



## **Tese de Mestrado**

# **Oscilação de Neutrinos no Formalismo de Pacotes de Onda**

por

**Fernando Rossi Torres**

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo**



Instituto de Física “Gleb Wataghin”  
Universidade Estadual de Campinas

Julho 2006

## RESUMO

Em geral, estudamos o fenômeno de oscilação de neutrinos através do formalismo de ondas planas, que consegue, com muito sucesso, tratar os casos dos neutrinos solares, de reatores e aceleradores. No entanto, uma descrição física mais completa deve considerar a interpretação do fenômeno oscilatório usando pacotes de onda. Neste trabalho, analisamos o formalismo das ondas planas e dos pacotes de onda na oscilação, tanto no vácuo quanto na matéria. Calculamos os comprimentos de coerência e oscilação para discutir a necessidade ou não da utilização de pacotes de onda para neutrinos solares, neutrinos de reatores e de aceleradores, neutrinos de supernovas e neutrinos de altíssima energia.

Discutimos também o mecanismo de formação de supernovas e o papel dos neutrinos na dinâmica de sua evolução. Como temos poucas informações sobre neutrinos de supernova, apenas 11 eventos detectados por Kamiokande e 8 eventos pelo detector IMB, confrontamos o formalismo de ondas planas com o formalismo de pacotes de onda para a oscilação de neutrinos dentro de uma supernova de 15 massas solares, com o intuito de saber a relevância dos pacotes de onda e verificar se este formalismo pode fornecer alguma informação adicional sobre a oscilação de neutrinos em supernovas..

## ABSTRACT

Generally, we study neutrino oscillation phenomenon using the plane wave formalism, which successfully treats the solar neutrino case, the reactor and accelerator cases. However, a more complete description of neutrino oscillation must consider a wave packet approach. This work analyses both formalisms: the plane wave and the wave packet in vacuum and matter. We have calculated the oscillation and coherence length to discuss if wave packets are or are not necessary for solar neutrinos, reactor and accelerators neutrinos, supernova neutrinos and ultra-high energy neutrinos.

We also have discussed the formation mechanism of supernova and the role of neutrinos in its evolution dynamics. As we have little information about supernova neutrinos, only 11 events detected by Kamiokande and 8 events by IMB detector, we have confronted the plane wave formalism with the wave packet formalism of neutrino oscillation inside a supernova with 15 solar masses, because we desire to know the relevance of the wave packet treatment and verify if this formalism will provide any additional information about neutrino oscillation in supernova.

“A única razão para a existência do tempo é evitar que tudo aconteça de uma vez.”

Albert Einstein

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a minha mãe Vera, modelo de pessoa, caráter e de raça, com quem aprendi o valor da família e que sempre foi minha principal incentivadora, nunca me deixando desistir e sempre apoiando meus estudos e minha carreira profissional. Obrigado também pelos valiosos ensinamentos sobre a vida, sobre a moral e a ética e de, como superar, principalmente, as adversidades nos momento mais difíceis.

## **Agradecimentos**

A CAPES, pelo apoio financeiro e científico a este projeto.

Ao professor Marcelo Guzzo, pela orientação e pela oportunidade concedida para o desenvolvimento deste projeto. Também ao professor Orlando Peres, por ter sido o professor responsável por me iniciar ao intrigante e estimulante universo dos neutrinos. Ao professor Ernesto Kemp, pela colaboração e ajuda ao meu trabalho.

Ao Betão, eterno amigo, juntos desde a graduação, pelas divertidas horas de almoço e pelo apoio. Aos colegas da graduação: Felipe, Emiliano, Danilo, Bruno e Luana.

Ao meu irmão Fábio pelos importantes conselhos e ensinamentos sobre as alegrias e frustrações que a ciência pode proporcionar.

A Elaine, minha namorada, pelo carinho, apoio constante e companheirismo.

Ao Paulo, Mia e Bestetti pela amizade e pelas horas de diversão.

À turma da sala 206 do DRCC, em especial ao Célio, ao Pedro e ao ex-membro Diego, pelas divertidas horas compartilhadas e pelas discussões produtivas sobre a física dos neutrinos.

Ao professor Tadeu, lá de Jundiaí, por ser uma das minhas principais referências desde a minha infância.

# Índice

---

<b>Introdução</b> .....	1
Referências – Introdução.....	4
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Neutrinos no Vácuo</b> .....	<b>5</b>
1.1 Ondas Planas de Neutrinos no Vácuo .....	6
1.2 Pacotes de Onda de Neutrinos no Vácuo.....	8
1.2.1. <i>Tamanho dos pacotes de onda</i> .....	10
1.2.2. <i>O formalismo de pacotes de onda no vácuo</i> .....	13
1.3 Quando os neutrinos irão oscilar? .....	20
1.4 O “Spreading” dos Pacotes de Onda .....	24
Referências - Capítulo 1 .....	27
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Neutrinos na Matéria</b> .....	<b>29</b>
2.1 Ondas Planas de Neutrinos na Matéria.....	30
2.1.1. <i>Oscilação de Neutrinos na Matéria Uniforme</i> .....	30
2.1.2. <i>Neutrinos na Matéria não-uniforme</i> .....	32
2.2 Pacotes de Onda de Neutrinos na Matéria .....	37
Referências - Capítulo 2.....	<b>40</b>
<b>Capítulo 3</b>	
<b>As supernovas e os neutrinos</b> .....	<b>42</b>
3.1 Evolução Pós-Sequência Principal.....	43
3.2 Colapso Gravitacional .....	47
3.2.1. <i>Neutronização</i> .....	48
3.2.2. <i>Foto-dissociação</i> .....	48
3.2.3. <i>Aniquilação de Pares</i> .....	49
3.3 Dinâmica do Colapso .....	49
3.4 Explosão .....	50
3.4.1. <i>Aprisionamento de neutrinos</i> .....	50
3.4.2. <i>Transição de fase da matéria nuclear</i> .....	51
3.4.3. <i>Explosão Imediata</i> .....	52
3.4.4. <i>Explosão Atrasada</i> .....	53
3.5 Neutrinos de colapsos estelares.....	55
3.6 SN1987A .....	57
Referências - Capítulo 3.....	<b>61</b>

<b>Capítulo 4</b>	
<b>Ondas Planas versus Pacotes de Onda</b> .....	<b>63</b>
4.1 A densidade eletrônica da supernova .....	63
4.2 A análise da adiabaticidade na supernova .....	65
4.3 Probabilidades .....	67
Referências - Capítulo 4.....	75
<b>Conclusões</b> .....	<b>76</b>
<b>Apêndice-A</b> .....	<b>78</b>
<b>Apêndice-B</b> .....	<b>81</b>
<b>Apêndice-C</b> .....	<b>87</b>
<b>Apêndice-D</b> .....	<b>106</b>

# ***Lista de Tabelas***

---

Tabela 1.1: Tamanho dos Pacotes de Onda.....	13
Tabela 1.2: Tamanho dos Pacotes de Onda no espaço dos momentos.....	19
Tabela 1.3: Diferenças de Energia entre os autoestados de massa.....	20
Tabela 1.4: Comprimento de coerência e oscilação para neutrinos solares, Reatores e aceleradores.....	21
Tabela 1.5: Comprimento de oscilação e coerência para neutrinos de altíssima energia.....	22
Tabela 1.6: Comprimento de coerência e oscilação para neutrinos de supernova.....	23
Tabela 3.1: Energia e Temperatura para os neutrinos em Kamiokande-II e IMB.....	59
Tabela 4.1: Valores das densidades eletrônicas para ressonância e parâmetros de oscilação.....	66

# ***Lista de Figuras***

---

Figura 1.1: Comprimento de coerência e de oscilação em função da energia.....	23
Figura 1.2: Probabilidade de conversão no vácuo para neutrino de supernova.....	24
Figura 1.3: Desacoplamento e Alargamento dos Pacotes de Onda.....	26
Figura 1.4: O fenômeno de Desacoplamento conjunto ao Alargamento.....	26
Figura 3.1: Combustão dos Elementos numa estrela de $25M_{\odot}$ .....	45
Figura 3.2: Energia de Ligação por nucleon.....	45
Figura 3.3: Perfil de densidade de matéria e composição química de uma estrela de $15 M_{\odot}$ .....	47
Figura 3.4: Velocidade de queda da matéria e velocidade do som em função do raio.....	50
Figura 3.5: Luminosidade dos neutrinos.....	57
Figura 3.6: Sequência temporal e energia dos eventos de SN1987A em Kamiokande-II e IMB.....	58
Figura 4.1: Densidade eletrônica em função do raio da supernova.....	64
Figura 4.2: Probabilidade de sobrevivência (caso solar, neutrinos com 5 MeV).....	67
Figura 4.3: Comprimento de Coerência e Oscilação (caso solar, neutrinos com 5 MeV).....	68
Figura 4.4: Probabilidade de sobrevivência (caso solar, neutrinos com 40 MeV).....	69
Figura 4.5: Comprimento de Coerência e Oscilação (caso solar, neutrinos com 40 MeV).....	69
Figura 4.6: Probabilidade de sobrevivência (caso atmosférico, neutrinos com 5 MeV).....	70
Figura 4.7: Comprimento de Coerência e Oscilação (caso atmosférico, neutrinos com 5 MeV).....	70

Figura 4.8: Probabilidade de sobrevivência (caso atmosférico, neutrinos com 40 MeV).....	71
Figura 4.9: Comprimento de Coerência e Oscilação (caso atmosférico, neutrinos com 40 MeV).....	71
Figura 4.10: Probabilidade de sobrevivência (caso LSND, neutrinos com 5 MeV).....	72
Figura 4.11: Comprimento de Coerência e Oscilação (caso LSND, neutrinos com 5 MeV).....	72
Figura 4.12: Probabilidade de sobrevivência (caso LSND, neutrinos com 40 MeV).....	73
Figura 4.13: Comprimento de Coerência e Oscilação (caso LSND, neutrinos com 40 MeV).....	73
Figura C.1: Emissividade do neutrino em função da temperatura.....	89
Figura C.2: Livre caminho médio dos neutrinos eletrônicos em função da temperatura.....	93
Figura C.3: Livre caminho médio dos neutrinos muônicos e taônicos em função da temperatura.....	94
Figura C.4: Gráfico de espaço de parâmetros.....	95
Figura C.5: Potencial efetivo em função da temperatura (neutrinos).....	98
Figura C.6: Potencial efetivo em função da temperatura (anti-neutrinos).....	98
Figura C.7: Probabilidade de Oscilação - neutrinos (parâmetros solares).....	99
Figura C.8: Regiões de ressonância para neutrinos (parâmetros solares).....	100
Figura C.9: Probabilidade de Oscilação - antineutrinos (parâmetros solares).....	101
Figura C.10: Regiões de Ressonância para antineutrinos (parâmetros solares).....	101
Figura C.11: Probabilidade de Oscilação (parâmetros LSND).....	102
Figura C.12: Probabilidade de Oscilação (parâmetros LSND).....	102
Figura C.13: Probabilidade de Oscilação (parâmetros LSND).....	103
Figura C.14: Probabilidade de Oscilação (parâmetros LSND).....	103
Figura C.15: Probabilidade de Oscilação (parâmetros LSND).....	104

# INTRODUÇÃO

---

Nossa compreensão sobre os neutrinos mudou muito nos últimos anos. Graças aos esforços de muitos estudos sobre oscilação de neutrinos solares, de neutrinos atmosféricos e também de reatores, aprendemos que um neutrino produzido como um determinado autoestado de sabor pode ser detectado, depois de propagar uma distância finita, como um diferente autoestado de sabor. A interpretação mais simples é que, como todos os férmions carregados, os neutrinos possuem massa e que, analogamente aos quarks, os autoestados de sabor (autoestados fracos) são diferentes dos autoestados de massa, isto é, neutrinos se misturam [1].

Saber as propriedades dos neutrinos de maneira profunda pode esclarecer uma nova física além do conhecido Modelo Padrão. Poderíamos pensar que, além das três espécies de neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ), existiriam mais outros tipos de neutrinos. Se o experimento de MiniBooNE confirmar os dados de LSND, uma nova família de neutrinos será necessária (neutrinos estéreis). Novas forças, além daquelas conhecidas no Modelo Padrão, sejam talvez necessárias. Mistérios da cosmologia e da astrofísica, como a origem da matéria, a origem de elementos pesados e talvez a natureza da energia escura, poderiam ser desvendados com a ajuda dos neutrinos. Muitas propriedades que estão sendo hoje em dia investigadas - como o momento magnético diferente de zero dos neutrinos; neutrinos mais pesados poderem decair em neutrinos mais leves; e o neutrino pode ser uma partícula de Dirac ou Majorana - constituem um amplo campo de pesquisa científica da física de partículas elementares.

Talvez Pauli, nos dias de hoje, ficaria feliz em saber que sua proposição da existência de uma “partícula fantasma” para salvar a conservação de energia seria alvo de tanta especulação e estudo e que possui um potencial enorme, apesar de sua difícil detecção, de desvendar grandes questionamentos que temos sobre o universo.

Este trabalho, no entanto, não cuida de tais questionamentos, mas sim se preocupa em analisar dois tipos de formalismo, o de ondas planas e o de pacotes de ondas, da propagação de neutrinos, implicando em possíveis distinções fenomenológicas entre os dois, em especial numa possível diferença entre as respectivas probabilidades de oscilação.

Sabemos que as ondas planas na mecânica quântica não descrevem completamente um sistema físico. A probabilidade de encontrarmos uma partícula descrita através de uma onda plana é infinita, algo que passa a ter um sentido um tanto quanto abstrato. Um tratamento mais completo e mais correto se dá quando associamos a uma partícula um pacote de onda. O mesmo devemos fazer ao neutrino, que agora passará a ser formado por uma superposição de pacotes de onda. Nos perguntamos: será que o formalismo mais completo e amplo dos pacotes de onda trará alterações na física das oscilações dos neutrinos? Buscaremos esta resposta constantemente neste trabalho.

No Capítulo 1, vamos discutir os neutrinos se propagando no vácuo. Resumimos o formalismo de oscilação de neutrinos em ondas planas e desenvolvemos de maneira mais abrangente o formalismo de oscilação dos neutrinos em pacotes de onda, discutindo cada termo presente na expressão de probabilidade de oscilação. Comparamos o comprimento de coerência e o comprimento de oscilação para as mais diversas situações (solar, reatores, aceleradores, supernovas e neutrinos de altíssima energia) para verificar a presença ou não da oscilação. Chamaremos atenção para o caso da supernova, visto que existem poucos dados - apenas 19 eventos - destes neutrinos detectados e queremos verificar se nosso formalismo pode contribuir para uma melhor compreensão sobre a oscilação de neutrinos oriundos destas fontes astrofísicas. Descrevemos também o fenômeno de alargamento (“spreading”) dos pacotes de onda, que pode manter a coerência entre os autoestados de massa.

No Capítulo 2 propagaremos o neutrino na matéria, tanto na sua forma em ondas planas como em pacotes de onda. Analisaremos as condições exigidas para a propagação ser adiabática. Estudaremos o caso não-adiabático também. Tais regimes de propagação independem do formalismo que usamos, mas daremos ênfase em suas deduções a partir das ondas planas. Apresentaremos a propagação adiabática para os pacotes de onda, mostrando as mudanças ocorridas nos comprimentos de oscilação e comprimentos de coerência.

No Capítulo 3 discutiremos a fenomenologia de colapsos gravitacionais e supernovas, destacando os dois principais modelos de explosão de supernovas. Realçaremos com a participação dos neutrinos, encerrando a descrição com a observação e a descrição sucinta de SN1987A.

No Capítulo 4 confrontaremos o formalismo de pacotes de onda com o formalismo de ondas planas para a oscilação de neutrinos em uma supernova de 15 massas solares, já que as supernovas são os únicos meios duvidosos para os quais não se sabe ao certo se a oscilação de neutrinos ocorrerá. Usaremos os parâmetros conhecidos de oscilação solar, atmosférico e de LSND para nossa análise.

Por fim, apresentaremos as conclusões gerais deste trabalho.

Anexados ao final, encontram-se quatro apêndices. O Apêndice A complementa a dedução da expressão de probabilidade de oscilação em pacotes de onda apresentada no Capítulo 1. O Apêndice B traz as correções dos pacotes de onda à expressão de

probabilidade “level crossing” quando temos propagações não-adiabáticas. O Apêndice C, que trata da influência da oscilação de neutrinos na evolução de um “fireball” de um “gamma-ray burst” (GRB), descreve o trabalho paralelo realizado a esta dissertação, apresentado no Exame de Qualificação de Mestrado (EQM). O Apêndice D traz o artigo a ser publicado no Brazilian Journal of Physics - Proceedings of the I LAWHEP (Latin American Workshop in High Energy Physics), ocorrido em Porto Alegre, com minha participação no trabalho de Alex Bernardini e do Prof. Dr. Marcelo M. Guzzo. O artigo trata de correções de segunda ordem na probabilidade de oscilação usando pacotes de onda.

---

## Referências - Introdução

---

1. B. Pontecorvo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33** (1957) 549 e **34** (1958) 247; Z. Maki, N. Nakagawa e S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870; B. Pontecorvo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53** (1967) 1717.

## Neutrinos no Vácuo

A oscilação de neutrinos foi proposta por Bruno Pontecorvo no final dos anos 50 [1,2]. Sabemos que o fenômeno de oscilação ocorre devido à interferência de diferentes neutrinos massivos, com uma diferença de massa muito pequena entre eles, e são produzidos e detectados de forma coerente. Nos últimos anos experimentos parecem confirmar que o fenômeno de oscilação é a melhor explicação para o chamado problema do neutrino solar [3], percebido pelo experimento de Homestake em 1968, e também para o problema do neutrino atmosférico [4].

Em 1962, Maki, Nakagawa e Sakata [5] consideraram um primeiro modelo de mistura para diferentes sabores de neutrinos. Em 1967, Pontecorvo propôs a possibilidade de que os neutrinos solares oscilassem [6]. Em 1969, Pontecorvo e Gribov buscaram na oscilação  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  a possível explicação para o problema do neutrino solar [7].

Na metade dos anos 70, Eliezer e Swift [8], Fritzsche e Minkowski [9], Bilenky e Pontecorvo [10] e uma ótima revisão por Bilenky e Pontecorvo [11] trataram da teoria de oscilação de neutrinos usando a aproximação por ondas planas.

Em 1976, Nussinov [12] pela primeira vez considerou a propagação de neutrinos usando pacotes de onda. Ele também inferiu a existência de um comprimento de coerência, acima do qual a interferência de diferentes neutrinos massivos não é observada. Isto ocorre devido à diferença de velocidades de grupo dos diferentes neutrinos massivos, ocasionando, por consequência, a separação de seus respectivos pacotes de onda.

Em 1981, Kayser [13] apresentou as primeiras discussões detalhadas dos problemas mecânico quânticos da oscilação de neutrinos, destacando a necessidade do tratamento por pacotes de onda.

Modelos de oscilação de neutrinos em pacotes de onda foram desenvolvidos usando o formalismo da mecânica quântica [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] e também da teoria quântica de campos [21, 22, 23, 24, 25, 26], sendo revisados pelas referências [27], [28] e [29].

## 1.1) Ondas Planas de Neutrinos no Vácuo [30]

O neutrino do elétron,  $\nu_e$ , é o estado produzido em um decaimento beta, sendo que um pósitron também é produzido. O neutrino muônico,  $\nu_\mu$ , é o estado produzido em um decaimento de um pión  $\pi^+$ , acompanhado por um  $\mu^+$ . Chamamos os neutrinos eletrônicos ( $\nu_e$ ), os neutrinos muônicos ( $\nu_\mu$ ), assim como os neutrinos tauônicos ( $\nu_\tau$ ), de “estados de sabores” de neutrinos. Mas será que estes estados de sabores são partículas físicas ou podem ser formados por uma superposição de diferentes partículas físicas, por exemplo  $\nu_1$  e  $\nu_2$ ?

Vamos então, partindo da hipótese, por exemplo, que  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$  são formados pela superposição das partículas físicas  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , analisar as conseqüências físicas deste fato. Introduzimos a seguinte notação

$$\nu^{(f)} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \nu^{(p)} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \text{ e} \quad (1.1)$$

vamos considerar que o estado de sabor  $\nu^{(f)}$  é diferente do estado  $\nu^{(p)}$ , relacionando-os da seguinte maneira:

$$\nu^{(f)} = U\nu^{(p)}. \quad (1.2)$$

$U$  é chamado de matriz de mistura. Por convenção, os estados em  $\nu^{(f)}$  e  $\nu^{(p)}$  são ortonormais e, portanto,  $U$  deve ser unitária. Nossa matriz de mistura é 2x2, pois estamos usando somente duas famílias de neutrinos. Se incluíssemos o neutrino tauônico ( $\nu_\tau$ ) em  $\nu^{(f)}$ , deveríamos adicionar  $\nu_3$  em  $\nu^{(p)}$ , sendo que  $U$  seria uma matriz agora 3x3. Vamos nos restringir aqui a apenas duas famílias por questão de simplicidade e por acharmos suficiente para a compreensão do fenômeno por enquanto.

A equação de evolução temporal escrita na base  $\nu^{(p)}$  é:

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(p)}(t) = H \nu^{(p)}(t), \quad (1.3)$$

em que  $H$  é o Hamiltoniano, diagonal na base escolhida:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

com  $E_1$  e  $E_2$  sendo a energia dos respectivos autoestados de massa. Sabemos que  $m_\alpha \ll E_\alpha$ , para  $\alpha = 1,2$ , sendo  $m_\alpha$  a massa. Para tal aproximação escrevemos, sendo  $\vec{p}$  o tri-momento,

$$E_\alpha \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m_\alpha^2} \cong |\vec{p}| + \frac{m_\alpha^2}{2|\vec{p}|}. \quad (1.5)$$

O Hamiltoniano, usando (1.5) e considerando que podemos usar a distância  $x$  ao invés do tempo  $t$ , pode ser escrito agora da seguinte maneira:

$$H = |\vec{p}| + \frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} = \left( |\vec{p}| + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4|\vec{p}|} \right) - \frac{\Delta}{4|\vec{p}|} \sigma_3, \quad (1.6)$$

sendo que  $\sigma_3$  é a matriz diagonal de Pauli e que  $\Delta \equiv m_2^2 - m_1^2$ . Vamos agora escrever a equação de evolução na base de sabores. Lembrando que

$$\mathbf{v}^{(p)} = U^\dagger \mathbf{v}^{(f)}, \quad (1.7)$$

teremos, na base dos sabores,

$$i \frac{d}{dx} (U^\dagger \mathbf{v}^{(f)}) = H U^\dagger \mathbf{v}^{(f)}, \quad (1.8)$$

que, com algumas manipulações, pode ser reescrita como

$$i \frac{d}{dx} \mathbf{v}^{(f)} = U H U^\dagger \mathbf{v}^{(f)}. \quad (1.9)$$

Para dois neutrinos de Dirac

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

O Hamiltoniano na base dos sabores será dado por

$$H' = U H U^\dagger = |\vec{p}| + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4|\vec{p}|} + \frac{\Delta}{4|\vec{p}|} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \text{sen} 2\theta \\ \text{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

A partir disto, deduzimos a relação entre o ângulo diagonalizado  $\theta$  e os elementos da matriz  $H'$ :

$$\text{tg} 2\theta = \frac{2H'_{12}}{H'_{22} - H'_{11}}. \quad (1.12)$$

A solução da equação de movimento na base de sabores será

$$\nu^{(f)}(x) = \exp(-iHx)\nu^{(f)}(0). \quad (1.13)$$

Fazendo a aproximação de que  $|\vec{p}| = E$  e notando que no Hamiltoniano  $H'$  temos um termo proporcional à matriz de mistura unitária, o que dá uma fase global à solução e que também não muda o ângulo de mistura, escrevemos o Hamiltoniano como:

$$H' = \frac{\Delta}{4E}(\sigma_1 \text{sen} 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta). \quad (1.14)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nu^{(f)}(x) &= \exp\left[-i \frac{\Delta}{4E} x (\sigma_1 \text{sen} 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta)\right] \nu^{(f)}(0) = \\ &= \left[ \cos \frac{\Delta}{4E} x - i (\sigma_1 \text{sen} 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \text{sen} \frac{\Delta}{4E} x \right] \nu^{(f)}(0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Considerando um feixe inicial  $\nu_e$ , as probabilidades de transição e sobrevivência serão dadas, respectivamente, por:

$$P_{\nu_e \nu_\mu}(x) = \left| \langle \nu_\mu | \nu_e(x) \rangle \right|^2 = \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta}{4E} x \right) \quad (1.16)$$

$$P_{\nu_e \nu_e}(x) = 1 - P_{\nu_e \nu_\mu}(x). \quad (1.17)$$

## 1.2) Pacotes de Onda de Neutrinos no Vácuo

Em geral tratamos a oscilação de neutrinos da seguinte maneira [27]:

- Neutrino é uma partícula extremamente relativística, isto é, seu momento é muito maior que sua massa.
- Um dado sabor de neutrino possui um momento bem definido que será comum para todos os autoestados de massa.
- Diferentes autoestados de massa possuem diferentes energias bem definidas e dadas pelas relações de dispersão de energia-momento.
- A onda do neutrino é formada por uma superposição de **ondas planas**, cada uma correspondendo a um certo autoestado de massa.

O formalismo de ondas planas, tanto no vácuo quanto na matéria, é bem atrativo por sua simplicidade, mas não dá a completa base de compreensão da oscilação de neutrinos. Sendo não completo o tratamento por ondas planas, poderíamos nos indagar o que está

faltando? Nossa resposta seria com duas perguntas: e se os neutrinos não forem relativísticos? E quanto à coerência entre os autoestados de massa? A resposta para a primeira das duas perguntas não será respondida por esta dissertação, uma vez que existe a necessidade de fazermos um tratamento por teoria quântica de campos. Neutrinos não-relativísticos podem ser produzidos em experimentos de oscilação se a massa de  $\nu_\mu$  ou  $\nu_\tau$  se tornar maior que os limites superiores do experimento permitir.

Mas vamos, de forma mais efetiva, nos preocupar com a segunda pergunta sobre a coerência dos autoestados de massa e discutir o conceito do comprimento de coerência e sua importância para o fenômeno de oscilação dos neutrinos. Esta análise depende somente de características cinemáticas da propagação dos pacotes de onda, sendo satisfatoriamente satisfeita por neutrinos relativísticos usando a usual e tradicional mecânica quântica.

Para uma análise completa da oscilação de neutrinos precisamos:

- A fonte de neutrino e o detector precisam ser localizados separadamente dentro de uma região muito maior que o comprimento de oscilação. O espalhamento do momento do neutrino é dado pelo princípio da incerteza [13].
- A conservação de energia-momento no processo de produção do neutrino implica que diferentes componentes do autoestado de massa possuem momentos diferentes, assim como energias diferentes.
- O autoestado de massa deve ser produzido e detectado coerentemente. Só é possível isto ocorrer se as partículas associadas aos processos de produção e detecção possuem espalhamentos energia-momento maiores que as diferenças de energia-momento dos autoestados de massa.
- A onda de propagação do neutrino deverá ser uma superposição de ondas de autoestados de massa com coeficientes próprios dado pela amplitude dos processos nos quais os autoestados de massa dos neutrinos são produzidos.

A localização da fonte de neutrinos e o espalhamento do momento do neutrino – as primeiras duas condições acima citadas – implicam que a propagação do neutrino deve ser descrita não por uma superposição de ondas planas, mas sim por uma superposição de pacotes de onda localizados.

Trataremos, portanto, o neutrino como uma superposição de pacotes de onda, cada qual representando um autoestado de massa e satisfazendo as suposições feitas acima, mas sem calcular as amplitudes dos processos de interação pelos quais os neutrinos são produzidos e detectados. Assumiremos que tais pacotes de onda terão forma gaussiana com tamanho  $\sigma_x$  e os coeficientes de superposição são dados pelos elementos da matriz de mistura  $U$  que conectam a base de sabor fraca com a base dos autoestados de massa.

Para neutrinos relativísticos, as amplitudes dos processos de produção e de detecção podem ser aproximadas pela menor ordem das amplitudes dos neutrinos sem massa. Como de costume, a seção de choque observada pode ser fatorada como um produto da probabilidade de oscilação pela seção de choque calculada a partir de neutrinos sem massa. A probabilidade de oscilação depende dos elementos da matriz de mistura e da interferência

quanto-mecânica espaço-temporal entre os autoestados de massa como consequência da propagação do neutrino.

Como mostraremos mais adiante, uma das consequências do tratamento de pacotes de onda é a existência de um comprimento de coerência para a oscilação de neutrinos. Autoestados de massa de pacotes de onda propagam com diferentes velocidades, sobrepõem-se e interferem somente por uma distância finita. Deduzimos o comprimento de coerência fazendo a média sobre o tempo na probabilidade de oscilação. Isto é consistente, já que nos experimentos o que se sabe é a distância entre produção e detecção, enquanto que o tempo é uma quantidade desconhecida.

Quando falamos em pacotes de onda se propagando no espaço-tempo, devemos nos perguntar o tamanho destes pacotes, assunto a ser discutido agora.

### ***1.2.1) Tamanho dos pacotes de onda [27]***

O tamanho de um pacote de onda,  $\sigma_x$ , é determinado pela região onde ocorre o processo de produção do neutrino. No caso de um plasma, o tamanho de um pacote de onda é determinado pelo processo chamado de “pressure broadening” e é dado por:

$$\sigma_x \cong \frac{T^2}{N}, \quad (1.18)$$

em que  $T$  e  $N$  são, respectivamente, a temperatura e a densidade do plasma. (1.18) é válido para um plasma com partículas que são relativísticas.

Vamos tomar como exemplo o centro solar. Nele a emissão coerente, por exemplo de  $\nu_e$ , é constantemente interrompida pela interação eletromagnética entre as partículas que produzem  $\nu_e$  e as partículas da vizinhança, que possuem um tempo de escala muito menor que o tempo de escala de interação fraca. Neste caso,  $\sigma_x$  é dado por

$$\sigma_x \cong \frac{l}{v}, \quad (1.19)$$

em que  $l$  é o livre caminho médio da partícula que produz  $\nu_e$  e  $v$  é sua velocidade média térmica.

Por definição,  $l$  é dado por

$$l \cong \frac{1}{\pi b^2 N}, \quad (1.20)$$

sendo  $N$  a densidade de partículas do meio e  $b$  o parâmetro de impacto, que no campo Coulombiano, é dado por

$$\frac{3}{2}T \cong \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b}, \quad (1.21)$$

com  $Z_1$  e  $Z_2$  sendo as cargas em unidades de  $e$  das partículas que estão interagindo. Relacionando (1.20) e (1.21) e sabendo que  $e^2/4\pi = 1/137$  e  $1MeV = 5,06 \times 10^{10} cm^{-1}$ , temos que

$$l \cong 2,18 \times 10^{23} \frac{T^2}{Z_1^2 Z_2^2 N} cm. \quad (1.22)$$

Lembrando que  $T$  e  $N$  são dados em MeV e  $cm^{-3}$ , respectivamente. Para uma fonte de partículas não-relativística com massa  $m$  a relação

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}T \quad (1.23)$$

permite que escrevamos

$$v = \sqrt{\frac{3T}{m}}. \quad (1.24)$$

Para uma fonte de partículas relativística, a relação

$$E = \frac{3}{2}T + m \quad (1.25)$$

permite que escrevamos

$$v = \sqrt{\frac{3T(3T + 4m)}{(3T + 2m)^2}}. \quad (1.26)$$

Para os nossos casos de interesse, vamos usar fontes de partículas onde a relação (1.24) é válida. Obtemos portanto

$$\sigma_x \cong \frac{l}{v} \cong \frac{T^{3/2}}{N}. \quad (1.27)$$

Escrevendo (1.27) usando (1.22) e (1.24) temos

$$\sigma_x \cong 1,26 \times 10^{23} \frac{\sqrt{m}T^{3/2}}{Z_1^2 Z_2^2 N} cm. \quad (1.28)$$

Vamos agora para diversas situações e meios calcular o tamanhos dos pacotes de onda dos neutrinos usando a equação (1.28) acima.

*a-) neutrinos do Sol*

Para  $\nu_e$  originados no processo  ${}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e$ , com  $T \cong 1,3keV$  e  $\rho \cong 120 g/cm^3$ ,

$$\sigma_x \cong 3,15 \times 10^{-7} cm. \quad (1.29)$$

Temos também  $\nu_e$  solares produzidos pela reação  $p + p \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu_e$ . Este processo ocorre a uma temperatura de  $T \cong 1,1keV$  e  $\rho \cong 100 g/cm^3$ . Logo,

$$\sigma_x \cong 2,34 \times 10^{-6} cm. \quad (1.30)$$

*b-) neutrinos de supernova*

Para neutrinos do centro da supernova ( $R \leq 20km$ ), temos  $T = 10 - 100MeV$  e  $\rho \cong 10^{14} g/cm^3$ . Então o tamanho do pacote de onda para estes neutrinos pertence ao intervalo

$$\sigma_x \cong 4,74 \times 10^{-14} - 1,49 \times 10^{-12} cm. \quad (1.31)$$

O tamanho dos pacotes de neutrinos oriundos da neutrinosfera é

$$\sigma_x \cong 1,67 \times 10^{-10} cm. \quad (1.32)$$

Em (1.32) usamos os parâmetros  $T \cong 5MeV$  e  $\rho \cong 10^{10} g/cm^3$  para o cálculo.

*c-) neutrinos de reatores*

Neutrinos de reatores não são produzidos em um plasma, portanto, devemos estimar  $\sigma_x$  de uma maneira diferente. Vamos listar abaixo as seguintes considerações:

- Neutrinos de reatores são produzidos a partir do decaimento de um material sólido;
- O movimento dos elétrons determina a temperatura do material em questão;
- Os núcleos se movem lentamente num meio cheio de elétrons. O tempo de emissão coerente do decaimento deste núcleo é grande;
- O elétron produzido no decaimento se move rapidamente e tem sua trajetória alterada devido à interação com o núcleo. Como consequência, a emissão dos produtos do decaimento irá perder coerência.

Tomando  $T \cong 1MeV$  (energia cinética do elétron), número de massa  $A \cong 238$  (um dos possíveis isótopos do urânio),  $\rho \cong 20 g/cm^3$ , calculamos o livre caminho médio que é aproximadamente o tamanho do pacote de onda:

$$l \cong \sigma_x = 5,10 \times 10^{-4} \text{ cm} . \quad (1.33)$$

*d-) neutrinos de aceleradores*

Em neutrinos de aceleradores,  $\sigma_x \cong ct$ , em que  $t$  é um tempo típico de escala de interações fracas que produzem neutrinos nos laboratórios. Por exemplo,  $t \cong 10^{-8} \text{ s}$  quando os neutrinos são produtos de decaimento de  $\pi$  e K.

Logo, o tamanho dos pacotes de onda é

$$\sigma_x \cong 1,0 \times 10^2 \text{ cm} . \quad (1.34)$$

Na Tabela 1.1, resumimos todos os tamanhos dos pacotes e parâmetros usados para os cálculos acima apresentados nas diversas situações.

<i>Experimento</i>	<i>Parâmetros</i>	$\sigma_x \text{ (cm)}$
<b>Solar</b>	T=1,3keV N=7,22 × 10 <sup>25</sup> cm <sup>-3</sup> ρ =120g/cm <sup>3</sup>	<b>3,15 × 10<sup>-7</sup></b>
	T=1,1keV N=6,02 × 10 <sup>25</sup> cm <sup>-3</sup> ρ =100g/cm <sup>3</sup>	<b>2,40 × 10<sup>-6</sup></b>
<b>Acelerador</b>	t = 10 <sup>-8</sup> s	<b>1,00 × 10<sup>2</sup></b>
<b>Reator</b>	T = 1MeV ρ = 20g/cm <sup>3</sup> A=238 (Urânio)	<b>5,1 × 10<sup>-4</sup></b>
<b>Supernova</b>	T=10 – 100 MeV ρ =10 <sup>14</sup> g/cm <sup>3</sup> N=6,02 × 10 <sup>37</sup> cm <sup>-3</sup>	<b>4,74 × 10<sup>-14</sup> – 1,49 × 10<sup>-12</sup></b>
	T=5MeV ρ =10 <sup>10</sup> g/cm <sup>3</sup> N=6,02 × 10 <sup>33</sup> cm <sup>3</sup>	<b>1,674 × 10<sup>-10</sup></b>

**Tabela 1.1: Tamanho dos pacotes de onda**

**1.2.2) O formalismo de pacotes de onda no vácuo.**

Para construirmos os pacotes de onda para nossos autoestados de massa, fazemos as seguintes considerações:

- O problema será tratado de maneira unidimensional, portanto podemos negligenciar o espalhamento do momento ortogonal à direção de propagação  $x$ ;

- Os pacotes de onda dos autoestados de massa possuem um formato gaussiano com largura  $\sigma_p$  no espaço dos momentos;
- Os pacotes gaussianos dos autoestados de massa são centrados ao redor do valor médio de momento  $\langle p_a \rangle$ , determinado pela cinemática do processo de produção (conservação energia-momento).

Nosso pacote de onda no espaço dos momentos terá a seguinte forma em sua respectiva função de onda:

$$\psi_a(p) = [\sqrt{2\pi}\sigma_p]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(p - \langle p_a \rangle)^2}{4\sigma_p^2}\right\}. \quad (1.35)$$

Podemos fazer a evolução temporal do pacote de onda no espaço das coordenadas, que na prática é o que nos interessa. A função de onda de nossos autoestados de massa será representada por

$$\psi_a(x,t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2}} \psi_a(p) \exp\{ipx - E_a t\}. \quad (1.36)$$

De (1.35) e (1.36) tiramos

$$\psi_a(x,t) = [\sqrt{2\pi}\sigma_x]^{-1/2} \exp\left\{i(\langle p_a \rangle x - \langle E_a t \rangle) - \frac{(x - v_a t)^2}{4\sigma_x^2}\right\}. \quad (1.37)$$

Na expressão (1.37) acima, a energia  $\langle E_a \rangle$  e a velocidade de grupo  $v_a$  são dadas por

$$\langle E_a \rangle = \sqrt{\langle p_a \rangle^2 + m_a^2} \quad \text{e} \quad (1.38)$$

$$v_a = \frac{\langle p_a \rangle}{\langle E_a \rangle}. \quad (1.39)$$

As larguras  $\sigma_x$  e  $\sigma_p$  estão relacionadas pela relação de incerteza  $\sigma_x \sigma_p = 1/2$ .

Munido de todas as informações relevantes, temos agora como objetivo encontrar a expressão de probabilidade de conversão de sabores neste formalismo de pacotes de onda. Vamos fazer para a propagação no vácuo, isto é, sem a presença de um potencial efetivo de matéria.

Consideremos inicialmente um neutrino  $\nu_\alpha$  (de sabor  $\alpha$ ) criado por um processo fraco nas coordenadas  $x = 0$  e  $t = 0$  e detectado em  $x = X$  e no tempo  $t = T$ . Quando  $\nu_\alpha$  chega em  $x = X$  e  $t = T$ , ele pode ser descrito como um estado

$$|\psi_\alpha(X, T)\rangle = \sum_a U_{\alpha a}^* \psi_a(X, T) |v_a\rangle. \quad (1.40)$$

O operador densidade correspondente, com  $p = p_a = p_b$  é dado por

$$\rho(X, T) \equiv |\psi_\alpha(X, T)\rangle\langle\psi_\alpha(X, T)| = \sum_{a,b} U_{\alpha a}^* \psi_a(X, T) |v_a\rangle\langle v_b| \psi_b^*(X, T) U_{\alpha b}. \quad (1.41)$$

Usando a definição (1.40) e desenvolvendo o operador densidade temos:

$$\rho(X, T) = [\sqrt{2\pi\sigma_x}]^{-1} \sum U_{\alpha a}^* U_{\alpha b} \exp(-i(E_a - E_b)T) |v_a\rangle\langle v_b| \exp\left(-\frac{(X - v_a T)^2}{4\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(X - v_b T)^2}{4\sigma_x^2}\right) \quad (1.42)$$

A probabilidade de encontrarmos um estado de sabor  $v_\beta$  no ponto  $X$  e no tempo  $T$  é obtida usando (1.42). Portanto,

$$P(v_\alpha \rightarrow v_\beta; X, T) = Tr\{\rho(X, T) |v_\beta\rangle\langle v_\alpha|\} = \langle v_\beta | \rho(X, T) |v_\alpha\rangle$$

$$P(v_\alpha \rightarrow v_\beta; X, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \sum_{a,b} U_{\beta a} U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* U_{\alpha b} \times \exp\{i(\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle)X - i(E_a - E_b)T\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(X - v_a T)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(X - v_b T)^2}{4\sigma_x^2}\right\} \quad (1.43)$$

Na prática, sabemos a distância  $X$ , enquanto que o tempo  $T$  não é medido. Portanto, a probabilidade em uma distância  $X$  é dada pela média temporal da expressão (1.43). A integração no tempo será feita completando-se os quadrados na exponencial de (1.43). A probabilidade de conversão pode ser escrita como (sua expressão está deduzida por completo no Apêndice A deste trabalho):

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(X) = \left[ \sum_{a'} \frac{|U_{\alpha a'}|^2}{|v_{a'}|} \right] \sum_{a,b} U_{\beta a} U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* U_{\alpha b} \times \exp\left\{i \left[ (\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle) - (\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) \left( \frac{v_a + v_b}{v_a^2 + v_b^2} \right) \right] X \right\}$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{v_a^2 + v_b^2}} \exp\left\{-\frac{X^2}{4\sigma_x^2} \frac{(v_a - v_b)^2}{v_a^2 + v_b^2} - \frac{(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle)^2}{4\sigma_p^2 (v_a^2 + v_b^2)}\right\} \quad (1.44)$$

Lembrando que a expressão acima indica a probabilidade de um neutrino  $v_\alpha$  criado em  $x = 0$  ser detectado como  $v_\beta$  em  $x = X$ .

Vamos analisar cada termo de (1.44).

$$\text{a-) Termo fator de fase: } \exp \left\{ i \left[ \left( \langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle \right) - \left( \langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle \right) \left( \frac{v_a + v_b}{v_a^2 + v_b^2} \right) \right] X \right\}$$

Este termo fornece a oscilação do neutrino em função da distância  $X$  percorrida a partir da fonte produtora.

O comprimento de oscilação é quando o termo da exponencial acima se iguala a  $2\pi$ . Pode ser escrito, portanto, como:

$$L_{osc} = \frac{2\pi}{|\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle|} \left[ \frac{v_a + v_b}{v_a^2 + v_b^2} - \frac{\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle}{\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle} \right]^{-1}. \quad (1.45)$$

Para neutrinos extremamente relativísticos podemos escrever que

$$L_{osc} = \frac{2\pi}{|\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle|} \left[ 1 - \frac{\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle}{\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle} \right]^{-1} = 2\pi \left[ \frac{1}{(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - (\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle)} \right].$$

$$\text{Mas } E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow E = p \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \right)^{1/2} \cong p \left( 1 + \frac{m^2}{2p^2} \right).$$

Usando a aproximação acima para cada autoestado de massa chegamos a seguinte expressão:

$$L_{osc} = 2\pi \left[ \langle p_a \rangle \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_a^2}{\langle p_a^2 \rangle} \right) - \langle p_b \rangle \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_b^2}{\langle p_b^2 \rangle} \right) - (\langle p_a \rangle + \langle p_b \rangle) \right]^{-1}.$$

Se usarmos a aproximação  $E \cong \langle p_a \rangle \cong \langle p_b \rangle$ , então chegamos que finalmente o comprimento de oscilação pode ser dado por:

$$L_{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}. \quad (1.46)$$

$$\text{b-) termo fator de amortecimento: } \exp \left\{ - \frac{X^2}{4\sigma_x^2} \frac{(v_a - v_b)^2}{v_a^2 + v_b^2} \right\}$$

Este termo mede a coerência das contribuições dos pacotes de ondas dos diferentes autoestados de massa. O comprimento de coerência é dado por

$$L_{coh} \equiv 2\sigma_x \sqrt{\frac{v_a^2 + v_b^2}{(v_a - v_b)^2}}. \quad (1.47)$$

Notamos que a expressão indica que é a distância percorrida para que a probabilidade caia com  $1/e$ .

Usando as mesmas aproximações para o cálculo do comprimento de oscilação e usando (1.39), isto é, considerando neutrinos extremamente relativísticos, temos

$$L_{coh} = \frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{|v_a - v_b|} = 2\sqrt{2}\sigma_x \frac{1}{\left| \frac{\langle p_a \rangle}{\langle E_a \rangle} - \frac{\langle p_b \rangle}{\langle E_b \rangle} \right|} = 2\sqrt{2}\sigma_x \left| \frac{1}{\left(1 + \frac{m_a^2}{\langle p_a^2 \rangle}\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_b^2}{\langle p_b^2 \rangle}\right)^{1/2}} \right|^{-1}$$

$$L_{coh} = 2\sqrt{2}\sigma_x \frac{1}{\left| 1 - \frac{m_a^2}{2\langle p_a^2 \rangle} - 1 + \frac{m_b^2}{2\langle p_b^2 \rangle} \right|} = \frac{4\sqrt{2}E^2\sigma_x}{|\Delta m^2|}. \quad (1.48)$$

c-) termo fator exponencial:  $\exp\left\{-\frac{(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle)^2}{4\sigma_p^2(v_a^2 + v_b^2)}\right\}$

Este termo surge devido à integração temporal (ver Apêndice A) e garante a conservação de energia dentro da incerteza dada pelo comprimento  $\sigma_p$ . Notamos que este fator não depende da distância  $X$  e sua presença significa que, se  $(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) \geq \sigma_p \sqrt{v_a^2 + v_b^2}$ , a integração temporal suprime a interferência dos autoestados de massa.

O cálculo de  $\sigma_p$  se dá simplesmente usando a relação de incerteza  $\sigma_x \sigma_p = 1/2$ . Vamos apresentar os mais diversos valores dos tamanhos dos pacotes de onda no espaço dos momentos ( $\sigma_p$ ):

a-) neutrinos do Sol

Para  $\nu_e$  originados no processo  ${}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e$ , usando (1.29), temos

$$\sigma_p \cong 3,14 \times 10^{-5} \text{ MeV}. \quad (1.49)$$

Para  $\nu_e$  solares produzidos pela reação  $p + p \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu_e$ , resulta em

$$\sigma_p \cong 4,22 \times 10^{-6} \text{ MeV} . \quad (1.50)$$

*b-) neutrinos de supernova*

Para neutrinos do centro da supernova, o tamanho dos pacotes no espaço dos momentos estará em um intervalo

$$\sigma_p \cong 6,72 - 208 \text{ MeV} . \quad (1.51)$$

O tamanho destes pacotes de neutrinos oriundos da neutrinosfera é

$$\sigma_p \cong 0,060 \text{ MeV} . \quad (1.52)$$

*c-) neutrinos de reatores*

Para o valor apresentado abaixo, usamos (1.33) e obtivemos, portanto,

$$\sigma_p = 1,90 \times 10^{-8} \text{ MeV} . \quad (1.53)$$

*d-) neutrinos de aceleradores*

Usando o valor encontrado em (1.34), teremos

$$\sigma_p \cong 9,87 \times 10^{-14} \text{ MeV} . \quad (1.54)$$

Na Tabela 1.2, resumimos todos os tamanhos dos pacotes no espaço dos momentos ( $\sigma_p$ ) e parâmetros usados e apresentados também na Tabela 1.1 para os cálculos acima apresentados nas diversas situações.

<i>Experimento</i>	<i>Parâmetros</i>	$\sigma_p$ (MeV)
<b>Solar</b>	T=1,3keV N=7,22×10 <sup>25</sup> cm <sup>-3</sup> P =120g/cm <sup>3</sup>	<b>3,14×10<sup>-5</sup></b>
	T=1,1keV N=6,02×10 <sup>25</sup> cm <sup>-3</sup> P =100g/cm <sup>3</sup>	<b>4,22×10<sup>-6</sup></b>
<b>Acelerador</b>	T = 10 <sup>-8</sup> s	<b>9,87×10<sup>-14</sup></b>
<b>Reator</b>	T = 1MeV $\rho = 20\text{g/cm}^3$ A=238 (Urânio)	<b>1,90×10<sup>-8</sup></b>
<b>Supernova</b>	T=10 – 100 MeV $\rho = 10^{14}\text{g/cm}^3$ N=6,02×10 <sup>37</sup> cm <sup>-3</sup>	<b>6,72 – 208</b>
	T=5MeV $\rho = 10^{10}\text{g/cm}^3$ N=6,02×10 <sup>33</sup> cm <sup>3</sup>	<b>0,060</b>

**Tabela 1.2: Tamanho dos pacotes de onda no espaço dos momentos**

Para sabermos se o termo exponencial é efetivo, isto é, suprime a oscilação, devemos calcular  $\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle$ . Lembrando que a energia de um autoestado de massa pode ser dada por  $E \cong p \left( 1 + \frac{m^2}{2p^2} \right)$ , fazemos

$$\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle \cong \langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle + \frac{m_a^2}{2\langle p_a \rangle} - \frac{m_b^2}{2\langle p_b \rangle} \cong \frac{\Delta m^2}{2E}. \quad (1.55)$$

Apresentamos na Tabela 1.3 abaixo os valores de  $\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle$  para as situações citadas. Estamos usando  $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$  e  $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$ . Para o caso solar, a energia usada foi de 10 MeV, para aceleradores, 1 GeV e para reatores, 1 MeV. Para o centro da supernova, usamos uma energia máxima de 100 MeV, e para a região da neutrinosfera, uma energia de 10 MeV. Os três valores de diferença de energia entre os autoestados de massa, nas regiões do centro e neutrinosfera da supernova, se referem, de cima para baixo, a diferentes  $\Delta m^2$ .

<i>Experimento</i>	$\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle$ (MeV)
<b>Solar</b>	$3,65 \times 10^{-18}$
<b>Acelerador</b>	$5,00 \times 10^{-19}$
<b>Reator</b>	$3,65 \times 10^{-17}$
<b>Supernova (Centro)</b>	$3,65 \times 10^{-19}$ ( $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$ ) $5,00 \times 10^{-18}$ ( $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$ ) $0,5 \times 10^{-6}$ ( $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^8 eV^2$ )
<b>Supernova (Neutrinosfera)</b>	$3,55 \times 10^{-18}$ ( $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$ ) $5,0 \times 10^{-17}$ ( $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$ ) $5,0 \times 10^{-10}$ ( $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^6 eV^2$ )

**Tabela 1.3: Diferenças de energia entre os autoestados de massa.**

Notamos que, comparando os valores dos  $\sigma_p$  com  $\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle$ , em todas as situações  $(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) \ll \sigma_p \sqrt{v_a^2 + v_b^2}$ . Portanto, o termo exponencial da expressão da probabilidade pode ser negligenciado.

d-) outros fatores:  $\sqrt{\frac{2}{v_a^2 + v_b^2}}; \left[ \sum_{a'} \frac{|U_{\alpha a'}|^2}{|v_{a'}|} \right]$

O primeiro fator acima,  $\sqrt{\frac{2}{v_a^2 + v_b^2}}$ , é devido à integração temporal e leva em conta o fato de que a probabilidade média no tempo de encontrarmos um autoestado de massa do neutrino numa distância  $X$  é inversamente proporcional a sua velocidade. Para neutrinos extremamente relativísticos, este termo é unitário e tem importância nula.

O segundo fator acima mostrado,  $\left[ \sum_{a'} \frac{|U_{\alpha a'}|^2}{|v_{a'}|} \right]$ , é o fator de normalização, colocado forçadamente [27].

### 1.3) Quando os neutrinos irão oscilar?

O comprimento de oscilação e o comprimento de coerência foram dados pelas expressões (1.46) e (1.48), respectivamente. Podemos pensar que a distância  $X$  percorrida pelos neutrinos deve ser maior necessariamente que o comprimento de oscilação. Devemos “dar” uma distância para percebermos que o padrão oscilatório existe. Mas, é fundamental

que os pacotes de onda dos autoestados de massa percorram a distância  $X$  acoplados entre si para que a oscilação ocorra. Logo, o comprimento de coerência, que se refere ao comprimento no qual os pacotes estão acoplados e interferindo entre si, deve ser maior que a distância percorrida, que, por sua vez, deve ser maior que o comprimento de oscilação. Logo, de maneira genérica, esperamos que ocorra o fenômeno de oscilação para

$$L_{coh} > L_{osc}. \quad (1.56)$$

Vamos verificar (1.56) para os diversos tipos de situação. Analisaremos a situação solar, de aceleradores e reatores, de neutrinos de altíssima energia, e de supernovas. Lembrando que para tal usaremos as expressões (1.46) e (1.48) e os valores dos tamanhos dos pacotes de onda encontrados e resumidos na Tabela 1.1.

- i) No caso dos **neutrinos solares**, com  $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$  e energia típica de 10 MeV dos neutrinos,  $L_{coh} = 2,44 \times 10^7 km$  e  $L_{osc} = 3,40 \times 10^2 km$ . Notamos que (1.56) é satisfeito, portanto, devemos notar o padrão oscilatório dos neutrinos.
- ii) No caso dos **neutrinos de reatores**, com  $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$  e 1 MeV de energia,  $L_{coh} = 3,95 \times 10^8 km$  e  $L_{osc} = 3,40 \times 10^1 km$ . Notamos que (1.56) também é satisfeito, portanto, o fenômeno de oscilação também deverá ocorrer.
- iii) Os **neutrinos de aceleradores** também irão oscilar, uma vez que (1.56) é respeitado. Usou-se  $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$  e neutrinos com energia típica de 1 GeV.  $L_{coh} = 5,65 \times 10^{18} km$  e  $L_{osc} = 2,48 \times 10^3 km$ .

Resumimos as informações obtidas acima na Tabela 1.4 logo abaixo.

	Energia (MeV)	$\Delta m^2 (eV^2)$	$L_{coh} (km)$	$L_{osc}(km)$
Solar	10	$7,1 \times 10^{-5}$	$2,44 \times 10^7$	$3,40 \times 10^2$
Reator	1	$7,1 \times 10^{-5}$	$3,95 \times 10^8$	$3,40 \times 10^1$
Acelerador	1000	$1,0 \times 10^{-3}$	$5,65 \times 10^{18}$	$2,48 \times 10^3$

Tabela 1.4: comprimento de coerência e comprimento de oscilação para os casos solares, de reatores e aceleradores.

Os **neutrinos de altíssima energia** são neutrinos oriundos, por exemplo, de núcleos ativos de galáxia (AGNs), que são formados por buracos negros supermassivos capazes de profuzir fótons e raios cósmicos altamente energéticos. Por mecanismos de Fermi, tais raios cósmicos podem ser acelerados até energias da ordem de TeV. Os prótons podem interagir com os fótons de “background” produzindo partículas  $\Delta$ . Estas podem decair da seguinte maneira:



Os píons produzidos podem, por sua vez, decaírem nos respectivos neutrinos, cuja reação, por exemplo, é:



Pela equação (1.58), vemos como os neutrinos são produzidos nos AGNs. Usaremos o tamanho dos pacotes de onda considerado nos aceleradores para tratar estes neutrinos de altíssima energia, já que podemos imaginar os núcleos ativos de galáxia como aceleradores capazes de fazer as partículas atingirem altíssimas energias. Consideramos duas energias típicas:  $10^{15}$  eV e  $10^{18}$  eV. Usamos também os dois valores de diferença de massa ao quadrado usado anteriormente. Apresentamos os resultados na Tabela 1.5 abaixo:

Energia	$\Delta m^2$ (eV <sup>2</sup> )	$L_{coh}$ (cm)	$L_{osc}$ (cm)
$10^{15}$ eV	$7,1 \times 10^{-5}$	$7,75 \times 10^{36}$	$3,40 \times 10^{15}$
	$1,0 \times 10^{-3}$	$5,66 \times 10^{35}$	$2,48 \times 10^{14}$
$10^{18}$ eV	$7,1 \times 10^{-5}$	$7,75 \times 10^{42}$	$3,40 \times 10^{18}$
	$1,0 \times 10^{-3}$	$5,66 \times 10^{41}$	$2,48 \times 10^{17}$

Tabela 1.5: comprimento de oscilação e comprimento de coerência para o caso de neutrinos de altíssima energia.

Notamos claramente pelos valores encontrados do comprimento de coerência e do comprimento de oscilação que os neutrinos de altíssima energia parecem oscilar.

Os **neutrinos de supernova**, que serão descritos no Capítulo 3, foram divididos em duas regiões típicas: os neutrinos do “core” estelar e os neutrinos da região da neutrinosfera. Para o “core”, com neutrinos de energia da ordem de 100 MeV:

- $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$  -  $L_{coh} = 1,15 \times 10^9 cm$  e  $L_{osc} = 3,40 \times 10^8 cm$ ;
- $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$  -  $L_{coh} = 8,43 \times 10^7 cm$  e  $L_{osc} = 2,50 \times 10^7 cm$  e
- $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^8 eV^2$  (diferença de massa ao quadrado efetiva estimada na matéria) -  $L_{coh} = 8,43 \times 10^{-4} cm$  e  $L_{osc} = 2,48 \times 10^{-4} cm$ .

Notamos que os valores encontrados para o comprimento de coerência e para o comprimento de oscilação estão muito próximos. Seria precipitado falar que os neutrinos realmente oscilam, já que (1.56) não é plenamente satisfeita, principalmente para  $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$  e  $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^8 eV^2$ .

Para a neutrinosfera, usando neutrinos com valor de energia de 10 MeV:

- $\Delta m^2 \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$  -  $L_{coh} = 1,30 \times 10^9 cm$  e  $L_{osc} = 3,40 \times 10^7 cm$ ;
- $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^{-3} eV^2$  -  $L_{coh} = 9,47 \times 10^7 cm$  e  $L_{osc} = 2,50 \times 10^6 cm$  e
- $\Delta m^2 \cong 1,0 \times 10^4 eV^2$  (diferença de massa ao quadrado efetiva estimada na matéria) -  $L_{coh} = 9,47 cm$  e  $L_{osc} = 0,25 cm$ .

Os valores apresentados para a neutrinosfera satisfazem à condição (1.56), mas não em tantas ordens de grandeza acima. Consideramos que o caso da supernova deve ser analisado com uma acuidade maior. Não podemos, sem uma análise mais precisa, afirmar com firmeza que os neutrinos de supernova realmente oscilam. Resumimos a situação das supernovas na Tabela 1.6.

	E(MeV)	$\Delta m^2(eV^2)$	Lcoh(cm)	Losc(cm)
"Core"	100	$7,1 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^9$	$3,40 \times 10^8$
	100	$1,0 \times 10^{-3}$	$8,43 \times 10^7$	$2,50 \times 10^7$
	100	$1,0 \times 10^8$	$8,43 \times 10^{-4}$	$2,48 \times 10^{-4}$
$\nu$ "esfera"	10	$7,1 \times 10^{-5}$	$1,30 \times 10^9$	$3,40 \times 10^7$
	10	$1,0 \times 10^{-3}$	$9,47 \times 10^7$	$2,50 \times 10^6$
	10	$1,0 \times 10^4$	<b>9,47</b>	<b>0,25</b>

Tabela 1.6 – comprimento de coerência e comprimento de oscilação para o caso de supernovas

Usando as relações (1.46) e (1.48), obtemos o gráfico abaixo, que indica que, para neutrinos com energia acima de 30 MeV aproximadamente, os neutrinos devem oscilar. No entanto, devemos notar que o gráfico mostra que a ordem de grandeza do comprimento de oscilação e do comprimento de coerência está muito próxima. Portanto, seria também precipitado falar que para neutrinos acima de 30 MeV ocorrerá *certamente* oscilação.

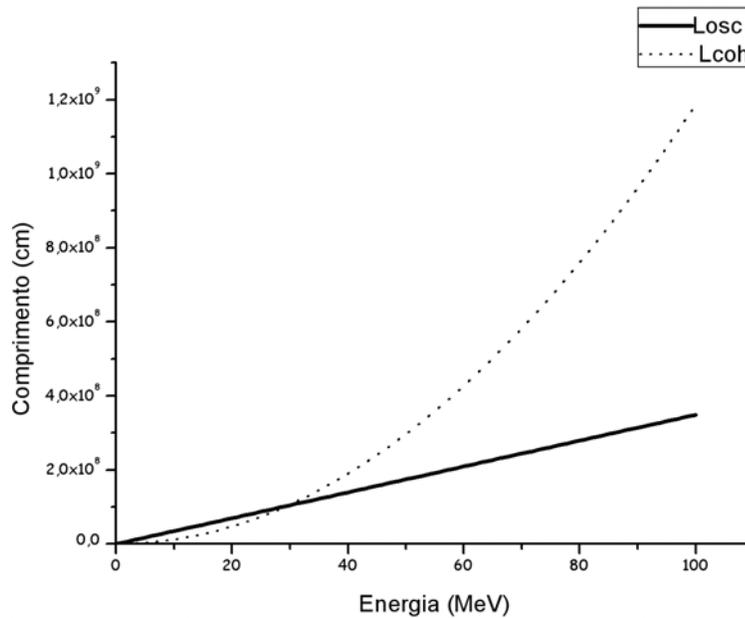


Figura 1.1 – Apresentamos o comprimento de coerência e o comprimento de oscilação em função da energia em MeV.

Pela equação (1.44), eliminando o termo exponencial e usando a solução solar (ver Tabela 4.1), podemos calcular a probabilidade de conversão para os neutrinos oriundos de supernova se propagando no vácuo (Figura 1.2). Temos que o termo de amortecimento “mata” o padrão oscilatório, indicando que os pacotes de onda dos autoestados de massa se desacoplam. A probabilidade média mostrada de conversão, considerando o canal  $\nu_e \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}$  e energia de cerca de 100 MeV, é cerca de 0,4.

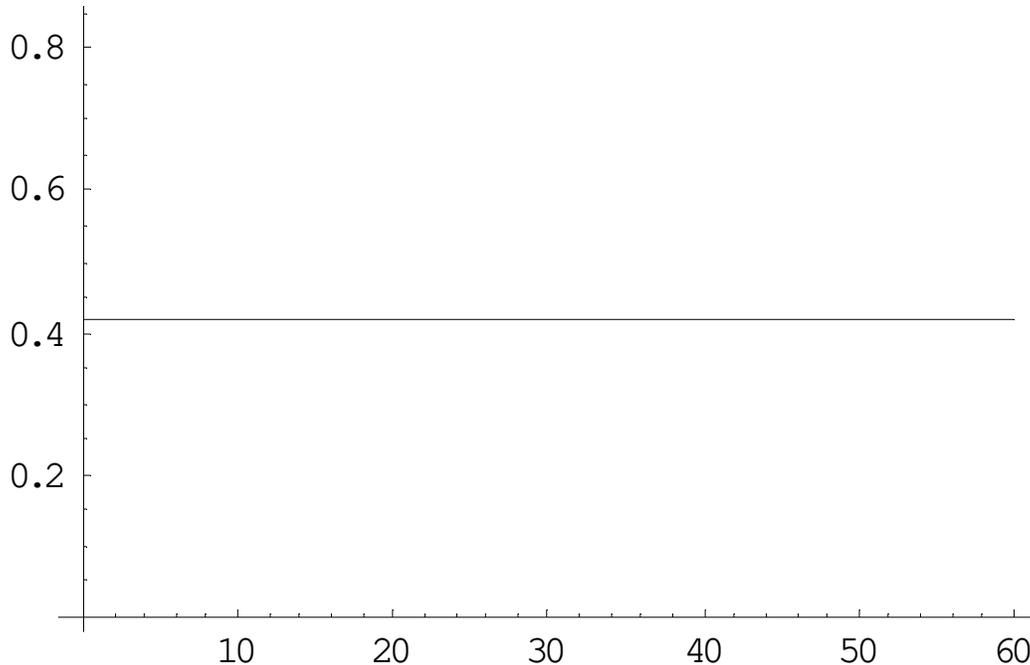


Figura 1.2 – o eixo y é a probabilidade e o eixo x é a distância em Mpc para uma supernova.

Notamos que os neutrinos solares, de reatores, de aceleradores, assim como os neutrinos de altíssima energia, parecem todos oscilar. Os neutrinos de supernova, no vácuo, têm sua oscilação congelada, porque os autoestados de massa perdem a coerência.

## 1.4) O “Spreading” dos Pacotes de Onda [27]

Nesta seção vamos discutir os dois diferentes mecanismos que causam a separação dos pacotes de onda. O primeiro é a separação dos centros dos pacotes (“splitting”),  $(\Delta X)_{ij}$ , devido à diferença de massa entre os autoestados de massa  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  e  $\nu_3$ . O segundo mecanismo é o alargamento dos pacotes (“spreading”),  $(\Delta X)_{\Delta p}$ , que se origina da dispersão inicial do momento associado aos pacotes de onda. O “spread” do momento inicial é uma consequência do princípio de incerteza.

Vamos primeiro ignorar o “spread”  $(\Delta X)_{\Delta p}$ . Trataremos somente de  $(\Delta X)_{ij}$ . Depois de uma distância  $L$ , considerando dois pacotes de onda  $\nu_i$  e  $\nu_j$  inicialmente justapostos, este dois pacotes irão se separar por

$$(\Delta X)_{ij} \equiv L(v_i - v_j) \cong L \frac{\Delta m^2}{2E^2}, \quad (1.59)$$

onde usamos (1.38) e (1.39), além da aproximação  $t \cong L$ .

Então, se a seguinte condição

$$\frac{L\Delta m^2}{2E^2} > \sigma_x, \quad (1.60)$$

que diz se o “splitting”  $(\Delta X)_{ij}$  é maior que o tamanho do pacote de onda  $\sigma_x$ , então o autoestados de massa não irão mais se justapor depois de viajarem uma distância  $L$ . Em outras palavras, estes pacotes de onda se desacoplarão devido ao “splitting” (1.59). Se usarmos os parâmetros de tamanho de pacote de onda, energia e diferença de massa ao quadrado das seções anteriores, verificamos que ocorrerá término da justaposição dos autoestados de massa para os neutrinos de supernova. Não deverá ocorrer, ou seja, a coerência será mantida para neutrinos de aceleradores. No caso dos reatores, o detector deveria estar a uma distância maior que  $10^{12}$  cm para que os pacotes de onda se desacoplem. Este valor é maior que o diâmetro terrestre, logo, o desacoplamento (“splitting”) para reatores não deve ocorrer. No caso dos neutrinos solares, o desacoplamento deve acontecer para pacotes de onda muito menores que  $5,0 \times 10^{-6}$  cm, o que não ocorre considerando os valores apresentados na Tabela 1.1. Para neutrinos de AGN, apesar de distâncias da ordem de Mparsec, o desacoplamento dos pacotes não ocorrerão devido às altíssimas energias, que são da ordem de  $10^{15}$  eV e  $10^{18}$  eV.

No entanto, temos que analisar o “spreading” (ou dispersão) devido às incertezas associadas ao momento  $p$ . Considerando durante a propagação que  $\Delta p \equiv \sigma_p$ , sabemos que  $\sigma_x \sigma_p \cong 1 \Rightarrow \sigma_p \cong \sigma_x^{-1}$  para cada pacote de onda. O “spread”,  $(\Delta X)_{\Delta p}$ , devido ao  $\Delta p$ , é dado por

$$(\Delta X)_{\Delta p} \cong L \left( \frac{\Delta p}{p} \right) \frac{m_i^2}{p^2} \cong \frac{L m_i^2}{E^3 \sigma_x}. \quad (1.61)$$

Devemos comparar (1.59) com (1.61). Se tivermos

$$(\Delta X)_{\Delta p} < (\Delta X)_{ij} \quad \text{ou} \quad (1.62)$$

$$\frac{L \bar{m}_{ij}^2}{E^3 \sigma_x} < \frac{L \Delta m^2}{2E^2}, \quad (1.63)$$

em que  $\bar{m}_{ij}^2 = (m_i^2 + m_j^2)/2$ , os pacotes não serão justapostos, portanto, irão se desacoplar. Notamos que tal fato independe da distância  $L$ . A condição (1.62) é satisfeita para a supernova, a não ser para a situação degenerada. Logo o “spread” devido a  $\Delta p$  não é tão

efetivo quanto o “splitting” entre os pacotes de onda, o que implica que os pacotes chegam desacoplados na Terra.

As figuras 1.3 e 1.4 resumem os fenômenos de desacoplamento e alargamento entre os pacotes de onda dos autoestados de massa que compõem a onda do neutrino.

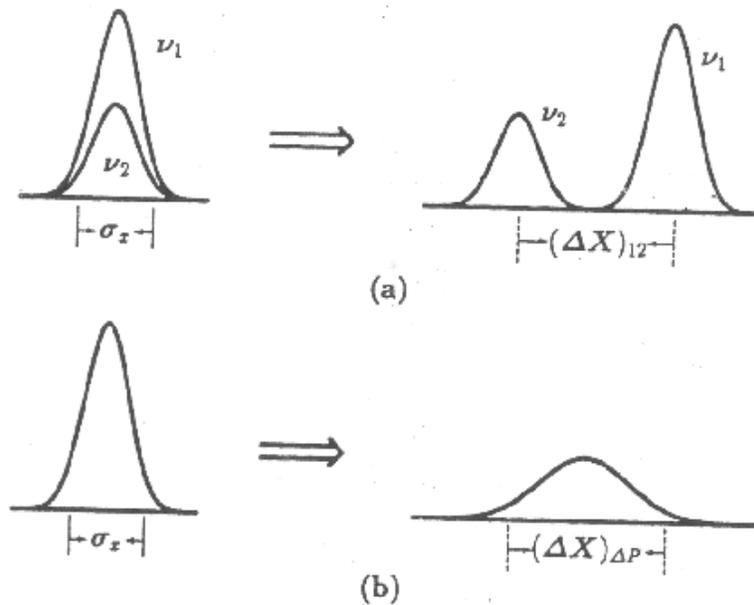


Figura 1.3: (a) O desacoplamento de dois pacotes de onda devido a (1.59); (b) O alargamento devido ao princípio da incerteza (1.61)

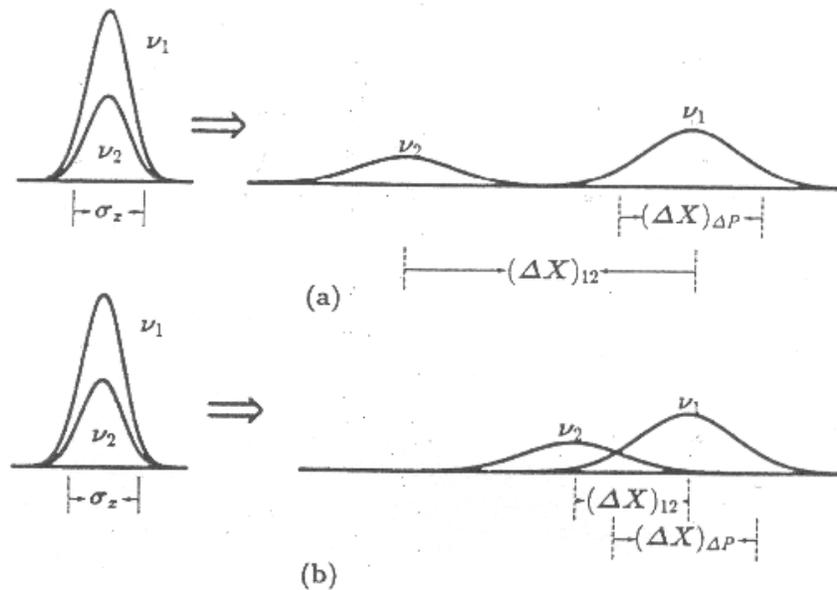


Figura 1.4: (a) Condição (1.62) satisfeita, logo ocorre o fim da coerência; (b) Condição (1.62) não satisfeita, portanto coerência mantida.

---

## Referências – Capítulo 1

---

- [1] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP*, **6**, 429 (1957), [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 549 (1957)].
- [2] B. Pontecorvo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 247 (1957), [*Sov. Phys. JETP*, **7**, 172, (1958)].
- [3] J. Davis, Raymond, D. S. Harmer, e K. C. Hoffman, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1205-1209 (1968).
- [4] SuperKamiokande Collaboration, S. Fukuda *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3999 (2000); C. MacGrew, Talk presented at *International Workshop on “Neutrino Telescopes”*, Venice, Italy, March 6-9, 2001; Soudan Collaboration, T. Mann *et. al.*, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **91**, 134 (2001); MACRO Collaboration, B. Barish *et. al.*, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **91**, 141 (2001).
- [5] Z. Maki, M. Nakagawa, e S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
- [6] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **26**, 984 (1968).
- [7] V. N. Gribov e B. Pontecorvo, *Phys. Lett.* **B28**, 493 (1969).
- [8] S. Eliezer e A. R. Swift, *Nucl. Phys.* **B105**, 45 (1976).
- [9] H. Fritzsch e P. Minkowski, *Phys. Lett.* **B62**, 72 (1976).
- [10] S. M. Bilenky e B. Pontecorvo, *Nuovo Cim. Lett.* **17**, 569 (1976).
- [11] S. M. Bilenky e B. Pontecorvo, *Phys. Rept.* **41**, 225 (1978).
- [12] S. Nussinov, *Phys. Lett.* **B63**, 201 (1976).
- [13] B. Kayser, *Phys. Rev.* **D24**, 110 (1981).
- [14] C. Giunti, C. W. Kim, e U. W. Lee, *Phys. Rev.* **D44**, 3635 (1991).
- [15] C. Giunti, C. W. Kim, e U. W. Lee, *Phys. Lett.* **B274**, 87 (1992).
- [16] A. D. Dolgov, A. Y. Morozov, L. B. Okun, e M. G. Shchepkin, *Nucl. Phys.* **B502**, 3 (1997), hep-ph/9703241.
- [17] C. Giunti e C. W. Kim, *Phys. Rev.* **D58**, 017301 (1998), hep-ph/9711363.
- [18] A. D. Dolgov, “Neutrino oscillation and cosmology”, 2000, hep-ph/0004032, International School of Astrophysics, Daniel Chalonge: 7<sup>th</sup> Course: Current Topics in

Astrofundamental Physics (A NATO Advanced Study Institute EuroConference), Erice, Italy, 5-16 Dec. 1999.

- [19] A. D. Dolgov, *Phys. Rept.* **370**, 333 (2002), hep-ph/0202122.
- [20] C. Giunti, *Physica Scripta* **67**, 29 (2003), hep-ph/0202063.
- [21] C. Giunti, C. W. Kim, J. A. Lee, e U. W. Lee, *Phys. Rev.* **D48**, 4310 (1993), hep-ph/9305276.
- [22] C. Giunti, C. W. Kim, e U. W. Lee, *Phys. Lett.* **B421**, 237 (1998), hep-ph/9709494.
- [23] K. Kiers e W. Weiss, *Phys. Rev.* **D57**, 3091 (1998), hep-ph/9710289.
- [24] C. Y. Cardall, *Phys. Rev.* **D61**, 073006 (2000), hep-ph/9909332.
- [25] M. Beuthe, *Phys. Rev.* **D66**, 013003 (2002), hep-ph/0202068.
- [26] C. Giunti, *JHEP* **11**, 017 (2002), hep-ph/0205014.
- [27] C. W. Kim e A. Pevsner, *Neutrinos in physics and astrophysics*, Harwood Academic Press, Chur, Switzerland, 1993, Contemporary Concepts in Physics, Vol.8.
- [28] M. Zralek, *Acta Phys. Polon.* **B29**, 3925 (1998), hep-ph/9810543.
- [29] M. Beuthe, *Phys. Rept.* **375**, 105 (2003), hep-ph/0109119.
- [30] P. Pal, *International Journal of Modern Physics* **A7**, 22 (1992).

# CAPÍTULO 2

---

## Neutrinos na Matéria

O fenômeno de oscilação em um meio material, como no sol ou em uma supernova, pode ser bem diferente da oscilação que ocorre no vácuo. Isto acontece porque as interações no meio modificam as relações de dispersão das partículas que viajam através dele [1]. Relações de dispersão fornecem a energia de uma partícula em termos de seu momento. Logo, uma relação de dispersão na matéria diferente da tradicional relação de dispersão do vácuo significa um Hamiltoniano modificado e, portanto, uma evolução temporal da função de onda associada diferente. Em suma, um feixe de neutrinos viajando através da matéria evolui de maneira diferente que o mesmo feixe viajando no vácuo.

Podemos considerar que tanto o meio solar quanto o meio de uma supernova é constituído de um plasma de primeira geração – os neutrinos eletrônicos interagem via corrente carregada e corrente neutra, enquanto que os outros autoestados de sabor interagem somente por corrente neutra. Do ponto de vista macroscópico, as modificações da relação de dispersão do neutrino podem ser representadas em termos de um índice de refração ou de um potencial efetivo. No nível microscópico, usando a abordagem de teoria de campos a temperaturas e densidades finitas (ver Apêndice C), as modificações surgem das correções dependentes de temperatura e densidade dos diagramas de Feynmann auto-energia do neutrino [2, 3, 4, 5]. Aqui exploraremos somente a visão macroscópica, em que os neutrinos a baixas energias sofrem espalhamento coerente (refração) descritos pelo potencial

$$V = \sqrt{2}G_F n_e, \quad (2.1)$$

em que  $G_F$  é a constante de Fermi e  $n_e$  é a densidade eletrônica do meio.

## 2.1) Ondas Planas de Neutrinos na Matéria

### 2.1.1) Oscilação de Neutrinos na Matéria Uniforme

A equação de evolução na matéria é dada por

$$i \frac{d}{dx} \nu^{(f)} = \tilde{H} \nu^{(f)}, \quad (2.2)$$

onde  $\nu^{(f)}$  é o autoestado de sabor e  $\tilde{H}$  é o Hamiltoniano efetivo, que pode ser escrito para duas famílias de uma forma conveniente [6, 7, 8, 9, 10, 11] apresentada abaixo.

$$\tilde{H} = H_0 + \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F \left( n_e - \frac{1}{2}n_n \right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Na matriz (2.3)  $H_0$  é o Hamiltoniano do vácuo e podemos escrevê-la como

$$\tilde{H} = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n + \frac{1}{2E} \tilde{M}^2, \quad (2.4)$$

em que

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix} e \quad (2.5)$$

por conveniência definimos

$$A = 2\sqrt{2}G_F n_e E. \quad (2.6)$$

$E$  é a energia do neutrino e  $n_n$  é a densidade de nêutrons.  $\Delta = \Delta m^2$  e  $\theta$  são, respectivamente, a diferença de massa ao quadrado e o ângulo de mistura no vácuo. Estes dois últimos parâmetros serão alterados na matéria e irão depender da configuração eletrônica do meio onde os neutrinos estão se propagando.

O ângulo de mistura efetivo pode ser dado por

$$\text{tg} 2\tilde{\theta} = \frac{2\tilde{H}_{12}}{\tilde{H}_{22} - \tilde{H}_{11}} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{\Delta \cos 2\theta - A} e \quad (2.7)$$

os autoestados estacionários são

$$\tilde{\nu}_1 = \nu_e \cos \tilde{\theta} - \nu_\mu \text{sen} \tilde{\theta} \quad \text{e} \quad (2.8.a)$$

$$\tilde{\nu}_2 = \nu_e \text{sen} \tilde{\theta} + \nu_\mu \cos \tilde{\theta}, \quad (2.8.b)$$

com autovalores iguais a

$$\tilde{E}_\alpha = E - \frac{1}{\sqrt{2}} G_{F n_e} + \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{2E}, \quad (2.9)$$

em que

$$\tilde{m}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2 + A) \mp \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \text{sen}^2 2\theta} \right]. \quad (2.10)$$

Podemos destacar alguns fatos interessantes. Consideremos o ângulo de mistura do vácuo  $\theta$  pequeno. Então, para  $n_e \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ , então  $\tilde{\nu}_1 \approx \nu_e$ . Em outras palavras, o menor autoestado de massa é praticamente  $\nu_e$  se a densidade de matéria é quase zero. Já para  $n_e \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , então  $\tilde{\nu}_1 \approx \nu_\mu$ . Isto é o que ocorre para a densidade de matéria tendendo ao infinito, tornando o autoestado puramente  $\nu_\mu$ .

Notamos por (2.7) ou pela expressão abaixo deduzida a partir de (2.7),

$$\text{sen}^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \text{sen}^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \text{sen}^2 2\theta}, \quad (2.11)$$

que quando  $A = \Delta \cos 2\theta$  o ângulo de mistura efetivo é  $\frac{\pi}{4}$  e os termos da diagonal principal em (2.5) são idênticos, portanto os estados  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$  apresentam misturas máximas. Este é o efeito MSW [12], que nos possibilita achar pontos de densidade eletrônica onde ocorre ressonância ( $n_R$ ),

$$n_R = \frac{\Delta \cos 2\theta}{2\sqrt{2} G_{FE}}. \quad (2.12)$$

### 2.1.2) Neutrinos na matéria não-uniforme

Sabemos que, no sol e em outras fontes astrofísicas como supernovas, os neutrinos passam por regiões de densidade ressonante, mas se propagando numa região não-uniforme. Analogamente à equação (2.2), mas desprezando os termos da matriz unitária que não influenciam nos cálculos da probabilidade, podemos escrever a equação de estados de sabor

$$i \frac{d}{dx} \nu^{(f)} = \frac{1}{2E} \tilde{M}^2 \nu^{(f)}. \quad (2.13)$$

Neste caso, nossa base pode ser escrita como

$$\nu^{(f)} = \tilde{U} \tilde{\nu}^{(p)}. \quad (2.14)$$

$\tilde{U}$  é a matriz unitária de mistura na matéria, construída pela substituição de  $\theta$  por  $\tilde{\theta}$  na matriz unitária de mistura do vácuo.

A equação de evolução pode ser reescrita como:

$$i \frac{d}{dx} (\tilde{U} \tilde{\nu}^{(p)}) = \frac{1}{2E} \tilde{M}^2 \tilde{U} \tilde{\nu}^{(p)}. \quad (2.15)$$

Temos que tomar cuidado ao aplicar a derivada porque nossa matriz de mistura muda para diferentes pontos. Então,

$$i \tilde{U} \frac{d}{dx} \tilde{\nu}^{(p)} + i \left( \frac{d}{dx} \tilde{U} \right) \tilde{\nu}^{(p)} = \frac{1}{2E} \tilde{M}^2 \tilde{U} \tilde{\nu}^{(p)}. \quad (2.16)$$

Multiplicando a expressão acima por  $\tilde{U}^\dagger$  achamos a expressão

$$i \frac{d}{dx} \tilde{\nu}^{(p)} = \left( \frac{1}{2E} \tilde{U}^\dagger \tilde{M}^2 \tilde{U} - i \tilde{U}^\dagger \frac{d}{dx} \tilde{U} \right) \tilde{\nu}^{(p)}, \quad (2.17)$$

que é a equação de evolução na base  $\tilde{\nu}^{(p)}$ . A solução da equação acima [13] resulta em

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} & i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ -i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} & \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Se  $\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = 0$ ,  $\tilde{v}_1$  e  $\tilde{v}_2$  são autoestados estacionários, exatamente como em um meio uniforme. Para um meio não-uniforme teremos de resolver a equação acima e faremos para dois casos: *adiabático e não-adiabático*.

### 2.1.2a) O caso adiabático

Quando  $\frac{d\tilde{\theta}}{dx}$  é pequeno, podemos resolver a equação (2.18) usando a aproximação adiabática. Mas, antes de introduzirmos qualquer tipo de cálculo, devemos nos perguntar quando realmente ocorrerá uma propagação adiabática. Falar de condição adiabática é dizer que os termos fora da diagonal principal são muito menores que os termos da diagonal principal. Logo podemos escrever que a condição de adiabaticidade

$$\left| \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \right| \ll \frac{|\tilde{m}_1^2 - \tilde{m}_2^2|}{2E}. \quad (2.19)$$

Usando a expressão (2.7) e derivando-a em relação à variável  $x$  obtemos

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \sqrt{2}G_F E \times \frac{\Delta \text{sen} 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \text{sen}^2 2\theta} \times \frac{dn_e}{dx}. \quad (2.20)$$

Relacionando as duas fórmulas acima escritas, (2.19) e (2.20), e usando os autovalores apresentados em (2.10), escrevemos a condição de adiabaticidade na forma

$$\left| \frac{dn_e}{dx} \right| \ll \frac{[(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \text{sen}^2 2\theta]^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}E^2 G_F \Delta \text{sen} 2\theta}. \quad (2.21)$$

Pela expressão (2.11) escrevemos a definição do “*parâmetro de adiabaticidade*” usando a equação (2.21) acima,

$$\gamma(x) \equiv \frac{(\Delta/E)^2}{2\sqrt{2}G_F} \times \frac{\text{sen}^2 2\theta}{\text{sen}^3 2\tilde{\theta}} \times \frac{1}{\left| \frac{dn_e}{dx} \right|}. \quad (2.22)$$

Notamos, portanto, que a propagação será adiabática se  $\gamma(x) \gg 1$ .

Façamos algumas considerações: se a densidade é alta em algum ponto, então  $\tilde{\theta} \rightarrow \pi/2$ , e o parâmetro de adiabaticidade é alto. Agora, se a densidade é muito baixa para algum outro ponto de propagação,  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ , e novamente o parâmetro de adiabaticidade pode ser alto, a não ser que o ângulo esteja próximo de  $\pi/4$ . A equação acima mostra que a condição de adiabaticidade é difícil de ser satisfeita no ponto de ressonância, uma vez que

$\text{sen}2\tilde{\theta}$  é máximo nesse ponto. A referência [14] mostra que longe do ponto de ressonância a propagação sempre pode ser tratada adiabaticamente. Mesmo assim, podemos ter adiabaticidade também no ponto de ressonância. Por (2.12) sabemos os pontos onde pode ocorrer ressonância e tomando para tal situação  $\text{sen}2\tilde{\theta} = 1$  na equação (2.22), encontramos o valor do parâmetro de adiabaticidade na ressonância  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K} = \frac{\Delta}{E} \times \frac{\text{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta} \times \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R}. \quad (2.23)$$

Se  $\mathcal{K} \gg 1$ , a propagação será adiabática em *qualquer* lugar! Caso contrário, se  $\mathcal{K}$  for próximo ou menor que um, devemos fazer uma análise de não-adiabaticidade.

### 2.1.2b) As probabilidades no caso adiabático [15, 16]

Vamos fazer as considerações para duas famílias, sendo que usaremos de exemplo os neutrinos eletrônicos e os neutrinos muônicos.

Quando a propagação é adiabática,  $\tilde{\nu}_1$  se mantém como  $\tilde{\nu}_1$  durante toda a propagação, o mesmo ocorrendo para  $\tilde{\nu}_2$ . Desta maneira teremos para cada ponto uma diferente superposição de  $\tilde{\nu}_e$  e  $\tilde{\nu}_\mu$ .

Usando (2.8a) e (2.8b) podemos escrever o neutrino eletrônico como uma superposição dos autoestados de massa  $\tilde{\nu}_1$  e  $\tilde{\nu}_2$ :

$$\nu_e = \tilde{\nu}_1 \cos \tilde{\theta}_0 + \tilde{\nu}_2 \text{sen} \tilde{\theta}_0. \quad (2.24)$$

Na fórmula acima, o índice “0” indica que estamos tratando do ângulo de mistura no ponto de criação do neutrino. Se ocorre criação de neutrinos eletrônicos, existe uma probabilidade  $\cos^2 \tilde{\theta}_0$  do neutrino ser produzido como  $\tilde{\nu}_1$  e uma probabilidade de  $\cos^2 \theta$  de ser detectado como  $\nu_e$ . Isto contribui com um termo  $\cos^2 \tilde{\theta}_0 \cos^2 \theta$  para a probabilidade de sobrevivência numa propagação adiabática. Por outro lado, o neutrino pode ser produzido como  $\tilde{\nu}_2$  com probabilidade  $\text{sen}^2 \tilde{\theta}_0$ , propagar-se e ser detectado como  $\nu_e$  com probabilidade  $\text{sen}^2 \theta$ . Isto contribui com um termo  $\text{sen}^2 \tilde{\theta}_0 \text{sen}^2 \theta$  para a probabilidade de sobrevivência numa propagação adiabática. Logo a probabilidade de sobrevivência clássica total para propagação adiabática é:

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} &= \cos^2 \tilde{\theta}_0 \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \tilde{\theta}_0 \text{sen}^2 \theta = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\tilde{\theta}_0) (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\tilde{\theta}_0) (1 - \cos 2\theta) = \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta] \end{aligned} \quad (2.25)$$

A probabilidade de conversão para neutrino muônico será

$$P_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)} = 1 - P_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)} = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta]. \quad (2.26)$$

Em (2.25) e (2.26),  $P^{(ad)}$  é a probabilidade, seja de sobrevivência ou conversão, considerando propagação adiabática.

As probabilidades apresentadas acima ainda estão incompletas. Vamos escrevê-las de uma maneira mais completa. A probabilidade de detectar  $\nu_e$  numa distância  $x$  a partir do ponto de produção pode ser escrita como abaixo.

$$P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} = \left| \langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle \right|^2 = \left| \sum_{\alpha} \langle \nu_e(x) | \nu_{\alpha}(x) \rangle \langle \nu_{\alpha}(x) | \nu_{\alpha}(0) \rangle \langle \nu_{\alpha}(0) | \nu_e(0) \rangle \right|^2. \quad (2.27)$$

Note que introduzimos o conjunto completo dos estados  $\nu_{\alpha}$ . Os produtos escalares na extrema esquerda e na extrema direita fornecem os elementos da matriz de mistura nos pontos de produção e detecção. Os elementos de matriz do produto escalar central originam uma fase que corresponde à propagação adiabática dos estados  $\nu_{\alpha}$ . Esta fase é

$$\exp \left[ i \int_0^x dx' \tilde{E}_{\alpha}(x') \right]. \quad (2.28)$$

Então escrevemos (2.27)

$$P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta + \text{sen} 2\tilde{\theta}_0 \text{sen} 2\theta \cos \left[ \int_0^x dx' (\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1) \right] \right\}, \quad (2.29)$$

Que é a expressão para probabilidade de sobrevivência para um autoestado de sabor no caso adiabático. Vamos passar agora para o caso de não-adiabaticidade.

### 2.1.2c) O caso não-adiabático

Efeitos não-adiabáticos induzem transições entre os estados  $\tilde{\nu}_1$  e  $\tilde{\nu}_2$ . Já falamos que os efeitos não-adiabáticos são importantes nas regiões onde há ressonância. Para outras regiões, a aproximação adiabática pode ser usada. Na região de ressonância, tentamos resolver a equação de propagação de maneira exata, assumindo algumas formas simplificadas de variação da densidade que podem ser aproximadamente válidas para aquela região específica. A partir disto, encontramos a probabilidade  $X$  nesta região de ter ocorrido transição de um autoestado para o outro.

Vamos supor um neutrino eletrônico produzido em um determinado ponto e que irá sobreviver durante sua propagação se as condições são adiabáticas, ou seja, não temos transição entre os estados  $\tilde{\nu}_1$  e  $\tilde{\nu}_2$ . Isto também pode ocorrer no caso não-adiabático, em que não há transição entre os estados  $\tilde{\nu}_1$  e  $\tilde{\nu}_2$  com probabilidade  $1-X$ . Por outro lado,

podemos ter, no caso adiabático, uma situação em que o neutrino eletrônico se converteu em neutrino muônico. No entanto, pode existir conservação do sabor eletrônico no caso não-adiabático se tivermos transição entre os autoestados  $\tilde{\nu}_1$  e  $\tilde{\nu}_2$ .

Levando em conta todos os efeitos não-adiabáticos, podemos escrever a probabilidade de sobrevivência do neutrino eletrônico [17]:

$$P_{\nu_e \nu_e} = (1 - X)P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} + XP_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)}. \quad (2.30)$$

Temos de saber calcular  $X$ , que é a probabilidade de transição não-adiabática para dois estados. Este trabalho, feito no contexto de física atômica, foi feito independentemente por Landau [18], Zener [19] e Stückelberg [20]. Este cálculo foi aplicado para o contexto dos neutrinos por Parke [17] e Haxton [21]. Vamos fazer isto usando uma aproximação semi-clássica pelo método da trajetória complexa de Landau [22]. Este método nos fornece

$$\ln X = -2 \operatorname{Im}[S_1(t_1, t_*) + S_2(t_*, t_2)], \quad (2.31)$$

sendo  $S_1(t_1, t_*)$  a ação para o movimento do feixe de neutrino no estado  $\tilde{\nu}_1$  de um tempo inicial  $t_1$  para o tempo de transição  $t_*$ . Passado o tempo de transição  $t_*$ , usamos a ação no estado  $\tilde{\nu}_2$  até o tempo  $t_2$  quando o neutrino sai da região não-adiabática. As partes imaginárias da ação permanecem inalteradas se tomarmos  $t_1 = t_2 = t_R$ , sendo o tempo em que o neutrino atravessa a região de ressonância. Logo,

$$\ln X = -2 \operatorname{Im} \int_{t_R}^{t_*} dt (\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1). \quad (2.32)$$

Mudando a variável de integração de  $t$  para  $A$ , teremos

$$\ln X = -\frac{1}{E} \operatorname{Im} \int_{A_R}^{A_*} \frac{dA}{(dA/dx)} \sqrt{(\Delta \cos \theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (2.33)$$

O limite inferior da integral é  $A_R = \Delta \cos 2\theta$ . O limite superior  $A_*$  é o valor de  $A$  no ponto de transição. No método de Landau, este é o valor de  $A$  para o qual os dois autovalores coincidem ( $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$ ), resultando em

$$A_* = \Delta \exp[\pm 2i\theta], \quad (2.34)$$

que é um número complexo. Portanto, a integração da equação (2.33) deve ser feita para números complexos de  $A$ , justificando o porquê do método ser chamado de método das trajetórias complexas.

Para resolvermos a integral devemos primeiro saber como  $A$  se comporta na região de ressonância. Se a variação é linear,  $dA/dx$  é constante e podemos deixá-lo fora da integral. Se seu valor é positivo, usamos o valor positivo do expoente de  $A_*$ , sendo,

portanto,  $\ln X$  negativo. Se  $dA/dx$  é negativo, usamos o expoente negativo de  $A_*$ . Para as duas situações, vamos mudar a variável de integração de  $A$  para  $a = (A - \Delta \cos 2\theta)/\Delta \sin 2\theta$ . Agora escrevemos

$$\ln X = -\frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{E|dA/dx|_R} \operatorname{Im} \int_0^i da \sqrt{1+a^2} = -\frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{E|dA/dx|_R} \times \frac{\pi}{4}. \quad (2.35)$$

Relembrando que  $A_R = \Delta \cos 2\theta$ , podemos reescrever a expressão acima como:

$$\ln X = -\frac{\Delta}{E} \times \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \times \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln A \right|_R} \times \frac{\pi}{4}. \quad (2.36)$$

Logo

$$X = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \gamma_R\right). \quad (2.37)$$

Vale à pena lembrar que o cálculo foi feito para uma variação linear de  $A$ . Se tivéssemos uma variação exponencial próximo à região de ressonância, deveríamos usar [23]

$$X = \exp\left(-\frac{\pi}{4} (1 - tg^2 \theta) \gamma_R\right). \quad (2.38)$$

No entanto, a aproximação linear e exponencial, na maioria dos casos, são muito semelhantes, ocasionando diferenças insignificantes.

## 2.2) Pacotes de onda de neutrinos na Matéria [24]

Desenvolvemos acima o formalismo em ondas planas para a propagação do neutrino na matéria envolvendo os casos adiabáticos e não adiabáticos. Agora, vamos fazer o mesmo, mas usando o formalismo de pacotes de onda. Para melhor compreensão e entendimento, vamos repetir algumas expressões. Além do mais estamos seguindo a referência [24], que usa uma abordagem diferente, no espaço das energias, para o desenvolvimento da expressão de probabilidade de oscilação na matéria para pacotes de onda.

Vamos relembrar o Hamiltoniano efetivo para o neutrino na matéria pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2} + V(\hat{x}, t) \cong \hat{p} + \frac{1}{2} m^2 \hat{p}^{-1} + V(\hat{x}, t), \quad (2.39)$$

em que  $\hat{p}$  é o operador momento,  $m$  é a matriz de massa do neutrino e  $V(\hat{x}, t)$  é o potencial sentido pelo neutrino devido à presença do meio.

A propagação dos neutrinos é tradicionalmente resolvida pela equação de Schrödinger, que no limite relativístico e assumindo que  $E \gg V$  escrevemos:

$$i\partial_x \psi(x, E) = \left( -E + \frac{m^2}{2E} + V(x) \right) \psi(x, E) + O\left( \frac{m^4 + m^2 EV}{E^3} \right) \psi(x, E), \quad (2.40)$$

sendo que  $\partial_x = \partial/\partial x$ .

Os respectivos autovetores da equação acima são os próprios autoestados da matéria, enquanto que os autovalores podem ser escritos como

$$p_a(x, E) \equiv E - \frac{\mu_a^2(x, E)}{2E}, \quad (2.41)$$

em que  $\mu_a(x, E)$  é a massa efetiva do neutrino.

Se quisermos a função de onda do neutrino no espaço das coordenadas se propagando pelo tempo, devemos tomar a transformada de Fourier:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dE \exp[-iEt] \psi(x, E). \quad (2.42)$$

A equação (2.40), para o limite adiabático, pode ser reescrita, para um autoestado de sabor, na matéria como

$$i\partial_x \psi_a(x, E) = \left( -E + \frac{\mu_a^2(x, E)}{2E} \right) \psi_a(x, E) = -p_a(x, E) \psi_a(x, E). \quad (2.43)$$

A equação (2.43) acima tem fácil solução, que apresentamos abaixo:

$$\psi_a(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dE \exp\left[ i \int_0^x dx' p_a(x', E) - iEt \right] \psi_a(0, E). \quad (2.44)$$

Notamos que na equação (2.44) usamos a equação (2.42) para escrevê-la. Como fizemos no Capítulo 1, a função de onda do neutrino será uma combinação linear dos autoestados da matéria,

$$\psi(0, E) = \sum_a C_a(E) \psi_a(0, E). \quad (2.45)$$

No limite relativístico,  $C_a(x, E) = U_{aa}^*(x, E)$ . No entanto, para neutrinos não tão relativísticos fatores relacionados à conservação de energia devem ser levados em consideração.

Assumimos o mesmo formato gaussiano para os autoestados da matéria, que no espaço dos momentos pode ser escrito como.

$$\psi_a(0, E) = (2\pi\sigma_E^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{(E - E_a)^2}{4\sigma_E^2}\right]. \quad (2.46)$$

Na expressão acima  $\sigma_E$  é o tamanho do pacote de onda no espaço das energias e a relação de incerteza dominante é  $\sigma_E\sigma_t = 1/2$ . O caminho para chegarmos à expressão de probabilidade de oscilação na matéria, usando o limite adiabático, para nossos pacotes de onda é o mesmo que fizemos na seção 1.2 do Capítulo 1 para os pacotes de onda no vácuo. Não iremos aqui repetir todos os cálculos para que este texto não se torne demasiadamente enfadonho para o leitor. A única preocupação que temos é colocar a função de onda do neutrino no espaço das coordenadas e que ela propague à medida que o tempo progrida. Logo, substituímos (2.46) em (2.44), e o resultado desta substituição em (2.45). Lembrando que devemos usar a aproximação  $\sigma_E \cong v_a\sigma_p = v_a/2\sigma_x$  - para maiores detalhes, ver referência [24]. Lembrando que integramos no tempo para encontrar a probabilidade de oscilação, temos que

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(x) = \sum U_{\alpha a}^* U_{\beta a} U_{\alpha b} U_{\beta b}^* \times \exp\left[-2\pi i \frac{x}{L_{osc}(x)} - \left(\frac{x}{L_{coh}(x)}\right)^2 - \frac{(E_a - E_b)^2}{8\sigma_p^2}\right]. \quad (2.47)$$

Na expressão (2.47) descrita, as matrizes  $U$  são os elementos da matriz unitária de mistura agora descrita na matéria e o comprimento de oscilação e o comprimento de coerência dependem da posição e são escritos como

$$L_{osc}(x) \equiv \frac{4\pi E x}{\int_0^x dx \Delta\mu_{ab}^2(x)} \quad (2.48)$$

$$L_{coh}(x) \equiv \frac{2\sqrt{2}\sigma_x x}{\left|\int_0^x dx \Delta v_{ab}(x)\right|} = \frac{2\sqrt{2}\sigma_x 2E^2 x}{\left|\int_0^x dx \Delta\mu_{ab}^2(x)\right|}. \quad (2.49)$$

O caso não-adiabático para os pacotes de onda é apresentado no Apêndice B deste trabalho. Não o colocamos aqui, porque em nenhum momento vamos nos utilizar de seu formalismo para nossos cálculos.

---

## Referências – Capítulo 2

---

- [1] L. Wolfenstein, *Phys. Rev.* **D17**, 2369 (1978).
- [2] P. B. Pal e T. N. Pham, *Phys. Rev.* **D40**, 259 (1989).
- [3] D. Nötzold e G. Raffelt, *Nucl. Phys.* **B307**, 924 (1988).
- [4] J. F. Nieves, *Phys. Rev.* **D40**, 866 (1989).
- [5] J. F. Nieves, em *Proceedings of the IV Mexican School of Particles and Fields*, editado por J. Lucio e A. Zepeda (World Scientific, Singapore, 1992), p. 283-319.
- [6] S. P. Mikheyev e A. Y. Smirnov, *Resonance enhancement of oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy*, *Sov. Jour. Nucl. Phys.* **42** (1985) 913.
- [7] S. P. Mikheyev e A. Y. Smirnov, *Neutrino oscillations in matter with varying density*, Proc. of the 6<sup>th</sup> Moriond Workshop on *Massive Neutrinos in Astrophysics and Particle Physics*, eds. O. Fackler e J. Tran Than Van (Editions Frontières 1986), p. 355.
- [8] A. Messiah, Treatment of electron-neutrino oscillations in solar matter: the MSW Effect, Proc. of the 6<sup>th</sup> Moriond Workshop on *Massive Neutrinos in Astrophysics and Particle Physics*, eds. O. Fackler e J. Tran Than Van (Editions Frontières 1986), p. 373.
- [9] J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [10] M. C. Gonzalez-Garcia e Y. Nir, *Neutrino masses and mixing: evidence and implications*, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 345 [hep-ph/0202058].
- [11] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tórtola e J. W. F. Valle, hep-ph/0309130v2.
- [12] S. P. Mikheyev e A. Y. Smirnov, *Nuovo Cimento* **C9**, 17 (1986).
- [13] V. Barger, R. J. N. Phillips e K. Whisnant, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3084 (1990).
- [14] A. Messiah, em *Massive Neutrinos in Astrophysics and Particle Physics '86*, eds. O. Fackler e J. Tran Than Van (Éditions Frontières, 1986) p. 373.
- [15] V. Barger, R. J. N. Phillips, e K. Whisnant, *Phys. Rev.* **D34**, 980 (1986).
- [16] H. Bethe, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1305 (1986).
- [17] S.J. Parke, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1275 (1986).

- [18] L. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion* **2**, 46 (1932).
- [19] C. Zener, *Proc. Roy. Soc.* **137**, 696 (1932).
- [20] E. C. G. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta* **5**, 369 (1932).
- [21] W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1271 (1986).
- [22] L. D. Landau e L. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, 3<sup>a</sup>ed. (Pergamon Press, 1977).
- [23] P. Pizzochero, *Phys. Rev.* **D36**, 2293 (1987).
- [24] J. T. Peltoniemi e V. Sipiläinen, *JHEP* **0006**, 011 (2000), hep-ph/0004162.

# CAPÍTULO 3

---

## **Supernova e os Neutrinos**

Em novembro de 1572, uma nova estrela, ou *nova*, apareceu na constelação de Cassiopéia e foi observada pelo notável Tycho Brahe, que considerou esta nova estrela como um novo objeto na imutável região celestial. Este novo objeto observado é chamado hoje de supernova de Tycho. Em outubro de 1604, uma nova estrela apareceu no céu e foi observada por Johannes Kepler, cujo modelo de disposição dos planetas superou o modelo de Ptolomeu do sistema solar. Professor em Padova, Galileo Galilei observou também estas “novas” estrelas que surgiam no céu. Alguns registros chineses do século II, sobre as chamadas “estrelas visitantes”, que apareciam no céu repentinamente, permaneciam por um dado tempo e sumiam repentinamente, são provavelmente os primeiros indícios e relatos de supernovas.

As explosões de supernova em nossa galáxia são eventos raros, sendo que a última ocorrida em fevereiro de 1987 foi denominada SN1987A, advento da explosão de uma supergigante azul, Sanduleak -69° 202, localizada na Grande Nuvem de Magalhães. Entretanto, muitas supernovas são observadas a cada ano em outras galáxias, como a SN1993J, que ocorreu na galáxia próxima M81. Cerca de cinco eventos de supernovas em nossa galáxia foram registrados [1].

Afinal, qual o motivo da existência desses fenômenos extremamente brilhantes e intensos? Estrelas de grande massa evoluem por dezenas de milhões de anos queimando seu combustível nuclear e gerando uma pressão de dentro para fora que contrabalança a força gravitacional. Um desequilíbrio dessas forças, resultante de queimas de núcleos cada vez menos eficientes, gera o colapso gravitacional do centro estelar, podendo ocorrer uma explosão. O resultado final é o surgimento ou de uma estrela de nêutrons ou de um buraco

negro. A formação de núcleos pesados e seu conseqüente espalhamento para o meio intergalático pós-explosão nutre o universo para a possível formação de objetos celestes como planetas e estruturas biológicas complexas.

As primeiras observações sistemáticas de supernovas foram feitas na década de 30 através de chapas fotográficas por Baade & Zwicky, quando identificaram que 50% dos eventos seguiam um padrão de luminosidade consistente: crescimento rápido nas primeiras semanas seguido de diminuição gradual em alguns meses. Minkowski através de medidas espectroscópicas não identificou a presença de hidrogênio, classificando-as como supernovas do tipo I. As demais, com diferentes padrões de luminosidade e presença de linhas de hidrogênio, são atualmente classificadas como supernovas do tipo II, que serão objeto de nossa descrição.

Nas supernovas do tipo I, a explosão é deflagrada por reações termonucleares. Numa anã branca, constituída por C e O, sua massa é acrescida por uma estrela companheira. Portanto o sistema é binário e foi descrito primeiramente por Hoyle e Fowler na década de 60. O aumento da massa provoca o aumento da pressão e as reações termonucleares com síntese de elementos mais pesados se reiniciam de maneira abrupta e descontrolada, ocasionando a explosão. A referência [2] traz um estudo detalhado deste tipo de supernova.

Colgate, também na década de 60, descreve o mecanismo de supernovas do tipo II. A explosão é provocada pela formação de uma onda de choque no centro estelar devido ao colapso gravitacional. Os neutrinos teriam o papel de aumentar a energia dessa onda de choque, num mecanismo descrito como “explosão atrasada”. O colapso faz com que o centro estelar se contraia e atinja densidades supra-nucleares, o que interrompe a compressão. A matéria que continua sendo atraída pela força gravitacional, que é sempre mais intensa, “rebate” no caroço central devido à resistência que ali encontra e inverte seu sentido de movimento. A energia mecânica acumulada nesse processo inicia a formação da onda de choque. A descompressão repentina do caroço central fornece o impulso adicional e decisivo ao choque, que adquire energia suficiente para desagregar e expelir de forma explosiva as camadas mais externas da estrela. A potência do choque é mantida com energia extra depositada na matéria pelo fluxo de neutrinos emergentes que permaneceram em difusão pelo centro estelar.

### 3.1) Evolução Pós-Sequência Principal

As estrelas são palcos de um confronto de duas forças: a *gravidade* (de fora para dentro), que comprime a estrela, e a de *pressão* (de dentro para fora), que resiste ao colapso. A primeira é oriunda da massa da estrela, enquanto a segunda é oriunda das reações de fusão nuclear, consideradas como o combustível da estrela. As estrelas, portanto, estão em um estado de equilíbrio hidrostático, descrito pela equação

$$\frac{dP(r)}{dr} = \rho g = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (3.1)$$

em que  $M(r)$  é a massa interna ao raio  $r$ ,  $\rho$  é a densidade e  $P(r)$  é a pressão.

A primeira série de reações de fusão agrega 4 prótons formando um núcleo de He:  $4p \rightarrow \alpha + 2e^+ + 2\nu_e$ , liberando aproximadamente uma energia de 7MeV/nucleon. Este processo e os demais do ciclo  $p$ - $p$  continuam no centro da estrela por cerca de  $10^7$  anos. Em 1942, Mário Schenberg, físico brasileiro, e seu colega indiano, Chandrashekar, mostraram que o Sol não consegue lançar mão de todo estoque de hidrogênio. O caroço de energia, depois desses 10 bilhões de anos, entrará em crise, exigindo outro mecanismo para que não haja um colapso. Neste momento, temos uma contração do centro estelar, dado que a atração gravitacional não encontra mais a oposição da pressão interna. Por conseguinte, o centro se aquece, assim como as camadas externas de matéria. O mecanismo proposto por Helmholtz indica que ocorrerá expansão dessas camadas externas para ocorrer diminuição do gradiente de temperatura. A temperatura em torno do caroço de hélio, ao crescer, inicia a fusão do hidrogênio remanescente (casca em volta do caroço central), enquanto que o centro vai se aquecendo para iniciar a fusão do hélio, que se transformará em carbono. Depois desta transformação, o hélio também passará a ser queimado numa casca, só que mais interna à casca de hidrogênio. No Sol, a temperatura do núcleo não subirá o suficiente para fundir o carbono.

As duas cascas vão se deslocando para fora, fazendo a estrela se expandir para o chamado ramo assintótico, em que as trajetórias evolutivas das estrelas de pequena massa se afunilam nas proximidades dos ramos das gigantes vermelhas. As instabilidades, devidas às camadas de queima nuclear, acabam expulsando a atmosfera da estrela, formando uma nebulosa planetária.

Quanto mais massiva a estrela, elementos químicos mais pesados conseguem ser sintetizados. Acima de 300 milhões K, o carbono e o hélio se fundem, gerando oxigênio e neônio. Estrelas que atingem 500 milhões K produzem o sódio. Acima de 1 bilhão K, a partir do oxigênio, a estrela fabrica o fósforo, o silício e o magnésio. Acima de 1,5 bilhão K, são gerados fótons energéticos que desintegram o neônio, transformando-os em oxigênio e magnésio. A temperaturas pouco menores que 5 bilhões K, o silício se funde, formando ferro. Os chamados processos  $r$  (rápidos) de fusão não conseguem produzir elementos mais pesados que o ferro. O núcleo desse elemento químico tem alto grau de estabilidade e, ao se fundir com outro, ao invés de gerar energia, absorve. Tal processo endotérmico desequilibra a estrela, levando-a para o colapso. A figura 3.2 aponta o ferro como possível último elemento da fusão e mostra a energia de ligação por nucleon em função do número de massa.

Na figura 3.1 mostramos, para uma estrela de  $25 M_{\odot}$ , a duração da queima de cada elemento químico à medida que a estrela evolui, com o conseqüente crescimento de temperatura e densidade do centro da estrela.

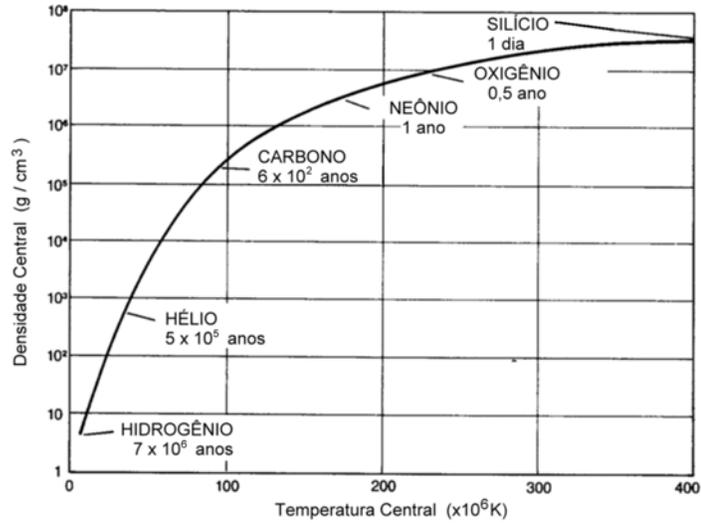


Figura 3.1: Elementos em combustão em uma estrela de  $25 M_{\odot}$ , com a duração de cada etapa.

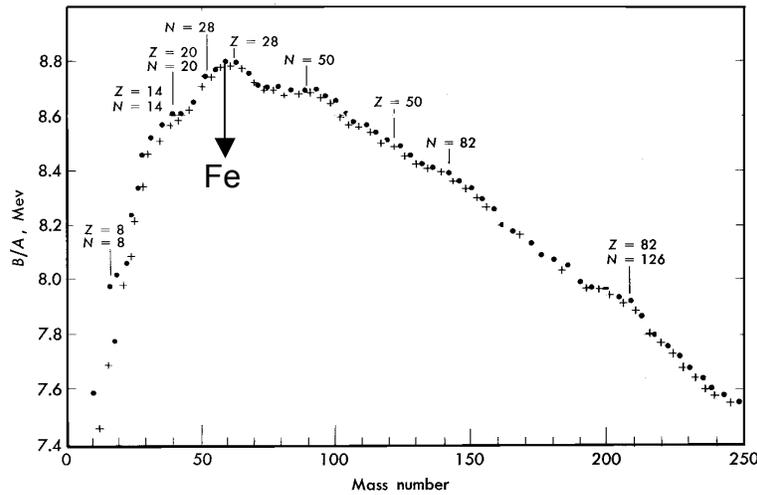


Figura 3.2: Energia de ligação por nucleon em função do número de massa [3].

Estrelas de massa pequena ( $0,1M_{\odot} \leq M \leq 1M_{\odot}$ ) ou de massa intermediária ( $1M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$ ) não conseguem queimar além do hélio e formam um centro de carbono-oxigênio, terminando sua vida na forma de anã-branca. A pressão interna diminui já que o combustível termonuclear se encerra, contraindo assim a estrela. Sendo assim, a densidade aumenta e a distância média entre os elétrons fica próxima ao comprimento de *de Broglie*, o que torna este gás de elétrons em sua forma degenerada – as partículas não se movem mais livremente e o espaço de fase se restringe a estados com energias cada vez mais altas. Lembrando que num gás degenerado de elétrons, a pressão eletrônica  $P_e \propto p_f^4 \propto \rho^{4/3}$ , em que  $p_f$  corresponde ao momento de Fermi. Como já dissemos, ocorre contração e, portanto, aumento de densidade. Logo, a pressão interna aumenta, estabelecendo novamente o equilíbrio hidrostático. A estrela permanece como um objeto muito compacto ( $\rho/\rho_{\odot} \sim 10^4 - 10^6$ ,  $R/R_{\odot} \sim 10^{-2}$ ) e de luminosidade baixa ( $L/L_{\odot} \sim 10^{-1} - 10^{-6}$ ) [4].

Estrelas com massas maiores ( $8M_{\odot} \leq M \leq 60 M_{\odot}$ ) conseguem fundir núcleos mais pesados, chegando a formar centros de ferro, onde temos um gás degenerado de elétrons responsável pela pressão interna. A condição que a distância entre os elétrons é próxima ao comprimento de *de Broglie* estabelece uma densidade crítica,  $\rho_c \propto m^{3/2}$  ( $m$  é a massa da partícula que compõe o gás), acima da qual temos degenerescência. No final da etapa de formação do ferro, o centro da estrela tem uma temperatura de cerca de 0,7 MeV e densidade  $\rho \cong 10^{10} \text{ g/cm}^3$  [8]. Nesse caso,  $\rho \gg \rho_c$  para os elétrons ( $\rho_c \cong 10^6 \text{ g/cm}^3$ ), mas não para os nucleons ( $\rho_c \cong 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ). Estes últimos continuam a constituir um gás perfeito, com pressão parcial  $P_n \ll P_e$ . Neste momento temos que analisar um importante parâmetro astrofísico, a massa de Chandrasekhar ou limite de Chandrasekhar, que estabelece um valor máximo de massa do centro de uma estrela que pode ser sustentada pela pressão interna de um gás degenerado. Ela pode ser dada por:

$$M_{Ch} = 5,78Y_e^2 M_{\odot} = 1,44 M_{\odot}. \quad (3.2)$$

$Y_e$  é a razão de elétrons por nucleon no interior da estrela, tendo valor típico igual a 0,5 para as anãs-brancas. Para estrelas de grande massa, com um interior de ferro, esse valor pode assumir valores no seguinte intervalo [5]:

$$1,2 M_{\odot} \leq M_{Ch} \leq 1,5 M_{\odot}. \quad (3.3)$$

Veremos mais adiante que as estrelas no intervalo  $8M_{\odot} \leq M \leq 60 M_{\odot}$  irão colapsar e, como resultado final, formarão estrelas de nêutron ou buracos negros.

A figura 3.3 mostra os perfis de densidade eletrônica, temperatura e composição química de uma estrela de  $15 M_{\odot}$  em função de  $M(r)/M_{\odot}$  [2], que é a massa interior, isto é, a massa contida numa região delimitada por um raio  $r$  a partir do centro da estrela .

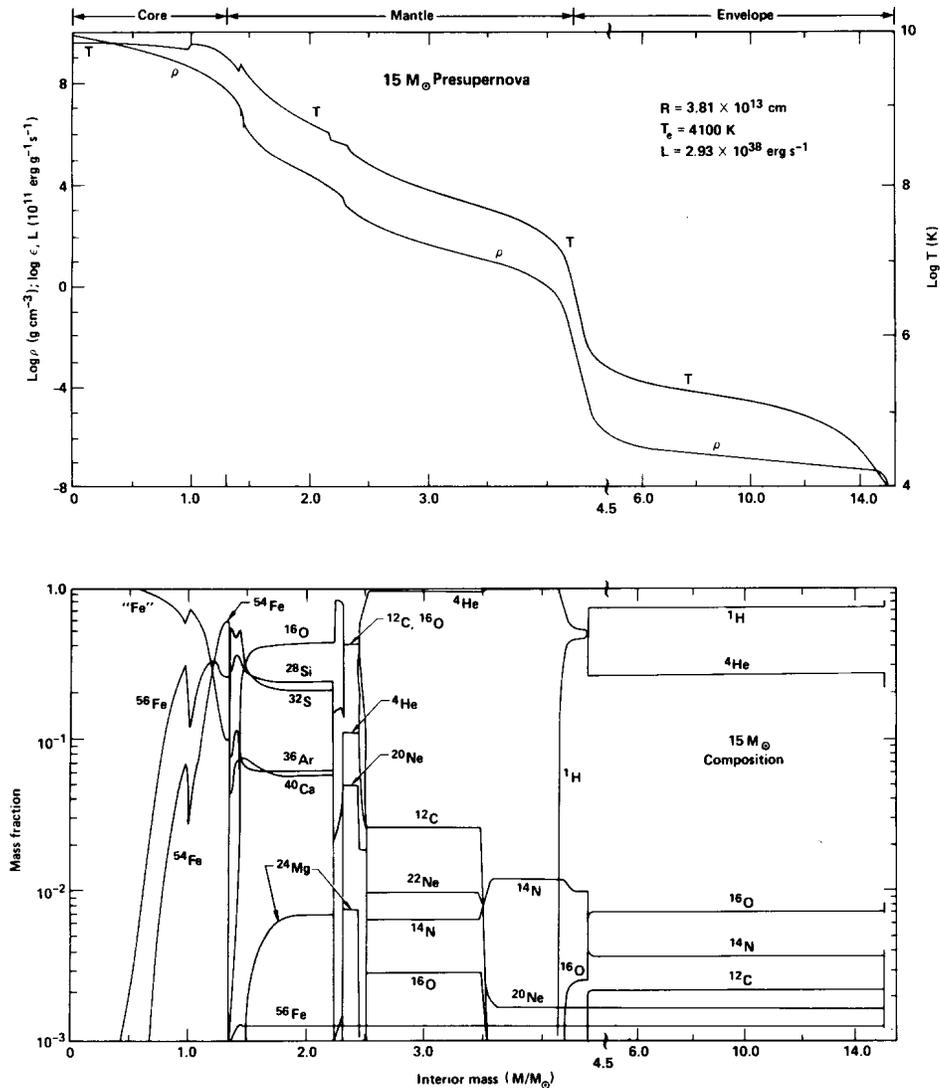


Figura 3.3: Perfil de densidade, temperatura e composição química de uma estrela de  $15 M_{\odot}$  em função da massa interior  $M(r)/M_{\odot}$  [2].

## 3.2) Colapso Gravitacional

Como já dissemos anteriormente, a formação de ferro no centro estelar interrompe as reações de fusão. Mesmo assim, reações podem continuar na fronteira com a camada de silício, devido às altíssimas temperaturas, adicionando ainda mais ferro no centro. Se a massa central superar o limite de Chandrasekhar, o equilíbrio hidrostático é rompido. Sem oposição ao peso das camadas externas, ocorrerá o colapso gravitacional de uma maneira implosiva. Quando se inicia o colapso, uma onda de “rarefação” se propaga em direção ao exterior da estrela, porém com velocidade muito menor que a do colapso. Sendo assim, o envelope permanece estático. Daí sabe-se que é o centro estelar que colapsa, e não a estrela toda.

Mecanismos de resfriamento do centro estelar de ferro, como a neutronização, foto-dissociação e aniquilação de pares vão causar a diminuição da pressão interna – esfriamento de centro estelar, devido às reações endotérmicas.

### 3.2.1) Neutronização

Em uma anã-branca, como já comentado anteriormente, o equilíbrio hidrostático era atingido novamente quando ocorria um aumento da pressão eletrônica  $P_e$ , devido ao aumento da densidade central, equilibrando assim a força gravitacional de colapso. No entanto, antes que o equilíbrio seja restabelecido, o aumento da densidade faz com que a energia de Fermi atinja um valor comparável à diferença de massa nêutron-próton  $\Delta_{np} = 1,3MeV$  (na fase pré-colapso,  $E_f < 1MeV$ ), possibilitando o processo de captura eletrônica ou neutronização:



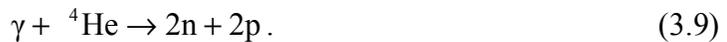
em que  $(A, Z)$  representa especialmente os núclídeos do grupo do ferro, que é o elemento mais abundante do centro estelar. A captura reduz a concentração de léptons, uma vez que os neutrinos escapam livremente da estrela. O escape dos neutrinos diminui a energia disponível e também a quantidade de férmions, aumentando o número de estados disponíveis no espaço de fase e reduzindo a pressão.

### 3.2.2) Foto-dissociação

Depois da queima dos núcleos mais leves, o centro estelar possui uma concentração maior de núcleos pesados, como ferro e níquel, tornando-se impossível a fusão. Tais núcleos podem ser dissociados por fótons de alta energia, pertencentes à parte alta da distribuição de Maxwell, em equilíbrio termodinâmico com o gás degenerado. Pode ocorrer:



O hélio também pode foto-dissociar:



Estas reações mostradas acima são endotérmicas e fazem com que o plasma volte às condições de nucleons e elétrons livres, absorvendo uma energia do meio comparável à energia liberada pelas fusões que criaram os elementos pesados ( $\sim 5 \times 10^{18} \text{ erg / g}$ ).

### 3.2.3) Aniquilação de Pares

Os fótons de mais alta energia podem criar pares elétron-pósitron:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+ \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e. \quad (3.10)$$

Os elétrons e os pósitrons produzidos podem, por sua vez, se aniquilar e formar um par de neutrino-antineutrino eletrônico, o que acarreta uma sensível perda de energia pela saída destes neutrinos do centro estelar.

Para temperaturas pouco maiores que a do limiar de produção elétron-pósitron (1,022 MeV), a energia dos fótons é quase toda utilizada para a formação das massas das partículas, restando pouca energia cinética. Isto equivale a subtrair energia térmica do meio e reduzir a pressão que balanceia a contração gravitacional. Em temperaturas mais elevadas, esse processo transforma a energia de radiação em agitação térmica das partículas, sem ocorrer redução na pressão, o que mantém a estrela em seu equilíbrio.

Acabamos de descrever os fatores que colaboram para o colapso de centro estelar. A seguir começamos a descrição da dinâmica e de que maneira o colapso vai ocorrer.

## 3.3) Dinâmica do colapso

O centro estelar pode ser dividido em duas regiões quanto às velocidades de atração da matéria: *a região homóloga e a casca externa*. Havendo tal divisão, temos acúmulo de energia mecânica na fronteira entre as regiões, podendo ocorrer formação de ondas de choque que podem provocar a explosão da estrela.

- i) *região homóloga*: é a parte mais interna, onde as distribuições de temperatura e densidade só são alteradas por um fator de escala no colapso (auto-similaridade). A partir desse instante, o limite de Chandrasekhar passa a ser útil para definir a fronteira da região homóloga. Vamos supor uma esfera de raio  $R_h$  com massa igual a massa de Chandrasekhar. O fenômeno de captura eletrônica reduz o valor da fração  $Y_e$  até 0,36 [6]. Logo, por (3.2), a massa de Chandrasekhar é reduzida para  $0,75 M_\odot$ . Sabemos que o colapso faz com que  $\rho(r)$  cresça. Portanto, o volume da esfera diminui durante o colapso. Por outro lado, o perfil de densidade dentro da esfera não se modifica, isto é,  $\rho(r/R_h)$  é constante, o que caracteriza a homologia do colapso nessa região [7]. Uma propriedade importante da região homóloga é que a velocidade da matéria em colapso é subsônica e proporcional à distância do centro da estrela.
- ii) *Casca externa*: região limitada internamente pela região homóloga e externamente pela borda do centro em colapso. A matéria é atraída com velocidade supersônica. O máximo da velocidade é atingido em um raio intermediário do centro do colapso, que é um pouco maior que  $R_h$ .

A densidade, assim como a velocidade local do som  $v_s$ , são funções decrescentes do raio. Ponto sônico, que coincide com  $R_h$  e se move em direção ao centro estelar durante o colapso, é o raio em que  $v = v_s$  e demarca a fronteira entre a região homóloga e a casca externa.

A figura 3.4 mostra os perfis das velocidades em  $t=1ms$  após o início do colapso [8], onde o ponto sônico está em um raio de aproximadamente 25 km. Qualquer perturbação na região homóloga não se propaga além do ponto sônico, onde se acumula toda a energia transportada pelas ondas sonoras.

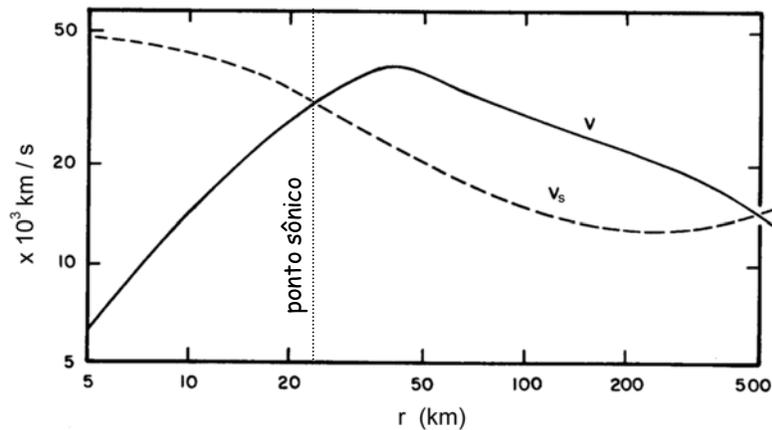


Figura 3.4: velocidade de queda da matéria ( $v$ ) e velocidade local do som ( $v_s$ ) em função do raio da estrela, no instante  $t=1ms$  após o início do colapso [8]. O cruzamento das duas curvas é o ponto sônico, que delimita a região homóloga do colapso.

O impacto da matéria em queda sobre o centro estelar produz variações de pressão que se propagam rumo ao exterior como ondas sonoras. No entanto, a matéria em colapso se move em sentido contrário.

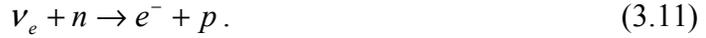
### 3.4) Explosão

Além da homologia, o aumento contínuo da densidade no centro estelar traz implicações consideráveis para a inversão do movimento da matéria em colapso: o aprisionamento de neutrinos e a transição de fase da matéria nuclear.

#### 3.4.1) Aprisionamento de neutrinos

Em regiões onde a densidade atinge  $\rho_a \cong 6,0 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ , a matéria torna-se opaca aos neutrinos, pois o livre caminho médio, cerca de 1 km, é muito menor que o raio do centro estelar, cerca de 100 km. A opacidade é causada principalmente pelo espalhamento elástico (via corrente neutra) com os núcleos presentes no meio [9]. O tempo de difusão supera a escala de tempo de colapso, portanto os neutrinos podem ser considerados presos na região central. A difusão faz com que os processos de captura/ re-emissão passem a

ocorrer em taxas praticamente iguais, sendo que os neutrinos eletrônicos passam a entrar em equilíbrio com os elétrons via reação



Este equilíbrio interrompe a redução da fração leptônica ( $Y_e$ ), que se estabiliza próxima ao valor de 0,36. Como consequência, também se estabiliza a pressão dos elétrons, e pode-se determinar um limite inferior para a massa da região homóloga. Tanto a redução da pressão eletrônica, quanto a determinação de um limite de massa inferior da região homóloga, são fatores contrários à contração estelar.

Os neutrinos aprisionados formarão uma região chamada neutrinosfera, que pode ser definida como a superfície onde ocorre a última interação antes de eles escaparem. Em outras palavras, é a superfície da qual emanam os neutrinos.

O raio da neutrinosfera é obtido tomando-se a profundidade óptica  $\tau(R_\nu) = 2/3$  [6]. Esta profundidade é calculada levando em conta a fração de neutrinos que escapam em um ângulo com direção radial. A profundidade óptica é dada por:

$$\tau(R_\nu) = \int_{R_\nu}^{\infty} \frac{dr}{\lambda_\nu} = \frac{2}{3}, \quad (3.12)$$

em que  $\lambda_\nu$  é o livre caminho médio dos neutrinos. É importante comentar que a neutrinosfera depende da energia dos neutrinos ( $\lambda_\nu$  contém a seção de choque para o processo considerado), logo seu raio não é único. Como primeira aproximação, para os neutrinos e antineutrinos eletrônicos, podemos utilizar [6]

$$R_\nu = 11E_\nu km, \quad (13)$$

em que  $E_\nu$  é a energia do neutrino em MeV. Durante esta etapa do colapso, os neutrinos possuem energia no intervalo entre 6 a 22 MeV (dependendo da região de produção: menor o raio, maior a energia). Na região onde  $\rho \cong \rho_a$ ,  $\langle E_\nu \rangle \cong 10 MeV$ , o raio da neutrinosfera será de  $R_\nu \cong 10^2 km$ . Assim, o raio da neutrinosfera se localiza externamente à esfera de aprisionamento, o que significa que antes do escape os neutrinos ainda difundem por longas distâncias. Estes neutrinos aprisionados na neutrinosfera possuem um papel muito importante para a explosão da supernova, atuando como fontes de energia para a onda de choque que expele a matéria estelar.

### 3.4.2) Transição de fase da matéria nuclear

Vimos que a pressão exercida pelos núcleos é bem menor que a pressão exercida pelos elétrons ( $P_n \ll P_e$ ). Isto ocorre porque a densidade  $\rho$  é bem inferior à densidade nuclear,  $\rho_n \cong 2,7 \times 10^{14} g/cm^3$ . Quando  $\rho \cong \rho_n$ , os núcleos se agregam, perdendo sua “identidade”, constituindo um único núcleo de dimensões gigantescas. Temos então uma transição de fase, a matéria nuclear supera a densidade crítica e se torna degenerada, o que

acarreta um grande acréscimo em  $P_n$ . A força de repulsão de curto alcance nucleon-nucleon passa a prevalecer. Na equação de estado do plasma  $P = k\rho^\gamma$ ,  $\gamma$  muda de valor, uma vez que inicialmente tínhamos um gás degenerado de elétrons relativísticos ( $\gamma = 4/3$ ) e passamos para um gás degenerado de nucleons não-relativísticos ( $\gamma = 5/3$ ). Este crescimento do expoente da equação de estado faz com que o centro estelar subitamente enrijeça, oferecendo grande resistência à compressão contínua. Esta resistência provoca um acúmulo da energia no ponto sônico, já que mais ondas sonoras são produzidas, e principia a formação de uma onda de choque, que difere da onda sonora porque modifica o meio de maneira “permanente” e sua velocidade é supersônica.

Apesar de pequena a compressibilidade nuclear, ela é não nula. Alguns cálculos indicam que  $\rho$  pode superar  $\rho_n$  em até 50% [5]. Quando isto ocorre, o centro estelar não pode ser mais comprimido, tornando-se uma barreira e rebote a contração, causando uma abrupta e violenta variação de pressão rumo ao exterior. Forma-se então uma onda de choque que rompe o confinamento do ponto sônico e se propaga fora da estrela, revertendo o colapso gravitacional em uma explosão de supernova.

O mecanismo que possibilita a explosão ainda não é claro, porém podem ser descritos dois tipos de cenário: *a explosão imediata*, com caráter puramente hidrodinâmico, em que o choque consegue expelir o envelope estelar; e *a explosão atrasada*, em que o choque perde energia na dissociação de núcleos da casca externa, sendo porém revitalizado pelos neutrinos em difusão.

### 3.4.3) *Explosão Imediata*

A rebatida da parte homóloga, após o momento de máxima compressão, cede energia suficiente para que a onda de choque propague-se por toda a estrela em direção a superfície, expelindo a maior parte da sua massa, resultando ou em uma estrela de nêutrons ou em um buraco negro.

Os resultados mostram que o choque dissipa sua energia dissociando núcleos em nucleons ao passar pela matéria da casca externa. A dissociação do ferro, por exemplo, requer cerca de 8,7 MeV/nucleon. Estima-se que para cada  $0,1 M_\odot$  de matéria dissociada em nêutrons e prótons, a energia dissipada é de aproximadamente  $1,7 \times 10^{51} \text{ erg}$  [10], que é comparável à energia cinética da matéria na explosão da SN1987A.

A parte homóloga contém cerca de  $0,7 M_\odot$ . Portanto,  $0,5 M_\odot$  a  $0,8 M_\odot$  de casca externa devem ser atravessados pelo choque com energia suficiente para ejetar o envelope da estrela. Os prótons liberados com a dissociação aumentam a taxa de captura eletrônica, reduzindo a pressão. Quando o choque atinge regiões  $\rho < \rho_a$ , os neutrinos de captura eletrônica podem escapar livremente, levando grandes quantidades de energia.

O sucesso da explosão imediata tem forte dependência com a massa total da estrela e com a equação de estado da matéria nuclear. Estrelas de massa menor formam centros de ferro de menor dimensão. Desta maneira temos menos material a ser atravessado, com menores perdas de energia. Equações de estado para compressibilidades maiores da matéria nuclear conduzem a rebatidas mais intensas, formando ondas de choque com maior energia.

Estrelas com massa entre  $8 M_\odot$  e  $12 M_\odot$  podem não formar ferro, terminando a evolução pré-supernova com um centro composto por oxigênio, neônio, magnésio e silício. Podemos ter uma explosão também nesse caso [5] pela onda de choque, que é auxiliado por

dois fatores: a energia dissipada na dissociação da matéria do centro da estrela é menor e existe uma grande descontinuidade de densidade entre as camadas de carbono e hélio, facilitando a propagação do choque. Existem grandes discussões e simulações sobre explosões de estrelas desse porte [5, 11, 12].

Explosões de estrelas com massa entre  $12 M_{\odot}$  e  $16 M_{\odot}$  são discutidas por Baron, Cooperstein e Kahana [13]. Em geral o sucesso de tais explosões se deve a equações de estado “suaves” e ao uso de centros de ferro menores [5]. Wilson [14], usando equações de estado mais “conservadoras”, não obteve explosões.

#### 3.4.4) *Explosão Atrasada*

O modelo de Baron *et. al.* falha para estrelas massas maiores que  $18 M_{\odot}$ . Por exemplo: uma estrela de  $25 M_{\odot}$  produz um centro de ferro de  $2 M_{\odot}$ , logo o choque deve atravessar aproximadamente  $1,3 M_{\odot}$ . Isto implica em imensas perdas de energia na dissociação nuclear.

Um possível modelo que explicaria a explosão destas estrelas mais massivas é o modelo da explosão atrasada. Ele se baseia na possibilidade que, algumas centenas de *ms* após a rebatida, o choque seja reativado por neutrinos emitidos da recém formada e ainda quente estrela de nêutrons. O choque diminui a densidade da matéria por onde passa, facilitando a difusão dos neutrinos da região homóloga. O fluxo de neutrinos vindo de regiões mais quentes desagrega núcleos em nucleons. O aumento do número de partículas com alta energia cinética faz crescer a pressão  $P_n$  e aquece a matéria, revigorando o choque [5]. É importante observar que a dissociação, que tinha um papel de amortecer o choque, agora tem um papel inverso. O motivo é que na fase de amortecimento, a energia de dissociação era absorvida pelo próprio choque. Agora, nesse modelo, a energia é cedida pelos neutrinos que se difundem na região de aprisionamento.

O fluxo de neutrinos, nessa fase, é gerado no interior da neutrinosfera por aniquilação de pares:

$$e^{-} + e^{+} \rightarrow \nu_x + \bar{\nu}_x . \quad (3.14)$$

A maior fração da energia depositada (80% [15]) vem dos processos de absorção:

$$\nu_e + n \rightarrow e^{-} + p \text{ e} \quad (3.15)$$

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^{+} + n . \quad (3.16)$$

O fluxo emergente tem como componente dominante os neutrinos eletrônicos de captura (3.4) e (3.5), copiosamente produzidos na região homóloga durante sua fase de compressão. Adicionalmente, visto que a captura provoca a neutronização da matéria, a reação (3.15) acima descrita é mais freqüente, e espera-se que no fluxo emitido pela estrela  $\langle E_{\nu_e} \rangle < \langle E_{\bar{\nu}_e} \rangle$ .

Temos também uma menor contribuição, com participação também dos neutrinos muônicos e taônicos, oriundos do espalhamento com nucleons ou elétrons (pósitrons) [16]:

$$\begin{aligned}
\nu_x + \left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} &\rightarrow \nu_x + \left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} \\
\nu_x + \left\{ \begin{matrix} e^- \\ e^+ \end{matrix} \right\} &\rightarrow \nu_x + \left\{ \begin{matrix} e^- \\ e^+ \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A potência por grama de matéria estelar absorvida do fluxo de neutrinos é dada por [15]:

$$\frac{d\dot{E}}{dm} = K(T_\nu) \left[ \frac{L_\nu}{4\pi R_m^2} - \left( \frac{T_m}{T_\nu} \right)^2 a T_m^4 c \right] \frac{erg}{g \times s}, \tag{3.18}$$

em que o índice  $m$  refere-se ao elemento de matéria e  $\nu$  refere-se à neutrinosfera.  $R$  é a distância do centro e  $T$  é a temperatura em MeV.  $K(T_\nu) = \lambda_\nu / \rho$  é o coeficiente de absorção de neutrinos ( $\text{cm}^2/\text{g}$ ) para uma dada temperatura da neutrinosfera.  $L_\nu$  é a luminosidade do fluxo de  $\nu_e + \bar{\nu}_e$  ( $\cong 4 \times 10^{52} \text{ erg/s}$ ). O primeiro termo da expressão (3.18) se refere ao ganho de energia à distância  $R$ ; o segundo termo descreve a emissão de neutrinos de captura à temperatura  $T$ , sendo que a grandeza  $a T_m^4$  é a densidade de energia dos neutrinos na captura.

Quando o primeiro termo é maior que o segundo, temos um ganho de energia. Isto ocorre para um raio com cerca de 150 km, chamado de “ponto de bifurcação”. Nessa região a probabilidade de absorção de neutrinos, proporcional a densidade, é considerável e pode chegar a  $10^{-3}$ . Já a temperatura da matéria é baixa, em torno de alguns MeV, para que a própria emissão seja desprezada. A potência cedida pelos neutrinos para cada nucleon é  $\dot{E} = 50 \text{ MeV} \cdot \text{s}^{-1}$ , suficiente para revitalizar o choque após aproximadamente 250 ms [6].

A luminosidade dos neutrinos é elevada ( $L_\nu \cong 10^{53} \text{ erg/s}$ ) e existe grande fluxo. Apesar da seção de choque ser muito baixa, isto é, em cerca de 5% dos neutrinos que interagem com a matéria, a energia depositada seria suficiente para reavivar o choque [2].

Ocorrendo o aquecimento, a pressão cresce consideravelmente e empurra a matéria estelar para o exterior. O choque pode avançar pelo manto até chegar a regiões com baixa densidade, provocando a explosão. A massa interna ao ponto de bifurcação colapsa, esfria lentamente por cerca de 20 s através da difusão e emissão de  $\nu_x$  e  $\bar{\nu}_x$ , dando origem ao objeto remanescente: uma estrela de nêutrons com raio aproximadamente de 10 km, massa próxima a massa de Chandrashekar e baixa concentração leptônica ( $Y_l \cong Y_e \cong 0,04$ ), já que os neutrinos foram emitidos em quase sua totalidade. A estrela de nêutrons pode sofrer mais um colapso e se transformar em um buraco negro.

Wilson, com o mecanismo de atraso, obteve explosões para estrelas entre 25 e 50  $M_\odot$  [14]. Fatores como convecção, a rotação da estrela e quebras na simetria esférica devem ser considerados nos mecanismos de explosão. A convecção, por exemplo, parece reforçar que o mecanismo de atraso é mais eficaz para explicar o fenômeno da explosão. Janka [16]

obteve resultados interessantes sobre o modelo de atraso incluindo a quebra da simetria esférica. Bethe mostrou que os dados de SN1987A são mais consistentes com o modelo de explosão atrasada [30].

### 3.5) Neutrinos de colapsos estelares

Independente do mecanismo de explosão, a formação da estrela de nêutrons requer liberação de uma grande quantidade de energia gravitacional, que é dada por:

$$\Delta E = -G \left( \frac{M^2}{R_0} - \frac{M^2}{R_N} \right) \cong (2 - 4) \times 10^{53} \text{ erg} . \quad (3.19)$$

Os índices 0 e N da expressão acima se referem, respectivamente, ao raio inicial da estrela e ao raio da estrela de nêutrons.

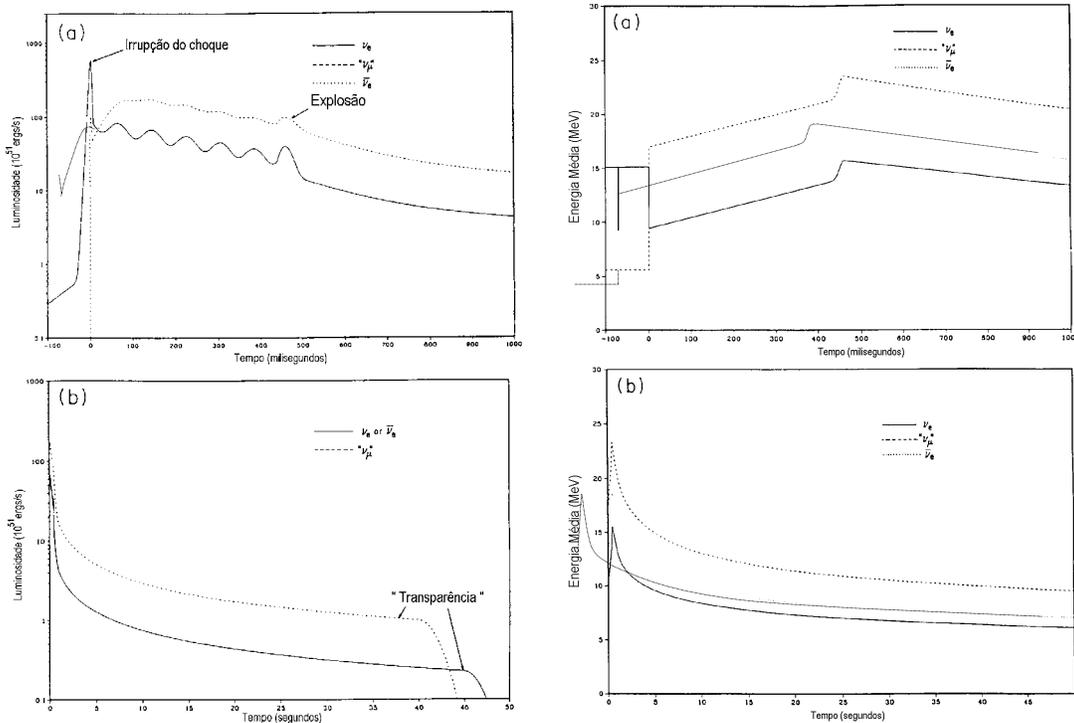
Observações de supernova mostram que a radiação de fótons soma aproximadamente  $10^{49} \text{ erg}$  e a energia cinética da matéria ejetada aproximadamente  $10^{51} \text{ erg}$  [17]. Uma grande fração, “invisível” por assim dizer, deve ser emitida pelos neutrinos ou ondas gravitacionais. Estima-se que as ondas gravitacionais portariam no máximo 1% desse total [18]. Portanto, 99% da energia liberada devem ser carregadas pelos neutrinos.

Temos três momentos ou estágios da emissão de neutrinos em supernovas: i) *o flash inicial* (do disparo inicial até irrupção do choque); ii) *pulsção intermediária* (período entre o amortecimento do choque e a explosão, com acréscimo de matéria à região homóloga); iii) *o resfriamento final* (da proestrela de nêutrons recém formada).

1. *flash neutrínico*: começando o colapso, a captura eletrônica produz  $\nu_e$ , que podem escapar livremente até o momento do aprisionamento. Tais  $\nu_e$  vão ser usados no processo de neutronização da matéria do centro estelar. Durante a implosão, de duração média de 5 ms, são liberados  $\cong 2 \times 10^{51} \text{ erg}$  em  $\nu_e$  com energia média  $\langle E \rangle \cong 15 \text{ MeV}$  e luminosidade  $L_e \cong 4 \times 10^{53} \text{ erg/s}$ . Ocorre a irrupção da onda de choque, que ao se propagar, aquece a matéria e dissocia os núcleos. Como resultado mais neutrinos eletrônicos são produzidos já que mais elétrons são capturados pelos prótons livres. Ao mesmo tempo, ocorre uma distribuição térmica de todos os tipos de neutrinos com temperaturas de alguns MeV. Os espectros mudam para cada espécie de neutrino porque apresentam diferentes livres caminhos médios. Neutrinos muônicos e taônicos interagem somente por corrente neutra, uma vez que a temperatura não é suficiente para produzir múons e taos. Isto gera uma menor seção de choque e, portanto, um espectro de temperaturas (e energias) características mais altas. Quando o choque atinge a neutrinosfera, todos estes neutrinos escapam em aproximadamente 5 ms. Cerca de  $10^{51} \text{ erg}$  são emitidos com os  $\nu_e$  de captura, enquanto que os  $\nu_{\mu,\tau}$  carregam  $0,5 \times 10^{51} \text{ erg}$ , resultando nas seguintes luminosidades:  $L_e \cong 2 \times 10^{53} \text{ erg/s}$  e  $L_{\mu,\tau} \cong 10^{53} \text{ erg/s}$ .

$L_e \cong 6 \times 10^{53} \text{ erg/s}$  é o valor de pico da luminosidade para o neutrino eletrônico, somada as contribuições de implosão e irrupção.

2. *pulsação*: depois de 10 a 30 ms, o choque é interrompido e a matéria retoma o movimento para o centro estelar (acrécimo). As neutrinosferas também se contraem em direção ao centro, devido à diminuição da espessura da matéria interna ao ponto de bifurcação, o que aumenta a temperatura desta região e a energia dos neutrinos. Durante o acréscimo, a instabilidade do centro estelar causa pulsação da luminosidade, interrompida com a retomada da potência do choque e o sucesso da explosão. A identificação dessa estrutura na curva de luminosidade pelos telescópios de neutrinos é fundamental para determinar o mecanismo de explosão, sendo que o mecanismo de pulsação só acontece para a explosão do tipo atrasada. No momento da explosão o manto é expelido e ocorre um aumento muito rápido na luminosidade e na energia média.
3. *resfriamento*: até o instante da explosão, a quantidade de energia liberada ( $3 - 5 \times 10^{52} \text{ erg}$ ) representa apenas 10-20% da energia de formação da estrela de nêutron. A fração mais significativa é liberada após explosão, com a deleptonização e resfriamento da estrela de nêutrons. Nesta etapa todos os tipos de neutrinos sofrem espalhamento e somente os neutrinos eletrônicos são absorvidos. O livre caminho médio dos neutrinos eletrônicos é de 0,1-1m e é dez vezes maior para os neutrinos muônicos e taônicos. A duração do resfriamento é controlada pela escala de tempo de difusão dos neutrinos, estimada entre 10 e 100 s. No final da etapa de resfriamento, em algumas dezenas de segundo, a protoestrela de nêutrons torna-se transparente aos neutrinos e sua luminosidade se acaba.



**Figura 3.5: (a) Luminosidade e energia média dos neutrinos durante o primeiro segundo após irrupção do choque e (b) luminosidade e energia média dos neutrinos durante a explosão da supernova [19].**

A energia total emitida pelos neutrinos nas duas primeiras etapas, denominadas por muitos autores de “burst” de neutronização [20,21], é de aproximadamente  $10^{52}$  erg. O fluxo correspondente a estas duas etapas é pequeno e composto praticamente por neutrinos eletrônicos. A fase de resfriamento totaliza 90% da energia emitida na forma de neutrinos de todos os sabores. A figura 3.5(a) mostra a luminosidade e a energia média para todos os sabores de neutrinos no primeiro segundo após irrupção do choque, enquanto que a figura 3.5(b) mostra o comportamento da luminosidade e da energia média dos neutrinos durante a explosão da supernova.

### 3.6) SN1987A

Fizemos até então uma descrição da formação e do mecanismo de explosão de supernovas do tipo II. O panorama desses tipos de supernova foi confirmado pela detecção de neutrinos da explosão de uma supernova na Grande Nuvem de Magalhães, a SN1987A, que fica a uma distância de 51,8 kpc da Terra. Foi a primeira vez que se detectaram neutrinos de uma fonte galáctica diferente do Sol. Vale à pena lembrar que existe outra classe de supernovas classificadas como tipo I. Acredita-se que estas são formadas a partir da captura de massa por uma estrela de um sistema binário.

O “burst” de neutrinos da SN1987A foi detectado pelos experimentos Kamiokande-II, com 11 eventos [22], e IMB, com 8 eventos [23], ambos usando a técnica por luz Cherenkov na água, sendo sensíveis aos  $e^\pm$  das seguintes reações:

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (3.20)$$

$$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-, x = e, \mu, \tau \text{ (e antipartículas)}. \quad (3.21)$$

A reação (3.20) acima possui uma seção de choque duas ordens de grandeza maior que a reação (3.21), portanto, admite-se que os eventos de Kamiokande-II e IMB tenham sido produzidos pela reação (3.20). Ainda consistente com a reação (3.20), a distribuição angular dos eventos é quase isotrópica. Os elétrons da reação (3.21) são espalhados primordialmente na mesma direção que os neutrinos incidentes.

A figura abaixo mostra a seqüência temporal e a energia dos eventos de SN1987A registrado nos detectores de Kamiokande-II e IMB [10]. Além destes dois detectores, usando a técnica de cintilador, Baksan [24] detectou 6 eventos e LSD [25] detectou 5 eventos. Este último apresenta algumas controvérsias por ter detectado os eventos muito anteriormente ao Kamiokande-II e ao IMB (4h e 42min) e por ter achado um valor de energia total muito alto ( $E_t \cong 2 - 4 \times 10^{54} \text{ erg}$ ) e incomum para o colapso.

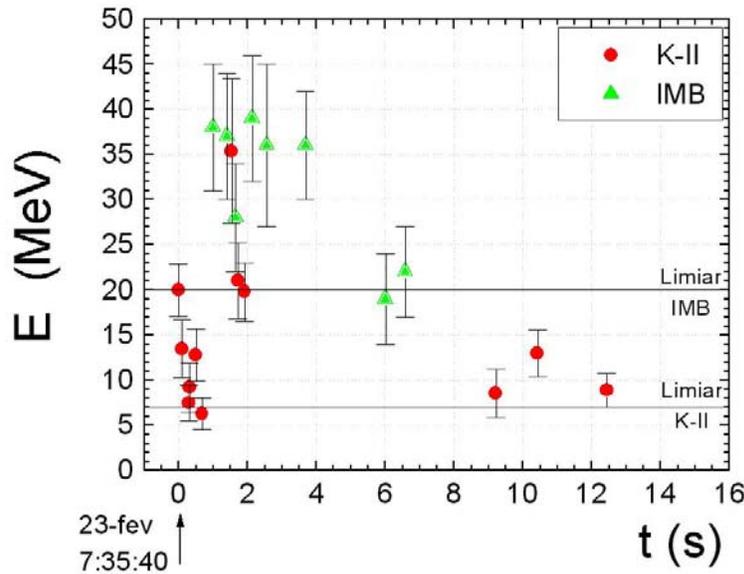


Figura 3.6: Seqüência temporal e energia dos eventos da SN1987A nos detectores de Kamiokande-II e IMB [10].

Para explicar as anomalias observadas pelo experimento LSD, Haxton [26] propõe que um “burst” rico em neutrinos muônicos e pobre em neutrinos eletrônicos e antineutrinos eletrônicos produziria interações mediadas por corrente neutra no carbono do cintilador, enquanto que nos experimento por luz Cherenkov haveria alta sensibilidade somente para os neutrinos eletrônicos. A discrepância temporal é explicada por Rujula [27] através de um “burst” duplo. Um primeiro sinal do colapso da formação da estrela de nêutrons, que após algumas horas colapsa em um buraco negro, dando origem ao segundo

sinal. Essa hipótese pode ser descartada se houver um pulsar como remanescente de SN1987A.

A duração do “burst” ( $\Delta t \cong 12s$ ) é consistente com a ordem de grandeza estimada para o tempo de difusão dos neutrinos na estrela de nêutrons (1-10s) [10]. No entanto, para a distribuição temporal dos eventos, os dados de K-II apresentam um intervalo silencioso de 7,3 s entre o sétimo e o nono evento. Alguns autores especularam modelos de resfriamento com ocorrência de dois pulsos de neutrinos, porém é mais provável que esta lacuna tenha origem estatística, pois esse tipo de comportamento aparece com razoável frequência em simulações feitas com dados esparsos [6].

Lattimer e Yahill [28], considerando a emissão como termicamente perfeita, obtiveram os valores da tabela abaixo:

Parâmetro	K-II	IMB	K-II + IMB
$E_{\bar{\nu}_e}$ (erg)	$(6,3^{+4,0}_{-3,1}) \times 10^{52}$	$(4,5^{+12,0}_{-3,4}) \times 10^{52}$	$(4,8^{+2,1}_{-1,8}) \times 10^{52}$
$T_{\bar{\nu}_e}$ (MeV)	$2,8 \pm 0,4$	$4,2 \pm 1,0$	$3,7 \pm 0,4$

Tabela 3.1 – Resultados [37] de Kamiokande-II e IMB

Se admitirmos equi-partição de energia entre os neutrinos, o resultado da análise de Lattimer e Yahill leva ao seguinte valor para a energia total:

$$E_t = (2,7 - 3,8) \times 10^{53} \text{ erg}, \quad (3.22)$$

que está de acordo com a expressão (3.19).

O número de eventos  $N_\nu$  pela interação nos detectores é dado por [29]:

$$N_\nu = \frac{1}{2n} \times \frac{\Delta E(1-f_n)}{\langle E_\nu \rangle} \times \frac{1}{4\pi D^2} \langle \sigma \rangle n_p, \quad (3.23)$$

em que  $n$  é o número de famílias de neutrinos,  $\Delta E$  é a energia de formação da estrela de nêutrons dada em (3.19),  $f_n \cong 1$  é a fração de energia do “burst” de neutronização,  $D$  é a distância Terra-SN e  $n_p$  é o número de prótons-alvo no detector. A seção de choque média  $\langle \sigma \rangle$  é dada por:

$$\langle \sigma \rangle = 9,75 \times 10^{-42} (E_\nu / 10 \text{ MeV})^2 \text{ cm}^2. \quad (3.24)$$

Usando  $\Delta E = 3 \times 10^{53} \text{ erg}$  e uma energia média dos neutrinos da ordem de 10 MeV, as estimativas para os números de eventos calculados a partir de (3.23) são:

$$\text{K-II: } N_\nu = 12 - 14 \text{ eventos e} \quad (3.25)$$

$$\text{IMB: } N_{\nu} = 16 - 18 \text{ eventos.} \quad (3.26)$$

A estimativa para K-II é muito boa. No entanto para IMB temos o dobro do observado (8 eventos), porque a seção de choque (3.24) é feita sobre todo o espectro de emissão, não levando em conta o corte em energia imposto pelo limiar de detecção (20 MeV). O efeito do corte é menor na estimativa para K-II devido ao seu limiar mais baixo (7 MeV).

Temos um número relativamente pequeno de dados sobre SN1987A. No entanto, esta pequena quantidade de dados fornece várias características gerais sobre este evento astrofísico tão complexo. Pelos dados de supernova podemos ter informações, por exemplo, sobre a hierarquia dos neutrinos, sobre acoplamentos de neutrinos com majorons, neutrinos instáveis e sobre o valor do elemento da matriz de mistura  $U_{13}$ . Experimentos, como o de AMANDA, se preparam para detectar neutrinos de uma futura explosão de supernova para que a quantidade de dados aumente e mais informações serão trazidas sobre a física dos neutrinos.

---

## Referências – Capítulo 3

---

- [1] P. Galeotti, *Lezioni di Astrofisica Neutrinica*, Università di Torino - CLU, Itália, ano acadêmico 1996-1997.
- [2] E. Woosley e T. A. Weaver, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **24**, 205 (1986).
- [3] M. A. Preston, *Physics of the Nucleus*, Addison-Wesley, E.U.A. (1962).
- [4] M. Harwit, *Astrophysical Concepts*, Springer-Verlag, E.U.A. (1982).
- [5] H.A. Bethe e G. Brown, *Sci. Am.*, **252**, 40 (1985).
- [6] H.A. Bethe, *Rev. of Mod. Physics*, **62**, 801 (1990).
- [7] P. Goldreich e S.V. Weber, *Astrophys. J.*, **238**, 991 (1980).
- [8] W.D. Arnett, *Astrophys. J.*, **218**, 815 (1977).
- [9] W.S.C. Willians, *Nuclear and Particle Physics*, Oxford University Press, E.U.A. (1995).
- [10] W.D. Arnett et al., *Annu. Rev. Astr. Astrophys.*, **27**, 629 (1989).
- [11] W. Hillebrandt, *Astron. Astrophys.*, **L3**, 110 (1982).
- [12] A. Burrows e J.M. Lattimer, *Astrophys. J.*, **L19**, 299 (1985).
- [13] E. Baron, J. Cooperstein e S. Kahana, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 126 (1985).
- [14] J.R. Wilson, *Numeric Astrophysics*, Jones & Bartlett, E.U.A. (1985).
- [15] H.A. Bethe e J.R. Wilson, *Astrophys. J.*, **295**, 14 (1985).
- [16] H.-T. Janka, in “*Frontier Objects in Astrophysics and Particle Physics*”, Ed. F. Giovannelli e G. Mannocchi, Società Italiana di Fisica (SIF), Bolonha – Itália (1993).
- [17] A. Burrows, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **40**, 181 (1990).
- [18] S. Shapiro, in “*Gravitational Radiation*”, Ed. L. Smarr - Oxford University Press, E.U.A. (1978); *apud* R. Mayle et al., *Astrophys. J.*, **318**, 288 (1987).
- [19] E. Kemp, Tese de Doutorado (UNICAMP), Cap.1, pág. 9 (2000).
- [20] D.K. Nadězhin e I.V. Ostroshchenko, *Sov. Astron.*, **24**, 47 (1980).
- [21] R. Mayle, J.R. Wilson e D.N. Schramm, *Astrophys. J.*, **318**, 288 (1987).
- [22] K.S. Hirata et al., *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1490 (1987).
- [23] R.M. Bionta et al., *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1494 (1987).
- [24] E.N. Alexeyev et al., *JETP Lett.*, **45**, 589 (1987).
- [25] M. Aglietta et al., *Europhys. Lett.*, **3**, L1315 (1987).

- [26] W.C. Haxton, *Phys. Rev.*, **36D**, 2283 (1987).
- [27] A. De Rujula, *Phys. Lett.*, **193B**, 514 (1987).
- [28] J.M. Lattimer e A. Yahill, *Astrophys. J.*, **340**, 426 (1989);
- [29] C.W. Kim e A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics – Contemporary Concepts in Physics* – vol. 8, Harwood Academic Publishers, Suíça (1993).
- [30] H.A. Bethe, *Astrophys. J.*, **412**, 192 (1993).

## Ondas Planas versus Pacotes de Onda

No Capítulo 1 concluímos que os neutrinos de supernova apresentam uma pequena diferença entre o comprimento de oscilação e o comprimento de coerência no vácuo, o que nos leva a inferir se o fenômeno de oscilação ocorrerá ou não. A pergunta que colocamos agora é se os neutrinos de supernova irão oscilar dentro da matéria da estrela em pré-colapso. Outra pergunta é se o formalismo de pacotes de onda irá introduzir diferenças significativas na oscilação destes neutrinos em relação ao formalismo de ondas planas. Para responder a tais perguntas nos valem os formalismos lançados e discutidos no Capítulo 2.

Mas antes de tudo, devemos saber qual é o perfil da supernova com que estamos trabalhando. Saber o perfil é saber como a densidade de matéria em função da distância radial ao centro da estrela está distribuída. É saber qual é a composição de elementos químicos que a formam. De posse destas informações, somos capazes de extrair a densidade eletrônica da supernova para diversos pontos. Qual o motivo de saber a densidade eletrônica? A resposta é simples: o potencial efetivo sentido pelo neutrino em um meio depende da densidade eletrônica (expressão (2.1)). É com esse potencial que seremos capazes de calcular as probabilidades de conversão dos neutrinos para os mais diversos casos. Além do mais, a densidade eletrônica conhecida e calculada nos permite saber se a propagação do neutrino é adiabática ou não.

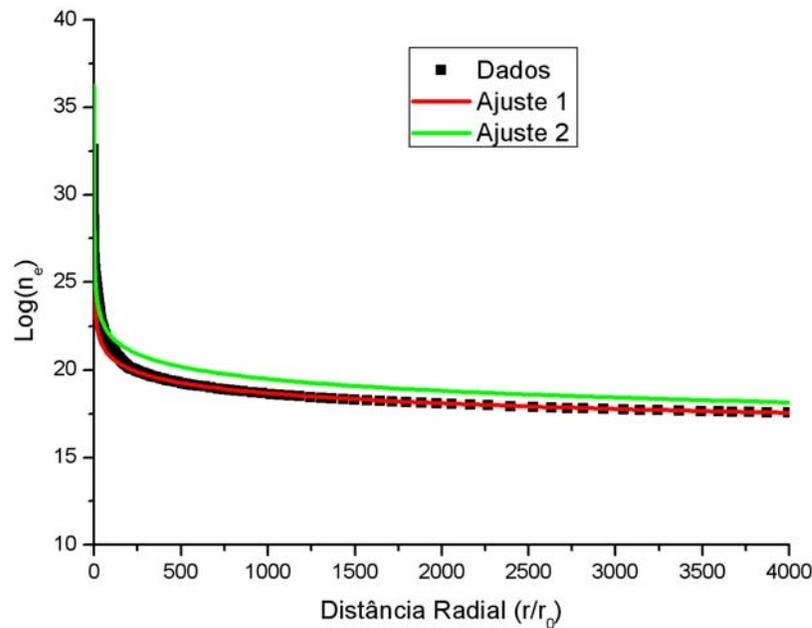
Concluímos então que ter conhecimento sobre a densidade eletrônica nos permite fazer a análise que nos propusemos.

### 4.1) A densidade eletrônica da supernova

Como descrevemos no Capítulo 3, a formação de uma supernova é um assunto bem complexo e envolve mudanças de composição química e formações de novos elementos em vários instantes de sua evolução. Não levaremos em consideração as mudanças temporais

que ocorrem em tal estrela, mas sim seu estágio pré- explosão, já com toda síntese de elementos realizada e estando a um passo da explosão. Usaremos uma supernova de 15 massas solares como modelo, cujos dados foram gentilmente fornecidos pelo professor Stan Woosley e podem ser encontrados no site [www.supersci.org](http://www.supersci.org). A tabela de dados apresenta uma quantidade diversificada de dados, mas estamos interessados apenas na distância radial (cm), na densidade de matéria ( $\text{g/cm}^3$ ) e na composição química, com as respectivas porcentagens dos isótopos de cada elemento químico num dado raio. Dessa maneira, somos capazes de calcular a densidade eletrônica num dado raio.

Tendo estes pontos de densidade eletrônica para os diversos valores de distância radial, buscamos uma função analítica que se ajuste da melhor maneira possível a estes pontos. Usamos dois tipos de ajuste: um visual, em que olhando para os pontos inferimos um formato de curva; o outro realizado pelo programa Mathematica. Abaixo mostramos os pontos de densidade eletrônica em função da distância radial, com as duas curvas de ajuste em vermelho e verde.



**Figura 4.1 – Densidade eletrônica em função do raio.**

A curva em vermelho é o ajuste de curva realizado “manualmente”, sendo sua função densidade eletrônica ( $n_e$ ) dada por:

$$\log(n_e) = 25,50 \times (r/r_0)^{-0,045} . \quad (4.1)$$

A curva em verde é o ajuste realizado “automaticamente” pelo programa Mathematica. Sua função densidade eletrônica é:

$$\log(n_e) = 27,73 \times (r/r_0)^{-0,051} . \quad (4.2)$$

Lembrando que a densidade eletrônica está em  $\text{cm}^{-3}$  e o raio  $r_0$  é igual a  $10^4$  km. O melhor ajuste entre as duas curvas foi a verde. Portanto, usaremos a função  $\log(n_e) = 25,50 \times (r/r_0)^{-0,045}$  para a densidade eletrônica da supernova que estamos trabalhando.

## 4.2) A análise da adiabaticidade na supernova

Na seção anterior, encontramos uma função para a densidade eletrônica da supernova, que será usada para calcular se a propagação do neutrino nessa região será ou não adiabática, com o auxílio do “parâmetro de adiabaticidade”, que foi discutido no Capítulo 2. Relembramos dele abaixo:

$$\gamma(x) \equiv \frac{(\Delta/E)^2}{2\sqrt{2}G_F} \times \frac{\text{sen}^2 2\theta}{\text{sen}^3 2\theta} \times \frac{1}{\left| \frac{dn_e}{dx} \right|}. \quad (2.22)$$

Vamos tentar encontrar se existem regiões de ressonância na propagação de neutrino em uma supernova de 15 massas solares. Devemos lembrar que as densidades eletrônicas para ressonância (expressão (2.12)) podem ser calculadas usando a seguinte expressão:

$$n_R = \frac{\Delta \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E}. \quad (2.12)$$

Notamos que a densidade eletrônica de ressonância ocorre para valores de parâmetros conhecidos no vácuo, como a diferença de massa ao quadrado ( $\Delta$ ), o ângulo de mistura ( $\theta$ ) e a energia  $E$  do neutrino.

As recentes análises de dados de SNO [1] combinados com os resultados do experimento de reator de KamLAND [2] nos fornecem os seguintes valores:  $6,0 \times 10^{-5} eV^2 < \Delta < 1,0 \times 10^{-4} eV^2$  e  $0,8 < \text{sen} 2\theta < 0,98$ , com 99% de nível de confiança. O melhor ajuste para tais parâmetros resulta em  $\text{sen} 2\theta \cong 0,83$  e  $\Delta \cong 7,1 \times 10^{-5} eV^2$ .

Usando os valores citados anteriormente de melhor ajuste da solução solar, o valor da densidade eletrônica de ressonância para neutrinos com energia  $E$  em  $MeV$  será:

$$n_R = \frac{1,56 \times 10^{26}}{E(MeV)} \text{cm}^{-3}. \quad (4.3)$$

Para neutrinos de supernova com  $5 MeV$  de energia, teremos  $n_R = 3,12 \times 10^{25} \text{cm}^{-3}$ . Já para neutrinos com  $40 MeV$  de energia, a densidade de ressonância será  $n_R = 3,89 \times 10^{24} \text{cm}^{-3}$ .

A colaboração SuperKamiokande [3] recentemente divulgou os resultados dos parâmetros de oscilação para os neutrinos atmosféricos com 90% de nível de confiança:

$1,9 \times 10^{-3} eV^2 < \Delta < 3,0 \times 10^{-3} eV^2$  e  $0,9 < \text{sen}^2 2\theta < 1,0$ , com o melhor ajuste  $\Delta \cong 2,5 \times 10^{-3} eV^2$  e  $\text{sen}^2 2\theta \cong 0,9$ . Usando estes parâmetros calculamos a densidade eletrônica de ressonância em função da energia do neutrino em  $MeV$ :

$$n_R = \frac{3,11 \times 10^{27}}{E(MeV)} cm^{-3}. \quad (4.4)$$

Para neutrinos com  $5 MeV$  de energia, teremos  $n_R = 6,22 \times 10^{26} cm^{-3}$ . Para neutrinos de  $40 MeV$ , a densidade eletrônica ressonante será  $n_R = 7,78 \times 10^{25} cm^{-3}$ .

Os parâmetros calculados por LSND combinados com KARMEN [4] são, para 90% de nível de confiança,  $0,45 eV^2 < \Delta < 1 eV^2$  e  $2,0 \times 10^{-3} < \text{sen}^2 2\theta < 7,0 \times 10^{-3}$ . O melhor ajuste fornece  $\Delta \cong 0,5 eV^2$  e  $\text{sen}^2 2\theta = 0,07$ . Usando-os para o cálculo da densidade eletrônica de ressonância em função da energia do neutrino em  $MeV$  temos

$$n_R = \frac{1,96 \times 10^{30}}{E(MeV)} cm^{-3}. \quad (4.5)$$

Para  $5 MeV$  e  $40 MeV$  de energia teremos, respectivamente,  $n_R = 3,93 \times 10^{29} cm^{-3}$  e  $n_R = 4,91 \times 10^{28} cm^{-3}$ .

O resumo da descrição acima está na Tabela 4.1, que indica os melhores ajustes para a diferença de massa ao quadrado e o ângulo de mistura para os experimentos solar, atmosférico e LSND. A tabela também mostra os respectivos valores de densidade eletrônica para as regiões de ressonância.

	$\Delta (eV^2)$	$\text{sen}^2 2\theta$	$n_R$ para 5 MeV em $cm^{-3}$	$n_R$ para 40 MeV em $cm^{-3}$
<b>Solar</b>	$7,1 \times 10^{-5}$	0,83	$3,12 \times 10^{25}$	$3,89 \times 10^{24}$
<b>Atmosférico</b>	$2,5 \times 10^{-3}$	0,95	$6,22 \times 10^{26}$	$7,78 \times 10^{25}$
<b>LSND</b>	0,5	0,07	$3,93 \times 10^{29}$	$4,91 \times 10^{28}$

**Tabela 4.1: melhor ajuste dos parâmetros para os experimentos solar, atmosférico e LSND com os valores de densidade eletrônica na ressonância para 5 MeV e 40 MeV.**

Acabamos de encontrar os valores de densidade eletrônica para os quais temos ressonância. Tendo os valores de densidade eletrônica da ressonância para os parâmetros solares, atmosféricos e de LSND, podemos saber em que região da supernova está ocorrendo, ou seja, em que ponto (raio) existe ressonância. Se o parâmetro de adiabaticidade na ressonância for muito maior que um, podemos concluir que a propagação será adiabática em todo lugar. Usando a fórmula (2.23), que se refere ao valor do parâmetro de adiabaticidade na ressonância, e os dados fornecidos na referência [5], concluímos que, para a propagação dos neutrinos nesse meio com densidade eletrônica dada por (4.2), teremos *adiabaticidade*.

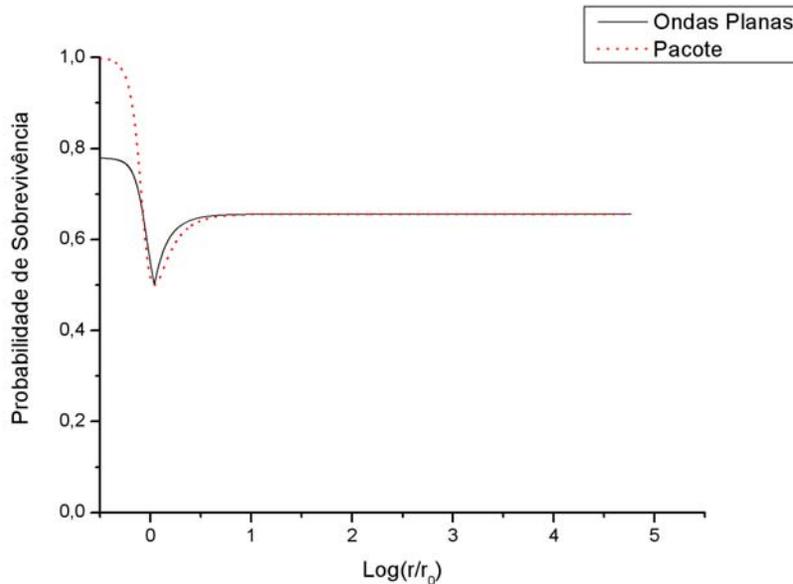
Logo, para os cálculos das probabilidades usaremos (2.29) para o tratamento em ondas planas e (2.47) para o tratamento em pacotes de onda. Usaremos os mesmos parâmetros e energias apresentadas na Tabela 4.1.

### 4.3) Probabilidades

Vamos apresentar as probabilidades de sobrevivência. Lembrando que a probabilidade de sobrevivência para pacotes de onda é dada por *um menos a probabilidade de conversão*, que é dado pela equação (2.47), enquanto que (2.29) já é a probabilidade de sobrevivência para ondas planas.

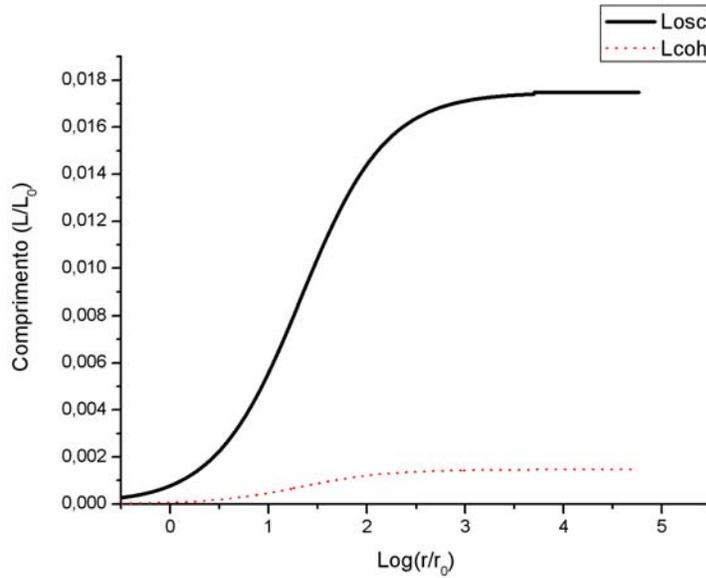
#### 4.3.1a) O caso solar para neutrinos com energia de 5 MeV

A Figura 4.2 abaixo apresenta as probabilidades de sobrevivência. Vale a pena lembrar que o *eixo x* representa o logaritmo na base 10 da distância radial medido em termos de um valor múltiplo de um raio  $r_0$  igual a 10000 km. A curva em preto é para ondas planas e a curva pontilhada é para pacotes de onda. Notamos que à medida que o neutrino se propaga, não temos mais diferenças entre os dois “tipos” de probabilidade.



**Figura 4.2: Probabilidade de sobrevivência em ondas planas (preto) e pacotes de onda (pontilhado) para neutrinos com 5 MeV (caso solar).**

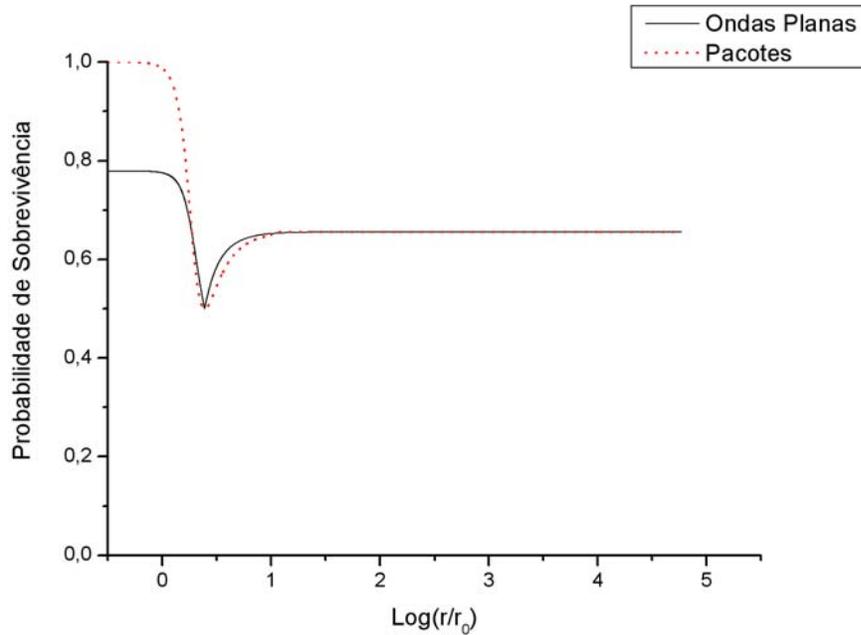
Mostramos também o comprimento de oscilação e o comprimento de coerência calculados, respectivamente, por (2.48) e (2.49), na Figura 4.3, em que  $L_0$  é igual a 10000 km. Notamos que rapidamente o comprimento de oscilação supera o comprimento de coerência, o que significa que a coerência entre os autoestados de massa é perdida rapidamente. Isto ocasiona o congelamento da oscilação dos neutrinos, como podemos ver na Figura 4.2. Vimos que para termos oscilação é necessário que a condição (1.56) seja satisfeita, o que não acontece neste caso.



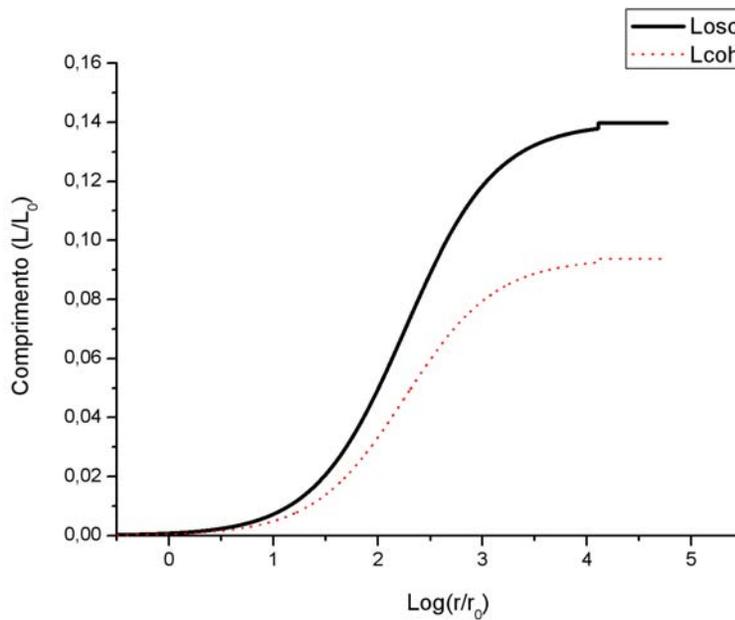
**Figura 4.3: Comprimento de Oscilação (preto) e Comprimento de coerência (pontilhado) para neutrinos com 5 MeV (caso solar).**

#### ***4.3.1b) O caso solar para neutrinos com 40 MeV de energia***

A Figura 4.4 apresenta a probabilidade de sobrevivência e a Figura 4.5 mostra os comprimentos de oscilação e comprimentos de coerência. A mesma análise feita na seção 4.3.1a pode ser feita uma vez que os pacotes de onda não introduzem diferença na probabilidade e também ocorre um congelamento na oscilação, já que o comprimento de oscilação supera o comprimento de coerência rapidamente.



**Figura 4.4:** Probabilidade de sobrevivência em ondas planas (preto) e pacotes de onda (pontilhado) para neutrinos de 40 MeV (caso solar).



**Figura 4.5:** Comprimento de oscilação (preto) e comprimento de coerência (pontilhado) para neutrinos de 40 MeV (caso solar).

O padrão exibido no caso solar será repetido para os casos atmosféricos e de LSND, que iremos mostrar nas seções 4.3.2a, 4.3.2b, 4.3.3a, 4.3.3b. Parece que os pacotes de onda não trazem nenhuma informação nova para as probabilidades em nenhuma das situações mostradas, isto é, o formalismo de ondas planas parece ser suficiente para descrever a oscilação de neutrinos dentro de uma supernova. Vale lembrar que a coerência é perdida

rapidamente e, portanto, os autoestados de massa se desacoplam, ocasionando o congelamento da oscilação.

#### 4.3.2a) O caso atmosférico para neutrinos com 5 MeV de energia

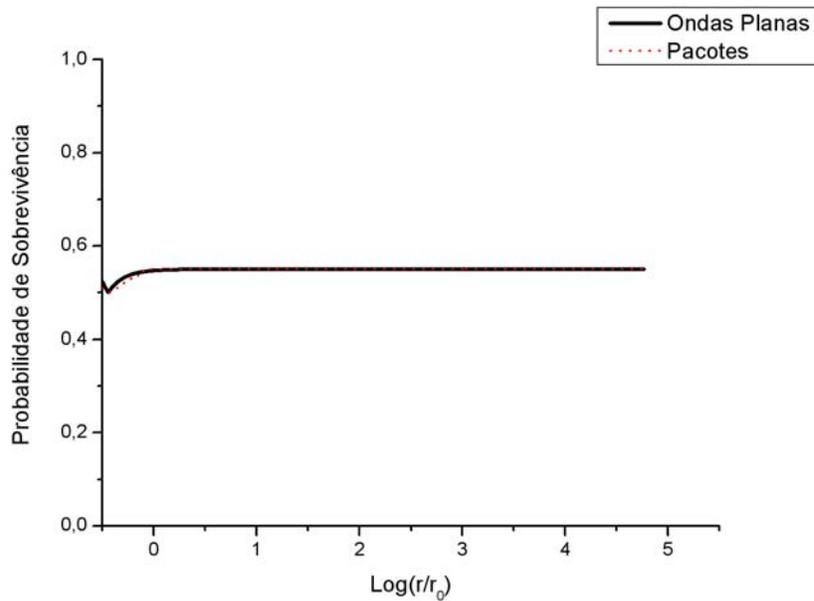


Figura 4.6: Probabilidade de sobrevivência em ondas planas (preto) e pacotes de onda (pontilhado) para neutrinos de 5 MeV (caso atmosférico).

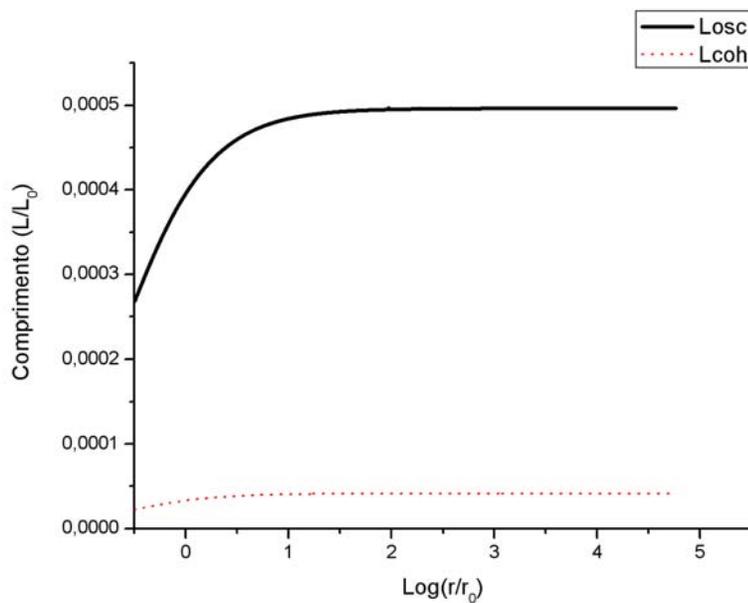


Figura 4.7: Comprimento de Oscilação (preto) e Comprimento de coerência (pontilhado) para neutrinos de 5 MeV (caso atmosférico).

### 4.3.2b) O caso atmosférico para neutrinos com 40 MeV de energia

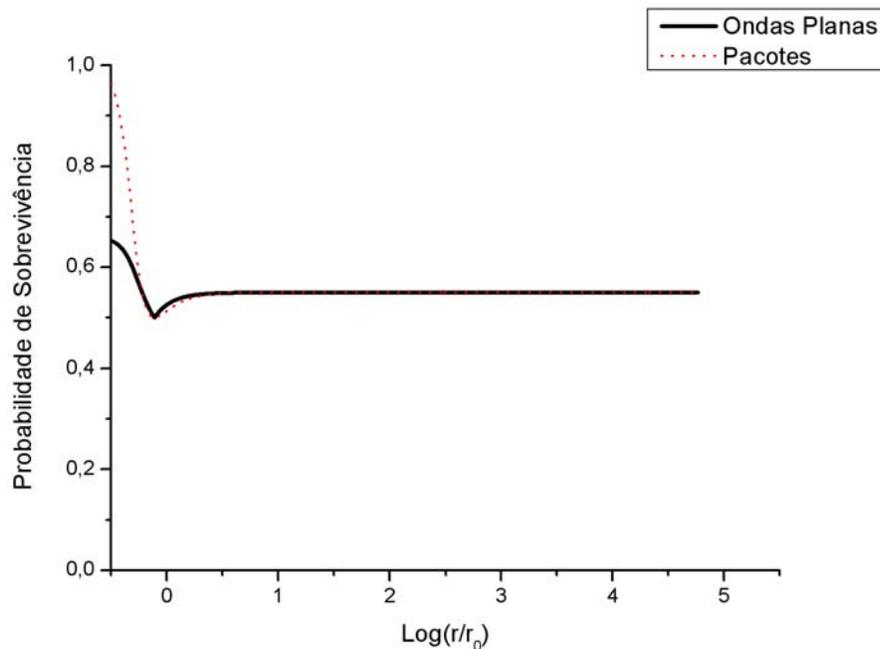


Figura 4.8: Probabilidade de sobrevivência em ondas planas (preto) e pacotes de onda (pontilhado) para neutrinos de 40 MeV (caso atmosférico).

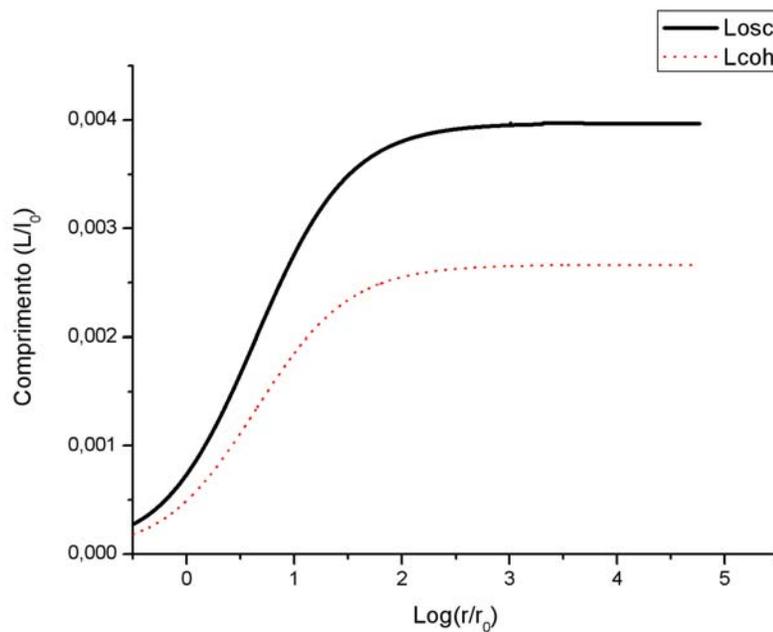


Figura 4.9: Comprimento de Oscilação (preto) e Comprimento de coerência (pontilhado) para neutrinos de 40 MeV (caso atmosférico).

### 4.3.3a) O caso LSND para neutrinos com 5 MeV de energia

Neste caso, houve coincidência completa das probabilidades, como vemos na Figura 4.10 abaixo:

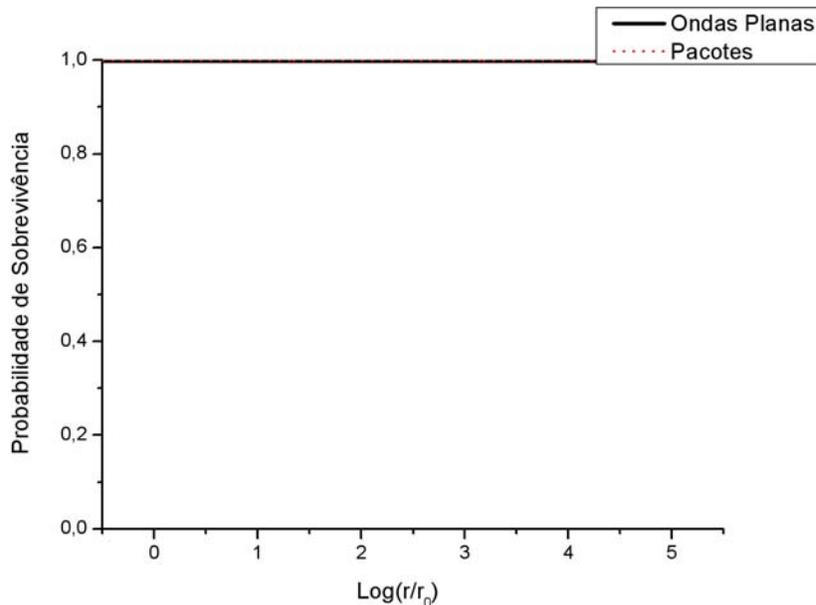


Figura 4.10: Probabilidade de sobrevivência em ondas planas (preto) e pacotes de onda (pontilhado) para neutrinos de 5 MeV (caso LSND).

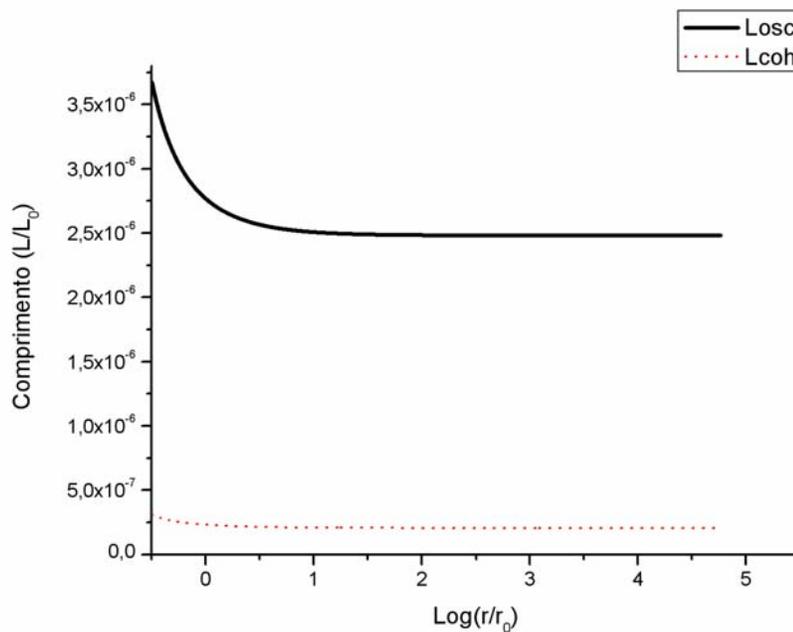


Figura 4.11: Comprimento de Oscilação (preto) e Comprimento de coerência (pontilhado) para neutrinos de 5 MeV (caso LSND).

### 4.3.3b) O caso LSND para neutrinos com 40 MeV de energia

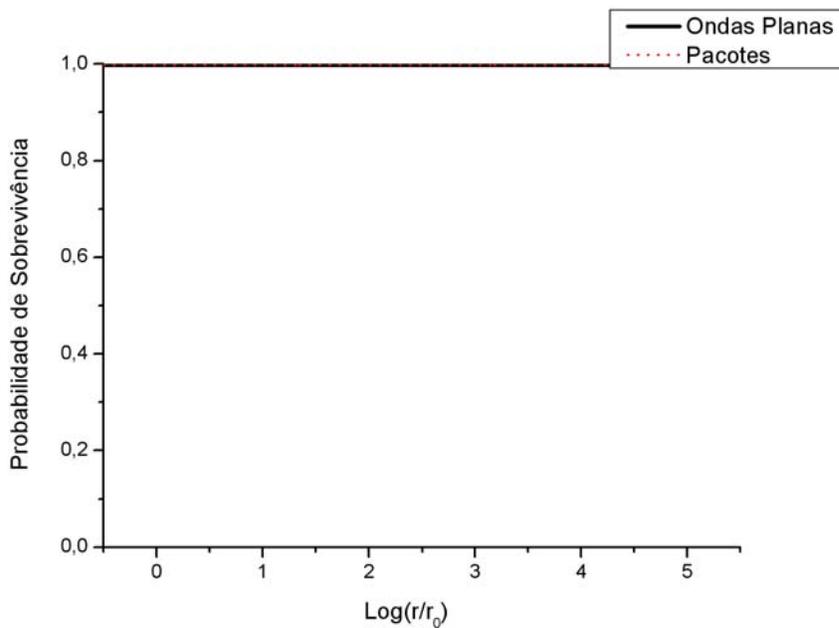


Figura 4.12: Probabilidade de sobrevivência em ondas planas (preto) e pacotes de onda (pontilhado) para neutrinos de 40 MeV (caso LSND).

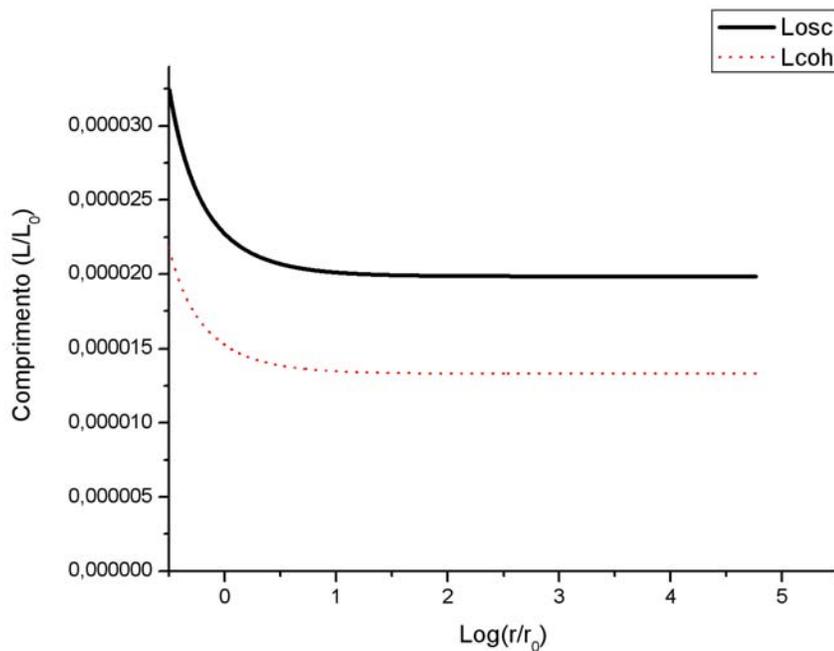


Figura 4.13: Comprimento de Oscilação (preto) e Comprimento de coerência (pontilhado) para neutrinos de 40 MeV (caso LSND).

Notamos que em nenhum dos casos apresentados houve diferença entre a probabilidade de sobrevivência entre ondas planas e pacotes de onda. Verificamos também a presença de uma probabilidade que fica constante, uma vez que em todos os casos o comprimento de oscilação é maior que o comprimento de coerência.

---

## Referências – Capítulo 4

---

- [1] The SNO Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 181301-1 (2004).
- [2] The KamLAND Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801 (2005), hep-exp/0406035.
- [3] The SuperKamiokande Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 10180-1 (2004).
- [4] E. D. Church, K. Eitel, G. B. Mills, e M. Steidl, *Phys. Rev.* **D66**, 013001 (2004).
- [5] Dados de uma supernova de 15 massas solares fornecidas pelo professor S. Woosley – [www.supersci.org](http://www.supersci.org)

# CONCLUSÕES

---

Discutimos neste trabalho a oscilação de neutrinos em pacotes de onda, identificando as principais diferenças em relação ao formalismo de ondas planas. Procuramos identificar em que situações os pacotes de onda eram necessários e o único caso que nos dava indício de uma possível necessidade eram os neutrinos de supernova. É neste contexto que resumimos as principais conclusões deste trabalho.

- O formalismo de pacotes de onda introduz na expressão de probabilidade de conversão um termo de amortecimento e outro termo exponencial. O termo de amortecimento apresenta grande importância já que traz consigo a coerência entre os autoestados de massa. O termo exponencial, de acordo com nossos cálculos, pode ser desprezado, pelo menos em primeira aproximação;
- Para neutrinos solares, neutrinos de reatores e aceleradores e neutrinos de altíssima energia, oriundos de AGNs por exemplo, verificamos que o comprimento de coerência é sempre muito maior que o comprimento de oscilação. É de se esperar que a oscilação ocorra, sendo, portanto, o formalismo de ondas planas suficiente para tratar o fenômeno de oscilação de neutrinos.
- Os neutrinos de supernova, como vimos no Capítulo 1, apresentavam, principalmente para os neutrinos oriundos do “core”, um comprimento de coerência muito próximo ao comprimento de oscilação. Levando em conta que o tamanho dos pacotes de onda para supernova assume algum dos valores apresentados no intervalo de (1.31), inferimos que os pacotes de onda poderiam trazer alguma diferença em relação à probabilidade calculada por ondas planas. Verificamos que, durante a propagação no vácuo, a probabilidade congela (Figura 1.1), o que significa que existe o

desacoplamento dos autoestados de massa, encerrando a coerência entre eles. Na matéria, usando uma supernova de 15 massas solares, com os dados fornecidos pelo professor Stan Woosley, notamos que, usando as soluções solar, atmosférica e de LSND, a probabilidade de conversão em pacotes de onda acaba sendo igual à de ondas planas. Isto significa que não temos necessidade do uso de pacotes de onda na propagação dos neutrinos dentro da supernova. Notamos também, que a coerência é perdida rapidamente, isto é, os neutrinos se propagam como autoestados de massa sem interferência mútua. Defendemos a idéia de que o formalismo de pacotes de onda não introduz nenhuma diferença significativa para o fenômeno de oscilação de neutrinos.

É importante destacar que usamos um formalismo para apenas duas famílias. Talvez, usando-se um Hamiltoniano que envolva três famílias na equação de evolução, podemos ter alguma diferença significativa. No entanto, isto é algo que necessita ser verificado com maior cuidado.

# APÊNDICE A

---

## Dedução da Probabilidade em Pacotes de Onda (Vácuo)

A expressão (1.44) do Capítulo 1 é deduzida a partir da expressão (1.43) tomando sua média temporal.

Vamos relembrar (1.43):

$$P(v_a \rightarrow v_b; X, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \sum_{a,b} U_{\beta a} U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* U_{\alpha b} \times \exp\{i(\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle)X - i(\langle E_a - E_b \rangle)T\} \\ \times \exp\left\{-\frac{(X - v_a T)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(X - v_b T)^2}{4\sigma_x^2}\right\}$$

Tomando o argumento da segunda exponencial, temos:

$$-\frac{(X - v_a T)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(X - v_b T)^2}{4\sigma_x^2} = -\frac{1}{4\sigma_x^2} \{2X^2 - 2TX(v_a + v_b) + T^2(v_a^2 + v_b^2)\}. \quad (\text{A.1})$$

Rearranjando os termos das exponenciais podemos escrevê-las como:

$$\exp\left\{i(\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle)X - \frac{2X^2}{4\sigma_x^2}\right\} \exp\left\{-i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle)T - \frac{1}{4\sigma_x^2}[-2TX(v_a + v_b) + T^2(v_a^2 + v_b^2)]\right\}. \quad (\text{A.2})$$

Chamando  $A = \exp\left\{i(\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle)X - \frac{2X^2}{4\sigma_x^2}\right\}$ , reescrevemos (A.2) como

$$A \exp\left\{-\left[\frac{T^2}{4\sigma_x^2}(v_a^2 + v_b^2) + T\left(i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2}(v_a + v_b)\right)\right]\right\}. \quad (\text{A.3})$$

Vamos completar quadrados na expressão (A.3), usando uma variável  $\alpha$  que iremos descobrir. Devemos notar o seguinte:

$$\left(\frac{T}{2\sigma_x}(v_a^2 + v_b^2)^{1/2} + \alpha\right)^2 = \frac{T^2}{4\sigma_x^2}(v_a^2 + v_b^2) + \alpha^2 + \frac{2T}{2\sigma_x}(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}\alpha. \quad (\text{A.4})$$

Usando (A.3)

$$\alpha = \frac{\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}} \left[ i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2}(v_a + v_b) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Agora, com (A.5), podemos reescrever (A.3) como:

$$A \exp\left\{-\left[\frac{T}{2\sigma_x}(v_a^2 + v_b^2)^{1/2} + \frac{\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}} \left( i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2}(v_a + v_b) \right) \right]^2\right\} \times \exp\left\{\frac{\sigma_x^2}{(v_a^2 + v_b^2)} \left[ i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2}(v_a + v_b) \right]^2\right\}. \quad (\text{A.6})$$

Chamando  $C = A \exp\left\{\frac{\sigma_x^2}{(v_a^2 + v_b^2)} \left[ i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2}(v_a + v_b) \right]^2\right\}$ , resolveremos a integral no tempo de (A.6) para achar a probabilidade.

$$C \int \exp \left\{ - \left[ \frac{T}{2\sigma_x} (v_a^2 + v_b^2)^{1/2} + \frac{\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}} \left( i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2} (v_a + v_b) \right) \right]^2 \right\} dT. \quad (\text{A.7})$$

Façamos uma troca de variável, chamando

$$u = \frac{T}{2\sigma_x} (v_a^2 + v_b^2)^{1/2} + \frac{\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}} \left( i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) - \frac{2X}{4\sigma_x^2} (v_a + v_b) \right). \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Portanto } dT = \frac{2\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}} du$$

Voltando a resolver a integral (A.7) com as mudanças de variável (A.8) feitas, temos que

$$C \int \exp(-u^2) \frac{2\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}} du \cong \sqrt{\pi} \frac{C2\sigma_x}{(v_a^2 + v_b^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.9})$$

Agrupando os termos temos e desenvolvendo quadrados temos que – aqui retomamos a expressão atribuída à constante C:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_x^2}{v_a^2 + v_b^2} \left\{ -(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle)^2 + \frac{4X^2}{16\sigma_x^4} (v_a + v_b)^2 - 2i(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) \frac{2X}{4\sigma_x^2} (v_a + v_b) \right\} - \frac{2X^2}{4\sigma_x^2} \\ & + iX(\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle) = \\ & = -\frac{(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle)^2}{4\sigma_p^2 (v_a^2 + v_b^2)} - \frac{X^2}{4\sigma_x^2} \left[ \frac{(v_a - v_b)^2}{v_a^2 + v_b^2} \right] + i \left\{ (\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle) - (\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) \left( \frac{v_a + v_b}{v_a^2 + v_b^2} \right) \right\} X. \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Portanto, tomando (A.10) e voltando a expressão (1.43) usando (A.10) e normalizando, chegamos a (1.44):

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(X) &= \left[ \sum_{a'} \frac{|U_{\alpha a'}|^2}{|v_{a'}|} \right] \sum_{a,b} U_{\beta a} U_{\alpha a'}^* U_{\beta b}^* U_{ab} \times \exp \left\{ i \left[ (\langle p_a \rangle - \langle p_b \rangle) - (\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle) \left( \frac{v_a + v_b}{v_a^2 + v_b^2} \right) \right] X \right\} \\ &\times \sqrt{\frac{2}{v_a^2 + v_b^2}} \exp \left\{ -\frac{X^2}{4\sigma_x^2} \frac{(v_a - v_b)^2}{v_a^2 + v_b^2} - \frac{(\langle E_a \rangle - \langle E_b \rangle)^2}{4\sigma_p^2 (v_a^2 + v_b^2)} \right\} \end{aligned}$$

# APÊNDICE B

---

## **A solução não-adiabática para pacotes de onda**

No Capítulo 2 descrevemos a propagação do neutrino na matéria de maneira adiabática. Como discutido anteriormente, a densidade de matéria pode mudar tão rapidamente que os autoestados da matéria podem se “misturar”, ocorrendo transições entre eles – propagação não-adiabática. Vamos buscar uma solução formal para a equação de movimento para dois sabores escrita abaixo [1, 2, 3, 4, 5]

$$i\partial_x \begin{pmatrix} \psi_1(x, E) \\ \psi_2(x, E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{\Delta}(x)}{4E} & -i\theta'_m(x) \\ i\theta'_m(x) & \frac{\tilde{\Delta}(x)}{4E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x, E) \\ \psi_2(x, E) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

em que  $\tilde{\Delta}$  é a diferença de massa ao quadrado na matéria,  $\theta'_m(x) = \partial_x \theta_m(x)$ ,  $\theta_m(x)$  é o ângulo de mistura na matéria. Lembramos que a condição adiabática ocorre quando o termo não-diagonal é muito menor que o termo diagonal, resultando em  $4E|\theta'_m(x)| \ll \tilde{\Delta}(x)$ . Sabemos que os “level crossings” são causados pelos termos não-diagonais  $\pm i\theta'_m(x)$  da matriz quadrada em (B.1). Muitos autores já discutiram o cálculo das probabilidades “level crossing” para alguns perfis específicos de densidade eletrônica. Para tal veja artigos [1-19]. As suposições feitas são: neutrino é relativístico; a densidade é pequena o suficiente,

isto é,  $|G_F N(x)| \ll E$ ; e esta densidade  $N(x)$  não deve mudar consideravelmente em um comprimento de escala comparável ao comprimento de onda de De Broglie do neutrino.

A equação (B.1) pode ser resolvida usando as definições das funções de onda  $\psi(x)$ , em que omitimos a dependência da energia por simplicidade. Então,

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

De (B.1) e (B.2), escrevemos

$$i\partial_x \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(x) \\ B^*(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

em que a função  $B(x) \equiv -\frac{\tilde{\Delta}(x)}{4E} - i\theta'_m(x)$  (sendo  $B^*(x)$  o complexo conjugado).

A solução da equação (B.3) é obtida depois de algum esforço:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= C_1 \Xi_-(B, B^*) + C_2 \Xi_+(B, B^*) \\ \phi_2(x) &= C_1 \Xi_-(B^*, B) - C_2 \Xi_+(B^*, B) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes e

$$\Xi_{\pm}(Y, Z) \equiv 1 \pm i \int Y - \int Y \int Z \mp i \int Y \int Z \int Y + \int Y \int Z \int Y \int Z \pm \dots, \quad (\text{B.5})$$

sendo por exemplo  $\int Y \int Z \int Y \equiv \int_{x_0}^x dx_1 Y(x_1) \int_{x_0}^{x_1} dx_2 Z(x_2) \int_{x_0}^{x_2} dx_3 Y(x_3)$ . A equação (B.2) nos dá como solução

$$\begin{aligned} \psi_1(x, E) &= \frac{1}{2} \psi_1(x_0, E) (\Xi_-(B, B^*) + \Xi_-(B^*, B)) - \frac{1}{2} \psi_2(x_0, E) (\Xi_+(B, B^*) - \Xi_+(B^*, B)) \\ \psi_2(x, E) &= \frac{1}{2} \psi_1(x_0, E) (\Xi_-(B^*, B) - \Xi_-(B, B^*)) + \frac{1}{2} \psi_2(x_0, E) (\Xi_+(B, B^*) + \Xi_+(B^*, B)) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A equação acima, por simples substituição em (B.1), permite-nos concluir que é solução da equação (B.1). Esta solução se aplica a qualquer densidade, no entanto, é muito formal e não muito prática para os cálculos. Vamos verificar tal solução para dois casos bem específicos.

No limite *adiabático*,  $B(x) \cong -\frac{\tilde{\Delta}(x)}{4E} \cong B^*(x)$  e portanto,

$$\psi_1(x, E) = \psi_1(x_0, E)\Xi_-(B, B) = \psi_1(x_0, E) \exp\left(i \int_{x_0}^x dx' \frac{\tilde{\Delta}(x')}{4E}\right), \quad (\text{B.7})$$

assim como

$$\psi_2(x, E) = \psi_2(x_0, E) \exp\left(-i \int_{x_0}^x dx' \frac{\tilde{\Delta}(x')}{4E}\right). \quad (\text{B.8})$$

No limite extremo *não-adiabático*, por outro lado,  $B(x) \cong -i\theta'_m(x) \cong -B^*(x)$  (na região de ressonância). Então,

$$\psi_1(x, E) = \psi_1(x_0, E)\left(1 + \int B \int B + \dots\right) - \psi_2(x_0, E)\left(i \int B + i \int B \int B \int B + \dots\right) e \quad (\text{B.9})$$

$$\psi_2(x, E) = \psi_1(x_0, E)\left(i \int B + i \int B \int B \int B + \dots\right) + \psi_2(x_0, E)\left(1 + \int B \int B + \dots\right). \quad (\text{B.10})$$

Vamos assumir que  $\theta_m(x)$  muda abruptamente de  $\pi/2$  para  $\theta$  (ângulo de mistura do vácuo) na ressonância, isto é,

$$\int_{x_0}^x B \cong -i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{B.11})$$

se  $x_0$  é antes (depois) da ressonância. Logo,

$$\begin{aligned} \psi_1(x, E) &= \psi_1(x_0, E) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \psi_2(x_0, E) \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \\ \psi_2(x, E) &= \psi_1(x_0, E) \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \psi_2(x_0, E) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Colocando  $\psi_1(x_0, E) = 0, \psi_2(x_0, E) = 1$ , a probabilidade “level crossing” é:

$$|\psi_1(x, E)|^2 = \text{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \theta \quad [3]. \quad (\text{B.13})$$

## B.1) Probabilidades “Level Crossing” e os Pacotes de Onda

Nesta seção vamos apresentar os resultados na probabilidade “level crossing” verificando a contribuição dos pacotes de onda.

Considere um neutrino que se propaga inicialmente como  $\psi_2$  ( $\psi_1(x_0, E) = 0$ ) e tem a forma gaussiana usual descrita abaixo:

$$\psi_2(x_0, E) = N \exp\left[-\frac{(E - E_2)^2}{4\sigma_E^2}\right], \quad (\text{B.14})$$

em que  $N = (2\pi\sigma_E^2)^{-1/4}$ .

Da equação (B.6), temos que

$$\psi_1(x, E) = -\frac{N}{2} \exp\left[-\frac{(E - E_2)^2}{4\sigma_E^2}\right] f(x, x_0, E) \text{ e} \quad (\text{B.15})$$

$$\psi_2(x, E) = \frac{N}{2} \exp\left[-\frac{(E - E_2)^2}{4\sigma_E^2}\right] h(x, x_0, E), \quad (\text{B.16})$$

sendo que  $f(x, x_0, E)$  e  $h(x, x_0, E)$  são as expansões respectivas da equação (B.6).

Portanto,

$$\psi_1(x, t) = -\frac{N}{2\sqrt{2\pi}} \int dE \exp\left[-iEt - \frac{(E - E_2)^2}{4\sigma_E^2}\right] f(x, x_0, E). \quad (\text{B.17})$$

Podemos definir  $\exp\left[-\frac{(E - E_2)^2}{4\sigma_E^2}\right] f(x, x_0, E) \equiv g(x, x_0, E)$ . Logo,

$$\psi_1(x, t) = -\frac{N}{2} \hat{g}(x_0, x, t), \quad (\text{B.18})$$

sendo que  $\hat{g}$  é a transformada de Fourier de  $g$ . A probabilidade “level crossing” é  $|\psi_1(x, t)|^2$ , mas integramos sobre o tempo, temos:

$$|\psi_1(x)|^2 = \int dt |\psi_1(x, t)|^2 = \frac{N^2}{4} \int dt |\hat{g}(x_0, x, t)|^2 = \frac{N^2}{4} \int dE |g(x, x_0, E)|^2, \quad (\text{B.19})$$

onde usamos a identidade de Parseval. Podemos expressar a probabilidade “level crossing” para os pacotes de onda usando a probabilidade de ondas planas,  $P_{lc}(E) = \frac{1}{4} |f(x, x_0, E)|^2$ .

Então,

$$P_{lc}(E_2, \sigma_E) \equiv |\psi_1(x)|^2 = N^2 \int dE \exp\left[-\frac{(E - E_2)^2}{2\sigma_E^2}\right] P_{lc}(E), \quad (\text{B.20})$$

onde  $P_{lc}(E_2, \sigma_E)$  é a probabilidade “level crossing” generalizada que leva em conta o tamanho do pacote de onda no espaço das energias.

O efeito dos pacotes de onda nessa probabilidade pode ser visto melhor fazendo-se a expansão de  $P_{lc}(E)$  em série. Assumindo  $\sigma_E$  pequeno, pegamos os termos de ordem menor, a equação (B.20) resulta ( $E_2 \rightarrow E$ )

$$P_{lc}(E, \sigma_E) = P_{lc}(E) + \frac{\sigma_E^2}{2} \frac{\partial^2 P_{lc}(E)}{\partial E^2} + \dots \quad (\text{B.21})$$

Notamos na expressão acima que o formalismo de pacotes de onda introduz uma correção na probabilidade “level crossing”. Se sabemos a expressão em ondas planas, podemos saber a correção em pacotes de onda.

---

## Referências – Apêndice B

---

- [1] C. W. Kim e A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics* (Harwood Academic, Chur, 1993).
- [2] A. B. Balantekin, *Phys. Rev.* **D58**, 013001 (1998).
- [3] C. W. Kim, S. Nussinov e W. K. Sze, *Phys. Lett.* **B184**, 403 (1987).
- [4] T. K. Kuo e J. Pantaleone, *Phys. Rev.* **D39**, 1930 (1989).
- [5] A. B. Balantekin e J. F. Beacom, *Phys. Rev.* **D54**, 6323 (1996).
- [6] C. Giunti, C. W. Kim e U. W. Lee, *Phys. Lett.* **B274**, 87 (1992).
- [7] D. Nötzold, *Phys. Rev.* **D36**, 1625 (1987).
- [8] S. Toshev, *Phys. Lett.* **B196**, 170 (1987).
- [9] S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **B200**, 373 (1988).
- [10] L. Landau, *Phys. Z. Sovjetunion* **2**, 46 (1932).
- [11] C. Zener, *Proc. R. Soc. London, Ser.* **A137**, 696 (1932).
- [12] S. P. Rosen e J. M. Gelb, *Phys. Rev.* **D34**, 969 (1986).
- [13] V. Barger, R. J. N. Phillips e K. Whisnant, *Phys. Rev.* **D34**, 980 (1986).
- [14] S. J. Parke, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1275 (1986).
- [15] P. Pizzochero, *Phys. Rev.* **D36**, 2293 (1987).
- [16] A. B. Balantekin, S. H. Fricke e P. J. Hatchell, *Phys. Rev.* **D38**, 935 (1988).
- [17] J. C. D’Olivo, *Phys. Rev.* **D45**, 924 (1992).
- [18] M. Bruggen, W. C. Haxton e Y. Z. Qian, *Phys. Rev.* **D51**, 4028 (1995).
- [19] A. B. Balantekin, J. C. Beacon e J. M. Fetter, *Phys. Lett.* **B427**, 317 (1998).

# **Neutrinos em um “fireball” de um “Gamma-ray Burst”**

Gamma Ray Bursts” (GRB) são explosões curtas e não-térmicas de fótons de baixa energia (100keV-1MeV) e liberam cerca de  $10^{51}$ - $10^{53}$  ergs de energia em poucos segundos, sendo portanto os objetos mais luminosos do universo. Observações indicam que os GRBs se originam de fontes cosmológicas [veja 8, entretanto 9] e que os principais candidatos são a fusão de uma estrela de nêutrons com outra estrela de nêutrons (NS-NS), binárias buraco negro e estrela de nêutrons (BH-NS), modelos de hipernova/colapso envolvendo estrelas progenitoras massivas [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Observações recentes de GRB030329 são mais favoráveis aos modelos de colapso para iniciar o GRB [16]. Em quase todos os modelos, a energia gravitacional é liberada quase toda na forma de par neutrino-antineutrino, radiação gravitacional e uma pequena fração é responsável para iniciar o GRB.

Provavelmente, tais eventos são originados quando algumas massas solares colapsam ao redor do raio de Schwarzschild [1]. Depois disto, uma fração da energia gravitacional liberada com o colapso é depositada num volume um pouco maior que o horizonte do raio onde ocorreu tal colapso. Este volume com alta concentração de energia é chamada de “termed fireball” e sua evolução foi explorada por [2]. Este volume é constituído basicamente por um plasma formado por bárions - principalmente prótons e nêutrons em quantidades iguais [6,7], porém relativamente pequenas, senão a expansão seria newtoniana, o que não corresponde às observações atuais -, fótons, elétrons e pósitrons, termalizados numa temperatura entre 3MeV e 10MeV. Os fótons do “fireball”

estão presos à região devido à grande profundidade óptica, da ordem de  $10^{13}$ , escapando somente quando a profundidade óptica atinge o valor unitário.

O “fireball” se expande de maneira relativística com um fator de Lorentz  $\Gamma \cong 100 - 1000$ , e o “burst”, segundo considerações fenomenológicas, pode ocorrer pela dissipação da energia cinética do “fireball” em expansão (veja [17] para revisão). As condições físicas na região de dissipação implicam que [18] os prótons devem ser acelerados (mecanismo de Fermi) a energias maiores que  $10^{20}$  eV. Ainda mais, o espectro e o fluxo dos raios cósmicos com energia acima de  $10^{19}$  eV são consistentes com aqueles esperados pela aceleração dos prótons de GRBs cosmológicos [19].

## C.1) Produção de Neutrinos

A produção de neutrinos em um “fireball” pode ocorrer de uma maneira direta e de uma maneira indireta através do decaimento de píons produzidos no meio. Vamos começar nossa descrição através da produção de neutrinos de maneira direta, cujos principais processos são:

- *Processo foto-neutrino:*  $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \nu_i + \bar{\nu}_i$ ;
- *Processo de plasma:*  $\gamma \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i$ ;
- *Aniquilação de pares:*  $e^- + e^+ \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i$ ;
- *Captura eletrônica:*  $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ ;
- *Captura positrônica:*  $e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}_e$ .

Os últimos dois processos constituem o não-degenerado processo *URCA*, que é o processo dominante para baixas densidades nucleônicas.

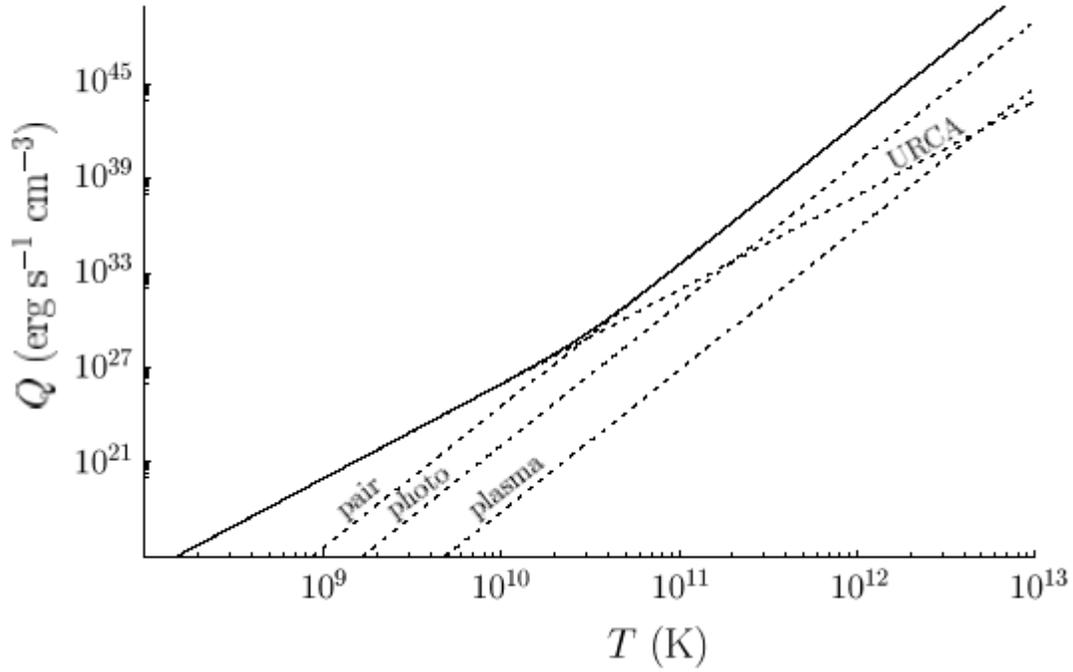


Figura C.1 - [3] Emissividade do neutrino no plasma em função da temperatura. As linhas pontilhadas indicam as contribuições individuais e a linha cheia mostra a emissividade total. Foi usado uma densidade bariônica de  $10^8 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ .

Notamos pela figura C.1 que a emissividade  $Q$  dos processos foto-neutrino e de plasma é bem menor que a emissividade da aniquilação de pares elétron-pósitron. Esta última, comparada com o processo URCA, que depende da densidade bariônica e também possui um comportamento diferente ao da aniquilação frente a mudanças de temperatura, pelo gráfico acima, será considerada como processo dominante.

Expressamos a taxa de criação de neutrino em termos do parâmetro  $\chi$ , que pode ser expresso em termos de  $t_c$ , o tempo de escala de “cooling” e  $t_e$ , o tempo de escala de expansão, como

$$\chi = \frac{t_c}{t_e}, \quad (\text{C.1})$$

em que,

$$t_c = \frac{E}{VQ} \text{ e} \quad (\text{C.2})$$

$$t_e = \frac{R}{c_s}. \quad (\text{C.3})$$

$E$  é energia,  $V$  e  $R$  são, respectivamente, o volume e o raio do “fireball” e  $c_s$  é a velocidade do som no “fireball”. O parâmetro de taxa de criação não considera a transparência dos neutrinos do plasma, que deve ser considerado se é levado em conta o mecanismo de “cooling” dos neutrinos.

Considerando somente a emissividade da aniquilação de pares escrevemos:

$$Q = 3,6 \times 10^{33} (T_{11})^9 \text{ erg} \times s^{-1} \times \text{cm}^{-3}. \quad (\text{C.4})$$

Logo a taxa de criação de neutrinos será dada por:

$$\chi = 3,7 \times 10^{-3} g^{9/4} (E)^{-5/4} (R_{6,5})^{11/4}. \quad (\text{C.5})$$

Neutrinos também podem ser produzidos pelo decaimento de píons carregados:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$$

Para  $\pi^+$  é só tomarmos o conjugado de carga da reação acima. Tais píons são oriundos de dois processos:

- Produção foto-píon:  $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$   
 $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$
- Colisão N-N:  $n + p \rightarrow p + p + \pi^-$   
 $p + p \rightarrow n + p + \pi^+$

A seção de choque da produção de píons por colisões nucleon-nucleon ( $\sigma \cong 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^2$ ) é maior que a do processo foto-piônico ( $\sigma \cong 10^{-28} \text{ cm}^2$ ), no entanto a densidade de fótons no plasma é quase que quatro ordens de magnitude maior. Logo, o processo de produção foto-píon é dominante na produção de píons. A produção foto-píon pode criar um “burst” de neutrinos com energia de  $10^{14}$  eV (mecanismos de aceleração de Fermi). A colisão N-N pode gerar neutrinos com 30 GeV de energia. Aqui não consideraremos os neutrinos produzidos pelos píons.

Os neutrinos produzidos terão uma energia média típica entre 5MeV e 20MeV e o meio é inicialmente opaco aos neutrinos de todos os sabores. À medida que o “fireball” evolui, os neutrinos podem ser distribuídos em três regiões: a região I contém neutrinos de todos os sabores; a região II contém apenas neutrinos eletrônicos, sendo transparente aos neutrinos muônicos e tauônicos; na região III todos os neutrinos já estão desacoplados. Os neutrinos produzidos podem escapar também em regiões onde a taxa de produção é alta e a profundidade ótica é pequena – menor que um. Logo, neutrinos escapam por “bursts” de desacoplamento do “fireball” e também por emissão contínua.

Vamos descrever algumas propriedades gerais de um “fireball” a seguir.

## C.2) Propriedades do “fireball”

Em um equilíbrio termodinâmico, a densidade de energia ( $\varepsilon/V$ ) e a temperatura ( $T$ ) são relacionados por, para um volume  $V$ ,

$$\frac{\varepsilon}{V} = gaT^4, \quad (C.6)$$

em que  $a$  é a constante de radiação e  $g$  é um fator que depende da composição do sistema. Para as três regiões comentadas de neutrinos temos que:

$$\begin{aligned} g_I &= \frac{43}{8} \\ g_{II} &= \frac{29}{8} \\ g_{III} &= \frac{22}{8} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Assumindo uma configuração esférica, a temperatura do plasma pode ser expressa em termos da energia e do raio.

$$(T_{11})^4 = \frac{100}{g} (\varepsilon_{52}) (R_{6,5})^{-3}, \quad (C.8)$$

para  $T = T_{11} \times 10^{11} K$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{52} \times 10^{52} \text{ erg}$  e  $R = R_{6,5} \times 10^{6,5} \text{ cm}$ .

Os valores iniciais de temperatura, densidade de energia e raio, representados com um asterisco são:

$$\varepsilon_* = 10^{52} \text{ erg}, \quad (C.9)$$

$$R_* = 10^{6,5} \text{ cm} \text{ e} \quad (C.10)$$

$$T_* = 2,1 \times 10^{11} K = 17,9/k_B \text{ MeV}, \quad (C.11)$$

sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann.

Usando os valores iniciais dado por (C.9), (C.10) e (C.11), temos que  $\chi_I = 0,16$ . Os neutrinos são criados relativamente rápidos em comparação com o tempo de escala de expansão. Aqui consideramos que a criação da quantidade de antineutrinos e neutrinos é igual, uma vez que consideramos uma simetria inicial entre eles.

Como a temperatura é maior que as típicas energias de ligação, os núcleos estão quebrados em seus nucleons. Estima-se que deve existir 10 TeV de energia disponível para estes bárions, conseqüentemente a densidade bariônica máxima é

$$n_{B,*} = 4,7 \times 10^{31} \text{ cm}^{-3}, \quad (\text{C.12})$$

que é o valor de referência para os cálculos. Isto implica que a densidade de massa bariônica é  $\rho_{B,*} = 9,4 \times 10^7 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ , o que corresponde a uma massa bariônica total em torno de  $6,2 \times 10^{-6}$  massas solares contidas num volume inicial  $V_*$ .

Devido à neutralidade de carga global, a razão de prótons em relação aos nêutrons pode ser escrita em termos da fração eletrônica  $Y_e$ . Desta maneira,

$$n_B = n_n + n_p \quad \text{e} \quad (\text{C.13})$$

$$n_p = Y_e n_B = \Delta n_e = n_{e^-} - n_{e^+}. \quad (\text{C.14})$$

$\Delta n_e$  é denominado densidade eletrônica de rede.

Sabendo que  $T_* \gg m_e c^2$ , os elétrons e pósitrons são extremamente relativísticos ( $E = pc$ ). A densidade eletrônica de rede e a densidade combinada elétron-pósitron  $n_e = n_{e^-} + n_{e^+}$  podem ser expressas, sendo  $\mu_e$  o potencial químico, por

$$\Delta n_e = \frac{1}{3\hbar^3 c^3} \left( (k_B T)^2 \mu_e + \frac{\mu_e^3}{\pi^2} \right), \quad (\text{C.15})$$

$$n_e = 0,37 \frac{(k_B T)^3}{\hbar^3 c^3} + O(\mu_e)^2. \quad (\text{C.16})$$

Por definição,  $Y_e < 1$ , então  $\Delta n_e \leq n_B$ . Temos um limite superior para a densidade eletrônica de rede e, por conseguinte, para o potencial químico. Sabemos a densidade bariônica, portanto,  $\mu_e / k_B T_* \cong 2 \times 10^{-4} \ll 1$ . Logo,

$$n_{e^-,*} = n_{e^+,*} = 1,4 \times 10^{35} \text{ cm}^{-3}. \quad (\text{C.17})$$

Nosso “fireball” possui uma pequena quantidade bariônica ( $n_B \ll n_e$ ) e também possui um pequeno potencial químico ( $\Delta n_e \ll n_e$ ). Isto implica que os elétrons e os pósitrons são não-degenerados.

### C.3) A Propagação dos Neutrinos

Os neutrinos se propagam no plasma do “fireball”, onde a assimetria partícula-antipartícula é muito pequena ou quase zero, que também é o caso, por exemplo, do Universo primordial. Nestes casos, a relação de dispersão se modifica e, portanto, o potencial efetivo deve ser alterado, pois correções finitas de temperatura devem ser

consideradas [4, 20, 21, 22]. Estas correções surgem a partir dos termos dependentes do momento nos propagadores bosônicos nos diagramas de auto-energia.

Neutrinos eletrônicos interagem tanto por corrente carregada quanto por corrente neutra, enquanto que os neutrinos tauônicos e muônicos interagem somente por corrente neutra. Até primeira ordem, o potencial efetivo sentido pelos neutrinos é proporcional à diferença entre o número de partículas e antipartículas. Se um sistema apresenta um número igual de partículas e antipartículas, o termo de primeira ordem some. Por outro lado, o próximo termo de contribuição (proporcional a  $1/M^4$ , em que  $M$  é a massa do propagador bosônico) é proporcional à soma do número de densidade de partículas e antipartículas.

Os neutrinos na região de plasma podem sofrer absorção e processo de espalhamento, resumidos a seguir:

- Espalhamento elétron (pósitron)-neutrino:  $\nu_i + e^\pm \rightarrow \nu_i + e^\pm$ ;
- Espalhamento nucleon-neutrino:  $\nu_i + N \rightarrow \nu_i + N$ ;
- Captura elétron-neutrino:  $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$ ;
- Captura elétron-antineutrino:  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ .

Para as condições iniciais, (C.9), (C.10) e (C.11), o comprimento de livre caminho médio (mpf) é determinado pelo espalhamento elétron (pósitron)-neutrino, como verificamos pela figura C.2 abaixo:

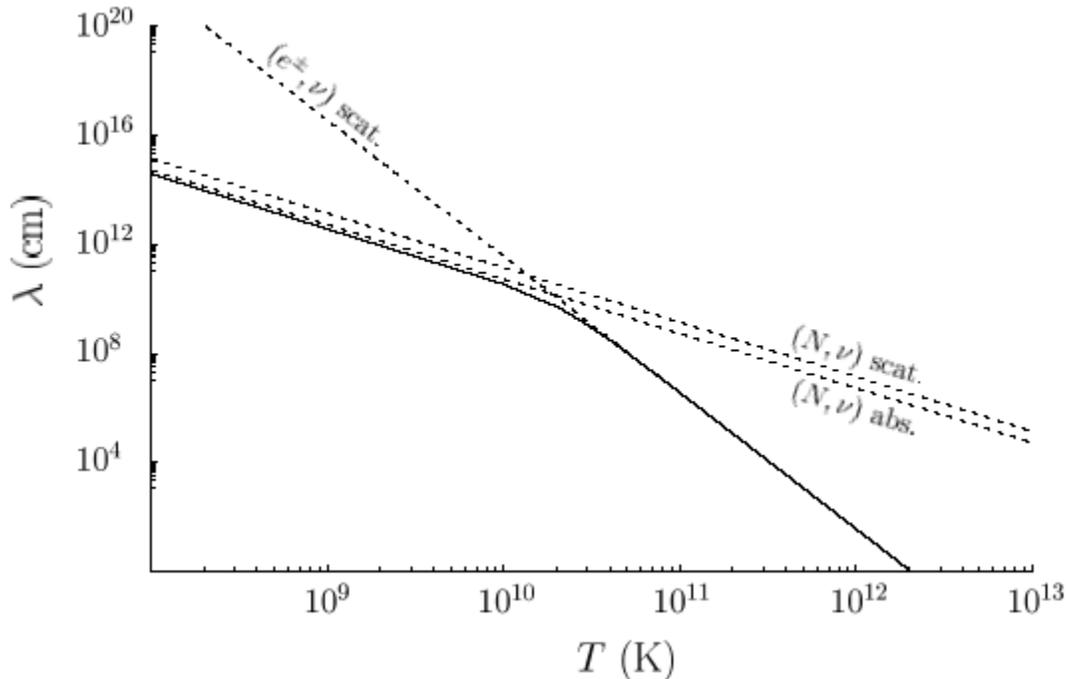


Figura C.2 – [3] Comprimento de livre caminho médio (cm) dos neutrinos eletrônicos em função da temperatura em K. A linha pontilhada representa as contribuições individuais, enquanto que a cheia representa o mpf total.

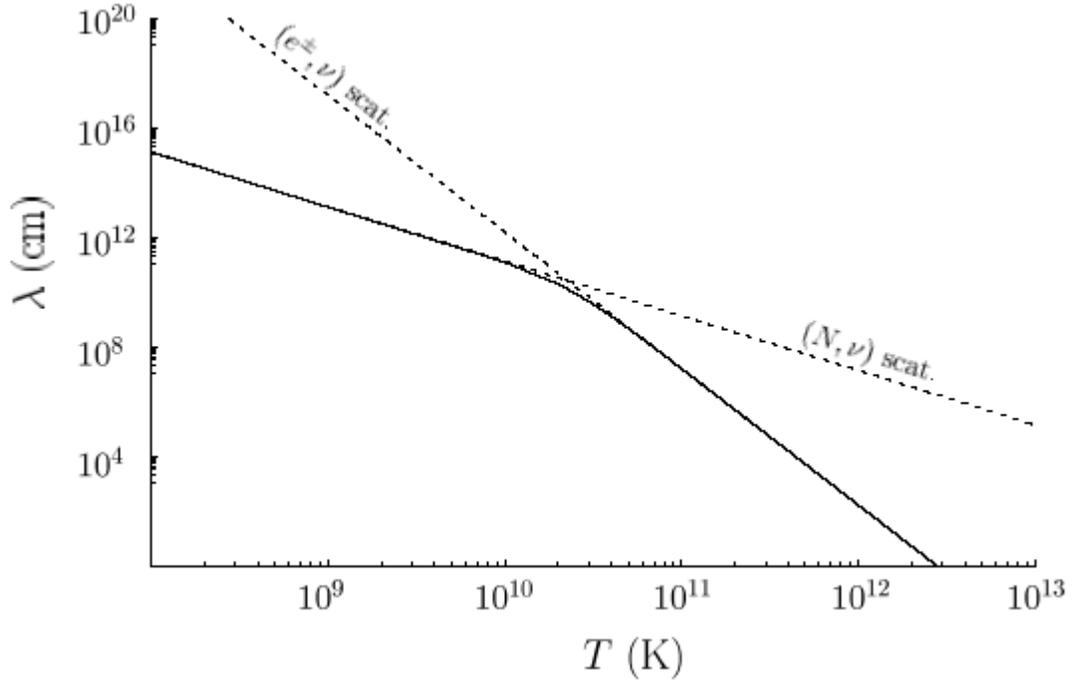


Figura C.3 – [3] Comprimento de livre caminho médio (cm) dos neutrinos muônicos e tauônicos em função da temperatura em K. A linha pontilhada representa as contribuições individuais, enquanto que a cheia representa o mpf total.

O livre caminho médio ( $\lambda$ ) é importante para o cálculo da profundidade óptica, que é dada por  $\tau = R/\lambda$ , sendo  $R$  o comprimento de escala. Sempre que a profundidade óptica é igual a 1, então ocorre desacoplamento instantâneo de algum sabor de neutrino do plasma. Enquanto o valor da profundidade óptica for maior que um, dizemos que este plasma é opaco aos neutrinos.

$\lambda$  possui diferentes valores para o neutrino eletrônico e para os outros neutrinos, uma vez que o primeiro também interage por corrente carregada, mas é o mesmo para os neutrinos e antineutrinos de mesmo sabor, já que a quantidade de elétrons é igual a de pósitrons. Logo, o desacoplamento de neutrinos e antineutrinos irá ocorrer ao mesmo tempo.  $\lambda$  para os neutrinos eletrônicos e para os neutrinos muônicos ou tauônicos é dado por, respectivamente,

$$\lambda^{(e)} = 3,7 \times 10^6 (T_{11})^{-5} \text{ cm}, \quad (\text{C.18})$$

$$\lambda^{(\mu, \tau)} = 1,6 \times 10^7 (T_{11})^{-5} \text{ cm}. \quad (\text{C.19})$$

Usando os valores de  $g = g_I$  para encontrar a profundidade óptica para os neutrinos muônicos e tauônicos, na região I, e  $g = g_{II}$  para encontrar a profundidade óptica para os neutrinos eletrônicos, temos:

$$\tau^{(e)} = 54 \times (\varepsilon_{52})^{5/4} (R_{6,5})^{-1/4}, \quad (\text{C.20})$$

$$\tau^{(\mu,\tau)} = 7,4 \times (\varepsilon_{52})^{5/4} (R_{6,5})^{-11/4}. \quad (\text{C.21})$$

Para as condições iniciais,  $\tau^{(e,\mu,\tau)} > 1$ , portanto a “fireball” é opaca aos neutrinos de todos os sabores.

A figura C.4 é um espaço de parâmetros que mostra as três regiões de plasma, mostrando as profundidades ópticas e a taxa de criação de neutrinos. A linha sólida mostra os contornos  $\chi_I = 1$ ,  $\chi_{II} = 1$ ,  $\chi_{III} = 1$ ,  $\tau^{(e)} = 1$  e  $\tau^{(\mu,\nu)} = 1$ ; as linhas pontilhadas são as isotérmicas. O \* denota os pontos de valor inicial dado pelas equações (C.9), (C.10), (C.11). A trajetória construída de “0” até “4” corresponde à evolução hidrodinâmica do “fireball”. Não estamos aqui interessados na região de buracos negros indicada.

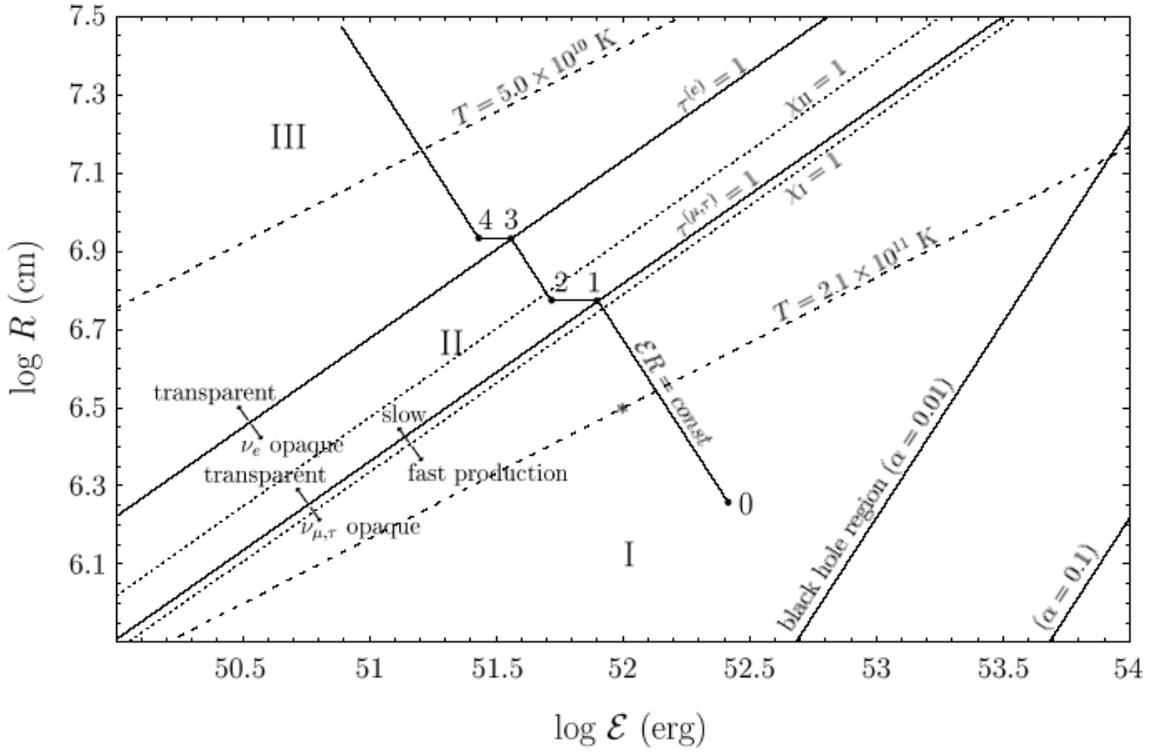


Figura C.4 – [3] Gráfico de espaço de parâmetros que mostra as três fases do plasma.

## C.4) A evolução do “fireball”

Enquanto os componentes do plasma estão fortemente acoplados, isto é, o comprimento de interação é muito menor que o tamanho do sistema, o plasma pode ser descrito como uma esfera homogênea em equilíbrio termodinâmico com uma única temperatura. O plasma irá expandir, de maneira adiabática, por pressão de radiação, convertendo esta energia em energia cinética dos bárions. Vamos assumir que a evolução do “fireball” é um processo reversível, isto é, a entropia se conserva, a relação raio-temperatura é dada por

$$g(RT)^3 = g_0(R_0T_0)^3 = \text{const.}, \quad (\text{C.22})$$

sendo que a energia radiativa e a entropia são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi}{3} gaR^3T^4 \text{ e} \quad (\text{C.23})$$

$$S = \frac{16\pi}{9} ga(RT)^3. \quad (\text{C.24})$$

Enquanto não houver mudança na composição do plasma podemos escrever:

$$(\mathcal{E}R) = (\mathcal{E}_0R_0) = \text{const. e} \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\mathcal{E}}{T} = \frac{\mathcal{E}_0}{T_0} = \text{const.} \quad (\text{C.26})$$

Se ocorrer aniquilação, a relação temperatura-energia irá se manter já que a entropia se conserva. Esta só diminui quando ocorre algum desacoplamento. Da relação (C.22), notamos que a relação durante o desacoplamento pode ser dada por:

$$RT = R_0T_0. \quad (\text{C.27})$$

Agora vamos discutir o que ocorre com a evolução do “fireball” com energia inicial genérica  $\mathcal{E}_0$  e tamanho  $R_0$ . À medida que ocorrem expansão e esfriamento do “fireball”, ele irá de opaco à transparente para os neutrinos, que é quando os neutrinos se desacoplam do plasma.

Além dos “bursts” de neutrinos, também há emissão contínua onde a taxa de criação é suficientemente alta e o plasma é transparente para os neutrinos.

Partindo do ponto “0” da figura C.4, o plasma expande ao longo de  $(\mathcal{E}R) = (\mathcal{E}_0R_0)$  até atingir o contorno  $\tau^{(\mu,\tau)} = 1$ , numa temperatura menor, próxima a 10,3 MeV. Podemos achar o valor da energia radiativa e da temperatura antes de ocorrer o desacoplamento usando (C.22):

$$\mathcal{E}_{52}^{(1)} = 0.61(\mathcal{E}_{52}^{(0)}R_{6.5}^{(0)})^{11/16}, \quad (\text{C.28})$$

$$T_{11}^{(1)} = 1.26(\mathcal{E}_{52}^{(0)}R_{6.5}^{(0)})^{-1/16}. \quad (\text{C.29})$$

A temperatura de 10,3 MeV permanecerá com esse valor durante o primeiro “burst” de neutrinos muônicos e tauônicos, o que corresponde ao trecho do ponto “1” até “2” na figura C.4.

Para o “burst” de neutrinos eletrônicos,  $\tau^{(e)} = 1$  (ponto “3” até o “4”), imediatamente antes, temos:

$$\mathcal{E}_{52}^{(3)} = 0,28 \left( \mathcal{E}_{52}^{(0)} R_{6,5}^{(0)} \right)^{1/16} e \quad (\text{C.30})$$

$$T_{11}^{(3)} = 0.87 \left( \mathcal{E}_{52}^{(0)} R_{6,5}^{(0)} \right)^{-1/16}. \quad (\text{C.31})$$

Usando os valores iniciais, temos que a temperatura antes do desacoplamento dos neutrinos eletrônicos será 7,4 MeV.

Durante o primeiro “burst”, de neutrinos muônicos e tauônicos, ocorre uma diminuição da energia do “fireball” de cerca de 36%. Para o segundo “burst”, de neutrinos eletrônicos, ocorre uma diminuição de cerca de 21%.

Podemos questionar se ocorrer oscilação de neutrinos irá ou não influenciar a evolução do “fireball”. Abaixo discutimos resumidamente a oscilação de neutrinos num “fireball”.

## C.5) A Oscilação de neutrinos

Discutimos na seção C.3 que o potencial efetivo deverá ser modificado devido a assimetria pequena do meio. Em um plasma relativístico, não-degenerado de elétrons, prótons e nêutrons, o potencial efetivo sentido pelo neutrino eletrônico é [4,21]:

$$V_{\nu_e} \cong \sqrt{2} G_F N_\gamma \left[ \mathcal{L}_e - \left( \frac{7\xi(4)}{\xi(3)} \right)^2 \frac{T^2}{M_W^2} \right] e \quad (\text{C.32})$$

o potencial efetivo para os neutrinos muônicos e tauônicos é dado por

$$V_{\nu_{\mu,\tau}} \cong \sqrt{2} G_F N_\gamma \mathcal{L}_{\mu,\tau}, \quad (\text{C.33})$$

em que

$$\mathcal{L}_e = \left( \frac{1}{2} + 2\text{sen}^2 \theta_W \right) L_e + \left( \frac{1}{2} - 2\text{sen}^2 \theta_W \right) L_p - \frac{L_n}{2} e \quad (\text{C.34})$$

$$\mathcal{L}_{\mu,\tau} = \left( -\frac{1}{2} + 2\text{sen}^2 \theta_W \right) (L_e - L_p) - \frac{L_n}{2}. \quad (\text{C.35})$$

A assimetria da partícula é definida como

$$L_a = \frac{N_a - \bar{N}_a}{N_\gamma}, \quad (\text{C.36})$$

sendo  $N_\gamma$  a densidade de fótons e é dada por

$$N_\gamma = \frac{2}{\pi^2} \xi(3) T^3. \quad (\text{C.37})$$

Para antineutrinos, o potencial efetivo deve ser dado pela mudança  $L_a \rightarrow -L_a$ .

Tal trabalho só irá considerar a oscilação de neutrinos para duas famílias, usando os parâmetros solares, para os canais  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$  e  $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$ , cujos potenciais efetivos são dados, respectivamente, por:

$$V = 3,93 \times 10^{-12} T_{MeV}^3 (L_e - 8,18 \times 10^{-9} T_{MeV}^2), \quad (\text{C.38})$$

$$V = 3,93 \times 10^{-12} T_{MeV}^3 (-L_e - 8,18 \times 10^{-9} T_{MeV}^2). \quad (\text{C.39})$$

Para diferentes valores de assimetria mostramos a figura C.5 (neutrinos) e figura C.6 (antineutrinos) que indicam o valor do potencial em função da temperatura do “fireball”.

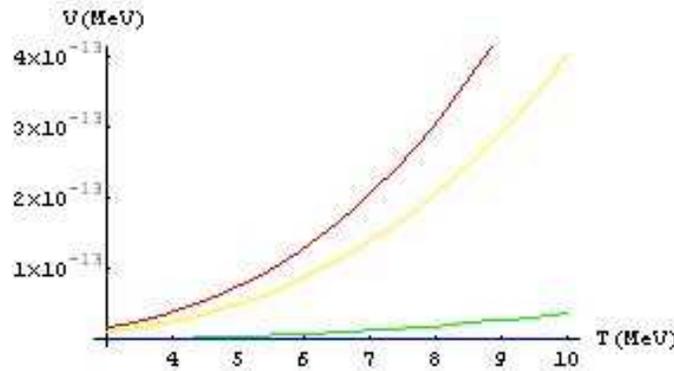


Figura C.5: Neutrino - Potencial em função da temperatura para várias assimetrias

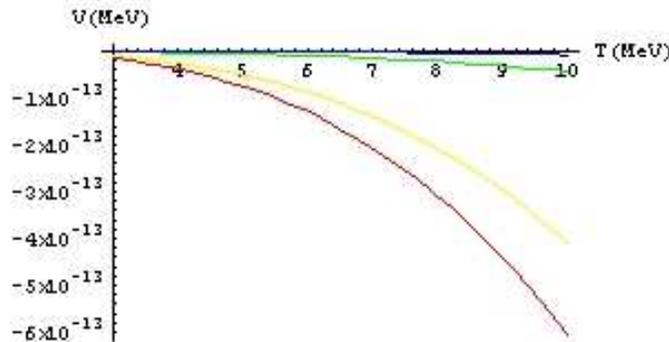


Figura C.6: Antineutrino – Potencial em função da temperatura para várias assimetrias ( $1,5 \times 10^{-4}$ ;  $1,0 \times 10^{-4}$ ;  $1,0 \times 10^{-5}$ ;  $1,0 \times 10^{-6}$ )

A probabilidade de conversão é dada por

$$P(t) = \frac{\Delta^2 \text{sen}^2 2\theta}{\omega^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right), \quad (\text{C.40})$$

com

$$\omega = \sqrt{(V - \Delta \cos 2\theta)^2 + \Delta^2 \text{sen}^2 2\theta}, \quad (\text{C.41})$$

sendo  $\Delta = \frac{\Delta m^2}{2E}$ . Para o cálculo da probabilidade aproximamos  $x \cong t$ .

Os parâmetros solares usados foram  $\Delta m^2 = 7,1 \times 10^{-5} eV^2$ ,  $\text{sen} 2\theta = 0,83$ . Nossa expressão de probabilidade de conversão depende da energia do neutrino, da temperatura, do ângulo de mistura no vácuo, da diferença de massa ao quadrado e da assimetria matéria-antimatéria. Esta última possui um valor mínimo ( $L_e^{\text{min.}} \cong 4,47 \times 10^{-5} R_7^{-3} T_{\text{MeV}}^{-3}$ ) e um valor máximo ( $L_e^{\text{max.}} \cong 4,47 \times 10^{-2} R_7^{-3} T_{\text{MeV}}^{-3}$ ) que dependem do raio e da temperatura do “fireball”.

Para a região completamente opaca a todos os sabores de neutrinos, para qualquer valor de assimetria entre o máximo e o mínimo, as probabilidades de conversão são muito pequenas. Portanto, podemos dizer que não esperamos que ocorra oscilação de neutrinos na região do ponto “0” até o ponto “1” da figura C.4. O mesmo ocorre para a região onde somente os neutrinos eletrônicos estão opacos. A probabilidade de conversão nesta região – ponto “2” até ponto “3” da figura C.4 – parece ser insignificante para afetar qualquer tipo de evolução do “fireball”. Probabilidade significativa teremos somente quando a temperatura atingir o valor de 3 MeV e para uma assimetria de cerca de  $10^{-7}$ , com neutrinos de energia 5 MeV, como mostramos na figura C. 7 abaixo:

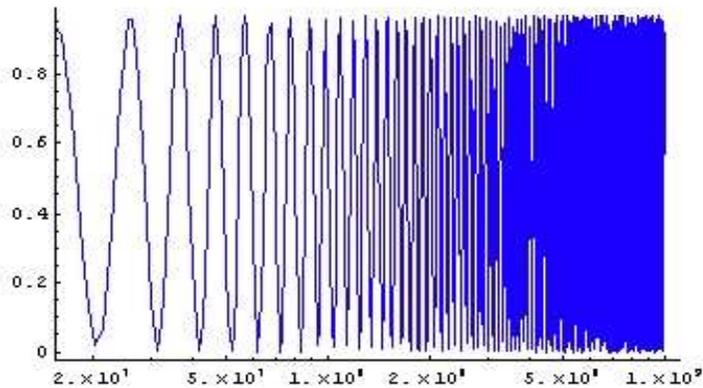
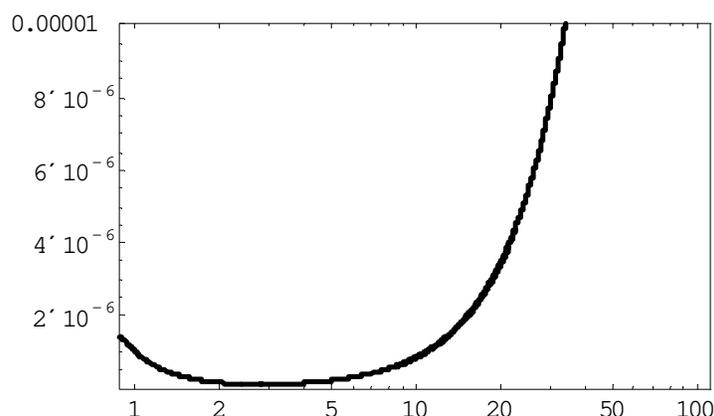


Figura C.7 – Probabilidade de oscilação para os parâmetros solares, com  $T=3\text{MeV}$ ,  $L_e=10^{-7}$  e  $E=5\text{MeV}$ .

A conclusão é simples: notamos que, para parâmetros solares e considerando o canal  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ , ocorrerá oscilação somente depois dos desacoplamentos dos neutrinos, isto é, quando o “fireball” é transparente aos mesmos. Isto significa que a oscilação não afetará de maneira significativa a evolução do “fireball”. Vale lembrar também que a conversão mais significativa ocorre quando os neutrinos possuem baixas energias, como 5 MeV.

Na figura C.8, logo abaixo, mostramos as regiões onde a ressonância pode ocorrer.



**Figura C. 8– Regiões de ressonância (parâmetros solar e neutrinos). Eixo x é temperatura em MeV e o eixo y é a assimetria  $L_e$ .**

Se considerarmos a conversão no canal  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ , usando os parâmetros atmosféricos, a probabilidade média de conversão será 0,5. No entanto, esta contribuição não afetará a evolução do “fireball”, uma vez que os neutrinos muônicos e tauônicos são os primeiros a escapar e a conversão ocorre entre estes sabores. Creio que tal conversão não afetará a evolução em qualquer momento, já que para tal, deveríamos ter a formação de neutrinos eletrônicos a partir dos dois outros sabores. Além do mais, o número total de neutrinos muônicos e tauônicos não se alterará e isto não afetará o “burst”, uma vez que eles saem ao mesmo tempo do plasma.

Considerando agora a conversão no canal  $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$ , temos que para a primeira região não existe conversão significativa. Para a segunda região, não temos probabilidade de conversão significativa para os antineutrinos. Isto significa que a evolução do “fireball” não sofrerá influência da oscilação dos antineutrinos também. Abaixo mostramos a probabilidade mais efetiva encontrada para quando já tivermos transparência em nosso plasma.

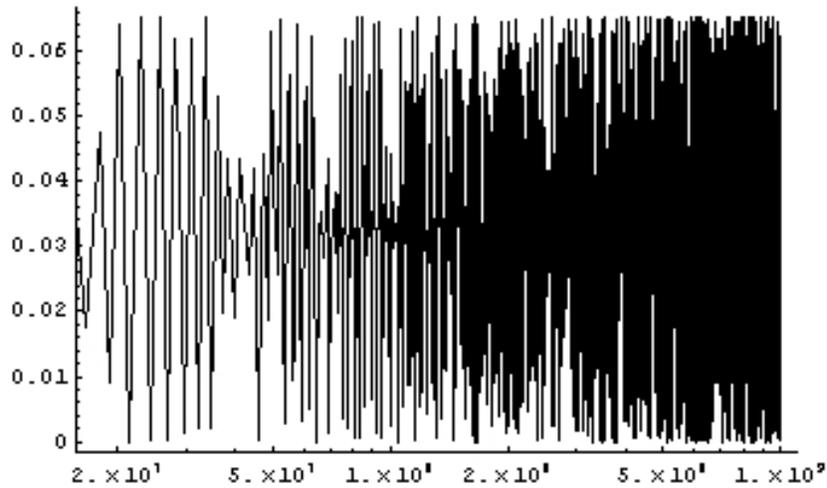


Figura C. 9– Probabilidade de oscilação para antineutrinos usando solução solar e também  $L_e=10^{-7}$ ,  $T=3\text{MeV}$  e  $E=5\text{MeV}$ .

Aqui mostramos as regiões de ressonância para o canal  $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$ :

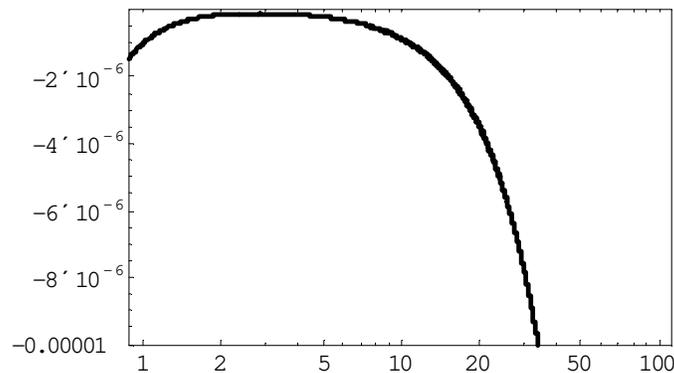


Figura C.10 - Regiões de ressonância (parâmetros solar e antineutrinos). Eixo x é temperatura em MeV e o eixo y é a assimetria  $L_e$ .

Concluimos que a solução solar não modifica a evolução do “fireball”, já que conversões significativas só ocorrem quando o plasma fica transparente aos neutrinos.

Podemos testar os parâmetros de LSND ( $\Delta m^2 \cong 0,5eV^2$  e  $sen2\theta = 0,07$ ) para o canal  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$ . A figura C.11 apresenta uma probabilidade de conversão de cerca de 5% na eminência do primeiro “burst” de neutrinos. Isto poderia transformar neutrinos muônicos em eletrônicos que ainda estão opacos no plasma do “fireball”, diminuindo a quantidade de energia sendo liberada no “burst” dos neutrinos muônicos e tauônicos. A questão a se colocar se isto seria ou não significativo para a evolução.

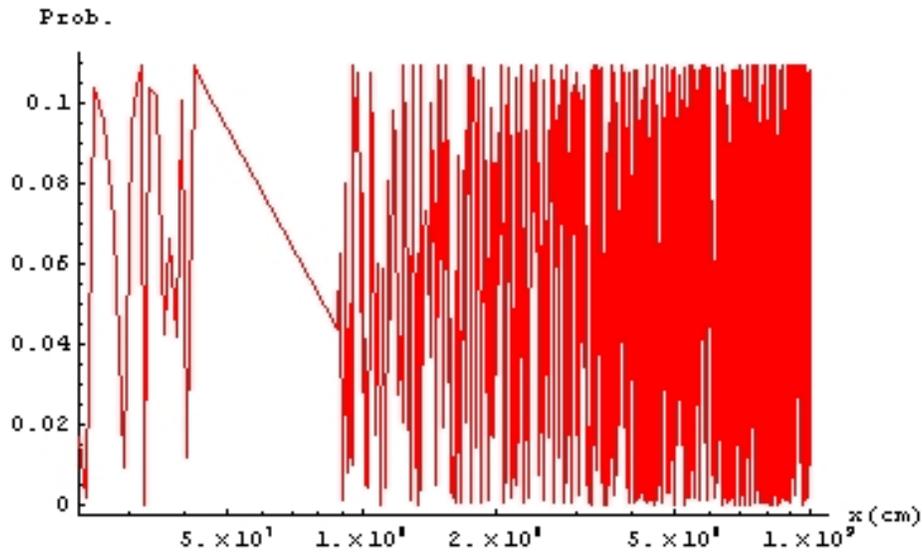


Figura C.11 – Probabilidade de conversão usando os parâmetros de LSND.  $T=10,3\text{MeV}$ ,  $E=5\text{MeV}$  e  $L_c=1,0 \cdot 10^{-5}$ .

As figuras C.12, C.13 e C.14 mostram a probabilidade de conversão para a região entre os pontos “2” e “3” da figura C.4. Notamos que esta conversão ocorre para neutrinos muônicos que já estão transparentes ao plasma do “fireball”.

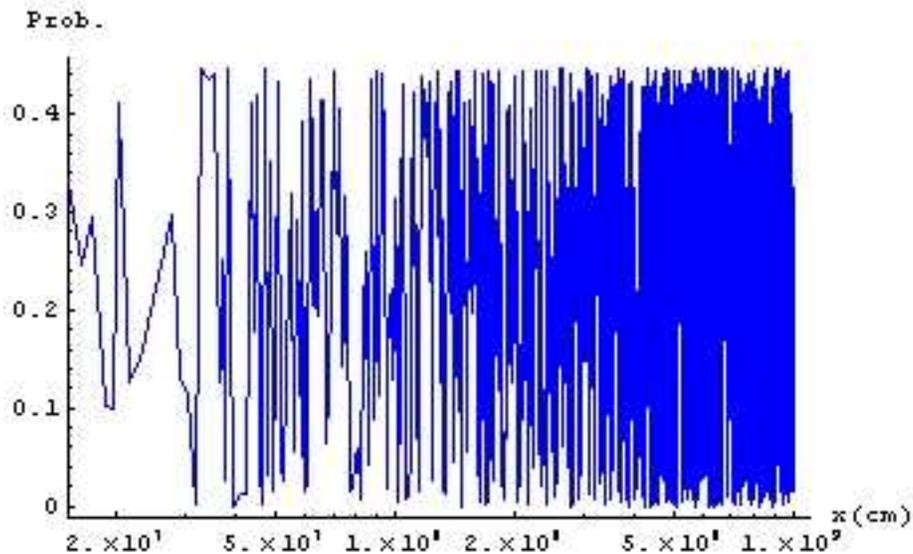


Figura C.12 – Probabilidade de conversão usando os parâmetros de LSND.  $L_c=1,0 \cdot 10^{-5}$ ,  $T=9,4\text{MeV}$  e  $E=5\text{MeV}$ .

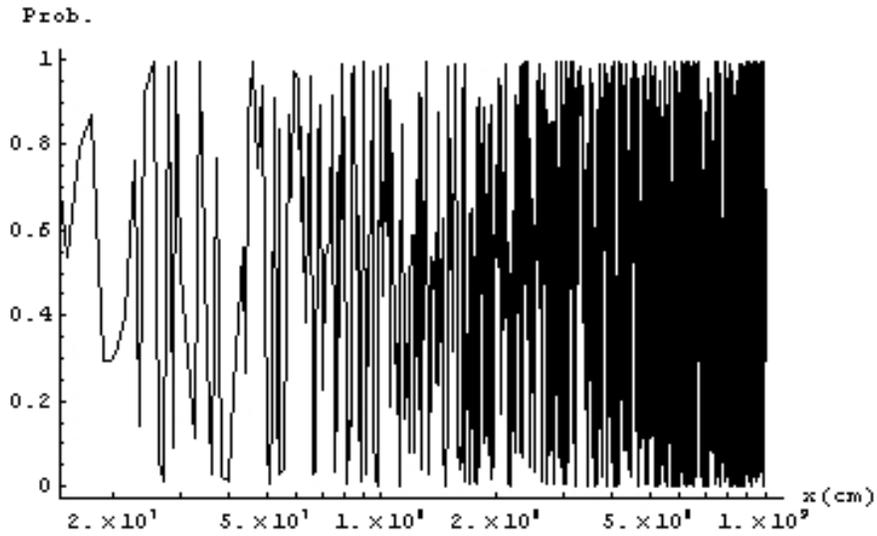


Figura C.13 – Probabilidade de conversão usando os parâmetros de LSND.  $L_e=2,0 \cdot 10^{-5}$ ,  $T=8,4$  MeV e  $E=5$  MeV.

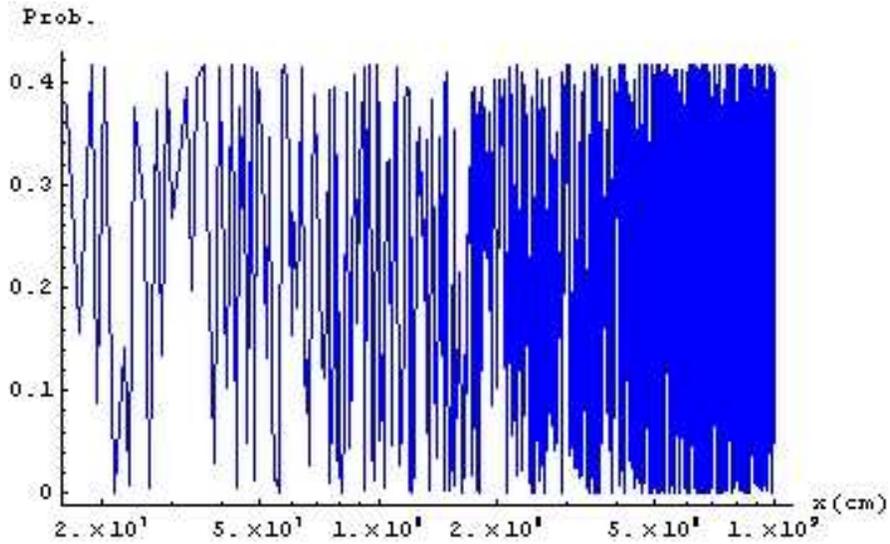


Figura C.14 – Probabilidade de conversão usando os parâmetros de LSND.  $L_e=1,0 \times 10^{-5}$ ,  $T=7,4$  MeV,  $E=10$  MeV.

Abaixo mostramos um exemplo de probabilidade de conversão significativa após o segundo “burst”, quando temos transparência a todos os tipos de neutrinos.

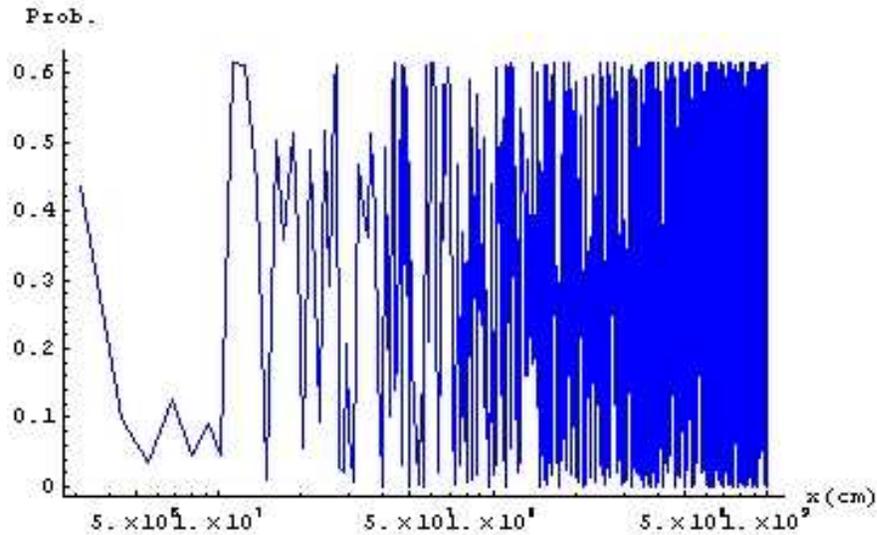


Figura C.15 - Probabilidade de conversão usando os parâmetros de LSND.  $L_e=1,0 \times 10^{-4}$ ,  $T=3,0 \text{ MeV}$ ,  $E=15 \text{ MeV}$ .

Para a oscilação de antineutrinos, no canal  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , usando a solução LSND, parece que não ocorre conversão efetiva em nenhuma das regiões, nem quando há transparência para os neutrinos.

---

## Referências – Apêndice C

---

- [1] J. Hjorth, et. al., *Nature* **423**, 847 (2003).
- [2] Cavallo, G., Rees, M. J., 1978, *MNRAS*, **183**, 359.
- [3] Koers, H. B. J., Wijers, R. A. M. J., astro-ph/0505533.
- [4] J. C. D’Olivo, Manuel Torres, J. F. Nieves, *Phys. Rev. D* **46**, 1172, (1992).
- [5] S. Sahu e J. C. D’Olivo, hep-ph/0502043.
- [6] E. V. Derishev, V. V. Kocharovsky, e VI. Kocharovsky, *Astron. Astrophys.* **345**, L51 (1999).
- [7] E. V. Derishev, V. V. Kocharovsky, e VI. Kocharovsky, *Astrophys. J.* **521**, 640 (1999).
- [8] C. A. Meegan et. al., *Nature* **355**, 143 (1992), B. Paczyński, *Nature* **355**, 521 (1992); T. Piran, *Astrophys. J.* **389**, L45 (1992); J. P. Norris et. al., *Astrophys. J.* **423**, 432 (1994).
- [9] P. Podsiadlowski, M. Rees, e M. Ruderman, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **273**, 755 (1995).
- [10] T. Piran, *Phys. Rep.* **314**, 575 (1999).
- [11] E. Waxman, *Lect. Notes in Phys.* **598**, 393 (2003).
- [12] T. Piran, *Phys. Rep.* **333-334**, 529 (2000).
- [13] P. Mészáros, *Nucl. Phys. B (proc. Suppl.)* **80**, 63 (2000).
- [14] P. Meszáros, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **40**, 137 (2002).
- [15] M. Ruffert, e H. Th. Janka, *Astron. Astrophys.* **344**, 573 (1999).
- [16] J. Hjorth, et. al., *Nature* **423**, 847 (2003).
- [17] T. Piran, em *Gamma-ray Bursts*, eds. G. Fishman et. al. (AIP 307, NY1994); P. Mészáros, *Proc. 17th Texas Conf. Relativistic Astrophysics*, NY. Acad. Sci. 1995.
- [18] E. Waxman, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 386 (1995); M. Vietri, *Astrophys. J.* **453**, 883 (1995).
- [19] E. Waxman, *Astrophys. J.* **452**, L1 (1995).
- [20] D. Notzöld, e G. Raffelt, *Nucl. Phys. B* **307**, 924 (1988).
- [21] K. Enqvist, K. Kainulainen, e J. Maalampi, *Nucl. Phys. B* **349**, 754 (1991).
- [22] S. Sahu, *Phys. Rev. D* **61**, 023003 (1999).

## Wave-packet second-order corrections to neutrino two-flavor oscillation parameters

A. E. Bernardini,<sup>\*</sup> M. M. Guzzo,<sup>†</sup> and F. R. Torres<sup>‡</sup>

*Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP,  
PO Box 6165, 13083-970, Campinas, SP, Brasil.*

(Received on 24 March, 2006)

We report about an analytic study involving the *intermediate* wave-packet formalism for quantifying some second-order modifications which appear in the neutrino two-flavor conversion formula. In particular, we point out a *residual* time-dependent phase which, coupled with the *spreading/slippage* effects, can subtly modify the neutrino oscillation parameters and limits. Such second-order effects are usually ignored in the relativistic wave-packet treatment, but they present an evident dependence on the propagation regime so that some small modifications to the oscillation pattern, even in the ultra-relativistic limit, can be quantified. These modifications are implemented in the confront with the neutrino oscillation parameter ranges (mass-squared difference  $\Delta m^2$  and the mixing-angle  $\theta$ ) obtained from some reactor experiments and, generically speaking, it parallels the recent experimental purposes which concern with higher precision parameter measurements. To conclude, we show that the effectiveness of a more accurate determination of  $\Delta m^2$  and  $\theta$  depends on the wave-packet width  $a$  and on the averaged propagating energy flux  $\bar{E}$  which still correspond to open variables for some classes of experiments.

PACS numbers: 03.65.Pn, 14.60.Pq

Keyword: Wave Packets - Flavor Oscillation - Neutrino

### I. INTRODUCTION

In the last years, the quantum mechanics of neutrino oscillations [1–3] has experienced much progress on the theoretical front [4], not only in phenomenological pursuit of a more refined flavor conversion formula [5–7], but also in efforts to give the theory a formal structure within quantum field formalism [8–11]. From the point of view of a first quantized theory and in the context of vacuum oscillations, as a first analysis, the probability that neutrinos originally created as a  $\nu_\alpha$  flavor-eigenstate with averaged energy  $\bar{E}$  oscillates into a  $\nu_\beta$  flavor-eigenstate over a distance  $L$  is given by

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[ \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4\bar{E}} \right], \quad (c, \hbar = 1) \quad (1)$$

where we have assumed that the main aspects of the oscillation phenomena can be understood by studying the simple-minded two-flavor problem constructed in terms of the  $\nu_1(x)$  and  $\nu_2(x)$  plane-wave mass-eigenstates with the two-flavor mixing angle represented by  $\theta$  and the mass-squared difference given by  $\Delta m_{ij}^2$ . As appointed by the D. Groom PDG review [12], although this equation is frequently quoted and used in Monte Carlo calculations, the wave function is badly behaved for reasons larger than about one, where it oscillates more and more rapidly in the interval between  $\sin(2\theta) = 0$  and  $\sin(2\theta) = \langle P \rangle$  as the argument  $\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4\bar{E}}$  increases. Moreover, it is difficult to relate this function to the exclusion curves described in the literature [12].

In fact, the *intermediate* wave-packet (WP) approach [13] eliminates the most controversial points rising up with the

*standard* plane-wave (PW) formalism [14, 15] since wave-packets describing propagating mass-eigenstates guarantee the existence of a coherence length [13], avoid the ambiguous approximations in the PW derivation of the phase difference [16] and, under particular conditions of minimal *slippage*, recovers the oscillation probability given by the *standard* PW treatment. Reporting to an analytical study [17], we look for improving the procedure for obtaining the two-flavor oscillation parameter exclusion region boundary for a generic class of oscillation experiments. By knowing that the emergence of neutrino physics is fueled by such a recent growth in quality and quantity of experimental data, our main purpose in this manuscript is discussing how much the determination of mixing parameters and mass-differences can be improved in the context of the wave-packet phenomenological analysis and, eventually, suggest a perspective of improvement on bounds on  $\theta_{13}$  before experiments designed specifically for this parameter start. The first step of our study, which is presented in section II, concerns with the analytical derivation of a flavor conversion formula where a *gaussian* momentum distribution and a power series expansion of the energy up to the second-order terms are introduced for obtaining analytically integrable probabilities. Adopting a strictly peaked momentum distribution to construct each mass-eigenstate wave-packet allows us to analytically quantify these rising-up second-order corrections. The understanding of physical aspects carried by neutrino two-flavor oscillation parameters and limits is presented in section III, where we suggest a more accurate method for determining the mass-squared difference  $\Delta m^2$  and the mixing-angle  $\theta$  which are constrained by the experimental *input* parameters. In section IV, a phenomenological comparison allows as to confront the second-order WP modifications with the predicted PW results for several classes of experiments. We draw our conclusions in section V.

---

<sup>\*</sup>Electronic address: alexeb@ififi.unicamp.br

<sup>†</sup>Electronic address: guzzo@ififi.unicamp.br

<sup>‡</sup>Electronic address: ftorres@ififi.unicamp.br

## II. INTERMEDIATE WAVE-PACKETS WITH SECOND-ORDER CORRECTIONS

The time evolution of flavor wave-packets can be described by the state vector

$$\begin{aligned}\Phi(z, t) &= \phi_1(z, t) \cos \theta \mathbf{v}_1 + \phi_2(z, t) \sin \theta \mathbf{v}_2 \\ &= [\phi_1(z, t) \cos^2 \theta + \phi_2(z, t) \sin^2 \theta] \mathbf{v}_\alpha + \\ &\quad [\phi_2(z, t) - \phi_1(z, t)] \cos \theta \sin \theta \mathbf{v}_\beta \\ &= \phi_\alpha(z, t; \theta) \mathbf{v}_\alpha + \phi_\beta(z, t; \theta) \mathbf{v}_\beta,\end{aligned}\quad (2)$$

with flavor and mass-eigenstate indices as previously defined. The probability of finding a flavor state  $\mathbf{v}_\beta$  at the instant  $t$  is equal to the integrated squared modulus of the  $\mathbf{v}_\beta$  coefficient

$$P(\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{v}_\beta; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\phi_\beta|^2 = \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{1 - \text{INT}(t)\}, \quad (3)$$

where  $\text{INT}(t)$  represents the mass-eigenstate interference term given by

$$\text{INT}(t) = \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dz \phi_1^\dagger(z, t) \phi_2(z, t) \right]. \quad (4)$$

Let us consider mass-eigenstate wave-packets given by

$$\phi_i(z, 0) = \left( \frac{2}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{z^2}{a^2} \right] \exp [i p_i z], \quad (5)$$

at time  $t = 0$ , where  $i = 1, 2$ . The wave functions which describe their time evolution are

$$\phi_i(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_i) \exp \left[ -i E_{p_z}^{(i)} t + i p_z z \right], \quad (6)$$

where  $E_{p_z}^{(i)} = (p_z^2 + m_i^2)^{\frac{1}{2}}$  and  $\varphi(p_z - p_i) = (2\pi a^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{(p_z - p_i)^2 a^2}{4} \right]$ . In order to obtain the oscillation probability, we can calculate the interference term  $\text{INT}(t)$  by solving the following integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_1) \varphi(p_z - p_2) \exp [-i \Delta E_{p_z} t] = \\ \exp \left[ \frac{-(a \Delta p)^2}{8} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \exp [-i \Delta E_{p_z} t],\end{aligned}\quad (7)$$

where we have changed the  $z$ -integration into a  $p_z$ -integration and introduced the quantities  $\Delta p = p_1 - p_2$ ,  $p_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$  and  $\Delta E_{p_z} = E_{p_z}^{(1)} - E_{p_z}^{(2)}$ . The oscillation term is bounded by the exponential function of  $a \Delta p$  at any instant of time. Under this condition we could never observe a *pure* flavor-eigenstate. Besides, oscillations are considerably suppressed if  $a \Delta p > 1$ . A necessary condition to observe oscillations is that  $a \Delta p \ll 1$ . This constraint can also be expressed by  $\delta p \gg \Delta p$  where  $\delta p$  is the momentum uncertainty of the particle. The overlap between the momentum distributions is indeed relevant only for  $\delta p \gg \Delta p$ . Consequently, without loss of generality, we can assume

$$\text{INT}(t) = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \exp [-i \Delta E_{p_z} t] \right\}. \quad (8)$$

In the literature, this equation is often obtained by assuming two mass-eigenstate wave-packets described by the same momentum distribution centered around the average momentum

$\bar{p} = p_0$ . This simplifying hypothesis also guarantees *instantaneous* creation of a *pure* flavor eigenstate  $\mathbf{v}_\alpha$  at  $t = 0$  [16]. In fact, for  $\phi_1(z, 0) = \phi_2(z, 0)$  we get from Eq. (2)

$$\phi_\alpha(z, 0, \theta) = \left( \frac{2}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{z^2}{a^2} \right] \exp [i p_0 z]$$

and  $\phi_\beta(z, 0, \theta) = 0$ . In order to obtain an expression for  $\phi_i(z, t)$  by analytically solving the integral in Eq. (6) we firstly rewrite the energy  $E_{p_z}^{(i)}$  as

$$E_{p_z}^{(i)} = E_i \left[ 1 + \frac{p_z^2 - p_0^2}{E_i^2} \right]^{\frac{1}{2}} = E_i [1 + \sigma_i (\sigma_i + 2v_i)]^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

where  $E_i = (m_i^2 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $v_i = \frac{p_0}{E_i}$  and  $\sigma_i = \frac{p_z - p_0}{E_i}$ . Meanwhile, the integral in Eq. (6) can be *analytically* solved only if we consider terms up to order  $\sigma_i^2$  in a power series expansion conveniently truncated as

$$E_{p_z}^{(i)} = E_i \left[ 1 + \sigma_i v_i + \frac{\sigma_i^2}{2} (1 - v_i^2) \right] + \mathcal{O}(\sigma_i^3) \approx E_i + p_0 \sigma_i + \frac{m_i^2}{2E_i} \sigma_i^2. \quad (10)$$

By solving the integral (8) with the approximation (10) and performing some mathematical manipulations, we obtain

$$\text{INT}(t) = \text{BND}(t) \times \text{OSC}(t), \quad (11)$$

where we have factored the time-vanishing bound of the interference term given by

$$\text{BND}(t) = [1 + \text{SP}^2(t)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2 [1 + \text{SP}^2(t)]} \right] \quad (12)$$

and the time-oscillating character of the flavor conversion formula given by

$$\text{OSC}(t) = \text{Re} \{ \exp [-i \Delta E t - i \Theta(t)] \} = \cos [\Delta E t + \Theta(t)],$$

where

$$\text{SP}(t) = \frac{t}{a^2} \Delta \left( \frac{m^2}{E^2} \right) = \rho \frac{\Delta v t}{a^2 p_0} \quad (13)$$

and

$$\Theta(t) = \left[ \frac{1}{2} \arctan [\text{SP}(t)] - \frac{a^2 p_0^2}{2\rho^2} \frac{\text{SP}^3(t)}{[1 + \text{SP}^2(t)]} \right], \quad (14)$$

with  $\rho = 1 - \left[ 3 + \left( \frac{\Delta E}{\bar{E}} \right)^2 \right] \frac{E_0^2}{\bar{E}^2}$ ,  $\Delta E = E^{(1)} - E^{(2)}$  and  $\bar{E} = \sqrt{E_1 E_2}$ . The time-dependent quantities  $\text{SP}(t)$  and  $\Theta(t)$  carry the second-order corrections and, consequently, the *spreading* effect to the oscillation probability formula.

If  $\Delta E \ll \bar{E}$ , the parameter  $\rho$  is limited by the interval  $[1, -2]$  and it assumes the zero value when  $\frac{E_0^2}{\bar{E}^2} \approx \frac{1}{3}$ . Therefore, by considering increasing values of  $p_0$ , from non-relativistic (NR) to ultra-relativistic (UR) propagation regimes, and fixing  $\frac{\Delta E}{a^2 \bar{E}^2}$ , the time derivatives of  $\text{SP}(t)$  and  $\Theta(t)$  have their signals inverted when  $\frac{E_0^2}{\bar{E}^2}$  reaches the value  $\frac{1}{3}$ . The *slippage* between the mass-eigenstate wave-packets is quantified by the vanishing behavior of  $\text{BND}(t)$ . The NR limit is obtained by setting  $\rho^2 = 1$  and  $p_0 = 0$  in Eq. (12). In the same way, the UR limit is obtained by setting  $\rho^2 = 4$  and  $p_0 = \bar{E}$ . In fact, the minimal influence due to second-order corrections occurs when  $\frac{E_0^2}{\bar{E}^2} \approx \frac{1}{3}$  ( $\rho \approx 0$ ).

The oscillating function  $\text{OSC}(t)$  of the interference term  $\text{INT}(t)$  differs from the *standard* oscillating term,  $\cos[\Delta E t]$ , by the presence of the additional phase  $\Theta(t)$  which is essentially a second-order correction. The modifications introduced by the additional phase  $\Theta(t)$  are presented in Fig. 1 where we have compared the time-behavior of  $\text{OSC}(t)$  to  $\cos[\Delta E t]$  for different propagation regimes.

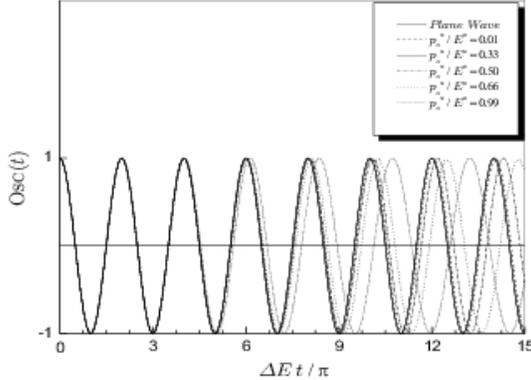


FIG. 1: The time-behavior of  $\text{OSC}(t)$  compared with the *standard* plane-wave oscillation given by  $\cos[\Delta E t]$  for different propagation regimes. The additional phase  $\Theta(t)$  changes the oscillating character after some time of propagation. The minimal deviation occurs for  $\frac{p_\alpha}{E} \approx \frac{1}{3}$  which is represented by a solid line superposing the plane-wave case.

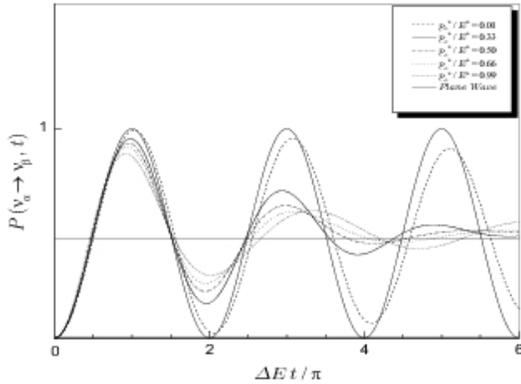


FIG. 2: Flavor conversion probability time dependence obtained with the introduction of second-order corrections in the series expansion of the energy for a strictly peaked momentum distribution ( $O(\sigma^2)$ ). Here again we have used  $a\bar{E} = 10$ .

By superposing the effects of  $\text{BND}(t)$  and the oscillating character  $\text{OSC}(t)$ , we immediately obtain the flavor oscillation probability which is explicitly given by

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - [1 + \text{Sp}^2(t)]^{-\frac{1}{4}} \times \exp \left[ -\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2 [1 + \text{Sp}^2(t)]} \right] \cos[\Delta E t + \Theta(t)] \right\} \quad (15)$$

and illustrated in Fig. 2. By comparing with the PW predictions, depending on the propagation regime, the additional time-dependent phase  $\Delta\Phi(t) \equiv \Delta E t + \Theta(t)$  produces a delay/advance in the local maxima of flavor detection. Phenomenologically, we shall demonstrate that such modifications allow us to quantify small corrections to the averaged values of neutrino oscillation parameters, i. e. the mixing-angle and the mass-squared difference. Essentially, it depends on the product of the wave-packet width  $a$  by the averaged energy  $\bar{E}$ .

### III. UNDERSTANDING TWO-FLAVOR OSCILLATION PARAMETERS AND LIMITS

From a practical point of view, we have to establish the *input* experimental parameters as being the detector from source distance  $L_0$ , the neutrino energy distribution  $\bar{E}$  and the appearance (disappearance) probability ( $P$ ). In addition, to make clear the initial proposition, it is instructive to redefine some parameters which shall carry the main physical information in the oscillation formula, i. e.

$$b_o = \frac{1}{2\nu} \frac{L_0}{E_1 + E_2}, \quad \delta_b = \frac{b_o}{a\bar{E}} \quad \text{and} \quad \nu = \frac{p_o}{\bar{E}}, \quad (16)$$

with  $\bar{E}$  previously defined. For real experiments,  $\bar{E}$  and  $L_0$  can have some spread due to various effects, but in a subset of these experiments, there is a well-defined value of  $b_o$  about which the events distribute [12]. Following the same approach we have adopted while we were analyzing the parameter  $\rho$  in Eq. (13), if  $\Delta E \ll \bar{E}$ , which is perfectly acceptable from the experimental point of view, we can write  $\bar{E} = \sqrt{E_1 E_2} \approx \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$  so that an effective PW flavor conversion formula can be obtained from Eq. (1) as

$$\langle P \rangle_{\text{rw}} \equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L_0) = \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{ 1 - \cos[2b_o \Delta m^2] \}. \quad (17)$$

Performing some analogous substitutions, the interference terms of Eq. (11) which explicitly appears in the WP flavor conversion formula of Eq. (15) can be read in terms of the above rewritten parameters

$$\text{BND}(L_0) = [1 + \text{Sp}^2(b_o)]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{2\delta_b^2 \nu^2 (\Delta m^2)^2}{1 + \text{Sp}^2(b_o)} \right], \quad (18)$$

$$\text{OSC}(L_0) = \cos[2b_o \Delta m^2 + \Theta(b_o)], \quad (19)$$

$$\text{Sp}(b_o) = -\rho \frac{\delta_b^2}{b_o} \Delta m^2 \quad (20)$$

and

$$\Theta(b_o) = \left[ \frac{1}{2} \arctan[\text{Sp}(b_o)] - \frac{b_o^2 \nu^2}{2\delta_b^2 \rho^2} \frac{\text{Sp}^2(b_o)}{[1 + \text{Sp}^2(b_o)]} \right], \quad (21)$$

with  $\rho \approx 1 - 3\nu^2$ . Attempting to the rate  $\sigma = \delta_b/b_o = (a\bar{E})^{-1}$  which carries the relevant information concerning with the wave-packet width and the averaged energy flux, if it is sufficiently large ( $\sigma \gg 1$ ) so that we could ignore the second-order corrections of Eq. (9), the probability only with the leading terms could be read as

$$\langle P \rangle_{\text{wp}} = \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{ 1 - \cos[2b_o \Delta m^2] \exp[-2(\delta_b \nu \Delta m^2)^2] \}, \quad (22)$$

which, in the particular case of an UR propagation ( $\nu = 1$ ), is taken as a reference in the confront with experimental data [12]. By the way, despite the relevant dependence on the propagation regime ( $\nu$ ), once we are interested in some realistic physical situations, the following analysis will be limited to the UR propagation regime corresponding to the effective neutrino energy of the current flavor oscillation experiments.

Strictly speaking, most results in the neutrino mixing listings are presented as  $\Delta m^2$  limits (or ranges) for  $\sin^2(2\theta) = 1$ , and  $\sin^2(2\theta)$  limits (or ranges) for large  $\Delta m^2$ . Together, they summarize the most of the information contained in the usual  $\Delta m^2 \times \sin^2(2\theta)$  plots which provide the parameter exclusion region boundary in the experiments' papers. Thus, we can compare the PW and WP resolutions by enumerating some relevant aspects which can be observed from the curve  $\Delta m^2 \times \sin^2(2\theta)$  (see the Fig. 4 in the next section):

1) In both PW and WP cases, for large  $\Delta m^2$  the fast oscillations are completely washed out respectively by the plane-wave resolution or by the smearing out behavior due to the mass-eigenstate wave-packet decoherence. Consequently  $\sin^2(2\theta) = 2\langle P \rangle$  in this limit.

2) For PW calculations the maximum excursion of the curve to the left occurs at  $\Delta m^2 = \pi/2b_0$  when  $\sin^2(2\theta) = \langle P \rangle$ . When the WP Eq. (22) is used such a maximal point occurs at the solution of the transcendental equation  $-2\sigma^2 \Delta m^2 b_0 = \tan[2\Delta m^2 b_0]$  which can be approximately given by  $\Delta m^2 \approx \pi/2b_0(1 + o(\sigma^2))$ , but we know that the second-order terms ( $\sigma^2$ ) are not being considered. If we had taken into account the second-order corrections in the WP analysis, the maximal value would have been accurately given by  $\Delta m^2 \approx \pi/2b_0(1 + 2\sigma^2 + o(\sigma^2))$ , consequently, a little smaller value than the PW solution.

3) By qualitatively assuming the well-established phenomenological constraints which set  $\Delta m^2 \ll 1$  when  $\sin^2(2\theta) \approx 1$ , we can reconstruct the nearly straight-line segment at the bottom of the curve by expanding the probability expressions up to order  $o((\Delta m^2)^2)$  so that we can obtain the generic solution

$$\Delta m^2 \approx \frac{\sqrt{\langle P \rangle_{wp}}}{b_0 \sin(2\theta) \sqrt{F_{wp}(\sigma)}} \quad (23)$$

where we have  $F_{pw}(\sigma) = 1$  for the PW limit,  $F_{wp1}(\sigma) = 1 + \sigma^2$  for the WP treatment with first-order corrections and  $F_{wp2}(\sigma) = 1 + 2\sigma^2 + \frac{3}{4}\sigma^4$  for the WP treatment with second-order corrections. Eventually, if one had abandoned the analytic calculations and had taken into account higher order terms in the power series expansion of Eq. (10), there would have been some minor corrections to the  $\sigma^4$  term in  $F_{wp2}$ . We discard such minor corrections by assuming  $F_{wp2}(\sigma) \approx 1 + 2\sigma^2$  which, in fact, is the correct approximation when we are considering the energy expansion up to second-order terms and sufficient for comparing the approximations in the Fig. 3. We emphasize that we *must* consider the second-order term in the series expansion in the Eq. (10) since the modifications emerge with  $\sigma^2$ . In the *toy* model constructions presented in [12] the values of  $\sigma = 0.23$  and  $\sigma = 0.3$  are used for plotting the curve  $\Delta m^2 \times \sin^2(2\theta)$ . From an immediate analysis of the Eq. (23) with WP2 approximation we can conclude that more

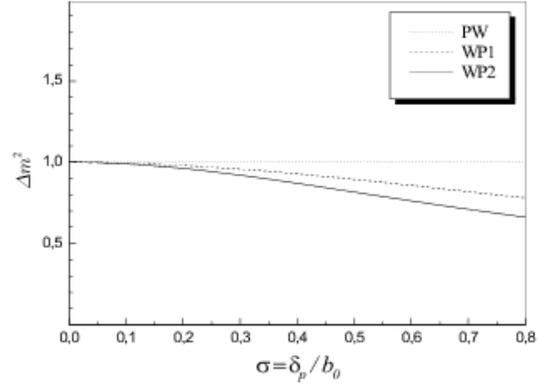


FIG. 3: Relative corrections to the  $\Delta m^2$  value (obtained with the PW analysis) by assuming the WP treatments with first (WP1) and second-order (WP2) corrections in the energy expansion. We normalize the result by dividing  $\Delta m^2$  by  $\frac{\sqrt{\langle P \rangle}}{b_0 \sin(2\theta)}$  where obviously  $\langle P \rangle_{pw} = \langle P \rangle_{wp1} = \langle P \rangle_{wp2} = \langle P \rangle$  is obtained from the experimental results. For instance, by following the WP treatment with second-order corrections, the correction to the phenomenological parameter  $\Delta m^2$  corresponds to a diminution of approximately 1% of the  $\Delta m^2$  PW value when  $\sigma \approx 0.100 (aE \approx 10)$ , 10% when  $\sigma \approx 0.342 (aE \approx 3)$  and 20% when  $\sigma \approx 0.530 (aE \approx 1.9)$ .

accurate values of  $\Delta m^2$  are constrict to be diminished by approximately 8% of the value computed with the PW approximation.

#### IV. PHENOMENOLOGICAL CONSTRAINTS TO REACTOR EXPERIMENTS - EXTENSION TO SOLAR AND SUPERNOVA NEUTRINOS

The first hints that neutrino oscillations actually occur were serendipitously obtained through early studies of solar neutrinos [19] and neutrinos produced in the atmosphere by cosmic rays [20, 21]. More recently, nuclear reactors and particle accelerators have constituted another source of neutrinos utilized for accurate measurements of flavor oscillation parameters and limits. Reactor neutrino experiments correspond essentially to an electron-antineutrino  $\bar{\nu}_e$  disappearance experiment where, generically speaking, one looks for the attenuation of the initial neutrino flavor-eigenstate  $\nu_\alpha$  beam in transit to a detector, where the  $\nu_\alpha$  is measured. In contrast to the detection of even a few *wrong-flavor* ( $\nu_\beta$ ) neutrinos establishing mixing in an *appearance* experiment, the disappearance of a few *right-flavor* ( $\nu_\alpha$ ) neutrinos goes unobserved because of statistical fluctuations [12]. For this reason, disappearance experiments usually cannot establish small-probabilities ( $\sin^2(2\theta) \ll 1$ ). Besides, they can fall into several situations [12] into which we do not intend to go deep.

By following the purpose of a comparative phenomenological study, we take into account the experimental data from the Palo Verde [22] and KamLAND [23] experiments by means of which exclusion plots in the plane  $\Delta m^2 \times \sin^2(2\theta)$  can be elab-

orated. The Palo Verde experiment [22] consists in a disappearance search for  $\bar{\nu}_e$  oscillations at  $0.75 - 0.89 \text{ km}$  distance from the Palo Verde reactors. As consequence of the experimental analysis we assume the input parameter  $\langle P \rangle < 0.084$  and the averaged energy  $\bar{E}$  set in the interval  $3.5 - 4.2 \text{ MeV}$ . The KamLAND collaboration [23] observes reactor  $\bar{\nu}_e$  disappearance at  $\sim 180 \text{ km}$  baseline to various Japanese nuclear power reactors. This is the lower limit on the mass difference spread unlike all other disappearance experiments [23] and the observation is consistent with neutrino oscillations, with mass-difference and mixing angle parameters in the Large Mixing Angle Solution region of the solar neutrino problem. In this case, we assume the input parameter  $\langle P \rangle > 0.2$  with the reactor  $\bar{\nu}_e$  energy spectrum smaller than  $8 \text{ MeV}$  and an analysis threshold of  $2.6 \text{ MeV}$  where the experiment sensitive  $\Delta m^2$  range is set down to  $10^{-5} \text{ eV}^2$  [23]. The important point we attempt in the Fig. 4 is the comparative modifications due to second-order corrections, i. e. we are not setting extremely accurate input (experimental) parameters but we are setting a more accurate procedure for obtaining the output parameter ( $\Delta m^2$  and  $\theta$ ) ranges and limits.

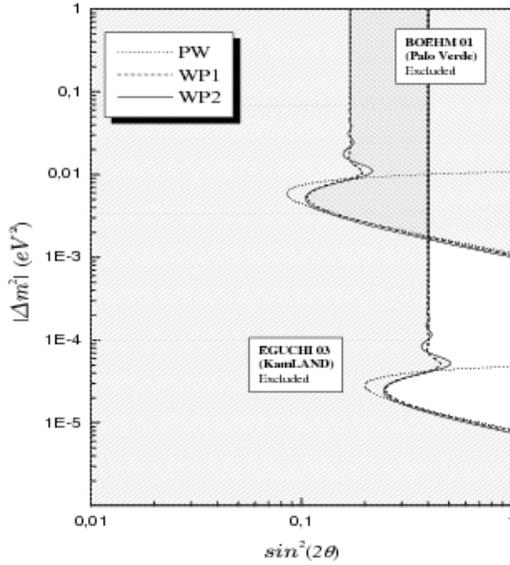


FIG. 4: Neutrino oscillation parameter ranges excluded by two experiments: the Palo Verde reactor disappearance experiment (BOEHM 01) and the positive signal from the KamLAND collaboration (EGUCHI 03). We process the input parameters by following the WP treatment with first and second-order corrections (WP1 and WP2) where we have assumed the wave-packet parameter  $\sigma \sim 0.342$  which leads to a 10% correction to the value of  $\Delta m^2$  obtained with the PW approximation. The parameter ranges simultaneously allowed by both experiments are represented by the *not* filled area. The second-order corrections introduce *accurate* modifications to the oscillation parameter ranges. The nearer is  $\sigma$  to 1, the more relevant is the contribution due to higher order terms in the Eq. (10) for determining such accurate limits.

The analysis of solar neutrino [19, 24] measurements involves considerable input from solar physics and the nuclear physics involved in the extensive chain of reactions that together are termed “Standard Solar Model” (SSM) [25]. Since the predicted flux of solar neutrinos from SSM is very well-established [25] we know that the low energy  $p-p$  neutrinos are the most abundant and, since they arise from reactions that are responsible for most of the energy output of the sun, the predicted flux of these neutrinos is constrained very precisely ( $\pm 2\%$ ) by the solar luminosity. The same is not true for higher energy neutrinos for which the flux is less certain due to uncertainties in the nuclear and solar physics required to compute them. In fact, the true frontier for solar neutrino experiments is the real-time, spectral measurement of the flux of neutrinos below  $0.4 \text{ MeV}$  produced by  $p-p$  reactions. Measurements of the  $p-p$  flux to an accuracy comparable to the accuracy of the SSM calculation will significantly improve the precision of the mixing angle [26, 27]. Therefore, an accurate phenomenological analysis for obtaining small modifications to the oscillation parameters, as we have illustrated in the Fig. 4, can be really pertinent. In this context, the experimental challenge is to achieve low background at low energy threshold. In spite of the higher energy neutrinos being more accessible experimentally, the corrections to the wave-packet formalism can be physically relevant for  $p-p$  neutrinos with energy distributed around an averaged value of  $\bar{E} \approx 10 - 100 \text{ keV}$ . Following some standard procedure [31] for calculating the neutrino flux wave-packet width  $a$  for  $p-p$  solar reactions, we obtain  $a = 10^{-10} - 10^{-8} \text{ m} \equiv 0.5 - 50 (\text{keV})^{-1}$ . Such an interval sets a very particular range for the  $\sigma$  parameter comprised by the interval  $5 \cdot 10^{-5} - 0.2$  for  $\bar{E} \approx 0.01 - 0.4 \text{ MeV}$  which introduces the possibility for WP second-order corrections establish some not ignoble modifications for the  $pp$  neutrino oscillation parameter limits.

Turning back to the confront between the PW and the WP formalism, once we had precise values for the input parameters  $\langle P \rangle$ ,  $L_\odot$  and  $\bar{E}$ , we could determine the effectiveness of the first/second-order corrections in determining  $\Delta m^2$  for any class of neutrino oscillation experiment. For instance, the flux of atmospheric neutrinos produced by collisions of cosmic rays (which are mostly protons) with the upper atmosphere is measured by experiments prepared for observing  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$  and  $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$  conversions. In particular, SuperKamiokande [21] and MACRO [20] measurements also work on the  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$  conversion. The neutrino energies range about from  $0.1 \text{ GeV}$  to  $100 \text{ GeV}$  which constrains the relevance of WP effects to an wave-packet width  $a \sim 10^{-12} \text{ m}$ . The accelerators experiments [28–30] cover a higher variety of neutrino flavor conversions where the neutrino energy flux stays around  $1 - 10 \text{ GeV}$  the limitations to the wave-packet width  $a$  are analogous which makes the WP second-order corrections, as a first analysis, completely irrelevant.

The most prominent contribution from the above discussion in determining the oscillation parameters and limits can come with the analysis of supernova neutrinos which, however, are not yet solidly established by the experimental data. Neutrinos from SN1987A in the Large Magellanic Cloud were detected by Kamiokande and IMB detectors - only 19 events. Nowa-

days, SuperKamiokande, SNO, LVD, ICARUS, IceCube are expected to detect events from the next galactic supernova and improve the statistics, providing new information on neutrino properties and supernova. The main problem in studying neutrinos oscillation from supernova is the spectral and temporal evolution of the neutrino burst. In a supernova, the size of the wave packet is determined by the region of production (plasma), due to a process known as pressure broadening, which depends on the temperature, the plasma density, the mean free path of the neutrino producing particle and its mean thermal velocity [31]. Neutrinos from supernova core with  $100\text{ MeV}$  energy have a wave packet size varying from  $\sim 5 \cdot 10^{-16}m$  to  $\sim 10^{-14}m$  which leads to a wave-packet parameter  $aE$  comprised by the interval  $0.25 - 5$  for which the second-order corrections can be relevant if  $a\bar{E} > 1$ . There also are  $10\text{ MeV}$  neutrinos, from neutrinosphere, with a wave packet size of approximately  $10^{-12}m$  with  $a\bar{E} \approx 50$ .

## V. CONCLUSION

We have reported about the intermediate WP prescription for quantifying the corresponding effects in determining the corrections to the  $\Delta m^2 \times \sin^2(2\theta)$  curve for two reactor experiments [22, 23]. We have observed that the oscillation parameter range deviation from the PW values depends effectively on the product between the wave-packet width  $a$  and the averaged energy flux  $\bar{E}$  which characterizes the detection process. The importance of the second-order corrections which come from the WP construction can also be relevant in the framework of three-neutrino mixing. It is well diffused that the next question which can be approached experimentally is that of

$e3$  mixing. A consequence of a non-zero  $U_{e3}$  matrix element will be a small appearance of  $\nu_e$  in a beam of  $\nu_\mu$ : for the particular case where  $\Delta m_{12}^2 \ll \Delta m_{23}^2$  (experimental data), and for  $E_\nu \sim L\Delta m_{23}^2$ , ignoring matter effects, we can find [31]

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = \sin^2(2\theta_{13}) \sin^2(\theta_{23}) \sin^2 \left[ \frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E} \right]. \quad (24)$$

This expression illustrates that  $\theta_{13}$  manifests itself in the amplitude of an oscillation with 2-3 like parameters. By assuming an intermediate wave-packet analysis, *fine-tuning* corrections can eventually be relevant. Experimentally, since the modulation may be parts per thousand or smaller, one needs both good statistics and low background data. For instance the KamLAND experiment will significantly reduce the allowed region for  $\Delta m_{12}^2$  and  $\sin(2\theta_{12})$  relative to the present results, where the second-order wave-packet corrections can appear as an additional ingredient for accurately applying the phenomenological analysis. At the same time, the next major goal for the reactor neutrino program will be to attempt a measurement of  $\sin^2(2\theta_{13})$ . It can be shown that the reactor experiments have the potential to determine  $\theta_{13}$  without ambiguity from CP violation or matter effects (by assuming the necessary statistical precision which requires large reactor power and large detector size). With reasonable systematic errors ( $< 1\%$ ) the sensitivity is supposed to reach about  $\sin^2(2\theta_{13}) \approx 0.01 - 0.02$  [3] and an accurate method of analysis, maybe in the wave packet framework, can be required.

## Acknowledgments

This work was supported by FAPESP (04/13770-0).

- 
- [1] K. Zuber, Phys. Rep. **305**, 295 (1998).
  - [2] W. M. Alberico and S. M. Bilenky, Prog. Part. Nucl. **35**, 297 (2004).
  - [3] R. D. McKeown and P. Vogel, Phys. Rep. **395**, 315 (2004).
  - [4] M. Beuthe, Phys. Rep. **375**, 105 (2003).
  - [5] C. Giunti and C. W. Kim, Phys. Rev. **D58**, 017301 (1998).
  - [6] M. Zralek, Acta Phys. Polon. **B29**, 3925 (1998).
  - [7] A. E. Bernardini and S. De Leo, Phys. Rev. **D71**, 076008-1 (2005).
  - [8] M. Blasone and G. Vitiello, Ann. Phys. **244**, 283 (1995).
  - [9] A. E. Bernardini and S. De Leo, Eur. Phys. J. **C37**, 471 (2004).
  - [10] C. Giunti, JHEP **0211**, 017 (2002).
  - [11] M. Blasone, P. P. Pacheco and H. W. Tseung, Phys. Rev. **D67**, 073011 (2003).
  - [12] D. Groom, Phys. Lett. **B592**, 451-465 (2004), in [*Neutrino Mixing*, PDG Collaboration].
  - [13] B. Kayser, Phys. Rev. **D24**, 110 (1981).
  - [14] B. Kayser, F. Gibrat-Debu and F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
  - [15] B. Kayser, Phys. Lett. **B592**, 145 (2004), in [PDG Collaboration].
  - [16] S. De Leo, C. C. Nishi and P. Rotelli, Int. J. Mod. Phys. **A19**, 677 (2004).
  - [17] A. E. Bernardini and S. De Leo, Phys. Rev. **D70**, 053010 (2004).
  - [18] J. Rich, Phys. Rev. **D48**, 4318 (1993).
  - [19] S. Fukuda and *et al.*, Phys. Lett. **B537**, 179, (2002), S. Fukuda and *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5651, (2001), S. Fukuda and *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3999, (2000).
  - [20] M. Ambrosio *et al.*, Phys. Lett. **B434**, 451, (1998).
  - [21] S. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562, (2000).
  - [22] F. Boehm *et al.*, Phys. Rev. **D64**, 112001 (2001).
  - [23] K. Egushi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
  - [24] Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002), Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002), Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 071301 (2001).
  - [25] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault and Sarbani Basu, Astrophys. J. **555**, 990 (2001).
  - [26] J. C. Bahcall and C. Peña-Garay, JHEP **0311**, 004 (2003).
  - [27] A. Bandyopadhyay, S. Choubey and S. Goswami, Phys. Rev. **D67**, 113011 (2003).
  - [28] C. Athanassopoulos *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1774 (1998).
  - [29] A. Aguilar *et al.*, Phys. Rev. **D64**, 112007 (2001).
  - [30] B. Armbruster *et al.*, Phys. Rev. **D65**, 112007 (2002).
  - [31] C. W. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics*, (Harwood Academic Publishers, Chur, 1993).
  - [32] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978); *ibid* **D20**, 2634 (1979), S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913 (1986); Nuovo Cimento **C9**, 17 (1986).