B}\right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

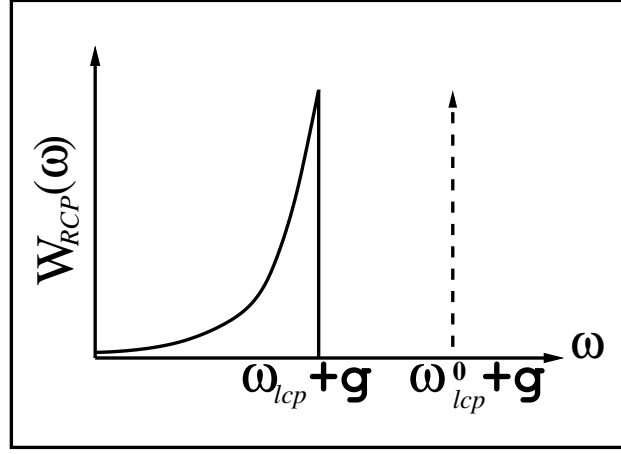


Figura 4.9: Representação esquemática dos espectros de emissão da radiação circularmente polarizada à direita, quando o estado fundamental fotoexcitado é dado pela Eq. (4.23) (linha contínua) e pela Eq. (4.8) (linha tracejada).

onde $J_0(x)$ é a função de Bessel de primeiro tipo [41]. Considerando que o momento da onda de spin é $|lq| \ll 1$, podemos expandir (4.32) e, assim,

$$\mathcal{F}_{RCP}^4(t) \approx -2iN_\phi^{-1} e^{-i(E_{FM} + w_{\mathbf{q}})t} \frac{1}{t\epsilon_B - 2i} (1 + \mathcal{O}(|lq|^2)). \quad (4.33)$$

Substituindo $\mathcal{F}_{RCP}(t)$ em (4.28), após a integração temporal, temos que

$$W_{RCP}(w) \propto \delta(w - (w_{lcp} + g)) + \frac{4\pi}{\epsilon_B N_\phi} \text{sign}((w_{lcp} + g) - w) \exp(-2(w_{lcp} + g - w)/\epsilon_B) \quad (4.34)$$

A expressão acima está esquematicamente ilustrada na Fig. 4.9 (linha contínua). Diferentemente de $W_{RCP}^0(w)$, aqui o espectro RCP é constituído por um único pico em $w_{lcp} + g$, porém com uma cauda de baixa energia (segundo termo de (4.34)). Observe que há também um deslocamento para o vermelho da energia deste pico em relação àquele de $W_{RCP}^0(w)$.

As expressões (4.27) e (4.34) estão qualitativamente em bom acordo com os espectros experimentais de fotoluminescência das amostras formadas por um único poço quântico sujeitas a um campo elétrico forte e dos processos indiretos em poços

quânticos duplos [37]. Como mencionado na Sec. 4.1, nestes casos foram observados um deslocamento para o vermelho da energia do pico principal dos espectros LCP e RCP, em comparação com os resultados obtidos para as amostras formadas por um único poço quântico sujeitas a um campo elétrico fraco, bem como um alargamento na cauda de baixa energia do espectro LCP e o aparecimento desta estrutura no espectro RCP [veja Fig. 4.5].

Logo, a nossa formulação sugere que, de acordo com a hipótese de Osborne *et al.* [37], o espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$, no limite $d > l$, pode ser descrito pela recombinação de um estado formado por um elétron de spin *down* ligado a n ondas de spin com o buraco da banda de valência. Além disso, podemos também concluir que este estado é um bom candidato para descrever a excitação elementar carregada do 2DEG com $\nu = 1$. Lembre-se que, no limite de d grande, o efeito do buraco sobre o 2DEG é menor que quando $d < l$. Como consequência, após a adição do elétron de spin *down*, o 2DEG relaxa para seu estado excitado carregado antes do processo de recombinação

Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado um método de bosonização para o 2DEG com $\nu = 1$. Vimos que, em certo nível de aproximação, as excitações elementares neutras do sistema podem ser tratadas como bósons. O Hamiltoniano do 2DEG com $\nu = 1$, os operadores densidade de elétrons e densidade de spin foram bosonizados. Foi mostrado que a representação bosônica dos operadores densidade de spin é análoga àquela considerada por Dyson para estudar o modelo de Heisenberg ferromagnético. Além disso, vimos que os resultados obtidos com o método de bosonização estão de acordo com aqueles anteriormente encontrados através do formalismo da projeção no LLL.

O método mostrou-se bem sucedido quando aplicado ao estudo do 2DEG interagentes com $\nu = 1$. O Hamiltoniano do sistema fermiônico foi mapeado em um modelo de bósons bidimensionais interagentes. Vimos que a relação de dispersão destes bósons é igual àquela anteriormente por Kallin e Halperin em cálculos diagramáticos [31]. O ponto interessante é que o método de bosonização aqui apresentado nos forneceu resultados além daqueles obtidos em [31], já que foi encontrada uma interação entre os bósons.

Em seguida, analisamos o modelo bosônico interagente, em particular, estudamos os estados de dois bósons. Vimos que a interação entre os bósons leva à formação de estados ligados de dois bósons. Nossos resultados estão em bom acordo com aqueles de Rezayi, que estudou as quasipartículas do 2DEG com $\nu = 1$ constituídas por um pequeno número de ondas de spin. Através dos resultados de Rezayi [66], podemos estimar a energia de um estado formado por um par quasilétron-quasiburaco suficientemente separados e por uma onda de spin ligada a uma das duas quasipartículas. Verificamos que, no limite de grandes momentos, a relação de dispersão do estado li-

gado de dois bósons de mais baixa energia se aproxima do valor da energia do estado acima descrito. Dessa forma, podemos concluir que, à medida que o momento total do par de bósons diminui, o quasieletron e o quasiburaco se aproximam, aumentando assim a interação entre estes e a onda de spin e diminuindo a energia do estado de dois bósons, como mostrado em nossos cálculos.

Além disso, a análise acima também nos permite concluir que, no limite de energia Zeeman grande, o estado de dois bósons mostra-se adequado para descrever pares skyrmion-antiskyrmion, pois neste limite as excitações formadas são constituídas por um pequeno número de spin-*flips*.

No limite de energia Zeeman $g \rightarrow 0$, a análise do limite semiclássico do Hamiltoniano bosônico interagente, nos permitiu recuperar o funcional de energia derivado a partir do modelo sugerido por Sonhdi *et al.* [32] para o skyrmion. Este fato, corrobora a afirmação anterior de que nosso modelo bosônico interagente pode ser utilizado para descrever o skyrmion.

O método de bosonização também foi aplicado ao estudo do espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$, nos limites de separações pequena e grande entre os planos do 2DEG e do buraco localizado na banda de valência. Foi considerado um modelo análogo àquele adotado para o estudo do espectro de raios-X em metais, onde a interação entre os elétrons no 2DEG foi considerada como na aproximação RPA. O método de bosonização permitiu o cálculo analítico das linhas espectrais RCP e LCP.

Para pequenos valores da distância d ($d < l$), foi utilizado o fato de que o estado fundamental fotoexcitado pode ser descrito por um estado excitônico. Mostramos que o espectro LCP é constituído por um pico com uma cauda de baixa energia, que está relacionada à onda de spin deixada no sistema após o processo de recombinação. Além disso, vimos que a linha espectral RCP é constituída por um único pico estreito. Estes resultados estão qualitativamente de acordo com os dados experimentais.

Para grandes valores da distância d ($d > l$), foi considerado que o estado fundamental fotoexcitado é dado pelo estado skyrmion-buraco. Neste caso, o skyrmion foi descrito como um elétron de spin *down* ligado a uma ondas de spin. Verificamos que, além do pico principal, o espectro LCP também apresenta um conjunto de picos secundários, que podem ser associados ao aumento da largura da cauda de baixa energia da linha espectral experimental. O espectro RCP calculado também apre-

sentou uma cauda de baixa energia, novamente em concordância com a experiência. Além disso, há um deslocamento para o vermelho das energias dos picos principais em relação às energias dos picos dos espectros LCP e RCP obtidos no limite de d pequeno. Vimos que este fato pode ser associado à energia de ligação entre o elétron de spin *down* e as ondas de spin. A partir dos resultados aqui obtidos, podemos concluir que para descrevermos o espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$, no limite $d > l$, a presença de skyrmions no 2DEG deve ser considerada.

Dentre os problemas e as limitações da técnica, foi mencionado o fato de que o espaço de Hilbert bosônico é muito maior que o espaço fermiônico, diferentemente do resultado observado no método de bosonização de sistemas unidimensionais. Vimos que, apenas o subespaço fermiônico formado por $|FM\rangle$ e pelos estados constituídos por um único elétron de spin *down* é adequadamente mapeado pelo subespaço bosônico constituído pelo vácuo e estados de 1-bóson. Até o momento, não encontramos um modo sistemático para a solução deste problema, que impossibilita a aplicação do método para o estudo de estados formados por n -bósons. Para o caso particular $n = 2$ aqui estudado, foram considerados apenas bósons cujo momento era menor que um determinado valor, fato que limitou o espaço de Hilbert bosônico.

Além do problema em relação ao tamanho dos espaços de Hilbert bosônico e fermiônico, também não foi possível construir o operador de campo fermiônico $\Psi(\mathbf{r})$ em termos dos bósons b de modo sistemático como feito para o método de bosonização unidimensional. Em princípio, o operador fermiônico corresponderia ao operador que, quando aplicado ao QHF, criaria um skyrmion. Apesar de não termos chegado à forma explícita deste operador, vimos através das aplicações do método de bosonização que este nos permite descrever o skyrmion como um quasilétron vestido por ondas de spin (bósons). Esta abordagem para o skyrmion foi anteriormente sugerida na literatura, porém pouco explorada. Um estudo mais detalhado do modo como o skyrmion pode ser escrito em termos dos bósons será tema de investigações futuras.

Paralelamente ao problema acima, vamos analisar sob quais condições nosso método de bosonização pode ser estendido para o 2DEG com $\nu \approx 1$. A eliminação desta restrição, além daquela referente à forma do operador fermiônico em termos de bósons, nos permitiria um cálculo quantitativo do espectro de fotoluminescência do 2DEG com $\nu = 1$. Mais especificamente, poderíamos calcular as energias dos

picos observados nos espectros RCP e LCP.

Dentre as possíveis aplicações do método, destacamos o estudo da competição entre os efeitos de desordem e a interação elétron-elétron no 2DEG com $\nu = 1$. A introdução dos efeitos de desordem são bastante importantes para descrevermos o sistema Hall quântico. Acreditamos que nosso método de bosonização pode ser útil para estudarmos este efeito.

Finalmente, gostaríamos de estender nosso formalismo para estudarmos o sistema Hall quântico quando $\nu = 1/3$. Lembre-se que, dentro do formalismo de férmions compostos, o efeito Hall quântico fracionário pode ser entendido como o efeito Hall quântico inteiro de férmions compostos [74]. Dentre as várias realizações do efeito Hall quântico fracionário, aquela correspondente ao $\nu = 1/3$ nos é particularmente interessante devido à analogia com o sistema Hall quântico com $\nu = 1$. Aqui, o estado fundamental é spin polarizado (o análogo do ferromagneto de Hall quântico para os férmions compostos), o sistema apresenta excitações elementares neutras do tipo onda de spin [75] e excitações do tipo skyrmions também têm sido observadas [76]. Dessa forma, acreditamos que um estudo no sentido acima seria bastante interessante.

Resumindo, novamente mostramos que o método de bosonização nos possibilita abordar efeitos físicos que não seriam tão facilmente descritos por outros métodos.

Apêndice A

Bosonização em sistemas unidimensionais

Vamos exemplificar a construção do operador bosônico no método de bosonização para sistemas fermiônicos unidimensionais através do modelo de Tomonaga. Consideremos um sistema unidimensional constituído por N elétrons, sem spin, descrito pelo modelo de Tomonaga, cujo Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = \sum_q \epsilon_q c_q^\dagger c_q + \frac{1}{2L} \sum_q V(q) \hat{\rho}(q) \hat{\rho}(-q). \quad (\text{A.1})$$

Aqui, ϵ_q é a relação de dispersão dos férmions [veja Fig. A.1 (a)],

$$\epsilon_q = v_F |q|,$$

e $\hat{\rho}(q)$ é o operador densidade de elétrons,

$$\hat{\rho}(q) = \sum_k n_q(k) = \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k. \quad (\text{A.2})$$

v_F é a velocidade de Fermi, L é o tamanho do sistema, $V(q)$ é o potencial de interação entre os elétrons e o operador fermiônico $c_q^\dagger$ cria um elétron com momento q .

Vamos, inicialmente, nos restringir ao modelo não interagente. Neste caso, o estado fundamental do sistema, $|FS\rangle$, é obtido completando-se todos os estados de partícula única de menor energia, ou seja, os estados com $|k| \leq k_F$, onde k_F é o momento de Fermi. Note que, para sistemas unidimensionais, a superfície de

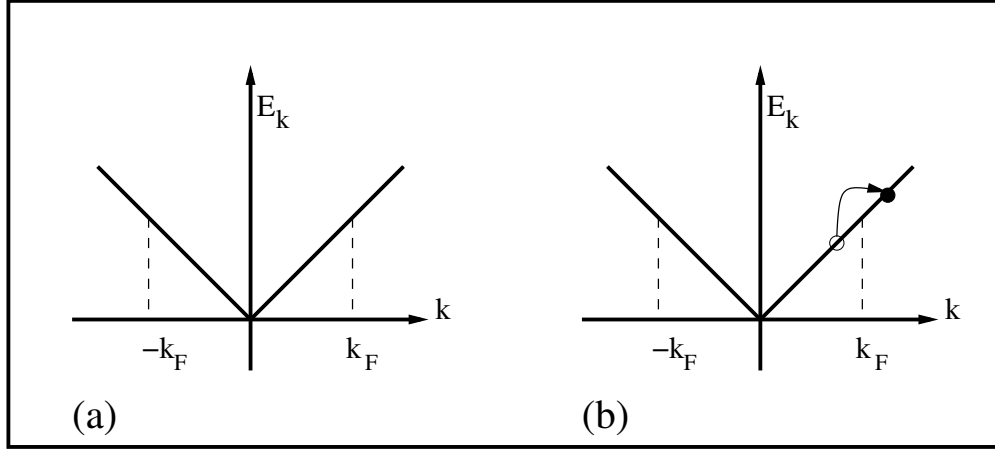


Figura A.1: Representação esquemática: (a) relação de dispersão dos elétrons no modelo de Tomonaga; (b) excitação elementar neutra (par elétron-buraco). k_F é o momento de Fermi.

Fermi é formada apenas por dois pontos $\pm k_F$. As excitações elementares neutras de baixa energia são pares elétron-buraco, que podem ser obtidas a partir do estado fundamental através do operador densidade [veja Fig. A.1 (b)],

$$|\Psi\rangle \sim \hat{\rho}(q)|FS\rangle.$$

Um fato importante observado por Tomonaga [2] foi que, apesar de operadores densidade $\hat{\rho}(q)$ com momentos diferentes comutarem, os operadores $\hat{\rho}_1(q)$ e $\hat{\rho}_2(q)$ definidos como

$$\hat{\rho}_1(q) = \sum_{k>0} n_q(k), \quad (A.3)$$

$$\hat{\rho}_2(q) = \sum_{k<0} n_q(k),$$

e usualmente denominados *right* e *left movers*, respectivamente, não comutam entre si. Note que $\hat{\rho}(q) = \hat{\rho}_1(q) + \hat{\rho}_2(q)$.

Vamos exemplificar a afirmação acima, analisando a relação de comutação entre os operadores $\hat{\rho}_1(q)$. Neste caso, temos que

$$[\hat{\rho}_1(q), \hat{\rho}_1(-q')] = \sum_{k,k'>0} [c_{k+q}^\dagger c_k, c_{k'-q'}^\dagger c_{k'}]$$

$$= \sum_{k>0} \theta(k+q') c_{k+q}^\dagger c_{k+q'} - \theta(k+q) c_{k+q+q'}^\dagger c_k.$$

Em particular, se $q' = q$,

$$[\hat{\rho}_1(q), \hat{\rho}_1(-q)] = \sum_{k>0} (n_0(k+q) - n_0(k)).$$

Como estamos interessados apenas em excitações de baixa energia e longos comprimento de onda, $k \simeq k_F$ e $q \ll k_F$ [veja figura A.1 (b)]. Dessa forma, podemos aproximar o operador número $n_0(k)$ por seu valor esperado no estado fundamental não interagente $|FS\rangle$ e, assim, a relação de comutação acima assume a forma

$$[\hat{\rho}_1(q), \hat{\rho}_1(-q)] \simeq \sum_{k>0} (\theta(k_F - k - q) - \theta(k_F - k)).$$

Substituindo a soma sobre momentos por uma integral, encontramos

$$[\hat{\rho}_1(q), \hat{\rho}_1(-q)] \simeq \frac{L}{2\pi} \left(\int_0^{k_F-q} dk - \int_0^{k_F} dk \right) = -\frac{Lq}{2\pi}. \quad (\text{A.4})$$

Considerações análogas para o operador $\hat{\rho}_2(q)$ nos permitem mostrar que

$$[\hat{\rho}_2(q), \hat{\rho}_2(-q)] \simeq \frac{Lq}{2\pi}, \quad (\text{A.5})$$

$$[\hat{\rho}_1(q), \hat{\rho}_2(-q)] \simeq 0.$$

Assumindo que as relações de comutação (A.4) e (A.5) sejam exatas, é possível definir os operadores bosônicos em termos dos operadores densidade ($q > 0$) como

$$b_q = \sqrt{\frac{2\pi}{qL}} \hat{\rho}_1(-q),$$

$$b_{-q} = \sqrt{\frac{2\pi}{qL}} \hat{\rho}_2(q),$$

os quais obedecem à relação canônica de comutação

$$[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{q, q'}. \quad (\text{A.6})$$

O fato de que as excitações elementares neutras do modelo possam ser tratadas aproximadamente como bósons, nos permitem mapear o Hamiltoniano (A.1) em um modelo quadrático em termos de operadores bosônicos, que pode ser diagonalizado através de uma transformação de Bogoliubov [3].

Apêndice B

Escalas de energia e comprimento para o 2DEG

Na tabela abaixo, são mostradas as energias ciclotrônica $\hbar w_c$, Zeeman g e Coulombiana ϵ_c e o valor das constantes ϵ_B e ρ_S em Kelvin, em função do campo magnético B . O comprimento magnético $l = \sqrt{\hbar c/(eB)} = 256/\sqrt{B}$ é medido em angstroms e o campo magnético B in Tesla.

Energy scales	(K)	
$\hbar w_c$	$\hbar e B/(m^* c)$	$18.78 B$
g	$g^* \mu_B B$	$0.33 B$
ϵ_c	$e^2/(\epsilon l)$	$50.40 \sqrt{B}$
ϵ_B	$\sqrt{\pi/2} \epsilon_c$	$63.16 \sqrt{B}$
ρ_S	$\epsilon_c/(16\sqrt{2\pi})$	$1.25 \sqrt{B}$

A massa efetiva do elétron nos poços quânticos de GaAs é $m^* = 0.07 m_e$, onde m_e é a massa do elétron e a constante dielétrica do semiconductor é $\epsilon \approx 13$.

Apêndice C

Propriedades da função $G_{m,m'}(lq)$

Vamos calcular o elemento de matriz do operador $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ na base dos níveis de Landau. Escrevendo $q = q_x + iq_y$ e $r = x + iy$, podemos expandir o segundo em função dos operadores escada d e g definidos na Sec.: 2.1 [see Eq. (2.2)],

$$r = Z = Z_0 - \frac{i}{w_c} V = \sqrt{2}l(b - a^\dagger), \quad (\text{C.1})$$

Dessa forma, o elemento de matriz pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle n\,m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | n'\,m' \rangle &= \langle n\,m | \exp(-i/2(qr^* + q^*r)) | n'\,m' \rangle \\ &= \langle n\,m | \exp\left[\frac{-il}{\sqrt{2}}\left((qb + q^*b^\dagger) - (q^*a + qa^\dagger)\right)\right] | n'\,m' \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Como os operadores escada d e g estão relacionados somente aos níveis de Landau e centros de órbita respectivamente, podemos utilizar as propriedades destes operadores para escrever o elemento de matriz acima como um produto

$$\langle n, m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | n', m' \rangle = \exp(-|lq|^2/2) G_{m,m'}(lq) G_{n,n'}(-lq^*), \quad (\text{C.3})$$

onde as funções $G_{m,m'}(lq)$ e $G_{n,n'}(-lq^*)$ são definidas como

$$G_{m,m'}(lq) \equiv \langle m | \exp(-il/\sqrt{2}qg^\dagger) \exp(-il/\sqrt{2}q^*g) | m' \rangle, \quad (\text{C.4})$$

$$G_{n,n'}(-lq^*) \equiv \langle n | \exp(il/\sqrt{2}q^*d) \exp(il/\sqrt{2}qd^\dagger) | n' \rangle.$$

Se considerarmos $n = n' = 0$ na Eq. (C.3), encontramos o elemento de matriz do operador $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ na base do primeiro nível de Landau,

$$\langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | m' \rangle = \exp(-|lq|^2/2) G_{m,m'}(lq). \quad (\text{C.5})$$

No formalismo da projeção no primeiro nível de Landau, a expressão acima corresponde ao elemento de matriz do operador projetado $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ (compare a Eq. (C.5) com a equação (25.1.11) da Ref. [24]).

Utilizando as propriedades dos operadores escada, é possível mostrar que a função $G_{m,m'}(lq)$ pode ser escrita como uma combinação linear de polinômios de Laguerre generalizados $L_{m'}^{m-m'}(|lq|^2/2)$, i.e.,

$$\begin{aligned} G_{m,m'}(lq) &= \theta(m' - m) \sqrt{\frac{m!}{m'!}} \left(\frac{-ilq^*}{\sqrt{2}} \right)^{m'-m} L_m^{m'-m} \left(\frac{|lq|^2}{2} \right) \\ &\quad + \theta(m - m') \sqrt{\frac{m'!}{m!}} \left(\frac{-ilq}{\sqrt{2}} \right)^{m-m'} L_{m'}^{m-m'} \left(\frac{|lq|^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

A partir de (C.4) e (C.6), podemos mostrar que as propriedades abaixo são válidas,

(i) relações entre a função e seu complexo conjugado:

$$\begin{aligned} G_{m,m'}(lq) &= G_{m,m'}^*(-lq^*) \\ &= G_{m',m}^*(-lq) = G_{m',m}(lq^*) \\ G_{m,m'}(ilq) &= G_{m,m'}^*(ilq^*) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$= G_{m',m}^*(-ilq^*) = (-i)^{m-m'} G_{m',m}(lq^*). \quad (\text{C.8})$$

(ii) Transformada de Fourier do produto de duas funções:

$$\begin{aligned} e^{\frac{-|lq|^2}{2}} G_{m,m'}(lq) G_{n,n'}(-lq^*) &= \int d^2r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle n', m' | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | n, m \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi l^2} \int d^2r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{\frac{-|\mathbf{r}|^2}{2l^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\times G_{n+m,n} \left(\frac{ir}{l} \right) G_{n',m'+n'} \left(\frac{-ir}{l} \right). \quad (\text{C.10})$$

(iii) Soma do produto de duas funções: como os estados $|n, m\rangle$ formam uma base completa, temos que

$$\begin{aligned} \sum_l G_{m,l}(lq)G_{l,m'}(lk) &= \sum_l \langle m | \exp(-il/\sqrt{2}qb^\dagger) \exp(-il/\sqrt{2}q^*b) | l \rangle \\ &\quad \times \langle l | \exp(-il/\sqrt{2}kb^\dagger) \exp(-il/\sqrt{2}k^*b) | m' \rangle \\ &= \exp\left(\frac{-l^2 q^* k}{2}\right) G_{m,m'}(lq + lk). \end{aligned} \quad (C.11)$$

(iv) Relação de ortogonalidade: através das relações de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre generalizados, podemos mostrar que

$$\int d^2k e^{-|lq|^2/2} G_{m,m'}(-lk^*) G_{n,n'}(lk^*) = \frac{2\pi}{l^2} \delta_{m,n} \delta_{m',n'}, \quad (C.12)$$

e, transformando a integral sobre momentos para uma soma,

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{-|lq|^2/2} G_{m,m'}(-lk^*) G_{n,n'}(lk^*) = N_\phi \delta_{m,n} \delta_{m',n'}. \quad (C.13)$$

(v) Traço: utilizando (C.9), o traço da função $G_{m,m}(lq)$ sob os índices m é dado por,

$$\begin{aligned} \sum_m G_{m,m}(lq) &= \frac{e^{|lq|^2/2}}{2\pi l^2} \sum_m \int d^2r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{\frac{-|r|^2}{2l^2}} G_{0,m}\left(\frac{-ir}{l}\right) G_{m,0}\left(\frac{ir}{l}\right) \\ &= \frac{e^{|lq|^2/2}}{2\pi l^2} \int d^2r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{\frac{-|r|^2}{2l^2}} e^{\frac{|r|^2}{2l^2}} \underbrace{G_{0,0}(0)}_1 \end{aligned} \quad (C.14)$$

$$= N_\phi \delta(\mathbf{q}). \quad (C.15)$$

Apêndice D

O magneto exciton

Vamos considerar um sistema formado por dois férmions de cargas opostas e massas iguais (elétron e buraco), que se movimentam no plano $x - y$ sob a ação de um campo magnético perpendicular constante $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ (para detalhes, veja o apêndice D da Ref. [17]). O Hamiltoniano do sistema é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0^e + \mathcal{H}_0^h + \mathcal{H}_I \\ &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_e + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_e))^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_h - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_h))^2 - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h|}.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Introduzindo as variáveis complexas V e Z como na Sec. 2.1 e utilizando a expansão destas em termos dos operadores escada [Eqs. (2.2) e (2.2)], podemos escrever os dois primeiros termos do hamiltoniano (D.1) como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^e &= \hbar w_c(d_e^\dagger d_e + \frac{1}{2}) \\ \mathcal{H}_0^h &= -\hbar w_c(d_h^\dagger d_h + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Seja $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{R}_0^e + \mathbf{R}_0^h)/2$ o vetor *centro de massa dos centros de órbita* das partículas. Na notação complexa, este é escrito como

$$Z_0 = \frac{1}{2}(Z_0^e + Z_0^h) = \frac{l}{\sqrt{2}}(g_e + g_h^\dagger).\tag{D.2}$$

Dessa forma, o momentum P_0 canonicamente conjugado a Z_0 é simplesmente dado por (lembrar que, na notação complexa, o comutador $[Z_0, P_0^\dagger] = 2i\hbar$)

$$P_0 = \frac{i\hbar\sqrt{2}}{l}(g_h^\dagger - g_e). \quad (\text{D.3})$$

O Hamiltoniano (D.1) comuta com o operador momentum P_0 , já que $[\mathcal{H}_0^e, P_0] = [\mathcal{H}_0^h, P_0] = 0$ e o termo de interação $\mathcal{H}_I$ depende apenas da distância relativa entre as duas partículas. Assim, os auto-estados de P_0 constituem uma boa base para a diagonalização do Hamiltoniano (D.1). Os auto-estados de P_0 são dados por [17]

$$|\psi_{n,p}(q)\rangle = \exp(-|lq|^2/4) \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lq) |n + pm; pm'\rangle, \quad (\text{D.4})$$

sendo que

$$P_0|\psi_{n,p}(q)\rangle = \hbar q|\psi_{n,p}(q)\rangle. \quad (\text{D.5})$$

Aqui, o estado $|n + pm; pm'\rangle$ corresponde a um elétron no nível de Landau $n + p$ com centro de órbita m e a um buraco no nível de Landau n com centro de órbita m' . A função $G_{m,m'}(lq)$ está definida no Apêndice C.

A relação (D.5) pode ser facilmente verificada, utilizando a representação de P_0 em termos dos operadores escada e as propriedades da função $G_{m,m'}(x)$. Note que P_0 atua somente sobre os centros de órbita do elétron e do buraco,

$$\begin{aligned} P_0|\psi_{n,p}(q)\rangle &= \frac{i}{l}\hbar\sqrt{2}\exp(-|lq|^2/4) \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lq) \\ &\quad \times (\sqrt{m'+1}|n + pm; pm' + 1\rangle - \sqrt{m}|n + pm - 1; pm'\rangle) \\ &= \frac{i}{l}\hbar\sqrt{2}\exp(-|lq|^2/4) \sum_{m,m'} (\sqrt{m'}G_{m,m'-1}(lq) \\ &\quad - \sqrt{m+1}G_{m+1,m'}(lq))|n + pm; pm'\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Assumindo que $m > m'$, através das relações entre os polinômios de Laguerre generalizados [41], encontramos que

$$\sqrt{m'}G_{m,m'-1}(lq) - \sqrt{m+1}G_{m+1,m'}(lq) = (-i)^{-1}\frac{lq}{\sqrt{2}}G_{m,m'}(lq),$$

verificando, assim, (D.5).

Podemos também definir o vetor relativo entre os centros de órbita das duas partículas, i.e, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0^e - \mathbf{R}_0^h$. Como sua representação complexa é dada por

$$z_0 = \sqrt{2}l(g_e - g_h^\dagger), \quad (\text{D.7})$$

a partir de (D.5), temos que

$$z_0|\psi_{n,p}(q)\rangle = il^2q|\psi_{n,p}(q)\rangle. \quad (\text{D.8})$$

Os auto-estados (D.4) são denominados *magneto excitons* [31]. Semiclassicamente $|\psi_{n,p}(q)\rangle$ corresponde a uma combinação de pares elétron-buraco, cujo momento do *centro de massa dos centros de órbita* das partículas é $\mathbf{q}$ [Eq. (D.5)] e cuja distância entre os centros de órbita do elétron e do buraco é l^2q [Eq (D.8)]. Considerando a base formada pelos estados (D.4) e supondo que as partículas não sofram transições entre níveis de landau, os auto-valores do Hamiltoniano (D.1) são dados por

$$E_{n,p} = \langle H \rangle = n\hbar w_c - \frac{e^2}{2\pi} \int d^2k e^{\frac{|lk|^2}{2}} e^{-il^2(k_x q_y - k_y q_x)} L_p\left(\frac{|lk|^2}{2}\right) L_{n+p}\left(\frac{|lk|^2}{2}\right).$$

Logo, o operador

$$e_{n,p}^\dagger(q) = \exp(|lq|^2/4) \sum_{m,m'} G_{m,m'}(lq) c_{n+p,m}^\dagger c_{p,m'}, \quad (\text{D.9})$$

pode ser interpretado como o operador que cria um par elétron-buraco em um estado ligado.

Apêndice E

Cálculo do comutador $[S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-]$

A partir das expressões dos operadores densidade de spin $S_{\mathbf{q}}^+$ e $S_{\mathbf{q}}^-$ em termos dos operadores de criação e destruição de férmions (Eq. 2.20 e 2.21), temos que

$$\begin{aligned}
[S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-] &= e^{-|lq|^2/2 - |lq'|^2/2} \sum_{m, m', n, n'} G_{m, m'}(lq) G_{n, n'}(lq') [c_{m \uparrow}^\dagger c_{m' \downarrow}, c_{n \downarrow}^\dagger c_{n' \uparrow}] \\
&= e^{-|lq|^2/2 - |lq'|^2/2} \sum_{m, n, n'} G_{m, n}(lq) G_{n, n'}(lq') c_{m \uparrow}^\dagger c_{n' \uparrow} \\
&\quad - e^{-|lq|^2/2 - |lq'|^2/2} \sum_{m, m', n} G_{n, m}(lq') G_{m, m'}(lq) c_{n \downarrow}^\dagger c_{m' \downarrow} \\
&= e^{-(|lq|^2/2 + |lq'|^2/2)} e^{-l^2 q^* q' / 2} \sum_{m, n} G_{m, n}(lq + lq') c_{m \uparrow}^\dagger c_{n \uparrow} \\
&\quad - e^{-(|lq|^2/2 + |lq'|^2/2)} e^{-l^2 q^* q' / 2} \sum_{m, n} G_{m, n}(lq' + lq) c_{m \downarrow}^\dagger c_{n \downarrow} \\
&= e^{l^2 q q'^* / 2} e^{-|lq + lq'|^2/2} \sum_{m, n} G_{m, n}(lq + lq') c_{m \uparrow}^\dagger c_{n \uparrow} \\
&\quad - e^{l^2 q' q^* / 2} e^{-|lq + lq'|^2/2} \sum_{m, n} G_{m, n}(lq' + lq) c_{m \downarrow}^\dagger c_{n \downarrow}.
\end{aligned} \tag{E.1}$$

Comparando o resultado acima com as expressões dos operadores densidade de elétrons $\rho_{\sigma}(\mathbf{q})$ (Eq. 2.19), podemos concluir que

$$[S_{\mathbf{q}}^+, S_{\mathbf{q}'}^-] = e^{l^2 q q'^*/2} \rho_{\uparrow}(\mathbf{q} + \mathbf{q}') - e^{l^2 q' q^*/2} \rho_{\downarrow}(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \quad (\text{E.2})$$

Bibliografia

- [1] F. Bloch. *Z. Phys.*, 81:363, 1933.
- [2] S. Tomonaga. *Prog. Theor. Phys.*, 5:544, 1950.
- [3] G. Mahan. *Many particle physics*. Plenum, New York, 1981.
- [4] J. M. Luttinger. *J. Math. Phys.*, 4:1154, 1963.
- [5] D.C. Mattis and E.H. Lieb. *J. Math. Phys.*, 6:304, 1965.
- [6] J. von Delf and H. Schoeller. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 7:225, 1998.
- [7] F.D.M. Haldane. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 14:2585, 1981.
- [8] M. Bockrath, D.H. Cobden, J. Lu, A.G. Rinzler, R.E. Smalley, L. Balents, and P.L. McEuen. *Nature*, 397:598, 1998.
- [9] M. Grayson, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, K.W. West, and A.M. Chang. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1062, 1998.
- [10] E. Miranda. *Braz. J. Phys.*, 33:3, 2003.
- [11] J. Voit. *Rep. Prog. Phys.*, 58:977, 1995.
- [12] A. Luther. *Phys. Rev. B*, 19:320, 1979.
- [13] F.D.M. Haldane. *Helv. Phys. Acta*, 65:152, 1992.
- [14] A.H. Castro Neto and E. Fradkin. *Phys. Rev. B*, 49:10877, 1994.
- [15] A. Houghton and B. Marston. *Phys. Rev. B*, 48:7790, 1993.
- [16] H.J. Kwon, A. Houghton, and B. Marston. *Phys. Rev. B*, 52:8002, 1995.
- [17] H. Westfahl Jr. *Bosonização em níveis de Landau*. PhD thesis, IFGW/UNICAMP, 1998.
- [18] H. Westfahl Jr., A.H. Castro Neto, and A.O. Caldeira. *Phys. Rev. B*, 55:R7347, 1997.

- [19] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494, 1980.
- [20] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1776, 1987.
- [21] D. Tsui, H. Störmer, and A. Gossard. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559, 1982.
- [22] S.M. Girvin. The quantum hall effect: novel excitations and broken symmetries. *cond-mat/9907002*, 1999.
- [23] A. Karlhede, S.A. Kivelson, and S.L. Sonhi. The quantum hall effect: the article, in correlated electron systems. World Scientific, Singapore, 1993.
- [24] Z.F. Ezawa. *Quantum Hall effects - field theoretical approach and related topics*. World Scientific, Singapore, 2000.
- [25] R.E. Prange and S.M. Girvin, editors. *The quantum Hall effect*. New York : Springer, 1990.
- [26] S. Das Sarma and A. Pinczuk, editors. *Perspectives in the Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures*. Wiley, New York, 1997.
- [27] R. B. Laughlin. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1395, 1983.
- [28] J. K. Jain. *Phys. Rev. Lett.*, 63:199, 1989.
- [29] J.K. Jain and R.K. Kamilla. In O. Heinonen, editor, *Composite fermions: a unified view of the quantum Hall regime*. River Edge: World Scientific, 1998.
- [30] G. Murthy and R. Shankar. *Rev. Mod. Phys.*, 75:1101, 2003.
- [31] C. Kallin and B.I. Halperin. *Phys. Rev. B*, 55:5655, 1984.
- [32] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. Kivelson, and E.H. Rezayi. *Phys. Rev. B*, 47:16419, 1993.
- [33] S.M. Girvin and T. Jack. *Phys. Rev. B*, 29:5617, 1984.
- [34] K.D. Schotte and U. Schotte. *Phys. Rev.*, 182:479, 1969.
- [35] H. Baches. (*Comunicação interna*).
- [36] P. Nozières and D. Pines. *The theory of quantum liquids*. Perseus books, 1999.
- [37] J.L. Osborne, A.J. Shields, M.Y. Simmons, N.R. Cooper, D.A. Ritchie, and M. Pepper. *Phys. Rev. B*, 58:R4227, 1998.
- [38] F. Dyson. *Phys. Rev.*, 102:1217, 1956.

- [39] S.V. Peletminskii A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yakhtar. *Spin waves*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1968.
- [40] A. Auerbach. *Interacting electrons and quantum magnetism*. Springer-Verlag, 4th edition, 1994.
- [41] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press Inc., 4th edition, 1980.
- [42] O. Madelung. *Introduction to solid-state theory*. Springer-Verlag, 3th edition, 1996.
- [43] A. Usher, R.J. Nicholas, J.J. Harris, and C.T. Foxon. *Phys. Rev. B*, 41:1129, 1990.
- [44] T.H.R. Skyrme. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 247:260, 1958.
- [45] A. M. Kosevich. Dynamical and topological solitons in ferromagnets and antiferromagnets. In S.E. Trullinger, V.E. Zakharov, and V.L. Pokrovsky, editors, *Solitons*. North-Holland physics publishing, 1986.
- [46] R. Rajaraman. *Solitons and instantons - an introduction to solitons and instantons in quantum field theory*. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [47] E. Fradkin. *Field theories of condensed matter systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [48] A.A. Belavin and A.M. Polyakov. *JRTP Lett.*, 22:245, 1975.
- [49] K. Lejnell, A. Karlhede, and S.L. Sondhi. *Phys. Rev. B*, 59:10183, 1999.
- [50] S. E. Barrett, G. Dabbagh, L. N. Pfeiffer, K.W. West, and R. Tycko. *Phys. Rev. Lett.*, 74:5112, 1995.
- [51] S. E. Barrett, R. Tycko, L. N. Pfeiffer, and K.W. West. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1368, 1994.
- [52] A. F. Villares. *Dinâmica das excitações topológicas em sistemas magnéticos de baixa dimensionalidade*. PhD thesis, IFGW/UNICAMP, 1999.
- [53] P.Khandelwal, A.E.Dementyev, N.N.Kuzma, S. E. Barrett, L. N. Pfeiffer, and K.W. West. *Phys. Rev. Lett.*, 82:5353, 2001.
- [54] A.Schmeller, J.P.Eisenstein, L.N.Pfeiffer, and K.W.West. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4290, 1995.
- [55] S.Melinte, E.Grivei, V.Bayot, and M.Shayegan. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2764, 1999.
- [56] V.Bayot, E.Grivei, S.Melinte, M.B.Santos, and M.Shayegan. *Phys. Rev. Lett.*, 76:4584, 1996.

- [57] M.J. Manfra, E.H. Aifer, B.B. Goldberg, D.A. Broido, L.N. Pfeiffer, and K.W. West. *Phys. Rev. B*, 54:R17327, 1996.
- [58] F. Plentz, D. Heiman, L.N. Pfeiffer, and K.W. West. *Phys. Rev. B*, 57:1370, 1998.
- [59] E.H. Aifer, B.B. Goldberg, and D.A. Broido. *Phys. Rev. Lett.*, 76:680, 1996.
- [60] H.A. Bethe. *Z. Physik*, 61:206, 1930.
- [61] J. Tjon and Jon Wright. *Phys. Rev.*, 15:3470, 1977.
- [62] T. Schneider. *Phys. Rev. B*, 24:5327, 1981.
- [63] M. Wortis. *Phys. Rev.*, 132:85, 1963.
- [64] G. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, 4th edition, 1995.
- [65] A.H. Stroud. *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice-Hall series in automatic computation, 1971.
- [66] E. H. Rezayi. *Phys. Rev. B*, 43:5944, 1991.
- [67] N.R. Cooper. *Phys. Rev. Lett.*, 80:4554, 1998.
- [68] K. Moon, H. Mori, Kun Yang, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheng, D. Yoshioka, and Shou-Cheng Zhang. *Phys. Rev. B*, 51:5138, 1995.
- [69] N.R. Cooper and D.B. Chklovskii. *Phys. Rev. B*, 55:2436, 1997.
- [70] H. Westfahl Jr., A.O. Caldeira, D. Baeriswyl, and E. Miranda. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2953, 1998.
- [71] T. Portengen, J.R. Chapman, V.N. Nicopoulos, and N.F. Johnson. *Int. J. Mod. Phys. B*, 12:1, 1998.
- [72] J.J. Palacios and H.A. Fertig. *Phys. Rev. Lett.*, 79:471, 1997.
- [73] J.H. Oaknin, B. Paredes, and C. Tejedor. *Phys. Rev. B*, 58:13028, 1998.
- [74] O. Heinonen, editor. *Composite fermions: a unified view of the quantum Hall regime*. River Edge:World Scientific, 4th edition, 1998.
- [75] T. Nakajima and H. Aoki. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3568, 1994.
- [76] D.R. Leadley, R.J. Nicholas, D.K. Maude, A.N. Utjuzh, J.C. Portal, J.J. Harris, and C.T. Foxon. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4246, 1997.