t4

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BETHE — SALPETER PARA UM SISTEMA FERMIONICO QUARK-ANTIQUARK FORTEMENTE LIGADO

Margarita Ballester Santos

Tese de Doutoramento apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin", da Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 1974

AGRADECIMENTOS:

Ao Instituto de Física Teórica de São Paulo, pela hospitalidade oferecida durante o transcorrer deste trabalho, em particular, à sua Biblioteca;

Ao Prof. Paulo Leal Ferreira pela sugestão e orientação da presente tese;

Ao Prof. C. M. G. Lattes, pela compreensão e apoio durante a realização deste trabalho;

Ao amigo e colega J.Bellandi Filho, pelas discussões valiosas;

A todos os colegas do Departamento de Cronologia, Raios Cósmicos e Altas Energias do Instituto de Física Gleb Wataghin da Unicamp, em particular ao amigo Edison H. Shibuya, pelo apoio, incentivo e amizade.

A todos,

muito obrigada.

Í N D I C E

ÍNDICE DAS TABELAS

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

O modelo a quarks[1], introduzido por Gell-Mann e Zweig em 1964, alcançou considerável sucesso na classificação dos hadrons e na descrição de suas propriedades: números quânticos, espectro de massa, larguras por interações fortes e eletromagnéticas, decaimentos fracos, etc. A hipótese básica do modelo é a de que os barions são considerados, dominantemente, estados ligados de três quarks, os mesons sendo estados ligados de um quark e um anti-quark. Na primeira fase do desenvolvimento do modelo, a dinâmica interna dos quarks foi tratada não relativisticamente, assumindo-se, via de regra, forças harmônicas entre os constituintes e simetria SU(6) para os estados hadrônicos[2]. Dessa maneira, prevê-se para os mesons singletos e octetos de SU(3) e para os bárions singletos, octetos e decupletos, com spin e paridades definidas, como é observado experimentalmente.

Os sucessos parciais do modelo[3] motivaram, numa segunda fase de seu desenvolvimento, a sua formulação relativística[4], Como a pesquisa experimental dos quarks indica que sua massa $m \geqslant 3$ a 4 Gev, conclue-se que se deve considerar quarks pesados[5] e consequentemente, os hadrons serão estados fortemente ligados.

O ponto de partida da formulação relativística, que aqui consideramos, é a equação de Bethe-Salpeter[6], como estabelecida pela teoria de campos relativística. Nesta direção, progres sos consideráveis foram obtidos recentemente por Böhm, Joos e Krammer[7] (na hipótese de quarks pesados de spin 1/2) para os mesons, tratados como um sistema relativístico quark-antiquark em forte ligação[8].

Neste contexto os mesons são descritos pela amplitude de Bethe-Salpeter (B - S)

$$\psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \langle 0 | T\, \psi_\alpha(x_1)\, \bar{\psi}_\beta(x_2) | B \rangle \qquad (1.1)$$

que é interpretada como o elemento α, β de uma matriz ψ de quatro linhas e quatro colunas, (α, β = 0,1,2,3). Em (1.1), $|B\rangle$ representa o estado ligado e ψ_α e $\bar{\psi}_\beta$, os operadores de campo dos quarks. A transformada de Fourier $\chi_{\alpha\beta}$ da amplitude $\psi_{\alpha\beta}$

$$\chi_{\alpha\beta}(p_1, p_2) = (2\pi)^3 \int d^4x_1\, d^4x_2\, e^{ip_1 \cdot x_1}\, e^{ip_2 \cdot x_2} \cdot \\ \cdot \langle 0 | T\, \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) | B \rangle \qquad (1.2)$$

é solução da equação de B-S homogênea[9]

$$(\gamma \cdot p_1 - m)\, \chi(p_1, p_2)\, (\gamma \cdot p_2 + m) = i \int R(p_1, p_2; p_1', p_2') \cdot \\ \cdot \chi(p_1', p_2')\, d^4p_1'\, d^4p_2' \qquad (1.3)$$

para o sistema fermion-antifermion de massas m iguais. O kernel R em (1.3) será discutido posteriormente. Vê-se que (1.3) representa um sistema de 16 equações integrais acopladas nos $\chi_{\alpha\beta}(p_1, p_2)$.

Introduzindo o quadri-momento total P e o quadri-momento relativo q do sistema

$$p_1 = \frac{P}{2} + q \quad , \quad p_2 = \frac{P}{2} - q \quad , \tag{1.4}$$

pode-se reescrever (1.3), no sistema de repouso ($\vec{P} = 0$) do estado ligado de massa M, sob a forma

$$\left(\gamma_0 \cdot \frac{M}{2} + \gamma \cdot q - m\right) \chi(M,q) \left(\gamma_0 \cdot \frac{M}{2} - \gamma \cdot q + m\right) = \\ = i \int R(q-q') \chi(M,q') \, d^4 q' . \tag{1.5}$$

onde, por simplicidade o kernel foi considerado do tipo convolutivo

$$R(q,q';P) = R(q-q') \tag{1.6}$$

Neste caso a equação (1.5) corresponde à chamada aproximação de escada ("ladder approximation"), na qual o kernel contém apenas a contribuição da troca de uma partícula. Na sua forma mais geral, o kernel pode ser escrito

$$R(q-q')\chi = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i(q-q') \Gamma_i \chi \Gamma_i \tag{1.7}$$

onde

$$\Gamma_i = \left\{ 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5 \right\}_i . \tag{1.8}$$

Como é bem sabido[10], para resolver a equação (1.5) é conveniente fazer a chamada rotação de Wick, que consiste em efetuar uma continuação analítica na energia relativa q_o tal que

$$q_o \rightarrow -iq_4 \quad , \quad q^2 \rightarrow -q^2_{eucl} \tag{1.9}$$

onde $q^2_{eucl} = q^2_4 + \vec{q}^{\,2} \geqslant 0$. A rotação de Wick é permitida graças à estrutura analítica das amplitudes de B-S e do kernel de interação na aproximação de escada. Feita a rotação de Wick, pode-se escrever

$$(\gamma.q - im + i\tfrac{M}{2}\gamma_4)\chi(M,q)(\gamma.q - im - i\tfrac{M}{2}\gamma_4) = \\ = \int R(q-q')\chi(q',M)\,d^4q' . \qquad (1.10)$$

Em (1.10) q é um quadrivetor euclidiano $q \equiv (q_4\ ,\ \vec{q})$ e $\gamma.q = \gamma_4 q_4 + \vec{\gamma}.\vec{q}$ com $\gamma_4 \equiv \gamma_0$ e $\vec{\gamma} = -i\,\vec{\gamma}_{Lorentz}$.

Após esta incursão no campo matemático básico do modelo, cabe indicar como resolver a equação (1.10), no caso em foco, que corresponde a quarks pesados e forte ligação dos constituintes. Torna-se claro que a maneira mais conveniente é considerar a aproximação em que a massa do estado ligado M é zero ("maximal binding"). As soluções obtidas nesta aproximação são utilizadas então, para construir uma solução perturbativa de (1.10) para $M \neq 0$; sendo $M^2/m^2 \ll 1$, o parâmetro perturbativo.

Para $M = 0$, a equação (1.10) é escrita

$$(\gamma.q - im)\chi(q)(\gamma.q - im) = \int R(q-q')\chi(q')\,d^4q' \qquad (1.11)$$

A equação (1.11) goza da seguinte importante propriedade: Ela admite como grupo de invariância, o grupo $O^{\pi C}(4)$, isto é, o grupo de rotações a quatro dimensões extendido às reflexões espaciais π e à conjugação de carga C.[7] No seu trabalho, BJK, com base nesta propriedade, classificaram e exibiram todas as soluções da equação (1.11) usando extensivamente técnicas de teoria de grupos. Para a dependência dos momentos nos $K_i(q)$ que aparecem na forma geral do kernel (1.7), baseados em considerações fenomenológicas, assumiram êles uma dependência suave ("smooth") da forma $\lambda_i/(q^2-\mu^2)^k$ com $k \geqslant 3$, uma vez que para $k = 1$ ("one particle exchange"), como já era conhecido pelos cálculos de Pagnamenta[12], tem-se soluções com espaçamento muito grande entre os níveis, proporcionais à massa do quark m, o mesmo acontecendo para $k = 2$.

Ademais, para quarks pesados em forte ligação ($M^2/4m^2 \ll 1$), e para "energias cinéticas" $\langle q^2\rangle/m^2 \ll 1$, o kernel suave pode ser aproximado pela forma[7]

$$K_i(q) = \delta^{(4)}(q)\,(\alpha_i - \beta_i\,\partial^2), \tag{1.12}$$

que corresponde à transformada de Fourier da aproximação harmônica, isto é, à transformada do "potencial" $V_i(R)$

$$V_i(R) = \alpha_i + \beta_i R^2 \tag{1.13}$$

onde

$$R^2 = \vec{x}^2 + x_4^2 \tag{1.14}$$

Fisicamente isto significa que os quarks estão se movendo no fundo do potencial suave, o qual, nestas condições pode ser bem aproximado por uma parábola. Além de constituir uma ótima aproximação para os estados mais baixos do sistema, a aproximação harmônica reduz o problema de um sistema de equações integrais acopladas, a um sistema de equações <u>diferenciais</u> parciais de segunda ordem, permitindo a determinação das <u>soluções</u> <u>exatas</u> no caso $M = 0$.

No presente trabalho, abordamos o problema da determinação e classificação das soluções da equação de B-S para o sistema quark-antiquark com base numa extensão do método de Delbourgo, Salam e Strathdee[13] para o caso $M = 0$. Tal método tem a vantagem de exibir, de u'a maneira direta, as propriedades das soluções, advindas as ditas propriedades da invariância da equação por rotações a quatro dimensões. No entanto, o "ansatz" empregado por DSS é incompleto[7], não permitindo a obtenção de todas as soluções .

É um dos resultados mais relevantes deste trabalho a extensão do "ansatz" de DSS de modo a obter todas as soluções da equação de B-S no caso $M = 0$, as quais são exatas na aproximação harmônica. O método foi a seguir extendido para o caso $M \neq 0$ por um tratamento perturbativo da equação de B-S, a partir das soluções exatas obtidas no caso $M = 0$. Obtem-se <u>fórmulas de massa quadráticas</u> e <u>trajetórias de Regge lineares</u>.

Dessa maneira, o presente trabalho constitue um método alternativo para a solução do problema e serve para confirmar os resultados obtidos por BJK, de maneira independente.

No desenvolvimento matemático do método aqui empregado, obteve-se alguns resultados matemáticos interessantes, como por exemplo, a fórmula do gradiente para os hiperesféricos harmônicos a quatro dimensões[14].

Finalmente, usando o mesmo método, foi resolvida a equação de B-S para o caso em que os constituintes tem massas diferentes, obtendo-se fórmulas de massa com quebra de SU(3) para os diferentes tipos de mesons[15], que aparecem relacionados às representações do grupo de simetria $G = SU_I(2) \otimes U_Y(1)$.

O presente trabalho está organizado como segue.

No Capítulo II apresentamos a extensão do método de DSS para o caso de ligação máxima (M = 0), classificando e exibindo explicitamente as soluções (os chamados <u>setores</u>) com paridade π e C paridade definidas.

O Capítulo III é reservado ao tratamento perturbativo da equação de B-S para o caso $M \neq 0$, sendo obtidas as soluções e fórmulas de massa para um kernel $-\gamma_5 \times \gamma_5$ $(R\chi = -\lambda K \gamma_5 \chi \gamma_5)$.

No Capítulo IV abordamos o problema do sistema quark-antiquark com massas diferentes dos quarks e derivamos as correspondentes fórmulas de massa com quebra da simetria SU(3).

O Capítulo V é consagrado às considerações e conclusões finais relativas ao presente trabalho.

Em Apêndice são definidas as funções angulares necessárias ao desenvolvimento do método de DSS, e são apresentadas as propriedades mais importantes daquelas funções.

CAPÍTULO II - SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE B-S NO CASO DE LIGAÇÃO MÁXIMA

Como já foi dito anteriormente, estudaremos neste Capítulo as soluções da equação de B-S para o sistema quark-anti-quark de massas iguais m, no caso em que a massa M do estado ligado é nula ("maximal binding"). O método aqui empregado difere daquele utilizado por BJK, que fizeram uso extensivo de técnicas de Racah, conhecidas na teoria de grupos, para o grupo $O^{\pi c}(4)$ que deixa invariante a equação de B-S no caso $M = 0$. Consiste o presente método numa extensão de um trabalho de Delbourgo, Salam e Strathdee[13] que não requer as técnicas mais sofisticadas usadas por BJK, sendo matematicamente mais simples, além de exibir de uma maneira mais direta, a invariância da equação por rotações quadridimensionais.

Conforme a discussão introdutória do Capítulo I, o ponto de partida é a equação de B-S no espaço dos momentos, após efetuada a rotação de Wick[16]

$$(\not{q} - im)\chi(q)(\not{q} - im) = \int R(q-q')\,\chi(q')\,d^4q' \qquad (2.1)$$

$$R(q-q')\chi = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i(q-q')\,\Gamma_i \chi \Gamma_i \qquad (2.2)$$

$$\Gamma_i = \{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5\}_i \qquad (2.3)$$

com $\not q \equiv \gamma . q = \gamma_\mu q_\mu = \gamma_4 q_4 + \vec{\gamma} \cdot \vec{q}$

Definindo :

$$\begin{aligned}
\lambda_S K_S &= \lambda_1 K_1 + 4\lambda_2 K_2 + 12\,\lambda_3 K_3 + 4\lambda_4 K_4 + \lambda_5 K_5 \\
\lambda_V K_V &= \lambda_1 K_1 - 2\lambda_2 K_2 \qquad\qquad - 2\lambda_4 K_4 - \lambda_5 K_5 \\
\lambda_T K_T &= \lambda_1 K_1 \qquad - 4\lambda_3 K_3 \qquad + \lambda_5 K_5 \\
\lambda_A K_A &= \lambda_1 K_1 + 2\lambda_2 K_2 \qquad\qquad + 2\lambda_4 K_4 - \lambda_5 K_5 \\
\lambda_P K_P &= \lambda_1 K_1 - 4\lambda_2 K_2 + 12\lambda_3 K_3 + 4\lambda_4 K_4 + \lambda_5 K_5
\end{aligned} \tag{2.4}$$

e os operadores de projeção:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}^S \\ \mathcal{P}^V \\ \mathcal{P}^T \\ \mathcal{P}^A \\ \mathcal{P}^P \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 0 & -4 & -8 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 8 & 4 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 1 \\ \gamma_\mu \times \gamma_\mu \\ \sigma_{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} \\ \gamma_5\gamma_\mu \times \gamma_5\gamma_\mu \\ \gamma_5 \times \gamma_5 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}} \tag{2.5}$$

tais que: $\mathcal{P}^A \gamma_5 \gamma_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu$, $\mathcal{P}^A \gamma_5 = 0$, etc.

pode-se escrever (2.2) do seguinte modo

$$R(q-q')\,\chi = \sum_{k=1}^{5} \lambda_k K_k(q-q')\,\mathcal{P}^k \chi \tag{2.6}$$

com k = 1,2,..5 correspondendo a S, V, T, A, P, respectivamente.

Na aproximação harmônica temos:

$$\lambda_k K_k(q) = \delta^4(q)\,(\alpha_k - \beta_k\, \partial^2) \tag{2.7}$$

onde ∂^2 significa o operador laplaciano a quatro dimensões e α_k, β_k são parâmetros que caracterizam os kernels harmônicos.

Visto que $\chi(q)$ possue 16 componentes, as equações (2.1) - (2.7) constituem um sistema de 16 equações diferenciais parciais acopladas de segunda ordem.

Por outro lado, da invariância de (2.1) por reflexões espaciais e por conjugação de carga, segue, como foi mostrado por Keam[17], que as amplitudes de B-S, $\chi(q)$, se tranformam por estas operações (respectivamente designadas por operadores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$) da maneira seguinte:

$$\mathcal{P}\,\chi(q) = \gamma_4\, \chi(-\vec{q}, q_4)\, \gamma_4 \tag{2.8}$$

$$\mathcal{C}\,\chi(q) = C\, \chi^T(-q)\, C^{-1} \quad , \tag{2.9}$$

onde C designa a bem conhecida matriz 4x4 de conjugação de carga que goza das propriedades

$$C^+ = C^{-1}\ ,\quad C^T = -C\ ,\quad C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T\ . \tag{2.10}$$

As propriedades (2.8) e (2.9) permitem obter soluções com paridade π e conjugação de cargas C bem definidas.

Estamos, agora, em condições de indicar qual é o primeiro passo[18] para resolver (2.1) a partir de um "ansatz" geral da forma

$$\chi(q) = \sum_{D=1}^{5} \Gamma_D \, \phi_D(q)$$

$$\equiv [\phi_1(q) + \gamma_\mu \phi_\mu(q) + \sigma_{\mu\nu} \phi_{\mu\nu}(q) + i\gamma_5\gamma_\mu \phi_{5\mu}(q) + \gamma_5 \phi_5(q)] \quad (2.11)$$

que consiste numa expansão de χ (q) na base de Dirac das 16 matrizes 4x4 euclidianas:

$$\Gamma_D \equiv \{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, i\gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5\} \quad \text{com} \quad \Gamma_D^+ = \Gamma_D .$$

Substituindo (2.11) em (2.1) com (2.6) tem-se

$$\sum_D (\not{q} - im)\Gamma_D \phi_D (\not{q} - im) = \sum_D \int \lambda_D K_D(q-q')\Gamma_D \phi_D(q') d^4q' \quad (2.12)$$

Multiplicando ambos os membros a esquerda por Γ_B e tomando-se os traços tem-se

$$\sum_D Tr \tfrac{1}{4} [\Gamma_B (\not{q} - im) \Gamma_D (\not{q} - im)] \phi_D =$$

$$= \sum_D \tfrac{1}{4} Tr \Gamma_B \Gamma_D \int \lambda_D K_D(q-q') \phi_D(q') d^4q' \quad (2.13)$$

Definindo

$$Tr \tfrac{1}{4} [\Gamma_B (\not{q} - im) \Gamma_D (\not{q} - im)] \equiv D_{BD}$$

e

$$Tr \tfrac{1}{4} \Gamma_B \Gamma_D \equiv T_{DB} \quad (2.14)$$

tem-se

$$\sum_D D_{BD} \phi_D(q) = \sum_D T_{DB} \int \lambda_D K_D(q-q') \phi_D(q') d^4q' \quad (2.15)$$

que são as equações que satisfazem $\phi_D(q)$ (D = 1,2...,5) em ter mos dos traços (2.14) cujo cálculo é feito pela técnica bem conhecida[19] que permite computá-los sem maiores dificuldades.

Posto isso, observamos que da invariância de (2.1) por transformações de SO(4) ($q' = Oq$, $\tilde{O}O = O\tilde{O} = 1$, $\det O = 1$) segue que as soluções devem depender dos <u>hiperesféricos harmônicos a quatro dimensões</u>, que são bases de representações irredutíveis de SO(4), o que permite, utilizando as propriedades dos hiperesféricos harmônicos, resolver (2.1) por separação de variáveis. Se os constituintes fossem de spin zero (quarks escalares), teríamos o "ansatz" seguinte:

$$\chi(q) = F_n(q^2) Y_{n,l,m}(\hat{q}) \tag{2.16}$$

onde $F_n(q^2)$ representa a função hiper-radial e $Y_{n,l,m}(\hat{q})$ o hiperesférico harmônico em $\hat{q}_\mu = q_\mu/q$ ($\mu = 1,2,3,4$), com $n = 0,1,2..$ $l = 0,1,2...n$; $m = l, l-1,....,-l+1,-l$.

No caso de quarks com spin 1/2 , o "ansatz" correspondente a (2.16) é, obviamente, muito mais complicado. Delbourgo, Salam e Strathdee[13] propuzeram um "ansatz" construído a partir dos quadrivetores euclidianos disponíveis, que são, no caso, o momento relativo do par de constituintes q_μ e sua derivada $\partial_\mu = \partial/\partial q_\mu$:

$$\begin{aligned}\chi(q) = [\, & S_m(q^2) + V_m^{(1)}(q^2)\not{q} + V_m^{(2)}(q^2)\not{\partial} + A_m^{(1)}(q^2)\, i\gamma_5 \not{q} + \\ & + A_m^{(2)}(q^2)\, i\gamma_5 \not{\partial} + T_m^{(1)}(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, q_\mu \partial_\nu + \\ & + T_m^{(2)}(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\gamma_5\, q_\mu \partial_\nu + P_m(q^2)\gamma_5 \,]\; Y_{nlm}(\hat{q})\end{aligned} \tag{2.17}$$

No entanto, vê-se claramente de (2.17) que o "ansatz" de DSS é incompleto, pois sendo $\chi(q)$ representado por u'a matriz 4x4 , deveria depender de 16 funções hiper-radiais e não apenas das 8 que aparecem em (2.17), a saber: $S_m(q^2)$, $V_m^{(1)}(q^2)$, $V_m^{(2)}(q^2)$, $A_m^{(1)}(q^2)$, $A_m^{(2)}(q^2)$, $T_m^{(1)}(q^2)$; $T_m^{(2)}(q^2)$, $P_m(q^2)$.

A solução desta questão não é óbvia pois, aparentemente, só dispomos dos q_μ e ∂_μ . A chave do problema pode ser, porém, encontrada na observação[20] de que, para $M = 0$, se pode dispor também da grandeza $\frac{\gamma.P}{M}$ no limite $M \to 0$, onde P designa o momento total do par de constituintes. Como estamos considerando o sistema em que $\vec{P} = 0$, segue que

$$\lim_{M \to 0} \frac{\gamma.P}{M} = \gamma_4$$

A aparição de γ_4 faz prever para os termos adicionais, que estamos procurando, expressões não covariantes, como aliás foram obtidas por BJK, nas quais o índice 4 aparece explicitamente.

A seguir vamos desenvolver sistematicamente o método aqui empregado e que permite completar o "ansatz" de DSS e obter todas as soluções no caso $M = 0$.

Inicialmente, construimos a "ansatz" (2.17) a partir das grandezas covariantes disponíveis, no sistema $\vec{P} = 0$, $M = 0$, ou seja, a partir de 1, γ_5, $\not{q}$, $\not{\partial}$. Para as componentes ϕ_1, $\gamma_5\phi_5$, $\gamma_\mu\phi_\mu$, $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu}$ de (2.11) tem-se imediatamente:

$$\phi_1 = S_n(q^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\gamma_5 \phi_5 = \gamma_5 P_n(q^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\gamma_\mu \phi_\mu^{(1)} = \gamma_\mu V_n^{(1)}(q^2)\, \hat{q}_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) \equiv \gamma_\mu V_n^{(1)}(q^2)\, Y_\mu^{(1)}(\hat{q})$$

$$\gamma_\mu \phi_\mu^{(2)} = \gamma_\mu V_n^{(2)}(q^2)\, q\,\partial_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) \equiv \gamma_\mu V_n^{(2)}(q^2)\, Y_\mu^{(2)}(\hat{q}) \tag{2.18}$$

$$i\gamma_5\gamma_\mu \phi_{5\mu}^{(1)} = i\gamma_5\gamma_\mu A_n^{(1)}(q^2)\, \hat{q}_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) = i\gamma_5\gamma_\mu A_n^{(1)}(q^2)\, Y_\mu^{(1)}(\hat{q})$$

$$i\gamma_5\gamma_\mu \phi_{5\mu}^{(2)} = i\gamma_5\gamma_\mu A_n^{(2)}(q^2)\, q\,\partial_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) = i\gamma_5\gamma_\mu A_n^{(2)}(q^2)\, Y_\mu^{(2)}(\hat{q})$$

onde $Y_\mu^{(1)}(\hat{q})$ e $Y_\mu^{(2)}(\hat{q})$ são os hiperesféricos generalizados vetoriais definidos por DSS.

Para a construção da componente $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$ de (2.11) devemos considerar as seguintes expressões covariantes[21]:

$$\hat{\not q}\,\gamma_\nu Y_\nu^{(1)}(\hat{q}) = Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\hat{\not q}\,\gamma_\nu Y_\nu^{(2)}(\hat{q}) = q_\mu \partial_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) + i\sigma_{\mu\nu}\, q_\mu \partial_\nu Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\hat{\not q}\, i\gamma_5\gamma_\nu Y_\nu^{(1)}(\hat{q}) = -i\gamma_5 Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\hat{\not q}\, i\gamma_5\gamma_\nu Y_\nu^{(2)}(\hat{q}) = -i\gamma_5 q_\mu \partial_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) + \tfrac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \partial_\beta Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{2.19}$$

$$q\not\partial\,\gamma_\nu Y_\nu^{(1)}(\hat{q}) = (4 + q_\nu\partial_\nu) Y_{n\ell m}(\hat{q}) + i\sigma_{\mu\nu}\, q_\mu \partial_\nu Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$q\not\partial\,\gamma_\nu Y_\nu^{(2)}(\hat{q}) = q^2\partial^2 Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$q\not{\partial}\, i\gamma_5 \gamma_\nu Y^{(1)}_\nu(\hat{q}) = -i\gamma_5 (4+q_\nu\partial_\nu) Y_{n\ell m}(\hat{q}) + \tfrac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \partial_\beta Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$q\not{\partial}\, i\gamma_5 \gamma_\nu Y^{(2)}_\nu(\hat{q}) = -i\gamma_5\, q_\nu\partial_\nu Y_{n\ell m}(\hat{q}) + \tfrac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \partial_\beta Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

Pela propriedade $q_\mu \partial_\mu Y_{n\ell m}(\hat{q}) = 0$, (A.8), vê-se que as duas únicas possibilidades para $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$ são:

$$\sigma_{\mu\nu}\, \phi^{(1)}_{\mu\nu} = \tfrac{2}{i}\, T^{(1)}_n(q^2)\, \not{q}\, \gamma_\nu\, Y^{(2)}_\nu(\hat{q}) =$$

$$= T^{(1)}_n(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, (q_\mu\partial_\nu - q_\nu\partial_\mu) Y_{n\ell m}(\hat{q}) \equiv T^{(1)}_n(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, Y^{(1)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \qquad (2.20)$$

$$\sigma_{\mu\nu}\, \phi^{(2)}_{\mu\nu} = 4\, T^{(2)}_n(q^2)\, q\not{\partial}\, i\gamma_5 \gamma_\mu Y^{(2)}_\mu(\hat{q}) =$$

$$= T^{(2)}_n(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, (q_\alpha\partial_\beta - q_\beta\partial_\alpha) Y_{n\ell m}(\hat{q}) \equiv T^{(2)}_n(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

sendo $Y^{(1)}_{\mu\nu}$ e $Y^{(2)}_{\mu\nu}$ os hiperesféricos generalizados tensoriais definidos por DSS.

Portanto, neste caso particular, o "ansatz" (2.11) é escrito, em termos dos hiperesféricos generalizados definidos em (2.18) e (2.20), da maneira seguinte:

$$\chi(q) = S_n(q^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) + \gamma_\mu \left[V^{(1)}_n(q^2)\, Y^{(1)}_\mu(\hat{q}) + V^{(2)}_n(q^2)\, Y^{(2)}_\mu(\hat{q}) \right] +$$

$$\gamma_5\, P_n(q^2) Y_{n\ell m}(\hat{q}) + i\gamma_5\gamma_\mu \left[A^{(1)}_n(q^2)\, Y^{(1)}_\mu(\hat{q}) + A^{(2)}_n(q^2)\, Y^{(2)}_\mu(\hat{q}) \right] +$$

$$\sigma_{\mu\nu} \left[T^{(1)}_n(q^2)\, Y^{(1)}_{\mu\nu}(\hat{q}) + T^{(2)}_n(q^2)\, Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] \qquad (2.21)$$

Todas estas componentes de χ tem π paridade e conjugação de carga C definidas, como pode ser facilmente verificado através de (2.8) e (2.9), e das propriedads (A.57) e (A.58).

Como já foi dito anteriormente, para a construção das restantes soluções dispomos da grandeza $\frac{\gamma.P}{M} = \gamma_4$ (no sistema $\vec{P} = 0$), e portanto as restantes componentes de χ não serão mais covariantes. Com as grandezas disponíveis vamos construir as restantes componentes de χ , lembrando que as mesmas devem ter π paridade e conjugação de carga C definidas.

As expressões mais gerais, construidas a partir de γ_4, $\not{q}$ e $\not{\partial}$, que contém γ_μ e $\gamma_5\gamma_\mu$ e que satisfazem as condições anteriores são:

$$\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4 = \epsilon_{4\mu\alpha\beta} \gamma_5 \gamma_\mu (q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha)$$

$$\not{q} \not{\partial} (\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4) = \epsilon_{4\mu\alpha\beta} \gamma_5 \gamma_\mu (q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha) -$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\delta\rho\sigma} \epsilon_{4\delta\alpha\beta} \gamma_\mu (q_\rho \partial_\sigma - q_\sigma \partial_\rho)(q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha) \tag{2.22}$$

$$\gamma_5 (\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4) = \epsilon_{4\mu\alpha\beta} \gamma_\mu (q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha)$$

$$\gamma_5 \not{q} \not{\partial} (\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4) = \epsilon_{4\mu\alpha\beta} \gamma_\mu (q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha) -$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\delta\rho\sigma} \epsilon_{4\delta\alpha\beta} \gamma_5 \gamma_\mu (q_\rho \partial_\sigma - q_\sigma \partial_\rho)(q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha) \quad .$$

Tem-se, consequentemente, os seguintes termos adicionais para $\gamma_\mu \phi_\mu$ e $i\gamma_5 \gamma_\mu \phi_{5\mu}$:

$$\gamma_\mu \phi_\mu^{(3)} = V_n^{(3)}(q^2)\, \gamma_5 \,(\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) =$$

$$= V_n^{(3)}(q^2)\, \gamma_\mu\, \epsilon_{4\mu\alpha\beta}\, (q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{2.23}$$

$$\equiv V_n^{(3)}(q^2)\, \gamma_\mu\, Y_\mu^{(3)}(\hat{q})$$

$$\gamma_\mu \phi_\mu^{(4)} = V_n^{(4)}(q^2)\, 2\,(1 - \not{q} \not{\partial})(\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) =$$

$$= V_n^{(4)}(q^2)\, \gamma_\mu\, \epsilon_{\mu\delta\rho\sigma}\, \epsilon_{4\delta\alpha\beta}\, (q_\rho \partial_\sigma - q_\sigma \partial_\rho)(q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha)\, Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv V_n^{(4)}(q^2)\, \gamma_\mu\, Y_\mu^{(4)}(\hat{q}) \tag{2.24}$$

$$i\gamma_5 \gamma_\mu \phi_{5\mu}^{(3)} = A_n^{(3)}(q^2)\, i\,(\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) =$$

$$= A_n^{(3)}(q^2)\, i\gamma_5 \gamma_\mu\, \epsilon_{4\mu\alpha\beta}\, (q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha)\, Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv A_n^{(3)}(q^2)\, i\gamma_5 \gamma_\mu\, Y_\mu^{(3)}(\hat{q}) \tag{2.25}$$

$$i\gamma_5 \gamma_\mu \phi_{5\mu}^{(4)} = A_n^{(4)}(q^2)\, 2i\gamma_5\, (1 - \not{q} \not{\partial})(\gamma_4 \not{q} \not{\partial} + \not{q} \not{\partial} \gamma_4)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) =$$

$$= A_n^{(4)}(q^2)\, i\gamma_5 \gamma_\mu\, \epsilon_{\mu\delta\rho\sigma}\, \epsilon_{4\delta\alpha\beta}\, (q_\rho \partial_\sigma - q_\sigma \partial_\rho)(q_\alpha \partial_\beta - q_\beta \partial_\alpha)\, Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv A_n^{(4)}(q^2)\, i\gamma_5 \gamma_\mu\, Y_\mu^{(4)}(\hat{q}) \tag{2.26}$$

Definimos, assim, dois outros hiperesféricos generalizados vetoriais $Y^{(3)}_{\mu}(\hat{q})$ e $Y^{(4)}_{\mu}(\hat{q})$, em cujas expressões aparece explicitamente o índice 4.

A partir destes dois novos hiperesféricos generalizados vetoriais construimos os hiperesféricos generalizados tensoriais, considerando expressões análogas à (2.19), ou seja:

$$\not{\hat{q}}\,\gamma_\nu Y^{(3)}_\nu = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\left(\epsilon_{4\nu\alpha\beta}\hat{q}_\mu - \epsilon_{4\mu\alpha\beta}\hat{q}_\nu\right)\left(q_\alpha\partial_\beta - q_\beta\partial_\alpha\right)Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(3)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

$$q\not{\partial}\,\gamma_\nu Y^{(3)}_\nu = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\left(\epsilon_{4\nu\alpha\beta}\,q\partial_\mu - \epsilon_{4\mu\alpha\beta}\,q\partial_\nu\right)\left(q_\alpha\partial_\beta - q_\beta\partial_\alpha\right)Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(4)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

$$\not{\hat{q}}\,i\gamma_5\gamma_\nu Y^{(3)}_\nu = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon_{4\beta\rho\sigma}\,\hat{q}_\alpha\left(q_\rho\partial_\sigma - q_\sigma\partial_\rho\right)Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(5)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

$$q\not{\partial}\,i\gamma_5\gamma_\nu Y^{(3)}_\nu = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon_{4\beta\rho\sigma}\,q\partial_\alpha\left(q_\rho\partial_\sigma - q_\sigma\partial_\rho\right)Y_{n\ell m}(\hat{q})$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(6)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \qquad (2.27)$$

$$\not{\hat{q}}\,\gamma_\nu Y^{(4)}_\nu = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{4\alpha\rho\sigma}\left(\epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}\hat{q}_\mu - \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\hat{q}_\nu\right)\left(q_\beta\partial_\gamma - q_\gamma\partial_\beta\right)\cdot$$

$$\left(q_\rho\partial_\sigma - q_\sigma\partial_\rho\right)Y_{n\ell m}(\hat{q}) \equiv \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(7)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

$$q\,\not{\partial}\,\gamma_\nu Y^{(4)}_\nu = \frac{i}{2}\,\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{4\alpha\rho\sigma}(\epsilon_{\nu\alpha\beta\delta}\,q\,\partial_\mu - \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,q\,\partial_\nu)(q_\beta\partial_\gamma - q_\gamma\partial_\beta).$$

$$(q_\rho\partial_\sigma - q_\sigma\partial_\rho)Y_{nlm}(\hat{q}) \equiv$$

$$\equiv \frac{i}{2}\,\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(8)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

$$\hat{\not{q}}\,i\gamma_5\,\gamma_\nu Y^{(4)}_\nu = -\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon_{\gamma\delta k\beta}\,\epsilon_{4\rho\sigma k}\,\hat{q}_\alpha(q_\gamma\partial_\delta - q_\delta\partial_\gamma)$$

$$(q_\rho\partial_\sigma - q_\sigma\partial_\rho)Y_{nlm}(\hat{q}) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(9)}_{\mu\nu}(\hat{q})$$

$$q\,\not{\partial}\,i\,\gamma_5\gamma_\nu Y^{(4)}_\nu = -\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon_{\gamma\delta k\beta}\,\epsilon_{4\rho\sigma k}\,q\,\partial_\alpha(q_\gamma\partial_\delta - q_\delta\partial_\gamma)$$

$$(q_\rho\partial_\sigma - q_\sigma\partial_\rho)Y_{nlm}(\hat{q}) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\,\sigma_{\mu\nu}\,Y^{(10)}_{\mu\nu}(\hat{q}).$$

Estes oito hiperesféricos generalizados tensoriais não são independentes pois, como pode ver-se facilmente[22]

$$\begin{aligned}
Y^{(7)}_{\mu\nu} &= 2\,(Y^{(5)}_{\mu\nu} - Y^{(6)}_{\mu\nu}) \\
Y^{(8)}_{\mu\nu} &= -2\,[(n+2)n\,Y^{(5)}_{\mu\nu} + Y^{(6)}_{\mu\nu}] \\
Y^{(9)}_{\mu\nu} &= 2\,[-Y^{(3)}_{\mu\nu} + Y^{(4)}_{\mu\nu}] \\
Y^{(10)}_{\mu\nu} &= 2\,[n(n+2)\,Y^{(3)}_{\mu\nu} + Y^{(4)}_{\mu\nu}]
\end{aligned} \qquad (2.28)$$

Assim teremos apenas quatro termos adicionais para $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$:

$$\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\left[T_m^{(3)}(q^2)\, Y_{\mu\nu}^{(3)}(\hat{q}) + T_m^{(4)}(q^2)\, Y_{\mu\nu}^{(4)}(\hat{q}) + T_m^{(5)}(q^2)\, Y_{\mu\nu}^{(5)}(\hat{q}) + T_m^{(6)}(q^2)\, Y_{\mu\nu}^{(6)}(\hat{q}) \right] \tag{2.29}$$

As funções angulares definidas em (2.23), (2.24) e (2.27) devem ser ortogonais, no seguinte sentido

$$\int Y_{\mu}^{(i)*}(\hat{q})\, Y_{\mu}^{(j)}(\hat{q})\, d\Omega = 0 \qquad i \neq j \tag{2.30}$$

$$\int Y_{\mu\nu}^{(i)*}(\hat{q})\, Y_{\mu\nu}^{(j)}(\hat{q})\, d\Omega = 0 \qquad i \neq j \tag{2.31}$$

(onde subentende-se a soma para índices repetidos), a fim de que seja possível a obtenção das equações radiais para as dife - rentes componentes. A condição (2.30) é satisfeita pelas funções $Y_{\mu}^{(i)}$ (i = 3,4), enquanto a condição (2.31) não é satisfeita pelas funções $Y_{\mu\nu}^{(i)}$ (i = 3,4,5,6), daí, construirmos quatro outros hi peresféricos generalizados tensoriais, combinações lineares de $Y_{\mu\nu}^{(i)}$ (i = 3,4,5,6), que satisfaçam (2.31):

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_{\mu\nu}^{(3)} &\equiv m\, Y_{\mu\nu}^{(3)} + Y_{\mu\nu}^{(4)} \\
\bar{Y}_{\mu\nu}^{(4)} &\equiv (m+2)\, Y_{\mu\nu}^{(3)} - Y_{\mu\nu}^{(4)} \\
\bar{Y}_{\mu\nu}^{(5)} &\equiv m\, Y_{\mu\nu}^{(5)} + Y_{\mu\nu}^{(6)} \\
\bar{Y}_{\mu\nu}^{(6)} &\equiv (m+2)\, Y_{\mu\nu}^{(5)} - Y_{\mu\nu}^{(6)}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Definimos também outros dois hiperesféricos generalizados vetoriais em substituição a $Y_\mu^{(1)}$ e $Y_\mu^{(2)}$, a fim de simplificar as equações radiais, como mostram as propriedades (A.38) e (A.39)[23] :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\mu^{(1)} &\equiv n\, Y_\mu^{(1)} + Y_\mu^{(2)} \\ \bar{Y}_\mu^{(2)} &\equiv (n+2)\, Y_\mu^{(1)} - Y_\mu^{(2)} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Podemos agora escrever o "ansatz" completo para χ :

$$\begin{aligned} \chi(q) = {} & S_n(q^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) + \gamma_5\, P_n(q^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) + \\ & + \gamma_\mu \left[V_n^{(1)}(q^2) Y_\mu^{(1)}(\hat{q}) + V_n^{(2)}(q^2) Y_\mu^{(2)}(\hat{q}) + V_n^{(3)}(q^2) Y_\mu^{(3)}(\hat{q}) + V_n^{(4)}(q^2) Y_\mu^{(4)}(\hat{q}) \right] \\ & + i\gamma_5\gamma_\mu \left[A_n^{(1)}(q^2) Y_\mu^{(1)}(\hat{q}) + A_n^{(2)}(q^2) Y_\mu^{(2)}(\hat{q}) + A_n^{(3)}(q^2) Y_\mu^{(3)}(\hat{q}) + A_n^{(4)}(q^2) Y_\mu^{(4)}(\hat{q}) \right] \\ & + \sigma_{\mu\nu} \left[T_n^{(1)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(1)}(\hat{q}) + T_n^{(2)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(2)}(\hat{q}) + T_n^{(3)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(3)}(\hat{q}) + \right. \\ & \left. + T_n^{(4)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(4)}(\hat{q}) + T_n^{(5)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(5)}(\hat{q}) + T_n^{(6)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(6)}(\hat{q}) \right], \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde aparecem 16 funções hiper-radiais. As definições e propriedades dos hiperesféricos generalizados encontram-se no Apêndice, onde adotamos a notação sem barra para $\bar{Y}_\mu^{(i)}$ (i = 1,2) e para $\bar{Y}_{\mu\nu}^{(i)}$ (i = 3,4,5,6), notação esta que adotaremos até o final do trabalho.

Devido às propriedades de invariância da equação (2.1), soluções com π paridade ou conjugação de carga C diferen tes não estão acopladas, o mesmo acontecendo com as soluções covariantes e não covariantes. Isto nos permite agrupar as soluções nos chamados setores, como aparece na Tabela I.

Substituindo o "ansatz" (2.34) na equação (2.15) e calculando os traços do primeiro membro de (2.15), obtemos as equações da Tabela II para os setores da Tabela I. Temos equações acopladas em apenas quatro setores, com três equações em cada um dos mesmos. Nestes setores, com equações acopladas, fizemos uso das relações (A.50) a (A.53), que nos permitem escrever os hiperesféricos $Y_{n\ell m}$, $Y^{(3)}_{\mu}$, $Y^{(4)}_{\mu}$, $Y^{(2)}_{\mu\nu}$ em termos dos hiperesféricos $Y^{(1)}_{\mu}+Y^{(2)}_{\mu}$, $Y^{(5)}_{\mu\nu}+Y^{(6)}_{\mu\nu}$, $Y^{(3)}_{\mu\nu}-Y^{(4)}_{\mu\nu}$, $Y^{(1)}_{\mu}-Y^{(2)}_{\mu}$, respectivamente. Assim, observamos que u'a maneira simples de desacoplar as equações dos setores (S-V) e (T-A) consiste em considerar as seguintes relações entre as componentes - ver (A.54) a (A.56) :

$$\frac{S_n(q^2)}{2q(n+1)}\, q_\mu \left[Y^{(1)}_{\mu}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{\mu}(\hat{q}) \right] = -\frac{i}{m}\, q_\mu \left[V^{(1)}_{n}(q^2) Y^{(1)}_{\mu}(\hat{q}) + V^{(2)}_{n}(q^2) Y^{(2)}_{\mu}(\hat{q}) \right]$$

$$\frac{T^{(1)}_n(q^2)}{q}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \left[Y^{(1)}_{\beta}(\hat{q}) - Y^{(2)}_{\beta}(\hat{q}) \right] = \frac{i}{2m}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \left[A^{(1)}_{n}(q^2) Y^{(1)}_{\beta}(\hat{q}) + A^{(2)}_{n}(q^2) Y^{(2)}_{\beta}(\hat{q}) \right]$$

$$\frac{A^{(3)}_n(q^2)}{4q(n+1)}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\nu \left[Y^{(5)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) + Y^{(6)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) \right] = \frac{i}{m}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\nu \left[T^{(5)}_{n}(q^2) Y^{(5)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) + T^{(6)}_{n}(q^2) Y^{(6)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) \right] \tag{2.35}$$

$$\frac{A^{(4)}_n(q^2)}{2q}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\nu \left[Y^{(3)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) - Y^{(4)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) \right] = -\frac{i}{m}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\nu \left[T^{(3)}_{n}(q^2) Y^{(3)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) + T^{(4)}_{n}(q^2) Y^{(4)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) \right]$$

Teremos, com estas relações, as equações seguintes para os setores (S-V) e (T-A) :

TABELA I

Separação das componentes de χ em setores

Setor	Componentes de	Π	C
P	$\gamma_5 \, P_n(q^2) \, Y_{n\ell m}(\hat{q})$	$(-)^{\ell+1}$	$(-)^n$
$S\text{-}V$	$S_n(q^2) \, Y_{n\ell m}(\hat{q})$ $\gamma_\mu \, V_n^{(1)}(q^2) \, Y_\mu^{(1)}(\hat{q})$ $\gamma_\mu \, V_n^{(2)}(q^2) \, Y_\mu^{(2)}(\hat{q})$	$(-)^\ell$	$(-)^n$
T	$\sigma_{\mu\nu} \, T_n^{(1)}(q^2) \, Y_{\mu\nu}^{(1)}(\hat{q})$	$(-)^\ell$	$(-)^{n+1}$
$(T\text{-}A)^{I}$	$i\gamma_5 \gamma_\mu \, A_n^{(1)}(q^2) \, Y_\mu^{(1)}(\hat{q})$ $i\gamma_5 \gamma_\mu \, A_n^{(2)}(q^2) \, Y_\mu^{(2)}(\hat{q})$ $\sigma_{\mu\nu} \, T_n^{(2)}(q^2) \, Y_{\mu\nu}^{(2)}(\hat{q})$	$(-)^{\ell+1}$	$(-)^{n+1}$
V^{I}	$\gamma_\mu \, V_n^{(3)}(q^2) \, Y_\mu^{(3)}(\hat{q})$	$(-)^{\ell+1}$	$(-)^{n+1}$
V^{II}	$\gamma_\mu \, V_n^{(4)}(q^2) \, Y_\mu^{(4)}(\hat{q})$	$(-)^\ell$	$(-)^{n+1}$
$(T\text{-}A)^{II}$	$i\gamma_5 \gamma_\mu \, A_n^{(3)}(q^2) \, Y_\mu^{(3)}(\hat{q})$ $\sigma_{\mu\nu} \, T_n^{(5)}(q^2) \, Y_{\mu\nu}^{(5)}(\hat{q})$ $\sigma_{\mu\nu} \, T_n^{(6)}(q^2) \, Y_{\mu\nu}^{(6)}(\hat{q})$	$(-)^\ell$	$(-)^n$
$(T\text{-}A)^{III}$	$i\gamma_5 \gamma_\mu \, A_n^{(4)}(q^2) \, Y_\mu^{(4)}(\hat{q})$ $\sigma_{\mu\nu} \, T_n^{(3)}(q^2) \, Y_{\mu\nu}^{(3)}(\hat{q})$ $\sigma_{\mu\nu} \, T_n^{(4)}(q^2) \, Y_{\mu\nu}^{(4)}(\hat{q})$	$(-)^{\ell+1}$	$(-)^n$

TABELA II

Equações para as componentes de χ , separadas em setores

Setor	Equações
$\mathcal{P}$	$(-q^2-m^2)\, P_n(q^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) = \lambda^P \int K^P\, P_n(q'^2)\, Y_{n\ell m}(\hat{q}')\, d^4q'$
$S-V$	$(q^2-m^2)\frac{S_n(q^2)}{2q(n+1)} q_\mu [Y_\mu^{(1)}(\hat{q})+Y_\mu^{(2)}(\hat{q})] - 2im\, q_\mu [V_n^{(1)}(q^2)Y_\mu^{(1)}(\hat{q}) +$ $+V_n^{(2)}(q^2)Y_\mu^{(2)}(\hat{q})] = \lambda^S\int K^S \frac{S_n(q'^2)}{2q'(n+1)} q'_\mu [Y_\mu^{(1)}(\hat{q}')+Y_\mu^{(2)}(\hat{q}')]\, d^4q'$
	$(-q^2-m^2)[V_n^{(1)}(q^2)Y_\mu^{(1)}(\hat{q})+V_n^{(2)}(q^2)Y_\mu^{(2)}(\hat{q})] + 2q_\mu q_\alpha [V_n^{(1)}(q^2)Y_\alpha^{(1)}(\hat{q}) +$ $+V_n^{(2)}(q^2)Y_\alpha^{(2)}(\hat{q})] - 2im\frac{S_n(q^2)}{2q(n+1)} q_\mu q_\alpha [Y_\alpha^{(1)}(\hat{q})+Y_\alpha^{(2)}(\hat{q})]=$ $=\lambda^V\int K^V [V_n^{(1)}(q'^2)Y_\mu^{(1)}(\hat{q}')+V_n^{(2)}(q'^2)Y_\mu^{(2)}(\hat{q}')]\, d^4q'$
T^I	$(-q^2-m^2)\, T_n^{(1)}(q^2)\, Y_{\mu\nu}^{(1)}(\hat{q}) = \lambda^T\int K^T\, T_n^{(1)}(q'^2)\, Y_{\mu\nu}^{(1)}(\hat{q}')\, d^4q'$
$(T-A)^I$	$(q^2-m^2)\frac{T_n^{(2)}(q^2)}{q}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha [Y_\beta^{(1)}(\hat{q})-Y_\beta^{(2)}(\hat{q})] +$ $+ im\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha [A_n^{(1)}(q^2)Y_\beta^{(1)}(\hat{q})+A_n^{(2)}(q^2)Y_\beta^{(2)}(\hat{q})] =$ $=\lambda^T\int K^T\frac{T_n^{(2)}(q'^2)}{q'}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q'_\alpha [Y_\beta^{(1)}(\hat{q}')-Y_\beta^{(2)}(\hat{q}')]\, d^4q'$
	$(q^2-m^2)[A_n^{(1)}(q^2)Y_\mu^{(1)}(\hat{q})+A_n^{(2)}(q^2)Y_\mu^{(2)}(\hat{q})] - 2q_\mu q_\alpha [A_n^{(1)}(q^2)Y_\alpha^{(1)}(\hat{q})+$ $+A_n^{(2)}(q^2)Y_\alpha^{(2)}(\hat{q})] - 2im\frac{T_n^{(2)}(q^2)}{q}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}\, q_\lambda\, \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\, q_\rho [Y_\sigma^{(1)}(\hat{q})-Y_\sigma^{(2)}(\hat{q})]$ $=\lambda^A\int K^A [A_n^{(1)}(q'^2)Y_\mu^{(1)}(\hat{q}')+A_n^{(2)}(q'^2)Y_\mu^{(2)}(\hat{q}')]\, d^4q'$

TABELA II - Continuação

Equações para as componentes de χ , separadas em setores

setor	Equações
V^{I}	$(-q^2-m^2) V_m^{(3)}(q^2)\, Y_\mu^{(3)}(\hat q) = \lambda^V \int K^V V_m^{(3)}(q'^2)\, Y_\mu^{(3)}(\hat q')\, d^4q'$
V^{II}	$(-q^2-m^2) V_m^{(4)}(q^2)\, Y_\mu^{(4)}(\hat q) = \lambda^V \int K^V V_m^{(4)}(q'^2)\, Y_\mu^{(4)}(\hat q')\, d^4q'$
$(T\text{-}A)^{II}$	$(q^2-m^2)\frac{A_m^{(3)}(q^2)}{4q(m+1)}\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q_\nu [Y_{\alpha\beta}^{(5)}(\hat q)+Y_{\alpha\beta}^{(6)}(\hat q)] + 2im\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q_\nu [T_m^{(5)}(q^2)\cdot Y_{\alpha\beta}^{(5)}(\hat q) + T_m^{(6)}(q^2) Y_{\alpha\beta}^{(6)}(\hat q)] = \lambda^A \int K^A \frac{A_m^{(3)}(q'^2)}{4q'(m+1)}\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q'_\nu [Y_{\alpha\beta}^{(5)}(\hat q')+Y_{\alpha\beta}^{(6)}(\hat q')]\, d^4q'$ $(q^2-m^2)[T_m^{(5)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(5)}(\hat q) + T_m^{(6)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(6)}(\hat q)] - 2 q_\mu q_\alpha [T_m^{(5)}(q^2) Y_{\alpha\nu}^{(5)}(\hat q) + T_m^{(6)}(q^2)\cdot Y_{\alpha\nu}^{(6)}(\hat q)] - 2 q_\alpha q_\nu [T_m^{(5)}(q^2) Y_{\mu\alpha}^{(5)}(\hat q) + T_m^{(6)}(q^2) Y_{\mu\alpha}^{(6)}(\hat q)] + \frac{im A_m^{(3)}(q^2)}{4q(m+1)}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\, q_\lambda \cdot \epsilon_{\alpha\rho\sigma\gamma}\, q_\gamma [Y_{\rho\sigma}^{(5)}(\hat q)+Y_{\rho\sigma}^{(6)}(\hat q)] = \lambda^T \int K^T [T_m^{(5)}(q'^2) Y_{\mu\nu}^{(5)}(\hat q') + T_m^{(6)}(q'^2) Y_{\mu\nu}^{(6)}(\hat q')]\, d^4q'$
$(T\text{-}A)^{III}$	$(q^2-m^2)\frac{A_m^{(4)}(q^2)}{2q}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\nu [Y_{\alpha\beta}^{(3)}(\hat q)-Y_{\alpha\beta}^{(4)}(\hat q)] - 2im\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q_\nu [T_m^{(3)}(q^2) Y_{\alpha\beta}^{(3)}(\hat q) + T_m^{(4)}(q^2) Y_{\alpha\beta}^{(4)}(\hat q)] = \lambda^A \int K^A \frac{A_m^{(4)}(q'^2)}{2q'}\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q_\nu [Y_{\alpha\beta}^{(3)}(\hat q')-Y_{\alpha\beta}^{(4)}(\hat q')]\, d^4q'$ $(q^2-m^2)[T_m^{(3)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(3)}(\hat q) + T_m^{(4)}(q^2) Y_{\mu\nu}^{(4)}(\hat q)] - 2 q_\mu q_\alpha [T_m^{(3)}(q^2) Y_{\alpha\nu}^{(3)}(\hat q) + T_m^{(4)}(q^2)\cdot Y_{\alpha\nu}^{(4)}(\hat q)] - 2 q_\alpha q_\nu [T_m^{(3)}(q^2) Y_{\mu\alpha}^{(3)}(\hat q) + T_m^{(4)}(q^2) Y_{\mu}^{(4)}(\hat q)] - \frac{im A_m^{(4)}(q^2)}{2q}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\, q_\lambda\, \epsilon_{\alpha\rho\sigma\gamma}\, q_\gamma [Y_{\rho\sigma}^{(3)}(\hat q)-Y_{\rho\sigma}^{(4)}(\hat q)] = \lambda^T \int K^T [T_m^{(3)}(q'^2) Y_{\mu\nu}^{(3)}(\hat q') + T_m^{(4)}(q'^2) Y_{\mu\nu}^{(4)}(\hat q')]\, d^4q'$

$$-\frac{i}{m}\left\{-q^2-m^2+\lambda^S\!\int\! K^S\right\} q_\mu \left(V_m^{(1)}(q^2)\,Y_\mu^{(1)}(\hat{q})+V_m^{(2)}(q^2)\,Y_\mu^{(2)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.36)$$

$$\left\{-q^2-m^2-\lambda^V\!\int\! K^V\right\}\left(V_m^{(1)}(q^2)\,Y_\mu^{(1)}(\hat{q})+V_m^{(2)}(q^2)\,Y_\mu^{(2)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.37)$$

$$\frac{i}{2m}\left\{-q^2-m^2+\lambda^T\!\int\! K^T\right\}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \left(A_m^{(1)}(q^2)Y_\beta^{(1)}(\hat{q})+A_m^{(2)}(q^2)Y_\beta^{(2)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.38)$$

$$\left\{-q^2-m^2-\lambda^A\!\int\! K^A\right\}\left(A_m^{(1)}(q^2)\,Y_\mu^{(1)}(\hat{q})+A_m^{(2)}(q^2)\,Y_\mu^{(2)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.39)$$

$$\frac{i}{m}\left\{-q^2-m^2+\lambda^A\!\int\! K^A\right\}\epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q_\nu \left(T_m^{(5)}(q^2)\,Y_{\alpha\beta}^{(5)}(\hat{q})+T_m^{(6)}(q^2)\,Y_{\alpha\beta}^{(6)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.40)$$

$$\left\{-q^2-m^2-\lambda^T\!\int\! K^T\right\}\left(T_m^{(5)}(q^2)\,Y_{\mu\nu}^{(5)}(\hat{q})+T_m^{(6)}(q^2)Y_{\mu\nu}^{(6)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.41)$$

$$-\frac{i}{m}\left\{-q^2-m^2+\lambda^A\!\int\! K^A\right\}\epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\, q_\nu \left(T_m^{(3)}(q^2)Y_{\alpha\beta}^{(3)}(\hat{q})+T_m^{(4)}(q^2)Y_{\nu\beta}^{(4)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.42)$$

$$\left\{-q^2-m^2-\lambda^T\!\int\! K^T\right\}\left(T_m^{(3)}(q^2)\,Y_{\mu\nu}^{(3)}(\hat{q})+T_m^{(4)}(q^2)\,Y_{\mu\nu}^{(4)}(\hat{q})\right)=0 \quad (2.43)$$

Finalmente, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos hiperesféricos generalizados- (A.25) a (A.30) - obtemos 16 equações hiper-radiais desacopladas, como mostra a Tabela III onde o símbolo $\lambda^i K_m^i$ (i = P,S,V,A,T) deve ser entendido como

$$\lambda^i K_m^i F(q^2) \equiv \lambda_i K_{i,m} F(q^2) = \lambda^i \int_0^\infty K_m^i(q,q') F(q'^2)\, q'^3 dq' \;, \quad (2.44)$$

e resulta da expansão do kernel, tipo convolutivo, em hiperesféricos harmônicos, ou seja[24]

$$\lambda^i K^i(q-q') = \lambda^i \sum_{nlm} K_m^i(q,q')\, Y_{nlm}^*(\hat{q}')\, Y_{nlm}(\hat{q}) \quad (2.45)$$

TABELA III

Equações desacopladas para as 16 componentes hiper-radiais de χ

Setor	Equações hiper-radiais
P	$\{-q^2-m^2-\lambda^P K^P_m\} P_m(q^2)=0$
$(S-V)$	$\{-q^2-m^2+\lambda^S K^S_m\} q\{n V^{(1)}_m(q^2)+(n+2) V^{(2)}_m(q^2)\}=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^V K^V_{n-1}\} V^{(1)}_m(q^2)=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^V K^V_{n+1}\} V^{(2)}_m(q^2)=0$
T	$\{-q^2-m^2-\lambda^T K^T_m\} T^{(1)}_m(q^2)=0$
$(T-A)^{I}$	$\{-q^2-m^2+\lambda^T K^T_m\} q\{A^{(1)}_m(q^2)-A^{(2)}_m(q^2)\}=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^A K^A_{m-1}\} A^{(1)}_m(q^2)=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^A K^A_{m+1}\} A^{(2)}_m(q^2)=0$
V^{I}	$\{-q^2-m^2-\lambda^V K^V_m\} V^{(3)}_m(q^2)=0$
V^{II}	$\{-q^2-m^2-\lambda^V K^V_m\} V^{(4)}_m(q^2)=0$
$(T-A)^{II}$	$\{-q^2-m^2+\lambda^A K^A_m\} q\{T^{(5)}_m(q^2)+T^{(6)}_m(q^2)\}=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^T K^T_{m-1}\} T^{(5)}_m(q^2)=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^T K^T_{m+1}\} T^{(6)}_m(q^2)=0$
$(T-A)^{III}$	$\{-q^2-m^2+\lambda^A K^A_m\} q\{T^{(3)}_m(q^2)-T^{(4)}_m(q^2)\}=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^T K^T_{m-1}\} T^{(3)}_m(q^2)=0$ $\{-q^2-m^2-\lambda^T K^T_{m+1}\} T^{(4)}_m(q^2)=0$

Até aqui, o tratamento da equação (2.1) é válido para qualquer tipo de kernel convolutivo e suas soluções são determinadas resolvendo-se as equações hiper-radiais desacopladas da Tabela III. Neste trabalho determinaremos as soluções para o kernel harmônico (2.7). Para este tipo particular de kernel, as equações hiper-radiais se reduzem a equações diferenciais de segunda ordem, pois neste caso, $\lambda K_n(q)$ é dado por

$$\lambda K_n(q) = \alpha - \beta\left(\frac{d^2}{dq^2} + \frac{3}{q}\frac{d}{dq} - \frac{n(n+2)}{q^2}\right) \equiv (\alpha - \beta\Box_n) \quad (2.46)$$

como pode ser visto pela propriedade (A.7) dos hiperesféricos harmônicos.

Discutiremos apenas as equações do setor S-V pois as soluções das demais equações são obtidas semelhantemente. Para este setor temos as equações diferenciais[25]:

$$(-q^2 - m^2 - \alpha^V + \beta^V \Box_n)\, V^{(4)}_{n+1}(q^2) = 0 \quad (2.47)$$

$$(-q^2 - m^2 - \alpha^V + \beta^V \Box_n)\, V^{(2)}_{n-1}(q^2) = 0 \quad (2.48)$$

$$(-q^2 - m^2 + \alpha^S - \beta^S \Box_n)\, q\, (n V^{(1)}_n(q^2) + (n+2) V^{(3)}_n(q^2)) \quad (2.49)$$

Estas equações podem ser transformadas em equações confluentes hiper-geométricas, e existem soluções exatas para as equações (2.47) e (2.48) se α^V e β^V satisfizerem a seguinte relação[26]:

$$\alpha^V = -m^2 - 2(n + 2\pi + 2)\sqrt{\beta^V}\,. \quad (2.50)$$

Neste caso as soluções são:

$$V^{(1)}_{m+1}(q^2) = V^{(2)}_{m-1}(q^2) = q^m L^{m+1}_{r}(q^2/\sqrt{\beta^V})\, e^{-q^2/2\sqrt{\beta^V}} \tag{2.51}$$

$$m = 0, 1, 2, 3 \ldots \qquad r = 0, 1, 2 \ldots$$

onde $L^{m+1}_{r}(q^2/\sqrt{\beta^V})$ são os polinômios de Laguerre.

Como a equação (2.49) apenas difere das equações (2.48) e (2.47) nos autovalores (α^S, β^S), só será satisfeita se

$$q\,[k_1\, n\, V^{(1)}_{m}(q^2) + (m+2)\, k_2\, V^{(2)}_{m}(q^2)] = V^{(1)}_{m+1}(q^2) = V^{(2)}_{m-1}(q^2) \tag{2.52}$$

com

$$\beta^V = -\beta^S$$
$$-\alpha^S = -m^2 - 2(m+2r+2)\sqrt{\beta^V}, \tag{2.53}$$

e k_1, k_2 duas constantes a ser determinadas.

Pelas propriedades dos polinômios de Laguerre[27] podemos escrever:

$$q\, V^{(1)}_{m}(q^2) = q^n [L^{m+1}_{r'}(q^2/\sqrt{\beta^V}) - L^{m+1}_{r'-1}(q^2/\sqrt{\beta^V})]\, e^{-q^2/2\sqrt{\beta^V}} \tag{2.54}$$

$$q\, V^{(2)}_{m}(q^2) = \sqrt{\beta^V}\, q^n [(m+r''+2) L^{m+1}_{r''}(q^2/\sqrt{\beta^V}) - (r''+1) L^{m+1}_{r''+1}(q^2/\sqrt{\beta^V})] \times e^{-q^2/2\sqrt{\beta^V}}. \tag{2.55}$$

De onde concluimos que (2.52) é satisfeita para

$r' = r'' + 1$ e com $k_2 = 1$, $k_1 = \sqrt{\beta^\nu}\,(n+2)(n+r''+2)/n$ ou

$k_1 = (n+2)(r''+1)\cdot\sqrt{\beta^\nu}/n$.

Na Tabela IV encontram-se todas a soluções com os respectivos auto-valores.

TABELA IV

Soluções exatas da equação de B-S, com M = 0 e com interação harmônica

Setor	Soluções	Auto-valores
P	$\gamma_5 \phi_5 = \gamma_5 R_n^{m+1}(q^2, \beta^P) Y_{m\ell m}(\hat{q})$	$\alpha^P = -m^2 - 2(m+2n+3)\sqrt{\beta^P}$ $m = 0, 1, 2 \ldots$ $n = 0, 1, 2 \ldots$
S-V	1) $\phi_1 = \frac{-i}{m}(m+2)(m+1)\sqrt{\beta^V} R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_{m\ell m}(\hat{q})$ $\gamma_\mu \phi_\mu = \gamma_\mu \left[R_{n-1}^{m+2}(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_\mu^{(2)}(\hat{q}) + \right.$ $\left. + \frac{(m+2)(m+n+1)}{m} \sqrt{\beta^V} R_n^m(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_\mu^{(1)}(\hat{q}) \right]$	$\alpha^S = m^2 + 2(m+2n+3)\sqrt{\beta^V}$ $\alpha^V = -m^2 - 2(m+2n+1)\sqrt{\beta^V}$ $\beta^S = -\beta^V$ $m = 1, 2, 3 \ldots$ $n = 0, 1, 2 \ldots$
	2) $\phi_1 = \frac{-i}{m}(m+2)(m+1)\sqrt{\beta^V} R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_{m\ell m}(\hat{q})$ $\gamma_\mu \phi_\mu = \gamma_\mu \left[R_n^{m+2}(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_\mu^{(2)}(\hat{q}) + \right.$ $\left. + \frac{(m+2)(n+1)}{m} \sqrt{\beta^V} R_{n+1}^m(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_\mu^{(1)}(\hat{q}) \right]$	$\alpha^S = m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^V}$ $\alpha^V = -m^2 - 2(m+2n+3)\sqrt{\beta^V}$ $\beta^S = -\beta^V$ $m = 1, 2, 3, \ldots$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
T	$\sigma_{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^T}) Y_{\mu\nu}^{(1)}(\hat{q})$	$\alpha^T = -m^2 - 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^T}$ $m = 1, 2, 3 \ldots$ $n = 0, 1, 2 \ldots$
$V^{I,II}$	$\gamma_\mu \phi_\mu = \gamma_\mu R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_\mu^{(3),(4)}(\hat{q})$	$\alpha^V = -m^2 - 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^V}$ $m = 1, 2, 3 \ldots$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

TABELA IV - Continuação

Soluções exatas da equação de B-S, com M = O e

com interação harmônica

Setor	Soluções	Auto-valores
$(T-A)^{I}$	1) $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = -\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}(m+1)\sqrt{\beta^A}\,R^{m+1}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^A})\,Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q})$ $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,[\,R^{m+2}_{n-1}(q^2,\sqrt{\beta^A})\,Y^{(2)}_{\mu}(\hat{q}) +$ $-(m+n+1)\sqrt{\beta^A}\,R^{m}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^A})\,Y^{(1)}_{\mu}(\hat{q})\,]$	$\alpha^T = m^2+2(m+2n+2)\sqrt{\beta^T}$ $\alpha^A = -m^2-2(m+2n+1)\sqrt{\beta^A}$ $\beta^A = -\beta^T$ $m = 0,1,2\ldots$ $n = 0,1,2\ldots$
	2) $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = -\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}(m+1)\sqrt{\beta^A}\,R^{m+1}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^A})\,Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q})$ $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,[\,R^{m+2}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^A})\,Y^{(2)}_{\mu}(\hat{q}) -$ $-(n+1)\sqrt{\beta^A}\,R^{m}_{n+1}(q^2,\sqrt{\beta^A})\,Y^{(1)}_{\mu}(\hat{q})\,]$	$\alpha^T = m^2+2(m+2n+2)\sqrt{\beta^A}$ $\alpha^A = -m^2-2(m+2n+3)\sqrt{\beta^A}$ $\beta^A = -\beta^T$ $m = 0,1,2\ldots$ $n = 0,1,2,\ldots$
$(T-A)^{II}$	1) $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\,[\,R^{m+2}_{n-1}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(6)}_{\mu\nu}(\hat{q}) +$ $(m+n+1)\sqrt{\beta^T}\,R^{m}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(5)}_{\mu\nu}(\hat{q})\,]$ $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,[-\frac{i}{m}(m+1)^2\sqrt{\beta^T}\,R^{m+1}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(3)}_{\mu}(\hat{q})\,]$	$\alpha^A = m^2+2(m+2n+2)\sqrt{\beta^T}$ $\alpha^T = -m^2-2(m+2n+1)\sqrt{\beta^T}$ $\beta^A = -\beta^T$ $m = 0,1,2,\ldots$ $n = 0,1,2,\ldots$
	2) $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\,[\,R^{m+2}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(6)}_{\mu\nu}(\hat{q}) +$ $+(n+1)\sqrt{\beta^T}\,R^{m}_{n+1}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(5)}_{\mu\nu}(\hat{q})\,]$ $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,[-\frac{i}{m}(m+1)^2 R^{m+1}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\sqrt{\beta^T}\,Y^{(3)}_{\mu}(\hat{q})\,]$	$\alpha^A = m^2+2(m+2n+2)\sqrt{\beta^T}$ $\alpha^T = -m^2-2(m+2n+3)\sqrt{\beta^T}$ $\beta^A = -\beta^T$ $m = 0,1,2\ldots$ $n = 0,1,2\ldots$

TABELA IV - Continuação

Soluções exatas da equação de B-S, com M = 0 e

com interação harmônica

Setor	Soluções	Auto-valores
$(T\text{-}A)^{III}$	1) $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\,[\,R^{m+2}_{n-1}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(4)}_{\mu\nu}(\hat{q}) -$ $-(m+n+1)\sqrt{\beta^T}\,R^{m}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(3)}_{\mu\nu}(\hat{q})\,]$ $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,[\,\frac{i}{m}(m+1)\sqrt{\beta^T}\,R^{m+1}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(4)}_{\mu}(\hat{q})\,]$	$\alpha^A = m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^T}$ $\alpha^T = -m^2 - 2(m+2n+1)\sqrt{\beta^T}$ $\beta^A = -\beta^T$ $m = 1, 2, 3 \ldots$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
	2) $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\,[\,R^{m+2}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(4)}_{\mu\nu}(\hat{q}) -$ $-(n+1)\sqrt{\beta^T}\,R^{m}_{n+1}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(3)}_{\mu\nu}(\hat{q})\,]$ $i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,[\,\frac{i}{m}(m+1)\sqrt{\beta^T}\,R^{n+1}_{n}(q^2,\sqrt{\beta^T})\,Y^{(4)}_{\mu}(\hat{q})\,]$	$\alpha^A = m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^T}$ $\alpha^T = -m^2 - 2(m+2n+3)\sqrt{\beta^T}$ $\beta^A = -\beta^T$ $m = 1, 2, 3, \ldots$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
	$R^{m}_{n}(q^2,\sqrt{\beta}) = q^{m-1}\,L^{m}_{n}\left(\frac{q^2}{\sqrt{\beta}}\right)\,e^{-q^2/2\sqrt{\beta}}$	

CAPÍTULO III - SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE B-S PARA ESTADOS LIGADOS COM MASSA M

Determinaremos as soluções da equação de B-S, no sistema de repouso, com as hipóteses do modelo a quarks pesados. Isto é, os estados ligados mais baixos são estados fortemente ligados e portanto usaremos a aproximação harmônica para o kernel e consideraremos termos até a ordem M^2/m^2. (M = massa do estado ligado) Dentro deste contexto também justifica-se considerar que $\langle q^2 \rangle /m^2 \ll 1$[7].

Dentre as possíveis estruturas spinoriais do kernel, que dão resultados análogos aos do modelo a quarks não relativístico[7], consideraremos apenas o kernel do tipo $-\gamma_5 \times \gamma_5$, ou usando os operadores de projeção definidos em (2.5), um kernel do tipo $S - V + T - A + P$. Esta escolha justifica-se através do problema de saturação das forças extremamente fortes, que só é resolvido por este tipo de kernel[28] e também através dos resultados obtidos com aplicações da função de onda do meson π[29] e do meson ρ[7].

Por um kernel $-\gamma_5 \times \gamma_5$, entendemos que o termo dominante do kernel é deste tipo, enquanto os outros termos dão uma contribuição tal que $\alpha^A \sim \alpha^V \sim -m^2$; $\alpha^P \sim \alpha^T \sim \alpha^S \sim m^2$ (ver(2.4)).

α^A e α^V devem ser aproximadamente iguais a $-m^2$ para se obter estados fortemente ligados e ainda devemos ter

$$\alpha^V - \alpha^A = \delta \qquad (\delta/m^2 << 1)$$

para que os singletos e tripletos não estejam degenerados, como pode ser visto pela Tabela VI. Portanto, os estados ligados, neste modelo, são descritos pelas amplitudes $\gamma_\mu \phi_\mu$ e $i\gamma_5 \gamma_\mu \phi_{5\mu}$.

A equação de B-S, no sistema de repouso, após a rotação de Wick é escrita:

$$(\not{q} - im + i\frac{M}{2}\gamma_4)\,\chi(q,M)\,(\not{q} - im - i\frac{M}{2}\gamma_4) =$$
$$= \int R(q-q')\,\chi(q',M)\,d^4q' \quad . \qquad (3.1)$$

Como as soluções são encontradas através do método perturbativo, tomamos o mesmo "ansatz" (2.34) para χ e escrevemos (3.1) do modo seguinte:

$$(\not{q} - im)\chi(\not{q} - im) - \int R(q-q')\chi\, d^4q' =$$
$$= -\frac{M^2}{4}\gamma_4\chi\gamma_4 - m\frac{M}{2}(\gamma_4\chi - \chi\gamma_4) + i\frac{M}{2}(\not{q}\chi\gamma_4 - \gamma_4\chi\not{q}) \quad . \qquad (3.2)$$

Usando a técnica dos traços, obtemos, a partir de (3.2), cinco equações acopladas para ϕ_1, ϕ_5, ϕ_μ, $\phi_{5\mu}$ e $\phi_{\mu\nu}$. As amplitudes ϕ_1, ϕ_5 e $\phi_{\mu\nu}$ devem ser pequenas, uma vez que nas equações para estas amplitudes a massa dos quarks não é compensada pela profundidade do potencial (α), que nestes casos é repulsivo. Então, nas equações para ϕ_1, ϕ_5, $\phi_{\mu\nu}$ desprezamos os termos de ordem superior a M/m, e consideramos $\alpha^i \doteq m^2$ (i = S,P,T). Teremos assim, as seguintes equações para as cinco amplitudes:

$$\phi_5 \cong -i\frac{M}{2m}\,\phi_{5\mu}\,\delta_{\mu 4} \qquad (3.3)$$

$$\phi_1 \cong \frac{-i}{m}\,q_\mu\,\phi_\mu \qquad (3,4)$$

$$\phi_{\mu\nu} \cong \frac{-i}{2m}\,q_\lambda\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\,\phi_{5\alpha} + \frac{i}{m}\frac{M}{4}\left[\phi_\nu\,\delta_{4\mu} - \phi_\mu\,\delta_{4\nu}\right] \qquad (3.5)$$

$$-(q^2+m^2)\,\phi_\mu + 2\,q_\mu\,q_\alpha\phi_\alpha - 2im\,q_\mu\phi_1 - \lambda^V\!\int K^V(q-q')\,\phi_\mu\,d^4q' =$$

$$= \frac{M^2}{4}\phi_\mu - \frac{M^2}{2}\phi_\nu\,\delta_{4\nu}\,\delta_{4\mu} + iMm\left[\phi_{4\mu}\,\delta_{4\nu} - \phi_{\mu\nu}\,\delta_{4\nu}\right] + M\,\epsilon_{4\mu\lambda\alpha}\,q_\lambda\,\phi_{5\alpha} \qquad (3.6)$$

$$(q^2-m^2)\,\phi_{5\mu} - 2\,q_\mu q_\nu\,\phi_{5\nu} - 2im\,\epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma}\,q_\alpha\,\phi_{\rho\sigma} - \lambda^A\!\int K^A(q-q')\,\phi_{5\mu}\,d^4q' =$$

$$= -\frac{M^2}{4}\phi_{5\mu} + \frac{M^2}{2}\phi_{5\nu}\,\delta_{4\nu}\,\delta_{4\mu} - imM\,\phi_5\,\delta_{4\mu} + M\,\epsilon_{\mu\alpha 4\beta}\,q_\alpha\,\phi_\beta \quad . \qquad (3.7)$$

Substituindo ϕ_1, ϕ_5, $\phi_{\mu\nu}$ dados por (3.3) a (3.5) nas equações (3.6) e (3.7) obtemos

$$-(q^2+m^2)\,\phi_\mu - \lambda^V\!\int K^V(q-q')\,\phi_\mu\,d^4q' = -\frac{M^2}{4}\,\phi_\mu \qquad (3.8)$$

$$-(q^2+m^2)\,\phi_{5\mu} - \lambda^A\!\int K^A(q-q')\,\phi_{5\mu}\,d^4q' = -\frac{M^2}{4}\,\phi_{5\mu} \qquad (3.9)$$

É interessante notar que com as aproximações feitas o último termo de (3.2) (termo de acoplamento spin-órbita) não contribui para a determinação das amplitudes dos estados ligados, e portanto, as equações para $\phi_{5\mu}$ e ϕ_μ não estão acopladas.

Sendo a equação (3.1) invariante por reflexões espaciais, as soluções com paridade diferente permanecem em setores diferentes, o que nos permite escrever as equações radiais, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos hiperesféricos generalizados - (A.25) a (A.27) - . Temos então, para um <u>kernel harmônico</u> as seguintes equações para $V_n^{(i)}(q^2)$ $(i = 1,2,3,4)$, idênticas às equações para $A_n^{(i)}(q^2)$ $(i = 1,2,3,4)$:

$$
\begin{aligned}
&(-q^2 - m^2 - \alpha^V + \beta^V \square_{n-1}) V_n^{(1)}(q^2) = -\frac{M^2}{4} V_n^{(1)}(q^2) \\
&(-q^2 - m^2 - \alpha^V + \beta^V \square_{n+1}) V_n^{(2)}(q^2) = -\frac{M^2}{4} V_n^{(2)}(q^2) \\
&(-q^2 - m^2 - \alpha^V + \beta^V \square_{n}) V_n^{(3)}(q^2) = -\frac{M^2}{4} V_n^{(3)}(q^2) \\
&(-q^2 - m^2 - \alpha^V + \beta^V \square_{n}) V_n^{(4)}(q^2) = -\frac{M^2}{4} V_n^{(4)}(q^2)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

As soluções destas equações são idênticas às soluções das equações (2.47) e (2.48), e teremos agora, restrições sôbre os valores de M , ou seja:

$$
\gamma_\mu \phi_\mu = \gamma_\mu \left(q^n L_r^{n+1}(q^2/\sqrt{\beta^V})\, e^{-q^2/2\sqrt{\beta^V}} \right) \cdot \left(Y^{(1)}_{\mu,n+1,\ell,m}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{\mu,n-1,\ell,m}(\hat{q}) + Y^{(3)}_{\mu,n,\ell,m}(\hat{q}) + Y^{(4)}_{\mu,n,\ell,m}(\hat{q}) \right) \tag{3.11}
$$

com

$$
M^2 = 4\left(\alpha^V + m^2 + 2(n + 2r + 2)\sqrt{\beta^V}\right) \tag{3.12}
$$

$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$r = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Analogamente, $\phi_{5\mu}$ é dada por:

$$i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu} = i\gamma_5\gamma_\mu\,(q^m L_n^{m+1}(q^2/\sqrt{\beta^A})\,e^{-q^2/2\sqrt{\beta^A}})\,.$$

$$\cdot\left(Y^{(1)}_{\mu,m+1,\ell,m}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{\mu,m-1,\ell,m}(\hat{q}) + Y^{(3)}_{\mu,m,\ell,m}(\hat{q}) + Y^{(4)}_{\mu,m,\ell,m}(\hat{q})\right) \quad (3.13)$$

sendo que M^2 deve satisfazer a relação:

$$M^2 = 4\,(\alpha^A + m^2 + 2(m + 2n + 2)\sqrt{\beta^A}) \quad (3.14)$$

$$m = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Finalmente, podemos escrever a amplitude de B-S do seguinte modo:

$$\chi(q) = \chi_0 - \frac{i}{2m}\{\not q, \chi_0\}_+ + \frac{i}{4m}[M\gamma_4, \chi_0] \quad (3.15)$$

onde

$$\chi_0 = \gamma_\mu\phi_\mu(q) + i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu}(q) \;,$$

e ϕ_μ , $\phi_{5\mu}$ dados por (3.11) e (3.13) respectivamente.

Os dois últimos termos de (3.15) são as amplitudes ϕ_1, $\gamma_5\phi_5$, $\sigma_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$ dadas por (3.3) a (3.5), uma vez que[21]

$$\{\not q, \gamma_\mu\phi_\mu\}_+ = 2q_\mu\phi_\mu$$

$$\{\not q, i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu}\}_+ = \sigma_{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}q_\lambda\phi_{5\alpha} \quad (3.16)$$

$$[M\gamma_4, \gamma_\mu\phi_\mu] = i\sigma_{\mu\nu}[\phi_\nu\delta_{4\mu} - \phi_\mu\delta_{4\nu}] \;.$$

$$[M\gamma_4, i\gamma_5\gamma_\mu\phi_{5\mu}] = -2i\gamma_5\phi_{5\mu}\delta_{\mu 4} \;.$$

Tendo determinado as soluções da equação (3.1), podemos identificar as partículas descritas pelas amplitudes (3.15)

Evidentemente teremos mais estados do que os previstos não relativisticamente, pois, por exemplo, M depende de 2 números quânticos, n e r. Eliminamos alguns desses estados, desprezando as amplitudes com norma negativa, supondo que as mesmas não representam estados físicos.

A amplitude de B-S, com a rotação de Wick, deve satisfazer à condição de normalização[6], para um estado ligado com massa M_B:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\, Tr \int d^4q\; \bar{\chi}^{B}_{n'}(q,M_B)\left(\frac{\not{M}_B}{2} - i\not{q} - m\right)\chi^{B}_{n}\left(i\not{q} + \frac{\not{M}_B}{2} + m\right) =$$

$$= -\left[\lambda \frac{\partial M_B^2}{\partial \lambda}\right]\delta_{nn'} \qquad (3.17)$$

onde

$$\bar{\chi}(q;M_B) = \gamma_4\; \chi^{+}(-q_4, \vec{q}; M_B)\,\gamma_4$$

Como no caso em estudo $\lambda \frac{\partial M_B^2}{\partial \lambda} < 0$ – ver (3.12) e (3.14) – vamos pois eliminar as soluções tais que o primeiro membro de (3.17) tenha sinal negativo, ou seja, as soluções com norma negativa.

Escrevendo $\bar{\chi}(q,M) = C^{-1}(\mathcal{P}\,\mathcal{C}\,\chi(q,M))^{*}C$, usando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre e dos hiperesféricos generalizados, e ainda lembrando que $\alpha^{i} \sim -m^2$ ($i = A, V$), podemos determinar o sinal do primerio membro de(3.17) e construir a Tabela V , para os termos dominantes da amplitude de B-S, onde são indicados os estados eliminados.

TABELA V

Eliminação dos Estados com norma negativa

Componente de χ	π	C	Sinal da norma	Estados eliminados
$\gamma_\mu R_n^{m+1}[Y^{(1)}_{\mu,m+1,\ell,m} + Y^{(2)}_{\mu,m-1,\ell,m} + Y^{(4)}_{\mu,m,\ell,m}]$	$(-)^{\ell}$	$(-)^{m+1}$	$(-)^{\ell+m+1}$	$\ell = m, m-2, \ldots$
$\gamma_\mu R_n^{m+1} Y^{(3)}_{\mu,m,\ell,m}$	$(-)^{\ell+1}$	$(-)^{m+1}$	$(-)^{\ell+m}$	$\ell = m-1, m-3, \ldots$
$i\gamma_5\gamma_\mu R_n^{m+1}[Y^{(1)}_{\mu,m+1,\ell,m} + Y^{(2)}_{\mu,m-1,\ell,m} + Y^{(4)}_{\mu,m,\ell,m}]$	$(-)^{\ell+1}$	$(-)^{m}$	$(-)^{\ell+m}$	$\ell = m-1, m-3, \ldots$
$i\gamma_5\gamma_\mu R_n^{m+1} Y^{(3)}_{\mu,m,\ell,m}$	$(-)^{\ell}$	$(-)^{m}$	$(-)^{\ell+m+1}$	$\ell = m, m-2, \ldots$

O momento angular total, ou spin (estamos no sistema centro de massa), das partículas descritas pelas amplitudes (3.15), é determinado aplicando-se os operadores de momento angular total[30] (J^2 e J_3) às partes dominantes das amplitudes. No entanto, como as soluções da equação de B-S foram obtidas aplicando-se grandezas covariantes, ou grandezas que se comportam como a quarta componente de um vetor, aos hiperesféricos harmônicos $Y_{n\ell m}(\hat{q})$, concluimos que j (momento angular total) deve ser igual a 1 e j_3 igual a m.

O momento angular orbital também é de interesse, por motivos de comparação com o modelo não relativístico. A determinação do momento angular orbital é conseguida, ao escrever-se a forma explícita dos hiperesféricos generalizados definidos por (A.13) a (A.22), em termos dos hiperesféricos harmônicos $Y_{n\ell m}(\hat{q})$ Isto é, após determinar o efeito dos operadores sôbre os hiperesféricos harmônicos $Y_{n\ell m}(\hat{q})$.

Na tabela VI encontram-se os possíveis estados, com seus respectivos números quânticos $(j^{\pi c})$ e o número quântico momento angular orbital, cuja determinação foi feita através das relações (A.61) a (A.63). Os estados foram agrupados em singletos e tripletos.

O modelo a quarks não relativístico prevê um acoplamento do spin dos quarks com o momento angular orbital, do seguinte tipo :

Momento angular orbital	Spin dos quarks	$j^{\pi c}$
0	0	0^{-+}
	1	1^{--}
1	0	1^{+-}
	1	0^{++}, 1^{++}, 2^{++}
⋮		⋮

TABELA VI

Estados descritos pelas amplitudes $\chi\,(q)$

$\chi\,(q)$	$J^{\pi C}$	Mom. Ang. Orb.
$i\gamma_5\gamma_4\phi^{(1)}_{5,4} \equiv i\gamma_5\gamma_4 R^{n+1}_{r}(q^2,\sqrt{\beta^{R}})\,[\,Y^{(1)}_{4,n+1,j,j_3}(\hat q) +$		
$+\,Y^{(2)}_{4,n-1,j,j_3}(\hat q) + Y^{(4)}_{4,n,j,j_3}(\hat q)\,]$		
$\propto R^{n+1}_{r}(q^2,\sqrt{\beta^{R}})\,Y_{n,j,j_3}(\hat q)$	$0^{-+}, 1^{+-}, 2^{-+}\ldots$	j
$n = 0,1,2,\ldots \quad r = 0,1,2\ldots \quad j = n, n-2,\ldots$		
$\gamma_{s_3}(-)^{s_3}\phi^{(1)}_{-s_3} \equiv R^{n+1}_{r}(q^2,\sqrt{\beta^{V}})\,[\,\sum_{s_3}\gamma_{s_3}(-)^{s_3}(Y^{(1)}_{-s_3,n+1,j,j_3}(\hat q)$		
$+\,Y^{(2)}_{-s_3,n-1,j,j_3}(\hat q) + Y^{(4)}_{-s_3,n,j,j_3}(\hat q))\,]$		
$\propto R^{n+1}_{r}(q^2,\sqrt{\beta^{V}})\,(\sum_{s_3}\gamma_{s_3}(1\,s_3; j+1, j_3-s_3 \mid j, j_3)\,\times$		
$\times\,Y_{n,j+1,j_3-s_3}(\hat q) +$	$0^{++}, 1^{--}, 2^{++}\ldots$	$j+1$
$\sum_{s_3}\gamma_{s_3}(1\,s_3; j-1, j_3-s_3 \mid j, j_3)\,\times$		
$\times\,Y_{n,j-1,j_3-s_3}(\hat q)\,)$	$1^{--}, 2^{++}\ldots$	$j-1$
$\gamma_\mu\phi^{(2)}_\mu \equiv R^{n+2}_{r}(q^2,\sqrt{\beta^{V}})\,\gamma_\mu\,Y^{(3)}_{\mu,n+1,j,j_3}(\hat q)$		
$\propto [\sum_{s_3}\gamma_{s_3}(1\,s_3; j, j_3-s_3 \mid j\,j_3)\,Y_{n+1,j,j_3-s_3}(\hat q)]\,R^{n+1}_{r}(q^2,\sqrt{\beta^{V}})$	$1^{++}, 2^{--}\ldots$	j
$n = 0,1,2\ldots \quad r = 0,1,2\ldots \quad j = n+1, n-1,\ldots$		

TABELA VI- Continuação

Estados descritos pelas amplitudes $\chi(q)$

$\chi(q)$	$j^{\pi c}$	Mom. Ang. Orb.
$\gamma_4 \phi_4^{(1)} \equiv \gamma_4 R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^V}) [Y^{(1)}_{4,m+1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{4,m-1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(4)}_{4,m,j,j_3}(\hat{q})]$		
$\propto \gamma_4 R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^V}) Y_{m,j,j_3}(\hat{q})$ $m = 0, 1, 2, \ldots \quad n = 0, 1, 2 \ldots \quad j = m+1, m-1, \ldots$	$0^{++}, 1^{--}, 2^{++}, \ldots$	j
$i\gamma_5 \gamma_{S_3} (-)^{S_3} \phi^{(1)}_{5,-S_3} \equiv i\gamma_5 [\sum_{S_3} \gamma_{S_3} (-)^{S_3} (Y^{(1)}_{-S_3,m+1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{-S_3,m-1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(4)}_{-S_3,m,j,j_3}(\hat{q})] R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^A})$		
$\propto i\gamma_5 R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^A}) (\sum_{S_3} \gamma_{S_3} (1 S_3; j+1, j_3-S_3 \| j j_3) \times Y_{m,j+1,j_3-S_3}(\hat{q}) +$	$0^{-+}, 1^{+-}, \ldots$	$j+1$
$\sum_{S_3} \gamma_{S_3} (1 S_3; j-1, j_3-S_3 \| j j_3) \times Y_{m,j-1,j_3-S_3}(\hat{q}))$	$1^{+-}, 2^{-+}, \ldots$	$j-1$
$i\gamma_5 \gamma_\mu \phi^{(1)}_{5\mu} \equiv R_n^{m+2}(q^2, \sqrt{\beta^A}) i\gamma_5 \gamma_\mu Y^{(3)}_{\mu,m+1,m}(\hat{q})$		
$\propto R_n^{m+1}(q^2, \sqrt{\beta^A}) i\gamma_5 \sum_{S_3} \gamma_{S_3} (1 S_3; j, j_3-S_3 \| j j_3) \times Y_{m,j,j_3}(\hat{q})$ $m = 1, 2, \ldots$ $n = 0, 1, 2, \ldots \quad j = m, m-2, \ldots$	$1^{-+}, 2^{+-}, \ldots$	j

Pela Tabela VI observamos que a mesma estrutura é obtida relativisticamente, sendo estes estados ($j^{\pi c}$) descritos pelas amplitudes $i\gamma_5\gamma_4\phi^{(1)}_{5,4}$, $\gamma_{s_3}(-)^{s_3}\phi^{(1)}_{-s_3}$, $\gamma_\mu\phi^{(2)}_\mu$.

Observamos também que com o "ansatz" incompleto de DSS não é possível reproduzir todos os estados previstos não relativisticamente, uma vez que em (2.17) não aparece a componente não covariante $\gamma_\mu\phi^{(2)}_\mu$, que descreve os estados 1^{++}, 2^{--}, ...Não temos neste caso, os singletos e tripletos característicos do acoplamento do spin dos quarks com o momento angular orbital.

Na formulação relativística, apesar da eliminação dos estados com norma negativa, surgem estados sem análogos não relativísticos. São êles os estados descritos por $\gamma_4\phi^{(1)}_4$, $i\gamma_5\gamma_{s_3}(-)^{s_3}\phi^{(1)}_{5,-s_3}$ que possuem momento angular anômalo, e os descritos pelas amplitudes $i\gamma_5\gamma_\mu\phi^{(2)}_\mu$, que são os exóticos de segunda espécie.

Evidentemente nesta formulação os estados ligados descritos pelas diferentes amplitudes, vão depender da estrutura spinorial do kernel considerado. Além do kernel aqui em estudo, há outros quatro tipos de kernels que dão lugar a uma estrutura do espectro de massas em singletos e tripletos, como é mostrado por BJK. São êles, segundo as definições (2.5) :

$$\begin{array}{ll} \text{A) } P + V - S & [\lambda K(\mathcal{P}^P + \mathcal{P}^V - \mathcal{P}^S)] \\ \text{B) } P + T - A & \\ \text{C) } P + T - A - V + S & \\ \text{D) } A - T + V - S & \end{array} \tag{3.18}$$

Os modelos B e D dão lugar à trajetórias não degeneradas para singletos e tripletos, e portanto, não reproduzem, no limite ($\delta \to 0$), os resultados do modelo a quarks não relativístico com simetria SU(6).

Finalmente, cabe aqui mencionar como é possível obter as amplitudes de B-S num sistema $\vec{P} \neq 0$. Inicialmente, como as amplitudes (3.15) estão na forma "rodada", deve-se fazer a continuação analítica $q_4 \to iq_o$ e posteriormente, deve-se aplicar o boost de Lorentz[7]:

$$L^{-1}(P)\begin{pmatrix} q_o \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q.P}{M} \\ \vec{q} - \frac{(q.P + q_o M)}{M(M+P_o)}\vec{P} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{q.P}{M} \\ \frac{1}{M}\sqrt{(q.P)^2 - q^2P^2}\,\vec{e}_q(P) \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$L^{-1}(P)\begin{pmatrix} \gamma_o \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\not{P}}{M} \\ \vec{\gamma} - \frac{(\not{P} + M\gamma_o)}{M(M+P_o)}\vec{P} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\not{P}}{M} \\ \vec{\gamma}(\vec{P}) \end{pmatrix}$$

Nas amplitudes, esta transformação resulta nas seguintes substituições:

$$\begin{aligned} F(q^2, iq_o) &\to F(q^2, i\tfrac{q.P}{M}) \\ Y\left(\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\right) &\to Y(\vec{e}_q(P)) \\ \gamma_o &\to \frac{\not{P}}{M} \\ \vec{\gamma} &\to \vec{\gamma}(P) \end{aligned} \tag{3.20}$$

A continuação analítica da parte radial $\exp(-q^2/2\sqrt{\beta})$ para valores reais de q_o, dará amplitudes exponencialmente crescentes. Consequentemente, estas amplitudes só serão aceitáveis, dentro do modelo, para valores próximos dos pontos :

$$q^2_{eucl} = q_4^2 + q^2 > 0 \quad .$$

Na Tabela VII apresentamos as soluções completas, com as substituições (3.20).

TABELA VII

Soluções da Equação de B-S para M ≠ 0

$$\chi(q,P) = \chi_0(q,P) + \frac{1}{4m}[\not P, \chi_0] - \frac{i}{2m}\{\not q, \chi_0\}$$

$$\chi_0^{(1)}(q,P) = i\,\gamma_5 \frac{\not P}{M} R_n^{m+1}(q^2_{eucl}, \sqrt{\beta^A}) \cdot \frac{1}{3} \times$$

$$\times [k_1 Y^{(1)}_{4,m+1,j\,j_3} + k_2 Y^{(2)}_{4,m-1,j\,j_3} + k_4 Y^{(4)}_{4,m,j\,j_3}]$$

$$M^2 = 4[\alpha^A + m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^A}]$$

$m = 0, 1, 2, \ldots \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad j = m, m-2, \ldots$

$$\chi_0^{(2)}(q,P) = \sum_{s_3} \vec{\gamma}_{s_3}(P) R_n^{m+1}(q^2_{eucl}, \sqrt{\beta^V}) (-)^{s_3} \times$$

$$\times [k_1 Y^{(1)}_{-s_3,m+1,j\,j_3} + k_2 Y^{(2)}_{-s_3,m-1,j\,j_3} + k_3 Y^{(3)}_{-s_3,m',j'\,j_3}$$

$$+ k_4 Y^{(4)}_{-s_3,m,j\,j_3}] K$$

$$M^2 = 4[\alpha^V + m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^V}]$$

$m = 0, 1, 2, \ldots \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad j = m+1, m-1, \ldots$

$m' = 0, 1, 2 \ldots \quad j' = m, m-2, \ldots$

TABELA VII - Continuação

Soluções da Equação de B-S para M $\neq$ 0

$$\chi_o^{(3)}(q,P) = \frac{\gamma\cdot P}{M} R_n^{m+1}(q^2_{eucl}, \sqrt{\beta^V})\left[k_1 Y^{(1)}_{4,m+1,j j_3} + k_2 Y^{(2)}_{4,m-1,j j_3} + k_4 Y^{(4)}_{4,m,j j_3}\right]\frac{1}{3}$$

$$M^2 = 4\left[\alpha^V + m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^V}\right]$$

$m = 1, 2 \ldots \quad n = 0, 1, 2 \ldots \quad j = \ , m-1, m-3, \ldots$

$$\chi_o^{(4)}(q,P) = i\gamma_5 \sum_{S_3} \vec{\gamma}_{S_3}(P) R_n^{m+1}(q^2_{eucl}, \sqrt{\beta^A}) (-)^{S_3}\left[k_1 Y^{(1)}_{-S_3,m+1,j j_3}\right.$$
$$\left. + k_2 Y^{(2)}_{-S_3,m-1,j j_3} + k_3 Y^{(3)}_{-S_3,m',j' j_3'} + k_4 Y^{(4)}_{-S_3,m,j j_3}\right].K$$

$$M^2 = 4\left[\alpha^A + m^2 + 2(m+2n+2)\sqrt{\beta^A}\right]$$

$m = 1, 2, 3 \ldots \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad j = m, m-2, \ldots$

$m' = 2, 3, \ldots \quad j' = m'-1, m'-3, \ldots$

$$R_n^{m+1}(q^2_{eucl}, \sqrt{\beta}) = (2\pi)^2\sqrt{\frac{2}{\beta}}\sqrt{\frac{n!}{(m+n+1)!}}\left[\frac{q^2_{eucl}}{\sqrt{\beta}}\right]^{\frac{m}{2}} L_n^{m+1}\left(\frac{q^2_{eucl}}{\sqrt{\beta}}\right) e^{-\frac{q^2_{eucl}}{2\sqrt{\beta}}}$$

$$k_1^{-1} = \sqrt{\frac{(n+2)(n+\ell+2)(n-\ell+1)}{(m+1)}} \qquad k_2^{-1} = \sqrt{\frac{n(n+\ell+1)(n-\ell)}{(m+1)}}$$

$$k_3^{-1} = 2\sqrt{\ell(\ell+1)} \qquad k_4^{-1} = -\left(2\sqrt{\ell(\ell+1)}\right)^2$$

$$K^{-1} = \left[k_1^2\, 2(m+1)(m+2) + k_2^2\, m(m+1)2 + k_4^2\, 16(m+1)\ell(\ell+1)\right]^{1/2}$$

CAPITULO IV - QUEBRA DA SIMETRIA SU(3)

No Capítulo anterior, os kernels de interação entre os quarks foram supostos invariantes por SU(3). Assim sendo, todos os mesons de um mesmo multipleto de SU(3) encontram-se degenerados na massa.

Neste Capítulo, tentaremos levantar esta degenerescência da maneira mais simples possível[3], isto é, supondo que os quarks estranhos ($\lambda, \bar{\lambda}$) são mais pesados que os quarks não estranhos $(p, \bar{p}, n, \bar{n})$:

$$\begin{aligned} & m_\lambda > m_p \\ & m_\lambda = m_{\bar{\lambda}} \qquad\qquad (4.1) \\ & m_p = m_{\bar{p}} = m_n = m_{\bar{n}} \quad . \end{aligned}$$

Para isso devemos também resolver a equação de B-S para um sistema quark-antiquark com massas diferentes.

Se fizermos a hipótese de que a diferença de massas dos quarks é muito menor do que a massa dos quarks, poderemos tratá-la perturbativamente, na equação de B-S, de modo análogo ao que foi feito no Capítulo III, e na mesma ordem de M^2/m^2, como veremos adiante.

Embora não tenhamos mais SU(3) como grupo de simetria, o caso de massas diferentes (4.1) apresenta como grupo de simetria um subgrupo de SU(3), a saber o grupo[15]

$$G = SU_I(2) \otimes U_Y(1) \quad , \tag{4.2}$$

produto direto do grupo $SU_I(2)$ gerado pelo spin isotópico I, pelo grupo unitário $U_Y(1)$ gerado pela hipercarga Y. Neste caso os estados de quark $|q\rangle$ e antiquark $|\bar{q}\rangle$ podem ser escritos como a soma direta dos estados $|II_3Y\rangle$ de G :

$$\begin{aligned} |q\rangle &= |\tfrac{1}{2}, I_3, \tfrac{1}{3}\rangle \oplus |0,0,-\tfrac{2}{3}\rangle \\ |\bar{q}\rangle &= |\tfrac{1}{2}, -I_3, -\tfrac{1}{3}\rangle \oplus |0,0,\tfrac{2}{3}\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, para obter os mesons, basta efetuar o produto direto

$$\begin{aligned} q \otimes \bar{q} &\equiv \left[(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3}) \oplus (0,-\tfrac{2}{3})\right] \otimes \left[(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3}) \oplus (0,\tfrac{2}{3})\right] = \\ &= (1,0) \oplus (0,0)^1 \oplus (\tfrac{1}{2},1) \oplus (\tfrac{1}{2},-1) \oplus (0,0)^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para cada representação irredutível de G contida em (4.4), é fácil construir os correspondentes estados que estão dispostos na Tabela VIII, juntamente aos correspondentes estados físicos dos mesons pseudo-escalares e vetoriais.

Vê-se na Tabela VIII que temos nove estados correspondentes ao octeto mais o singleto de SU(3). Os estados $(0,0)^1$ e $(0,0)^2$ não são degenerados na massa, os estados $(\frac{1}{2},\pm 1)$ são mais pesados que os estados $(1,0)$, porém $(1,0)$ e $(0,0)^1$ continuam degenerados.

TABELA VIII

Representações Irredutíveis de G e os correspondentes estados físicos

Rep. de G	Estados ($q\bar{q}$)	Estados físicos: Mesons ps	Estados físicos: Mesons vet
(1,0)	$p\bar{n}$	π^+	ρ^+
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} - n\bar{n})$	π^0	ρ^0
	$n\bar{p}$	π^-	ρ^-
$(0,0)^1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} + n\bar{n})$	η	ω
$(\frac{1}{2},+1)$	$-p\bar{\lambda}$	K^+	K^{*+}
	$-n\bar{\lambda}$	K^0	K^{*0}
$(\frac{1}{2},-1)$	$\lambda\bar{p}$	K^-	K^{*-}
	$\lambda\bar{n}$	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^{*0}$
$(0,0)^2$	$-\lambda\bar{\lambda}$	η'	ϕ

É interessante comparar os estados $(0,0)^1$ e $(0,0)^2$ acima com os correspondentes estados utilizados no modelo a quarks baseado em SU(3), isto é, com os estados[3]

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(p\bar{p} + n\bar{n} + \lambda\bar{\lambda})$$
$$\psi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(p\bar{p} + n\bar{n} - 2\lambda\bar{\lambda}) \tag{4.5}$$

que são isosingletos pertencentes às representações $\underline{1}$ e $\underline{8}$ de SU(3). Tem-se:

$$(0,0)^1 = \psi_8 \cos\theta - \psi_1 \operatorname{sen}\theta$$
$$(0,0)^2 = \psi_8 \operatorname{sen}\theta + \psi_1 \cos\theta\,, \tag{4.6}$$

com $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35°$. Isto significa que, admitindo G como grupo de simetria, temos o caso de "mistura ideal", com o ângulo de mistura $\theta \approx 35°$ ("ângulo de mistura ideal"). É interessante notar que para os seguintes nonetos considerados estabelecidos, tem-se os seguintes ângulos de mistura[31]:

$j^{\pi c}$	Membros do noneto	θ
0^{-+}	$\pi, K, \eta\,;\ \eta'$ ou $\pi, K, \eta\,;\ E$	10° 6°
1^{--}	$\rho, K^*, \phi;\ \omega$	39°
2^{++}	$A_2, K^*(1420), f';\ f$	31°

Vê-se que os mesons vetoriais e tensoriais aproximam-se bastante do ângulo ideal de mistura, o mesmo não ocorrendo para os mesmos pseudo-escalares. Segue que o presente tratamento é aceitável para aqueles mesons, dando porém resultados pobres para os mesons pseudo-escalares.

Para os estados das representações $(1,0)$ e $(0,0)^1$, a equação de B-S é a mesma que a considerada no Capítulo III, equação (3.2). Para o estado $(0,0)^2$ tem-se também a mesma equação, porém a massa dos constituintes é maior do que no caso anterior. Em lugar de (3.12) e (3.14) temos agora

$$M^2 = 4\left(\alpha^{A,V} + m_\lambda^2 + 2(n + 2l + 2)\sqrt{\beta^{A,V}}\right). \qquad (4.7)$$

Como nesta expressão para M^2 a massa do quark aparece ao quadrado, justifica-se a definição do parâmetro de quebra de SU(3) com dimensão de massa ao quadrado.

Assim, definimos

$$m_\lambda = m_{\bar{\lambda}} = m(1 + \epsilon/m^2)$$

onde $\qquad\qquad$ (4.8)

$$m = m_p = m_n = m_{\bar{p}} = m_{\bar{n}} \ .$$

Consequentemente, consideraremos os termos de quebra até a ordem ϵ/m^2 .

Substituindo (4.8) em (4.7), obtem-se o seguinte para a massa do estado ligado:

$$M^2 = 4\left(\alpha^{A,V} + m^2 + 2\epsilon + 2(l + 2n + 2)\sqrt{\beta^{A,V}}\right) \qquad (4.9)$$

Para as amplitudes que descrevem os estados da representação $(0,0)^2$, teremos, em lugar de (3.15)

$$\chi = \chi_0 - \frac{i}{2m_\lambda}\{\not{\partial}, \chi_0\}_+ + \frac{1}{4m_\lambda}[M\gamma_4, \chi_0] \ . \qquad (4.10)$$

Portanto, como χ_0 não depende da massa dos quarks, o parâmetro ϵ só aparece nas componentes de ordem superior da amplitude, e como por hipótese $\epsilon/m^2 \ll 1$, a amplitude para os estados de $(0,0)^2$ será idêntica à amplitude para os estados das representações $(1,0)$ e $(0,0)^1$.

Para os estados das representacoes $(\frac{1}{2}, \pm 1)$ devemos resolver a equação de B-S com massas diferentes, que após efetuada a rotação de Wick, pode ser escrita:

$$(\not{q} - i m_1 + i M \eta_1 \gamma_4)\, \chi(q,M)\, (\not{q} - i m_2 - i M \gamma_4 \eta_2) = \tag{4.11}$$
$$= \int R(q-q')\, \chi(q',M)\, d^4q'$$

onde m_1 é a massa do quark, m_2 a massa do anti-quark, e

$$\eta_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \qquad \text{e} \qquad \eta_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \; . \tag{4.12}$$

Na representação $(\frac{1}{2},+1)$ o anti-quark é a partícula mais pesada e portanto, usando (4.8), pode-se escrever a equação

$$(\not{q} - i m + i \tfrac{M}{2} \gamma_4)\, \chi(q,M) \left(\not{q} - i m (1 + \epsilon/m^2) - i \tfrac{M}{2} \gamma_4\right) =$$
$$= \int R(q-q')\, \chi(q',M)\, d^4q' \tag{4.13}$$

onde desprezamos termos de ordem superior.

Analogamente, para os estados da representação $(\frac{1}{2},-1)$ teremos

$$[\not{q} - i m (1 + \epsilon/m^2) + i \tfrac{M}{2} \gamma_4]\, \chi(q,M)\, [\not{q} - i m - i \tfrac{M}{2} \gamma_4] =$$

$$= \int R(q-q')\, \chi(q',M)\, d^4q' \tag{4.14}$$

Portanto temos equações idênticas para os estados de ambas as representações. Podemos agora resolver a equação (4.14) supondo o mesmo "ansatz" (2.34) para χ. A equação (4.14) pode ser escrita do seguinte modo:

$$(\not{q}-im)\chi(\not{q}-im)-\int R(q-q')\,\chi\,d^4q'=$$

$$=-\frac{M^2}{4}\gamma_4\chi\gamma_4-m\frac{M}{2}(\gamma_4\chi-\chi\gamma_4)+i\frac{M}{2}(\not{q}\chi\gamma_4-\gamma_4\chi\not{q})+\epsilon\chi \qquad (4.15)$$

Esta equação é idêntica à equação (3.2) , a menos do último termo $\epsilon\chi$. Como ϵ não tem dependência spinorial, podemos absorver $\epsilon\chi$ no termo $m^2\chi$ que aparece no primeiro membro de (4.15). Obtem-se,pois, as mesmas amplitudes (3.15) para os estados ligados, com os novos auto-valores, válidos para os estados de $(\frac{1}{2},+1)$ e $(\frac{1}{2},-1)$:

$$M^2=4\left(\alpha^{A,V}+m^2+\epsilon+2(m+2n+2)\sqrt{\beta^{A,V}}\right). \qquad (4.16)$$

Para os estados de (1,0) e (0,0)[1] as fórmulas de massa são (3.12) e (3.14)

$$M^2=4\left(\alpha^{A,V}+m^2+2(m+2n+2)\sqrt{\beta^{A,V}}\right) \qquad (4.17)$$

Fazendo uso das fórmulas (4.16) e (4.17) para os mesons pseudo-escalares, vetoriais e tensoriais, pode-se mostrar facilmente que

$$M^2_K-M^2_\pi=M^2_{K^*}-M^2_\rho=M^2_{K^*(1420)}-M^2_{A_2}=4\epsilon \qquad (4.18)$$

Experimentalmente, temos[31]

$$\begin{aligned}M^2_K-M^2_\pi&=0.23\ \mathrm{Gev}^2\\ M^2_{K^*}-M^2_\rho&=0.21\ \mathrm{Gev}^2\\ M^2_{K^*(1420)}-M^2_{A_2}&=0.30\ \mathrm{GeV}^2\end{aligned} \qquad (4.19)$$

Obtem-se um acordo razoável tomando para ϵ o valor $\epsilon \simeq 0{,}06\ \mathrm{Gev}^2$. Com este valor de ϵ, pode-se determinar a massa dos estados da representação $(0,0)^2$ através de (4.9) e obter as seguintes relações:

$$M_{\phi}^{2} - M_{\rho}^{2} = M_{f'}^{2} - M_{A_2}^{2} = 0.48\ \mathrm{Gev}^2 \tag{4.20}$$

que devem ser comparadas com os valores experimentais[31]:

$$\begin{aligned} M_{\phi}^{2} - M_{\rho}^{2} &= 0.45\ \mathrm{Gev}^2 \\ M_{f'}^{2} - M_{A_2}^{2} &= 0.51\ \mathrm{Gev}^2 \quad . \end{aligned} \tag{4.21}$$

CAPÍTULO V - CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolvemos um método alternativo ao método de BJK para determinar as soluções da equação de B-S no limite de extrema ligação (M = O). Com a rotação de Wick a equação de B-S, neste caso, é invariante por tranformações do grupo $O^{\pi c}(4)$, e fazendo uso das propriedades da amplitude de B-S por transformações deste grupo, construimos o "ansatz" geral para a amplitude de B-S, extendendo o método de DSS. Êste "ansatz" geral e as equações radiais desacopladas da Tabela III são independentes do kernel usado. Pelo método aqui desenvolvido, as soluções da equação de B-S são obtidas em termos dos hiperesféricos generalizados, que mostram claramente as propriedades de transformação das referidas soluções Devido às propriedades desses hiperesféricos generalizados , indicadas no Apêndice, tornam-se relativamente simples os cálculos para obtenção das referidas soluções, que são exatas na aproximação harmônica. Esta aproximação é fisicamente plausível nas condições do nosso problema, para os estados mais baixos, pois consiste em aproximar o potencial suave, por uma parábola, nas proximidades da origem.

As soluções encontradas para os estados mesônicos ($M \neq 0$), são caracterizadas por um número quântico l que corresponde ao spin dos mesons; um número quântico n de SO(4), que corresponde a oscilações temporais, e pelo número quântico r correspondendo a excitações hiper-radiais análogas às excitações radiais não relativísticas. Além das soluções do modelo não relativístico, surgem outras, características da equação de B-S e relacionadas às oscilações temporais. Estas são as soluções ditas abnormais, e na Tabela VI são as soluções com j menor do que j máximo para um dado n, e para um dado hiperesférico generalizado.

Temos também soluções com norma positiva, que correspondem aos chamados estados exóticos de segunda espécie, ou que tem momento angular anômalo em relação ao modelo não relativístico. São as soluções

$$i\gamma_5\gamma_\mu \phi^{(2)}_{5\mu} \quad e \quad \gamma_4 \phi^{(1)}_4 \; ; \; i\gamma_5\gamma_{s_3}(-)^{s_3}\phi^{(1)}_{5,-s_3}$$

da Tabela VI, respectivamente. É interessante observar que o termo dominante da amplitude não depende da massa dos quarks, o que é uma propriedade característica de ligação forte com potenciais suaves.

As massas dos estados ligados dependem de α, β, n e r, e com a quebra de SU(3) dependem também do parâmetro ϵ, característico da diferença de massa entre os quarks. Uma vez que dispomos de dois parâmetros α^P e α^V, a degenerescência entre os mesons pseudo-escalares e vetoriais é levantada.

Através do espectro de massas dos mesons, são determinados os parâmetros $(\alpha + m^2)$, β e ϵ. Para os mesons pseudo-escalares, os resultados sugerem que deva ser tentada outra forma de quebra de SU(3), apesar dos bons resultados obtidos pa ra os mesons tensorias e vetoriais[32].

Estes resultados foram testados por BJK para o decaimento leptônico de mesons pseudo-escalares e vetoriais[7], porém sem quebra de SU(3). Pode-se verificar, com os resultados do Capítulo IV do presente trabalho, que o paradoxo de Weisskopf - Van Royen[33] só é resolvido no modelo A - definido em (3.18) - proposto por BJK. Enquanto que, tanto o modelo $E(-\gamma_5 \times \gamma_5)$ como o modelo A dão resultados aceitáveis para as constantes de decaimento dos mesons vetoriais.

Um dos sucessos deste tratamento relativístico foi a previsão da existência de uma família de mesons vetoriais ($J^{\pi c} = 1^{--}$) : $\rho, \rho' \ldots$ com n= 0 e r = 0,1,2.. . Para o segundo membro desta familia, prevê-se $M_{\rho'} \approx 1600$ Mev, de acordo com a experiência[34]. A teoria permite assim, a formulação de uma dominância vetorial generalizada[7], visto que este ρ' se acopla com o foton como o meson ρ .

Igualmente bem sucedidos foram os cálculos das larguras das ressonâncias mesônicas[28], por decaimentos fortes. Neste caso o Modelo E permite obter constantes de interação moderadamente fortes entre os mesons, a partir das forças extremamente fortes entre os quarks (saturação das forças extremamente fortes), devido ao fato de que as amplitudes dos processos envolvidos independem da massa dos quarks.

Finalmente, gostaríamos de fazer as seguintes observações. A primeira, sôbre o chamado "quark puzzle" e a segunda sôbre a extensão do presente formalismo para o caso dos barions. (Três quarks de spin 1/2, em forte ligação).

O chamado "quark puzzle" é devido à situação em que se tem um modelo fenomenologicamente satisfatório, no qual, porém, os constituintes (quarks) não são observados como partículas livres. Vários mecanismos foram recentemente propostos, em que os quarks não aparecem como partículas livres[35]. Optamos, neste trabalho, pela existência de quarks pesados, para os quais as seções de choque para a produção de q e $\bar{q}$, por exemplo, pelo processo $p + p \rightarrow p + p + q + \bar{q}$, é extremamente pequena, conforme as predições do modelo estatístico de Hagedorn[36] se $m \gtrsim 3 - 4$ Gev.

Quanto ao problema da dinâmica interna dos barions, apenas alguma coisa foi feita para quarks escalares na aproximação harmônica[8]. O tratamento do problema de três quarks fermiônicos, de modo análogo ao tratamento aqui feito para um quark e um antiquark, é bastante difícil e ainda não foi resolvido. Somente a sua solução permitirá uma discussão mais profunda de questões como a da validade de SU(6) e da estatística de Fermi para os quarks.

APÊNDICE

Este Apêndice, de carater matemático, introduz a definição e propriedades dos hiperesféricos harmônicos a 4 dimensões, das funções hiperesféricas generalizadas, bem como de algumas outras propriedades importantes usadas no texto principal.

1 - Hiperesféricos harmônicos a quatro dimensões

Os hiperesféricos harmônicos sólidos a 4 dimensões $\mathcal{Y}_{n\ell m}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ são polinomios homogêneos e harmônicos de grau n, que formam uma base para uma classe de representações irredutiveis do grupo SO(4), na cadeia SO(4) ⊃ SO(3) ⊃ SO(2).

Podem êles ser expressos sob a forma[37]

$$\mathcal{Y}_{n\ell m}(x_1,x_2,x_3,x_4) = C(n,\ell)\, G_{n\ell}(R,x_4)\, \mathcal{Y}_{\ell m}(x_1,x_2,x_3) \tag{A.1}$$

onde r designa a hiperdistância, $R^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$, os $\mathcal{Y}_{\ell m}(x_1,x_2,x_3)$ são os esféricos harmônicos sólidos a 3 dimensões, e $G_{nl}(R,x_4)$ são funções dadas por

$$G_{n\ell}(R,x_4) = \frac{\ell!}{2^{n-\ell}}\, R^{n-\ell}\, C_{n-\ell}^{\ell+1}\left(\frac{x_4}{R}\right) \tag{A.2}$$

onde $C_{n-\ell}^{\ell+1}$ são polinômios de Gegenbauer. Para um dado valor de n (inteiro não negativo), l assume os valores 0,1,2,...n.

Os hiperesféricos harmônicos de superfície ou simplesmente hiperesféricos harmônicos são definidos por

$$Y_{n\ell m}(\hat{x}) \equiv Y_{n\ell m}(\theta,\phi,\lambda) = R^{-n}\, y_{n\ell m}(x_1,x_2,x_3,x_4) \quad \text{(A.3)}$$

onde θ, ϕ e λ são os ângulos polares da seguinte parametrização do espaço euclidiano quadridimensional:

$$x_1 = R\,\mathrm{sen}\lambda\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi$$
$$x_2 = R\,\mathrm{sen}\lambda\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi$$
$$x_3 = R\,\mathrm{sen}\lambda\cos\theta$$
$$x_4 = R\cos\lambda$$

onde $0 \leq \lambda \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

A normalização de (A.2) na hiperesfera unitária resulta em

$$C(n,\ell) = 2^{n}(-i)^{\ell}\left[\frac{2(n+1)(n-\ell)!}{\pi\,(n+\ell+1)!}\right]^{1/2} \quad \text{(A.4)}$$

segue que os $Y_{n\ell m}(\hat{x})$ podem ser escritos na forma

$$Y_{n\ell m}(\hat{x}) = (-2i)^{\ell}\,\ell!\left[\frac{2(n+1)(n-\ell)!}{\pi\,(n+\ell+1)!}\right]^{1/2} Y_{\ell m}(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}^{\ell}\lambda\; C_{n-\ell}^{\ell+1}(\cos\lambda) \quad \text{(A.5)}$$

Os $Y_{n\ell m}(\hat{x})$ assim definidos são orto-normais na hiperesfera unitária (R = 1):

$$\int Y^{*}_{n\ell m}(\hat{x})\, Y_{n'\ell' m'}(\hat{x})\, d\Omega = \delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \tag{A.6}$$

onde

$$d\Omega = \operatorname{sen}^2\lambda\, d\lambda\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \ .$$

Da homogeneidade e harmonicidade dos $\mathcal{Y}_{n\ell m}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ decorrem as seguintes propriedades dos $Y_{n\ell m}(\hat{x})$, respectivamente ($\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$):

$$\partial_\mu\, \partial_\mu\, Y_{n\ell m}(\hat{x}) = -\frac{n(n+2)}{x^2}\, Y_{n\ell m}(\hat{x}) \tag{A.7}$$

$$x_\mu\, \partial_\mu\, Y_{n\ell m}(\hat{x}) = 0 \tag{A.8}$$

2 - Fórmula do gradiente para os $Y_{n\ell m}(\hat{x})$

É conveniente mencionar as propriedades seguintes:

$$(x_4/R)\, Y_{n\ell m}(\hat{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{(n-\ell+1)(n+\ell+2)}{(n+1)(n+2)}\right]^{1/2} Y_{n+1,\ell,m}(\hat{x}) + \frac{1}{2}\left[\frac{(n-\ell)(n+\ell+1)}{n(n+1)}\right]^{1/2} Y_{n-1,\ell,m}(\hat{x}) \tag{A.9}$$

$$R\,\partial_4\, Y_{n\ell m}(\hat{x}) = -\frac{n}{2}\left[\frac{(n-\ell+1)(n+\ell+2)}{(n+1)(n+2)}\right]^{1/2} Y_{n+1,\ell,m}(\hat{x}) + \frac{(n+2)}{2}\left[\frac{(n-\ell)(n+\ell+1)}{n(n+1)}\right]^{1/2} Y_{n-1,\ell,m}(\hat{x}) \tag{A.10}$$

$$(-i x_q/R)\, Y_{n\ell m}(\hat{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\ell+1}{2\ell+3}\right]^{1/2}\left[\frac{(n+\ell+3)(n+\ell+2)}{(n+1)(n+2)}\right]^{1/2} (\ell m, 1q\,|\,\ell+1, m+q)\, Y_{n+1,\ell+1,m+q}(\hat{x})$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{2\ell-1}\right]^{1/2}\left[\frac{(n-\ell+2)(n-\ell+1)}{(n+1)(n+2)}\right]^{1/2} (\ell m, 1q\,|\,\ell-1, m+q)\, Y_{n+1,\ell-1,m+q}(\hat{x})$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{l}{2l+3}\right]^{1/2}\left[\frac{(n-l)(n-l-1)}{n(n+1)}\right]^{1/2}(lm,1q\,|\,l+1,m+q)\,Y_{n-1,l+1,m+q}(\hat{x})$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{l}{2l-1}\right]^{1/2}\left[\frac{(n+l+1)(n+l)}{n(n+1)}\right]^{1/2}(lm,1q\,|\,l-1,m+q)\,Y_{n-1,l-1,m+q}(\hat{x}) \qquad \text{(A.11)}$$

$$-i\,\nabla_q\,Y_{nlm}(\hat{x}) = -\frac{n}{2}\left[\frac{l+1}{2l+3}\right]^{1/2}\left[\frac{(n+l+3)(n+l+2)}{(n+1)(n+2)}\right]^{1/2}(lm,1q\,|\,l+1,m+q)\,Y_{n+1,l+1,m+q}(\hat{x})$$

$$+\frac{n}{2}\left[\frac{l}{2l-1}\right]^{1/2}\left[\frac{(n-l+2)(n-l+1)}{(n+1)(n+2)}\right]^{1/2}(lm,1q\,|\,l-1,m+q)\,Y_{n+1,l-1,m+q}(\hat{x})$$

$$-\frac{(n+2)}{2}\left[\frac{l+1}{2l+3}\right]^{1/2}\left[\frac{(n-l)(n-l-1)}{n(n+1)}\right]^{1/2}(lm,1q\,|\,l+1,m+q)\,Y_{n-1,l+1,m+q}(\hat{x})$$

$$+\frac{(n+2)}{2}\left[\frac{l}{2l-1}\right]^{1/2}\left[\frac{(n+l+1)(n+l)}{n(n+1)}\right]^{1/2}(lm,1q\,|\,l-1,m+q)\,Y_{n-1,l-1,m+q}(\hat{x}) \qquad \text{(A.12)}$$

Em particular, (A.10) e (A.12) constituem a <u>fórmula do gradiente para os hiperesféricos harmônicos quadridimensionais</u>,[14]

onde

$$\nabla_q = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\,\partial_2) & q = +1 \\ \partial_3 & q = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\,\partial_2) & q = -1 \end{cases}$$

Análoga é a definição de x_q em (A.11).

3 - <u>Funções hiperesféricas generalizadas</u>

As seguintes funções hiperesféricas generalizadas foram utilizadas no texto e são assim definidas:

$$Y^{(1)}_{\mu}(\hat{q}) \equiv n\hat{q}_{\mu} Y_{n\ell m}(\hat{q}) + q\partial_{\mu} Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.13}$$

$$Y^{(2)}_{\mu}(\hat{q}) \equiv (n+2)\hat{q}_{\mu} Y_{n\ell m}(\hat{q}) - q\partial_{\mu} Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.14}$$

$$Y^{(3)}_{\mu}(\hat{q}) \equiv \epsilon_{4\mu\alpha\beta}(q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}) Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.15}$$

$$Y^{(4)}_{\mu}(\hat{q}) \equiv \epsilon_{\mu\gamma\rho\sigma}\epsilon_{4\gamma\alpha\beta}(q_{\rho}\partial_{\sigma} - q_{\sigma}\partial_{\rho})(q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}) Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.16}$$

$$Y^{(1)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv (q_{\mu}\partial_{\nu} - q_{\nu}\partial_{\mu}) Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.17}$$

$$Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}) Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} Y^{(3)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv\ & n[\hat{q}_{\mu}\epsilon_{4\nu\alpha\beta} - \hat{q}_{\nu}\epsilon_{4\mu\alpha\beta}][q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}] Y_{n\ell m}(\hat{q}) \\ & + [q\partial_{\mu}\epsilon_{4\nu\alpha\beta} - q\partial_{\nu}\epsilon_{4\mu\alpha\beta}][q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}] Y_{n\ell m}(\hat{q}) \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} Y^{(4)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv\ & (n+2)[\hat{q}_{\mu}\epsilon_{4\nu\alpha\beta} - \hat{q}_{\nu}\epsilon_{4\mu\alpha\beta}][q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}] Y_{n\ell m}(\hat{q}) \\ & - [q\partial_{\mu}\epsilon_{4\nu\alpha\beta} - q\partial_{\nu}\epsilon_{4\mu\alpha\beta}][q_{\alpha}\partial_{\beta} - q_{\beta}\partial_{\alpha}] Y_{n\ell m}(\hat{q}) \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$Y^{(5)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{4\beta\rho\sigma}[n\hat{q}_{\alpha} + q\partial_{\alpha}][q_{\rho}\partial_{\sigma} - q_{\sigma}\partial_{\rho}] Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.21}$$

$$Y^{(6)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{4\beta\rho\sigma}[(n+2)\hat{q}_{\alpha} - q\partial_{\alpha}][q_{\rho}\partial_{\sigma} - q_{\sigma}\partial_{\rho}] Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.22}$$

Nas fórmulas acima $\hat{q}_\mu = q_\mu / q$. Os $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ são os símbolos de Levi-Civita quadridimensionais ($\epsilon_{1234} = +1$). E claro que os primeiros membros de (A.13) a (A.22) dependem também dos índices n,l,m que, no entanto, são omitidos para simplificar a notação. Explicita-los-emos apenas quando necessário.

Os hiperesféricos generalizados definidos em (A.13),. ...,(A.22) satisfazem as seguintes propriedades de ortogonalidade e normalização, na hiperesfera unitária a quatro dimensões. Definindo

$$\int Y^{(i)*}_{\mu,n\ell m}(\hat{q})\, Y^{(j)}_{\mu,n'\ell'm'}(\hat{q})\, d\Omega \equiv I^{(i,j)}_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.23}$$

$$\int Y^{(i)*}_{\mu\nu,n\ell m}(\hat{q})\, Y^{(j)}_{\mu\nu,n'\ell'm'}(\hat{q})\, d\Omega \equiv \mathcal{J}^{(i,j)}_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.24}$$

tem-se

$$I^{(1,2)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = I^{(2,1)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 0 \tag{A.25}$$

$$I^{(1,4)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = I^{(4,1)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 0 \tag{A.26}$$

$$I^{(2,4)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = I^{(4,2)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 0 \tag{A.27}$$

$$\mathcal{J}^{(1,2)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = \mathcal{J}^{(2,1)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 0 \tag{A.28}$$

$$\mathcal{J}^{(3,4)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = \mathcal{J}^{(4,3)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 0 \tag{A.29}$$

$$\mathcal{J}^{(5,6)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = \mathcal{J}^{(6,5)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 0 \tag{A.30}$$

$$I^{(1,1)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 2n(n+1)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.31}$$

$$I^{(2,2)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 2(n+1)(n+2)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.32}$$

$$I^{(3,3)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 4\,\ell(\ell+1)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.33}$$

$$I^{(4,4)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 16\,(n+1)\,\ell(\ell+1)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.34}$$

$$\mathcal{J}^{(1,1)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 2n(n+2)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.35}$$

$$\mathcal{J}^{(2,2)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 8n(n+2)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \tag{A.36}$$

$$\mathcal{J}^{(i,i)}_{n\ell m,n'\ell'm'} = 16\,(n+1)^2\,\ell(\ell+1)\,\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} \quad (i=3,4,5,6) \tag{A.37}$$

Nas fórmulas acima, $\delta_{n\ell m,n'\ell'm'} = \delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$

São válidas igualmente as seguintes propriedades diferenciais ($\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial q_\alpha}$):

$$\partial_\alpha\partial_\alpha\,[F(q^2)Y^{(1)}_\mu(\hat{q})] = Y^{(1)}_\mu(\hat{q})\left\{\left[\frac{d^2}{dq^2} + \frac{3}{q}\frac{d}{dq} - \frac{n(n+2)}{q^2} + \frac{(2n+1)}{q^2}\right]F(q^2)\right\}$$

$$\equiv Y^{(1)}_\mu(\hat{q})\;\Box_{n-1}\,F(q^2) \tag{A.38}$$

$$\partial_\alpha\partial_\alpha\,[F(q^2)Y^{(2)}_\mu(\hat{q})] = Y^{(2)}_\mu(\hat{q})\;\Box_{n+1}\,F(q^2) \tag{A.39}$$

$$\partial_\alpha\partial_\alpha\,[F(q^2)Y^{(3)}_\mu(\hat{q})] = Y^{(3)}_\mu(\hat{q})\;\Box_{n}\,F(q^2) \tag{A.40}$$

$$\partial_\alpha\partial_\alpha\,[F(q^2)Y^{(4)}_\mu(\hat{q})] = Y^{(4)}_\mu(\hat{q})\;\Box_{n}\,F(q^2) \tag{A.41}$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \left[F(q^2)\, Y^{(1)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] = Y^{(1)}_{\mu\nu}(\hat{q})\, \Box_n F(q^2) \tag{A.42}$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \left[F(q^2)\, Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] = Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q})\, \Box_n F(q^2) \tag{A.43}$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \left[F(q^2)\, Y^{(3)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] = Y^{(3)}_{\mu\nu}(\hat{q})\, \Box_{n-1} F(q^2) \tag{A.44}$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \left[F(q^2)\, Y^{(4)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] = Y^{(4)}_{\mu\nu}(\hat{q})\, \Box_{n+1} F(q^2) \tag{A.45}$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \left[F(q^2)\, Y^{(5)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] = Y^{(5)}_{\mu\nu}(\hat{q})\, \Box_{n-1} F(q^2) \tag{A.46}$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \left[F(q^2)\, Y^{(6)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \right] = Y^{(6)}_{\mu\nu}(\hat{q})\, \Box_{n+1} F(q^2) \tag{A.47}$$

$$q_\alpha \partial_\alpha\, Y^{(i)}_{\mu}(\hat{q}) = 0 \qquad i = (1,2,3,4) \tag{A.48}$$

$$q_\alpha \partial_\alpha\, Y^{(i)}_{\mu\nu}(\hat{q}) = 0 \qquad i = (1,2,\ldots,6) \tag{A.49}$$

Explicitaremos agora algumas relações entre os hiperesféricos generalizados, que foram utilizadas no texto.

$$q_\mu \left\{ Y^{(1)}_\mu(\hat{q}) + Y^{(2)}_\mu(\hat{q}) \right\} = 2(n+1)\, q\, Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.50}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, q_\alpha \left\{ Y^{(1)}_\beta(\hat{q}) - Y^{(2)}_\beta(\hat{q}) \right\} = q\, Y^{(2)}_{\mu\nu}(\hat{q}) \tag{A.51}$$

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, q_\gamma \left\{ Y^{(3)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) - Y^{(4)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) \right\} = 2q\, Y^{(4)}_\mu(\hat{q}) \tag{A.52}$$

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, q_\gamma \left\{ Y^{(5)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) + Y^{(6)}_{\alpha\beta}(\hat{q}) \right\} = -4q(n+1)\, Y^{(3)}_\mu(\hat{q}) \tag{A.53}$$

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} q_\lambda \{ \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho (Y_\sigma^{(1)} + Y_\sigma^{(2)}) \} =$$

$$= 2 q_\mu q_\nu (Y_\nu^{(1)} + Y_\nu^{(2)}) - 2 q^2 (Y_\mu^{(1)} + Y_\mu^{(2)}) \tag{A.54}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} q_\lambda \{ \epsilon_{\alpha\rho\sigma\gamma} q_\gamma (Y_{\rho\sigma}^{(3)} + Y_{\rho\sigma}^{(4)}) \} =$$

$$= 2 q^2 (Y_{\mu\nu}^{(3)} + Y_{\mu\nu}^{(4)}) - 2 q_\nu q_\lambda (Y_{\mu\lambda}^{(3)} + Y_{\mu\lambda}^{(4)}) - 2 q_\mu q_\lambda (Y_{\lambda\nu}^{(3)} + Y_{\lambda\nu}^{(4)}) \tag{A.55}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} q_\lambda \{ \epsilon_{\alpha\rho\sigma\gamma} q_\gamma (Y_{\rho\sigma}^{(5)} + Y_{\rho\sigma}^{(6)}) \} =$$

$$= 2 q^2 (Y_{\mu\nu}^{(5)} + Y_{\mu\nu}^{(6)}) - 2 q_\nu q_\lambda (Y_{\mu\lambda}^{(5)} + Y_{\mu\lambda}^{(6)}) - 2 q_\mu q_\lambda (Y_{\lambda\nu}^{(5)} + Y_{\lambda\nu}^{(6)}) \tag{A.56}$$

4 - Outras propriedades dos $Y_{n\ell m}(\hat{q})$ utilizadas no texto

Para o cálculo das paridades π e C dos diferentes setores, é útil mencionar as propriedades seguintes:

$$Y_{n\ell m}(-\vec{q}, \hat{q}_4) = (-)^\ell \, Y_{n\ell m}(\vec{q}, \hat{q}_4) \tag{A.57}$$

$$Y_{n\ell m}(-\hat{q}) = (-)^n \, Y_{n\ell m}(\hat{q}) \tag{A.58}$$

Na Tabela VI do texto utilizamos as propriedades (A.9) a (A.12) para determinar o momento angular dos estados descritos pelas amplitudes $\gamma_\mu \phi_\mu$ e $i\gamma_5 \gamma_\mu \phi_\mu$. Devemos pois reescreve - las do seguinte modo:

$$\gamma_\mu \phi_\mu = \gamma_4 \phi_4 + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \phi_i = \gamma_4 \phi_4 + \sum_{s_3} (-)^{s_3} \gamma_{s_3} \phi_{-s_3}$$

onde

$$\gamma_{s_3} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_1 + i \gamma_2) & s_3 = +1 \\ \gamma_3 & s_3 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_1 - i \gamma_2) & s_3 = -1 \end{cases} \tag{A.59}$$

e

$$\phi_{s_3} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2) & s_3 = +1 \\ \phi_3 & s_3 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i \phi_2) & s_3 = -1 \end{cases} \tag{A.60}$$

Com as propriedades dos coeficientes de Clebsh-Gordan[38], e ainda lembrando que $l = j$, $m = j_3$, podemos escrever, utilizando as propriedades (A.9) a (A.12):

$$\left(Y^{(1)}_{4,m+1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{4,m-1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(4)}_{4,m,j,j_3}(\hat{q}) \right) \propto Y_{m,j,j_3}(\hat{q}) \tag{A.61}$$

$$(-)^{s_3} \left(Y^{(1)}_{-s_3,m+1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(2)}_{-s_3,m-1,j,j_3}(\hat{q}) + Y^{(4)}_{-s_3,m,j,j_3}(\hat{q}) \right) \propto$$

$$\propto (1 s_3; j+1, j_3 - s_3 | j\, j_3) Y_{m,j+1,j_3-s_3}(\hat{q}) + (1 s_3; j-1, j_3 - s_3 | j\, j_3) Y_{m,j,j_3-s_3}(\hat{q}). \tag{A.62}$$

$$(-)^{s_3} Y^{(3)}_{-s_3,m,j,j_3}(\hat{q}) \propto (1 s_3; j\, j_3 - s_3 | j, j_3)\, Y_{m,j,j_3-s_3}(\hat{q}) \tag{A.63}$$

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. M. Gell-Mann: Phys. Letters 8, 214,(1964);
G. Zweig: CERN "preprints" TH 401, 412 (1964) (nao publicados).

2. R. H. Dalitz: "Symmetries and the Strong Interactions",Proc of the XIIIth. International Conference on High Energy Physics, Berkeley 215 (1966);
R. H. Dalitz:"Mesonic Resonance States", Meson Spectroscopy pg.497 (C. Baltay, A.H. Rosenfiel ed.),New York (1968).

3. J.J.J. Kokkedee: "The Quark Model" (W.A. Benjamin,Inc) New York (1964);
Na primeira fase do presente trabalho, estudamos o limite proposto por Dalitz para a equação de B-S, relativa ao sistema quark-antiquark, no caso de quarks escalares (spin zero). Recai-se numa equação do tipo Schrödinger que foi resolvida para o caso de um potencial suave do tipo gaussiano Obtem-se essencialmente os mesmos resultados do modelo não relativístico usual: M. Ballester Santos, P. Leal Ferreira Supl. Ciência e Cultura 24, 42 (1972)

4. M. K. Sundaresan, P. J. S. Watson: Ann. Phys.(N.Y.) 59, 375 (1970);
G. Preparata: "A Relativistic Quark Model in Subnuclear Phenomena", pg. 240 (International School of Physics E. Majorana, Erice, 1969, Academic Press, New York and London).

5. Quarks pesados foram introduzidos, no contexto não relativístico por: G. Morpurgo: Physics, 2, 95 (1965).

6. H. A. Bethe, E. E. Salpeter: Phys. Rev. 84, 1232 (1951);
M. Gell-Mann, F. Low: Phys. Rev. 84, 350 (1951);
Para uma revisão da Teoria da equação de B-S, ver:

N. Nakanishi: Progr. Theor. Phys. Suppl. 43, 1 (1969).

7. M. Böhm, H. Joos, M. Krammer: Nuovo Cimento 7A,21 (1972);
M. Böhm, H. Joos, M. Krammer: Nucl. Phys. B51, 397 (1973).
Esta referência será designada por BJK;
M. Böhm, H. Joos, M. Krammer: Acta Phys. Austr.Suppl.XI , 3 (1973)

8. Para os barions a dinâmica relativística apenas foi considerada para quarks escalares: R. Meyer: DESY "preprint"73/42; e Nucl.Phys.B71, 226(1974)

9. Usamos a métrica: $\gamma.p \equiv \gamma_\mu . p_\mu = \gamma_o p_o - \vec{\gamma}.\vec{p}$ com

$$\gamma_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \gamma_5 = i \, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli.

10. G. C. Wick: Phys, Rev. 96, 1124 (1954).

11. Note-se que as matrizes que aparecem no kernel do segundo membro da equação (1.10) são as matrizes γ originais, isto é, não são as γ_{eucl}. Para as matrizes euclidianas, tem-se: $\{\gamma_\mu , \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$, $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$.

12. A. Pagnamenta: Nuovo Cimento 53A, 30 (1968).

13. R. Delbourgo, A. Salam, J. Strathdee: Nuovo Cimento 50A, 193 (1967).

14. M. Ballester Santos, P. Leal Ferreira:a ser publicado na Rev. Brasileira de Física.

15. O mesmo problema, para quarks escalares, foi abordado por : P. Becker, M. Böhm: Nuovo Cimento 13, 708 (1973).

16. Lembremos aqui, que para ser possível a efetuação da rota -

ção de Wick com kernels harmônicos, é necessário que $\langle q^2\rangle / m^2 \ll 1$ como salienta BJK. É possível mostrar que esta aproximação é boa, no caso de potenciais suaves e forte ligação.

17. R. F. Keam: Jour. Math. Phys. 10, 594 (1969)

18. S. Mandelstam: Proc. Roy. Soc. A237, 486 (1866); W. Kummer: Nuovo Cimento 31, 219 (1964).

19. Veja-se por exemplo D. Lurié: "Particles and Fields". J. Wiley, N. York. (1968)

20. Agradecemos ao Prof. H. Joos, DESY, Hamburg, por uma útil discussão sôbre êste ponto. Veja-se também: M. Krammer, Interner Bericht, DESY 73/1, März 1973.

21. Para o cálculo dessas expressões são úteis as seguintes relações entre as matrizes γ euclidianas:

a) $\gamma_\mu \gamma_\nu = i\sigma_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}$

b) $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_5 \delta_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$

c) $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha = \gamma_\mu \delta_{\nu\alpha} - \gamma_\nu \delta_{\mu\alpha} + \gamma_\alpha \delta_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_5 \gamma_\beta$

d) $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha = \gamma_5 \gamma_\mu \delta_{\nu\alpha} - \gamma_5 \gamma_\nu \delta_{\mu\alpha} + \gamma_5 \gamma_\alpha \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\beta$

onde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ são os símbolos de Levi-Civita quadridimensionais ($\epsilon_{1234} = +1$).

22. Utilizamos as seguintes propriedades dos símbolos de Levi-Civita quadridimensionais:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{\mu\rho\sigma\gamma} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} & \delta_{\nu\gamma} \\ \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} & \delta_{\alpha\gamma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} & \delta_{\beta\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho})$$

23. As definições e propriedades do Apêndice referem-se aos hi peresféricos generalizados $\bar{Y}_{\mu}^{(i)}$ $(i=1,2)$, $Y_{\mu}^{(i)}$ $(i=3,4)$, $Y_{\mu\nu}^{(i)}$ $(i=3,4)$ $\bar{Y}_{\mu\nu}^{(i)}$ $(i=3,4,5,6)$.

24. Para os hiperesféricos definidos neste trabalho é fácil demonstrar que:

$$a)\ \sum_{n'\ell'm'} Y_{n'\ell'm'}(\hat{q})\int_0^\infty q'^3 dq' K_{n'}(q,q')F_m(q')\int d\Omega\, Y^*_{n'\ell'm'}(\hat{q}')Y^{(i)}_{\mu,n\ell m}(\hat{q}') =$$
$$= Y^{(i)}_{\mu n\ell m}\int_0^\infty q'^3 dq'\ K_r(q,q')F_m(q')$$

onde r = n-1 para i = 1; r = n+1 para i = 2; r=n para i = 3,4.

$$b)\ \sum_{n'\ell'm'} Y_{n'\ell'm'}(\hat{q})\int_0^\infty q'^3 dq' K_{n'}(q,q')F_m(q')\int d\Omega\, Y^*_{n'\ell'm'}(\hat{q}')\,Y_{\mu\nu,n\ell m}(\hat{q}')$$
$$= Y^{(i)}_{\mu\nu,n\ell m}(\hat{q})\int_0^\infty q'^3 dq'\ K_r(q,q')F_m(q')$$

onde r = n para i = 1,2; r = n-1 para i = 3,5; r = n+1 para i = 4,6.

25. Como $V_0^{(1)} = 0$, as soluções $V_0^{(1)}$, S_0 não são do mesmo tipo das soluções $V_n^{(1)}$, S_n ($n \neq 0$). No entanto estas soluções podem ser determinadas facilmente.

26. M. Abramowitz, I. A. Stegun (Editors): "Handbook of Mathematical Functions", pg. 505 (Dover Publications, New York-1965).

27. M. Abramowitz, I. A. Stegun (Editors): "Handbook of Mathematical Functions", pg. 783 (Dover Publications, New York - 1965).

28. M. Böhm, H. Joos, M. Krammer: CERN "preprint" TH 1715.

29. C. O. Escobar: Lett. Nuovo Cimento 10, 741 (1974)

30. R. F. Keam: Jour. Math. Phys. 9, 1462 (1968).

31. Particle Data Group: "Review of Particle Properties", Phys. Lett. 50B, No. 1,(1974).

32. Temos em mente mecanismos de quebra de SU(3) por troca de mesnons com gráficos semelhantes aqueles considerados por Escobar[29], para explicar as diferenças eletromagnéticas das massas dos mesons.

33. R. van Royen, V. R. Weisskopf: Nuovo Cimento 50, 617 (1967); ibid. 51, 583 (1967).

34. G. Barbarino et al: Lett. Nuovo Cimento 3, 689 (1972); G. Smadja et al: "Experimental Meson Spectroscopy" (Third Philadelphia Conference) pg 347 (1972).

35. F. Low: Comments Nucl. Part. Phys. 1, 52, 85 (1967); H. Fritzch, M. Gell-Mann: Proc. of the XVI International Conference on High Energy Physics, Chicago-Batavia, 2 ,135 (1972); K. Johnson: Phys. Rev. D6, 1101 (1972)

36. R. Hagedorn: Nuovo Cimento- Suppl. 6, 311 (1968).

37. J. A. Castilho Alcarás, P. Leal Ferreira: Jour.Math. Phys. 6, 578 (1965).

38. M. Abramowitz, I. H. Stegun (Editors): "Handbook of Mathematical Functions", pg. 1007 (Dover Publications, New York, 1965).