

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

VINÍCIUS NJAIM DUARTE

Sustentação de Corrente utilizando Campos Magnéticos Viajantes Helicoidais

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da UNICAMP para obtenção do título de mestre em Física.

Orientadores: Prof. Dr. Roberto Antonio Clemente (*in memoriam*)
e Prof. Dr. Munemasa Machida

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado defendida pelo aluno Vinícius Njaim Duarte, e orientada pelos professores doutores Roberto Antonio Clemente (*in memoriam*) e Munemasa Machida.



Assinatura do Orientador

Campinas, 2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

D85s Duarte, Vinícius Njaim, 1988-
Sustentação de corrente utilizando campos magnéticos
viajantes helicoidais / Vinícius Njaim Duarte. -- Campinas,
SP : [s.n.], 2012.

Orientadores: Roberto Antonio Clemente, Munemasa
Machida.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Dupla-hélice. 2. Sustentação de corrente.
3. Onda viajante. I. Clemente, Roberto Antonio, 1953-2011.
II. Machida, Munemasa, 1950- III. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Física “Gleb Wataghin”. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Helical traveling wave current drive

Palavras-chave em inglês:

Double-helix

Current drive

Traveling wave

Titulação: Mestre em Física

Banca Examinadora:

Munemasa Machida [Orientador]

Ricardo Farengo

David Mendez Soares

Data da Defesa: 28-02-2012

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **VINICIUS NJAIM DUARTE - RA 064985** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 28 / 02 / 2012.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Munemasa Machida - Orientador do Candidato
DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Ricardo Farengo – GFN-FP/CAB - ARGENTINA

Prof. Dr. David Mendez Soares – DFA/IFGW/UNICAMP

Esta dissertação é dedicada aos professores
Roberto Antonio Clemente, Ricardo Nacif
Njaim e Luiz Clairmont de Lima Gomes

Agradecimentos

Ao professor Roberto A. Clemente pelo seu exemplo, amizade e orientação diária oferecidos nos últimos quatro anos. A ele agradeço as incontáveis conversas que estão marcadas na minha memória. Sua incansável e próxima assistência permitiram o início do meu amadurecimento como cientista.

À minha família - em especial meus pais Eduardo e Carla e meu irmão Dudu - pelos constantes suportes, cuidados e incentivos desde sempre. Aos meus pais sou muito grato à educação básica por eles proporcionada além do exemplo de vida transmitido.

À Maria Paula que me deu muitos momentos de alegria e muito suporte, ajuda e compreensão durante os momentos difíceis.

Ao professor Munemasa Machida por ter assumido a orientação deste trabalho após o falecimento do professor Clemente. Por ele tenho gratidão pelo apoio e incentivo, além da ajuda em resolver rapidamente pendências burocráticas.

Ao Dr. Ricardo Farengo, do Centro Atômico Bariloche e Instituto Balseiro (Bariloche, Argentina) por me receber para uma visita científica e me ajudar na etapa final deste trabalho. Sua ajuda foi determinante na fase de discussão e interpretação dos resultados.

A todos os colegas do Grupo de Física de Plasmas pelo companheirismo na convivência diária. A todos os amigos e colegas que contribuíram de alguma forma com o presente trabalho. Em especial, destaco Victor, Poca e Gilson, que desde o início do bacharelado me acompanham, sempre ajudando, dividindo experiências e proporcionando proveitosas discussões.

Ao professor Paulo H. Sakanaka, por ter ministrado o curso de métodos numéricos uti-

lizando o *software Mathematica*, que foi particularmente útil no desenvolvimento dos trabalhos numéricos aqui apresentados.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela indispensável bolsa de mestrado, através do processo 2009/11835-0. Sua reserva técnica me permitiu em 2010 participar do Congresso Internacional em Física de Plasmas em Santiago, Chile.

À UNICAMP, por proporcionar ótima infra-estrutura durante a realização do trabalho. À Coordenadoria de Pós-Graduação do Instituto de Física Gleb Wataghin pelo auxílio que tornou possível minha visita científica ao Centro Atômico Bariloche, Argentina.

Resumo

Entre os diferentes métodos alternativos à indução, para sustentação e/ou geração de corrente em plasmas confinados magneticamente, com o objetivo de se obter o funcionamento contínuo de um possível reator de fusão, foi estudado aquele associado a campos magnéticos viajantes produzidos por bobinas helicoidais alimentadas por correntes de radiofrequência defasadas (*double helix current drive*). O método permite compensar as perdas de caráter resistivo em configurações toroidais de plasma, como os *pinches* de campo reverso (*reversed field pinches* - RFP). O problema pode ser reduzido ao estudo dos estados estacionários de uma coluna de plasma sujeita a campos de radiofrequência produzidos por bobinas helicoidais externas. Desprezando efeitos de gradientes de densidade e temperatura, o modelo é regido por um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não lineares acopladas, reguladas por quatro parâmetros adimensionais de interesse físico, que foram resolvidas numericamente usando o programa *Mathematica*. Estudou-se a eficiência do método em relação às aplicações em RFP, para os quais o campo magnético longitudinal apresenta uma inversão no interior da coluna de plasma. Isso implicou considerar regiões ainda não bem exploradas para os parâmetros de interesse. Os resultados numéricos são apresentados para configurações de campos magnéticos com simetria dipolar e quadrupolar.

Abstract

Among the different methods, alternative to induction, to drive current in magnetically confined plasmas, with aim to obtain a continuous operation of a possible fusion reactor, we have studied the one associated to traveling magnetic field produced by helicoidal coils carrying out of phase radiofrequency currents (double helix current drive). The method allows compensating resistive losses in toroidal plasma configurations, like reversed field pinches. The problem may be reduced to the study of stationary states for a plasma column subjected to radiofrequency fields produced by external helicoidal coils. Neglecting density and temperature gradients, the model is governed by a system of coupled nonlinear second order ordinary differential equations, which depend on four dimensionless parameters of physical interest and can be solved numerically using the software *Mathematica*. We studied the efficiency of the method with respect to applications in reversed field pinches, for which the longitudinal steady magnetic field shows an inversion inside the plasma column. This implied considering not yet well explored regions of the parameters of interest. Numerical results are presented for magnetic field configurations of dipolar and quadrupolar simmetries.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Campos magnéticos rotantes - CMR (<i>rotating magnetic field</i> - RMF)	4
1.2	Esquema de dupla hélice (<i>double helix current drive</i>)	5
2	Modelo teórico	12
2.1	Hipóteses simplificadoras	13
2.2	Coordenadas helicoidais	14
2.3	O campo magnético e a densidade de corrente	17
2.4	A solução no vácuo	18
2.5	A regra de média	19
2.6	A média sobre a Lei de Ohm	20
2.7	A componente oscilante da lei de Ohm	23
2.8	A componente oscilante do rotacional da lei de Ohm	23
2.9	O campo magnético como função da corrente nas bobinas	26
3	Resolução numérica	33
3.1	Normalização	33
3.2	Equações a serem resolvidas	34
3.3	Condições de contorno	36
3.4	Métodos numéricos	38
4	Resultados, análise e discussões	40

<i>SUMÁRIO</i>	x
4.1 Sincronismo	40
4.2 Eficiência	41
4.3 Análise da potência depositada	42
4.4 Resultados	43
4.4.1 Simetria dipolar	43
4.4.2 Simetria quadripolar	51
5 Conclusões e perspectivas futuras	56
A Regras de regularidade na origem	62
B Código numérico	66
C Dedução das correntes máximas	73

Lista de Figuras

1.1	Vista esquemática de uma configuração de campo reverso (FRC), do Laboratório de Física de Plasmas Redmond (Universidade de Washington), em Seattle (Estados Unidos).	5
1.2	Foto do <i>rotamak</i> da Universidade Prairie View A&M (Texas, EUA). Pode-se observar os dois conjuntos de bobinas de Helmholtz ortogonais envolvendo a câmara.	6
1.3	Vista esquemática de Dutch <i>et al</i> [4, 6] onde é mostrado um corte transversal no qual estão evidenciados os dois dipolos defasados de $\pi/2$ um relação ao outro, que têm o efeito de fazer o campo girar. Um dos dipolos é denotado na figura por 1 e 1' e o outro é denotado por 2 e 2'. A presença (ausência) do supra-índice “ ’ ” indica que a corrente está direcionada entrando (saindo) da página. O campo com essa simetria é chamado dipolar rotante ou campo $m = 1$	6
1.4	Esquema experimental de Kikunaga <i>et al</i> [7]. É mostrado um corte transversal onde estão evidenciados dois quadrupolos (indicados por 1 e 2) defasados de $\pi/2$ um relação ao outro, que têm o efeito de fazer o campo girar. A presença (ausência) do supra-índice “ ’ ” indica que a corrente está direcionada entrando (saindo) da página. O campo com essa simetria é chamado quadrupolar rotante ou campo $m = 2$	7
1.5	Foto da máquina Rythmac-3, de Dutch <i>et al</i> [15].	8

2.1	Componente radial do campo magnético oscilante no caso dipolar ($m = 1$). As curvas preta, verde e azul correpondem a $p = 0$ ($N = 1$), $p = 1$ ($N = 3$), $p = 2$ ($N = 5$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$	29
2.2	Segunda componente helicoidal do campo magnético oscilante no caso dipolar ($m = 1$). As curvas preta, verde e azul correpondem a $p = 0$ ($N = 1$), $p = 1$ ($N = 3$), $p = 2$ ($N = 5$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$	29
2.3	Componente radial do campo magnético oscilante no caso quadrupolar ($m = 2$). As curvas preta, verde e azul correpondem a $p = 0$ ($N = 2$), $p = 1$ ($N = 6$), $p = 2$ ($N = 10$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$	30
2.4	Segunda componente helicoidal do campo magnético oscilante no caso quadrupolar ($m = 2$). As curvas preta, verde e azul correpondem a $p = 0$ ($N = 2$), $p = 1$ ($N = 6$), $p = 2$ ($N = 10$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$	30
4.1	Gráfico das partes real e imaginária de $\tilde{\beta}$ como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$	44
4.2	Gráfico das partes real e imaginária de $\tilde{\alpha}$ como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$	44
4.3	Gráfico das compontes 2 e 3 do campo magnético de ordem zero como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$	45
4.4	Gráfico das compontes θ e z do campo magnético de ordem zero como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$	45
4.5	Perfil da função complexa α obtido usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$	47
4.6	Perfil da função complexa β obtido usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$	47
4.7	Perfil dos campos estacionários toroidal e poloidal obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$	48
4.8	Perfil das densidades de corrente estacionárias toroidal e poloidal obtidas usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$	48

4.9	Perfis das eficiências em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$	49
4.10	Perfis dos sincronismos em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$	49
4.11	Perfil dos sincronismos em função de γ para os seguintes parâmetros: $h = 1$, $\tilde{B}_{int}(0) = 0$, $\lambda = 10$	50
4.12	Perfil das eficiências em função de γ para os seguintes parâmetros: $h = 1$, $\tilde{B}_{int}(0) = 0$, $\lambda = 10$	50
4.13	Perfis das componentes nas direções azimutal e axial da densidade de corrente estacionária, para os parâmetros: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3$ (caso de baixa penetração dos campos).	52
4.14	Perfis das componentes nas direções azimutal e axial do campo magnético estacionário, para os parâmetros: $B_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3$ (caso de baixa penetração dos campos).	52
4.15	Perfis das componentes nas direções azimutal e axial da densidade de corrente estacionária, para os parâmetros: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 40$ (caso de alta penetração dos campos).	53
4.16	Perfis das componentes nas direções azimutal e axial do campo magnético estacionário, para os parâmetros: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 40$ (caso de alta penetração dos campos).	53
4.17	Perfis dos sincronismos em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$	54
4.18	Perfis das eficiências em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$	54

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
\mathbf{J}	densidade de corrente
\mathbf{B}	campo magnético
\mathbf{E}	campo elétrico
e	carga elementar
n	densidade
\mathbf{u}	velocidade média
η	resistividade
ω	frequência do campo helicoidal externo
μ_0	permeabilidade magnética no vácuo
m	harmônico de mais baixa ordem maior que zero (dipolo: $m=1$ e quadrupolo: $m=2$)
ν_{ei}	frequência de colisão entre elétrons e íons
B_z^0	amplitude do campo estacionário longitudinal externo
a	raio do plasma
R	raio maior do toro
b	passo das bobinas helicoidais
Ω_{ci}	frequência ciclotrônica dos íons
Ω_{ce}	frequência ciclotrônica dos elétrons
B_ω	amplitude característica do campo oscilante helicoidal

Símbolo	Descrição
r	coordenada radial
x	coordenada radial normalizada com o raio do plasma, a
θ	coordenada azimutal
z	coordenada longitudinal
t	tempo
m_e	massa do elétron
\wp	díade pressão eletrocinética
Φ	potencial escalar magnético
I	amplitude da corrente nas bobinas helicoidais
l	raio das bobinas
I_N	função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem N
K_N	função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem N
k	número de onda angular associado ao passo das bobinas helicoidais
h	número de onda angular k , normalizado com o raio do plasma
h_i	fator de escala associado à i -ésima coordenada
\hat{e}_i	versor associado à i -ésima coordenada
γ	mede o grau de magnetização dos elétrons
λ	razão entre o raio do plasma e o comprimento clássico de penetração
ζ	sincronismo
γ	eficiência
α, β	funções escalares arbitrárias através das quais \mathbf{B} é expresso
\mathbf{S}	vetor de Poynting
P	potência

Capítulo 1

Introdução

A crescente demanda energética tem estimulado o estudo e desenvolvimento de mecanismos alternativos de geração de energia. A física de plasmas aplicada à fusão termonuclear controlada tem sido nas últimas décadas objeto de constantes estudos devido ao interesse em desenvolver reatores capazes de produzir energia limpa e até certo ponto, inesgotável [1]. Entre as máquinas baseadas no confinamento magnético dos plasmas, o conceito *tokamak* é atualmente considerado o principal candidato à obtenção de energia por fusão nuclear e portanto, o mais estudado e o que mais recebe investimentos. O *tokamak*, no entanto, apresenta alguns empecilhos, tais como a natureza pulsada do reator e sua ineficiência no aproveitamento da energia magnética, que poderiam ser decisivos para um eventual insucesso desse tipo de configuração. Um dos assuntos de maior relevância na pesquisa atual em fusão nuclear está diretamente relacionado a um eficiente mecanismo para gerar e manter corrente elétrica no plasma, que permitisse o funcionamento do reator por tempos cada vez maiores [1]. Os métodos indutivos de geração de corrente, nos quais a corrente é gerada por indução de Faraday (onde o plasma atua como o secundário de um transformador), são necessariamente pulsados e apresentam limitações ao tempo de confinamento dos plasmas, já que a corrente é sustentada por variação temporal monotônica do campo magnético. Um grande problema está relacionado à alta tensão mecânica que os componentes do reator estão submetidos. Pesquisar mecanismos que minimizem tal efeito se faz oportuno no estágio atual do

desenvolvimento científico da fusão nuclear controlada. Os métodos não indutivos oferecem essa vantagem, dada a possibilidade de que poderiam permitir um funcionamento contínuo e não pulsado de um eventual reator de fusão.

Nesta dissertação, estudamos a sustentação de corrente por meio do método não-indutivo conhecido como “onda viajante”. A definição desse termo é bastante ampla, mas no contexto de geração de corrente em plasmas, considera-se em geral “onda viajante” como um termo que usualmente designa campos eletromagnéticos que se movem por ação de correntes de radio-frequência em uma variedade de configurações com condutores externos que envolvem o toro de plasma. Em um trabalho de destaque, Thonemann, Cowhing e Davenport [2] explicaram que a geração de corrente eletrônica devido à interação entre campos magnéticos viajantes e gases ionizados pode ser entendida macroscopicamente da seguinte forma: à corrente oscilante que percorre os condutores externos ao plasma (comumente chamados de bobinas), está associado um campo magnético variável que induz correntes no plasma responsáveis pela blindagem. Esta é uma manifestação da Lei de Lenz, pois o plasma tenta se opor aos efeitos do campo externo no sentido de tentar minimizar as variações do fluxo magnético por ele provocadas. Tais corrente de blindagem por sua vez interagem com os campos das bobinas externas, produzindo uma força (de Lorentz) na mesma direção de propagação dos campos. O método de geração de corrente usando campos magnéticos viajantes requer interações de caráter onda-partícula para que exista transferência de momento e energia, porém diferentemente de alguns outros métodos, como por exemplo o uso de ondas de Alfvén, no qual a absorção por parte dos elétrons só ocorre em um intervalo seletivo (região de ressonância) [3], o método das ondas viajantes atua sobre todo o espaço de fase dos elétrons, garantindo que todos responderão aos efeitos do campo.

Neste cenário se inserem os métodos de geração e sustentação de corrente associados a técnicas envolvendo campos magnéticos de radiofrequência. Nesses experimentos, o campo magnético é induzido por dois pares de bobinas (defasadas de um quarto de ciclo um em relação ao outro) de tal forma que o campo rode com frequência constante numa secção transversal da câmara. Conforme descrito no parágrafo acima, os elétrons tenderão a acompanhar esse giro do campo (na realidade eles estão sempre atrasados em relação ao campo e

só estarão em fase no caso de penetração total dos campos no plasma) de tal forma que no referencial dos elétrons, o campo gira com frequência menor do que no referencial do laboratório. Com isso, os campos externos, que numa situação com o fluido estático, penetrariam pouco, apenas através de uma distância característica em geral muito pequena (comprimento clássico de penetração - *skin depth*- $\sqrt{\frac{2\eta}{\mu_0\omega}}$), podem penetrar no plasma por distâncias muito maiores. Esse mecanismo, que é a ideia-base do método de geração de corrente descrito nessa dissertação, é denominado *penetração anômala*.

O objetivo do método de geração de corrente é sempre maximizar a geração de correntes estacionárias no plasma, que é possível ao se calcular a média temporal sobre um ciclo da Lei de Ohm:

$$\mathbf{J} = -en\mathbf{u} = \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en} \right) \quad (1.1)$$

O agente responsável pela geração da corrente estacionária (não oscilante) é a média do termo poderomotivo ou termo de Hall ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$). A média temporal de uma quantidade oscilante é sempre igual a zero. Porém, o acoplamento entre duas quantidades oscilantes, quando mediado através de um ciclo, pode dar origem a quantidades estacionárias, conforme descrito em detalhes na seção “A média sobre a Lei de Ohm”. Em outras palavras, a geração de corrente ocorre da seguinte forma: campos oscilantes nas bobinas geram correntes oscilantes no plasma. O acoplamento entre estas duas quantidades cíclicas prevê a existência de correntes constantes no tempo.

Poderia-se pensar que, como os elétrons adquirem velocidade devido à interação com os campos, então pelas colisões elétron-íon, parte da energia e do momento seriam transferidos aos íons, sendo portanto colocados em movimento e o sistema evoluiria para um estado estacionário, onde as duas espécies se moveriam em fase com o campo, fazendo com que a densidade total de corrente se anulasse. No entanto, na prática, tal evolução pode acontecer em tempos muito longos se existem mecanismos adicionais para a perda de momentum dos íons (interação com as paredes, sistema de reabastecimento de partículas, difusão, etc.) [4].

No contexto de geração de corrente usando campos magnéticos rotantes foi proposto um

esquema [5] que consiste em dois conjuntos de bobinas cujas correntes sempre se movem em sentidos opostos e com frequências relativas convenientes de tal forma que um conjunto se encarrega de sustentar o movimento de elétrons e o outro, de íons. Com isso, ao invés de a corrente diminuir por efeito das colisões, a corrente pode ser potencializada pelo fato de que as duas espécies passam a se movimentar em sentidos opostos. Tal esquema evitaria invocar hipóteses para o mecanismo de relaxação dos íons que, em alguns contextos experimentais, são artificiais.

Este método não-indutivo oferece a vantagem de o efeito ponderomotivo associado (resultante da ação média da força de Lorentz sobre os elétrons) atuar sobre todos os elétrons do plasma confinado e não em regiões seletivas do espaço de fase¹, compensando assim perdas de caráter resistivo.

1.1 Campos magnéticos rotantes - CMR (*rotating magnetic field* - RMF)

Os campos magnéticos rotantes (*rotating magnetic field* - RMF) são produzidos por duas bobinas de Helmholtz perpendiculares e alimentadas por correntes alternadas de radiofrequência defasadas de $\pi/2$. Este método é utilizado com sucesso na sustentação de correntes em sistemas onde não é necessário produzir corrente na direção axial (longitudinal), como em configurações de campo reverso (*field reversed configurations* - FRC), nos quais é necessário apenas gerar corrente azimutal. Um esquema experimental desse tipo de máquina pode ser visto na figura (1.1). Note que nessa situação, o campo magnético roda ao longo da secção transversal da coluna com frequência angular constante. Esse tipo de máquina é em geral muito eficiente no aproveitamento da energia magnética². Uma característica dessas máquinas é que ocorre uma inversão no sentido do campo magnético axial próximo do eixo de simetria em relação ao campo magnético aplicado externamente.

¹Isto é, a geração de corrente não está associado à ressonância, fazendo com que os elétrons em todo o espaço de fase sejam colocados ou mantidos em movimento por campos magnéticos externos.

²Isto é, apresenta altos valores de $\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0}$, em geral muito próximos da unidade.

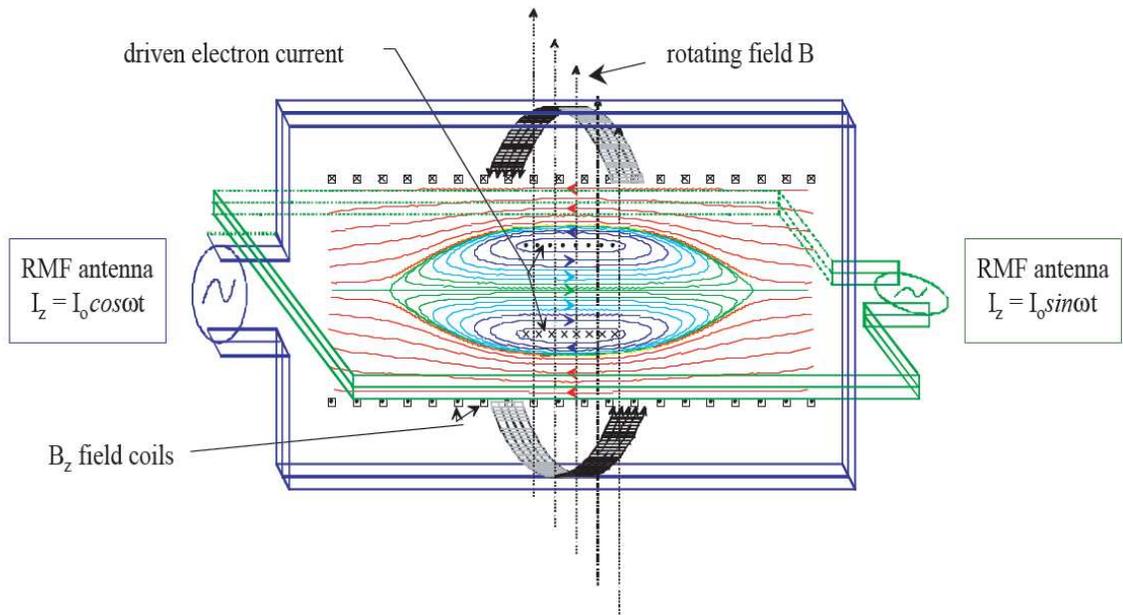


Figura 1.1: Vista esquemática de uma configuração de campo reverso (FRC), do Laboratório de Física de Plasmas Redmond (Universidade de Washington), em Seattle (Estados Unidos).

Um outro tipo de configuração que utiliza a técnica RMF na geração/sustentação de corrente é o *rotamak* (figura (1.2)). Esse conceito de máquina foi desenvolvido na década de 1980 na Universidade de Flinders, na Austrália. Tal máquina tem a interessante vantagem de poder ser operada de duas formas distintas: (i) como um FRC ou (ii) como um tokamak esférico. Neste último caso é necessário um condutor passando pelo centro da configuração e portanto, deixa de ser um toro compacto.

1.2 Esquema de dupla hélice (*double helix current drive*)

No caso de plasmas toroidais, como os *tokamaks* e os *pinches* de campo reverso (*reversed field pinch* - RFP), é necessário gerar no plasma densidade de corrente com direções toroidal e poloidal (axial e azimutal, respectivamente). Isso não pode ser obtido utilizando RMF (usado para configurações que necessitam apenas de corrente azimutal) mas sim utilizando campos magnéticos viajantes produzidos por dois ou mais conjuntos de bobinas helicoidais que envolvem o toro, conforme a figura (1.3) (campo helicoidal dipolar rotante) e a figura

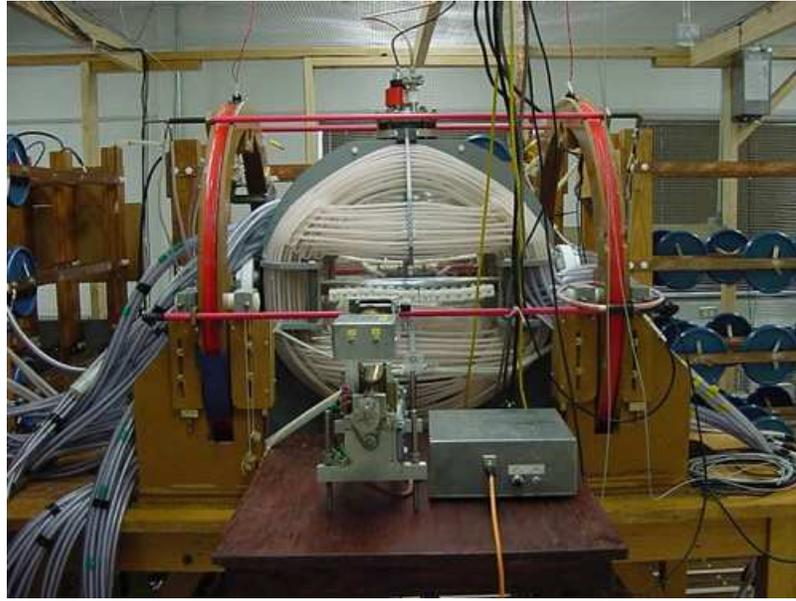


Figura 1.2: Foto do *rotamak* da Universidade Prairie View A&M (Texas, EUA). Pode-se observar os dois conjuntos de bobinas de Helmholtz ortogonais envolvendo a câmara.

(1.4) (campo helicoidal quadrupolar rotante):

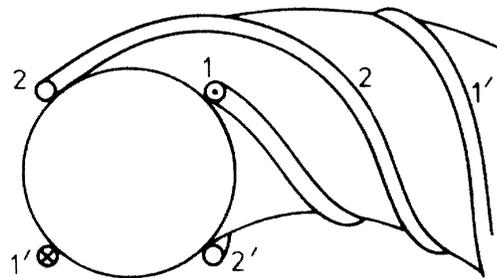


Figura 1.3: Vista esquemática de Dutch *et al* [4, 6] onde é mostrado um corte transversal no qual estão evidenciados os dois dipolos defasados de $\pi/2$ em relação ao outro, que têm o efeito de fazer o campo girar. Um dos dipolos é denotado na figura por 1 e 1' e o outro é denotado por 2 e 2'. A presença (ausência) do supra-índice “ ’ ” indica que a corrente está direcionada entrando (saindo) da página. O campo com essa simetria é chamado dipolar rotante ou campo $m = 1$.

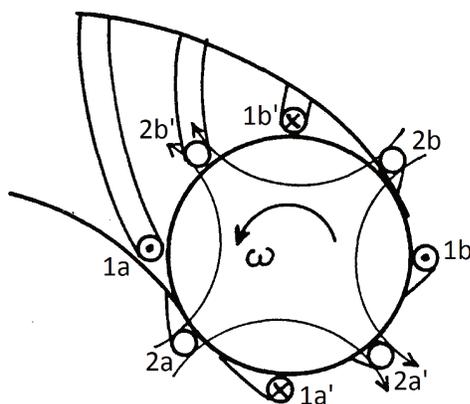


Figura 1.4: Esquema experimental de Kikunaga *et al* [7]. É mostrado um corte transversal onde estão evidenciados dois quadropolos (indicados por 1 e 2) defasados de $\pi/2$ um relação ao outro, que têm o efeito de fazer o campo girar. A presença (ausência) do supra-índice “ ’ ” indica que a corrente está direcionada entrando (saindo) da página. O campo com essa simetria é chamado quadrupolar rotante ou campo $m = 2$.

O esquema de duplas hélices é considerado uma extensão natural do método de RMF para plasmas toroidais, já que além de sua projeção sobre uma secção circular reta rodar com frequência constante, o campo também se move ao longo da direção axial (longitudinal), como se caminhasse se torcendo constantemente. Nesse caso, os campos são produzidos por dois ou mais conjuntos de bobinas helicoidais alimentadas por correntes de radiofrequência defasadas de $\pi/2$, que envolvem externamente a câmara de plasma.

O esquema *double helix* foi inicialmente direcionado para pesquisas relacionadas a máquinas do tipo *tokamak* [4, 8]. No seu notório trabalho de 1988, Bertram [8] estudou os casos representativos de plasmas fracamente e fortemente resistivos. Ao final do trabalho, concluiu que fortes campos toroidais resultam necessariamente em reduções substanciais na quantidade de corrente que pode ser sustentada, sendo bastante pessimista em relação à aplicação do esquema *double helix* aos *tokamaks*. No entanto, na última década foram publicados dois trabalhos sobre a possível conveniência de se utilizar tal esquema no caso dos RFP, configuração na qual os campos toroidal e poloidal tem essencialmente a mesma ordem de magnitude, diferentemente do *tokamak*. [9, 10]

Dutch e McCarthy [4, 6] realizaram os experimentos Rythmac-2, com dois conjuntos de bobinas helicoidais criando uma onda viajante com $m = 1$, com vista esquemática simplifi-

Parâmetro	Valor
Amplitude do campo estacionário externo aplicado B_0^z	300G
Frequência das correntes nas bobinas $f = \omega/2\pi$	330kHz
Passo das bobinas helicoidais b	40cm
Raio maior R	25cm
Raio menor a	5cm
Frequência ciclotrônica para íons de argônio Ω_{ci}	12Hz
Amplitude do campo no eixo na ausência de plasma B_ω	150 – 200 G
Frequência ciclotrônica para elétrons Ω_{ce}	420 – 560 MHz
Corrente integrada gerada	$\sim 900A$
Frequência de colisões elétron-íon ν_{ei}	$\sim MHz$

Tabela 1.1: Parâmetros experimentais da máquina Rythmac-2, de Dutch e McCarthy [4, 6]

cada mostrada na figura (1.3), e Rythmac-3 (figura (1.5)), com uma superposição de bobinas com $m = 1$ e $m = -1$, com a qual se podia controlar as amplitudes toroidal e poloidal relativas (e.g., com correntes iguais em cada bobina obtém-se apenas corrente toroidal no plasma). O tratamento teórico do último caso é mais complicado por não se poder tirar vantagem da simetria do sistema, dado que há bobinas se cruzando, ou seja, a corrente que as percorre não aponta sempre na mesma direção, como no caso de uma configuração com um único valor de m . Nesta dissertação, nos focamos na modelagem teórica da máquina australiana Rythmac-2, cujos dados e parâmetros experimentais estão mostrados na tabela 1.1.

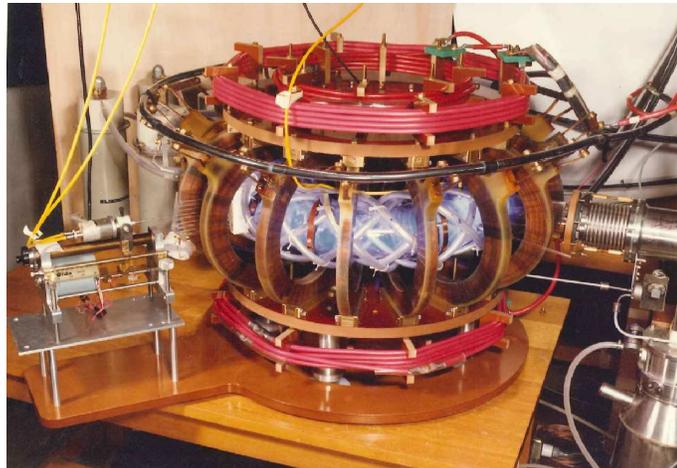


Figura 1.5: Foto da máquina Rythmac-3, de Dutch *et al* [15].

Esta dissertação é estruturada da seguinte forma:

No início do Capítulo 2, são mostrados em detalhe as suposições usadas no tratamento e na modelagem teórica do problema físico, seguido da definição das coordenadas helicoidais, que simplificam o tratamento pelo fato de se usar a simetria para reduzir a dimensionalidade do problema. Na continuação, as equações que regem o problema são deduzidas passo a passo a partir da média sobre a Lei de Ohm, tomada sobre um ciclo, que possibilita a existência de corrente estacionária gerada por campos oscilantes, através de sua interação não-linear com as correntes oscilantes do plasma. No fim do Capítulo 2, é mostrada a relação entre o campo magnético oscilante como função direta da amplitude das correntes helicoidais que o geram. Tal desenvolvimento é necessário para uma comparação consistente entre a eficiência na sustentação de corrente em configurações de diferentes geometrias. Sua aplicação à modelagem do método de dupla hélice é inédito e se faz presente no sistema como uma condição de contorno não-trivial.

No tratamento teórico aqui adotado, usamos os trabalhos de Bertram [8], Clemente e Farengo [9] e Farengo e Clemente [10] como ponto de partida. Este último [10] mostra simulações numéricas para simetria dipolar usando um código escrito na linguagem *Fortran*, o qual evolui temporalmente o conjunto de equações que modela o problema, considerando que as correntes nas bobinas externas são aumentadas aos poucos até seu valor máximo na mesma escala de tempo típica das ondas de rádiofrequência. Tal código mostra a possibilidade de geração e não só de sustentação de corrente usando o método de dupla hélice. O programa numérico desenvolvido durante o presente trabalho de mestrado foi escrito na linguagem do *software Mathematica*, considerando a situação estacionária, na qual as quantidades de interesse físico podem ser decompostas em componentes que são estáticas e outras que oscilam no tempo. A lógica do algoritmo é descrita no Capítulo 3, onde também são definidos os parâmetros físicos adimensionais através dos quais os resultados são expressos.

Nesta dissertação, os resultados são apresentados em forma gráfica, mostrando os perfis do campo magnético, da densidade de corrente e de funções escalares através das quais o tratamento é simplificado. Além disso, são mostrados os comportamentos dos parâmetros de eficiência e sincronismo, indicativos da qualidade e da eficácia do método de sustentação de corrente, que serão definidos no Capítulo 4. Os resultados numéricos para o caso de simetria

dipolar são comparados com resultados da literatura [10], como uma forma de verificação do código numérico desenvolvido durante o presente trabalho, e depois mostrados para regiões de parâmetros ainda não bem exploradas. Em seguida, são exibidos resultados inéditos para o caso de uma configuração de dupla hélice com simetria quadrupolar (com o dobro de bobinas envolvendo o toro em relação ao caso dipolar usual). Estudos sobre a simetria quadrupolar nunca foram reportadas na literatura, sendo apenas estudadas para aplicações mais simples, em máquinas do tipo FRCs [14]. Tais resultados e suposições do caso de geração de corrente em FRCs utilizando RMF são usados como ponto de partida para a extensão de resultados aqui tratada.

No Capítulo 5, são discutidas as vantagens e desvantagens das configurações com as simetrias estudadas, principalmente em relação à aplicação em RFPs. A comunidade internacional que trabalha com a máquinas RFP têm buscado regimes de descargas que otimizem, através de mecanismos externos, a geração de corrente poloidal (azimutal) grandes o suficiente próximos à borda do plasma, tal que se minimize a turbulência gerada durante a relaxação do plasma para o estado de mínima energia magnética (Estado de Taylor), no qual o campo magnético toroidal (longitudinal) apresenta uma inversão de sinal próximo à borda. Este artifício de se criar uma alta corrente poloidal com distribuição oca age de tal forma como se auxiliasse o plasma a inverter o sinal da componente toroidal do campo durante sua relaxação. A configuração quadrupolar se mostra de fato promissora em relação à aplicações em RFP por exibir os padrões de interesse experimental corroborados pelas simulações numéricas. A simetria quadrupolar é também analisada em termos da instabilidade *kink*, que é muito perigosa, por poder ser responsável por uma eventual dobra da câmara de plasma.

No sentido de complementar a teoria e o trabalho numéricos desenvolvidos, encontra-se no Apêndice A a dedução e implicações físicas das Regras de Regularidade, que são restrições naturais às potências da variável radial de uma série de Taylor, que aparecem ao se trabalhar em coordenadas cilíndricas e ao se impor que as quantidades físicas sejam bem comportadas em torno de $r = 0$. O Apêndice B traz o código numérico desenvolvido, na linguagem do *software Mathematica*, que resolve numericamente o sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas que descreve o problema físico. Por fim, no Apêndice C, está a dedução

das correntes estacionárias máximas possíveis de se obter com o método proposto. Tais correntes máximas são usadas na definição do parâmetro de sincronismo, o qual por sua vez é usado para se analisar a eficácia do método de sustentação de corrente.

Salvo quando explicitamente mencionado, usaremos na sequência apenas unidades no Sistema Internacional.

Capítulo 2

Modelo teórico

No trabalho aqui apresentado serão deduzidas em detalhe as equações e condições de contorno que modelam o problema de geração de corrente no plasma por meio de campos magnéticos viajantes devidos a correntes oscilantes nas bobinas helicoidais com dependência na forma $\exp[im(\theta + kz - \omega t)]$ ¹ onde o fator multiplicativo m dá conta da simetria do campo aplicado; k é o número de onda angular, relacionado com o passo da hélice nas bobinas externas b por $k = 2\pi/b$; $m\omega$ é a frequência de oscilação das correntes nas bobinas² e θ e z são coordenadas cilíndricas usuais. No problema, há um vínculo entre θ e z , portanto são utilizadas coordenadas helicoidais de modo a se eliminar uma coordenada (variável ignorável, i.e., nenhuma quantidade física depende dessa coordenada), o que leva a consideráveis simplificações, por se reduzir a dimensionalidade do problema. Assumiremos, seguindo a literatura [8], que todas as quantidades físicas relacionadas ao problema podem ser escritas como uma soma de um termo estacionário e um oscilante, da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}(r, \theta, z, t) = \mathbf{Q}_0(r) + \mathbf{Q}_m(r) \exp[im(\theta + kz - i\omega t)].$$

¹Na última seção deste capítulo, será mostrado o porquê de se assumir apenas esta dependência.

²Seguindo a referência [14], usamos a frequência igual a $m\omega$ com a finalidade de se trabalhar com campos oscilatórios cuja projeção sobre uma seção reta do cilindro rode com mesma frequência ω , independente do valor de m .

2.1 Hipóteses simplificadoras

O mecanismo de geração de corrente estudado é formalmente descrito pela Lei de Ohm generalizada (mais particularmente pelo termo de Hall, como veremos a seguir), que em sua forma completa, se escreve:

$$\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{ne} \nabla \cdot \wp + \frac{1}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J} \quad (2.1)$$

Os estudos teóricos realizados sobre o esquema *double helix* têm se baseado nas seguintes aproximações:

- Aproximação cilíndrica ou de grande razão de aspecto (razão entre o raio maior R e o raio menor a do toro de plasma), na qual o plasma é considerado um cilindro infinito de seção transversal circular. Tal aproximação é melhor justificada no caso dos RFP do que no caso dos *tokamaks*, já que seus valores típicos giram em torno de $R/a > 6$ e $3 < R/a < 6$, respectivamente.
- Íons imóveis. Para tanto, a frequência ciclotrônica dos íons Ω_{ci} (calculada com respeito ao módulo do campo helicoidal) deve ser muito menor que a frequência ω das correntes que percorrem as bobinas helicoidais de tal forma que os íons não conseguem responder ao campo aplicado. É interessante perceber que a velocidade média do fluido \mathbf{v} é calculada através da média ponderada pelas densidades de massa de íons e elétrons. Pelo fato de os íons serem muito mais massivos que os elétrons, $\mathbf{v} \rightarrow 0$ se os íons estão parados. Isso é responsável pela eliminação do termo $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ da Lei de Ohm.
- O termo $\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$ é desprezado frente aos outros na Lei de Ohm. Isto é bem justificado se a frequência ν_{ei} de colisões elétron-íon for muito maior que a frequência ω de oscilação associada ao campo magnético externo. É imediato notar essa conclusão ao se comparar o primeiro e o último termo da equação (2.1).
- A corrente de deslocamento da Lei de Ampère-Maxwell é desprezada. Tal aproximação é bem justificada na região de vácuo se a velocidade de fase das ondas viajantes for muito

menor que c e na região de plasma se a resistividade η e a frequência da onda ω não forem grandes o suficiente tal que $\epsilon_0\omega\eta \ll 1$. Isto é bem satisfeito levando-se em conta os parâmetros experimentais. Foi feita uma estimativa usando a densidade reportada por Hotta *et al* em seus experimentos [11], da ordem de $10^{19}m^{-3}$. Consideramos a frequência de colisão elétron-íon ν_{ei} da ordem de centenas de MHz , típica de um plasma neste tipo de experimento [12]. Usando a relação $\eta = \frac{m_e\nu_{ei}}{ne^2}$ [13] obtém-se $\eta \sim 10^{-4}\Omega m$. Usando $\omega \sim MHz$, pode-se verificar que $\epsilon_0\omega\eta$ é da ordem de 10^{-9} , satisfazendo portanto o requerimento de ser muito menor que a unidade.

- A temperatura eletrônica e a densidade das espécies são aproximadas como constantes e uniformes no plasma. Com isso, o termo que envolve o gradiente de pressão na Lei de Ohm é desprezado.
- O plasma é considerado como sendo totalmente ionizado e eletricamente neutro.
- A resistividade η é escalar e constante.
- Quaisquer efeitos de dissipação de natureza radiativa ou viscosa são desprezados.

Com todas as aproximações levadas em consideração, a Lei de Ohm passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{J} = -en\mathbf{u} = \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en} \right) \quad (2.2)$$

2.2 Coordenadas helicoidais

Um problema com simetria helicoidal pode ser descrito em termos de coordenadas helicoidais adimensionais definidas a partir das coordenadas cilíndricas usuais r , θ e z da seguinte forma: $x_1 = x = r/a$ (onde a é o raio do plasma), $x_2 = \theta + kz$ e x_3 desconhecida e ignorável, pois nenhuma quantidade física do problema tem dependência em x_3 . As constantes m e k representam respectivamente o índice do harmônico da onda³. Como as variáveis oscilantes

³No trabalho, consideraremos $m = 0$ (caso estacionário), $m = 1$ (campo dipolar rotante) e $m = 2$ (campo quadrupolar rotante).

têm dependência temporal na forma $\exp[im(\theta + kz - i\omega t)]$, as derivadas $\frac{\partial}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, quando aplicadas a qualquer quantidade física oscilante, podem ser substituídas por im e $-im\omega$, respectivamente. Os vetores unitários são definidos como $\hat{e}_1 = \hat{e}_r$, $\hat{e}_2 = (\hat{e}_\theta + hx\hat{e}_z)/\sqrt{1+h^2x^2}$ e $\hat{e}_3 = (\hat{e}_z - hx\hat{e}_\theta)/\sqrt{1+h^2x^2}$ onde $h \equiv ka$. O versor \hat{e}_3 é definido na direção das correntes que percorrem as bobinas externas à coluna de plasma.

Nesse sistema de coordenadas, um vetor genérico pode ser definido como

$$\mathbf{F} = F_1\hat{e}_r + \frac{F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3}{\sqrt{1+h^2x^2}} \quad (2.3)$$

onde $F_1 = F_r$, $F_2 = F_\theta + hx F_z$, $F_3 = F_z - hx F_\theta$ (sendo F_r , F_θ e F_z as entradas de um vetor genérico em coordenadas cilíndricas) seriam pseudo-componentes geralmente chamadas de componentes quase-helicoidais. O uso das componentes quase-helicoidais apresenta consideráveis simplificações no tratamento do problema pois o termo $\sqrt{1+h^2x^2}$ é muito recorrente nos cálculos.

Pelo fato de não se conhecer x_3 , não se pode construir o versor \hat{e}_3 da forma usual ($\hat{e}_i \equiv h_i \nabla(x_i)$). Com o intuito de se trabalhar com um sistema ortogonal de coordenadas define-se portanto $\hat{e}_3 \equiv \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$. Com isso, $\nabla \times \hat{e}_3 = \nabla \times (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_1(\nabla \cdot \hat{e}_2) + (\hat{e}_2 \cdot \nabla)\hat{e}_1 - \hat{e}_2(\nabla \cdot \hat{e}_1) - (\hat{e}_1 \cdot \nabla)\hat{e}_2$. Calculando separadamente cada um dos termos em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\hat{e}_1(\nabla \cdot \hat{e}_2) = \hat{e}_r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{1+k^2r^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{kr}{\sqrt{1+k^2r^2}} \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$(\hat{e}_2 \cdot \nabla)\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2r^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + kr \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{e}_r = \frac{1}{\sqrt{1+k^2r^2}} \frac{\hat{e}_\theta}{r} \quad (2.5)$$

$$\hat{e}_2(\nabla \cdot \hat{e}_1) = \frac{\hat{e}_\theta + kr\hat{e}_z}{\sqrt{1+k^2r^2}} \frac{1}{r} \quad (2.6)$$

$$(\hat{e}_1 \cdot \nabla)\hat{e}_2 = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\hat{e}_\theta + kr\hat{e}_z}{\sqrt{1+k^2r^2}} \right] = \frac{k(\hat{e}_z - kr\hat{e}_\theta)}{(1+k^2r^2)^{3/2}} \quad (2.7)$$

Assim, juntando os quatro termos, obtém-se

$$\nabla \times \hat{e}_3 = \frac{-k(2\hat{e}_3 + kr\hat{e}_2)}{1 + k^2r^2} \quad (2.8)$$

portanto $\nabla \times \hat{e}_3$ tem componentes nas direções \hat{e}_2 e \hat{e}_3 . Por não ser definido da maneira usual, o rotacional de \hat{e}_3 não respeita a forma geral presente nos livros [16, 17]:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{l,m,n} h_l \hat{e}_l \left[\frac{\partial(h_n A_n)}{\partial x_m} - \frac{\partial(h_m A_m)}{\partial x_n} \right] \quad (2.9)$$

com $l, m, n = 1, 2, 3; 2, 3, 1$ ou $3, 1, 2$. Novamente, calculando em coordenadas cilíndricas, obtém-se a expressão geral para o rotacional de um vetor genérico \mathbf{F} em coordenadas helicoidais⁴:

$$\begin{aligned} a\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{x} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \hat{e}_r - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2 x^2}} \frac{\partial F_3}{\partial x} \hat{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + h^2 x^2}} \left[-\frac{1 + h^2 x^2}{x} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{F_2}{x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{2hF_3}{1 + h^2 x^2} \right] \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

que também foge à forma usual (já que a componente 3 do rotacional depende da entrada 3 do vetor genérico), estando relacionado com a torção das linhas coordenadas. Um resultado semelhante foi apontado no estudo de fluxos estacionários em tubos com simetria helicoidal [18].

É possível efetuar o cálculo dos fatores de escala h_1 e h_2 seguindo a definição

$$h_i \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} = \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial z}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.11)$$

Assim obtém-se $h_1 = 1$ e $h_2 = \frac{r}{\sqrt{1 + k^2 r^2}}$. Não é possível obter h_3 por não se conhecer a coordenada x_3 . Por isso, todos os cálculos de rotacionais e divergentes nesta dissertação foram efetuados em coordenadas cilíndricas para depois transformados para quase-helicoidais.

⁴Tal rotacional é calculado em coordenadas cilíndricas considerando o vetor \mathbf{F} formado por suas pseudo-componentes, e não pelas verdadeiras.

A variável x_3 não pode ser obtida a partir do versor \hat{e}_3 usando a relação $\hat{e}_3 \equiv h_3 \nabla(x_3)$ pois é impossível integrar analiticamente tal equação. No entanto, o valor de x_3 poderia em princípio ser obtido ponto a ponto integrando numericamente a equação. Porém tal esforço não é necessário no tratamento do problema já que é suficiente ter uma direção 3 definida.

2.3 O campo magnético e a densidade de corrente

Aproximando o toro de plasma como um cilindro, podemos reduzir o problema a considerar uma coluna de plasma de raio a sujeita a um campo magnético externo longitudinal constante B_z^0 na direção \hat{e}_z ⁵, além da ação de um campo eletromagnético produzido por dois pares de bobinas helicoidais externas alimentadas com correntes de radiofrequência, sendo que a corrente de um par está defasada de $\pi/2$ em relação ao outro e as correntes das bobinas de um mesmo par possuem módulo igual porém sentidos opostos se estão diametralmente opostas (ver figuras (1.3) e (1.4)). Nas bobinas, as correntes de radio-frequência têm dependência temporal na forma $\exp[im(\theta + kz - \omega t)]$.

Como a coordenada x_3 é ignorável, o campo magnético no plasma associado às bobinas pode ser expresso na forma mais geral por

$$\mathbf{B} = \left[\nabla\alpha(x) \times \frac{\hat{e}_3}{\sqrt{1+h^2x^2}} + \beta(x)\hat{e}_3 \right] \exp[im(\theta + kz - \omega t)] \quad (2.12)$$

onde α e β são funções arbitrárias complexas. Tal expressão é construída tal que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ seja satisfeita automaticamente. Calculando em coordenadas cilíndricas e projetando em quase-helicoidais, temos:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{ax} \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} \hat{e}_r - \frac{1}{a\sqrt{1+h^2x^2}} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \hat{e}_2 + \frac{\beta}{\sqrt{1+h^2x^2}} \hat{e}_3 \right) \exp[im(\theta + kz - \omega t)] \quad (2.13)$$

Usando a lei de Ampère-Maxwell sem o termo de corrente de deslocamento, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, obtém-se a seguinte densidade de corrente

⁵Aplicado externamente para proporcionar estabilidade.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{ax} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \hat{e}_r - \frac{1}{a\sqrt{1+h^2x^2}} \frac{\partial \beta}{\partial x} \hat{e}_2 - \frac{1}{a\sqrt{1+h^2x^2}} \left[\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right] \hat{e}_3 \right) \exp[im(\theta+kz-\omega t)] \quad (2.14)$$

onde

$$\Delta \otimes \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+h^2x^2}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - m^2 \frac{1+h^2x^2}{x^2}$$

é um operador diferencial de segunda ordem. Novamente, calculando em cilíndricas, obtém-se $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, uma vez que a corrente de deslocamento está sendo desprezada.

2.4 A solução no vácuo

A solução na ausência de plasma deve satisfazer $\mathbf{J} = 0$, ou seja, $\beta = 0$ e

$$\Delta \otimes \alpha = 0$$

que tem por solução [19]

$$\alpha_{int}(x) = d_1 m h x I'_m(mhx) \quad (2.15)$$

onde I_m é a função de Bessel hiperbólica (ou modificada) de ordem m e o supra-índice “ ’ ” denota derivada com respeito ao argumento. Outra possível solução seria $d_2 h x K'_m(mhx)$, porém esta diverge na origem e não é fisicamente plausível. A determinação da constante d_1 é arbitrária.⁶

⁶No trabalho de Bertram ($m = 1$), tal escolha vem de se impor que no vácuo, a componente radial do campo magnético oscilante em $x \rightarrow 0$ seja igual à unidade, i. e.,

$$d_1 = -2i/h. \quad (2.16)$$

Como a componente 2 do campo magnético está sempre defasada de $\pi/2$ em relação à componente radial, então no vácuo, $\beta_2(x \rightarrow 0) = i$. No caso m geral, expressamos o campo magnético em função da amplitude da corrente nas bobinas. Tal normalização é mostrada em detalhes na seção sobre a normalização do campo

Utilizando a lei de Ohm generalizada

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en} \right) \quad (2.17)$$

e a lei de indução de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

é possível eliminar o campo elétrico das equações, mas antes é necessário observar a regra de média, com a qual se calcula as pseudo-componentes da densidade de corrente de ordem zero, que são resultado do acoplamento entre a corrente e o campo magnético presente na lei de Ohm. Atribuir a média do termo ponderomotivo às correntes estacionárias é bem justificável para experimentos que duram muito mais que o período de oscilação da onda viajante, que é aproximadamente $3\mu s$ no caso da máquina Rythmac.

2.5 A regra de média

Vamos definir a média sobre um período $T = 2\pi/m\omega$ como

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dots dt' \quad (2.19)$$

Sejam P e Q quantidades físicas complexas com dependência arbitrária na variável radial e com dependência temporal da forma $\exp[i\mathbf{m}(x_2 - \omega t)]$, então

$$\langle \text{Re}[P] \text{Re}[Q] \rangle = \left\langle \frac{P + P^*}{2} \cdot \frac{Q + Q^*}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{PQ^* + P^*Q}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{\text{Re}[PQ^*]}{2} \right\rangle = \text{Re} \left[\frac{PQ^*}{2} \right] \quad (2.20)$$

já que $\langle \exp[i\Gamma\omega t] \rangle = 0$, com $\Gamma \in \mathbb{Z}$. A média de uma grandeza oscilante é sempre zero porém a média de um produto de quantidades oscilantes não necessariamente é nulo.

magnético.

2.6 A média sobre a Lei de Ohm

A partir desta seção utilizaremos a seguinte notação: o primeiro algarismo do subíndice denota a ordem do harmônico (0, 1 ou 2) e o segundo denota a coordenada a que se refere (1, 2 ou 3 para $x(x_1)$, x_2 ou x_3). Nas quantidades α e β , que possuem apenas harmônico de ordem m , não usaremos nenhum índice por simplicidade. É muito importante notar que nos cálculos a seguir, nos valeremos do fato de que as componentes J_{01} e B_{01} devem ser necessariamente iguais a zero em todo o espaço, que pode ser entendido pelos argumentos a seguir. Analisando a equação da continuidade em ordem zero (quando nenhuma quantidade física depende de x_2 ou x_3)⁷:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_0 = 0$$

pode-se perceber que para a hipótese de densidade constante ser válida ⁸, é necessário que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \frac{d(xJ_{01})}{dx} = 0$$

ou seja, a componente radial da densidade de corrente, J_{01} , deve ser proporcional a $1/x$. Porém, para que não divirja na origem, J_{01} deve ser identicamente nulo em todo o domínio. Além disso, a equação $\nabla \cdot B = 0$ deve ser satisfeita separadamente em ordem zero e em ordem m . Em ordem zero, pelo mesmo argumento descrito acima, B_{01} deve ser identicamente nulo em todo o domínio. Já em ordem m , existe dependência em x e em x_2 , portanto $\frac{1}{x} \frac{d(xB_{m1})}{dx} + \frac{1}{x} \frac{d(B_{m2})}{dx_2} = 0$, o que já está embutido na expressão do campo magnético de ordem m (2.13).

Como o método de geração de corrente utilizado é não indutivo (i.e., o campo elétrico não é gerado por indução de Faraday a partir de variação temporal monotônica do campo magnético), o campo elétrico não deveria possuir componente de ordem zero (não oscilante). Porém, analisando a projeção em \hat{e}_1 da Lei de Ohm (2.21) em ordem zero e tirando sua média

⁷A densidade de carga elétrica foi representada com subíndice zero pois, por ser constante, esta possui apenas componente de ordem zero.

⁸Se ρ não fosse uniforme, mais um termo teria de ser considerado na expressão da Lei de Ohm.

sobre um período, temos:

$$J_{01} = \frac{1}{\eta} \left(E_{01} - \frac{\langle \mathbf{J} \times \mathbf{B} \rangle_{01}}{en} \right) \quad (2.21)$$

Como $J_{01} = 0$, é possível ver que deve necessariamente existir um campo elétrico radial não oscilante para balancear o termo ponderomotivo $\langle \mathbf{J} \times \mathbf{B} \rangle_{01}$. Entende-se E_{01} como um campo devido à polarização de cargas, porém mantendo constante a densidade de carga ρ dentro do cilindro. Esta parte radial do termo ponderomotivo é apontada por Dutch e McCarthy como tendo a importante função de confinar e estabilizar, bem como sendo importante no equilíbrio [6].

A existência de componentes 2 e 3 do campo elétrico estacionário poderia ser pensada da seguinte forma: a existência de um campo elétrico pode estar associado a um gradiente de um potencial (isso implica necessariamente separação de carga) ou associado a um potencial vetor magnético dependente do tempo. A primeira possibilidade é eliminada por não fazer sentido imaginar uma separação de cargas ao longo de direções definidas por uma hélice e a segunda possibilidade é eliminada pelo fato de que o campo elétrico gerado por um potencial vetor oscilante também é oscilante (nunca estacionário).

Projetada nas direções \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , a média da Lei de Ohm pode ser escrita como

$$J_{02} = - \frac{\langle \mathbf{J}_m \times \mathbf{B}_m \rangle_{02}}{\eta en}$$

$$J_{03} = - \frac{\langle \mathbf{J}_m \times \mathbf{B}_m \rangle_{03}}{\eta en}$$

Outras combinações do produto vetorial do termo ponderomotivo, bem como o campo elétrico de ordem m possuem média zero. Para os cálculos de J_{02} e J_{03} , usaremos as pseudo-componentes helicoidais já apresentadas

$$\begin{aligned}
 B_{m1} &= \frac{im\alpha}{ax}; & B_{m2} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial x}; & B_{m3} &= \beta; \\
 J_{m1} &= \frac{im\beta}{\mu_0 a x}; & J_{m2} &= -\frac{1}{\mu_0 a} \frac{\partial \beta}{\partial x}; & J_{m3} &= -\frac{1}{\mu_0 a} \left(\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Então

$$J_{02} = -\frac{1}{ne\eta} \langle J_{m3} B_{m1} - J_{m1} B_{m3} \rangle = -\frac{1}{\mu_0 a} \frac{\partial B_{03}}{\partial x} \tag{2.23}$$

$$J_{02} = -\frac{m}{2\mu_0 ne\eta a} \operatorname{Re} \left[\left\langle \left(\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right) \frac{i\alpha^*}{ax} - \frac{i\beta\beta^*}{x} \right\rangle \right] \tag{2.24}$$

O último termo é zero, já que $\operatorname{Re}[i|\beta|^2] = 0$. Abrindo em termos das partes real e imaginária de α e β :

$$J_{02} = \frac{m}{2\mu_0 ne\eta a^2} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{a} (\alpha_R \Delta \otimes \alpha_I - \alpha_I \Delta \otimes \alpha_R) + \frac{2h}{1+h^2x^2} (\beta_I \alpha_R - \beta_R \alpha_I) \right] \tag{2.25}$$

Da mesma forma, para J_{03} , fica:

$$J_{03} = -\frac{1}{ne\eta} \langle J_{m1} B_{m2} - J_{m2} B_{m1} \rangle = \frac{1}{\mu_0 a} \left(\frac{\partial B_{02}}{\partial x} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{B_{02}}{x} - \frac{2h}{1+h^2x^2} B_{03} \right) \tag{2.26}$$

$$J_{03} = -\frac{m}{2\mu_0 ne\eta a^2} \operatorname{Re} \left[\left\langle -\frac{i\beta}{x} \frac{\partial \alpha^*}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{i\alpha^*}{x} \right\rangle \right] = -\frac{m}{2\mu_0 ne\eta a^2} \frac{1}{x} \operatorname{Im} \left[\frac{\partial \alpha^* \beta}{\partial x} \right]$$

$$J_{03} = -\frac{m}{2\mu_0 ne\eta a^2} \frac{1}{x} \left(\beta_I \frac{\partial \alpha_R}{\partial x} - \beta_R \frac{\partial \alpha_I}{\partial x} + \alpha_R \frac{\partial \beta_I}{\partial x} - \alpha_I \frac{\partial \beta_R}{\partial x} \right) \tag{2.27}$$

2.7 A componente oscilante da lei de Ohm

Calculando a primeira pseudo-componente em ambos os lados da Lei de Faraday, obtém-se

$$E_{m3} = im\omega\alpha$$

Com isso, é possível obter a terceira pseudo-componente da Lei de Ohm em ordem m :

$$\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} = -\frac{\mu_0 a}{\eta} \left[im\omega\alpha - \frac{1}{ne} (J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1}) \right] \quad (2.28)$$

podendo ser reescrita na forma do trabalho de Bertram:

$$\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} = im \left(-\frac{\mu_0 a \omega}{\eta} \alpha + \frac{1}{ne\eta x} (\beta B_{02} - \mu_0 \alpha J_{02}) \right) \quad (2.29)$$

Abrindo a equação em partes real e imaginária e usando a componente 2 da Lei de Ampère de ordem zero $J_{02} = -\frac{1}{\mu_0 a} \frac{\partial B_{03}}{\partial x}$:

$$\frac{\Delta \otimes \alpha_R}{a} + \frac{2h\beta_R}{1+h^2x^2} = m \left(\frac{\mu_0 a \omega}{\eta} \alpha_I - \frac{1}{ne\eta x} (\beta_I B_{02} + \frac{\alpha_I}{a} \frac{\partial B_{03}}{\partial x}) \right) \quad (2.30)$$

$$\frac{\Delta \otimes \alpha_I}{a} + \frac{2h\beta_I}{1+h^2x^2} = -m \left(\frac{\mu_0 a \omega}{\eta} \alpha_R - \frac{1}{ne\eta x} (\beta_R B_{02} + \frac{\alpha_R}{a} \frac{\partial B_{03}}{\partial x}) \right) \quad (2.31)$$

2.8 A componente oscilante do rotacional da lei de Ohm

Para se obter uma segunda equação relacionando α e β , é necessário calcular o rotacional da Lei de Ohm e projetá-lo sobre o versor \hat{e}_3 , correspondente à coordenada ignorável x_3 . Vamos utilizar novamente a expressão geral calculada para o rotacional em coordenadas helicoidais (equação (2.10)). Calculando primeiramente $\nabla \times \mathbf{J}$ e usando (2.28):

$$\begin{aligned}
a\sqrt{1+h^2x^2}(\nabla \times \mathbf{J}) \cdot \hat{e}_3 &= -\frac{1}{\mu_0 a} \left[\Delta \otimes \beta - \frac{2h}{1+h^2x^2} \left(\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{\mu_0 a} \left\{ \Delta \otimes \beta + \frac{2h\mu_0 a}{\eta(1+h^2x^2)} \left[im\omega\alpha - \frac{1}{ne}(J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1}) \right] \right\} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Para $\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$:⁹

$$\begin{aligned}
a\sqrt{1+h^2x^2}(\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})) \cdot \hat{e}_3 &= -im \frac{(1+h^2x^2)}{x} \frac{(J_{02}B_{m3} - J_{m3}B_{02} + J_{m2}B_{03} - J_{03}B_{m2})}{1+h^2x^2} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} (J_{03}B_{m1} - J_{m1}B_{03}) + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{(J_{03}B_{m1} - J_{m1}B_{03})}{x} - \frac{2h}{1+h^2x^2} (J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1})
\end{aligned}$$

Com isso e com o auxílio da terceira pseudo-componente da Lei de Faraday,

$$(\nabla \times \mathbf{E})_{m3} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{m3} = 0 \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{E})_{m3} = im\omega\beta$$

o rotacional da Lei de Ohm

$$\nabla \times \mathbf{J} = \frac{1}{\eta} \left[\nabla \times \mathbf{E} - \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en} \right) \right]$$

projetado sobre \hat{e}_3 toma a seguinte forma (multiplicando ambos os lados por $\mu_0 a^2$):

$$\begin{aligned}
& -\Delta \otimes \beta + \frac{2h\mu_0 a}{1+h^2x^2} \left[-im \frac{\omega}{\eta} \alpha + \frac{1}{ne\eta} (J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1}) \right] = im \frac{\omega\mu_0 a^2}{\eta} \beta \\
& -\frac{\mu_0 a}{ne\eta} \left[-im \frac{(J_{02}B_{m3} - J_{m3}B_{02} + J_{m2}B_{03} - J_{03}B_{m2})}{x} + \frac{\partial}{\partial x} (J_{03}B_{m1} - J_{m1}B_{03}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{(J_{03}B_{m1} - J_{m1}B_{03})}{x} - \frac{2h}{1+h^2x^2} (J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1}) \right] \quad (2.33)
\end{aligned}$$

⁹Note que, em ordem um, o pseudo-vetor $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ pode ser expresso por: $(J_{02}B_{m3} - J_{m3}B_{02} + J_{m2}B_{03} - J_{03}B_{m2})\hat{e}_1 / (1+h^2x^2) + (J_{03}B_{m1} - J_{m1}B_{03})\hat{e}_2 + (J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1})\hat{e}_3$, já que $J_{01} = B_{01} = 0$. O denominador $(1+h^2x^2)$ aparece na primeira entrada pois as entradas 2 e 3 de \mathbf{J} e \mathbf{B} são pseudo-componentes ao passo que a entrada 1 do pseudo-vetor $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ é uma componente verdadeira. A forma geral de um vetor em coordenadas (quase-)helicoidais é dada pela equação (2.3).

Os dois termos com $(J_{m1}B_{02} - J_{02}B_{m1})$ se cancelam. Substituindo as expressões dos termos de ordem um J_{m1} , J_{m2} , J_{m3} , B_{m1} , B_{m2} e B_{m3} de (2.22) e $J_{02} = -\frac{1}{\mu_0 a} \frac{\partial B_{03}}{\partial x}$ de (2.23), os termos dentro do colchete do lado direito da equação (2.33) podem ser abertos da seguinte forma (a menos de um fator multiplicativo im):

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\beta}{\mu_0 a x} \frac{\partial B_{03}}{\partial x}} - \frac{B_{02}}{\mu_0 a x} \left(\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right) + \frac{B_{03}}{\mu_0 a x} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{J_{03}}{ax} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\alpha}{ax} \frac{\partial J_{03}}{\partial x} + \frac{J_{03}}{ax} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ & - \frac{J_{03}\alpha}{ax^2} - \underbrace{\frac{\beta}{\mu_0 a x} \frac{\partial B_{03}}{\partial x}} - \frac{B_{03}}{\mu_0 a x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{B_{03}\beta}{\mu_0 a x^2} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{(\mu_0 J_{03}\alpha - \beta B_{03})}{a\mu_0 x^2} \end{aligned}$$

onde os termos sublinhados de cancelam mutuamente. Rearranjando os termos restantes, a pseudo-componente três do rotacional da lei de Ohm (2.33) pode ser escrita de maneira mais sucinta como:

$$\begin{aligned} \Delta \otimes \beta = & -im \frac{\omega \mu_0 a^2}{\eta} \beta - im \frac{\omega \mu_0 a}{\eta} \frac{2h}{1+h^2x^2} \alpha - im \frac{\mu_0 a}{ne\eta x} \left[B_{02} \frac{1}{\mu_0 a} \left(\frac{\Delta \otimes \alpha}{a} + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right) \right. \\ & \left. - \alpha \frac{(1+h^2x^2)}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_{03}}{1+h^2x^2} \right) - \frac{2h^2x}{1+h^2x^2} \frac{\beta}{\mu_0 a} B_{03} \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Com isso, podemos abrir a equação (2.34) em partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} \Delta \otimes \beta_R = & m \frac{\omega \mu_0 a^2}{\eta} \beta_I + m \frac{\omega \mu_0 a}{\eta} \frac{2h}{1+h^2x^2} \alpha_I + m \frac{\mu_0 a}{ne\eta x} \left[B_{02} \frac{1}{\mu_0 a} \left(\frac{\Delta \otimes \alpha_I}{a} + \frac{2h\beta_I}{1+h^2x^2} \right) \right. \\ & \left. - \alpha_I \frac{(1+h^2x^2)}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_{03}}{1+h^2x^2} \right) - \frac{2h^2x}{1+h^2x^2} \frac{\beta_I}{\mu_0 a} B_{03} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \Delta \otimes \beta_I = & -m \frac{\omega \mu_0 a^2}{\eta} \beta_R - m \frac{\omega \mu_0 a}{\eta} \frac{2h}{1+h^2x^2} \alpha_R - m \frac{\mu_0 a}{ne\eta x} \left[B_{02} \frac{1}{\mu_0 a} \left(\frac{\Delta \otimes \alpha_R}{a} + \frac{2h\beta_R}{1+h^2x^2} \right) \right. \\ & \left. - \alpha_R \frac{(1+h^2x^2)}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_{03}}{1+h^2x^2} \right) - \frac{2h^2x}{1+h^2x^2} \frac{\beta_R}{\mu_0 a} B_{03} \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Onde, usando a equação (2.27), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J_{03}}{1+h^2x^2} \right) &= \frac{-m}{2\mu_0 n e \eta a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1+h^2x^2} \frac{1}{x} \left(\beta_I \frac{\partial \alpha_R}{\partial x} - \beta_R \frac{\partial \alpha_I}{\partial x} + \alpha_R \frac{\partial \beta_I}{\partial x} - \alpha_I \frac{\partial \beta_R}{\partial x} \right) \right) = \\ &= \frac{-m}{2\mu_0 n e \eta a^2} \frac{1}{x} \frac{1}{1+h^2x^2} \left(\beta_I \frac{\partial^2 \alpha_R}{\partial x^2} - \beta_R \frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x^2} + \alpha_R \frac{\partial^2 \beta_I}{\partial x^2} - \alpha_I \frac{\partial^2 \beta_R}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta_R}{\partial x} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x} + 2 \frac{\partial \beta_I}{\partial x} \frac{\partial \alpha_R}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{m}{2\mu_0 n e \eta a^2} \frac{1}{x^2} \frac{(1+3h^2x^2)}{(1+h^2x^2)^2} \left(\beta_I \frac{\partial \alpha_R}{\partial x} - \beta_R \frac{\partial \alpha_I}{\partial x} + \alpha_R \frac{\partial \beta_I}{\partial x} - \alpha_I \frac{\partial \beta_R}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.9 O campo magnético como função da corrente nas bobinas

A comparação entre o método de geração de corrente com simetria quadrupolar ($m = 2$) e dipolar ($m = 1$) não é fácil de ser realizada pois há uma diferença fundamental entre a topologia dos campos nos dois casos, que é descrito no Apêndice 1 sobre as Regras de regularidade na origem, pois no campo quadrupolar, a densidade de corrente estacionária e o campo de vácuo são iguais a zero ao longo do eixo z . Isso dificulta o tratamento já que até então o campo era normalizado com o valor do campo de vácuo sobre o eixo. Isso nos obriga a formular uma alternativa de tal forma que a eficiência e o sincronismo sejam expressados em função da amplitude de corrente nas bobinas. Não há uma relação analítica simples expressando o campo de vácuo como função das corrente nas bobinas.

Seguindo a referência [20], pode-se deduzir uma expressão analítica para o campo magnético de vácuo devido a um conjunto de condutores helicoidais que revestem um tubo cilíndrico reto. Durante os cálculos, é usada uma expressão conveniente da delta de Dirac em termos de uma soma infinita de cossenos e assim, obtém-se soluções para as regiões interna e externa às bobinas no caso sem plasma (vácuo) tal que o potencial escalar magnético satisfaz a Equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.38)$$

com o seguinte potencial escalar magnético para a região delimitada pelas bobinas helicoidais:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^i I_m(mkr) \text{sen}[m(\theta + kz)] \text{sin}[-m\omega t] \quad (2.39)$$

Os coeficientes a_m^i são determinados a partir das condições de contorno do eletromagnetismo sobre as correntes superficiais (associadas àquelas das bobinas). Com isso, o m -ésimo termo do potencial pode ser escrito como

$$\Phi_m^i = \frac{2\mu_0 I k l}{\pi} K'_m(mkl) I_m(mkr) \text{sin}[m(\theta + kz)] \text{sin}[-m\omega t] \quad (2.40)$$

Tal representação para o potencial recobre as nossas equações para o campo de vácuo, conforme será mencionado adiante. Usando a expressão de Morozov e Solov'ev para o potencial escalar, podemos calcular o campo magnético como função da corrente I das bobinas:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, x_2) = & \frac{2\mu_0 I k m l}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} N K'_N(Nkl) \left\{ I'_N(Nkr) k \text{sen}[N(\theta + kz)] \hat{e}_r + \right. \\ & \left. + \frac{I_N(Nkr)}{\sqrt{1 + k^2 r^2}} \frac{(1 + k^2 r^2)}{r} \text{cos}[N(\theta + kz)] \hat{e}_2 \right\} \text{sin}[-m\omega t] \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $N = (2p + 1)m$ e o fator $1/\sqrt{1 + k^2 r^2}$ indica que a segunda entrada do vetor é uma componente verdadeira (não é pseudo-componente). Denotamos I para a amplitude da corrente nas bobinas e l para o raio no qual as bobinas estão localizadas (e não o raio da câmara que eventualmente contém o plasma, que é denotado por a). Eq. (2.41) é consistente com a equação (5) de Bertram [8] para suas condições para o campo de vácuo: $\beta = 0$ e $\psi = (\text{const.}) mkr I'_m(mkr)$. É interessante que, usando a hipótese comumente usada de que as bobinas se localizam longe do plasma, o efeito de harmônicos mais altos pode ser desprezado¹⁰. Com o intuito de investigar tal afirmativa, foram plotados os primeiros termos da soma, apenas para a parte radial, uma vez que as dependências em θ , z e t são meramente oscilantes. Os gráficos (2.1) e (2.2) se referem às componentes 1 (radial) e 2 do campo oscilante para o caso $m = 1$. As curvas preta, verde e azul correspondem a

¹⁰Isto é mencionado na nota de rodapé da página 43 de [20].

$p = 0$ ($N = 1$), $p = 1$ ($N = 3$), $p = 2$ ($N = 5$), respectivamente. Os gráficos (2.3) e (2.4) se referem às componentes 1 (radial) e 2 do campo oscilante para o caso $m = 2$. As curvas preta, verde e azul correspondem a $p = 0$ ($N = 2$), $p = 1$ ($N = 6$), $p = 2$ ($N = 10$), respectivamente. Excepcionalmente para esta análise, a variável radial r está sendo normalizada com o raio l , no qual estão dispostas as bobinas helicoidais, e não com o raio a ocupado pelo plasma, como a variável radial é comumente normalizada. Os gráficos (2.1) a (2.4) mostram que o harmônico mais baixo é de fato o modo dominante se nos restringirmos à uma região longe das bobinas, i.e., à região correspondente a um cilindro de raio r que engloba o eixo z tal que $r \lesssim l/3$. Tais gráficos mostram que realmente manter apenas o primeiro termo da série é uma excelente aproximação se $l/a > 3$.

É instrutivo mencionar que pode-se inferir dos mesmos gráficos que apenas a configuração dipolar ($m = 1$) apresenta campo magnético de vácuo não-nulo sobre o eixo z (ou seja, em $r = 0$), conforme mencionado no início desta seção como motivação para os cálculos necessários para se espessar o campo devido unicamente às bobinas (ou campo de vácuo) como função direta da amplitude da corrente que as percorre. Conforme mencionado, apenas a parte radial está plotada, já que as demais dependências são oscilantes. Com isso, pode-se notar que após um quarto de ciclo, a componente 2 do campo magnético dipolar (figura (2.2)) terá valor diferente de zero sobre o eixo e a componente radial (figura (2.1)) será igual a zero no eixo. Pode-se ver que, pela equação (2.13), de fato as duas componentes estão defasadas de $\pi/2$.

Com apenas o primeiro termo, a equação (2.41) fica

$$\mathbf{B}(x, x_2) = \frac{2\mu_0 I k m^2 l}{\pi} K'_m(mkl) \left\{ I'_m(mkr) k \text{sen}[m(\theta - kz)] \hat{e}_r + \right. \\ \left. + I_m(mkr) \frac{\sqrt{1 + k^2 r^2}}{r} \text{cos}[m(\theta - kz)] \hat{e}_2 \right\} \text{sin}[-m\omega t] \quad (2.42)$$

Seguindo a abordagem teórica de Bertram [8] descrita no início deste capítulo, no caso de m geral temos:

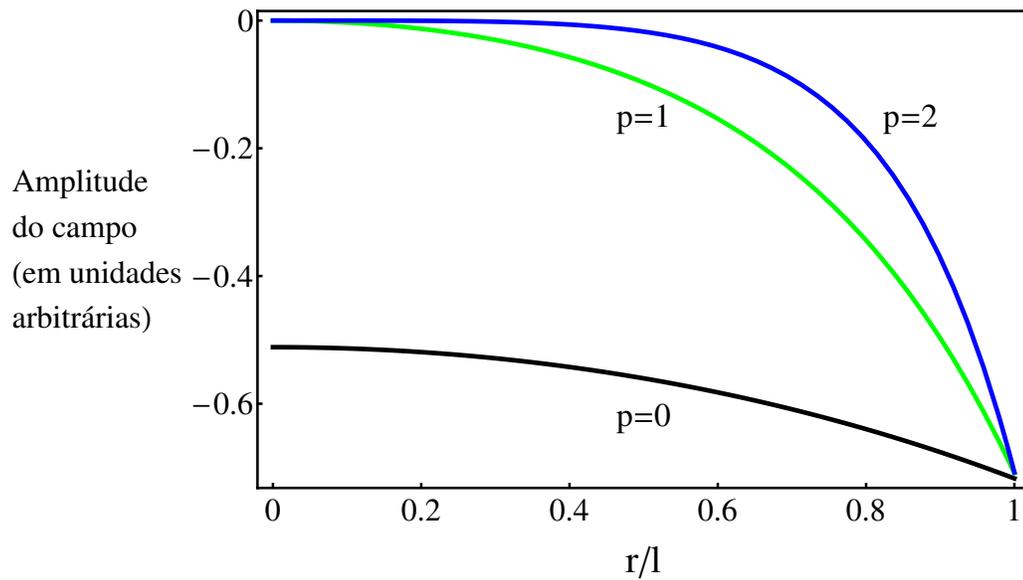


Figura 2.1: Componente radial do campo magnético oscilante no caso dipolar ($m = 1$). As curvas preta, verde e azul correspondem a $p = 0$ ($N = 1$), $p = 1$ ($N = 3$), $p = 2$ ($N = 5$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$.

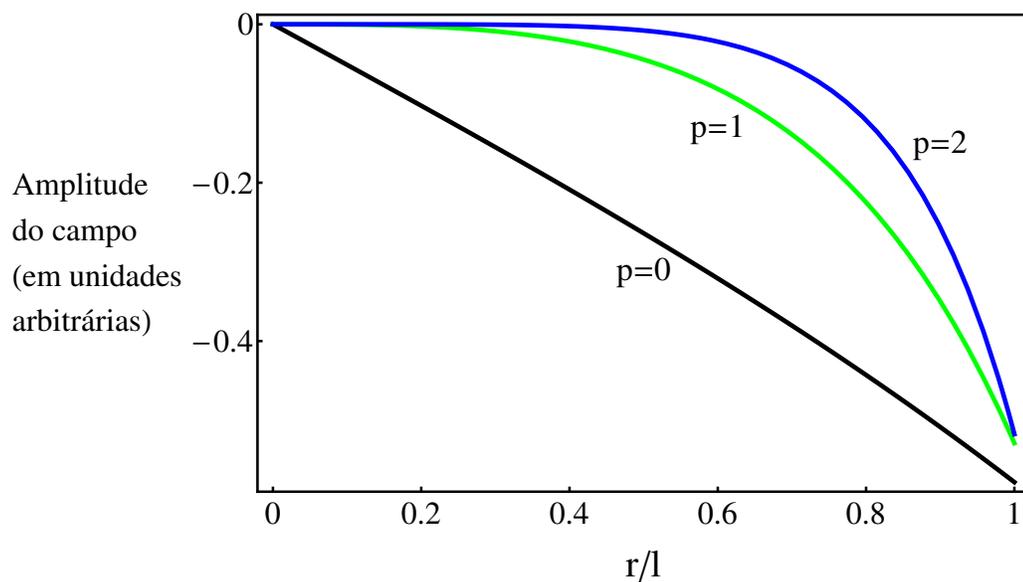


Figura 2.2: Segunda componente helicoidal do campo magnético oscilante no caso dipolar ($m = 1$). As curvas preta, verde e azul correspondem a $p = 0$ ($N = 1$), $p = 1$ ($N = 3$), $p = 2$ ($N = 5$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$.

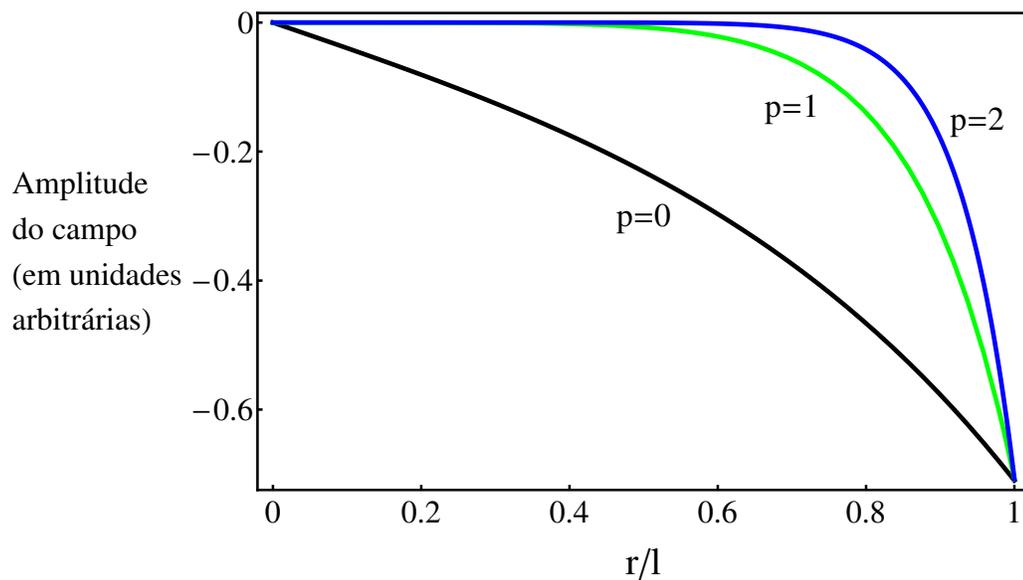


Figura 2.3: Componente radial do campo magnético oscilante no caso quadrupolar ($m = 2$). As curvas preta, verde e azul correspondem a $p = 0$ ($N = 2$), $p = 1$ ($N = 6$), $p = 2$ ($N = 10$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$.

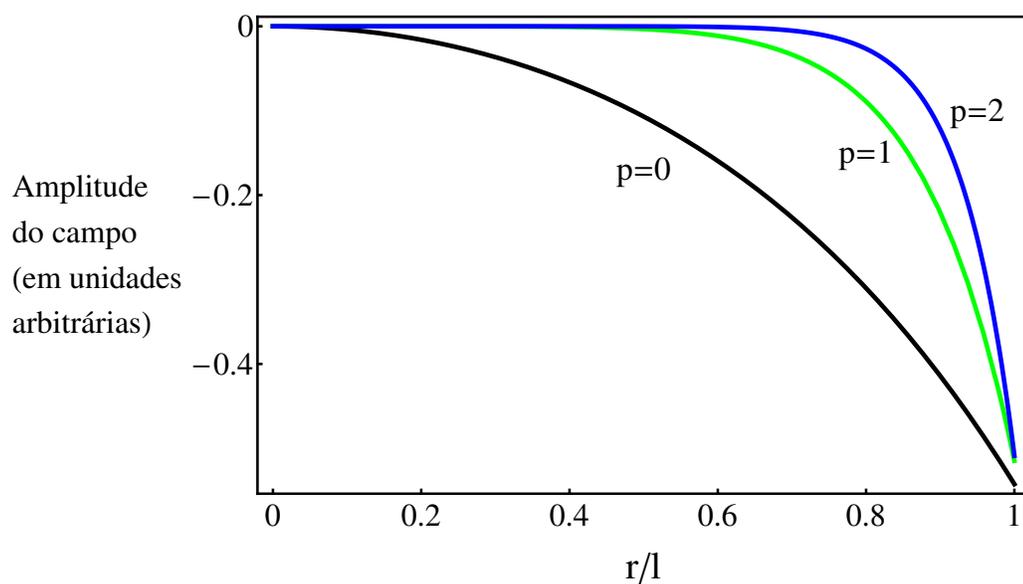


Figura 2.4: Segunda componente helicoidal do campo magnético oscilante no caso quadrupolar ($m = 2$). As curvas preta, verde e azul correspondem a $p = 0$ ($N = 2$), $p = 1$ ($N = 6$), $p = 2$ ($N = 10$), respectivamente, onde $N = (2p + 1)m$.

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \hat{e}_r - \frac{1}{\sqrt{1+h^2x^2}} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \hat{e}_2 + \frac{\beta}{\sqrt{1+h^2x^2}} \hat{e}_3 \right) \exp[im(\theta + kz - \omega t)] \quad (2.43)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \hat{e}_r - \frac{1}{\sqrt{1+h^2x^2}} \frac{\partial \beta}{\partial x} \hat{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{1+h^2x^2}} \left[\Delta \otimes \alpha + \frac{2h\beta}{1+h^2x^2} \right] \hat{e}_3 \right) \exp[im(\theta + kz - \omega t)] \quad (2.44)$$

onde

$$\Delta \otimes \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - m^2 \frac{1+h^2x^2}{x^2}$$

a solução para a região de vácuo intermediária (entre o plasma e as bobinas, i.e., $a < x < l$) é $\beta = 0$ e $\Delta \otimes \alpha = 0$ tal que [19]

$$\alpha(x) = d_1 m h x I'_m(mhx) + d_2 m h x K'_m(mhx) \quad (2.45)$$

Note que o primeiro termo da equação (2.45) é sempre um modo crescente e o segundo é sempre um modo decrescente¹¹. Por esta razão, o primeiro termo é exclusivamente devido à corrente nas bobinas e o segundo é exclusivamente devido às correntes no plasma. Substituindo (2.45) em (2.43) para o modo crescente, temos (para $\beta = 0$):

$$\mathbf{B} = \left\{ i d_1 m^2 h I'_m(mhx) \hat{e}_r - d_1 m^2 \frac{\sqrt{1+h^2x^2}}{x} I_m(mhx) \hat{e}_2 \right\} \exp[im(\theta + kz - \omega t)] \quad (2.46)$$

A expressão de Morozov e Solov'ev diz respeito ao potencial magnético escalar de um conjunto de $2m$ bobinas helicoidais com sentidos alternados de propagação das correntes (campo m-polar). Em nossa análise, estamos interessados em uma configuração que consista

¹¹A expressão modo crescente (*growing mode*) significa que todas as componente do campo magnético de vácuo (a primeira e a segunda, já que a terceira é sempre zero em regiões sem correntes) aumentam à medida que x aumenta. A mesma explicação vale para o modo decrescente (*decaying mode*): a amplitude do campo diminui se x diminui.

em dois conjuntos (cada um com $2m$ bobinas) defasadas de um quarto de ciclo no tempo. Note que cada bobina é posicionada com separação azimutal de um ângulo $\phi = \pi/2m$ com respeito à bobina adjacente do outro conjunto. Então, tendo em mente as equações (5.58) e (5.59) de [20], a expressão para o potencial escalar magnético é uma soma de duas contribuições:¹²

$$\Phi_i = \frac{2\mu_0 I k m l}{\pi} K'_m(mkl) I_m(mkr) \{ \sin[m(\theta + kz)] \sin[m\omega t] + \sin[m(\theta + kz + \pi/2m)] \cos[m\omega t] \} \quad (2.47)$$

onde, novamente, usamos a hipótese de que o raio das bobinas l é ao menos 3 ou 4 vezes maior que o raio do plasma a tal que apenas o primeiro termo da expansão é retido. A equação (2.47) pode ser escrita de forma mais simples:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \frac{2\mu_0 I k m l}{\pi} K'_m(mkl) I_m(mkr) \cos[m(\theta + kz - \omega t)] = \\ &= \frac{2\mu_0 I k m l}{\pi} K'_m(mkl) I_m(mkr) \operatorname{Re} \{ \exp[im(\theta + kz - \omega t)] \} \end{aligned}$$

Como $\mathbf{B} = -\nabla\Phi_i$ para ambas as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, x_2, t) &= \frac{2(\mu_0 I/a) h m^2 l/a}{\pi} K'_m(mhl/a) \left\{ I'_m(mhx) h \hat{e}_r + \right. \\ &\quad \left. + i I_m(mhx) \frac{\sqrt{1+h^2 x^2}}{x} \hat{e}_2 \right\} \exp[im(x_2 - \omega t)] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Casando as expressões (2.46) e (2.48):

$$d_1 = \frac{-2i}{\pi} (l/a) \left(\frac{\mu_0 I}{a} \right) h K'_m(mhl/a) \quad (2.49)$$

A obtenção desse coeficiente nos permite estabelecer consistentemente duas das condições de contorno na borda do plasma, como será mostrado a seguir na seção “Condições de contorno”.

¹²A dependência temporal é escolhida de forma a se manter consistência com a notação já utilizada. Em outras palavras, seria possível escolher $\exp(im\omega t)$ ou $\exp(-im\omega t)$. Estamos escolhendo a segunda opção.

Capítulo 3

Resolução numérica

3.1 Normalização

Para simplificação, é conveniente introduzir variáveis adimensionais. O campo magnético será normalizado com B_ω , uma amplitude do campo característica na ausência de plasma (função direta da amplitude da corrente nas bobinas), o potencial vetor com aB_ω e a densidade de corrente com $B_\omega/a\mu_0$. Consequentemente, as funções escalares normalizadas serão

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{B_\omega}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{aB_\omega}$$

Além disso, são introduzidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\gamma \equiv \frac{\Omega_{ce}}{\nu_{ei}} = \frac{B_\omega}{en\eta}; \quad (3.1)$$

$$\lambda \equiv \frac{a}{\delta} = a\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\eta}}; \quad (3.2)$$

O parâmetro λ é a razão entre o raio do plasma a e o comprimento clássico de penetração (*skin depth* δ) e γ representa a capacidade de penetração do campo externo, sendo definido como a razão entre a frequência ciclotrônica dos elétrons $\Omega_{ce} = eB_\omega/m_e$, calculado com respeito à amplitude do campo oscilante externo, e a frequência de colisões elétron-íon ν_{ei} .

Pode-se perceber, da Lei de Ohm generalizada, que quanto maior o valor de γ , mais o termo de Hall $\left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en}\right)$ irá se sobressair em relação ao termo resistivo ($\eta\mathbf{J}$). A seguir, todas as quantidades normalizadas aparecerão acompanhados de um til.

Para se ter uma ideia de parâmetros experimentais reais, supondo resistividade clássica, os valores típicos de γ e λ para a máquina Madison Symmetric Torus, girariam em torno de 10^4 e 10^3 , respectivamente, considerando $\omega = 4 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ [10]. Porém, dado o incremento na resistividade devido à turbulência, a resistividade anômala, que pode ser muito maior que a clássica, teria o efeito de reduzir os parâmetros γ e λ , dado que ambos dependem inversamente da resistividade. Contudo, não é possível prever o quão anômala será a resistividade num plasma sustentado por campos helicoidais viajantes [10]. Neste trabalho, devido a dificuldades numéricas, não trabalhamos com valores muito altos dos dois parâmetros recém definidos. Este tipo de problema, relacionado a instabilidades numéricas, é muito comum em simulações em RMFs e esquemas de dupla hélice.

3.2 Equações a serem resolvidas

Para trabalharmos apenas com equações diferenciais de primeira ordem, definimos:

$$(i) \quad \tilde{c}(x) \equiv \frac{\partial \tilde{\beta}_R(x)}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$(ii) \quad \tilde{d}(x) \equiv \frac{\partial \tilde{\beta}_I(x)}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$(iii) \quad \tilde{u}(x) \equiv \frac{\partial \tilde{\alpha}_R(x)}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$(iv) \quad \tilde{v}(x) \equiv \frac{\partial \tilde{\alpha}_I(x)}{\partial x} \quad (3.6)$$

As outras equações (normalizadas e decompostas em partes real e imaginária) que efetivamente entram na resolução numérica do sistema, juntamente com as quatro de cima, são:

(v) **Componente dois da parte estacionária (ordem zero) da lei de Ampère**

$$\frac{\partial \tilde{B}_{02}}{\partial x} = -\frac{m\gamma}{2} \frac{1}{x} \left(\tilde{\beta}_I \tilde{u} - \tilde{\beta}_R \tilde{v} + \tilde{\alpha}_R \tilde{d} - \tilde{\alpha}_I \tilde{c} \right) - \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{B}_{02} + \frac{2h}{1 + h^2 x^2} \tilde{B}_{03} \quad (3.7)$$

(vi) **Componente três da parte estacionária (ordem zero) da lei de Ampère**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{03}}{\partial x} = & -\frac{m\gamma}{2} \frac{1}{x} \left\{ \tilde{\alpha}_R \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{v} - m^2 \frac{1 + h^2 x^2}{x^2} \tilde{\alpha}_I \right) \right. \\ & \left. - \tilde{\alpha}_I \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{u} - m^2 \frac{1 + h^2 x^2}{x^2} \tilde{\alpha}_R \right) + \frac{2h}{1 + h^2 x^2} (\tilde{\beta}_I \tilde{\alpha}_R - \tilde{\beta}_R \tilde{\alpha}_I) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(vii) **Parte real da componente três oscilante (ordem m) da lei de Ohm**

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{u} - m^2 \frac{1 + h^2 x^2}{x^2} \tilde{\alpha}_R + \frac{2h\tilde{\beta}_R}{1 + h^2 x^2} = 2m\lambda^2 \tilde{\alpha}_I + \frac{-m\gamma}{x} \left[\tilde{\beta}_I \tilde{B}_{02} + \tilde{\alpha}_I \frac{\partial \tilde{B}_{03}}{\partial x} \right] \quad (3.9)$$

(viii) **Parte imaginária da componente três oscilante (ordem m) da lei de Ohm**

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{v} - m^2 \frac{1 + h^2 x^2}{x^2} \tilde{\alpha}_I + \frac{2h\tilde{\beta}_I}{1 + h^2 x^2} = -2m\lambda^2 \tilde{\alpha}_R + \frac{m\gamma}{x} \left[\tilde{\beta}_R \tilde{B}_{02} + \tilde{\alpha}_R \frac{\partial \tilde{B}_{03}}{\partial x} \right] \quad (3.10)$$

(ix) **Parte real da componente três oscilante (ordem m) do rotacional da lei de Ohm**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{c} - m^2 \frac{1 + h^2 x^2}{x^2} \tilde{\beta}_R = & 2m\lambda^2 \tilde{\beta}_I + \frac{4m\lambda^2 h}{1 + h^2 x^2} \tilde{\alpha}_I + \\ \frac{m\gamma}{x} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{1 - h^2 x^2}{1 + h^2 x^2} \frac{1}{x} \tilde{v} - m^2 \frac{1 + h^2 x^2}{x^2} \tilde{\alpha}_I + \frac{2h\tilde{\beta}_I}{1 + h^2 x^2} \right) \tilde{B}_{02} - & \frac{2m\gamma h^2}{1 + h^2 x^2} \tilde{\beta}_I \tilde{B}_{03} \\ + \frac{m^2 \gamma^2}{2} \frac{\tilde{\alpha}_I}{x^2} \left(\tilde{\beta}_I \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{\beta}_R \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{\alpha}_R \frac{\partial \tilde{d}}{\partial x} - \tilde{\alpha}_I \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} - 2\tilde{c}\tilde{v} + 2\tilde{d}\tilde{u} \right) & \\ - \frac{m^2 \gamma^2}{2} \frac{\tilde{\alpha}_I (1 + 3h^2 x^2)}{x^3 (1 + h^2 x^2)} \left(\tilde{\beta}_I \tilde{u} - \tilde{\beta}_R \tilde{v} + \tilde{\alpha}_R \tilde{d} - \tilde{\alpha}_I \tilde{c} \right) & \end{aligned} \quad (3.11)$$

(x) Parte imaginária da componente três oscilante (ordem m) do rotacional da lei de Ohm

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{d}}{\partial x} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{1}{x} \tilde{d} - m^2 \frac{1+h^2x^2}{x^2} \tilde{\beta}_I = -2m\lambda^2 \tilde{\beta}_R - \frac{4m\lambda^2 h}{1+h^2x^2} \tilde{\alpha}_R \\
& -\frac{m\gamma}{x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1-h^2x^2}{1+h^2x^2} \frac{1}{x} \tilde{u} - m^2 \frac{1+h^2x^2}{x^2} \tilde{\alpha}_R + \frac{2h\tilde{\beta}_R}{1+h^2x^2} \right) \tilde{B}_{02} + \frac{2m\gamma h^2}{1+h^2x^2} \tilde{\beta}_R \tilde{B}_{03} \\
& -\frac{m^2\gamma^2}{2} \frac{\tilde{\alpha}_R}{x^2} \left(\tilde{\beta}_I \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{\beta}_R \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{\alpha}_R \frac{\partial \tilde{d}}{\partial x} - \tilde{\alpha}_I \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} - 2\tilde{c}\tilde{v} + 2\tilde{d}\tilde{u} \right) \\
& + \frac{m^2\gamma^2}{2} \frac{\tilde{\alpha}_R}{x^3} \frac{(1+3h^2x^2)}{(1+h^2x^2)} \left(\tilde{\beta}_I \tilde{u} - \tilde{\beta}_R \tilde{v} + \tilde{\alpha}_R \tilde{d} - \tilde{\alpha}_I \tilde{c} \right) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

3.3 Condições de contorno

As dez condições de contorno, com suas respectivas justificativas físicas, são:

(i) Para que o campo B_{0z} de dentro do plasma coincida em $r = a$ com o campo B_{0z} de fora (continuidade de \mathbf{B}), é necessário que

$$\tilde{B}_{03}(1) + h\tilde{B}_{02}(1) = (1+h^2)\tilde{B}_z^0, \text{ onde } \tilde{B}_z^0 \text{ é o campo toroidal estacionário externo aplicado.}$$

(ii) Quando $x \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{B}_{02} \rightarrow \tilde{B}_{0\theta}$. Pelas Regras de Regularidade mostradas no Apêndice, $\tilde{B}_{02}(0) = 0$. Outra forma de pensar é que em $x = 0$ a direção azimutal não é bem definida.

$\tilde{\alpha}(0) = 0$ para que \tilde{B}_{11} não divirja na origem. Então

$$\text{(iii)} \tilde{\alpha}_R(0) = 0 \text{ e}$$

$$\text{(iv)} \tilde{\alpha}_I(0) = 0.$$

$\tilde{\beta}(0) = 0$ para que \tilde{J}_{m1} não divirja na origem. Ou seja,

$$\text{(v)} \tilde{\beta}_R(0) = 0 \text{ e}$$

$$\text{(vi)} \tilde{\beta}_I(0) = 0.$$

Entre o plasma e as paredes da câmara externa, temos a seguinte solução (na região de vácuo): $\tilde{\alpha}_{ext}(x) = d_1 m h x I'_m(m h x) + d_2 m h x K'_m(m h x)$.

Usando as relações $I'_\nu(z) = I_{\nu\pm 1}(z) \pm \frac{z}{\nu} I_\nu(z)$ e $K'_\nu(z) = -K_{\nu\pm 1}(z) \pm \frac{z}{\nu} K_\nu(z)$ para as derivadas das funções de Bessel hiperbólicas, pode-se calcular a derivada de $\tilde{\alpha}_{ext}$ com respeito

a x em $x = 1$:

$$\left(\frac{d\tilde{\alpha}_{ext}}{dx}\right)_{x=1} = m(1+h^2)(d_1 I_m(mh) + d_2 K_m(mh)) \quad (3.13)$$

Multiplicando os dois lados do wronskiano $K'_m(mh)I_m(mh) - K_m(mh)I'_m(mh) = -1/mh$ da página 375 de [21] por $d_1(1+h^2)$ e depois somando e subtraindo $d_2 K'_1(h)K_1(h)$ do lado esquerdo, obtém-se

$$K'_1(h)(1+h^2)(d_1 I_1(h) + d_2 K_1(h)) - \frac{(1+h^2)}{h} K_1(h)(d_1 h I'_1(h) + d_2 h K'_1(h)) = -d_1 \frac{(1+h^2)}{h^2} \quad (3.14)$$

Tal artifício elimina a constante d_2 das equações, o que é muito representativo na análise, pois o campo das bobinas é responsável apenas pela componente associada a d_1 (equação (2.49)), o que nos permite calcular a eficiência do método em termos do campo magnético externo (e portanto da corrente que passa pelas bobinas) que o plasma tem à sua disposição.

Identificando os termos do lado esquerdo, tem-se:

$$K'_m(mh) \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{x=1} - m \frac{(1+h^2)}{h} K_m(mh) \alpha(1) = -2i \frac{(1+h^2)}{h^{m+1}} \quad (3.15)$$

No caso dipolar (onde $m = 1$), a condição acima retoma a condição deduzida por Bertram, que não é calculada como função da corrente nas bobinas, mas sim impondo que a componente radial oscilante do campo magnético tenha amplitude igual à unidade no centro da coluna de plasma ($x = 0$).

$$\text{vii) } K'_m(mh) \left(\frac{d\tilde{\alpha}_R}{dx}\right)_{x=1} - m \frac{(1+h^2)}{h} K_m(mh) \tilde{\alpha}_R(1) = 0 \text{ e}$$

$$\text{viii) } K'_m(mh) \left(\frac{d\tilde{\alpha}_I}{dx}\right)_{x=1} - m \frac{(1+h^2)}{h} K_m(mh) \tilde{\alpha}_I(1) = -2i \frac{(1+h^2)}{h^{m+1}}$$

Note que no limite $h \rightarrow 0$ (caso RMF) não há problemas devido a divergências pois ambos os lados das equações acima têm dependência em h com a mesma potência. Para visualizar tal propriedade basta ter em mente o seguinte limite assintótico, válido para pequenos argumentos:

$$K_m(mh) \simeq \frac{\Gamma(m)}{2} \left(\frac{mh}{2} \right)^{-m} \quad (3.16)$$

onde $m \in \mathbb{N}^*$. Com tal restrição sobre o valor de m , pode-se escrever $\Gamma(m) = (m-1)!$.

Além disso, pra que não exista corrente de ordem um na direção \hat{e}_1 na borda do plasma:

$$\tilde{\beta}(1) = 0$$

$$\mathbf{ix}) \tilde{\beta}_R(1) = 0 \text{ e}$$

$$\mathbf{x}) \tilde{\beta}_I(1) = 0.$$

3.4 Métodos numéricos

Um programa foi desenvolvido usando o *software Mathematica* para resolver o sistema de 10 equações diferenciais não-lineares acopladas de primeira ordem que modelam o problema (3.3) a (3.12), separadas em partes reais e imaginárias, para os casos $m = 1$ e $m = 2$. Pelo fato de as equações terem termos que divergem na origem, a integração numérica deve começar em uma distância radial não-nula em relação à origem, $x = \epsilon$, sendo ϵ um parâmetro muito pequeno, que não compromete a precisão da resolução numérica do sistema de equações. O primeiro termo da expansão em torno da origem das funções α e β é x^m . Em função disso, escolheu-se convenientemente $\epsilon = 10^{-3}$ para $m = 1$ e $\epsilon = 10^{-2}$ para $m = 2$. Pelo fato de se poder começar a integração com um ϵ maior, a convergência do caso $m = 2$ é, em geral, mais rápida que com $m = 1$. A resolução numérica é feita várias vezes, variando os valores de $\tilde{\alpha}_I$, $\tilde{\alpha}_R$, $\tilde{\beta}_I$, $\tilde{\beta}_R$ e \tilde{B}_{03} no centro da coluna a fim de se gerar listas com esses parâmetros juntamente com as condições de contorno na borda do plasma, que serão zero se os parâmetros forem devidamente escolhidos (*Shooting method*). A partir disso interpolam-se as listas e usa-se a rotina *FindRoot* para selecionar, para cada combinação de γ , λ e h , conjuntos de condições iniciais que satisfazem todas as condições de contorno na borda. Partindo de um ponto previamente conhecido é possível usar a rotina *Do*¹ para variar lentamente um dos

¹Esta rotina realiza automaticamente iterações para o refino das funções interpoladas. O resultado da iteração anterior é usado para alimentar a seguinte e com isso, ir buscando, com cada vez mais precisão, a solução numérica dentro do espaço 5-dimensional de parâmetros.

parâmetros, e com isso ir obtendo soluções para um alcance razoável dos parâmetros de entrada.

Capítulo 4

Resultados, análise e discussões

Antes de apresentar os resultados, são definidos os parâmetros adimensionais de sincronismo e eficiência, através dos quais os resultados são apresentados e interpretados:

4.1 Sincronismo

Quando se trabalha com campos helicoidais, define-se os parâmetros de *sincronismo* longitudinal (toroidal) e azimutal (poloidal) como a razão entre a corrente gerada e a corrente máxima possível (obtida quando todos os elétrons do plasma se movem em fase com o campo de RMF, i.e., no caso de penetração total):¹

$$\zeta_z \equiv \frac{I_z}{I_{z,max}} \quad (4.1)$$

$$\zeta_\theta \equiv \frac{I_\theta}{I_{\theta,max}} \quad (4.2)$$

onde $I_{z,max}$ e $I_{\theta,max}$ são as correntes máximas possíveis nas direções toroidal e poloidal, respectivamente, obtidas integrando as densidades de corrente no caso de penetração total dos campos, i.e., $\gamma \rightarrow \infty$, com respeito às áreas superficiais pelas quais fluem [8, 9]:

¹Diferentemente do modelo de dupla hélice que tratamos nessa dissertação, em modelos que envolvem geração de corrente por RMF no contexto dos FRCs, se usa esta mesma definição para a eficiência e não para o sincronismo. Neste trabalho, a definição de eficiência será dada em seguida.

$$I_{z,max} = - \int_0^a 2\pi r \frac{en\omega ha}{2+h^2} dr = -\pi en\omega a^3 \frac{h}{2+h^2}, \quad (4.3)$$

$$I_{\theta,max} = - \int_0^a 2r \frac{en\omega}{2+h^2} dr = -\frac{en\omega a^2}{2+h^2}, \quad (4.4)$$

onde $I_{\theta,max}$ é calculado por unidade de comprimento na direção z . Na dedução das correntes máximas, usa-se um resultado bem estabelecido da teoria MHD ideal: no caso de resistividade nula, os elétrons do plasma estão grudados nas linhas de campo magnético [22]. Neste trabalho consideramos os efeitos da resistividade, porém no caso especial de penetração total, a condição $\gamma \rightarrow \infty$ é equivalente à condição $\eta \rightarrow 0$, ou seja, o limite MHD ideal. Além disso, na situação extrema na qual os elétrons estão em fase com o campo rotante, considera-se o estado estacionário de rotação rígida dos mesmos. A dedução das expressões para as correntes máximas estão no Apêndice.

O sincronismo mede o quão próximos da fase estão o campo aplicado e os elétrons. Utilizando a Lei de Ampère para eliminar as correntes em favor do campo e adimensionalizando, obtém-se:

$$\zeta_z = -\frac{\gamma \tilde{B}_{0\theta}(1)(2+h^2)}{h\lambda^2} \quad (4.5)$$

$$\zeta_\theta = \frac{\gamma(\tilde{B}_{0z}(1) - \tilde{B}_{0z}(0))(2+h^2)}{2\lambda^2} \quad (4.6)$$

4.2 Eficiência

O custo energético do método para garantir a potência necessária para geração de corrente cresce com B_ω^2 . Portanto, talvez não seja vantajoso aumentar B_ω indefinidamente até próximo da situação de máximo sincronismo. Neste ponto é conveniente definir a *eficiência* como a razão entre os campos produzidos e o módulo do campo magnético no centro da coluna, na ausência de plasma:

$$\epsilon_z = \tilde{B}_{0\theta}(1) \quad (4.7)$$

$$\epsilon_\theta = \tilde{B}_{0z}(1) - \tilde{B}_{0z}(0). \quad (4.8)$$

Os campos que aparecem nas equações (4.7) e (4.8) são obtidos através da Lei de Ampère-Maxwell sem o termo de corrente de deslocamento e lembrando que $B_{0r} = 0$ para que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

4.3 Análise da potência depositada

O fluxo de energia por unidade de tempo, definido como vetor de Poynting, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, pode ser usado na análise da potência $P = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ depositada no plasma pelos campos devidos às bobinas externas. Portanto, a potência média injetada pode ser escrita como

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} dt' \quad (4.9)$$

O fluxo de energia penetra no plasma somente pela direção \hat{r} , uma vez que $d\mathbf{a}$ só tem direção radial e é orientada para fora. A superfície é o lugar geométrico que satisfaz $x = 1$. Os campos externos só possuem harmônico de ordem m , já que são produzidos por corrente alternada com dependência no mesmo harmônico apenas. Com isso a potência média é

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int [E_{m3}B_{m2} - E_{m2}B_{m3}]_{x=1} \frac{2\pi a dz dt'}{\mu_0 (1 + h^2 x^2)_{x=1}} \quad (4.10)$$

Como $B_{m3}(x = 1) = 0$ devido à condição de contorno $\beta(x = 1) = 0$, $E_{m3} = im\omega\alpha$ e $B_{m2} = -\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, a potência média por unidade de comprimento z é

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [E_{m3}B_{m2}]_{x=1} \frac{2\pi a dt'}{1 + h^2} \quad (4.11)$$

Usando a Regra da Média mostrada anteriormente e substituindo os valores de E_{m3} e B_{m2} :

$$\langle P \rangle = \frac{\pi\omega a B_\omega^2}{\mu_0(1+h^2)} [Im(\alpha^* \alpha')]_{x=1} \quad (4.12)$$

4.4 Resultados

Mostramos a seguir perfis das funções escalares complexas $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ (em termos das quais o campo oscilante é expresso), além das componentes do campo \tilde{B}_{02} , \tilde{B}_{03} , \tilde{B}_{0z} e $\tilde{B}_{0\theta}$. Todas as quantidades físicas que aparecem com o til estão normalizadas, conforme explicado na seção 3.1.

4.4.1 Simetria dipolar

As figuras (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) ilustram os perfis de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{B}_{02} , \tilde{B}_{03} , \tilde{B}_{0z} e $\tilde{B}_{0\theta}$ para um caso especial, no qual $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$. Este caso está sendo usado como ponto inicial para depois variar o valor de γ para se obter as curvas do sincronismo ζ e da eficiência ϵ . Dos gráficos (4.1) e (4.2) não é possível extrair informação física considerável, já que são apenas funções escalares auxiliares, que servem para se simplificar o tratamento. No entanto, elas são mostradas para que se possa verificar que as condições de contorno impostas sobre elas estão sendo satisfeitas com considerável precisão. Os gráficos (4.3) e (4.4) mostram as componentes estacionárias do campo magnético. Pode-se apreciar da figura (4.4) que a componente longitudinal do campo não apresenta uma inversão de sinal, não sendo portanto um padrão que possa ser aplicado aos RFPs.

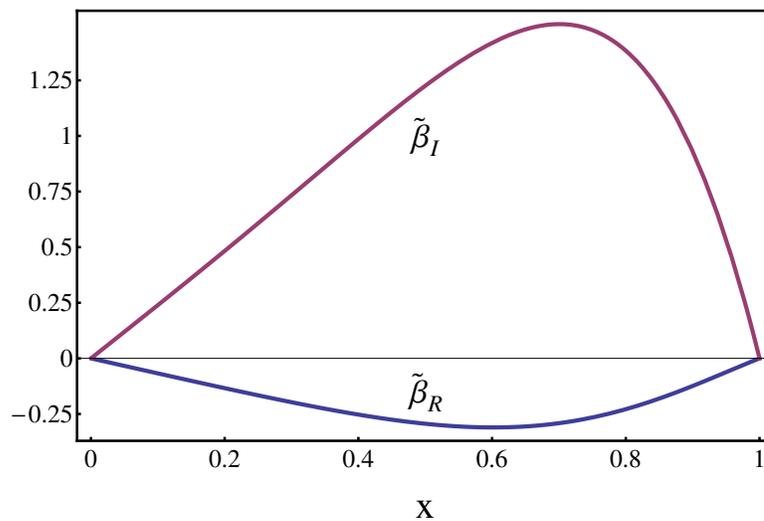


Figura 4.1: Gráfico das partes real e imaginária de $\tilde{\beta}$ como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$.

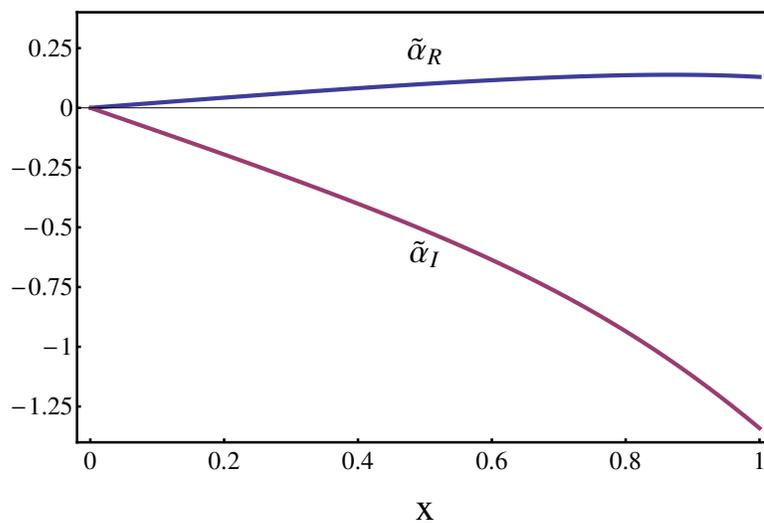


Figura 4.2: Gráfico das partes real e imaginária de $\tilde{\alpha}$ como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$.

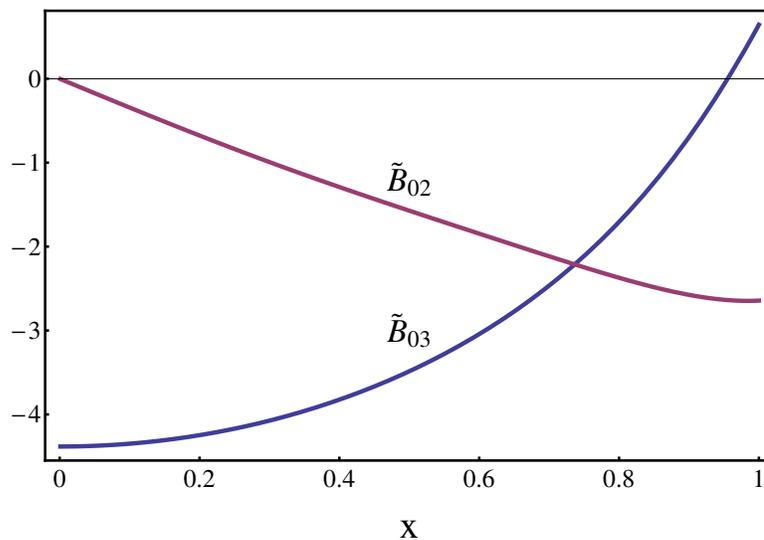


Figura 4.3: Gráfico das componentes 2 e 3 do campo magnético de ordem zero como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$.

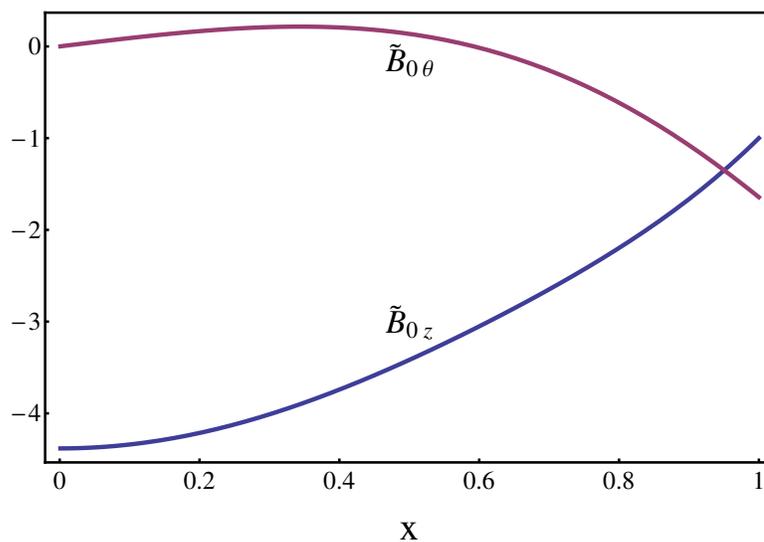


Figura 4.4: Gráfico das componentes θ e z do campo magnético de ordem zero como função de x , para $\tilde{B}_z^0 = -1.0$, $\gamma = 13$, $h = 1$ e $\lambda = 10$.

Comparação de resultados da literatura

Para efeito de comparação, foram obtidos resultados com parâmetros idênticos aos reportados na literatura (gráficos (4.5) a (4.10)). O trabalho de Farengo e Clemente, sobre a geração

de corrente aplicado aos RFP [10], usa uma programação numérica (usando um código elaborado na linguagem Fortran) bem diferente da usada na presente dissertação. No artigo, os autores empregam um código que deixa as funções α e β com dependências arbitrárias nas variáveis x_2 e t , i.e., em princípio tais funções são um combinação de infinitos harmônicos. Isso requer criar uma malha de integração bem mais complexa (bidimensional) e fazer as equações evoluírem temporalmente. Nesse caso, não se tem expressões analíticas para as componentes estacionárias da densidade de corrente J_{02} e J_{03} , como nesta dissertação. Com isso, tais quantidades não-oscilantes são obtidas calculando numericamente a média dos acoplamentos das quantidades oscilantes correspondentes sobre a variável x_2 . Nesta dissertação, a dependência exponencial $\exp[im(\theta + kz - \omega t)]$ é assumida desde o início dos cálculos, permitindo a obtenção das expressões (2.25) e (2.27). É interessante mencionar que mesmo com tal hipótese e com a lógica numérica diferentes, os resultados apresentam ótima concordância, mostrando o quão boa é a aproximação de se manter apenas o harmônico mais baixo (dominante), podendo ser $m = 1$ ou $m = 2$, a depender da simetria e da topologia dos campos. Conforme mostrado nos cálculos do campo magnético devido a uma distribuição helicoidal de corrente, tal aproximação é tão eficaz quanto maior for o raio das bobinas em relação ao raio do plasma.

Os resultados numéricos (gráficos (4.5) a (4.8)) reproduzidos da referência [10] para o caso de campos característicos de um RFP, usam os seguintes parâmetros: $B_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$.

Espera-se que para alguma região de parâmetros de entrada, a curva do sincronismo ζ em função de γ seja em forma de “S”, semelhante à figura 1 de [23]. Tal aspecto é devido à natureza não-linear das equações diferenciais que modelam o problema, o que dá origem a mais de uma solução para um dado conjunto de parâmetros e por isso é difícil obter a curva do sincronismo. A parte intermediária da região multivaluada dos gráficos (4.11) e (4.12) é numericamente muito instável, sendo muito difícil fazer com que o programa convirja nessa região. Experimentalmente, em FRCs, tal parte intermediária praticamente não é observada: normalmente ao se variar γ continuamente, o plasma pula abruptamente para uma região estável e nela permanece.

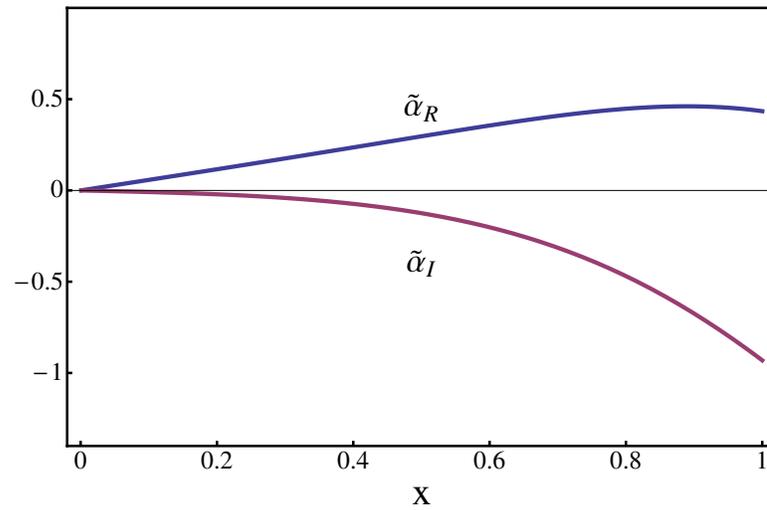


Figura 4.5: Perfil da função complexa α obtido usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$.

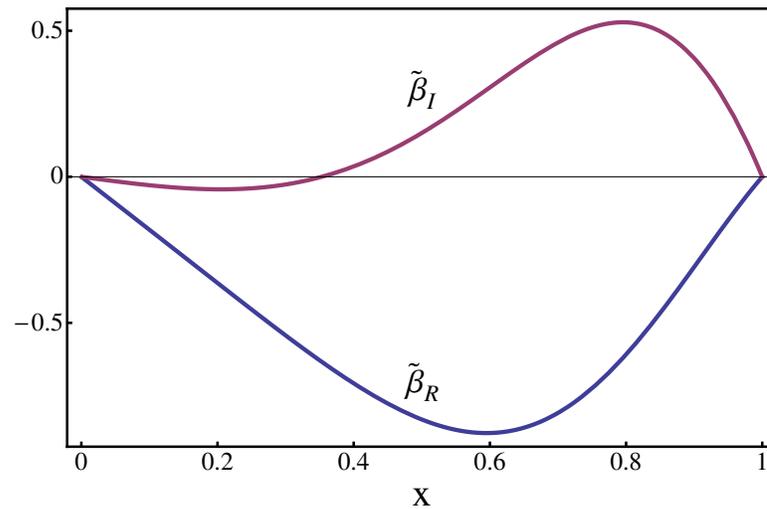


Figura 4.6: Perfil da função complexa β obtido usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$.

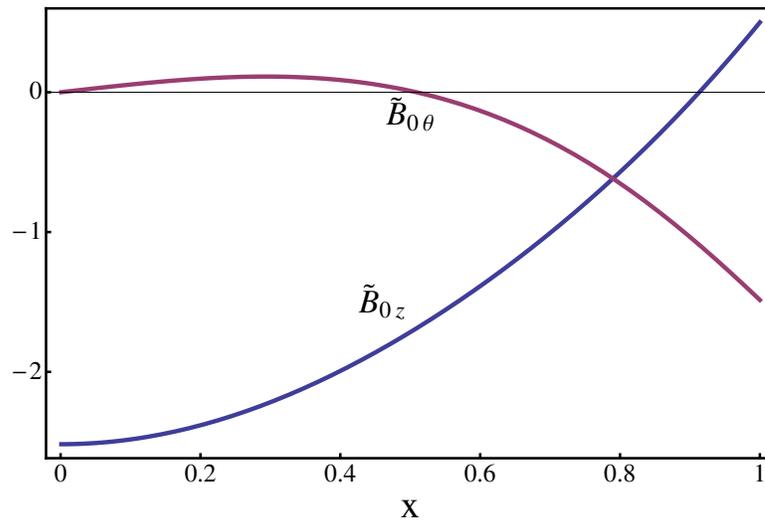


Figura 4.7: Perfil dos campos estacionários toroidal e poloidal obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$.

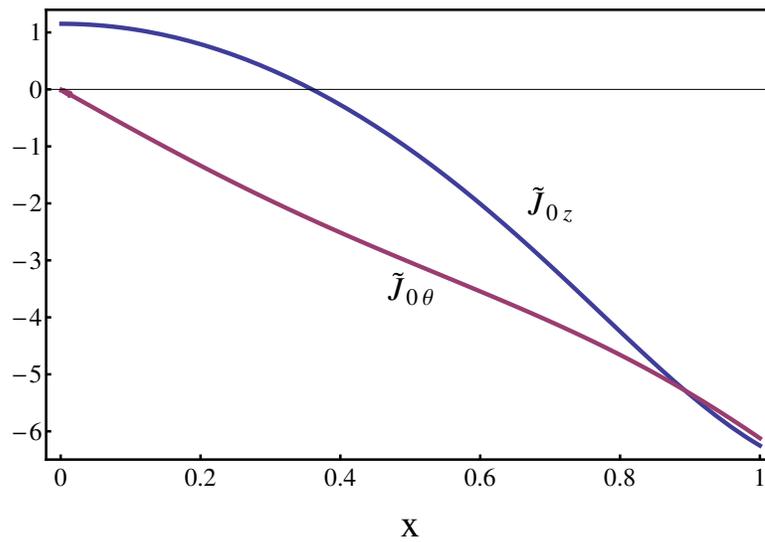


Figura 4.8: Perfil das densidades de corrente estacionárias toroidal e poloidal obtidas usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3.5$.

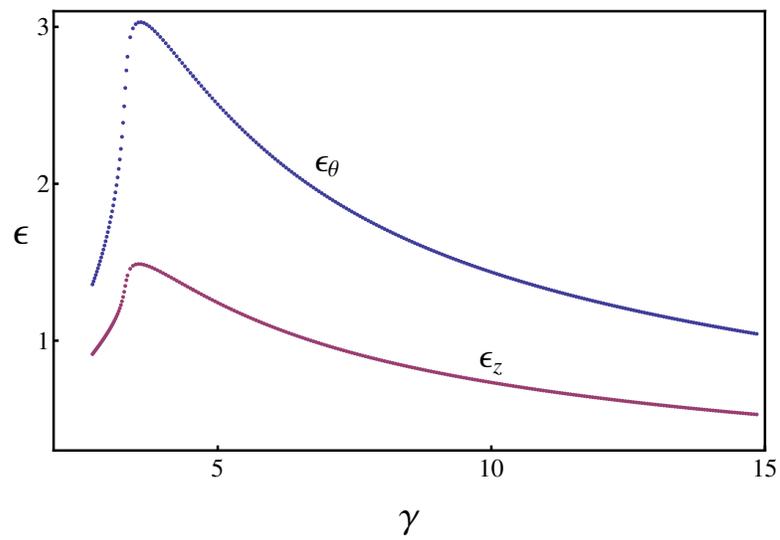


Figura 4.9: Perfis das eficiências em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$.

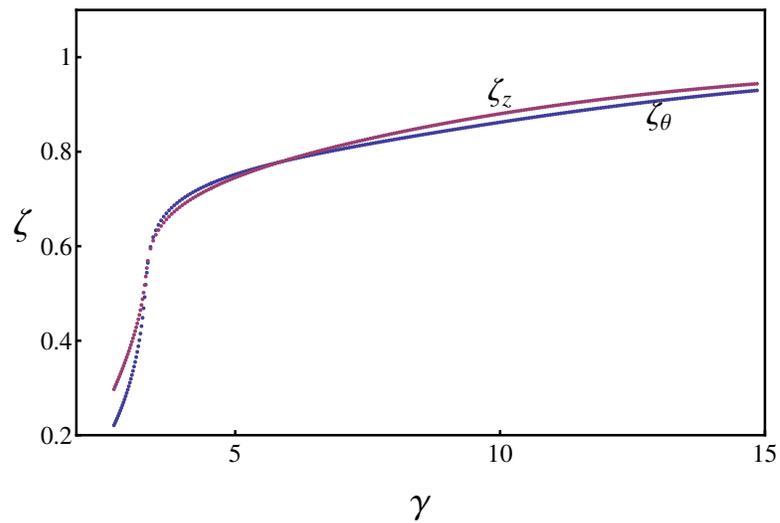


Figura 4.10: Perfis dos sincronismos em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$.

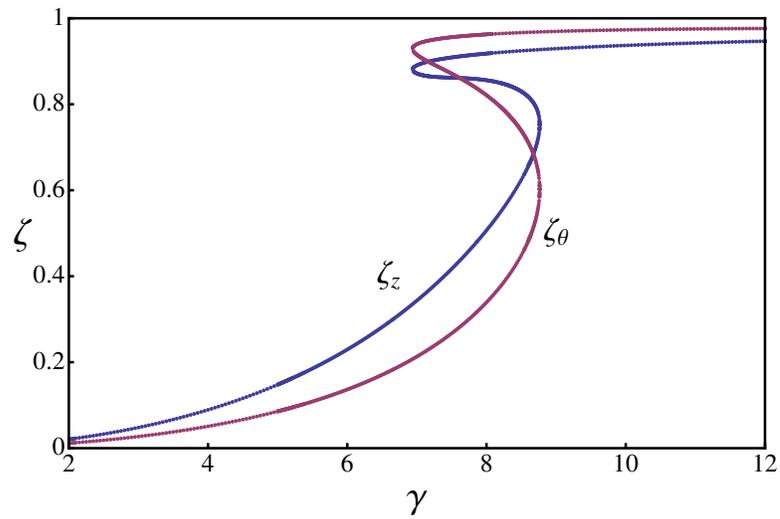


Figura 4.11: Perfil dos sincronismos em função de γ para os seguintes parâmetros: $h = 1$, $\tilde{B}_{int}(0) = 0$, $\lambda = 10$.

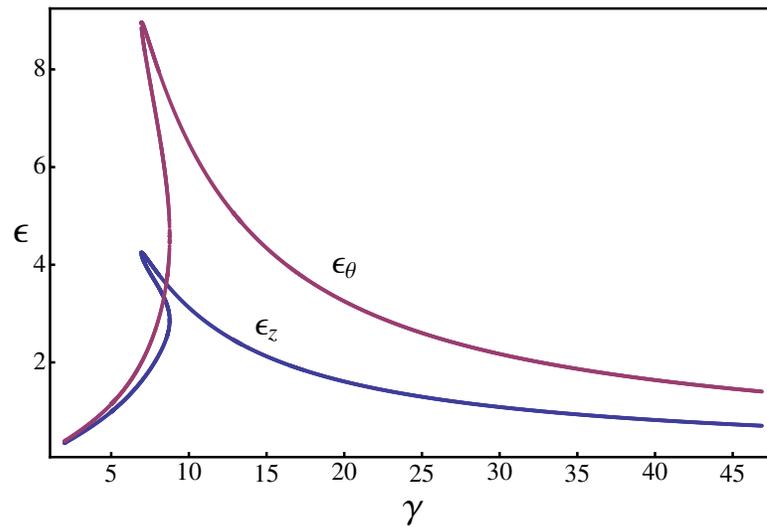


Figura 4.12: Perfil das eficiências em função de γ para os seguintes parâmetros: $h = 1$, $\tilde{B}_{int}(0) = 0$, $\lambda = 10$.

4.4.2 Simetria quadrupolar

Nesta seção, são apresentados resultados inéditos da aplicação do método de dupla hélice a configurações com simetria quadrupolar. São exibidos resultados para um caso de baixa e um de alta penetração dos campos externos (valor de γ pequeno e grande, respectivamente). As figuras (4.13) a (4.16) mostram os perfis das componentes azimutal e longitudinal da densidade de corrente e do campo magnético estacionários nos dois diferentes regimes.

Consideramos desde o início a frequência dobrada no caso quadrupolar em relação ao dipolar, seguindo a literatura [14], para que o campo magnético projetado sobre uma seção transversal do cilindro gire com a mesma frequência angular do caso dipolar e com isso não se modifique as correntes máximas possíveis no caso da penetração total dos campos externos. O fato de se trabalhar com diferentes frequências não atrapalha a comparação em termos da potência dissipada, pois a frequência tem efeito apenas na indutância. Consideramos o indutor associado ao circuito externo que injeta potência no plasma como sendo um indutor ideal, portanto não apresentando resistência ou capacitância, i.e., apenas armazena e libera energia, nunca a dissipa.

A sustentação de corrente utilizando bobinas com simetria quadrupolar exhibe um padrão oco para a densidade de corrente (*hollow profile*), mesmo no caso de alta penetração dos campos externos, conforme pode ser apreciado nas figuras (4.13) e (4.15). Isto se deve ao fato de que o campo magnético externo e J_{0z} se anulam no eixo axial de simetria, o que apresenta uma série de implicações físicas. Uma delas é que os campos oscilantes em geral (dentre os quais se inserem os de radiofrequência) são conhecidos por destruir superfícies de fluxo magnético, gerando sérios problemas para o confinamento do plasma. Se os campos e as correntes se concentram na parte mais externa da coluna, os campos de radiofrequência não perturbam a parte interna do plasma. Além do mais, se a densidade de corrente fosse concentrada na região central (próxima ao eixo de simetria), a coluna estaria muito propensa a desenvolver a instabilidade *kink*, o que poderia provocar uma eventual dobra na estrutura da câmara. A comunidade de RFP tem buscado métodos de controle sobre a geração de corrente para que ela possua tais propriedades apresentadas pelo padrão quadrupolar.

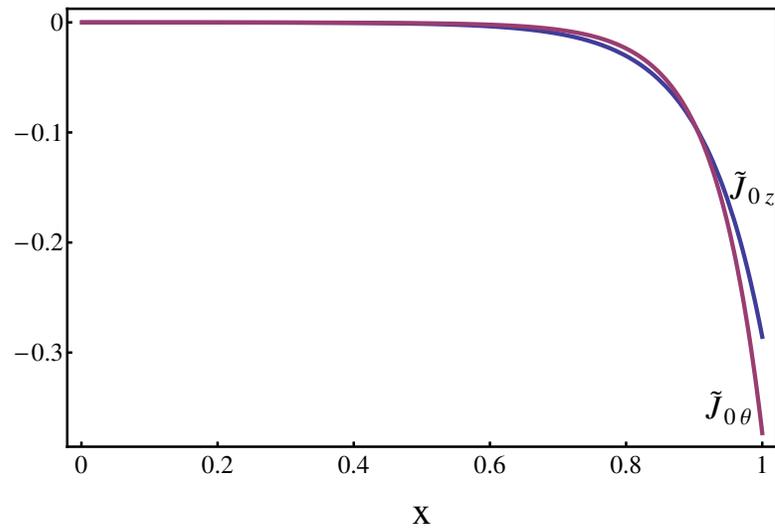


Figura 4.13: Perfis das componentes nas direções azimutal e axial da densidade de corrente estacionária, para os parâmetros: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3$ (caso de baixa penetração dos campos).

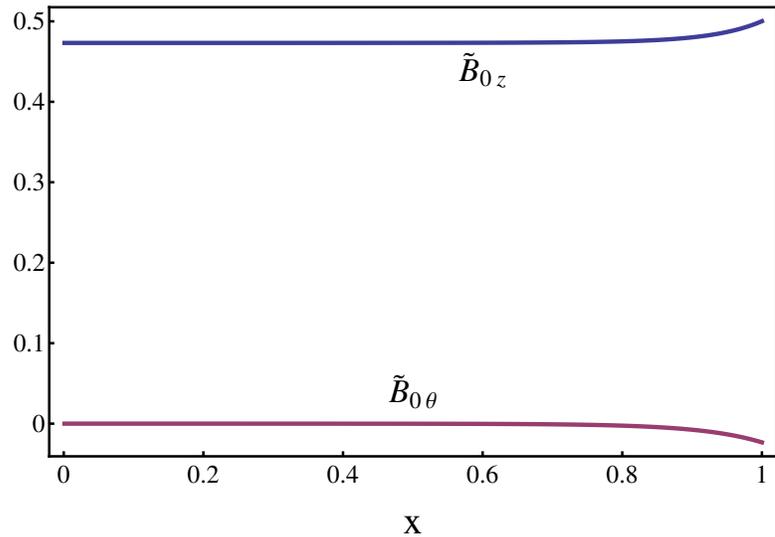


Figura 4.14: Perfis das componentes nas direções azimutal e axial do campo magnético estacionário, para os parâmetros: $B_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 3$ (caso de baixa penetração dos campos).

No caso do quadrupolo, para uma mesma amplitude de corrente percorrendo as bobinas externas, o campo oscilante de vácuo “à disposição” do plasma é menor que no caso do dipolo (como o quadrupolo é composto por mais bobinas simétricas, o campo tende a se

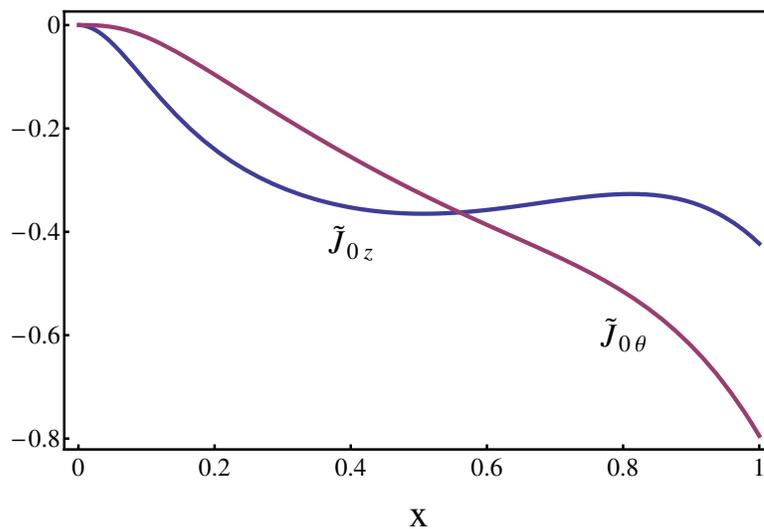


Figura 4.15: Perfis das componentes nas direções azimutal e axial da densidade de corrente estacionária, para os parâmetros: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 40$ (caso de alta penetração dos campos).

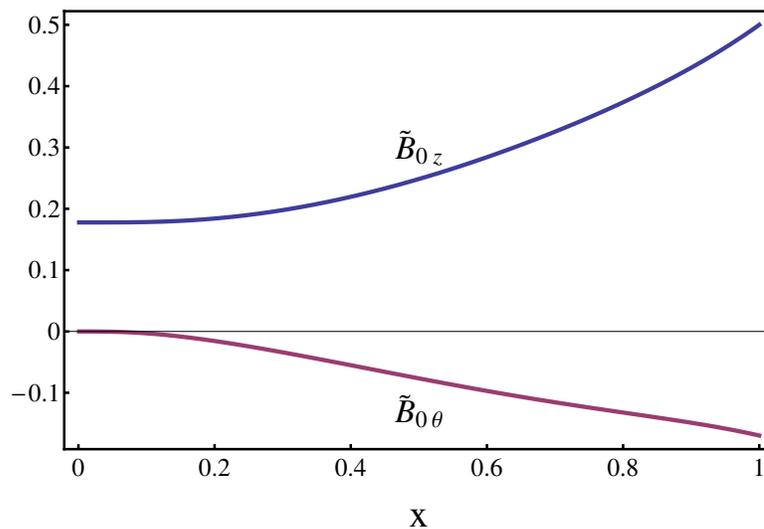


Figura 4.16: Perfis das componentes nas direções azimutal e axial do campo magnético estacionário, para os parâmetros: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$, $\gamma = 40$ (caso de alta penetração dos campos).

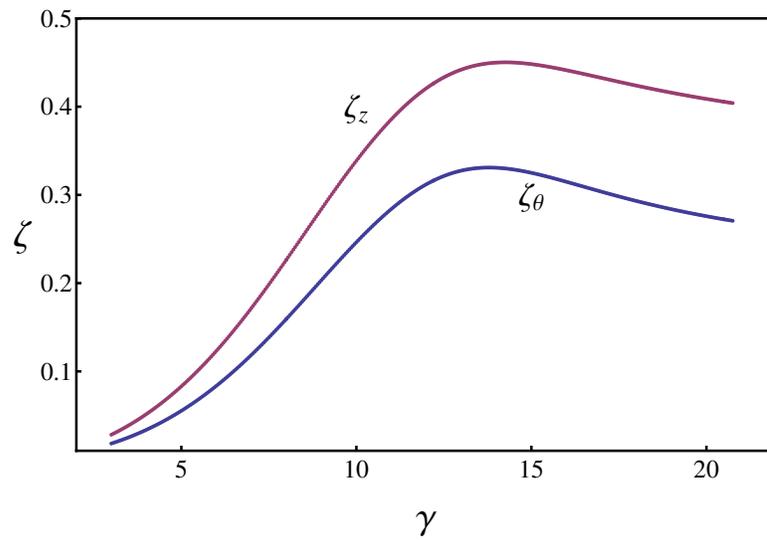


Figura 4.17: Perfis dos sincronismos em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$.

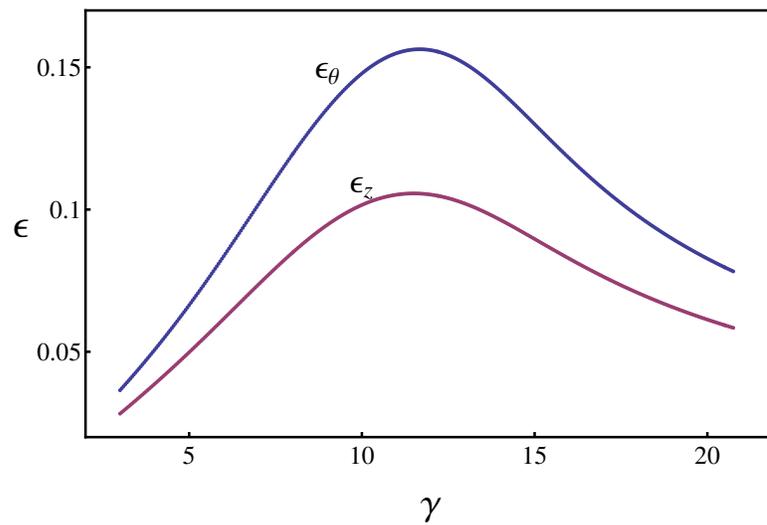


Figura 4.18: Perfis das eficiências em θ e z obtidos usando o mesmo conjunto de parâmetros de [10]: $\tilde{B}_z^0 = 0.5$, $h = 1$, $\lambda = 5$.

cancelar mais, tornando a amplitude do campo líquido no centro da configuração menor que no caso dipolar). Tal propriedade pode ser inferida diretamente do comportamento das funções de Bessel modificadas que descrevem o campo oscilante na ausência de plasma. Isto pode explicar em parte o fato de a eficiência no caso quadrupolar ser menor que no dipolar, porém a análise não pode ficar restrita a isso já que a intensidade da corrente total integrada é produzida por interação não-linear entre o campo magnético e densidade de corrente oscilantes.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

A ideia de se gerar e sustentar corrente em plasmas toroidais usando estruturas condutoras helicoidais envolvendo o toro, nas quais se passa correntes de radiofrequência defasadas, que surgiu na década de 1980, na Universidade de Flinders, na Austrália, se mostrou no início muito promissora pelo fato de se compensar perdas resistivas usando um método não-pulsado de transferência de momento e energia para o plasma. Uma série de experimentos conduzidos por Dutch e McCarthy, embora com dimensões reduzidas, mostraram a viabilidade experimental desse tipo de configuração. A ideia inicial era aplicar o método a grandes reatores, porém desde o trabalho de Bertram e suas conclusões pessimistas [8] em relação à aplicação do método de dupla hélice à um *tokamak* de grande porte, pouco se pesquisou sobre o método. De fato, numericamente se verifica que fortes campos magnéticos toroidais reduzem drasticamente a eficiência na geração de corrente, mesmo que a eficiência não dependa explicitamente do campo toroidal aplicado. Recentemente, os trabalhos de Clemente e Farengo [9, 10] direcionaram a aplicação do método de dupla hélice à configurações do tipo *reversed field pinches* - RFP, nos quais o campo toroidal é bem menor que no *tokamak*. Os campos toroidal e poloidal são da mesma ordem de magnitude no RFP, ao contrário do *tokamak*, no qual o campo toroidal é bem maior - o campo poloidal é gerado como resultado da corrente toroidal dentro da câmara. Padrões de campos semelhantes aos campos típicos de um RFP foram obtidos com valores razoáveis dos parâmetros de entrada, mostrando a verdadeira

possibilidade de se aplicar o método a essa máquina.

Foi utilizada a teoria de Morozov e Solov'ev [20] pela primeira vez na modelagem teórica deste tipo de problema com o intuito de se obter uma expressão analítica para o campo devido a dois pares de m bobinas helicoidais com corrente em sentidos alternados e com um par defasado no tempo por um fator de $\pi/2$. Com isso, foi possível expressar os resultados numéricos em termos da amplitude de corrente nas bobinas e a partir daí, abriu-se caminho para uma comparação consistente entre configurações com diferentes simetrias. Até então, nos resultados apresentados na literatura, normalizava-se o campo com o valor do campo de vácuo na origem, sem qualquer menção às correntes externas, que de fato são o indicativo da potência dissipada pelo circuito externo.

Como forma de verificação do código numérico desenvolvido durante o presente trabalho, foram obtidos resultados utilizando os mesmos parâmetros de entrada de resultados reportados na literatura, que usam lógica numérica bem diferente. O código empregado em [10] usa uma malha bidimensional e evolui numericamente o conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas que modela o problema. O código automatizado desenvolvido neste trabalho já usa como suposição que apenas o primeiro harmônico das quantidades oscilantes é retido, uma vez que foi mostrado ser uma boa aproximação se o plasma não se encontra próximo às bobinas. Verificou-se então que os resultados apresentaram ótima concordância, dentro de uma pequena margem de erro, que era esperada.

Os campos oscilantes apresentam a desvantagem de atrapalhar o confinamento pelo fato de destruírem superfícies de fluxo magnético. Verificou-se que a configuração magnética quadrupolar poderia ser vantajosa nesse sentido pelo fato de exibir um padrão oco para a densidade de corrente (*hollow profile*), vide figuras (4.13) e (4.15), o que em princípio, minimizaria os danos ao estado de equilíbrio, inibindo também o aparecimento da instabilidade *kink*. Se os campos e as correntes se concentram na parte mais externa da coluna, os campos de radiofrequência não perturbam a parte interna do plasma. Tais propriedades da configuração quadrupolar poderia ser mais atrativa à comunidade de RFP, que tem exaustivamente buscado melhores regimes de confinamento.

Uma curva do sincronismo ζ em função de γ exibida apresentou um padrão semelhante

à letra “S” (figura (4.11)), sendo multivaluada na região intermediária. Esse tipo de comportamento pode existir pois o conjunto de equações resolvido é não-linear e não respeita o Teorema de Unicidade. Tal resultado não é fácil de se explicar fisicamente, podendo estar relacionado a um estado de mínima dissipação ou à histerese. A região intermediária é muito sensível e numericamente instável. Para se tomar uma curva desse tipo é necessário se trabalhar a cada iteração com variações muito pequenas dos parâmetros. Nos experimentos em máquinas do tipo FRC conduzidos na Universidade de Washington não se observa o plasma em equilíbrio na região de junção entre as duas ramas estáveis (parte de cima e parte de baixo). Se o plasma se encontra em uma das ramas e tem seu parâmetro γ variado de forma a atingir a região do meio, ele sofre uma transição abrupta para a outra rama estável.

Não estão bem entendidos os comportamentos obtidos para o sincronismo no caso quadrupolar, que segundo as simulações numéricas, apresenta um pico e depois decai à medida que se aumenta o valor do parâmetro γ , ou alternativamente, a corrente nas bobinas. Foram realizadas diversas verificações, porém até agora inconclusivas. Intuitivamente, o valor do sincronismo deveria aumentar com γ , tendo seu valor assintótico em 1. Porém, algum processo não-linear ou de histerese poderia ser o causador de tal comportamento atípico. No entanto, será necessária ainda uma investigação meticulosa para saber se trata-se de um erro numérico ou de um processo ainda não contabilizado. Os padrões de sincronismo no caso dipolar estão em bom acordo com resultados já obtidos na literatura, o que confere alguma credibilidade ao código desenvolvido neste trabalho.

Seguindo a teoria MHD de relaxação do plasma, originalmente proposta por J. B. Taylor em 1974 [24], uma eventual corrente poloidal alta e concentrada próxima à borda do plasma auxiliaria o plasma a inverter o sinal do campo toroidal próximo à parede, reduzindo assim o aparecimento de turbulência. Isto foi realizado experimentalmente no RFP Madison Symmetric Torus, MST, nos EUA, com resultados promissores [25]. O controle sobre o perfil estacionário da corrente fez com que o transporte anômalo devido à turbulência fosse significativamente reduzido e conseqüentemente o confinamento fosse melhorado. A possibilidade de se controlar a corrente poloidal usando o campo quadrupolar viajante se mostra promissor para a função descrita.

Como trabalhos futuros, poderia-se considerar incluir no modelo de dupla hélice, efeitos associados à densidade e temperatura não uniformes. Isto implicaria reter na Lei de Ohm generalizada o termo associado ao gradiente de pressão. Esta generalização foi realizada no estudo de sustentação de corrente por RMF em FRCs [27]. Outra possível generalização do modelo poderia ser a tentativa de se remover a hipótese simplificadora de íons imóveis e empregar no método as ideias contidas em [5] para usar dois conjuntos de hélices com frequências e amplitudes relativas convenientes de tal forma que um deles atuaria no sentido de manter o movimento dos elétrons e o outro, o movimento dos íons. Porém nesse caso, espera-se que o modelo teórico exija uma quantidade muito grande de equações e parâmetros para se descrever o método e com isso, se torne inviável a sua aplicação.

Referências Bibliográficas

- [1] F. F. Chen, *An indispensable truth - How fusion power can save the planet* (Springer), 2011.
- [2] P. C. Thonemann, W. T. Cowhig e P. A. Davenport, *Nature* **169** (1952) 34.
- [3] A. G. Elfimov *et al*, *Braz. J. Phys.* **32** (2002) 34.
- [4] M. J. Dutch, A. L. McCarthy e R. G. Storer, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1563.
- [5] R. A. Clemente, *J. Phys. Soc. Japan* **67** (1998) 3450.
- [6] M. J. Dutch e A. L. McCarthy, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **28** (1986) 695.
- [7] T. Kikunaga, E. Hotta e I. Hayashi, *Jpn. J. Appl. Phys.* **21** (1982) 1657.
- [8] W. K. Bertram, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **30** (1988) 425.
- [9] R. A. Clemente e R. Farengo, *Braz. J. Phys.* **33** (2003) 867.
- [10] R. Farengo e R. A. Clemente, *Phys. Plasmas* **13** (2006) 042515.
- [11] E. Hotta, M. Suzuki, H. Ohta e I. Hayashi, *Jpn. J. Appl. Phys.* **24** (1985) 110.
- [12] Naval Research Laboratory Plasma Formulary, 2009.
- [13] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics* (Springer), 2004.
- [14] R. D. Milroy e H. Y. Guo, *Phys. Plasmas* **12** (2005) 072503.

- [15] M. J. Dutch, Tese de doutoramento. Flinders University of South Australia (1988).
- [16] P. M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill), 1953.
- [17] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier), 2005.
- [18] L. Zabielski e A. J. Mestel, *J. Fluid Mech.* **370** (1998) 297.
- [19] L. S. Solov'ev, em *Reviews of Plasma Physics*, vol. 3 (Consultants Bureau), 1967. Editado por M. A. Leontovich.
- [20] A. I. Morozov e L. S. Solov'ev, em *Reviews of Plasma Physics*, vol. 2 (Consultants Bureau), 1966. Editado por M. A. Leontovich.
- [21] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (Dover), 1968.
- [22] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum Press), 1987.
- [23] R. A. Clemente, M. Gilli e R. Farengo, *Phys. Plasmas* **15** (2008) 102503.
- [24] J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) 139.
- [25] M. R. Stoneking, N. E. Lamier, S. C. Prager, J. S. Sarff e D. SinitSYM, *Phys. Plasmas* **4** (1997) 1632.
- [26] M. A. Schalit, Tese de doutoramento, California Institute of Technology (1989).
- [27] A. F. Lifschitz, R. Farengo e R. A. Clemente, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **45** (2003) 999.

Apêndice A

Regras de regularidade na origem

Mostramos a seguir uma propriedade restritiva muito interessante que surge ao se trabalhar com coordenadas cilíndricas. São regras muito sutis do comportamento de funções na origem que vêm naturalmente ao se pedir que todas as suas derivadas sejam bem comportadas na origem. As propriedades exibidas abaixo decorrem unicamente do sistema de coordenadas (e não de vínculos físicos). Uma das condições de contorno que trabalhamos é consequência natural dos cálculos a seguir.

Seguindo a abordagem de Schalit [26], vamos primeiramente trabalhar com uma função escalar para a partir dela estender o resultado para uma função vetorial.

$$g(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_0^m + a_1^m r + a_2^m r^2 + \dots) e^{im\theta} \quad (\text{A.1})$$

Sendo $z = x + iy$ com $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, podemos escrever

$$e^{im\theta} = [\cos\theta + i\sin\theta]^m = \left[\frac{x}{r} + i\frac{y}{r} \right]^m \quad (\text{A.2})$$

Omitindo o supraíndice m dos coeficientes para simplificar, a expansão de g_m pode ser escrita como

$$g_m = (a_0 + a_1|z| + a_2|z|^2 + \dots) z^m |z|^{-m} \quad (\text{A.3})$$

Tomando-se o k -ésimo termo da expansão, temos

$$g_m^k = a_k z^m |z|^{k-m} \quad (\text{A.4})$$

Vamos considerar três casos em separado (com $p \in \mathbb{N}$):

$$\text{Caso 1: } k - m = 2p$$

$$\text{Caso 2: } k - m = 2p + 1$$

$$\text{Caso 3: } k - m = \text{inteiro negativo}$$

Note que no primeiro caso

$$g_m^k = a_k z^m |z|^{2p} = a_k (x + iy)^m (x^2 + y^2)^p \quad (\text{A.5})$$

que por ser um polinômio, é analítico em todo o domínio. No segundo caso

$$g_m^k = \{a_k z^m |z|^{2p}\} |z| \quad (\text{A.6})$$

o termo dentro das chaves é idêntico ao do caso anterior e portanto sempre analítico. Porém quando multiplicado por $|z|$, a função apresenta um “bico”, onde a primeira derivada (e conseqüentemente todas as outras) não é definida. Considerando agora o caso 3, temos m derivadas com respeito a x :

$$\frac{d^m g_m^k}{dx^m} = a_k m! |z|^{k-m} + \text{outros termos} \quad (\text{A.7})$$

O primeiro termo sempre diverge na origem no caso considerado (de o expoente $k - m$ ser inteiro negativo). Com esses argumentos, podemos escrever a expansão na forma mais geral

$$g_m = r^m (c_0 + c_2 r^2 + c_4 r^4) e^{im\theta} \quad (\text{A.8})$$

Conforme muito bem observado por Schalit, a expansão de Fourier-Bessel $\sum c_m J_m(r) e^{im\theta}$ automaticamente satisfaz essa condição. Além disso, é interessante notar que a solução por

nós obtida para o caso na ausência de plasma ($\alpha_{int}(x) = d_1 h x I'_m(mhx) + d_2 h x K'_m(mhx)$) também é satisfeita.

Seja $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y)e^{im\theta}$ uma função vetorial definida num domínio que compreende a origem do plano cartesiano. Tal vetor pode ser escrito em coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(f_r(r)\hat{r} + f_\theta(r)\hat{\theta} + f_z(r)\hat{z} \right) e^{im\theta} \quad (\text{A.9})$$

Para que seja bem definida na origem seus coeficientes não podem divergir em $r \rightarrow 0$. Usando $\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$ e $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$, expandindo em exponenciais e impondo que a Regra de Regularidade (A.8) para cada uma das componentes do vetor, temos por fim:

$$g_r = r^{m-1}(\gamma_0 + \gamma_2 r^2 + \gamma_4 r^4 + \dots); \quad m \geq 1 \quad (\text{A.10})$$

$$g_r = r(\gamma_0 + \gamma_2 r^2 + \gamma_4 r^4 + \dots); \quad m = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$g_\theta = r^{m-1}(i\gamma_0 + \beta_2 r^2 + \beta_4 r^4 + \dots); \quad m \geq 1 \quad (\text{A.12})$$

$$g_\theta = r(\beta_0 + \beta_2 r^2 + \beta_4 r^4 + \dots); \quad m = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$g_z = r^m(\alpha_0 + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 r^4 + \dots); \quad m \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

Discussão das implicações físicas das regras de regularidade:

O mecanismo de geração e sustentação de corrente em plasmas trabalha sempre no sentido de maximizar a corrente axial (toroidal) estacionária (de ordem zero). Conforme explicado durante as deduções, a existência da corrente axial estacionária se deve à projeção da média temporal sobre um ciclo do termo de Hall ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$) da Lei de Ohm generalizada sobre a direção \hat{z} . Note que o primeiro coeficiente (aqueles com sub-índice zero) das expansões da

parte radial e azimutal acima somente são não nulos em $r = 0$ no caso do modo $m = 1$. Isto traz uma importante consequência: somente existe corrente axial no eixo de simetria no caso de um campo viajante dipolar ($m = 1$). É importante notar, no entanto, que isso não quer dizer que a quantidade total de corrente gerada nesse caso é maior que nos outros (para condições iguais de corrente nas bobinas externas). Dutch e McCarthy inclusive mencionam em [6] que *a priori* não existe razão física para se querer gerar corrente axial próxima ao eixo.

Apêndice B

Código numérico

Um código numérico iterativo foi desenvolvido para pesquisar raízes que satisfaçam as condições de contorno varrendo o espaço dos parâmetros. Tal código foi elaborado na linguagem do *software Mathematica* e se encontra reproduzido nas páginas seguintes.

```

Clear[λ, ε, c1, c2, c3, c4, x, x2]
Do[Do[Do[λ = 5;
it = 1;
    γ = 40 + .1 contador;
    ε = 0.001;
    m = 2;
    b00 = .5; (*campo externo aplicado*)
h = 1;
h2 = h * h;
x2 = x * x;
f1 = 1 - h2 * x2;
f2 = 1 + h2 * x2;
    factor = .005;
    ratio = 3;      (*a razão entre o raio das bobinas e o raio do plasma ratio=
    1/a deve ser especificada*)
c1 = 2 factor;
c2 = 2 factor;
c3 = 8 factor;
c4 = 20 factor;
    c5 = 10 factor;

    a1 = z1;
    a2 = z2;
    b1 = z3;
    b2 = z4;
    b0 = z5;

    (*a1=.1;
    a2=.1;
    b1=0.02;
    b2=.2;
    b0=0.1;*)

t1 = TimeUsed[];
Clear[L1, L2, L3, L4, L5];
L1 = {};
L2 = {};
L3 = {};
L4 = {};
L5 = {};

imax = it;
jmax = it;
kmax = it;
nmax = it;
lmax = it;

```

```

Do[Clear[Ar, Ai, ar, ai, aar, aai, u, v, U, V, Br,
  Bi, B0, br, bi, bbr, bbi, c, d, cc, dd, bz, bbz, b02, bb02, K1, K11];
Ar = (ε^m) (a1 + c1 (i) / imax);
Do[
  Ai = (ε^m) (a2 + c2 (j) / jmax);
  Do[
    Br = (ε^m) (b1 + c3 (k) / kmax);
    Do[
      Bi = (ε^m) (b2 + c4 (n) / nmax);
      Do[
        B0 = b0 + c5 (l) / lmax;
        eq1 = ar'[x] == u[x];
        eq2 = ai'[x] == v[x];
        eq3 = b03'[x] == .5 m γ (ai[x] (u'[x] + f1 u[x] / (x f2) - (m^2) f2 ar[x] / (x * x) +
          2 h br[x] / f2) - ar[x] (v'[x] + f1 v[x] / (x f2) -
          (m^2) f2 ai[x] / (x * x) + 2 h bi[x] / f2)) / x; (*modificada*)
        eq4 = u'[x] == -f1 u[x] / (x f2) + (m^2) f2 ar[x] / (x * x) - 2 h br[x] / f2 +
          2 m λ^2 ai[x] - m γ b03'[x] ai[x] / x - m γ bi[x] b02[x] / x; (*modificada*)
        eq5 = v'[x] == -f1 v[x] / (x f2) + (m^2) f2 ai[x] / (x * x) - 2 h bi[x] / f2 -
          2 m λ^2 ar[x] + m γ b03'[x] ar[x] / x + m γ br[x] b02[x] / x; (*modificada*)
        eq6 = b03[ε] == B0;
        eq7 = ar[ε] == Ar;
        eq8 = ai[ε] == Ai;
        eq9 = u[ε] == m Ar / ε;
        eq10 = v[ε] == m Ai / ε;
        Eq1 = br'[x] == c[x];
        Eq2 = bi'[x] == d[x];
        Eq3 = b02'[x] == -.5 m γ ((d[x] ar[x] + bi[x] u[x] - c[x] ai[x] - br[x] v[x]) / x) -
          f1 b02[x] / (x f2) + 2 h b03[x] / f2; (*modificada*)
        Eq4 = c'[x] (1 + (m^2) (γ / x) (.5 γ / x) ai[x] ai[x]) == -f1 c[x] / (x f2) +
          (m^2) f2 br[x] / (x * x) + 2 m λ^2 (bi[x] + 2 h ai[x] / f2) + m (γ / x)
          ((v'[x] + f1 v[x] / (x f2) - (m^2) f2 ai[x] / (x * x) + 2 h bi[x] / f2) b02[x] +
          ai[x] (.5 m γ / x) ((c[x] ai[x] + br[x] v[x] - d[x] ar[x] - bi[x] u[x]) / x +
          (d'[x] ar[x] + 2 d[x] u[x] + bi[x] u'[x] - 2 c[x] v[x] - br[x] v'[x]) +
          (2 h2 x / f2) (c[x] ai[x] + br[x] v[x] - d[x] ar[x] - bi[x] u[x])) -
          (2 h2 x / f2) bi[x] b03[x]); (*modificada*)
        Eq5 = d'[x] (1 + (m^2) (γ / x) (.5 γ / x) ar[x] ar[x]) == -f1 d[x] / (x f2) +
          (m^2) f2 bi[x] / (x * x) - 2 m λ^2 (br[x] + 2 h ar[x] / f2) - m (γ / x)
          ((u'[x] + f1 u[x] / (x f2) - (m^2) f2 ar[x] / (x * x) + 2 h br[x] / f2) b02[x] -
          ar[x] (.5 m γ / x) ((d[x] ar[x] + bi[x] u[x] - c[x] ai[x] - br[x] v[x]) / x -
          (2 d[x] u[x] + bi[x] u'[x] - c'[x] ai[x] - 2 c[x] v[x] - br[x] v'[x]) +
          (2 h2 x / f2) (d[x] ar[x] + bi[x] u[x] - c[x] ai[x] - br[x] v[x])) -
          (2 h2 x / f2) br[x] b03[x]); (*modificada*)
        Eq6 = b02[ε] == .5 ε (-.5 γ m ((d[ε] ar[ε] + bi[ε] u[ε] - c[ε] ai[ε] -
          br[ε] v[ε]) / ε) + 2 h b03[ε]); (*modificada*)

```

```

Eq7 = br[ε] == Br;
Eq8 = bi[ε] == Bi;
Eq9 = c[ε] == m Br / ε;
Eq10 = d[ε] == m Bi / ε;
sol = NDSolve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8,
  eq9, eq10, Eq1, Eq2, Eq3, Eq4, Eq5, Eq6, Eq7, Eq8, Eq9, Eq10},
  {ar, ai, u, v, b03, br, bi, c, d, b02}, {x, ε, 1}, MaxSteps → 50 000];
aar[x_] := ar[x] /. sol;
aai[x_] := ai[x] /. sol;
U[x_] := u[x] /. sol;
V[x_] := v[x] /. sol;
bb03[x_] := b03[x] /. sol;
bb02[x_] := b02[x] /. sol;
bbr[x_] := br[x] /. sol;
bbi[x_] := bi[x] /. sol;
cc[x_] := c[x] /. sol;
dd[x_] := d[x] /. sol;
Km1 = BesselK[m, m h];
derivKm1 = -BesselK[m + 1, h m] + (BesselK[m, h m]) / h;
AppendTo[L1, {Ar / (ε^m), Ai / (ε^m), Br / (ε^m), Bi / (ε^m), B0,
  (((m)^m) ((h)^(m+1))) (-aar[1] (1+h2) m Km1 / h + derivKm1 U[1])}];
AppendTo[L2, {Ar / (ε^m), Ai / (ε^m), Br / (ε^m), Bi / (ε^m), B0, (((m)^m) ((h)^(m+1)))
  (derivKm1 V[1] - aai[1] m (1+h2) Km1 / h - 2 (0.056066) (1+h2) / h^(m+1))}];
AppendTo[L3, {Ar / (ε^m), Ai / (ε^m), Br / (ε^m), Bi / (ε^m), B0, bbr[1]}];
AppendTo[L4, {Ar / (ε^m), Ai / (ε^m), Br / (ε^m), Bi / (ε^m), B0, bbi[1]}];
AppendTo[L5, {Ar / (ε^m), Ai / (ε^m),
  Br / (ε^m), Bi / (ε^m), B0, (bb03[1] + h bb02[1]) / (1+h2) - b00}
, {i, -imax, imax, 1}], {j, -jmax, jmax, 1}], {k, -kmax, kmax, 1}],
{n, -nmax, nmax, 1}], {1, -nmax, nmax, 1}];
t2 = TimeUsed[];
t2 - t1
MemoryInUse[]
Clear[x1, x2, x3, x4, g1, g2, g3, g4]
Dimensions[L1];
Dimensions[L2];
Dimensions[L3];
Dimensions[L4];
Dimensions[L5];

g1 = Interpolation[L1, InterpolationOrder → 2];
g2 = Interpolation[L2, InterpolationOrder → 2];
g3 = Interpolation[L3, InterpolationOrder → 2];
g4 = Interpolation[L4, InterpolationOrder → 2];
best = Interpolation[L5, InterpolationOrder → 2];

Print["γ=", γ]

```

```

Print[eigen = FindRoot[{g1[x1, x2, x3, x4, x5] == 0, g2[x1, x2, x3, x4, x5] == 0,
g3[x1, x2, x3, x4, x5] == 0, g4[x1, x2, x3, x4, x5] == 0, bext[x1, x2, x3, x4, x5] ==
0}, {x1, a1, a1 - c1, a1 + c1}, {x2, a2, a2 - c2, a2 + c2}, {x3, b1, b1 - c3, b1 + c3},
{x4, b2, b2 - c4, b2 + c4}, {x5, b0, b0 - c5, b0 + c5}, MaxIterations -> 200]];
Clear[z1, z2, z3, z4, z5]
z1 = x1 /. eigen;
z2 = x2 /. eigen;
z3 = x3 /. eigen;
z4 = x4 /. eigen;
z5 = x5 /. eigen;

g1[a1, a2, b1, b2, b0];
g2[a1, a2, b1, b2, b0];
g3[a1, a2, b1, b2, b0];
g4[a1, a2, b1, b2, b0];
bext[a1, a2, b1, b2, b0];

Print[g1[z1, z2, z3, z4, z5]]
Print[g2[z1, z2, z3, z4, z5]]
Print[g3[z1, z2, z3, z4, z5]]
Print[g4[z1, z2, z3, z4, z5]]
Print[bext[z1, z2, z3, z4, z5]]
o1 = 0;
If[Abs[g1[z1, z2, z3, z4, z5][[1]]] + Abs[g2[z1, z2, z3, z4, z5][[1]]] +
Abs[g3[z1, z2, z3, z4, z5][[1]]] + Abs[g4[z1, z2, z3, z4, z5][[1]]] +
Abs[bext[z1, z2, z3, z4, z5][[1]]] < 10^(-12), Break[]];
, {o, 150}]
Print["no. de iterações para refino das funções interpoladas é ", o1];
Ar = (ε)^(m) (z1);
Ai = (ε)^(m) (z2);
Br = (ε)^(m) z3;
Bi = (ε)^(m) z4;
eq1 = ar'[x] == u[x];
eq2 = ai'[x] == v[x];
eq3 = b03'[x] == .5 m γ
(ai[x] (u'[x] + f1 u[x] / (x f2) - (m^2) f2 ar[x] / (x * x) + 2 h br[x] / f2) - ar[x] (v'[x] +
f1 v[x] / (x f2) - (m^2) f2 ai[x] / (x * x) + 2 h bi[x] / f2)) / x; (*modificada*)
eq4 = u'[x] == -f1 u[x] / (x f2) + (m^2) f2 ar[x] / (x * x) - 2 h br[x] / f2 +
2 m λ^2 ai[x] - m γ b03'[x] ai[x] / x - m γ bi[x] b02[x] / x; (*modificada*)
eq5 = v'[x] == -f1 v[x] / (x f2) + (m^2) f2 ai[x] / (x * x) - 2 h bi[x] / f2 -
2 m λ^2 ar[x] + m γ b03'[x] ar[x] / x + m γ br[x] b02[x] / x; (*modificada*)
eq6 = b03[ε] == z5;
eq7 = ar[ε] == Ar;
eq8 = ai[ε] == Ai;
eq9 = u[ε] == m Ar / ε;
eq10 = v[ε] == m Ai / ε;

```

```

Eq1 = br'[x] == c[x];
Eq2 = bi'[x] == d[x];
Eq3 = b02'[x] == -.5 m γ ((d[x] ar[x] + bi[x] u[x] - c[x] ai[x] - br[x] v[x]) / x) -
      f1 b02[x] / (x f2) + 2 h b03[x] / f2; (*modificada*)
Eq4 = c'[x] (1 + (m^2) (γ / x) (.5 γ / x) ai[x] ai[x]) ==
      -f1 c[x] / (x f2) + (m^2) f2 br[x] / (x * x) + 2 m λ^2 (bi[x] + 2 h ai[x] / f2) +
      m (γ / x) ((v'[x] + f1 v[x] / (x f2) - (m^2) f2 ai[x] / (x * x) + 2 h bi[x] / f2) b02[x] +
      ai[x] (.5 m γ / x) ((c[x] ai[x] + br[x] v[x] - d[x] ar[x] - bi[x] u[x]) / x +
      (d'[x] ar[x] + 2 d[x] u[x] + bi[x] u'[x] - 2 c[x] v[x] - br[x] v'[x]) +
      (2 h2 x / f2) (c[x] ai[x] + br[x] v[x] - d[x] ar[x] - bi[x] u[x])) -
      (2 h2 x / f2) bi[x] b03[x]); (*modificada*)
Eq5 = d'[x] (1 + (m^2) (γ / x) (.5 γ / x) ar[x] ar[x]) ==
      -f1 d[x] / (x f2) + (m^2) f2 bi[x] / (x * x) - 2 m λ^2 (br[x] + 2 h ar[x] / f2) -
      m (γ / x) ((u'[x] + f1 u[x] / (x f2) - (m^2) f2 ar[x] / (x * x) + 2 h br[x] / f2) b02[x] -
      ar[x] (.5 m γ / x) ((d[x] ar[x] + bi[x] u[x] - c[x] ai[x] - br[x] v[x]) / x -
      (2 d[x] u[x] + bi[x] u'[x] - c'[x] ai[x] - 2 c[x] v[x] - br[x] v'[x]) +
      (2 h2 x / f2) (d[x] ar[x] + bi[x] u[x] - c[x] ai[x] - br[x] v[x])) -
      (2 h2 x / f2) br[x] b03[x]); (*modificada*)
Eq6 = b02[ε] == .5 ε (-.5 γ m ((d[ε] ar[ε] + bi[ε] u[ε] - c[ε] ai[ε] - br[ε] v[ε]) / ε) +
      2 h b03[ε]); (*modificada*)
Eq7 = br[ε] == Br;
Eq8 = bi[ε] == Bi;
Eq9 = c[ε] == m Br / ε;
Eq10 = d[ε] == m Bi / ε;
sol = NDSolve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7,
      eq8, eq9, eq10, Eq1, Eq2, Eq3, Eq4, Eq5, Eq6, Eq7, Eq8, Eq9, Eq10},
      {ar, ai, u, v, b03, br, bi, c, d, b02}, {x, ε, 1}, MaxSteps → 20 000];
aar[x_] := ar[x] /. sol;
aai[x_] := ai[x] /. sol;
U[x_] := u[x] /. sol;
V[x_] := v[x] /. sol;
bb03[x_] := b03[x] /. sol;
bb02[x_] := b02[x] /. sol;
bbr[x_] := br[x] /. sol;
bbi[x_] := bi[x] /. sol;
cc[x_] := c[x] /. sol;
dd[x_] := d[x] /. sol;

Print[Abs[-aar[1][[1]] (1 + h2) m Km1 / h + derivKm1 U[1][[1]]]]
Print[Abs[
      derivKm1 V[1][[1]] - aai[1][[1]] m (1 + h2) Km1 / h - 2 (1 + h2) (0.056066) / h^(m + 1)]]
Print[Abs[bbr[1][[1]]]]
Print[Abs[bbi[1][[1]]]]
Print[Abs[(bb03[1][[1]] + h bb02[1][[1]]) / (1 + h2) - b00]]
If[Abs[-aar[1][[1]] (1 + h2) m Km1 / h + derivKm1 U[1][[1]]] +
      Abs[derivKm1 V[1][[1]] - aai[1][[1]] m (1 + h2) Km1 / h -

```

```

      2 (1 + h2) (0.056066) / h^(m + 1)] + Abs[bbr[1][[1]]] + Abs[bbi[1][[1]]] +
      Abs[(bb03[1][[1]] + h bb02[1][[1]]) / (1 + h2) - b00] < 5 × 10^(-4), Break[]];
o2 = kkk, {kkk, 0, 2000}]
Print["no. de iterações para refino das condições de contorno é ", o2]

b0z[y_] := (bb03[y] + h y bb02[y]) / (1 + h^2 y^2);
b0theta[z_] := (bb02[z] - h z bb03[z]) / (1 + h^2 z^2);
sincrz = -γ b0theta[1] (2 + h^2) / (h λ^2);
sincrtheta = γ (b0z[1] - b0z[ε]) (2 + h^2) / (2 λ^2);
etheta = (bb03[1] + h bb02[1]) / (1 + h^2) - (bb03[ε] + h ε bb02[ε]) / (1 + ε^2 h^2);
ez = (bb02[1] - h bb03[1]) / (1 + h^2);
AppendTo[lista, {m, h, λ, γ, b00, z1, z2, z3,
  z4, z5, etheta[[1]], ez[[1]], sincrz[[1]], sincrtheta[[1]]}];
Print[{m, h, λ, γ, b00, z1, z2, z3, z4, z5, etheta[[1]],
  ez[[1]], sincrz[[1]], sincrtheta[[1]]}
, {contador, 0, 300}]

```

Apêndice C

Dedução das correntes máximas

Neste apêndice, são apresentados os desenvolvimentos e hipóteses que levam às expressões das máximas correntes possíveis, que somente são possíveis no caso de penetração total dos campos internos, i.e., quando a amplitude da corrente nas bobinas externas é extremamente grande ($\gamma \rightarrow \infty$). Inicialmente, assume-se que na situação na qual os elétrons giram em fase com o campo externo, os campos de resposta do plasma são muito menores que o campo externo aplicado [9], i.e., $|\beta_{r,i}| \ll |\alpha_{r,i}|$, tal que $|J_{13}| \ll |J_{11}|, |J_{12}|$, ou seja, a corrente alternada nas bobinas externas (que flui na direção \hat{e}_3) é tão grande que a densidade de corrente gerada no plasma na mesma direção é ínfima se comparada às componentes de corrente ortogonais a ela.

Pode-se notar que os argumentos apresentados implicam $|J_{03}| \ll |J_{02}|$ (veja equações (2.25) e (2.27)) e portanto $J_{0\theta} \approx J_{02}$. Usando $J_{02} \equiv -env_{02}$ e $J_{03} \equiv -env_{03}$ e assumindo rotação rígida (solução padrão do rotamak), tem-se:

$$\Omega = \frac{v_{0\theta}}{ax} \tag{C.1}$$

e

$$\omega = \frac{v_{02}}{ax}, \tag{C.2}$$

onde Ω é um parâmetro auxiliar.

Então, tendo em mente as definições das pseudo-componentes helicoidais em termos das

componentes cilíndricas do Capítulo 2, pode-se definir

$$v_{02} = ax\Omega + hxv_{0z} \quad (\text{C.3})$$

e

$$v_{03} = v_{0z} - hx(ax\Omega) \quad (\text{C.4})$$

Antes de prosseguir, é necessário mostrar um resultado que será útil nos cálculos seguintes: no âmbito do modelo MHD ideal, o fluxo magnético através de qualquer contorno que se move com o fluido é constante no tempo, i.e., as linhas de campo magnético se movem acompanhando o movimento do fluido. Para mostrar isso, utilizaremos a Lei de Ohm em sua forma

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{C.5})$$

Tirando o rotacional de ambos os lados da equação acima, temos

$$\nabla \times \mathbf{J} = \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Usando as leis de Faraday e Ampère, além da identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, temos

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{C.6})$$

O último termo se anula se o plasma for ideal (condutividade $\sigma \rightarrow \infty$). Nesse caso, integrando sobre uma superfície qualquer dentro do plasma e usando o Teorema de Stokes para o lado direito da equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Tendo-se em mente a identidade vetorial $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = 0 \quad (\text{C.7})$$

O primeiro termo representa a taxa de variação do fluxo através de uma superfície fixa enquanto o segundo é o incremento adicional varrido por unidade de tempo pela periferia se movendo com a velocidade local do fluido \mathbf{v} . A soma dos dois termos é a variação do fluxo através de uma superfície “material”, fixa em relação ao fluido (que se move junto com ele). Tal equação mostra a constância do fluxo em um fluido ideal:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Isto implica que elementos de fluido adjacentes, continuarão adjacentes em qualquer instante de tempo. Não é permitido que os elementos de fluido se quebrem ou se separem. O conceito de linha de força magnética é uma abstração. Num campo que varia, as linhas em princípio não poderiam ser rotuladas. Porém no caso ideal, o conceito individual das linhas pode ser significativo. Nesse caso, pela equação acima, pode-se dizer que no caso de resistividade zero, as linhas de campo estão “congeladas” em relação ao plasma. Qualquer superfície coberta por uma linha de campo magnético é chamada *superfície magnética*. Uma linha de campo cobre *ergodicamente* uma superfície magnética se ela passa arbitrariamente próxima a qualquer ponto da superfície.

A condição descrita $\sigma \rightarrow \infty$ é equivalente ao caso de penetração total, já que $\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \eta \rightarrow 0$. Vamos agora procurar a classe mais geral de soluções que preservem o fluxo. Consideraremos que em princípio, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, x_2, t)$ porém considerando apenas a densidade de corrente estacionária, a qual é objeto da presente análise. Tendo em mente os vínculos $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ pode-se notar que a componente radial de \mathbf{J} é zero e pode-se abrir o termo $\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$ da seguinte forma¹:

$$\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

¹Aqui foram utilizados a identidade vetorial $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{C}$, além do fato de que o campo magnético tem divergência zero e o operador divergente aplicado ao rotacional de qualquer vetor é zero.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{J} &= B_r \frac{d\mathbf{J}}{dr} - \frac{B_\theta J_{0\theta}}{r} \hat{e}_r \\
 (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \left(k J_{0z} + \frac{J_{0\theta}}{r} \right) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} - \frac{B_\theta J_{0\theta}}{r} \hat{e}_r + \frac{B_r J_{0\theta}}{r} \hat{e}_\theta
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Devido à dependência exponencial assumida desde o início do trabalho,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau}, \tag{C.10}$$

onde $\tau = \omega t$. Assim, substituindo em $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$, encontra-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} \left(1 + k J_{0z} + \frac{J_{0\theta}}{r} \right) + \left(\frac{J_{0\theta}}{r} - \frac{dJ_{0\theta}}{dr} \right) B_r \hat{e}_\theta - \frac{dJ_{0z}}{dr} B_r \hat{e}_z = 0. \tag{C.11}$$

Considerando que em princípio $\frac{dB_r}{dr}$ e B_r não se anulam, obtemos a classe mais geral de soluções para as componentes da densidade de corrente estacionária que preservam o fluxo magnético:

$$1 + k J_{0z} + \frac{J_{0\theta}}{r} = 0 \tag{C.12}$$

$$\frac{J_{0\theta}}{r} - \frac{dJ_{0\theta}}{dr} = 0 \tag{C.13}$$

$$\frac{dJ_{0z}}{dr} = 0 \tag{C.14}$$

que admite como solução

$$\mathbf{J} = -r (1 + k j_{0z}) \hat{e}_\theta + j_{0z} \hat{e}_z, \tag{C.15}$$

onde j_{0z} é uma constante arbitrária. Essa solução mostra que na situação de máxima penetração dos campos, a corrente poloidal é linear na variável radial e a corrente toroidal é sempre constante. Usaremos esse resultado na continuação da dedução.

Agora, é necessário encontrar uma relação entre Ω e ω . Para isso, pode-se usar a seguinte relação, deduzida a partir do tensor das tensões de Maxwell e com a qual Bertram [8] mostra que há transferência de momento da onda para o plasma ao longo da direção ignorável (ao contrário do que foi postulado por Dutch [3]):

$$\int_0^1 xv_{03}dx = 0 \quad (\text{C.16})$$

Integrando e já usando o fato de v_{0z} ser constante, obtém-se

$$v_{0z} = \frac{ha\Omega}{2}, \quad (\text{C.17})$$

que substituída na expressão de v_{02} , implica

$$\Omega = \frac{2\omega}{2+h^2} \quad (\text{C.18})$$

O conhecimento dos parâmetros auxiliares v_{0z} e Ω permite que se escreva as expressões para as densidades de correntes máximas:

$$J_{02} = -enax\omega \quad (\text{C.19})$$

$$J_{03} = -enah\omega \frac{1-2x^2}{2+h^2} \quad (\text{C.20})$$

Ambas são relações lineares em ω , conforme esperado. As componentes $J_{0\theta}$ e J_{0z} podem ser calculadas diretamente usando a definição das pseudo-componentes:

$$J_{0\theta} = -2enax\omega \quad (\text{C.21})$$

$$J_{0z} = \frac{-enah\omega}{2+h^2} \quad (\text{C.22})$$

Tais componentes são usadas na definição do sincronismo.