

Este exemplar corresponde à  
revisão final da tese de graduação  
dele, aprovada e aprovada pelo Conselho  
Julgador.  
Campinas 11/12/87  
José Busnardo Neto

SIMULAÇÃO DE  $\theta$ -PINCHES COM TRÊS FLUIDOS:  
ELÉTRONS, ÍONS E ÍONS REFLETIDOS

por

Antonio Carlos De Jesus Paes

Orientador: Prof. Dr. José Busnardo Neto

Tese apresentada ao Instituto  
de Física "Gleb Wataghin" da Uni-  
versidade Estadual de Campinas pa-  
ra obtenção do título de Doutor em  
Ciências.

Campinas, dezembro de 1987.

## AGRADECIMENTOS

i

Ao Dr. José Busnardo Neto pela orientação dada para a execução deste trabalho.

Ao Dr. Ricardo M. O. Galvão cujo apoio foi muito importante para a conclusão deste trabalho.

Ao Dr. Paulo H. Sakanaka e demais membros do Grupo de Plasmas da UNICAMP pelo apoio recebido no desenvolvimento deste trabalho, nesta instituição.

Ao Cel Av Reginaldo dos Santos e ao Dr Fernando R. Ornellas por me haverem permitido concluir este trabalho no IEAV.

Ao Joaquim Paulino Leite Neto pelo código de colisões anômalas.

Ao Dr. Brett V. Carlson pela utilíssima subrotina para gerar gráficos na impressora.

Ao Dr. Carlos Eugênio I. Carneiro pelas discussões a respeito da representação da função delta numa rede de pontos.

Aos amigos Honda, Marcos Santiago, Hector, Balloni, Kayama, Hisataki, Yoshiyuki, Tobias, Jair, Ricardo (e demais amigos da FTE-IEAV), Angelo, Paulo, Valdir, Luis Artur (e demais amigos da FEX-IEAV), Shibata, Altair, Azevedo que foram acima de tudo grandes companheiros.

Aos meus sogros e às minhas irmãs por, entre outras coisas, em muitas ocasiões tomaram conta de meus filhos durante a execução deste trabalho.

À Edna pela datilografia deste trabalho.

Ao CNPq pelas bolsas de doutoramento recebidas.

A todos aqueles que de alguma forma colaboraram na realização deste trabalho.

Muito Obrigado.

Aos meus pais.

À Arlete

Aos meus filhos.

SIMULAÇÃO DE  $\theta$ -PINCHES COM TRÊS FLUIDOS: ELÉTRONS,  
ÍONS E ÍONS REFLETIDOS

Resumo

É desenvolvido um modelo de três fluidos, unidimensional, um fluido para os íons, outro para os elétrons e um terceiro para os íons refletidos a fim de simular implosões de  $\theta$ -pinches. O modelo trata as reflexões que ocorrem em potências abruptas, e que originam os íons refletidos, como colisões. Os momentos deste termo de colisões fornecem a contribuição dos íons refletidos. São simulados o  $\theta$ -pinch rápido de baixa densidade da Universidade de Maryland e o Tupã,  $\theta$ -pinch da UNICAMP.

No caso do  $\theta$ -pinch de Maryland verifica-se a concordância dos resultados da simulação referentes a perfis de densidade e temperatura dos íons, para diferentes valores do campo de polarização, com resultados experimentais. Além disso, verifica-se que as simulações obedecem leis de escala simples, ao variar parâmetros como densidade, temperatura inicial, etc.

No caso do Tupã as simulações apresentam resultados de acordo com os experimentais mediante a escolha adequada de valores para  $Z_{ef}$  e temperatura inicial.

ABSTRACT

A one dimensional three fluid model, one for ions, the other for electrons and a third fluid for the reflected ions is derived and it is used to simulate implosions of  $\theta$ -pinches.

The model to handle the reflected ions treats the reflections that occur in the abrupt potentials, that develop during the implosion, as collisions. Moments of these collisional terms take into account the reflected ion contribution, in this three fluid model.

The low density fast  $\theta$ -pinch of the University of Maryland is simulated. The simulations compare favorably with the experimental results for density profiles and ion temperature, in the case of different bias field. The simulations also obey scale laws for different parameters as density, temperature, etc.

The Tupã,  $\theta$ -pinch of the UNICAMP, is also simulated. Agreement is found with implosion time and ion temperature if adequate values of  $Z_{ef}$  or initial temperature are chosen.

ÍNDICE

|   |    |
|---|----|
| CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....                                       | 1  |
| CAPÍTULO II - MODELO TEÓRICO .....                                  | 6  |
| 1 - INTRODUÇÃO .....  | 6  |
| 2 - ÍONS REFLETIDOS .....   | 7  |
| 3 - DETERMINAÇÃO DE Q .....   | 9  |
| 4 - DETERMINAÇÃO DE $Q_2(v_x)$ .....                                | 12 |
| 5 - EQUAÇÃO DE VLASOV LEVANDO EM CONTA<br>REFLEXÕES .....           | 15 |
| 6 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS .....                                       | 16 |
| 7 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS PARA OS ELÉTRONS ....                       | 17 |
| 8 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS PARA OS ÍONS .....                          | 21 |
| 9 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS PARA OS ÍONS<br>REFLETIDOS .....            | 23 |
| 10 - EQUAÇÕES PARA OS CAMPOS ELÉTRICOS E<br>MAGNÉTICOS .....        | 28 |
| 11 - CAMPO ELÉTRICO RADIAL .....                                    | 28 |
| 12 - CAMPO MAGNÉTICO .....  | 30 |
| 13 - CAMPO ELÉTRICO NA DIREÇÃO TANGENCIAL ....                      | 32 |
| CAPÍTULO III - MÉTODO NUMÉRICO .....                                | 33 |
| 1 - GRANDEZAS DE FLUIDO .....                                       | 33 |
| 2 - MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER AS<br>EQUAÇÕES DOS CAMPOS ..... | 36 |
| 3 - TERMOS DE REFLEXÃO .....  | 38 |
| 4 - REPRESENTAÇÃO DE $\delta(x-x')$ NA REDE .....                   | 38 |
| 5 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS DE REFLEXÃO .....                       | 40 |
| 6 - ESTABILIDADE DO CÓDIGO NUMÉRICO .....                           | 42 |

|   |  |    |
|---|--|----|
| 7 | - ESTABILIDADE PARA A SITUAÇÃO SEM QUASENEUTRALIDADE ..... | 43 |
| 8 | - ESTABILIDADE PARA A SITUAÇÃO DE QUASENEUTRALIDADE .....  | 45 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| CAPÍTULO IV | - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS .....                       | 47  |
| 1           | - INTRODUÇÃO .....   | 47  |
| 2           | - $\theta$ - PINCH DE MARYLAND .....                                 | 47  |
| 3           | - DIFERENTES CAMPOS DE POLARIZAÇÃO .....                             | 50  |
| 4           | - ANÁLISE DE RESULTADOS PARA DIFERENTES POLARIZAÇÕES .....           | 66  |
| 5           | - LEIS DE ESCALA .....   | 69  |
| 6           | - VALORES DIFERENTES DA TEMPERATURA INICIAL DOS ÍONS .....           | 70  |
| 7           | - VALORES DIFERENTES DA DENSIDADE INICIAL DOS ÍONS .....             | 76  |
| 8           | - VALORES DIFERENTES PARA O TEMPO DE SUBIDA DO CAMPO MAGNÉTICO ..... | 79  |
| 9           | - SIMULAÇÕES COM DENSIDADES ELEVADAS .....                           | 82  |
| 10          | - TUPÃ .....   | 101 |
| 11          | - CASO $\text{He}^{+1}$ .....  | 102 |
| 12          | - CASO $\text{He}^{+1,5}$ .....                                      | 102 |
| 13          | - CASO $\text{He}^{+2}$ .....  | 103 |
| 14          | - TUPÃ COM CAMPO DE POLARIZAÇÃO NEGATIVO ..                          | 111 |
| CAPÍTULO IV | - CONCLUSÃO .....  | 117 |
| APÊNDICE A  | .....  | 119 |
| APÊNDICE B  | .....  | 123 |
| APÊNDICE C  | .....  | 124 |
| REFERÊNCIAS | .....  | 127 |

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Em termos gerais há dois tipos de modelos para o plasma, os modelos de partículas e os modelos de fluidos (Dawson - 1985).

Os modelos de partículas tentam simular os processos que ocorrem na natureza seguindo o movimento de um grande número de partículas carregadas sob a ação de campos elétricos e magnéticos autoconsistentes. Em sua forma mais básica eles devem seguir o comportamento do plasma na escala temporal da frequência mais elevada que ocorre no plasma (tipicamente a frequência de plasma) e na escala espacial menor possível (tipicamente o comprimento de Debye). Usando alguns métodos numéricos sofisticados foi possível suprimir alguns destes problemas com alta frequência e pequeno comprimento de onda e usar maiores valores de  $\Delta t$  e  $\Delta x$ . Muito trabalho vem sendo feito nesta direção afim de que plasmas maiores e durante mais tempo possam ser simulados com estes modelos de partículas.

Modelos de fluidos, por outro lado, usam equações de variáveis macroscópicas para simular o plasma. Modelos de dois fluidos e MHD são exemplos típicos deste tipo. Eles podem simular sistemas grandes e durante longos tempos, frequentemente todo o período de duração do plasma envolvido no experimento.

Tais modelos de fluido não consideram os fenômenos físicos que ocorrem em escala microscópica e estes fenômenos podem influenciar as propriedades do fluido, isto é, sua resistividade, viscosidade, transporte de calor etc. Pode-se tentar colocar estes efeitos como coeficientes fenomenológicos, mais ou menos sofisticados.

Em síntese, assim como é possível atingir tempos e escalas espaciais maiores modificando modelos de partículas, alternativamente é possível começar da outra extremidade com modelos de fluidos e incorporar mais física no modelo. Este é o objetivo desta tese ao tentar levar em conta íons refletidos com o modelo de dois fluidos de Liewer e Krall (Liewer 1972; Liewer e Krall 1973).

O modelo de dois fluidos de Liewer e Krall para simular implosões de  $\theta$  - pinches (Teller 1981; Dolan 1982), dominados por turbulências teve sucesso ao explicar diversos aspectos do  $\theta$  - pinch de alta voltagem de Maryland. O modelo apresenta resultados em boa concordância para os perfis de campo magnético, velocidade do pistão e sua dependência com a densidade. Contudo apresenta problemas com o perfil de densidade, a largura do sheath e a temperatura dos íons. Estes são devidos à ocorrência de íons refletidos durante a implosão do  $\theta$  - pinch e que não são levados em conta pelo modelo de dois fluidos.

Em razão da presença destes íons refletidos surgem duas populações de íons, na região na frente do pistão magnético, cada um deles descritos por sua própria velocidade média e temperatura. Quando isto ocorre se os íons são tratados por um único fluido (como ocorre no modelo de dois fluidos) estes íons são empilhados na frente do pistão magnético provocando o surgimento, artificial, de picos de densidade abruptos e estreitos.

Tais íons refletidos com o dobro da velocidade do pistão, além de terem sido observados experimentalmente (Comisso - 1975), já haviam sido previstos, a partir de certo valor do salto de potencial em relação à velocidade das partículas incidentes.

tes, num trabalho de Sagdeev (1966) analisando uma situação estacionária para um perfil do potencial. Manheimer (1974) usa um terceiro fluido para tratar as partículas refletidas (acoplado aos outros dois via modelo water-bag (Alder 1970)) em choques - íon - acústicos, também numa situação estacionária.

Também na simulação numérica da dinâmica do  $\theta$ - pinch são usados modelos que levam em conta a existência destes íons refletidos. Por exemplo o modelo bounce (Morse 1967) que é semelhante ao modelo snow-plow (Artsimovich 1964) para o  $\theta$ - pinch, somente que ao invés de supor que as partículas vão se acumulando na frente do pistão magnético, que caminha com velocidade  $v_p$  (e como que absorve os íons), supõe que as partículas são perfeitamente refletidas pelo pistão magnético e caminham para dentro com velocidade  $2v_p$ . Há também um modelo misto snow-plow - bounce (Oliphant 1974) em que o autor considera que algumas partículas são absorvidas, enquanto outras são refletidas, segundo um coeficiente de reflexão constante e arbitrário. Finalmente há modelos híbridos em que os íons são tratados como partículas e os elétrons como fluido (SGro e Nielsen 1976; Liewer 1976), - em que naturalmente se verifica a reflexão dos íons.

A idéia do trabalho de tese de doutoramento é levar - em conta os íons refletidos mediante um terceiro fluido, num modelo de dois fluidos (Liewer 1972), pois além do fato em si de melhorar um modelo de fluidos já ter sua relevância, como foi - exposto no início desta introdução, o modelo de fluidos tem algumas vantagens sobre os modelos mencionados anteriormente.

Os modelos bounce simples ou mistos apresentam problemas semelhantes ao do modelo snow-plow, pois são modelos que su

põe uma largura infinitesimal da sheath de blindagem magnética do plasma, portanto não apresentam corretamente os perfis da densidade e campo magnético, além de, no caso do modelo misto - ser necessário introduzir um coeficiente de reflexão constante, logo são modelos piores do que o modelo de dois fluidos. O modelo híbrido indiscutivelmente é um modelo superior ao de dois fluidos, porém tem as desvantagens de exigir muito mais memória de computador, além de exigir mais tempo de execução que o modelo de fluidos.

Neste trabalho procura-se tratar os íons refletidos com um modelo localizado, no espaço, que não necessita de parâmetros de refletividade impostos arbitrariamente. Além disto como trabalhos, que estudaram soluções estacionárias do problema de difusão de campos no plasma (Forsslund e Freidberg 1971; Mason 1972; Chodura 1975), mostraram que a quantidade de íons refletidos depende da resistividade anômala, é importante usar um tratamento realístico desta resistividade.

Afim de tratar convenientemente a resistividade anômala utilizou-se o modelo autoconsistente de Liewer e Krall (1972). Usando as propriedades conhecidas de várias instabilidades, eles desenvolveram um algoritmo para a resistividade anômala que aplica-se à vários  $\theta$  - pinches e é superior ao modelo semi-empírico de Chodura (1975) que é mais simples e rápido e é aplicado em muitas simulações.

No capítulo II são apresentados detalhes a respeito do modelo físico utilizado. Discute-se o modelo utilizado para os íons refletidos e são desenvolvidas e apresentadas as equações, para os elétrons, íons, íons refletidos e campos, a ser

resolvidas nesta simulação e que constituem um sistema de 17 -  
equações.

No capítulo III estão alguns detalhes do método numé-  
rico a partir do qual foi elaborado o programa de computador, -  
escrito em FORTRAN, utilizado para resolver o sistema de equa-  
ções. Discute-se também os problemas de estabilidade do método -  
numérico empregado.

No capítulo IV estão os resultados obtidos a partir -  
da resolução numérica do sistema de equações. Foram obtidos per  
fis de densidade, campo magnético etc, em diferentes instantes  
de tempo para parâmetros correspondentes a um  $\theta$  - pinch de Mary  
land e ao Tupã ( $\theta$  - pinch da UNICAMP).

Finalmente no capítulo V estão as conclusões deste -  
trabalho.

## CAPÍTULO II - MODELO TEÓRICO

### 1 - INTRODUÇÃO

Para tratar os íons refletidos, que surgem num plasma não colisional, aproveitou-se uma idéia apresentada por Comisso (1975) durante a análise de seus resultados, vide apêndices A e B.

Considere-se a seguinte analogia, quando plasmas quase-neutros interagem com campos eletromagnéticos de alta frequência, como  $m_e \ll m_i$ , estes campos atuam principalmente sobre os elétrons. A fim de preservar a quaseneutralidade os íons são puxados pelos elétrons, mediante forças elétricas devidas à separação de cargas. Tais processos podem ser caracterizados por três parâmetros que se interrelacionam da seguinte maneira (Gekker 1982):

$$r_{De} \ll L_{SHEATH} < L \text{ (vide o apêndice B)}$$

onde:

$r_{De}$  é o raio Debye

$L_{SHEATH}$  é a largura da sheath

$L$  é o comprimento do sistema.

Ou seja, as forças elétricas agindo sobre os íons atuam numa região espacial pequena, é apenas nesta região que muda constantemente com o tempo que será necessário supor uma distribuição de velocidades para os íons.

Na fase inicial de implosão do  $\theta$  - pinch ocorre algo análogo, vide apêndice A. Nesta fase, que é onde se aplica o modelo de dois fluidos de Liewer (1972), os elétrons são muito mais magnetizados que os íons, pois

$$\frac{\Omega_e^{-1}}{\Omega_i^{-1}} = \frac{m_e}{m_i}$$

sendo  $\Omega_e^{-1}$  ou  $\Omega_i^{-1}$  (o inverso da frequência ciclotrônica de elétrons ou íons) o tempo característico do fenômeno. Logo são os elétrons que interagem mais fortemente com o campo magnético e acabam sendo empurrados para dentro como consequência do drift  $\vec{E} \times \vec{B}$  resultante dos campos  $E_\theta$  (produzidos pela variação temporal de  $B_z$ ) e do campo  $B_z$ . Como consequência disto os íons vêm incidir sobre eles um campo elétrico resultante da separação de cargas, e que está associado a um potencial, pois para tal componente do campo  $\vec{E}$ , vale  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_r = 0$ .

Esta diferença de potencial incide sobre os íons, que têm uma certa temperatura  $T_i$ , e os acelera. Supõe-se que os íons considerados pelo terceiro fluido serão justamente os íons refletidos nesta diferença de potencial  $\Delta\phi$ , que tem uma largura menor do que a da sheath de blindagem do campo magnético no plasma, e que caminha para dentro com uma velocidade próxima à velocidade dos elétrons.

A partir desta idéia física determina-se localmente se há ou não reflexão e, caso haja, as partículas refletidas passam a ser consideradas pelo terceiro fluido.

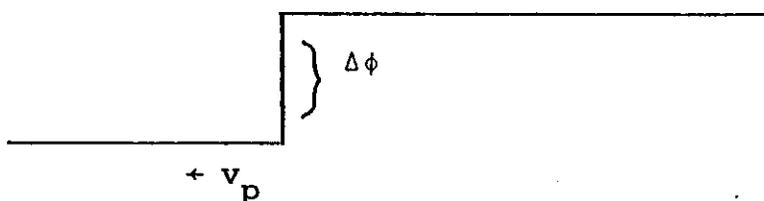
## 2 - ÍONS REFLETIDOS

Para tratar adequadamente este processo, considerou-se que a ação da diferença de potencial sobre o fluido é como que a de colisões que provocam saltos no espaço de velocidades.

Considerou-se os íons como tendo uma distribuição de velocidades dada por

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_i(\vec{r}, t) \left( \frac{M_i}{2\pi T_i(\vec{r}, t)} \right)^{\frac{3}{2}} \text{EXP} \left( -\frac{M_i v^2}{2T_i(\vec{r}, t)} \right)$$

que é uma distribuição Maxwelliana em repouso, num determinado ponto do espaço; e no instante  $t$  eles estarão vendo uma diferença de potencial do tipo



que caminha com velocidade  $\vec{v}_p$  no sistema de referência  $(x, y)$  fixo no laboratório, neste sistema as partículas têm velocidade  $\vec{v}_x$ .

Considerou-se, também, um referencial  $(x', y')$  ligado ao pistão magnético. Neste sistema as partículas terão velocidade  $\vec{v}'_x$ .

Para tratar os íons refletidos foi introduzido um termo "colisional" na equação de Vlasov; e baseado na idéia intuitiva de um fluxo de partículas em direção à rampa de potencial, como sendo as partículas refletidas que serão levadas em conta pelo terceiro fluido, supôs-se que tal termo seja do tipo:

$$Q(\vec{x}, \vec{v}, t) f(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

3 - DETERMINAÇÃO DE Q

Sabe-se, portanto, que

$$\frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} + \vec{a} \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = Q(\vec{x}, \vec{v}, t) f(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (2.1)$$

a partir da hipótese da reflexão como colisões no espaço de fase. Como no problema as variáveis dependerão apenas de  $x$ , pois o problema tem simetria axial, pode-se escrever a equação (2.1) da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(x, \vec{v}, t)}{\partial t} + v_x \frac{\partial f(x, \vec{v}, t)}{\partial x} + \vec{a} \frac{\partial f(x, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = Q(x, \vec{v}, t) f(x, \vec{v}, t) \quad (2.2)$$

A fim de fazer uma análise dimensional dos termos, faz-se uma integração desta equação no espaço das velocidades obtendo-se:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_x}{\partial x} = \int Q(x, \vec{v}, t) f(x, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.3)$$

portanto,

$$\frac{n}{t} + \frac{n l}{l t} = Q n$$

logo a dimensão de  $Q$  é  $\frac{1}{t}$ , que se representa por  $[Q] = \frac{1}{t}$ .

Para determinar  $Q$  supõe-se reflexões devidas a uma rampa de potencial  $\Delta\phi$  localizada na origem, e não dependendo de  $t$ . - Considera-se, também, que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  e que não atuem outras forças,

sobre as partículas, de tal modo que  $\vec{a} = 0$ ; destaforma somente se rão levados em conta efeitos de reflexão na determinação de  $Q$  a partir de (2.2). Baseado nestas considerações e multiplicando-se (2.2) por  $dx d\vec{v} dt$  obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial t} dx d\vec{v} dt = Qf dx d\vec{v} dt \quad (2.4)$$

Num certo intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , integra-se esta equação num volume do espaço de fase  $\Omega$ ; tal que  $\Omega$  incluye um volume no espaço dos  $x$  e todo o espaço de velocidades, então:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} dx d\vec{v} dt = \int_{\Omega} Qf dx d\vec{v} dt \quad (2.5)$$

Sabe-se que o termo do lado esquerdo da equação (2.5) vale  $N$ , sendo  $N$  o número de partículas que deixam o fluido no volume  $\Omega$ , devido às reflexões, no intervalo  $dt$ .

Nestas condições tem-se que  $N = 0$  se o volume do espaço de fase sobre o qual se integra não incluir a origem, e

$$N = \int_{\omega} f(o, \vec{v}, t) v_x d\vec{v} dt$$

se o volume incluir a origem. Sendo  $\omega$  o intervalo de velocidades- $v_x$  em que há reflexão.

Consequentemente  $Q(x, \vec{v})$  deve ser tal que satisfaça às seguintes condições:

$$[Q] = \frac{1}{t} \quad (2.6)$$

$$\int_{\Omega} Q f \, dx \, d\vec{v} \, dt = 0 \quad (2.7)$$

se tal volume  $\Omega$  não incluir a origem, e

$$\int_{\Omega} Q f \, dx \, d\vec{v} \, dt = \int_{\omega} f(0, \vec{v}, t) v_x \, d\vec{v} \, dt \quad (2.8)$$

se o volume incluir a origem.

Para determinar  $Q(x, \vec{v})$ , baseado na expressão (2.8), supõe-se que:

$$Q(x, \vec{v}) = Q_1(x) Q_2(\vec{v}) \quad (2.9)$$

e vê-se que nestas condições  $Q_2(\vec{v})$  deve ser igual a  $v_x$  na região do espaço de velocidades em que há reflexão, e que será determinada na secção seguinte.

Já  $Q_1(x)$ , a partir de (2.6) a (2.8) e (2.9), deve satisfazer às seguintes condições:

$$[Q_1(x)] = \frac{1}{l} \quad (2.10)$$

$$\int Q_1(x) f(x, \vec{v}, t) \, dx = 0 \quad (2.11)$$

se o volume não incluir a origem, e

$$\int Q_1(x) f(x, \vec{v}, t) dx = f(0, \vec{v}, t) \tag{2.12}$$

se incluir a origem.

Logo, a partir de (2.10) a (2.12) pode-se concluir que  $Q_1(x) = \delta(x)$ .

#### 4 - DETERMINAÇÃO DE $Q_2(v_x)$

Na determinação de  $Q_2(v_x)$  utiliza-se o modelo de reflexão para as partículas e além disso, inicialmente, determinar-se-á um  $Q_2(x, v_x, t)$  que será útil e somente no final obter-se-á  $Q_2(v_x)$ , da secção anterior.

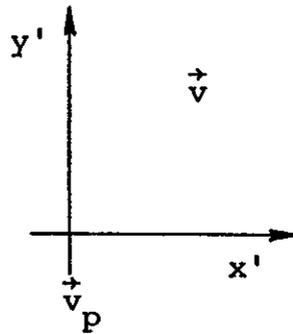
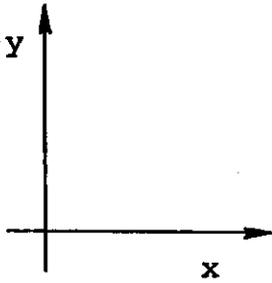
Serão refletidas as partículas que se aproximam do pistão com energia cinética menor do que  $e\Delta\phi$ . Isto no referencial da rampa de potencial que caminha com os elétrons significa que:

$$\frac{1}{2} m v_x'^2 < e\Delta\phi \quad e \quad v_x' > 0 \tag{2.13}$$

onde  $v_x'$  significa velocidade num referencial que se move em relação ao laboratório.

Como as equações estão escritas no sistema de referência do laboratório, a fim de determinar  $Q_2(x, v_x, t)$  é necessário traduzir esta condição de reflexão para o sistema de referência do laboratório.

Sabe-se que quando há dois sistemas



onde o sistema  $(x',y')$  move-se com velocidade  $\vec{v}_p$  no sistema  $(x,y)$ , vale a seguinte relação para uma partícula que se move com velocidade  $\vec{v}$  em  $(x,y)$  e  $\vec{v}'$  em  $(x',y')$ :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_p$$

assim as duas condições (2.13) reduzem-se no sistema de referência  $(x,y)$  a

$$0 < (\vec{v} - \vec{v}_p)_x < \sqrt{\frac{2e\Delta\phi}{M_i}} \quad (2.14)$$

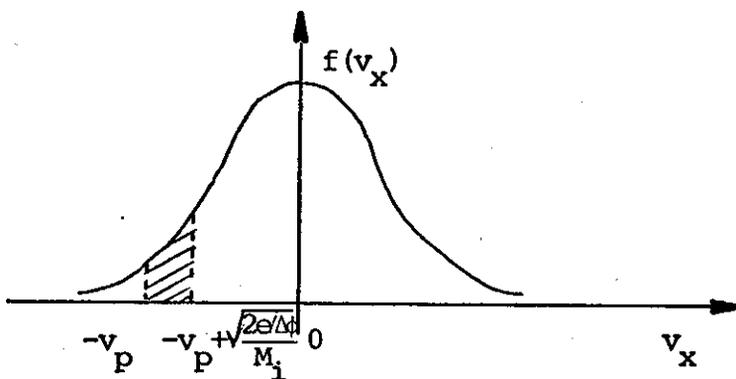
Afim de fazer uma verificação do que está ocorrendo, - considere-se o seguinte:

no  $\theta$  - pinch  $\vec{v}_p = -v_p \vec{i}$ , com  $v_p$  positivo, sendo  $\vec{i}$  o versor referente ao eixo  $x$  e apontando do centro para fora. E  $\vec{v} = v \vec{i}$  com  $v$  positivo ou negativo.

Neste caso a relação (2.14) fica:

$$0 < v + v_p < \sqrt{\frac{2e\Delta\phi}{M_i}}$$

$$\text{ou } -v_p < v < -v_p + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi}{M_i}} \quad (2.15)$$



assim para  $v_x$  na região caracterizada pela condição (2.15), região assinalada no gráfico de  $f(v_x)$ , há reflexão, fora dela não há.

Portanto tem-se para  $Q(x, v_x, t)$  no intervalo

$$-v_p(x, t) < v_x < \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x, t)}{M_i}} - v_p(x, t) \text{ vale:}$$

$Q(x, v_x, t) = v_x + v_p$  (que é a velocidade relativa a rampa de potencial e que quando  $v_p = 0$  reduz-se a  $v_x$  como na secção anterior) e fora deste intervalo  $Q_2(v_x, t) = 0$ . Isto pode-se exprimir como uma função de Heaviside.

Ao invés de escrever  $-v_p(x, t)$  (com  $v_p > 0$ ) pode-se escrever  $v_p(x, t)$  pois este terá naturalmente valor positivo ou negativo conforme o caso.

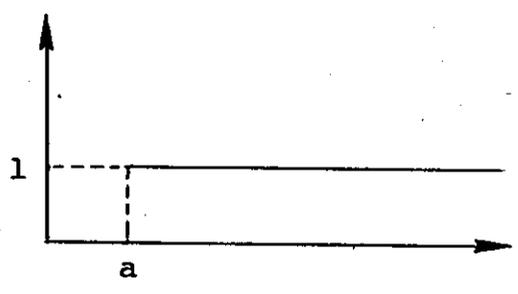
Assim pode-se descrever o intervalo em que  $Q$  é diferente de zero como:

$$v_p(x, t) < v_x < v_p(x, t) + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi}{M_i}}$$

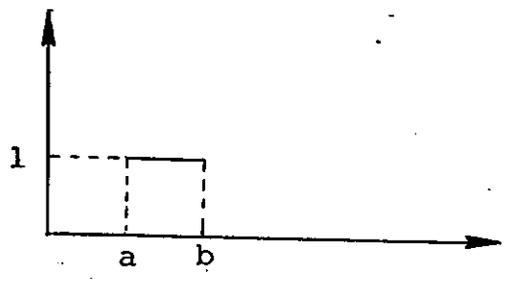
Lembrando que a função unitária de Heaviside é dada por

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t > a \end{cases}$$

tem-se:



e assim pode-se escrever



como sendo  $U(t-a) - U(t-b)$

Logo:

$$Q_2(x, v_x, t) = (v_x - v_p(x, t)) U(v_x - v_p(x, t)) - (v_x - v_p(x, t)) U(v_x - v_p(x, t) - \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x, t)}{M_i}})$$

no caso do potencial parado na origem, como na secção anterior, - tem-se

$$Q_2(v_x) = v_x U(v_x) - v_x U(v_x - \sqrt{\frac{2e\Delta\phi}{M_i}})$$

5 - EQUAÇÃO DE VLASOV LEVANDO EM CONTA REFLEXÕES

Assim, no caso dum  $\Delta\phi$  parado, localizado na origem pode-se escrever:

$$Q(x, v_x) = - \delta(x) (v_x U(v_x) - v_x U(v_x - \sqrt{\frac{2e\Delta\phi}{M_i}}))$$

onde o sinal - que aparece é devido ao fato de que Qf representa

as perdas da função de distribuição dos íons.

Agora para o caso duma rampa de potencial  $\Delta\phi(x',t)$  movendo-se com  $v_p(x',t)$  e localizada no ponto  $x'$  tem-se que

$$Q(x, v_x, t) = - \delta(x - x') \left\{ (v_x - v_p(x', t)) U(v_x - v_p(x', t)) - (v_x - v_p(x', t)) U(v_x - v_p(x', t) - \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x', t)}{M_i}}) \right\}$$

Considerando uma região com uma série de  $\Delta\phi$ 's em diferentes valores de  $x'$  pode-se escrever formalmente:

$$Q(x, v_x, t) = - \sum_{x'} \delta(x - x') \left\{ (v_x - v_p(x', t)) U(v_x - v_p(x', t)) - (v_x - v_p(x', t)) U(v_x - v_p(x', t) - \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x', t)}{M_i}}) \right\}$$

É este o termo que deverá ser colocado no lado direito da equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{a} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = Q(x, v_x, t) f(x, \vec{v}, t)$$

os termos que entrarão na equação de fluidos correspondentes a estes efeitos serão justamente momentos do termo do lado direito desta equação.

## 6 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS

Para obter as equações de fluido apropriadas ao 0 - pinch

tomam-se momentos da equação para a função distribuição (Krall e Trivelpiece 1973). Por causa da simetria cilíndrica do  $\theta$  - pinch - as propriedades mais importantes como densidade, temperatura, velocidade do pistão, perfil do campo magnético etc podem ser estudadas não levando em conta as variações em  $\theta$ . Supondo que não haja nem movimento nem variação na direção  $z$ , consideram-se somente variações na direção  $r$ . Além disso, por simplicidade, o problema é tratado em coordenadas cartesianas e assim as variáveis dependem apenas de  $x$ , que faz o papel de coordenada radial. Desta forma, a comparação com os experimentos é válida, somente, durante a implosão o que é razoável uma vez que este modelo para os íons refletidos, supondo íons não magnetizados, deixa de valer com o correr do tempo.

## 7 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS PARA OS ELÉTRONS

Para obter as equações de fluido para os elétrons tomam-se momentos, no espaço das velocidades, da equação de variação temporal da função distribuição, como no trabalho de Liewer e Krall (1972).

A seguir faz-se a hipótese de quaseneutralidade

$$n_e = n_i + n_{ir} \quad (2.16)$$

Portanto:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\partial (n_i + n_{ir})}{\partial t}$$

mas da equação de continuidade para os elétrons (Liewer 1972) segue-se que:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = - \frac{\partial n_e v_{ex}}{\partial x}$$

logo:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_{ir}}{\partial t} = - \frac{\partial n_e v_{ex}}{\partial x}$$

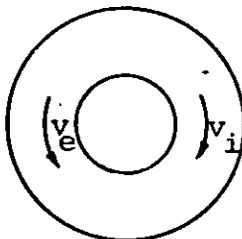
mas de (2.20) e (2.25) tem-se que

$$\frac{\partial (n_i v_{ix} + n_{ir} v_{irx})}{\partial x} = \frac{\partial n_e v_{ex}}{\partial x}$$

Consequentemente:

$$v_{ex} = \frac{n_i v_{ix} + n_{ir} v_{irx}}{n_i + n_{ir}} \quad (2.17)$$

Na direção y, que neste trabalho corresponde à direção tangencial, as velocidades de íons e elétrons podem ser, como usualmente o são, bastante diferentes, com a velocidade dos elétrons bem maior do que a velocidade dos íons, uma vez que as acelerações de íons e elétrons devido aos campos elétrico e magnético estão na razão inversa das massas. Como o problema tem simetria em  $\theta$ , o fato de  $v_{ey}$  ser diferente de  $v_{iy}$  não implica o surgimento dum campo de separação de cargas, que tenda a igualar as velocidades de elétrons e íons como ocorre na direção radial.



A equação para  $v_{ey}$  é:

$$\frac{\partial n_e v_{ey}}{\partial t} + \frac{\partial n_e v_{ey} v_{ex}}{\partial x} = - \frac{n_e e}{m_e} \left( E_y - \frac{v_{ex} B_z}{c} \right) + R_{anom} \quad (2.18)$$

que vem da componente y da equação para o segundo momento da função distribuição. O termo  $R_{anom}$  corresponde a resistividade anômala (Liewer 1972).

O terceiro momento da equação para a função distribuição

$$m \int d\vec{v} (\vec{v} - \vec{V}) (\vec{v} - \vec{V}) \frac{df}{dt}$$

dá a equação da pressão (ou temperatura):

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (q_{xij} + v_{ex} P_{ij})}{\partial x} + P_{jx} \frac{\partial v_{ei}}{\partial x} + P_{ix} \frac{\partial v_{ej}}{\partial x} =$$

$$q_{anom} - \frac{e}{mc} [ \vec{P} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{P} ]_{ij}$$

onde i e j podem valer x ou y.

$q_{xij}$  corresponde ao tensor de fluxo de calor e pode ser considerado nulo mediante a hipótese quasinormal (ou seja, função de distribuição próxima de uma Maxwelliana) (Gill 1981).

Para o  $\theta$  - pinch com um campo magnético somente na direção z, no limite de não existência de turbulência ou gradientes, - as equações para as componentes do tensor pressão ficam, com -

$$P_{ji} = P_{ij}:$$

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial t} = 2\Omega_e P_{xy}$$

$$\frac{\partial P_{yy}}{\partial t} = -2\Omega_e P_{xy}$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial t} = -\Omega_e (P_{xx} - P_{yy})$$

$$\frac{\partial P_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial P_{yz}}{\partial t} = \frac{\partial P_{zz}}{\partial t} = 0$$

Destas equações pode ser visto que se  $P_{xx} \neq P_{yy}$  através, por exemplo, efeitos de aquecimento por turbulência, então  $P_{xy}$  tenderá a igualá-los, também numa escala de tempo da ordem de  $\Omega_e^{-1}$ . Para o  $\theta$  - pinch, a escala temporal é o inverso da frequência híbrida inferior, vide apêndice A,  $\omega_{LH}^{-1} = (\Omega_e \Omega_i)^{-\frac{1}{2}}$ ; desta forma para os elétrons é uma boa aproximação tomar

$P_{xx} = P_{yy} = P_{\perp}$ ,  $P_{zz} = P_{\parallel}$  e  $P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$ . Além disso, se  $P_{\perp} \neq P_{\parallel}$ , instabilidades eletromagnéticas (Weibel) surgirão que - tenderão a equalizá-los numa escala de tempo  $\frac{1}{\tau} = \frac{V_{Te}}{C} \omega_{pe}$ , onde  $V_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{M_e}}$  é a velocidade térmica dos elétrons. Assim  $P_{\perp} = P_{\parallel} = n_e T_e$ .

E assim para os elétrons as três equações para

$T_{jj}$ , de  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$  e  $P_{zz}$ , com  $P_{xx} = nT_x = P_{yy} = nT_y = P_{zz} = nT_{zz} = n_e T_e$ , - são somadas para dar

$$\frac{\partial (3n_e T_e)}{\partial t} + \frac{\partial (3v_{ex} n_e T_e)}{\partial x} + 2n_e T_e \frac{\partial v_{ex}}{\partial x} = q_{anom}$$

Combinando esta equação com a equação de continuidade -

tem-se:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{\partial T_e v_{ex}}{\partial x} - \frac{1}{3} T_e \frac{\partial v_{ex}}{\partial x} = q_{anom} \quad (2.19)$$

onde  $q_{anom}$  representa o aquecimento devido a colisões anômalas - (Liewer 1972).

### 8 - EQUAÇÕES DE FLUIDO PARA OS ÍONS

As equações para os íons são obtidas a partir de momentos da equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = Q(x, v_x, t) f(x, \vec{v}, t)$$

O primeiro momento dá a equação de continuidade:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_{ix}}{\partial x} = A \quad (2.20)$$

onde  $A = \int Q(x, v_x, t) f(x, \vec{v}, t) d\vec{v}$

A componente x do segundo momento fornece a equação de - conservação de momento na direção -x

$$\frac{\partial n_i v_{ix}}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_{ix} v_{ix}}{\partial x} = \frac{-e}{m_i} \left( n_i E_x + \frac{n_i v_{iy} B_z}{c} \right) - \frac{1}{m_i} \frac{\partial n_i T_{ix}}{\partial x} + B \quad (2.21)$$

onde  $B = \int Qf v_x d\vec{v}$

A componente y do segundo momento fornece a equação de conservação de momento na direção y

$$\frac{\partial n_i v_{iy}}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_{iy} v_{ix}}{\partial x} = \frac{e}{m_i} \left( n_i E_y - \frac{n_i v_{ix} B_z}{c} \right) + R_{anom} + C \quad (2.22)$$

onde  $C = \int Qf v_y d\vec{v}$ , que é nulo como será demonstrado adiante.

O terceiro momento dá uma equação para a pressão  $P_{ij}$ , semelhante àquela dos elétrons, somente que agora nesta equação aparecem termos devidos aos íons refletidos. Porém, neste caso, durante a escala temporal característica do  $\theta$  - pinch, que é o inverso da frequência híbrida inferior, os íons são essencialmente não magnetizados, de tal maneira que não há nada que mantenha  $P_{xx} = P_{yy}$ . Então considera-se  $T_x \neq T_y$  pois as equações de evolução temporal de ambas são diferentes. Mas continua-se a admitir a hipótese quasínormal, que implica  $P_{xy} = 0$ .

Destafoma a equação de temperatura dos íons na direção

x fica:

$$\frac{\partial n_i T_{ix}}{\partial t} + \frac{\partial (n_i T_{ix} v_{ix})}{\partial x} + 2n_i T_{ix} \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} = D \quad (2.23)$$

onde:

$$D = \int mQf (\vec{v}-\vec{V})_x (\vec{v}-\vec{V})_x d\vec{v}$$

E a equação de temperatura na direção y é:

$$\frac{\partial n_i T_{iy}}{\partial t} + \frac{\partial (n_i T_{iy} v_{ix})}{\partial x} = q_i \text{ anom} + E \quad (2.24)$$

onde:

$$E = \int Q f (\vec{v} - \vec{V})_y (\vec{v} - \vec{V})_y d\vec{v}$$

pois somente há termos com colisões anômalas na direção y e não na direção x, uma vez que as velocidades dos elétrons e dos íons são bastante diferentes na direção y, mas não na direção x.

### 9 - EQUAÇÕES DE FLUIDOS PARA OS ÍONS REFLETIDOS

As equações para os íons refletidos são obtidos a partir das equações para os íons, levando-se em conta a conservação de quantidades como número de partículas, momento etc.

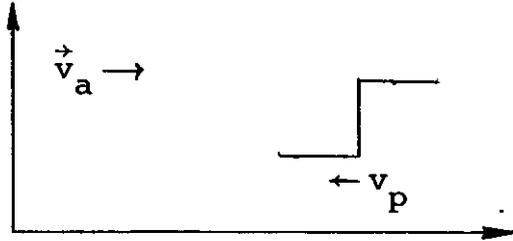
Analisando-se a equação de continuidade verifica-se que quando ocorre um choque da partícula na barreira de potencial esta deixa de ser considerada partícula no fluido de íons passando a ser considerada como partícula do feixe refletido.

Portanto,  $dn_{ir} = -dn_i$  e a equação de continuidade para os íons refletidos fica

$$\frac{\partial n_{ir}}{\partial t} + \frac{\partial n_{ir} v_{irx}}{\partial x} = A' \quad (2.25)$$

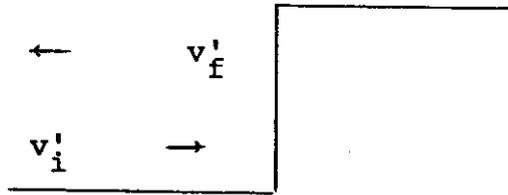
com  $A' = -A$ .

No que tange a equação de movimento na direção  $x$  é necessário determinar a quantidade de movimento que será levada para a equação dos íons refletidos



sai do fluido de íons  $m\vec{v}_a$  (para cada choque).

No referencial do pistão a partícula se reflete elasticamente e volta com sua velocidade inicial, mas na direção oposta



Onde ' refere-se ao sistema de referência do pistão. As velocidades iniciais e finais neste sistema são

$$v_i' = v_a - v_p$$

$$v_f' = -(v_a - v_p)$$

Voltando ao sistema de referência do laboratório

$$v_d = v_f' + v_p = 2v_p - v_a$$

Portanto o ganho de momento por parte dos íons refletidos, em cada colisão é

$$m_i (2v_p - v_a) = 2m_i v_p - m_i v_a$$

logo  $\Delta (m_i \vec{v})_{ir} = 2m_i v_p + \Delta (m_i \vec{v})_i$  para cada partícula.

Logo o termo a ser acrescentado à equação para os íons - refletidos será a somatória

$$\sum_{\substack{\text{part.} \\ ir}} \Delta (m_i \vec{v})_{ir} = \sum_{\substack{\text{part.} \\ i}} 2m_i v_p + \sum_{\substack{\text{part.} \\ i}} \Delta (m_i v)_i$$

assim  $\sum_{\substack{\text{part.} \\ ir}} \Delta (m_i \vec{v})_{ir} = 2m_i A' v_p + m_i B$

como a equação em que este termo deve ser colocado é para  $nv_x$  define-se:

$$B' = \sum_{\substack{\text{part.} \\ ir}} \frac{\Delta (m \vec{v})_{ir}}{m_i}$$

como sendo o termo a ser acrescentado ao lado direito da equação - de movimento na direção x para os íons refletidos

$$B' = 2A' v_p + B$$

e como  $v_p = v_e$

$$B' = 2A' v_e + B$$

e a equação de movimento na direção x para os íons refletidos fica:

$$\frac{\partial n_{ir} v_{irx}}{\partial t} + \frac{\partial n_{ir} v_{irx} v_{irx}}{\partial x} = - \frac{1}{m_i} \frac{\partial n_{ir} T_{irx}}{\partial x} + \frac{n_{ir} e E_x}{m_i} + B' \quad (2.26)$$

Na direção y não se considera equação para os íons refletidos, pois o termo C que entra na equação de movimento y para os íons é nulo, pois para uma função do tipo Maxwelliana em  $v_y$  vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f v_y = 0$$

e além disso o movimento na direção tangencial dos íons é muito lento em relação ao dos elétrons. E como há simetria em  $\theta$  esta diferença entre  $v_{e\theta}$  e  $v_{i\theta}$  não provoca o surgimento de uma força de separação de cargas que tenda a igualar as duas velocidades.

Ao determinar a equação de temperatura para os íons refletidos parte-se da seguinte consideração:

$$T = \langle m (v - V_{md})^2 \rangle$$

portanto, segundo este modelo, sai do primeiro fluido  $v_a^2$  e entra para o segundo fluido  $v_d^2$ . Portanto o termo referente à temperatura, que entra para o fluido de íons refletidos, é:

$$T = \langle m (v_d - V_{md})^2 \rangle, \text{ onde } V_{md} \text{ é a velocidade}$$

média depois, mas  $v_d = 2v_p - v_a$  portanto

$$V_{md} = 2v_p - \frac{\int_1 n v_a^2}{\int_1 n}$$

$$(v_d - v_{md})^2 = v_d^2 - 2v_d v_{md} + v_{md}^2$$

assim,

$$\langle (v_d - v_{md})^2 \rangle = \frac{\sum_i n v_a^2}{\sum_i n} - \left( \frac{\sum_i n v_a}{\sum_i n} \right)^2$$

$$\sum_{ir} \langle (v_d - v_{md})^2 \rangle = \sum_i n v_a^2 - \frac{(\sum_i n v_a)^2}{\sum_i n}$$

mas o termo que entra na equação para a temperatura na direção x - dos íons refletidos será

$$D' = \sum_{ir} n m_i \langle (v_d - v_{md})^2 \rangle$$

$$\text{mas } \sum_i n m_i v_a^2 = -D$$

$$m_i (\sum_i n v_a)^2 = m_i B^2$$

$$\sum_i n = -A$$

$$\text{logo } D' = -D + \frac{m_i B^2}{A} = -D - \frac{m_i B^2}{A'}$$

portanto a equação para a temperatura na direção -x para os íons - refletidos fica:

$$\frac{\partial n_{ir} T_{irx}}{\partial t} + \frac{\partial (n_{ir} T_{irx} v_{irx})}{\partial x} + 2n_{ir} T_{irx} \frac{\partial v_{irx}}{\partial x} = D' \quad (2.27)$$

Para a temperatura em y ter-se-á  $E' = -E$ , pois as velocidades em y não são afetadas diretamente pelo choque com o potencial. Portanto

$$\frac{\partial n_{ir} T_{iry}}{\partial t} + \frac{\partial (n_{ir} T_{iry} v_{irx})}{\partial x} = E' \quad (2.28)$$

## 10 - EQUAÇÕES PARA OS CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS

A seguir serão apresentadas as equações que foram utilizadas para determinar os campos  $E_x$ ,  $E_y$  e  $B_z$  e o potencial  $\phi$ .

## 11 - CAMPO ELÉTRICO RADIAL

Da condição de quaseneutralidade resultou que:

$$n_e v_{ex} = n_i v_{ix} + n_{ir} v_{irx}$$

logo,

$$\frac{\partial (n_e v_{ex})}{\partial t} = \frac{\partial (n_i v_{ix})}{\partial t} + \frac{\partial (n_{ir} v_{irx})}{\partial t}$$

e usando as equações de movimento na direção -x para elétrons, íons e íons refletidos pode-se escrever:

$$-\frac{\partial n_e v_{ex} v_{ex}}{\partial x} - \frac{e}{m_e} \left( n_e E_x + \frac{n_e v_{ey} B_z}{c} \right) - \frac{1}{m_e} \frac{\partial n_e T_e}{\partial x} =$$

$$-\frac{\partial n_i v_{ix} v_{ix}}{\partial x} + \frac{e}{m_i} \left( n_i E_x + \frac{n_i v_{iy} B_z}{c} \right) - \frac{1}{m_i} \frac{\partial n_i T_{ix}}{\partial x} + B$$

$$-\frac{\partial n_{ir} v_{irx} v_{irx}}{\partial x} - \frac{e}{m_i} \frac{\partial n_{ir} T_{irx}}{\partial x} + \frac{e n_{ir} E_x}{m_i} + B'$$

consequentemente pode-se escrever:

$$-e \left( n_e E_x + \frac{n_e v_{ey} B_z}{c} \right) - \frac{\partial n_e T_e}{\partial x} = m_e \frac{\partial (n_e v_{ex} v_{ex} - n_i v_{ix} v_{ix})}{\partial x}$$

$$-\frac{n_{ir} v_{irx} v_{irx}}{m_i} + \frac{m_e}{m_i} e \left( n_i E_x + \frac{n_i v_{iy} B_z}{c} \right) - \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial n_i T_{ix}}{\partial x}$$

$$+ m_e B - \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial n_{ir} T_{irx}}{\partial x} + \frac{m_e n_{ir} e E_x}{m_i} + m_e B'$$

uma vez que os elétrons são mais leves que os íons eles tendem a ser muito mais acelerados, mas como a diferença de velocidades na direção x implica separação de cargas (o que não ocorre no caso da direção y) as forças que atuam sobre os elétrons na direção x devem estar balanceadas o que equivale a considerar  $m_e \rightarrow 0$  para o movimento nesta direção (ou dito de outro modo, como a escala temporal do movimento dos elétrons é  $\omega_{pe}^{-1}$ , que é bem menor do que o tempo de implosão, é razoável fazer  $m_e \rightarrow 0$  para o movimento na direção x) e isto permite determinar  $E_x$  através da equação anterior fazendo  $m_e \rightarrow 0$ , portanto

$$E_x = - \left( \frac{v_{ey} B_z}{c} + \frac{i}{en_e} \frac{\partial n_e^T}{\partial x} \right) \quad (2.29)$$

e, assim, não é necessário usar a equação de Poisson para determinar  $E_x$ .

Da relação

$$E_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.30)$$

determina-se o potencial elétrico.

## 12 - CAMPO MAGNÉTICO

O plasma no  $\theta$  - pinch inicialmente é neutro e tem somente um campo externo  $B_z$ . Desde que não se esta supondo movimento na direção  $z$  tem-se  $E_z = B_y = 0$ . Além disso como as grandezas dependem somente de  $x$ , de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  tem-se que  $B_x = 0$ . Para obter uma equação para  $B_z$  considera-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A corrente de deslocamento será pequena, para o  $\theta$  - pinch, por causa da escala temporal do fenômeno. A partir de

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

uma estimativa da ordem de magnitude é

$$\frac{E}{L} \sim - \frac{1}{c \tau} \frac{B}{\tau}$$

portanto,

$$\left| \frac{E}{B} \right| \sim \frac{L}{c \tau}$$

onde L é a escala espacial das variações e  $\tau$  é uma escala de tempo característico.

Tomando  $L \sim \frac{c}{\omega_{pe}}$  e  $\tau \sim \omega_{LH}^{-1} \sim (m_e m_i)^{\frac{1}{2}} \frac{c}{eB}$ , vide apêndice A, pode-se estimar

$$\frac{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\vec{\nabla} \times \vec{B}} \sim \frac{\frac{1}{c} \frac{E}{\tau}}{\frac{B}{L}} \sim \frac{L}{c \tau} \frac{E}{B} \sim \left( \frac{L}{c \tau} \right)^2 \sim \left( \frac{\omega_{LH}}{\omega_{pe}} \right)^2$$

$$\text{mas } \left( \frac{\omega_{LH}}{\omega_{pe}} \right)^2 = \frac{m_e}{m_i} \frac{B^2}{4\pi n_e m_e c^2}$$

para os problemas de pistão de interesse

$$A = \frac{4\pi n_e m_e c^2}{B^2} \approx 0(1)$$

e o termo devido à corrente de deslocamento pode ser desprezado, -  
portanto

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

ou seja,

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} (en_i v_{iy} - en_e v_{ey}) \quad (2.31)$$

### 13 - CAMPO ELÉTRICO NA DIREÇÃO TANGENCIAL

A equação para este campo será

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

em coordenadas cartesianas fica:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

mas esta equação não pode ser integrada diretamente devido ao fato de que ela é naturalmente instável. O procedimento usual para resolvê-la é derivar a equação em x, logo

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

e usando as equações de movimento na direção y para elétrons e íons pode-se escrever

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha=i,e} q_\alpha \left\{ -\frac{\partial n_\alpha v_{\alpha x} v_{\alpha y}}{\partial x} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (n_\alpha E_y - \frac{nv_{\alpha x} B_z}{c}) + R_{\alpha y} \right\} \quad (2.32)$$

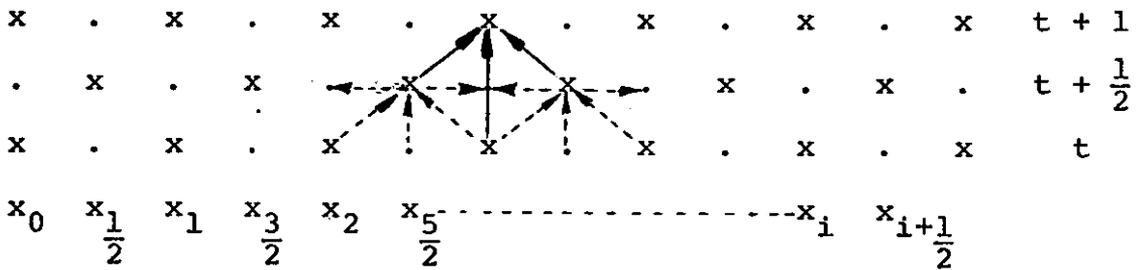
E assim tem-se um sistema com 17 equações e 17 incógnitas a ser resolvido.

CAPÍTULO III - MÉTODO NUMÉRICO

1 - GRANDEZAS DE FLUIDO

As equações de fluido para elétrons, íons e íons refletidos são integradas numericamente usando um esquema numérico de Lax-Wendroff centrado no tempo e no espaço com transporte de fluxo corrigido.

O método de Lax-Wendroff (Potter 1973), que é de 2ª ordem, desenvolve-se em dois estágios no tempo, e com duas redes de pontos espaciais, intercaladas, como na figura abaixo



x pontos da rede onde estão definidas grandezas de fluido  
 . pontos da rede onde estão definidos os campos

Este método contém efeitos dispersivos, e como a implosão do  $\theta$  - pinch contém gradientes fortes nas grandezas de fluido, esta dispersão de diferentes harmônicos pode facilmente levar a oscilações que tornem, por exemplo, a densidade negativa o que é um resultado não físico. Para evitar este efeito indesejável include-se um termo de correção que se desenvolve em dois estágios - (Boris e Book 1973): um estágio de transporte difusivo e um estágio anti-difusivo.

Considere-se a equação:

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \beta(x,t) \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + Dr(x,t) \quad (3.1)$$

que é a equação típica da evolução temporal das grandezas de fluidos como  $n$ ,  $nv$  e  $T$ .

No instante  $t$ , as grandezas  $R$ ,  $Q$  e  $S$  são dadas nos pontos da rede  $x_i = x_0 + i\Delta x$  e as grandezas  $\beta$  e  $Dr$  estão definidas na rede semi-inteira  $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{1}{2}\Delta x$  entrelaçada com a anterior.  $R$  é avançada de meio passo no tempo por:

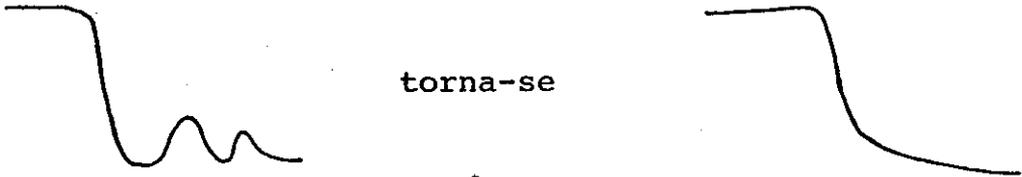
$$R_{i+\frac{1}{2}}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{2} (R_i(t) + R_{i+1}(t)) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ - \frac{(Q_{i+1}(t) - Q_i(t))}{\Delta x} - \beta_{i+\frac{1}{2}}(t) \frac{(S_{i+1}(t) - S_i(t))}{\Delta x} + Dr_{i+\frac{1}{2}}(t) \right\} \quad (3.2)$$

Depois que todas as grandezas tenham sido definidas meio  $\Delta t$  adiante os novos  $Q$ 's e  $S$ 's estão agora na rede semi-inteira,  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , e os  $\beta$ 's e  $Dr$ 's na rede inteira  $x_i$ . Agora  $R$  vai de  $t$  a  $t + \Delta t$  com o lado direito de (3.1) avaliado no instante  $t + \frac{1}{2} \Delta t$ .

$$R_i(t+\Delta t) = R_i(t) + \Delta t \left\{ - \frac{(Q_{i+\frac{1}{2}}(t+\frac{\Delta t}{2}) - Q_{i-\frac{1}{2}}(t+\frac{\Delta t}{2}))}{\Delta x} - \beta_i(t+\frac{\Delta t}{2}) \frac{(S_{i+\frac{1}{2}}(t+\frac{\Delta t}{2}) - S_{i-\frac{1}{2}}(t+\frac{\Delta t}{2}))}{\Delta x} + Dr_i(t+\frac{\Delta t}{2}) \right\} \quad (3.3)$$

Este contudo, que corresponde ao método de Lax-Wendroff usual, não é o valor final de  $R$  sendo acrescentado aqui a correção de fluxo. A idéia básica do transporte de fluxo corrigido é

acrescentar difusão numa quantidade conhecida a fim de tirar os efeitos de dispersão numérica. Assim através da difusão



com

$$\tilde{\tilde{R}}_i(t+\Delta t) = \tilde{R}_i(t+\Delta t) + \frac{1}{8} (R_{i+1}(t) - 2R_i(t) + R_{i-1}(t)) \quad (3.4)$$

A seguir a difusão numérica conhecida, que foi acrescentada, é removida de tal maneira a não permitir que permaneçam os máximos e mínimos causados pela dispersão numérica. Contudo não se impede a formação de máximos e mínimos reais. O estágio anti-difusivo consta de:

define-se

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{\tilde{R}}_{i+1} - \tilde{\tilde{R}}_i \quad (3.5)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \text{SIGN}(\Delta_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \text{MAX} \left\{ 0, \text{MIN} \left[ \text{SIGN}(\Delta_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \Delta_{i-\frac{1}{2}}, \frac{1}{8} |\Delta_{i+\frac{1}{2}}|, \right. \right.$$

$$\left. \left. \text{SIGN}(\Delta_{i+\frac{1}{2}}) \Delta_{i+\frac{3}{2}} \right] \right\} \quad (3.6)$$

Finalmente

$$R_i(t+\Delta t) = \tilde{\tilde{R}}_i(t+\Delta t) - (f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) \quad (3.7)$$

sendo este o valor da grandeza de fluido R no ponto i e no instante t+1.

2 - MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES DOS CAMPOS

Para os campos  $E_x$ ,  $B_z$  e o potencial elétrico tem-se uma equação de 1ª ordem, que é resolvida facilmente por uma integração espacial.

Por exemplo a equação para o campo magnético

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=i,e} q_\alpha n_\alpha v_{\alpha y}(x,t)$$

torna-se

$$B_{zi+\frac{1}{2}} = B_{zi-\frac{1}{2}} - \frac{4\pi}{c} (\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha v_{\alpha y}) \Delta x \quad (3.8)$$

com equações similares para  $E_x$  e  $\phi$ .

A equação para  $E_y$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha=i,e} q_\alpha \left\{ -\frac{\partial n_\alpha v_{\alpha y} v_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[ n_\alpha E_y - \frac{n_\alpha v_{\alpha x} B_z}{c} \right] + R_{\alpha y} \right\}$$

é resolvida considerando-se as seguintes aproximações espacialmente centradas:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \Big|_{x=x_{i+\frac{1}{2}}} \longrightarrow \frac{E_{i-\frac{1}{2}} - 2E_{i+\frac{1}{2}} + E_{i+\frac{3}{2}}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial n v_{y x}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1/2}} \longrightarrow \frac{(n v_{y x})_{i+1} - (n v_{y x})_i}{\Delta x}$$

$$n \Big|_{x=x_{i+1/2}} \longrightarrow \frac{n_i + n_{i+1}}{2}$$

Isto pode ser escrito formalmente como equação matricial:

$$\vec{D} \cdot \vec{E}_y = \begin{pmatrix} D_1 A_1 0 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ B_2 D_2 A_2 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 B_3 D_3 A_3 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \vdots & & & & & \\ 0 B_n D_n & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y3/2} \\ E_{y5/2} \\ \vdots \\ E_{yn+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \vec{Q} \quad (3.9)$$

onde:

$$D_i = -2 - \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha=i,e} q_\alpha^2 \frac{(n_{\alpha i} + n_{\alpha i+1})}{2} (\Delta x)^2$$

$$A_i = B_i = 1$$

$$Q_i = -\frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha=i,e} q_\alpha \left\{ (n_\alpha v_{\alpha y} v_{\alpha x i+1} - n_\alpha v_{\alpha y} v_{\alpha x i}) \Delta x - \frac{(n_\alpha v_{\alpha x i+1} + n_\alpha v_{\alpha x i})}{2} \frac{B_{i+1/2}}{cm_\alpha} (\Delta x)^2 \right\}$$

A equação pode ser agora resolvida escrevendo

$$\bar{E}_y = \bar{D}^{-1} \cdot \bar{Q}$$

isto é, simplesmente invertendo a matriz tridiagonal numericamente.

### 3 - TERMOS DE REFLEXÃO

Na determinação dos coeficientes A, B, C, D, E, A', B', C', D' e E', que dependem de x e de t, e que estarão definidos nos pontos da rede supõe-se o seguinte:

(1) como os íons não são praticamente afetados pelo campo magnético, principalmente na região que está na frente do pistão magnético, e vêm incidir sobre eles uma rampa de potencial com velocidade  $v_p$ , a função distribuição, para os íons, a ser empregada nas integrais é simplesmente uma distribuição Maxwelliana em repouso:

$$f = n(x,t) \left( \frac{m}{2\pi T_i(x,t)} \right)^{\frac{3}{2}} \text{EXP} \left( - \frac{Mv^2}{2T_i(x,t)} \right)$$

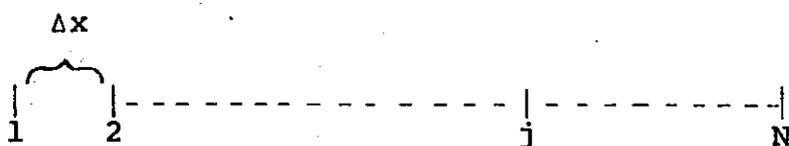
(2) como para o movimento na direção radial considera-se  $m_e \rightarrow 0$ , é uma hipótese razoável supor que localmente  $v_p = v_e(x,t)$ .

(3) é necessário representar  $\delta(x-x')$ , que aparece no termo Q, na rede.

### 4 - REPRESENTAÇÃO DE $\delta(x-x')$ NA REDE

$$\text{Sabe-se que } \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk$$

Mas ao trabalhar com uma rede de pontos



com intervalos de comprimento  $\Delta x$ , sabe-se que o menor comprimento de onda a ser observado é da ordem de  $2\Delta x$ , logo  $k_{\text{máx}}$  é  $\frac{2\pi}{2\Delta x}$  (Birdsall e Langdon 1985).

Consequentemente

$$\delta(x-x') \cong \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{-ik(x-x')} dk = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\text{SEN}\left(\frac{2\pi(x-x')}{2\Delta x}\right)}{(x-x')} \right\}$$

tomando  $(x-x') \rightarrow 0$  (que é a região que interessa, pois em princípio uma função  $\delta$  somente tem valor no ponto zero) tem-se

$$\delta(x-x') = \frac{1}{\Delta x}$$

e portanto numa rede de pontos a representação da função  $\delta$  de Dirac fica

$$\delta(x_i - x_j) = \frac{\delta_{ij}}{\Delta x}$$

Esta representação é usual em vários ramos da física (Batrouti et all 1985).

5 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS DE REFLEXÃO

Usando as aproximações (1), (2) e (3), mencionadas na seção anterior pode-se determinar A, B, C, D e E, lembrando que:

$$A = \int Q(x, v_x, t) f(x, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

$$B = \int Q f v_x d\vec{v}$$

$$C = \int Q f v_y d\vec{v}$$

$$D = m_i \int Q f (\vec{v} - \vec{v})_x (\vec{v} - \vec{v})_x d\vec{v}$$

$$E = m_i \int Q f (\vec{v} - \vec{v})_y (\vec{v} - \vec{v})_y d\vec{v}$$

Considerando-se que

$$ERF(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ter-se-ã para os coeficientes no ponto da rede  $x_j$ , no instante  $t$ :

$$A = -\frac{1}{\Delta x} n_i(x_j, t) \left( \frac{M_i}{2\pi T_i(x_j, t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{T_i(x_j, t)}{M_i} \left\{ \text{EXP} \left( -\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)} v_{\text{ex}}^2(x_j, t) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \text{EXP} \left( -\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)} \left( v_{\text{ex}}(x_j, t) + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}} \right)^2 \right) \right\} + v_{\text{ex}}(x_j, t) \sqrt{\frac{2T_i(x_j, t)}{M_i}} \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \text{ERF} \left( \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} \left( v_{\text{ex}}(x_j, t) + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}} \right) \right) - \text{ERF} \left( \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} v_{\text{ex}}(x_j, t) \right) \right] \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 B = & -\frac{1}{\Delta x} n_i(x_j, t) \left( \frac{M_i}{2\pi T_i(x_j, t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left( \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[ \operatorname{ERF} \left( \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} v_{\text{ex}}(x_j, t) \right) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}} \right) - \operatorname{ERF} \left( \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} v_{\text{ex}}(x_j, t) \right) \right] + \left[ \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} v_{\text{ex}}(x_j, t) \right] \right. \\
 & \cdot \operatorname{EXP} \left( -\frac{2M_i v_{\text{ex}}^2(x_j, t)}{T_i(x_j, t)} \right) - \left[ \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} v_{\text{ex}}(x_j, t) + \frac{T_i(x_j, t)}{M_i} \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}} \right] \\
 & \cdot \operatorname{EXP} \left( -\frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} (v_{\text{ex}}(x_j, t) + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}})^2 \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

C = 0

$$D = -\frac{1}{\Delta x} M_i n_i \left( \frac{M_i}{2\pi T_i(x_j, t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} \right)^2 y^2 + \left( -\frac{1}{2} \right) v_{\text{ex}}(x_j, t) \left( \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} \right)^{\frac{3}{2}} y \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} \right)^2 \right] \operatorname{EXP}(-y^2) \right\} \left[ \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} (v_{\text{ex}}(x_j, t) + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}}) \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} v_{\text{ex}}(x_j, t) \right] \right.$$

$$\left. \left. v_{\text{ex}}(x_j, t) \left( \frac{2T_i(x_j, t)}{M_i} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \operatorname{ERF} \left( \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} (v_{\text{ex}}(x_j, t) + \sqrt{\frac{2e\Delta\phi(x_j, t)}{M_i}}) \right) - \operatorname{ERF} \left( \sqrt{\frac{M_i}{2T_i(x_j, t)}} v_{\text{ex}}(x_j, t) \right) \right] \right\}$$

$$E = A T_{iy}(x_j, t)$$

estes são os 5 coeficientes que devem ser acrescentados as equações para os íons.

E para os íons refletidos vale:

$$A' = - A$$

$$B' = 2A'v_{ex} + B$$

$$D' = - D - \frac{mB^2}{A'}$$

$$E' = - E$$

## 6 - ESTABILIDADE DO CÓDIGO NUMÉRICO

A aproximação do sistema de equações diferenciais por meio de equações de diferenças finitas, pode fazer com que soluções que são analiticamente estáveis, tornem-se numericamente instáveis. A taxa de crescimento, para essas instabilidades numéricas, depende da escala de tempo analítico, comparado com o  $\Delta t$  escolhido. Soluções com a escala de tempo mais rápida, se instáveis, são as que causam a maior restrição ao valor de  $\Delta t$ .

O algoritmo de Lax-Wendroff foi analisado, quando aplicado ao  $\theta$  - pinch, para duas situações:

- 1) modelo de dois fluidos resolvendo a equação de Poisson;
- 2) modelo de dois fluidos supondo a condição de quaseneutralidade.

## 7 - ESTABILIDADE PARA A SITUAÇÃO SEM QUASENEUTRALIDADE

Nesta situação a escala de tempo mais rápida, para as equações deste modelo, é a oscilação dos elétrons do plasma.

Para analisar a estabilidade considera-se uma ligeira perturbação nas equações de dois fluidos para o  $\theta$  - pinch, tal que  $n_i = n_0$ ,  $n_e = n_0 + \delta n$ ,  $m_i \rightarrow \infty$ ,  $E_x = \delta E$ ,  $v_{ex} = \delta v$ , e  $v_{ix} = E_y = B_z = v_{iy} = v_{ey} = 0$ . O conjunto de equações de fluido, para elétrons e íons, reduz-se nesta situação a:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = - \frac{e}{m_e} \delta E$$

$$\frac{\partial \delta E}{\partial x} = - 4\pi e \delta n$$

Supondo solução da forma  $\text{EXP}(i(kx - \omega t))$ , para as grandezas perturbadas, tem-se que

$$\omega = \pm \omega_{pe} = \pm \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}$$

portanto, como  $\omega$  é real as oscilações são estáveis, e não há alteração na amplitude das oscilações.

Resolvendo o sistema numericamente, usando o algoritmo de Lax-Wendroff e impondo variações da forma  $\text{EXP}(ikx)$ , chega-se a equação:

$$\delta n_j^{i+1} = \delta n_j^i - n_o \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta v_{j+1/2}^{i+1/2} - \delta v_{j-1/2}^{i+1/2})$$

$$\delta v_j^{i+1} = \delta v_j^i - \frac{e}{m_e} \Delta t \delta E_j^{i+1/2}$$

$$\delta E_j^{i+1/2} = - \frac{4\pi e \delta n_{j-1/2}^{i+1/2}}{\frac{1}{2}(1 - \text{EXP}(-ikx))}$$

Pode-se então escrever:

$$\begin{vmatrix} \delta n_j^{i+1} \\ \delta v_j^{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \\ \frac{\epsilon^2 \Delta x \text{COS}(\frac{1}{2}k\Delta x)}{n_o \Delta t \text{SEN}(\frac{1}{2}k\Delta x)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{in_o \Delta t}{\Delta x} \text{SEN}(k\Delta x) \\ 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta n_j^i \\ \delta v_j^i \end{vmatrix}$$

onde  $\epsilon = \omega_{pe} \Delta t$ .

Os autovalores desta matriz dão o crescimento da amplitude  $\delta n_j^{i+1} = \lambda \delta n_j^i$ , por passo no tempo, com

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \pm i \epsilon \sqrt{\text{COS}(\frac{1}{2}k\Delta x)}$$

Consequentemente

$$|\lambda|_k = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \epsilon^4 - \epsilon^2 \text{SEN}^2(\frac{1}{2}k\Delta x)}$$

e para  $k\Delta x \ll 1$ , tem-se

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \epsilon^4 - \frac{1}{4} \epsilon^2 (k\Delta x)^2}$$

A oscilação é estável somente quando  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta x \rightarrow 0$ . Para longos comprimentos de onda,  $k\Delta x \rightarrow 0$ , a oscilação é instável, crescendo com

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \epsilon^4}.$$

Para resolver o problema da estabilidade faz-se

$$\epsilon = \omega_{pe} \Delta t \ll 1$$

e o efeito é minimizado.

### 8 - ESTABILIDADE PARA A SITUAÇÃO DE QUASENEUTRALIDADE

Ao supor a quaseneutralidade o campo elétrico passa a ser determinado a partir da equação de movimento para os elétrons, supondo  $m_e \rightarrow 0$ .

$$E_x = - \frac{v_{ey} B_z}{c}$$

A equação de movimento na direção radial, para os íons fica:

$$M_i \frac{\partial v_x}{\partial t} = e E_x$$

A equação na direção tangencial para os elétrons é:

$$m_e \frac{\partial v_{ey}}{\partial t} = \frac{e v_x B_z}{c}$$

e resolvendo-se numericamente pelo algoritmo de Lax-Wendroff chega-se a:

$$\begin{vmatrix} v_{xi}^{t+1} \\ v_{yi}^{t+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{\omega_{LH}\Delta t}{2}\right)^2 (1 + \text{COS}k\Delta x) & -\left(\frac{\Omega_e \Delta t}{2}\right) (1 + \text{COS}k\Delta x) \\ \left(\frac{\Omega_e \Delta t}{2}\right) (1 + \text{COS}k\Delta x) & 1 - \left(\frac{\omega_{LH}\Delta t}{2}\right)^2 (1 + \text{COS}k\Delta x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{xi}^t \\ v_{yi}^t \end{vmatrix}$$

onde  $\omega_{LH} = \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$ ,  $v_x$  é a velocidade radial comum a elétrons e íons e  $v_y$  é a velocidade tangencial dos elétrons.

Determinando-se os autovalores, encontra-se para  $k\Delta x \ll 1$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{LH}\Delta t}{4}\right)^4}$$

nesta situação, para estabilidade  $\omega_{LH}\Delta t \ll 1$ .

Como nos  $\theta$  - pinches estudados  $\omega_{LH} \ll \omega_{pe}$ , é muito conveniente usar o modelo com condição de quaseneutralidade, pois o tempo computacional necessário para resolver o problema é menor.

## CAPÍTULO IV

### APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

#### 1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos II e III foram apresentados o modelo físico para os íons refletidos, o sistema de equações e o método numérico a ser utilizado em sua resolução. Baseado nisto foi elaborado um programa de computador, em FORTRAN, para simular o  $\theta$  - pinch.

O programa foi executado no CYBER 170/750 (CDC) que se encontra instalado no IEAV - CTA em São José dos Campos. A UCP deste computador tem velocidade de 10 mips, 262 k palavras de 60 bits de memória (sendo que cada usuário pode utilizar no máximo metade deste total de palavras) proporcionando 15 dígitos em precisão simples. O programa desenvolvido necessita para uma execução típica, com rede de 50 pontos e tempo de subida de 270 ns, 27.968 palavras (UCP) e tempo de execução da ordem de 14 min e 30 s (UCP) com compilação normal e cerca de 11 min e 30 s (UCP) com compilação otimizada (OPT = 2).

O programa foi executado para uma série de parâmetros diferentes, basicamente referentes ao  $\theta$  - pinch rápido de Maryland e ao Tupã - I ( $\theta$  - pinch da UNICAMP). Os resultados obtidos serão agora comentados e analisados, sendo que nesta análise serão de grande valia algumas relações referentes a escalas temporais e espaciais apresentadas no apêndice A.

#### 2 - $\theta$ - pinch de Maryland

O primeiro conjunto de resultados obtidos refere-se ao -

$\theta$  - pinch rápido e de baixa densidade da Universidade de Maryland (Davis et al 1971; Silva et al 1971; Dove 1971) e que está na origem dos estudos que resultaram neste trabalho, pois uma série de resultados observados neste  $\theta$  - pinch, e não explicados pelo modelo de dois fluidos (Liewer 1972), é que levaram ao desenvolvimento deste modelo para os íons refletidos, a ser acrescentado aos dois fluidos.

Para os estudos numéricos deste  $\theta$  - pinch considera-se um plasma de hidrogênio que inicialmente tem as seguintes características:

- raio da máquina 22,5 cm;
- densidade  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , constante por todo volume do cilindro;
- completamente ionizado com temperatura inicial  $T_e = T_i = 1 \text{ e v}$ ;
- campo principal máximo de 2000 G com 273 ns de tempo de subida;
- com ou sem campo de polarização de 200 G, paralelo e antiparalelo.

Tais parâmetros foram utilizados para simular o  $\theta$  - pinch de Maryland e comparar os resultados obtidos com resultados experimentais, no caso de diferentes orientações do campo de polarização. Além disso, foram verificadas certas leis de escala, para os íons refletidos, que são obedecidas na implosão do  $\theta$  - pinch.

Em primeiro lugar comparam-se os resultados da simulação com resultados experimentais, para diversas orientações do campo de

polarização. Foram utilizados, na simulação, dois fluidos nas seguintes versões:

- modelo de dois fluidos sem resistividade anômala e sem íons refletidos, que para as finalidades destas discussões será chamado de modelo snow-plow;
- modelo de dois fluidos com resistividade anômala e sem os íons refletidos que será chamado simplesmente de modelo de dois fluidos;
- modelo de dois fluidos com resistividade anômala e com os íons refletidos, que foi desenvolvido neste trabalho, será chamado de modelo de três fluidos.

Na tabela 1, apresentam-se as características mais marcantes deste primeiro caso, que serão detalhadas mais adiante

TABELA 1

| POLARIZAÇÃO<br>RESULTADOS | + 200 G   | OG  | - 200 G   |
|---------------------------|---|---|---|
| EXPERIMENTO               | sem patamar de íons refletidos<br>$T_i \sim 500\text{ev}$ | patamar não acentuado<br>$T_i \sim \text{keV}$    | com patamar de íons refletidos<br>$T_i \sim \text{keV}$ |
| SNOW-PLOW                 | picos altos de densidade<br>$T_i \sim \text{lev}$         | picos altos de densidade<br>$T_i \sim \text{lev}$ | picos altos de densidade<br>$T_i \sim \text{lev}$       |
| 2 FLUIDOS                 | $T_i \sim 300\text{ev}$                                   | $T_i \sim 300\text{ev}$                           | $T_i \sim 300\text{ev}$                                 |
| 3 FLUIDOS                 | sem patamar<br>$T_i \sim 300\text{ev}$                    | reflexão<br>$T_i \sim \text{keV}$                 | com patamar<br>$T_i \sim \text{keV}$                    |

A seguir aplicou-se o modelo de 3 fluidos na verificação de leis de escala da quantidade de íons refletidos com a variação de alguns parâmetros como temperatura, densidade e o tempo de subida, que podem ser explicados fisicamente por um modelo simples que será desenvolvido, posteriormente, e que são verificadas, também, pelos modelos híbridos (Liewer 1976). Nas secções seguintes - passa-se a detalhar os resultados obtidos para estas simulações. - Os gráficos (perfis de densidade e outras grandezas), apresentados neste trabalho, foram obtidos através do conjunto de rotinas PPPLIB (Plasma Physics Plotting Library), que provavelmente será a rotina padrão para geração de gráficos, na área de Plasmas, no Brasil.

### 3 - DIFERENTES CAMPOS DE POLARIZAÇÃO

Foram estudadas estas três configurações:

polarização paralela de + 200 G, sem polarização e polarização anti-paralela de - 200 G;

utilizando-se, como já foi mencionado, os três modelos:

snow-plow, dois fluidos e três fluidos.

Os resultados obtidos estão apresentados nas figuras de 1 a 10 e serão analisados detalhadamente.

Inicia-se com o caso de polarização anti-paralela cujo valor é - 200 G. Na figura 1 apresentam-se perfis de densidade e temperatura para dois instantes de tempo diferentes, as figuras 1a e 1b correspondem a 170 ns e as figuras 1c e 1d correspondem a 204 ns, obtidos com o modelo snow-plow. Com este primeiro modelo observa-se que os picos de densidade são mais estreitos e mais elevados, por exemplo, em  $x = 5$  cm (figura 1c) tem-se um máximo de  $6,5 \cdot 10^{12}$   $\text{cm}^{-3}$ , com uma largura do pico de densidade de aproximadamente 3,75 cm e as temperaturas obtidas são muito baixas da ordem de 2,5 ev, apesar de seu máximo localizar-se onde há um máximo de densidade.

Nota-se também neste caso, que em razão do pistão magnético carregar mais partículas a velocidade do mesmo, obtida com este modelo, é a menor dentre os três modelos analisados nesta discussão. A seguir na figura 2 estão os perfis de densidade e temperatura, no instante 170 ns, obtidos com os mesmos parâmetros anteriores, somente que, agora, o modelo usado foi o de dois fluidos. Nota-se, agora, que o perfil é um pouco mais largo, cerca de 4,5 cm, enquanto o pico de densidade vale  $5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  no ponto  $x = 3,75 \text{ cm}$ , portanto menor do que no caso anterior e mais próximo do centro, além disso a temperatura vale cerca de 500 eV na região entre 3,75 e 5 cm, valor abaixo do verificado experimentalmente que é da ordem de alguns keV. Finalmente, considera-se para os mesmos parâmetros o modelo de três fluidos, cujos resultados encontram-se apresentados nas figuras 3 e 4. Da figura 4, que corresponde a perfis de densidade e temperatura, com os perfis 4a e 4b correspondentes ao instante 170 ns e os perfis 4c e 4d correspondentes a 187 ns, verifica-se que os perfis são bem mais largos para a mesma ordem de grandeza do pico de densidade, por exemplo, na figura 4c a densidade máxima é de  $6 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , estando localizada em  $x = 2,5 \text{ cm}$ , sendo a largura do pico de 6 cm, e neste instante as partículas refletidas já chegaram ao centro, a densidade dos íons, ali, já é de  $2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ .

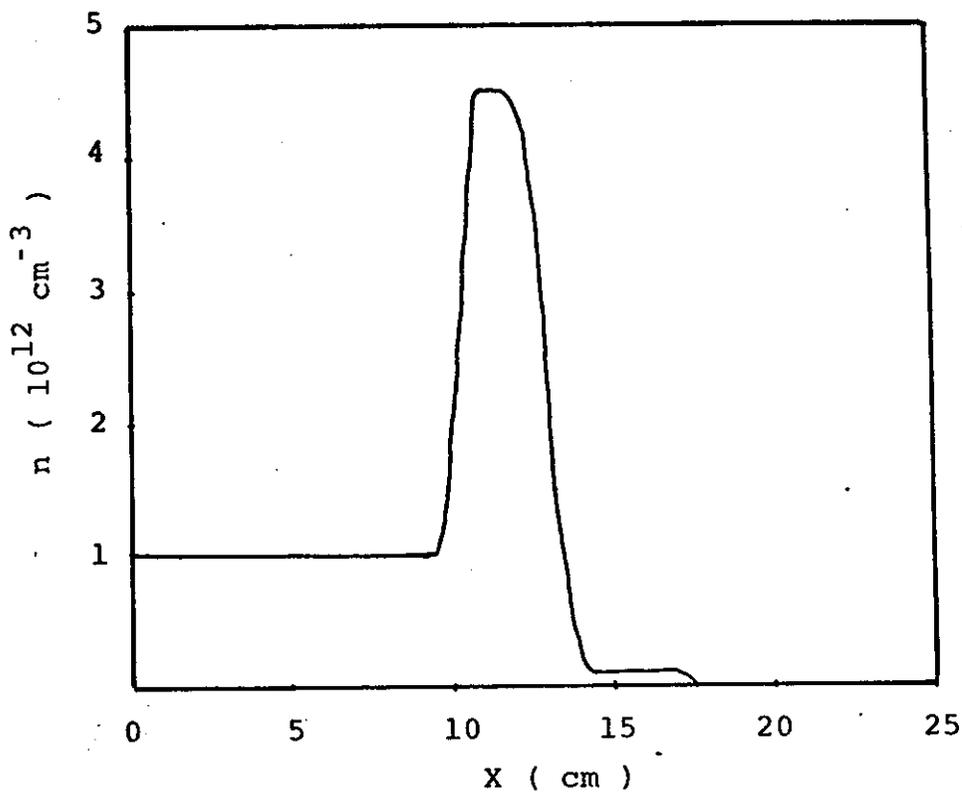
Os perfis de densidade das figuras 4a e 4c, correspondentes a este modelo de três fluidos, são os que mais se aproximam do perfil experimental apresentando um patamar característico da presença de íons refletidos na frente do pico de densidade, que é justamente, o que torna menos abrupto o perfil da densidade para este caso. A temperatura, figura 4d, chega a quase 9keV na região em torno de  $x = 2 \text{ cm}$ , que é um valor mais próximo à temperatura obtida experimentalmente para este caso de polarização anti-paralela. A velocidade das partículas em direção ao centro é semelhante àque

la obtida com o modelo de dois fluidos, sendo este resultado razoável uma vez que o modelo de dois fluidos apresenta bons resultados no que tange à velocidade do pistão magnético. Também para o modelo de três fluidos, neste caso, tem-se dois perfis do potencial elétrico, figura 3, correspondentes aos instantes 136 ns e 153 ns, respectivamente, mostrando uma queda abrupta do potencial na região do pistão e oscilações não físicas, atrás do pistão, onde a densidade é muito baixa.

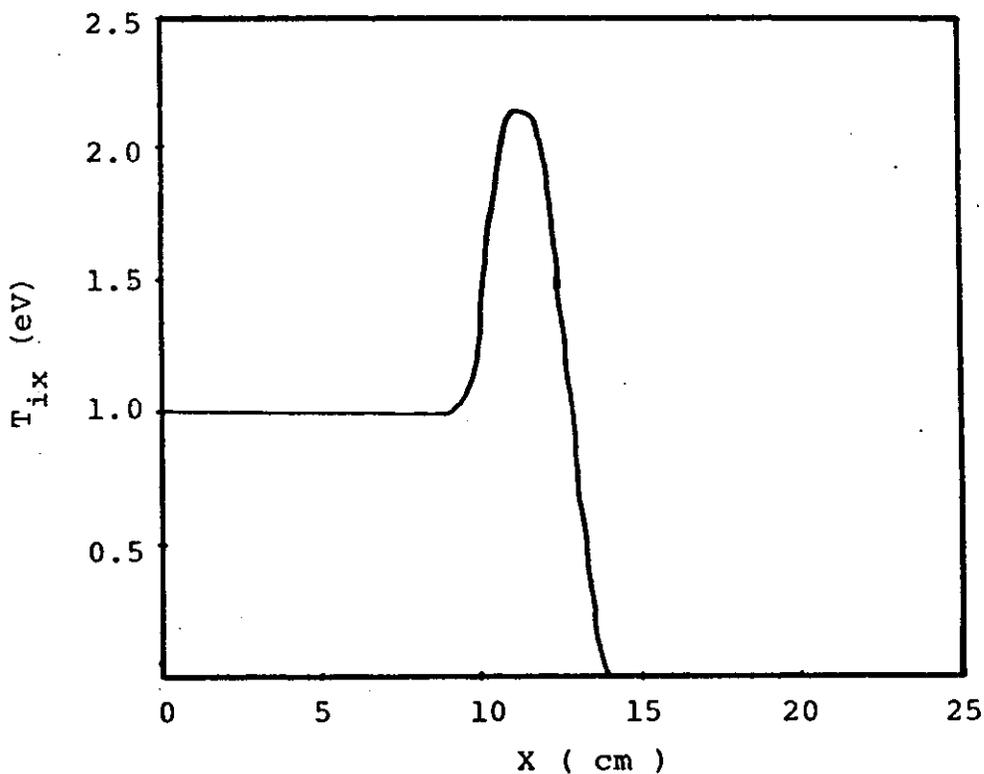
O segundo caso abordado foi a situação sem campo de polarização e, novamente, aplicaram-se os três modelos à situação. Considera-se primeiramente o modelo snow-plow. Verifica-se da figura 5, correspondente a 170 ns, que a densidade apresenta um máximo de  $6 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  em  $x = 5 \text{ cm}$  com uma largura de 5,5 cm e a temperatura não ultrapassa 3eV. A simulação com o modelo de dois fluidos, figura 6, correspondente ao instante 136 ns, apresenta um máximo com  $4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  no ponto  $x = 7,5 \text{ cm}$  com uma largura de 5 cm, e a temperatura chega a 300 eV, novamente neste caso o pistão caminha mais rápido que o anterior e é um pouco menos abrupto. Já o modelo de três fluidos para este caso, figura 7, com as figuras 7a e 7b correspondentes ao instante 153 ns e as figuras 7c e 7d correspondentes ao instante 170 ns, apresenta perfis de densidade com patamares característicos de íons refletidos, por exemplo, com um máximo de  $7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  em  $x = 2,5 \text{ cm}$ , há íons refletidos na origem, pois ali a densidade é  $4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , e sua largura é de 5 cm. A temperatura chega a 8keV na origem.

O terceiro caso abordado corresponde a um campo de polarização paralela de + 200 G. Os resultados com o modelo snow-plow encontram-se na figura 8, correspondente ao instante 153 ns, o máximo do perfil da densidade vale  $5,2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e encontra-se próximo à região em torno de  $x = 4 \text{ cm}$  com uma largura de 5,6 cm, sendo que -

FIGURA 1



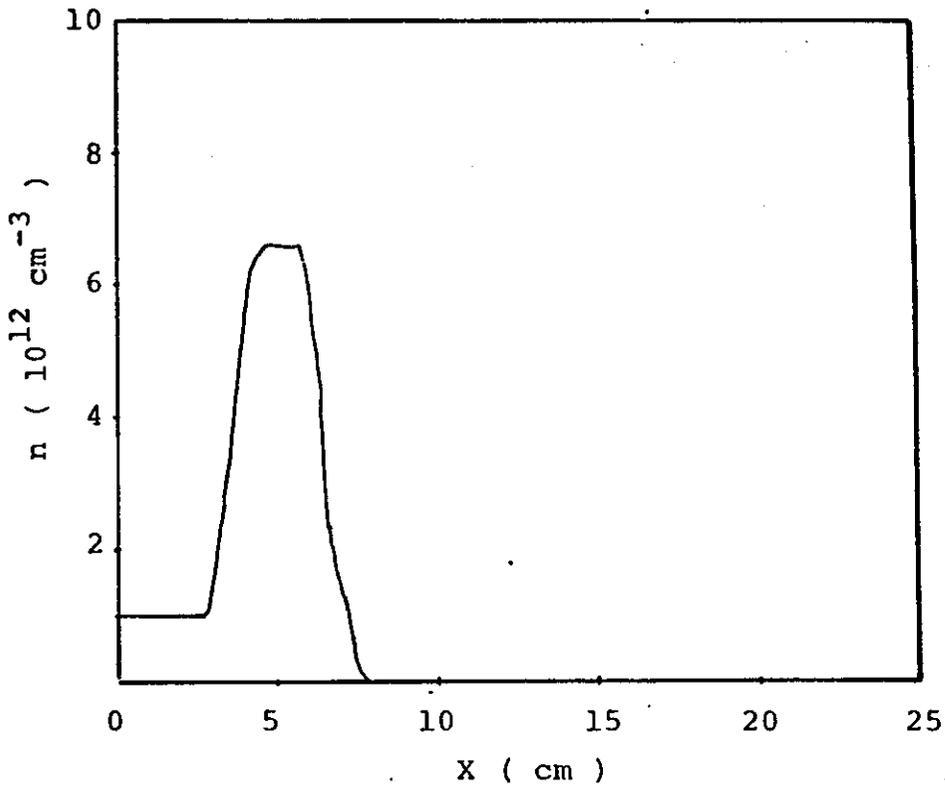
1 a



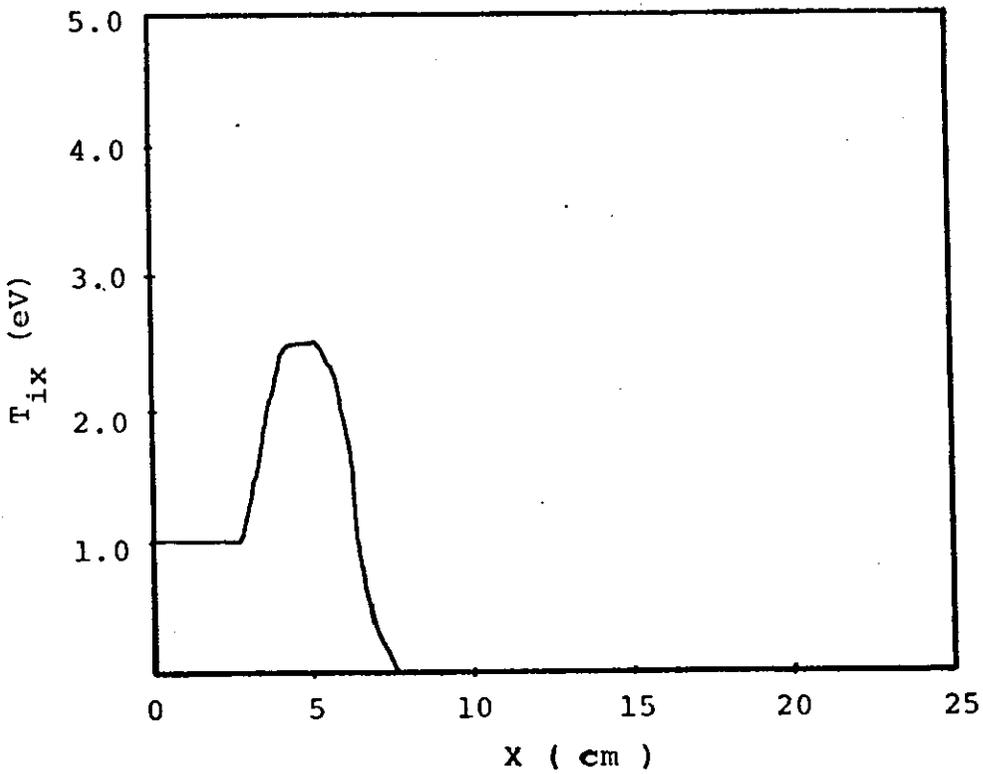
1 b

Modelo snow-plow para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e campo de polarização de  $-200\text{G}$ . Referem-se a  $170 \text{ ns}$ .

FIGURA 1



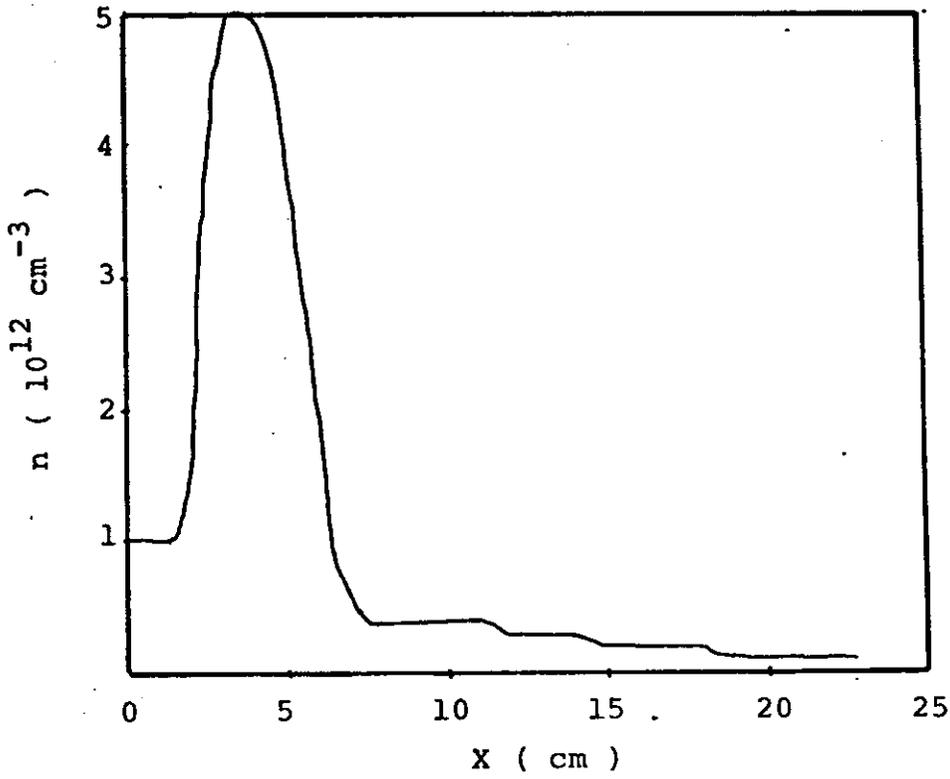
1 c



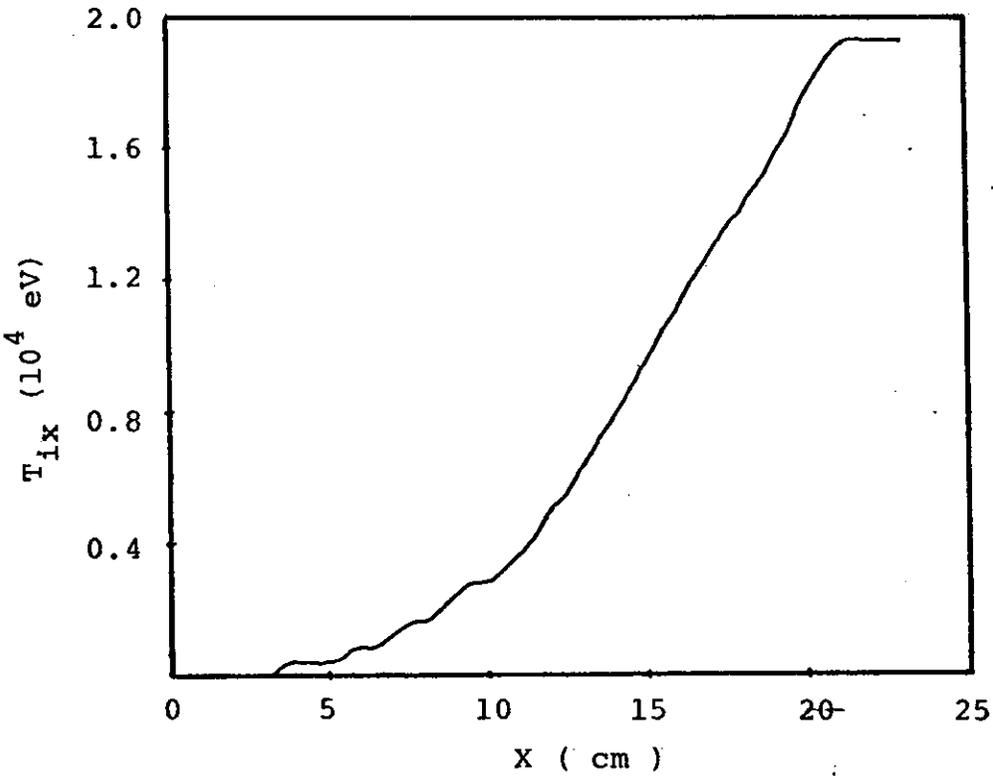
1 d

As figuras acima referem-se a 204 ns.

FIGURA 2



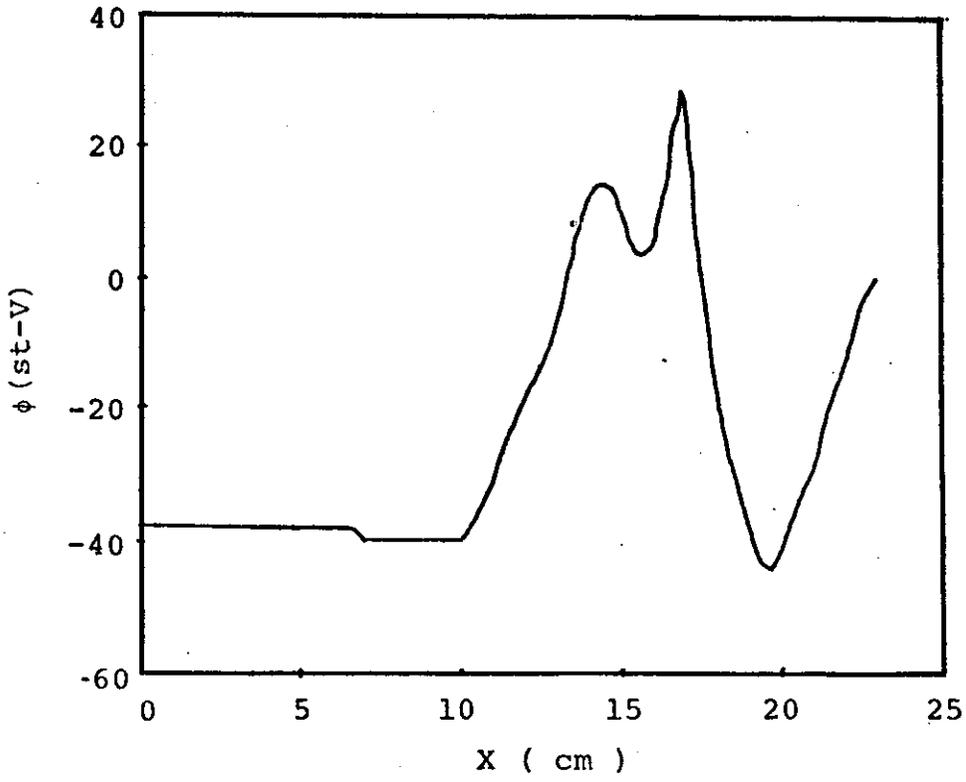
2 a



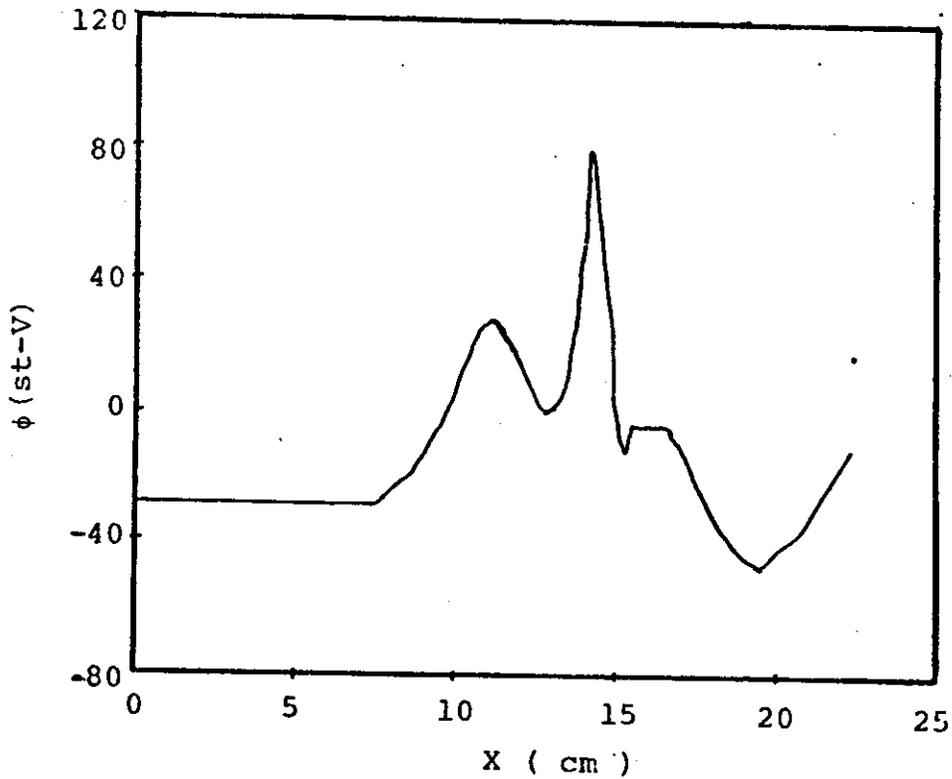
2 b

Modelo de dois fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e campo de polarização de  $-200\text{G}$ . Referem-se a  $170 \text{ ns}$ .

FIGURA 3



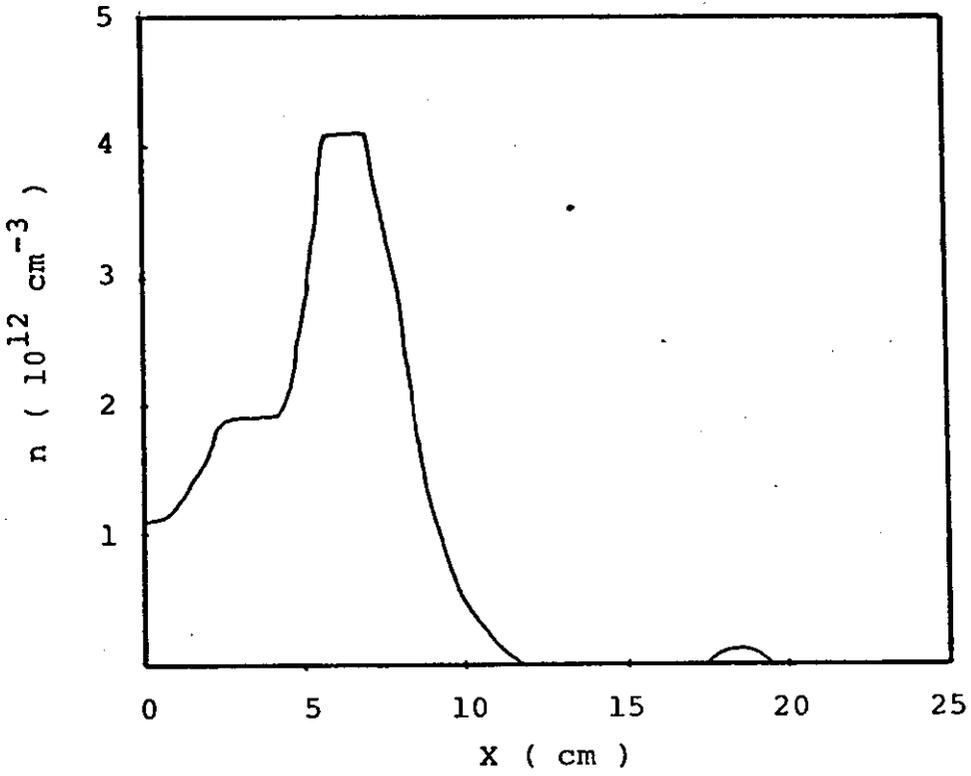
3 a



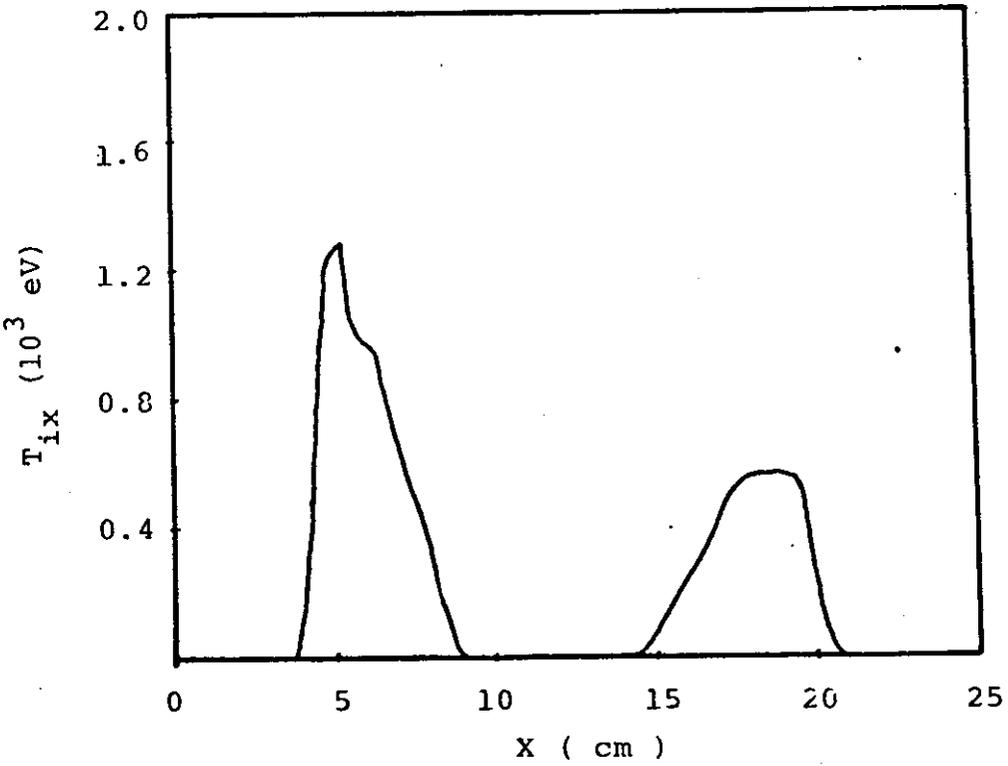
3 b

Modelo de três fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e campo de polarização de -200G. Referem-se a 136 e 153 ns, respectivamente.

FIGURA 4



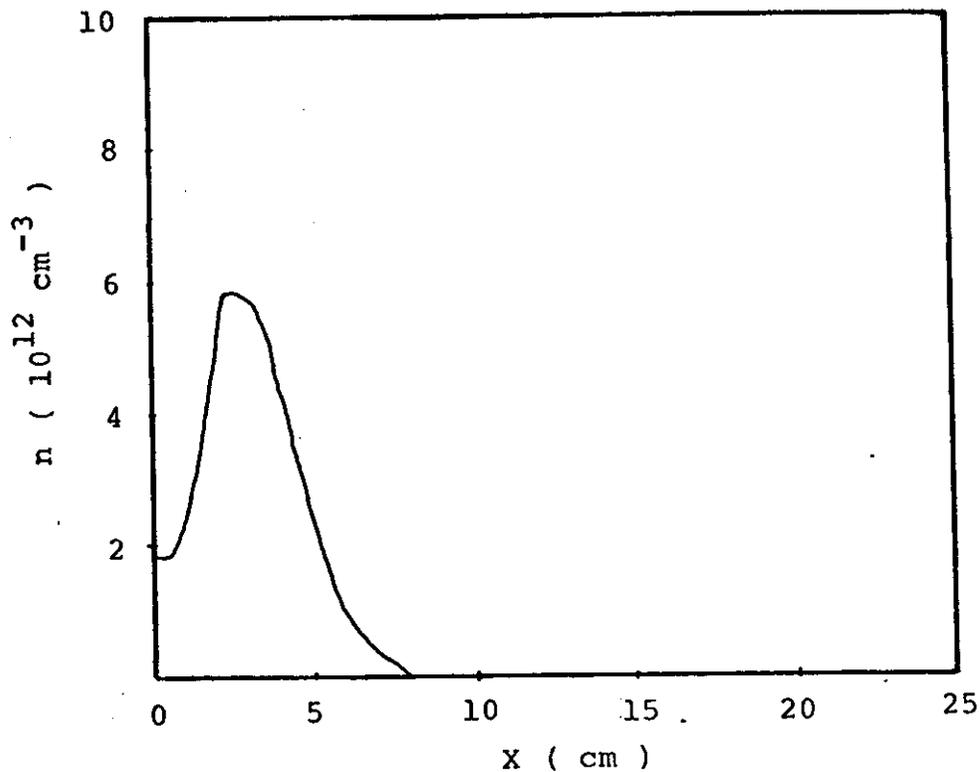
4 a



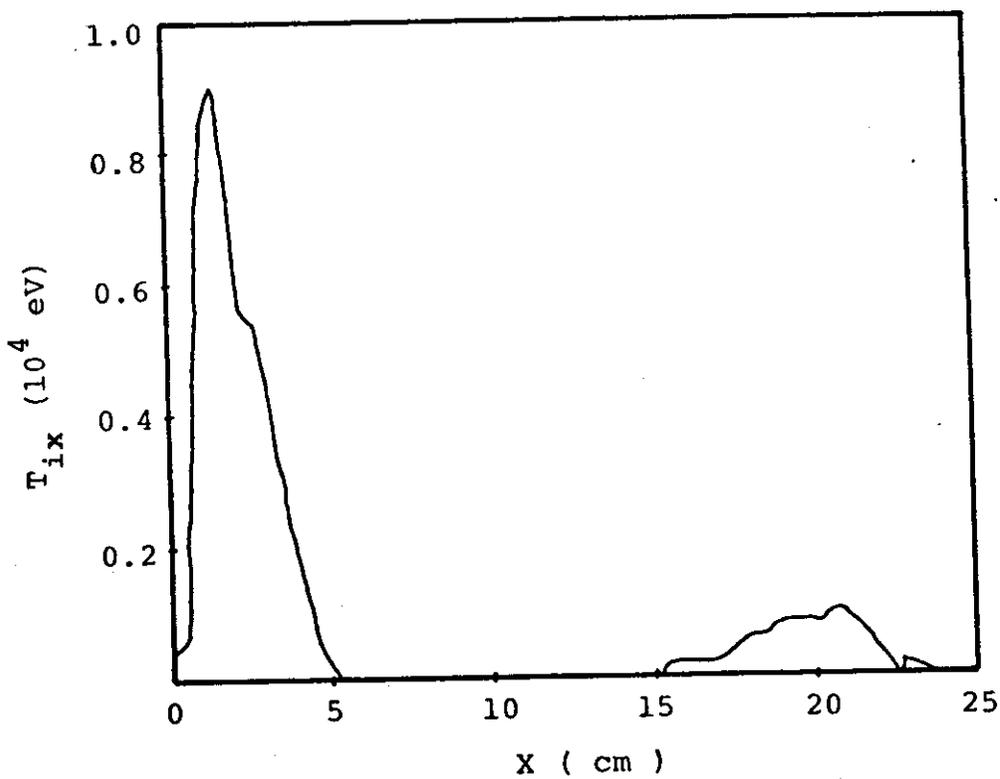
4 b

Modelo de três fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e campo de polarização de  $-200\text{G}$ . Referem-se a  $170 \text{ ns}$ .

FIGURA 4



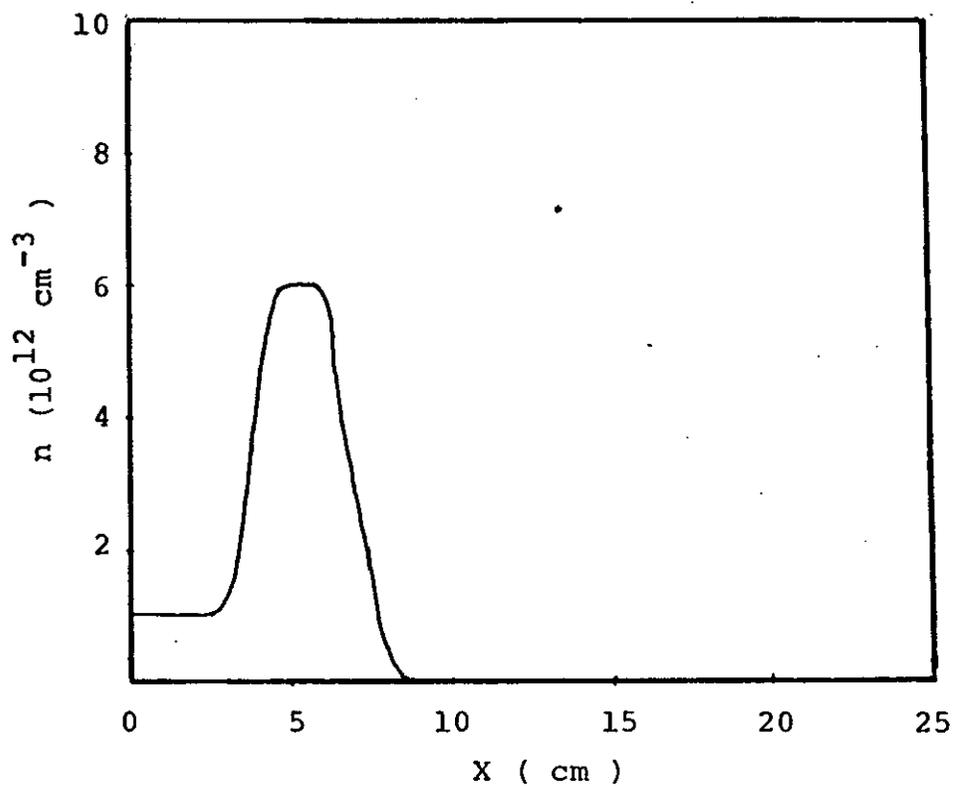
4 c



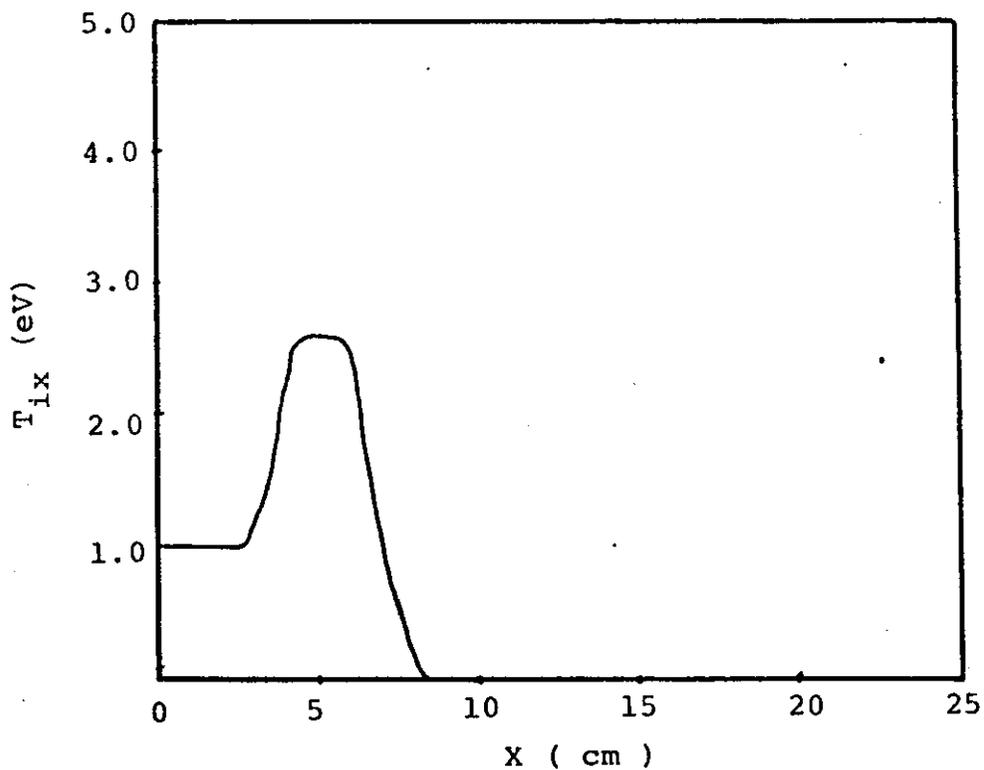
4 d

As figuras acima referem-se a 187 ns.

FIGURA 5



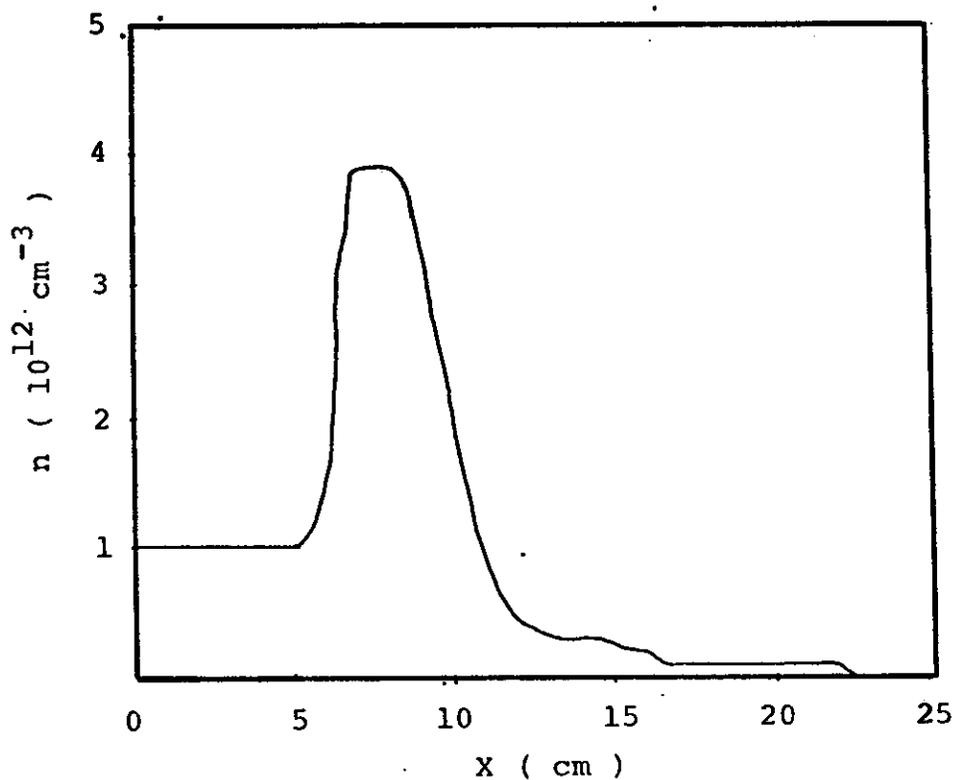
5 a



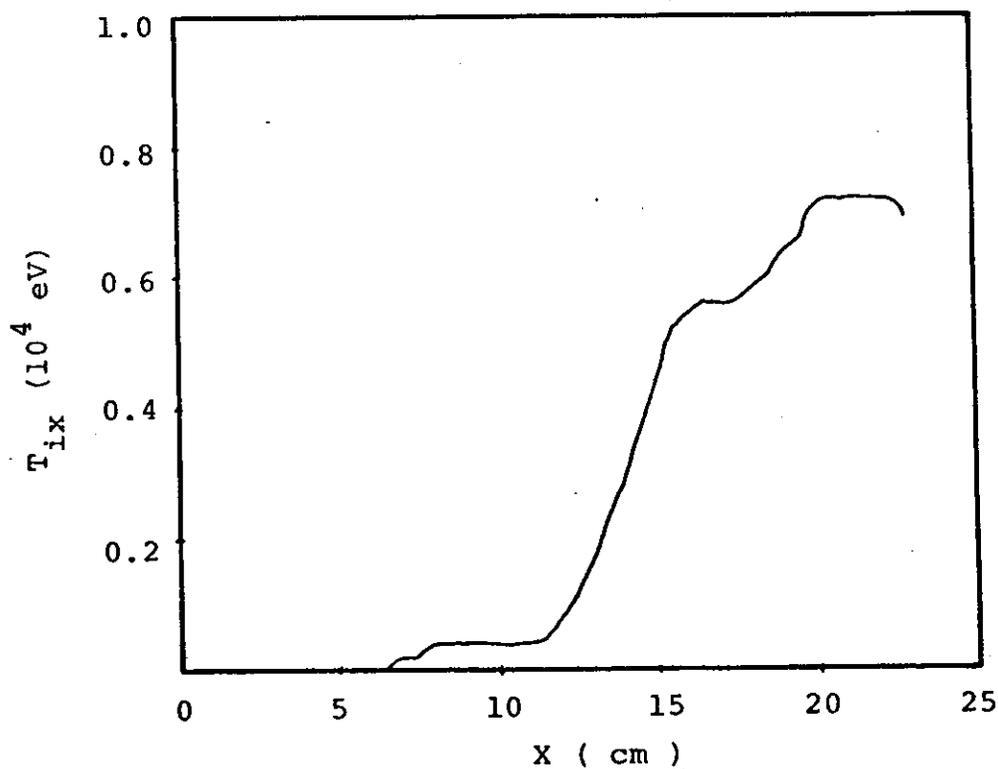
5 b

Modelo snow-plow para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e sem campo de polarização. Referem-se a 170 ns.

FIGURA 6



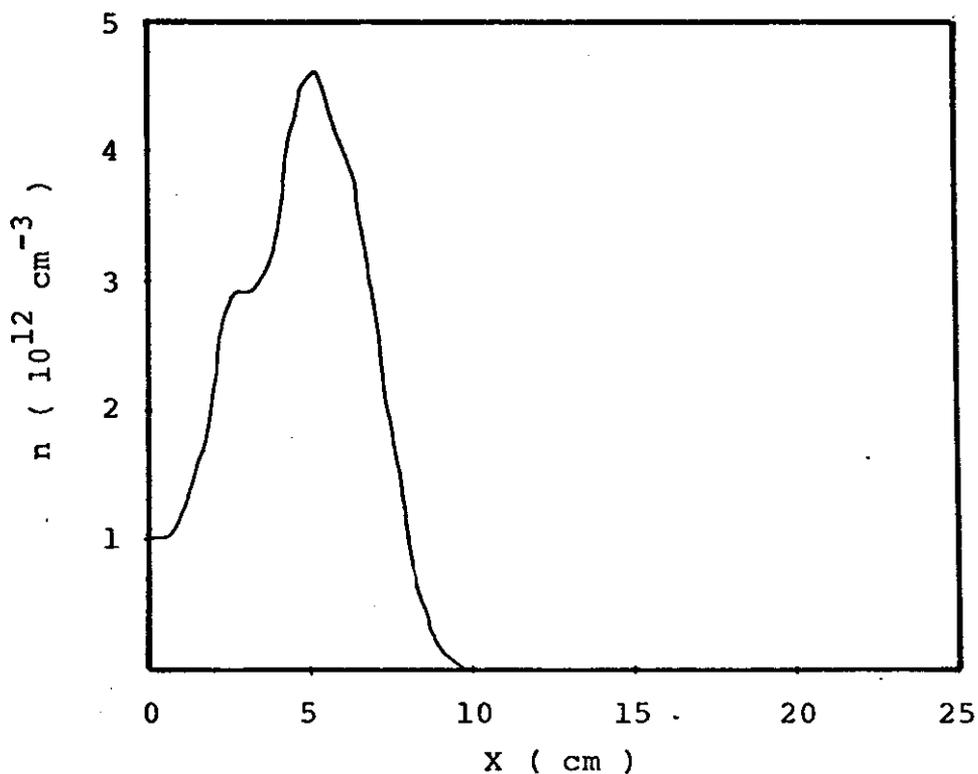
6 a



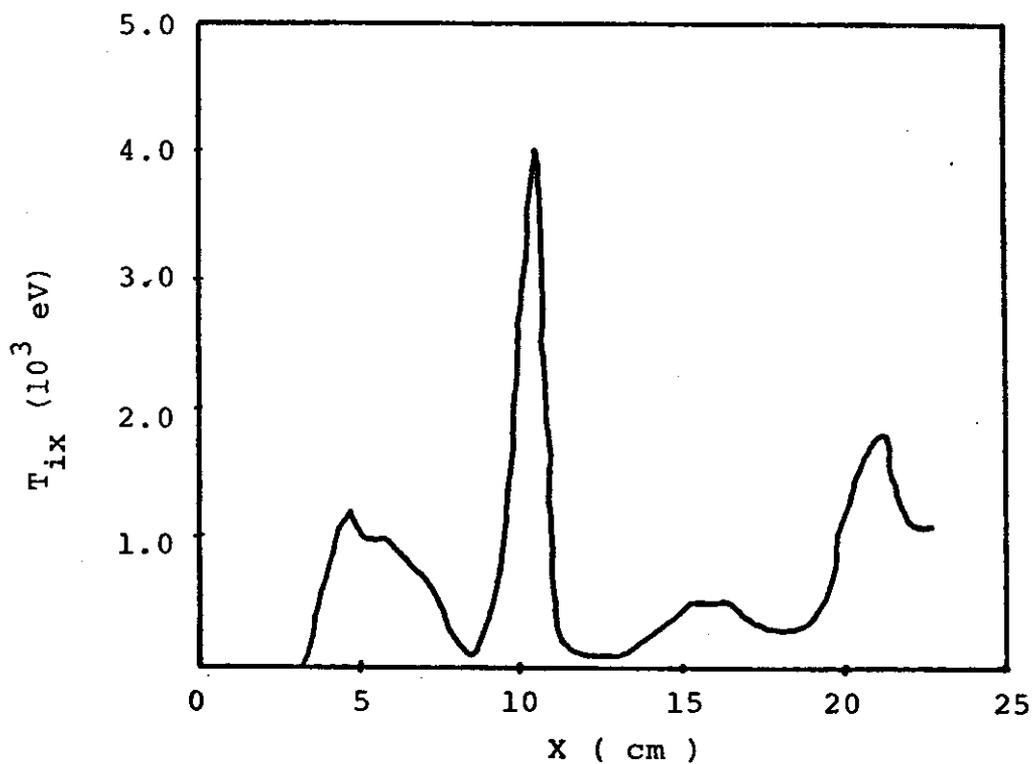
6 b

Modelo de dois fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e sem campo de polarização. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 7



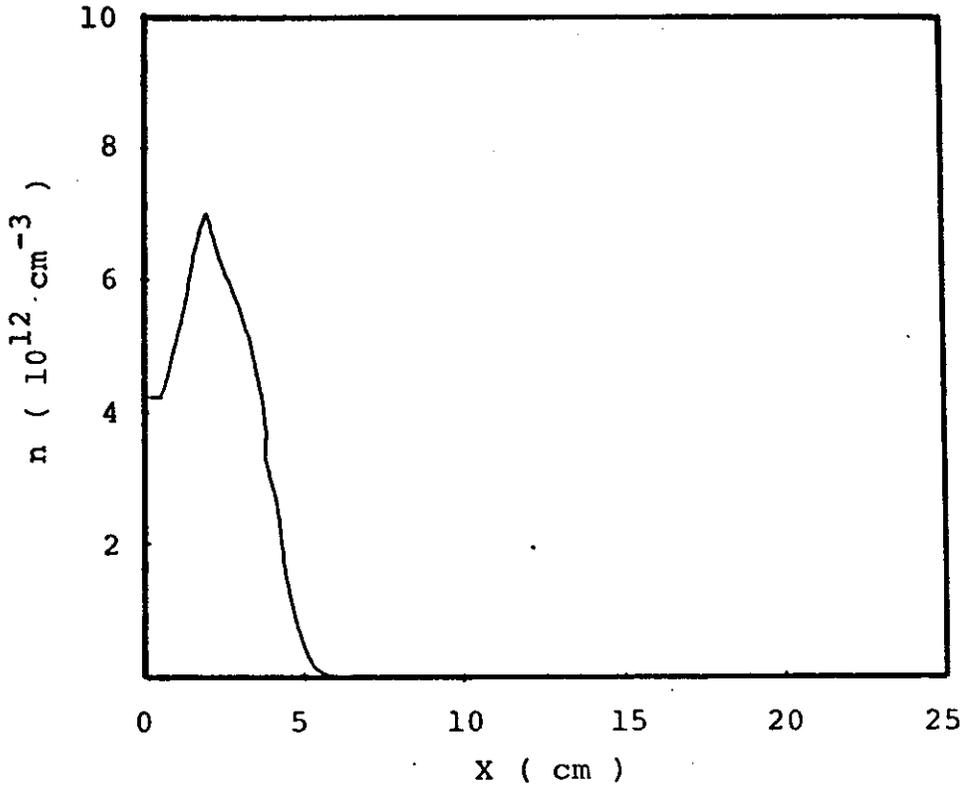
7 a



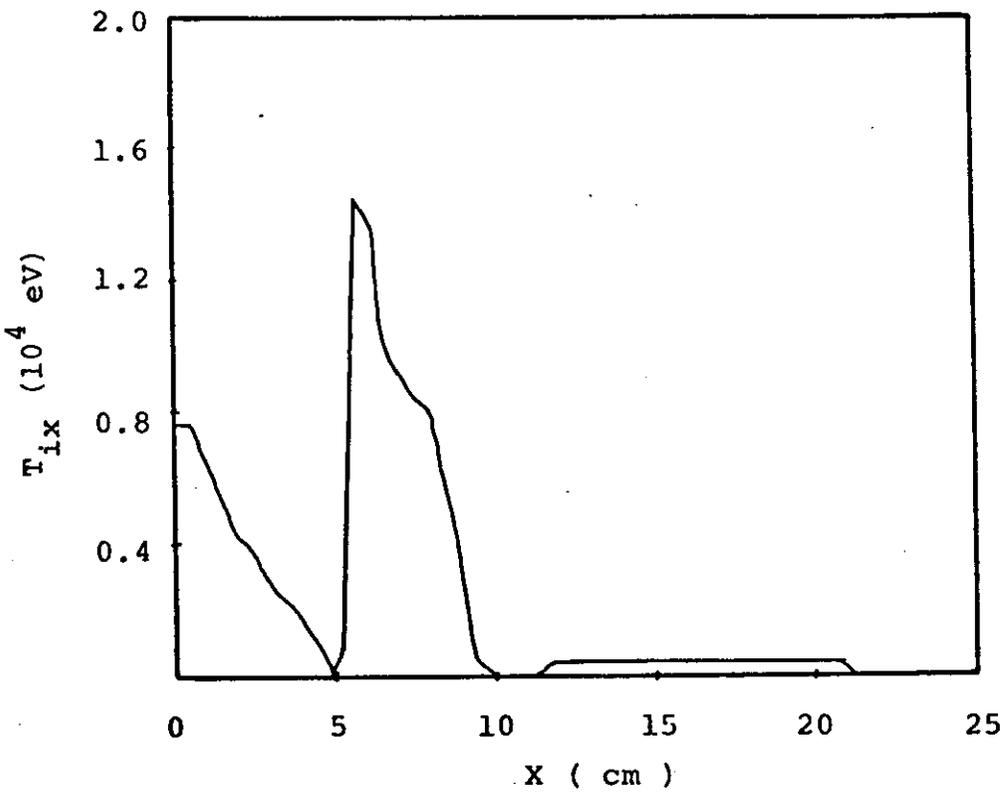
7 b

Modelo de três fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e sem campo de polarização. Referem-se a 153 ns.

FIGURA 7



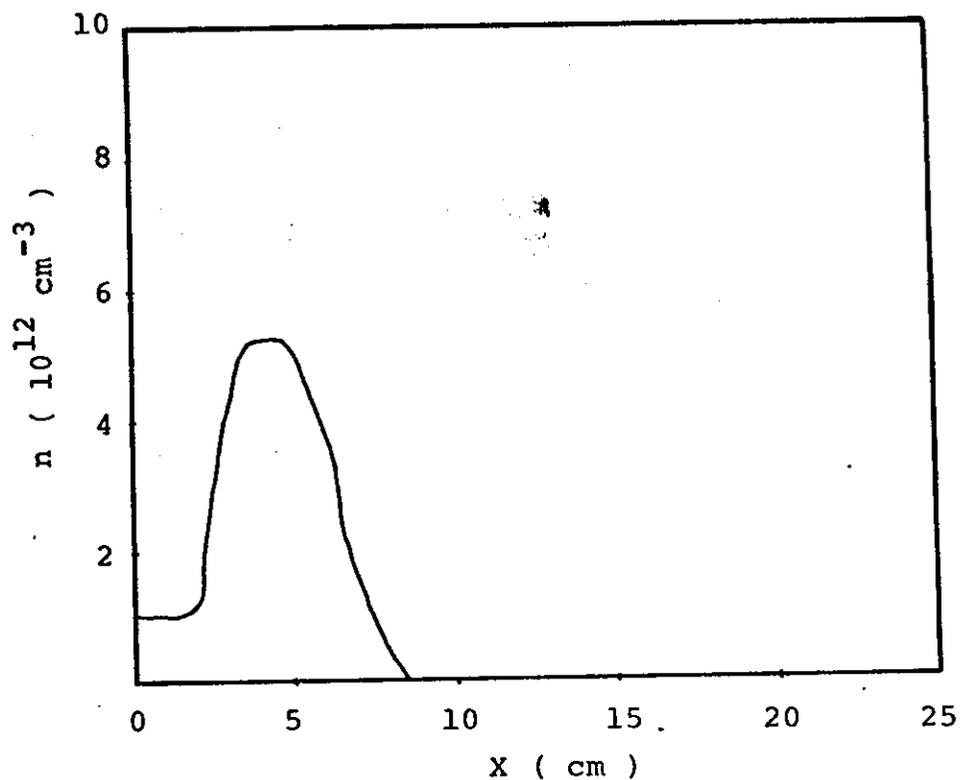
7 c



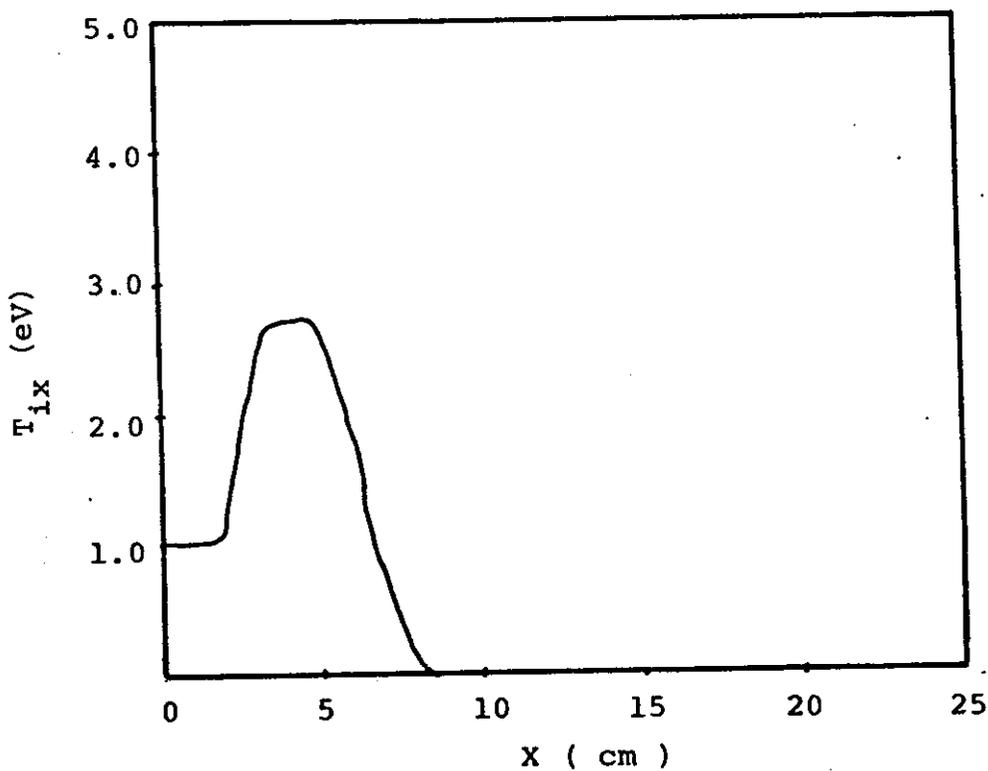
7 a

As figuras acima referem-se a 170 ns.

FIGURA 8



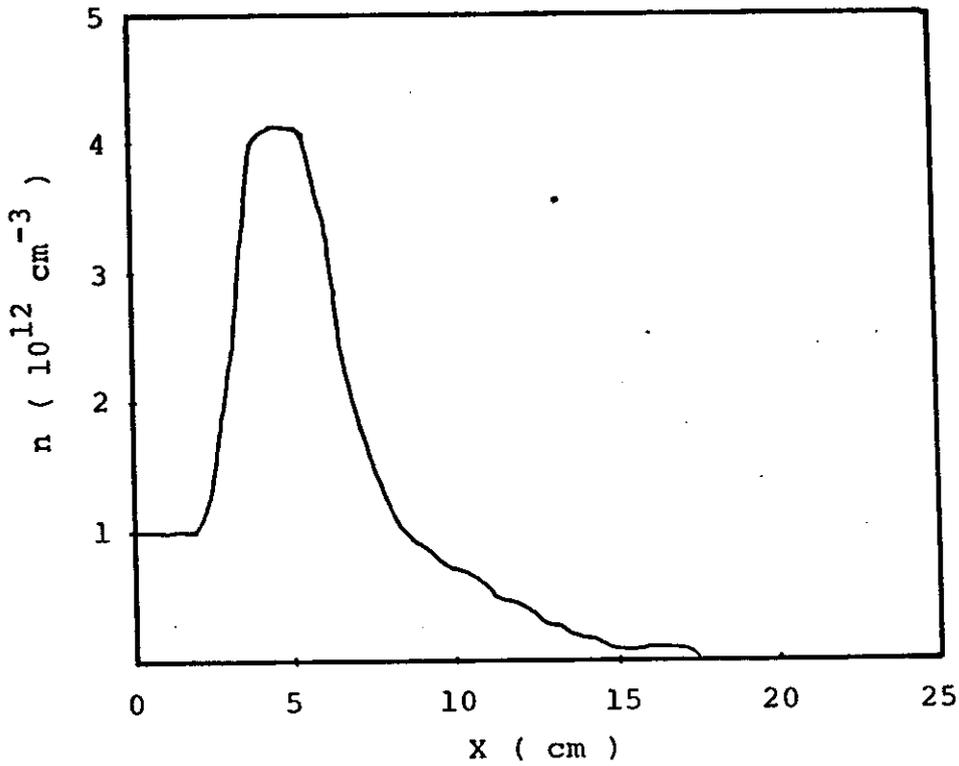
8 a



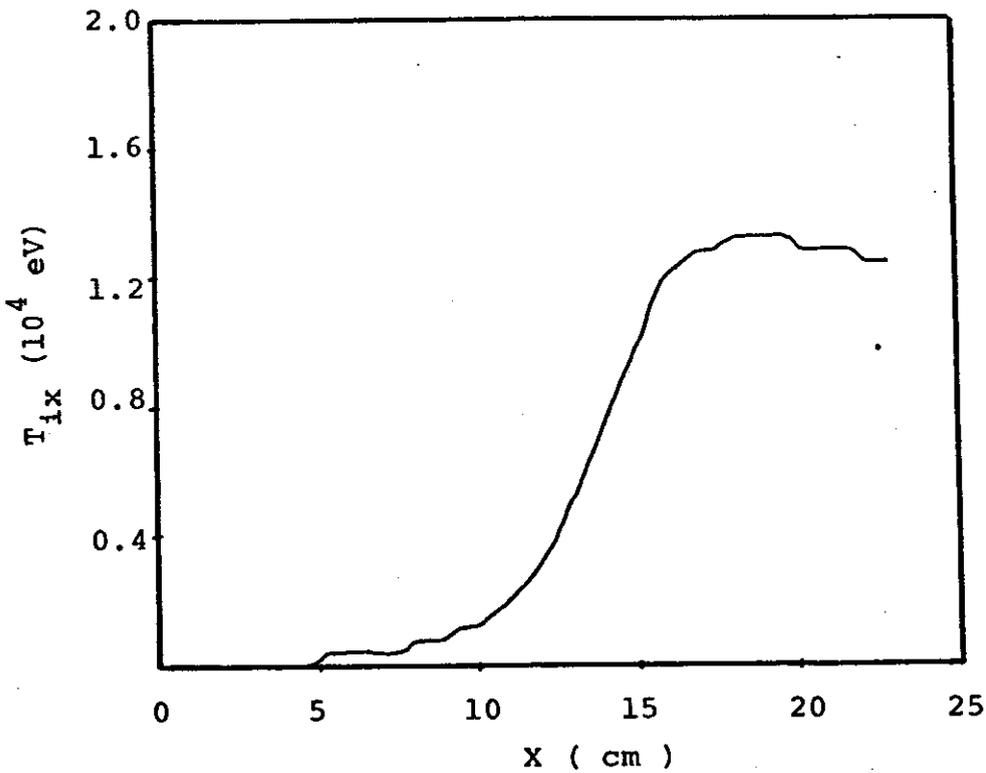
8 b

Modelo snow-plow para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e com campo de polarização de 200G. Referem-se a 153 ns.

FIGURA 9



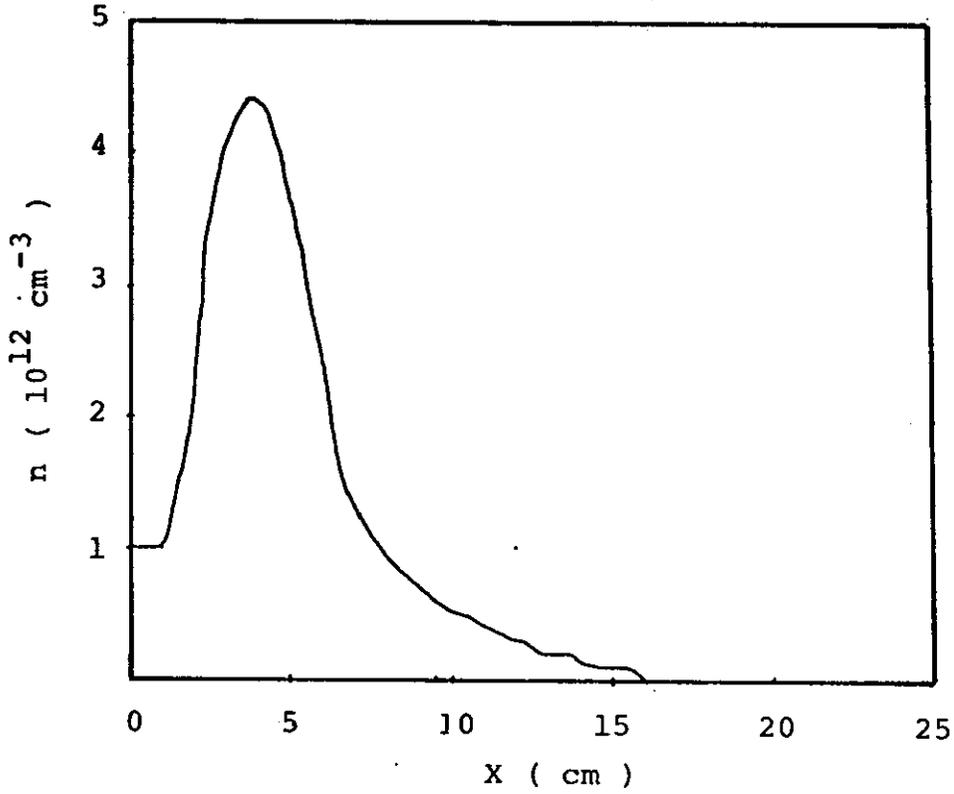
9 a



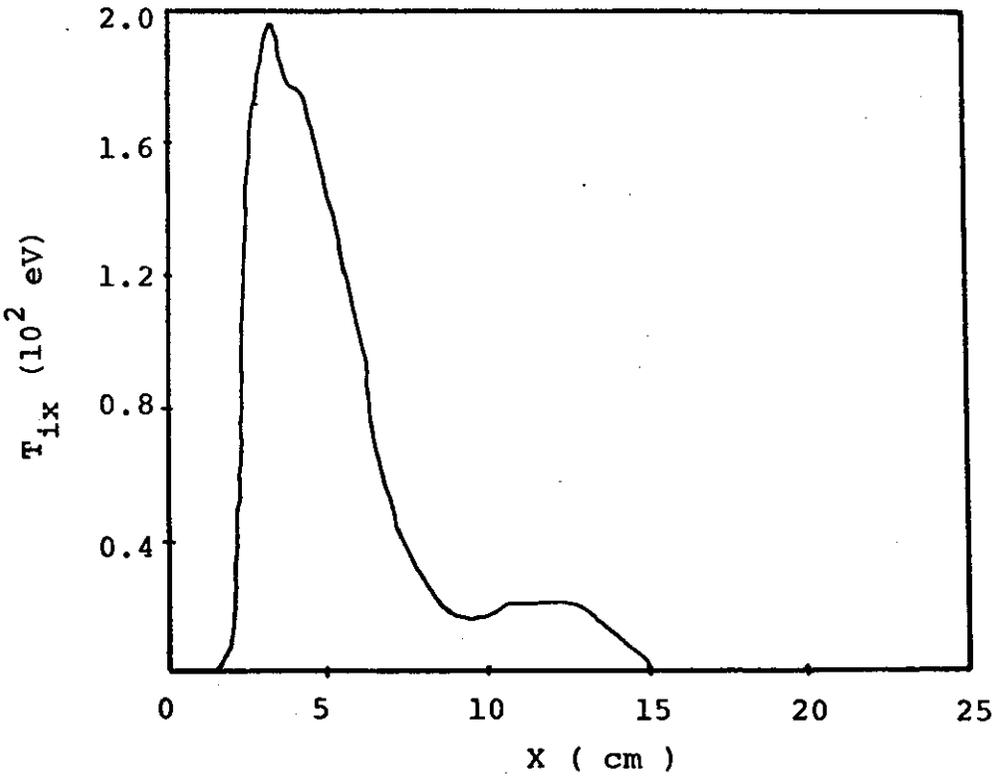
9 b

Modelo de dois fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e com campo de polarização de 200 G. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 10



10 a



10 b

Modelo de três fluidos para densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e campo de polarização de 200G. Referem-se a 136 ns.

sua temperatura apresenta um máximo na região  $x = 4$  cm que vale menos de 3ev. Já o modelo de dois fluidos, cujos resultados estão apresentados na figura 9, correspondente ao instante 136 ns, mostra um máximo de densidade de  $4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  no ponto  $x = 5$  cm, e sua largura é de 6,25 cm, sua temperatura, figura 9b, apresenta um valor de cerca de 300 eV na região entre 5 e 7 cm. Os resultados do modelo de três fluidos correspondentes à figura 10, referentes ao instante 136 ns, apresentam um perfil de densidade máxima de  $4,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  próximo a  $x = 4$  cm, e sua largura é de aproximadamente 6,25 cm, não apresentando um perfil com íons refletidos na frente do pistão magnético, e sua temperatura apresenta um pico de 200 eV para  $x = 3,75$  cm. Estes resultados estão de acordo com o observado experimentalmente, em que não há formação do patamar característico dos íons refletidos, para este caso de polarização paralela.

#### 4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA DIFERENTES POLARIZAÇÕES

Na análise dos resultados, apresentados anteriormente, - será usado um modelo simples que permite compreender fisicamente - os resultados obtidos. Na formulação deste modelo utilizam-se alguns resultados apresentados no apêndice A.

Considerando-se que a reflexão ou não de um íon pelo pistão magnético depende da barreira de potencial eletrostático do pistão e da velocidade relativa entre o íon e a barreira, ao estudar a situação num sistema de referência que se move com a barreira de potencial, tem-se que aqueles íons com energia cinética menor do que a altura da barreira não podem penetrá-la e serão refletidos. Desta forma, num estado estacionário, para um sistema sem dissipação com uma barreira de potencial  $\delta\phi$  movendo-se com velocidade  $v_p$ , um íon com velocidade  $u$ , no sistema de referência do labo

ratório, é refletido se:

$$\frac{1}{2} M_i (u - v_p)^2 < e\delta\phi$$

e usualmente  $u$  tem um intervalo de variação correspondente à energia térmica dos íons.

Para casos mais reais, com um tempo de subida finito para o campo magnético na parede, a fração de íons refletidos variará com o tempo na medida em que a velocidade do pistão varie e o potencial cresça. Ela dependerá também do campo de polarização, tempo de subida, tamanho do sistema etc. Portanto essa reflexão dependerá de valores das variáveis localizadas no espaço e no tempo. Mas, aqui, -pretende-se fazer uma discussão qualitativa desta dependência da reflexão dos íons com a densidade, temperatura dos íons etc, baseada neste modelo simples.

Para explicar o comportamento dos íons refletidos observado anteriormente, quando da aplicação ou não de campo de polarização, parte-se da relação

$$\frac{1}{2} M_i (u - v_p)^2 < e\delta\phi$$

$$u \approx \left(\frac{T_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e assim

$$\frac{M_i}{2} \left( \sqrt{\frac{T_i}{M_i}} - v_p \right)^2 < e\delta\phi$$

para ocorrer reflexão. Em geral  $\sqrt{\frac{T_i}{M_i}} \ll v_p$ , pois  $v_p$  corresponde à temperatura dos íons da ordem de  $10^4$  keV, sendo a temperatura dos íons bem inferior a este valor durante boa parte da implosão. Assim a reflexão crescerá na medida em que as duas razões cresçam:

$$\frac{\left(\frac{T_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{v_p} \approx \frac{e\delta\phi}{\frac{1}{2} M_i v_p^2}$$

No caso dos diferentes campos de polarização, observa-se que a velocidade do pistão é diferente. Primeiramente porque o campo na parede é sempre maior, no caso de polarização paralela, do que nos outros casos e a velocidade do pistão cresce aproximadamente com o campo magnético, uma vez que a velocidade característica do fenômeno é a velocidade de Alfvén, vide apêndice A. Em segundo lugar, no caso de polarização paralela, a força  $\vec{j} \times \vec{B}$  que empurra o pistão é sempre dirigida para dentro. No caso anti-paralelo, contudo, esta força é dirigida para a parede, inicialmente, até que o campo vá a zero e inverta o sinal. Assim para o caso de polarização anti-paralela  $v_p$  tem o menor valor, em módulo.

Quanto ao valor de  $\delta\phi$ , observa-se que, do apêndice A, pode-se escrever:

$$E_n = - \frac{1}{ne} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

logo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{ne} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

portanto,  $\delta\phi \sim \frac{1}{8\pi} \frac{\delta B^2}{\text{ne}}$

e desta relação observa-se que  $\delta\phi$  tende a ter valores semelhantes - para os três casos pois se  $\delta B_z^2$  tende a ser maior no caso paralelo e menor no caso anti-paralelo, com a densidade dá-se o mesmo, pois a pressão magnética é maior no caso de polarização paralela. E assim destas relações qualitativas verifica-se que o caso mais favorável à reflexão de íons será o caso anti-paralelo e o menos favorável será o caso de polarização paralela, resultados que estão de acordo com a simulação.

O modelo de 3 fluidos também apresenta, para os casos de polarização paralela e sem polarização, valores de temperatura dos íons consideravelmente maiores do que as obtidas com o modelo de dois fluidos. O crescimento da pressão do plasma, com o tempo, se faz agora às custas da temperatura e não da densidade, pois parte do fluido de íons vai para o fluido de íons refletidos e com isto a densidade cresce menos possibilitando um maior crescimento da temperatura radial dos íons. Além disso, devido à presença de íons refletidos, a energia ordenada de fluido na direção x torna-se maior, o que implicará numa temperatura maior dos íons quando houver a terminação. Este resultado é o que recomenda a escolha da polarização anti-paralela nas implosões de  $\theta$  - pinch.

## 5 - LEIS DE ESCALA

Tendo sido estabelecido que o caso correspondente à polarização anti-paralela é o mais favorável à reflexão de íons, a seguir, passa-se a verificar, para este caso, se os resultados da simulação obedecem leis de escala, que podem ser obtidas a partir do modelo simples formulado na secção anterior, e que foram verifica-

das por modelos híbridos. Tais leis de escala referem-se às variações da quantidade de íons refletidos, para valores diferentes da temperatura inicial, densidade inicial e tempo de subida.

## 6 - VALORES DIFERENTES DA TEMPERATURA INICIAL DOS ÍONS

Os parâmetros utilizados nesta simulação, também correspondentes ao  $\theta$  - pinch rápido de Maryland, foram:

densidade  $2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , campo magnético vai a 2,1 kG em 0,31  $\mu\text{s}$  e campo de polarização de - 175 G.

Na primeira simulação, com o modelo de três fluidos, supôs-se uma temperatura inicial para os íons de 5eV. Os resultados da simulação encontram-se na figura 11, sendo 11a e 11b referentes a 187 ns e 11c e 11d referentes a 204 ns. Na figura 11a correspondente ao perfil de densidade nota-se um máximo, em  $x = 8,75 \text{ cm}$ , - que vale  $7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  tendo uma largura de 6,25 cm e um perfil típico da situação com íons refletidos.

Neste caso, nota-se no perfil do campo magnético, figura 11b, uma compressão do campo de polarização inicial, na região em torno de  $x = 6 \text{ cm}$ , onde o campo vale cerca de - 350 G. Esta compressão do campo de polarização inicial é observada experimentalmente no  $\theta$  - pinch de Maryland, e não se consegue observá-la numa simulação com um modelo de dois fluidos para quaisquer parâmetros utilizados, sendo esta compressão indicativa da presença de íons refletidos na frente do pistão que levam consigo elétrons que estão girando num sentido tal que blindam o campo externo e conseqüentemente reforçam o campo de polarização anti-paralelo inicial. Na figura 11c, vê-se que o pico de densidade avançou para  $x = 6,25 \text{ cm}$  e vale  $8,1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , com uma largura de 8,5 cm e continua a apresentar

um perfil típico da presença de íons refletidos. O campo magnético continua a apresentar compressão do campo de polarização inicial, figura 11d, na região em torno de  $x = 3$  cm onde o campo magnético vale cerca de  $- 350$  G.

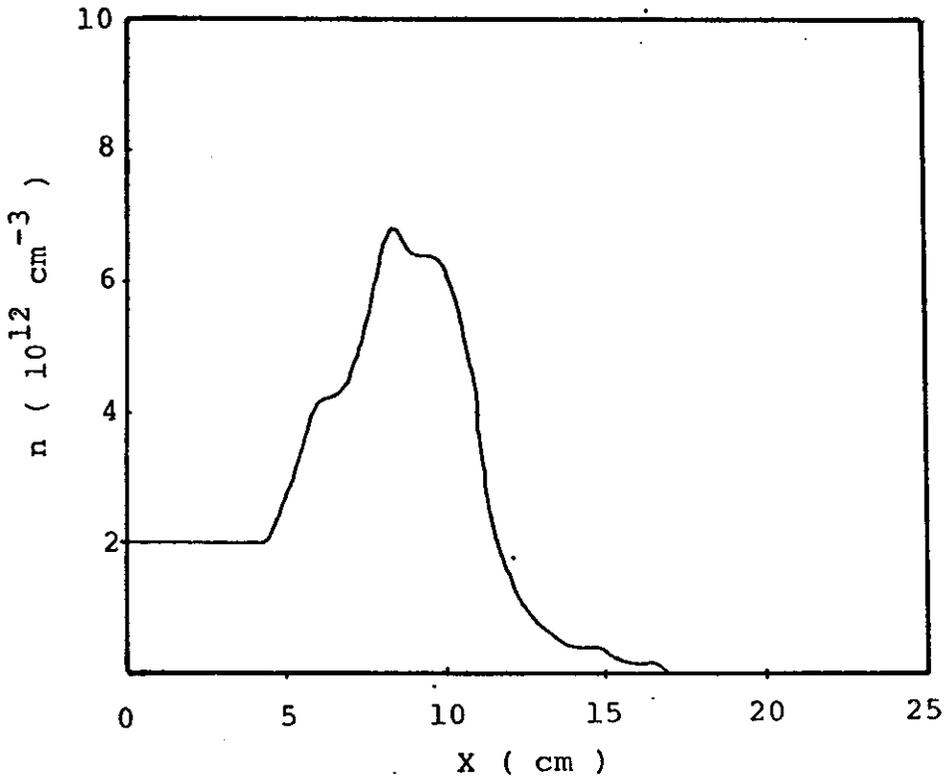
Na segunda simulação, com o modelo de três fluidos, supõe-se uma temperatura inicial para os íons, exagerada, de 50eV. Os resultados desta simulação encontram-se na figura 12, sendo 12a e 12b correspondentes ao instante 187 ns e 12c e 12d correspondentes a 204 ns. Na figura 12a o perfil de densidade apresenta um máximo próximo de  $x = 9$  cm que vale  $7,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  sendo sua largura da ordem de 7,5 cm e com um perfil característico da presença de íons refletidos. O perfil do campo magnético, figura 12b, também apresenta compressão do campo de polarização inicial, que vale  $- 400$  G na região próxima a  $x = 7,5$  cm. Na figura 12c a densidade apresenta um máximo de  $7,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  em  $x = 6,5$  cm, com uma largura de 9,5 cm, apresentando um perfil característico da presença de íons refletidos, tendo estes já alcançado a origem. O perfil do campo magnético, figura 12d, apresenta uma compressão do campo de polarização inicial, que vale mais de  $- 400$  G em  $x = 5$  cm.

A comparação dos perfis mostra uma largura maior do pico de densidade e uma compressão maior do campo de polarização inicial, no caso em que a temperatura inicial dos íons é maior. Este resultado pode ser explicado pelo modelo simples apresentado na secção anterior.

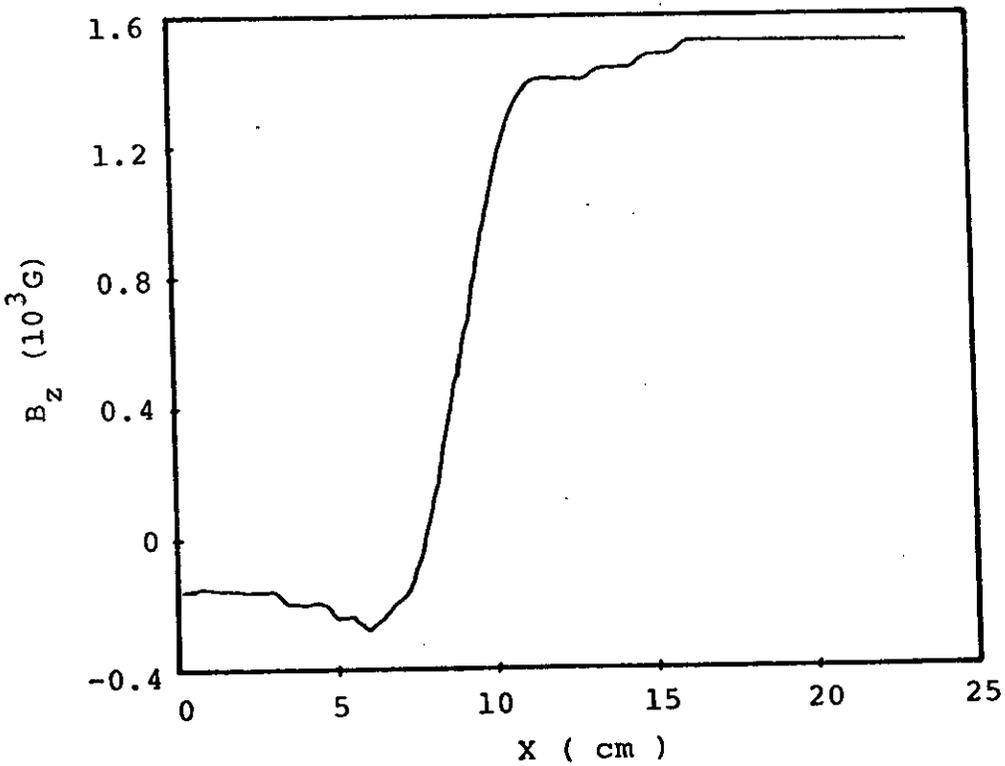
Para isso considere-se novamente a relação necessária para haver reflexão

$$\frac{M_i}{2} \left( \sqrt{\frac{T_i}{M_i}} - v_p \right)^2 < e\delta\phi$$

FIGURA 11



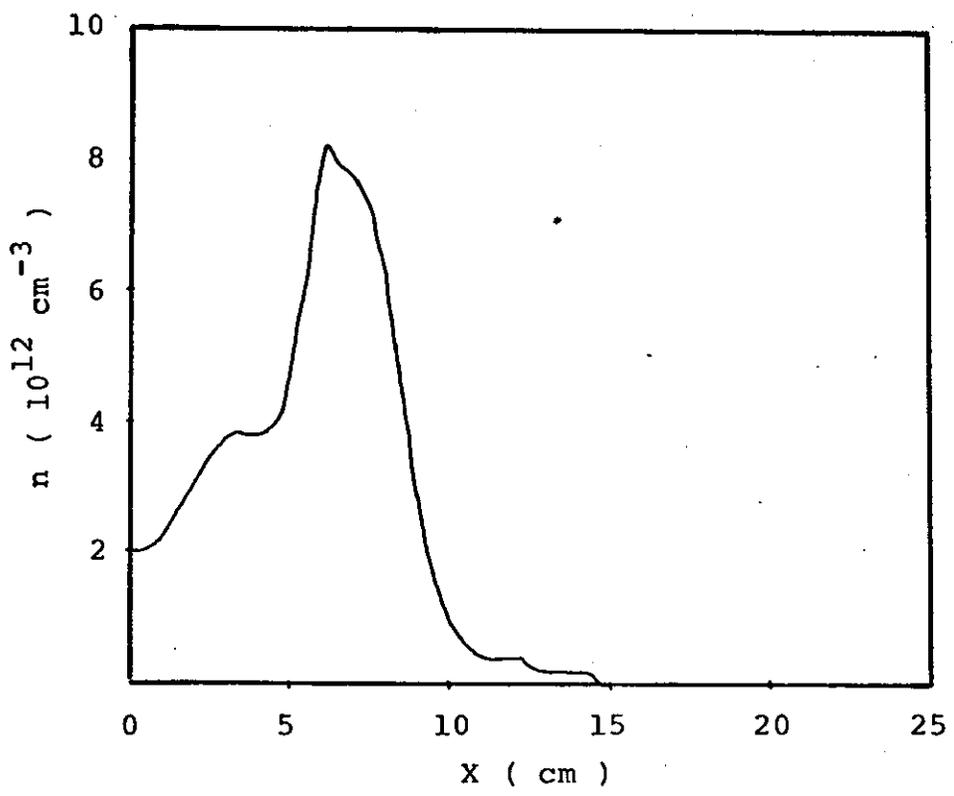
11 a



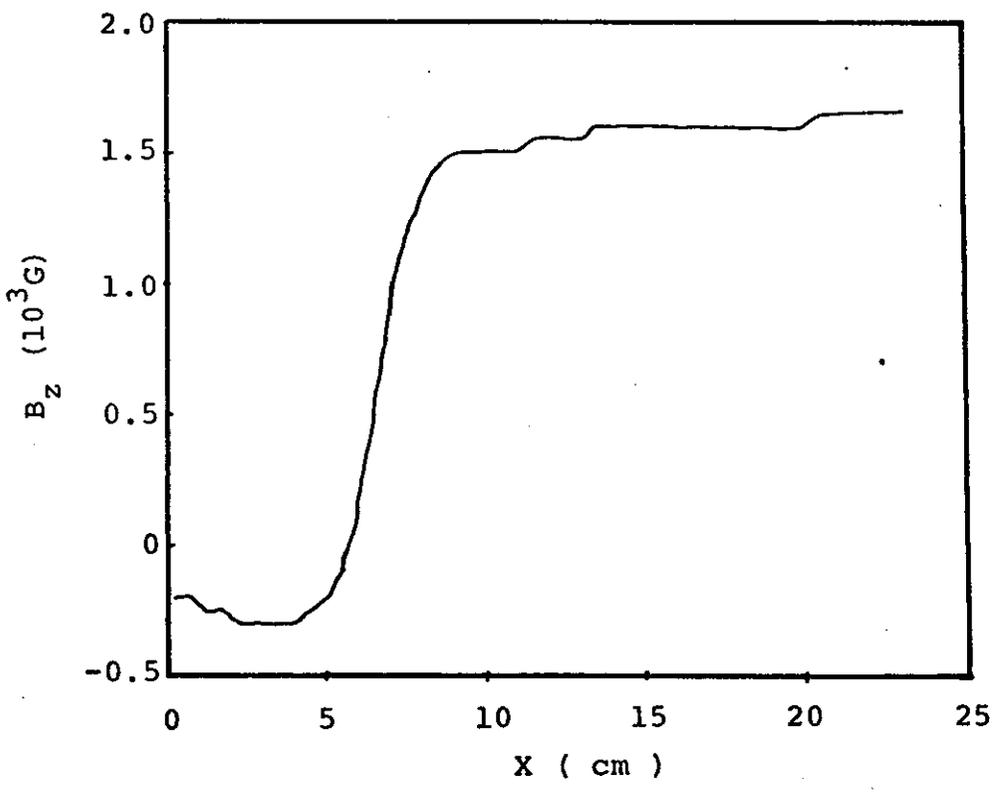
11 b

Modelo de três fluidos com temperatura inicial de 5 eV. Referem-se a 187 ns.

FIGURA 11



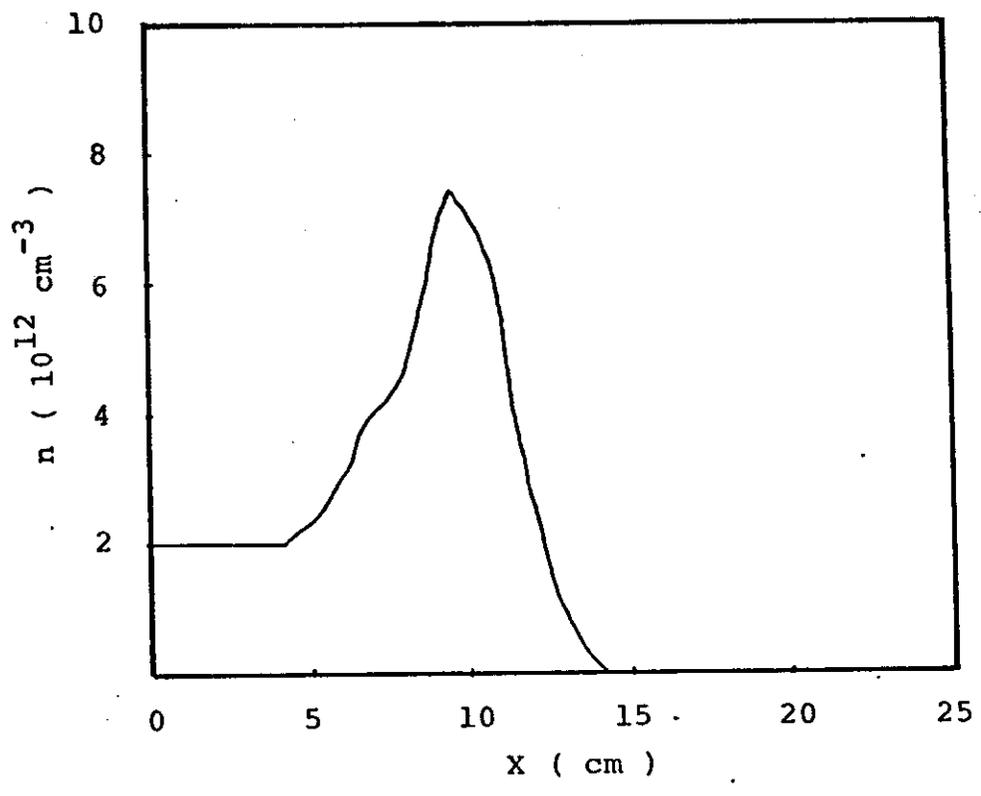
11 c



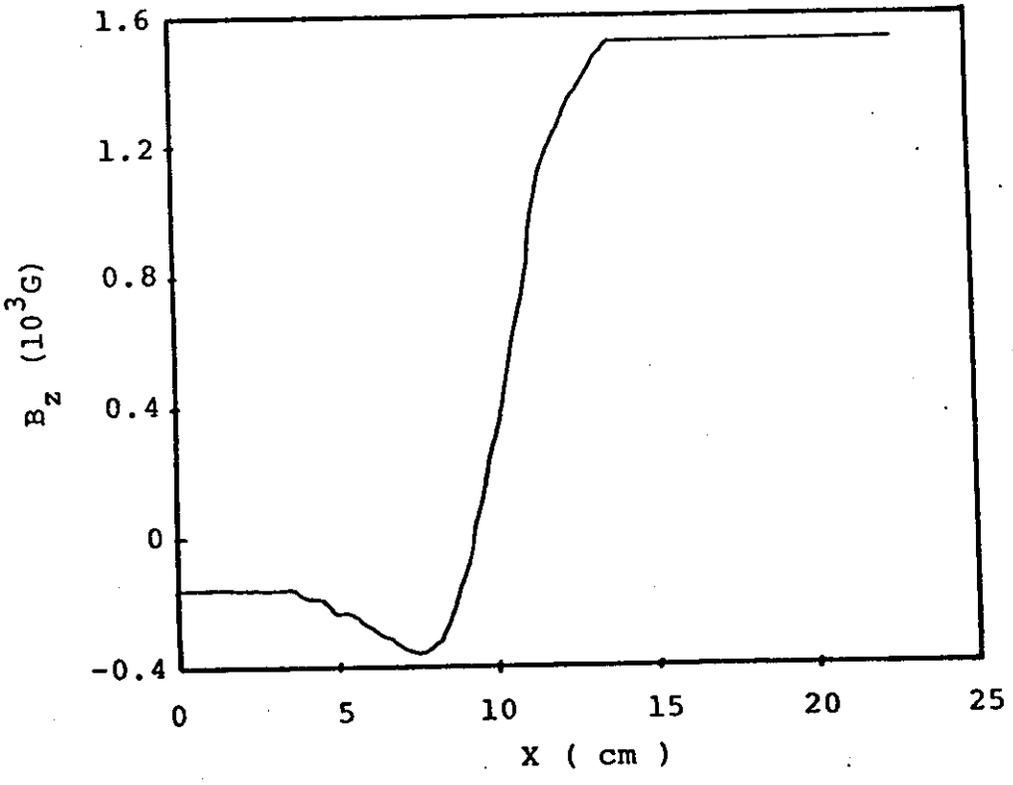
11 d

As figuras acima referem-se a 204 ns.

FIGURA 12



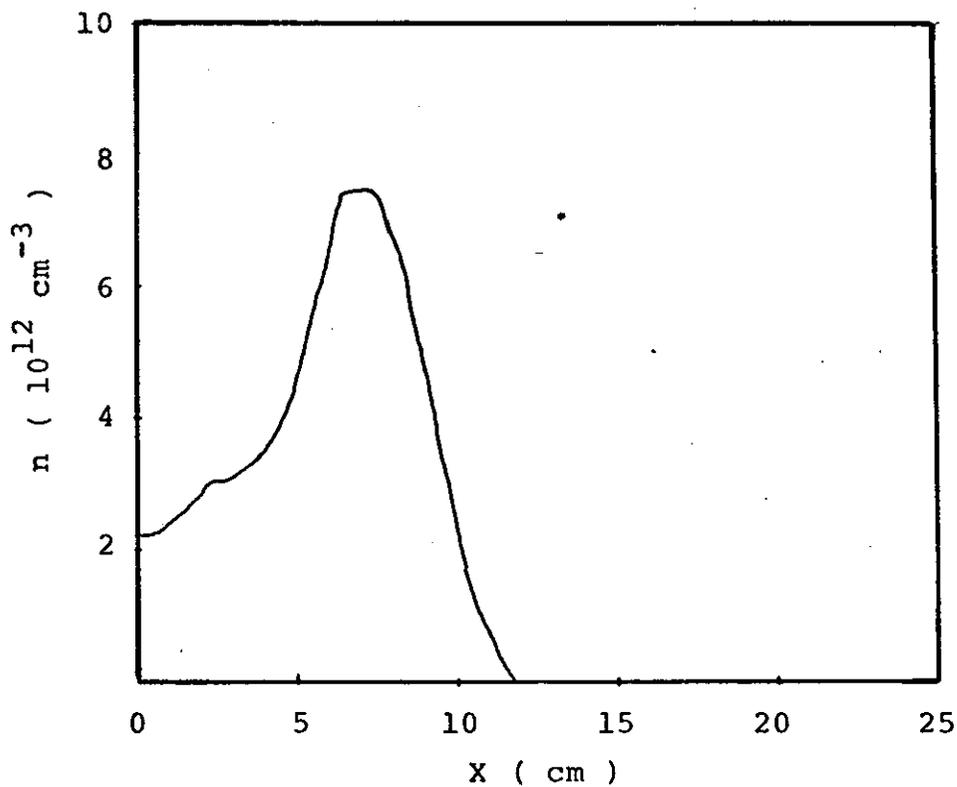
12 a



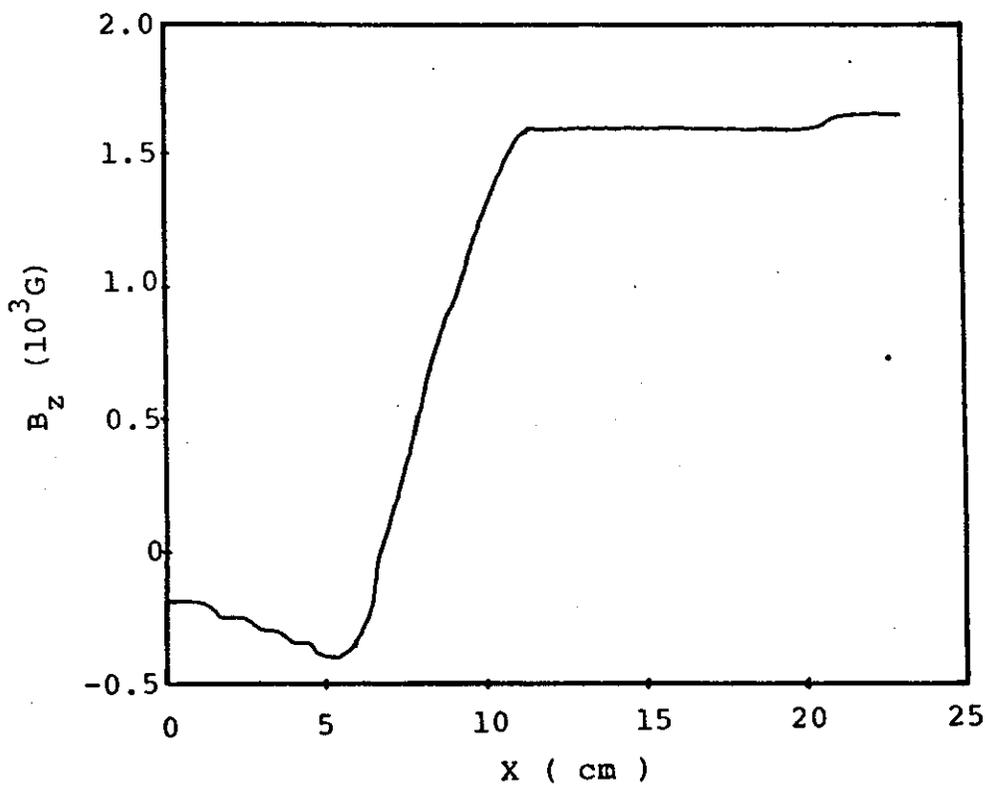
12 b

Modelo de três fluidos com temperatura inicial de 50 eV. Referem-se a 187 ns.

FIGURA 12



12 c



12 d

As figuras acima referem-se a 204 ns:

Assim a reflexão crescerá na medida em que as duas razões cresçam:

$$\frac{\left(\frac{T_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{v_p} \propto \frac{e\delta\phi}{\frac{1}{2} M_i v_p^2}$$

Mas sabe-se, do apêndice A, que  $v_p \propto n_o^{-1/2}$  e portanto

$$\frac{\left(\frac{T_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{v_p} \propto \left(\frac{n_o T_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e cresce com } n_o T_i.$$

E também da relação:

$$\delta\phi \propto \frac{1}{n_e} \frac{\delta B_z^2}{8\pi} \text{ logo } \delta\phi \propto n_o^{-1}, \text{ conseqüentemente } \frac{e\delta\phi}{\frac{1}{2} M_i v_p^2} \text{ é in}$$

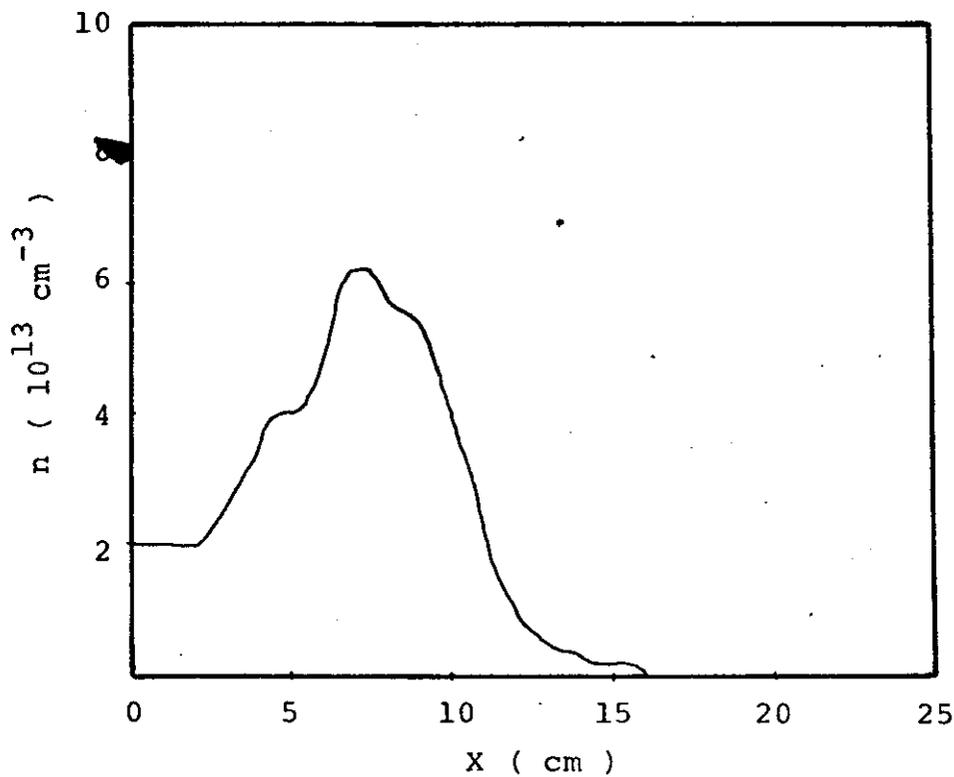
dependente da densidade e da temperatura iniciais.

Logo, a reflexão cresce com o produto  $n_o T_i$ . Caso a densidade inicial seja mantida constante, a reflexão cresce com a temperatura como foi observado nas simulações.

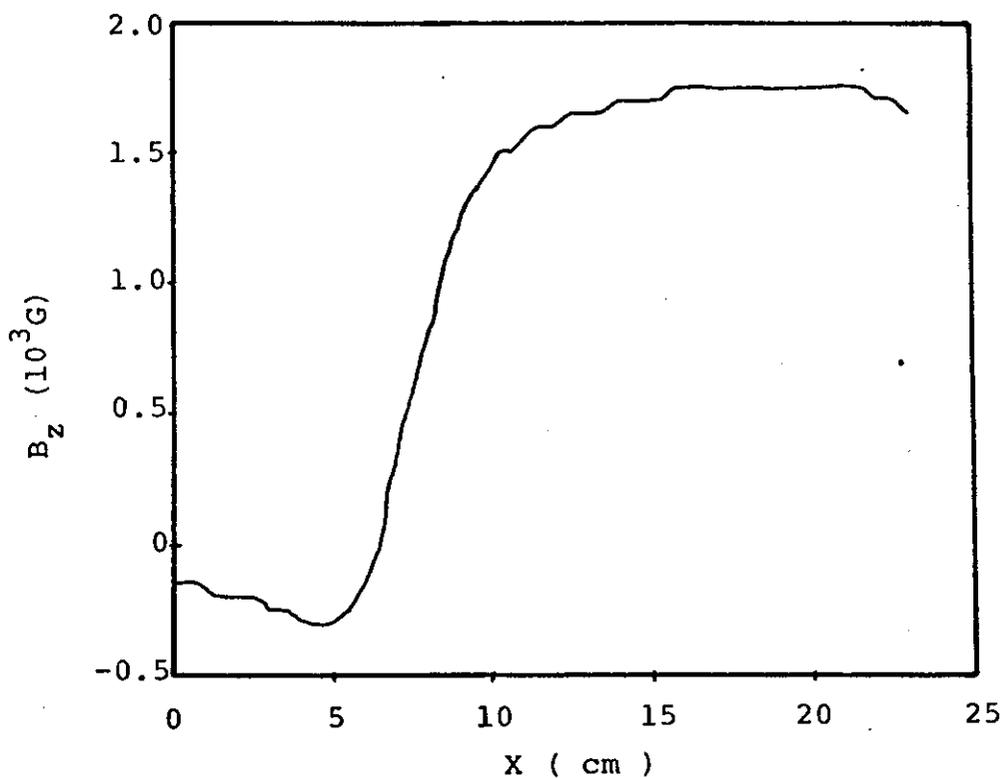
## 7 - VALORES DIFERENTES DA DENSIDADE INICIAL DOS ÍONS

Neste caso simulou-se, com o modelo de três fluidos, uma situação semelhante àquela em que a temperatura inicial valia  $T_i = 5\text{eV}$ , somente que agora a densidade inicial é de  $2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  (e o tempo de subida do campo magnético é maior pois  $v_p \propto n_o^{-1/2}$ , além disso como será visto na secção seguinte o tempo de subida do cam-

FIGURA 13



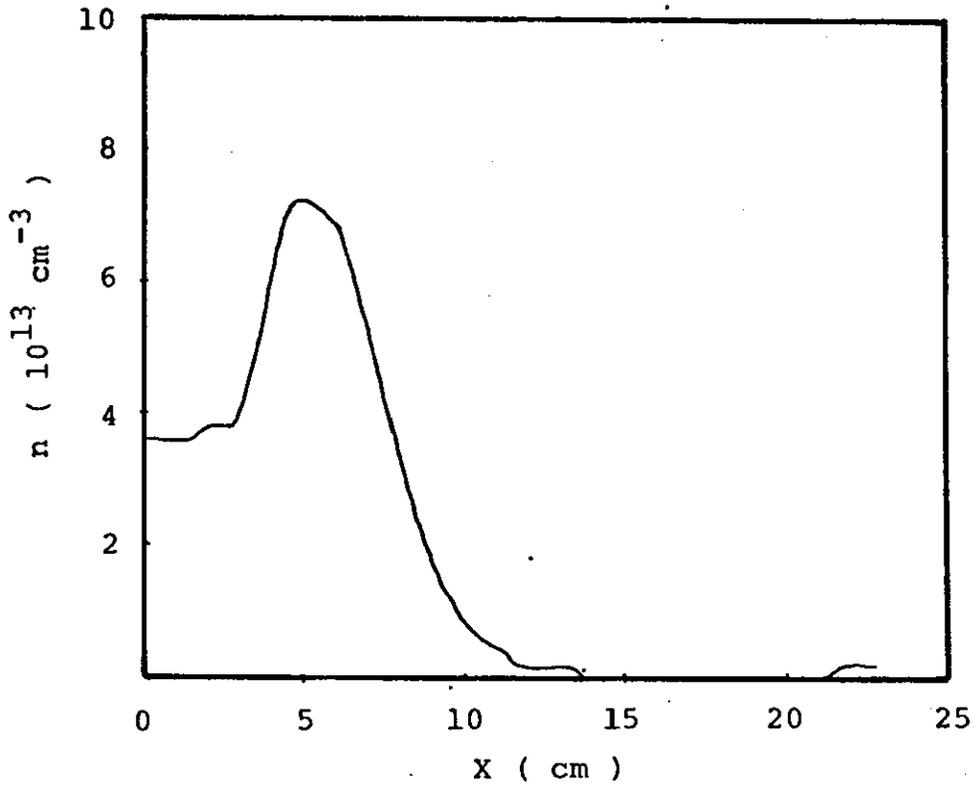
13 a



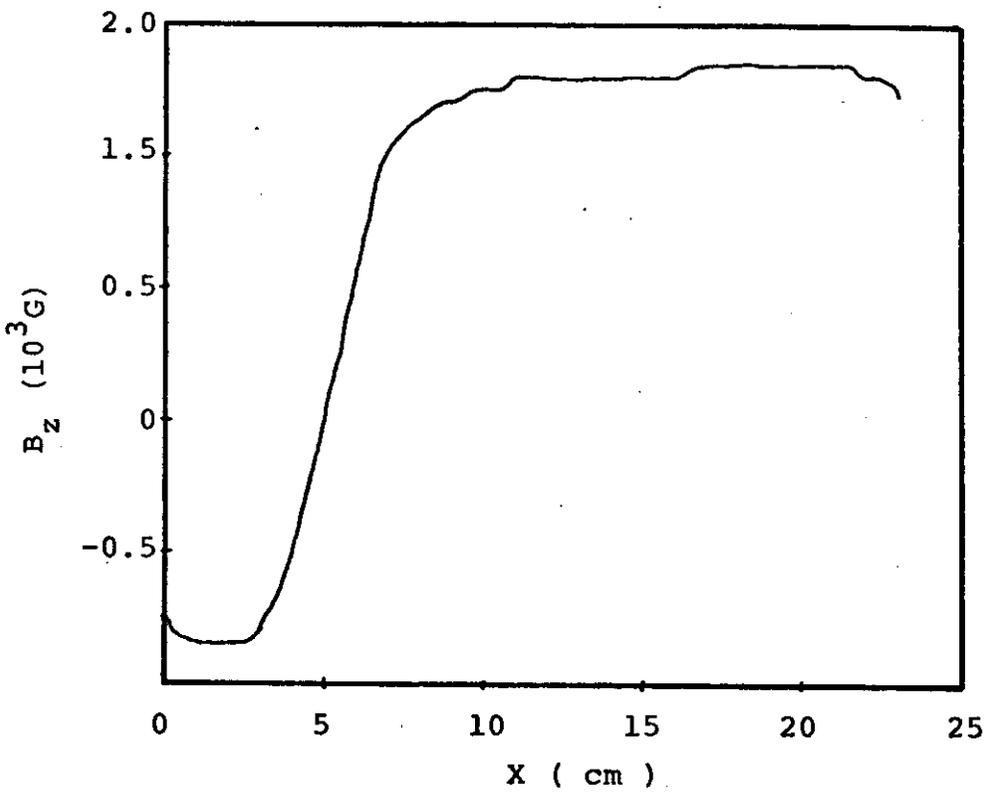
13 b

Modelo de três fluidos com densidade inicial de  $2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . Referem-se a 506 ns.

FIGURA 13



13 c



13 d

As figuras acima referem-se a 552 ns.

po magnético não afeta a quantidade de íons refletidos). Os resultados da simulação encontram-se apresentados na figura 13, sendo 13a e 13b referentes ao instante 506 ns e 13c e 13d correspondentes a 552 ns.

Na figura 13a, correspondente ao perfil de densidade vê-se um máximo de  $6,1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  na posição  $x = 7,0 \text{ cm}$ , com uma largura de  $8,5 \text{ cm}$ , o perfil apresenta características de reflexão de partículas. O perfil do campo magnético, figura 13b, apresenta acentuada compressão do campo de polarização inicial.

Na figura 13c a densidade apresenta um máximo de  $7,2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , em  $x = 5 \text{ cm}$ , com uma largura de  $8,5 \text{ cm}$ , sendo que na origem já há uma densidade da ordem de quase  $4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . O perfil do campo magnético, figura 13d, apresenta compressão do campo de polarização inicial.

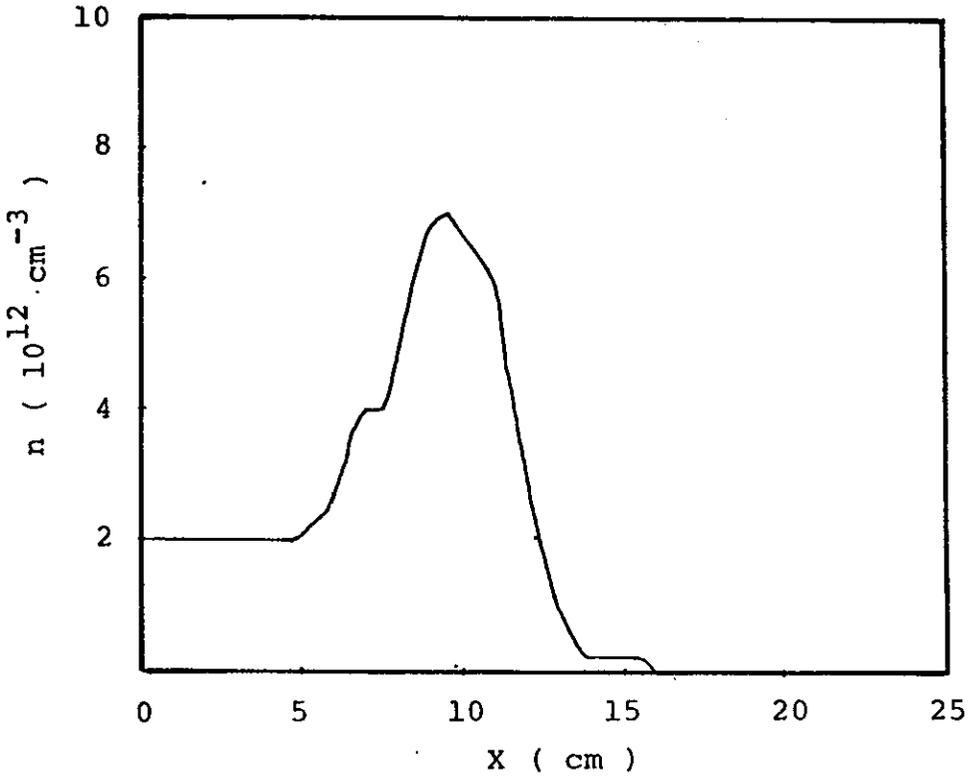
Das figuras percebe-se que há maior reflexão de íons neste caso, do que no caso com densidade  $2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , o que está de acordo com o resultado qualitativo, obtido na secção anterior, de que a reflexão cresce com  $n_0 T_i$ .

## 8 - VALORES DIFERENTES PARA O TEMPO DE SUBIDA DO CAMPO MAGNÉTICO

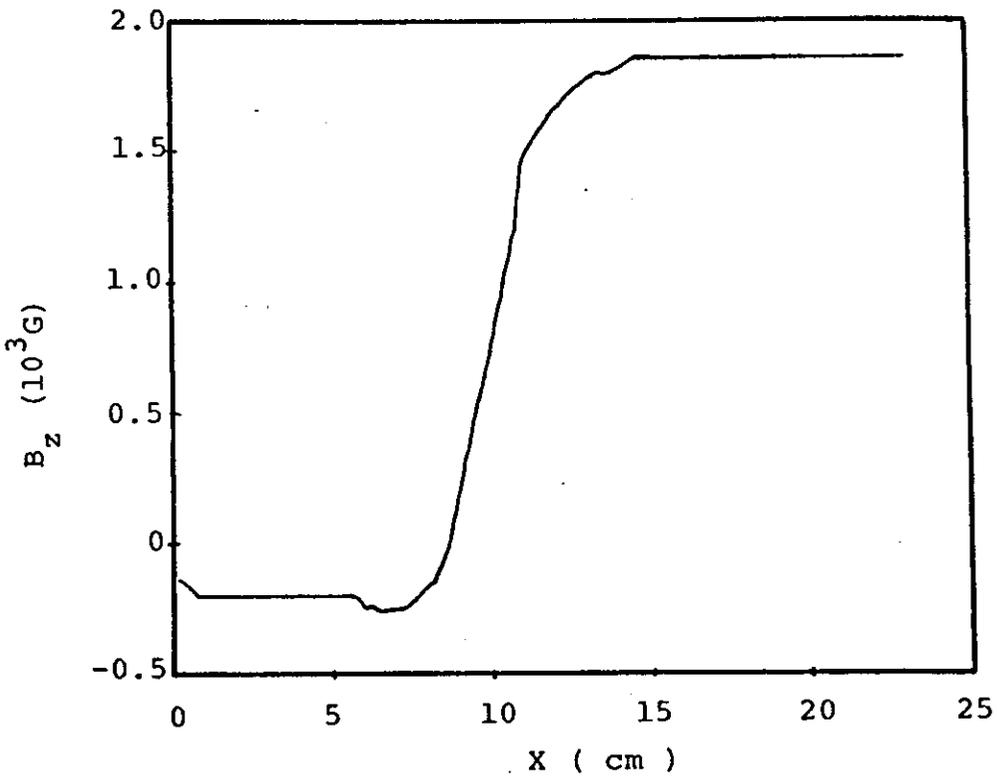
Neste caso o modelo de três fluidos foi executado tomando-se como parâmetros do  $\theta$  - pinch de Maryland:

$n = 2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_i = 5 \text{ eV}$ , campo máximo de  $2,1 \text{ kG}$ , campo de polarização anti-paralelo de  $-175 \text{ G}$  e tempo de subida de  $155 \text{ ns}$ . Os resultados desta simulação encontram-se apresentados na figura 14, com 14a e 14b referentes a  $133 \text{ ns}$  e 14c e 14d referentes a  $142 \text{ ns}$ .

FIGURA 14



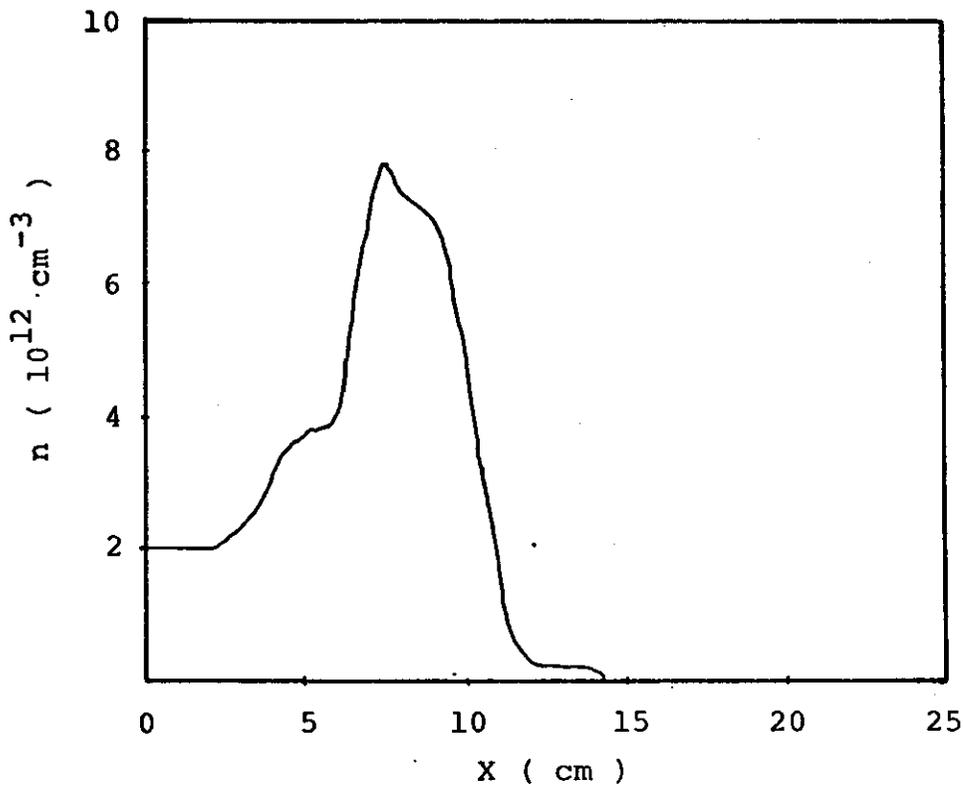
14 a



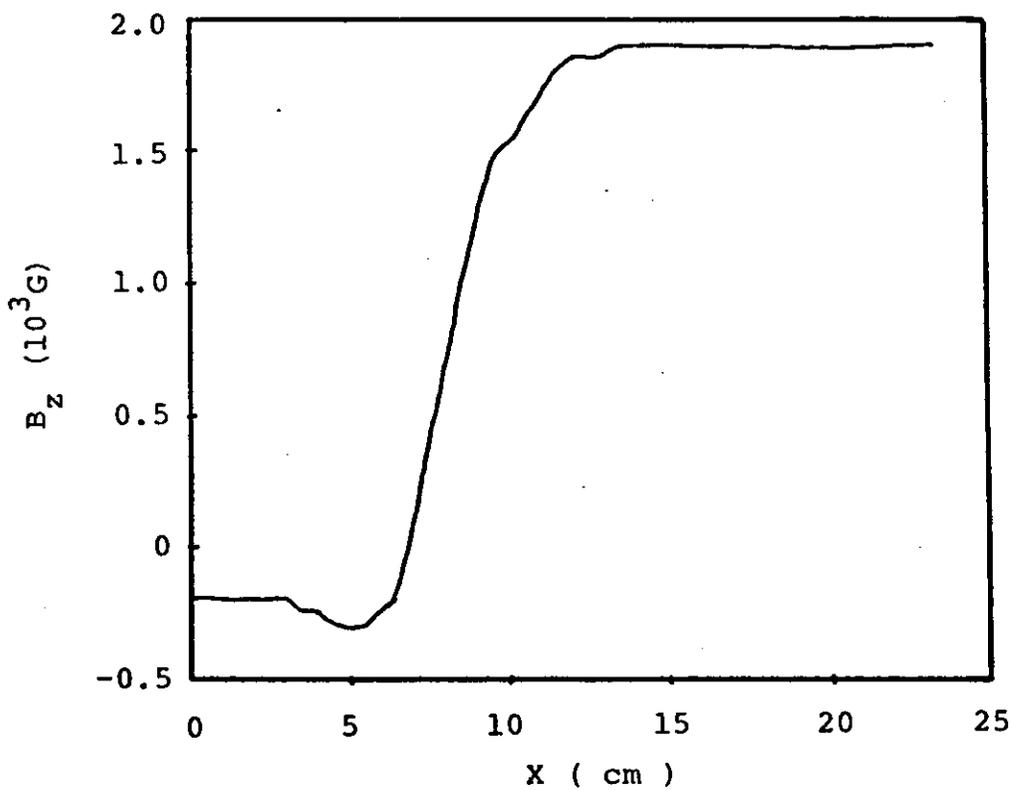
14 b

Modelo de três fluidos com tempo de subida do campo magnético de 155 ns. Referem-se a 133 ns.

FIGURA 14



14 c



14 d

As figuras acima referem-se a 142 ns.

Na figura 14a o perfil de densidade apresenta um máximo de  $7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  em  $x = 9 \text{ cm}$ , com uma largura de  $7,5 \text{ cm}$ , e apresenta características da presença de íons refletidos. O perfil do campo magnético, figura 14b, apresenta uma pequena compressão. Na figura 14c, tem-se o perfil de densidade que apresenta um máximo de  $8 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  em  $x = 7,5 \text{ cm}$ , com uma largura de  $8,5 \text{ cm}$ , apresentando o perfil indicativo da presença de íons refletidos. O campo magnético, figura 14d, apresenta compressão acentuada.

Os efeitos da diminuição do tempo de subida do campo magnético, na parede, não podem ser obtidos a partir do modelo simples utilizado nas análises anteriores, pois o único efeito previsível de diminuição do tempo de subida é um aumento na velocidade do pistão, como se percebe da simulação, mas nada se pode afirmar a respeito dos outros termos que aparecem na relação

$$\frac{M_i}{2} \left( \sqrt{\frac{T_i}{M_i}} - v_p \right)^2 < e\delta\phi$$

O que se verifica da simulação é que para parâmetros semelhantes ao do  $\theta$  - pinch de Maryland, o principal efeito de diminuir o tempo de subida do campo magnético, na parede, não é modificar a quantidade de íons refletidos mas sim aumentar a velocidade do pistão, o que leva os íons a energias ordenadas maiores e obviamente, maiores temperaturas quando da termalização. Este resultado também é constatado com modelos híbridos.

## 9 - SIMULAÇÕES COM DENSIDADES ELEVADAS.

A seguir são apresentados resultados com densidades de  $10^{13}$  e  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$  para um  $\theta$  - pinch semelhante ao de Maryland, raio de  $22,5 \text{ cm}$  e tempo de subida de  $273 \text{ ns}$ , com valores do campo magné

tico máximo de 6 kG e 20 kG, de maneira que a grandeza característica da escala de velocidades, que é a velocidade de Alfvén, permaneça a mesma e o tempo de implosão, e conseqüentemente o tempo computacional, também permaneça aproximadamente o mesmo.

Considera-se, primeiramente, a situação em que a densidade vale  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , com um campo magnético que vai a 6 kG em 273 ns e um campo de polarização de 600 G. Foram usados na simulação o modelo de dois fluidos e o modelo de três fluidos.

Os resultados da simulação com um campo de polarização - paralelo de + 600 G, usando o modelo de dois fluidos, estão apresentados na figura 15, referente a 136 ns. Na figura 15a nota-se que o perfil de densidade tem um máximo que vale  $3,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , nas proximidades de  $x = 5,6 \text{ cm}$ , com uma largura de 7 cm. O perfil da temperatura, figura 15b, apresenta um máximo bastante elevado, na região de  $x = 17,5 \text{ cm}$  e temperaturas próximas a 2,5 keV, na região em torno de  $x = 5 \text{ cm}$ .

Na figura 16, correspondente a 136 ns, estão apresentados os resultados obtidos com o modelo de três fluidos, para os mesmos parâmetros anteriores. Da figura 16a, vê-se que a densidade tem um pico próximo a  $x = 5 \text{ cm}$  e que vale  $3,75 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  com uma largura de 7,8 cm. A temperatura, figura 16b, apresenta um pico com mais de 2 keV para  $x = 7,5 \text{ cm}$  e está próxima de 1,5 keV na região de  $x = 5 \text{ cm}$ .

A seguir são apresentados resultados da simulação com um campo de polarização de - 600 G. Os resultados obtidos usando o modelo de 2 fluidos estão apresentados na figura 17, correspondente a 153 ns. O perfil de densidade dos íons, figura 17a, apresenta um

máximo, nas proximidades de  $x = 8,75$  cm, que vale  $3,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  com uma largura de 5 cm. A temperatura, figura 17b, apresenta um valor próximo de 2,5 keV na região de 8,75 cm e cresce na direção da parede.

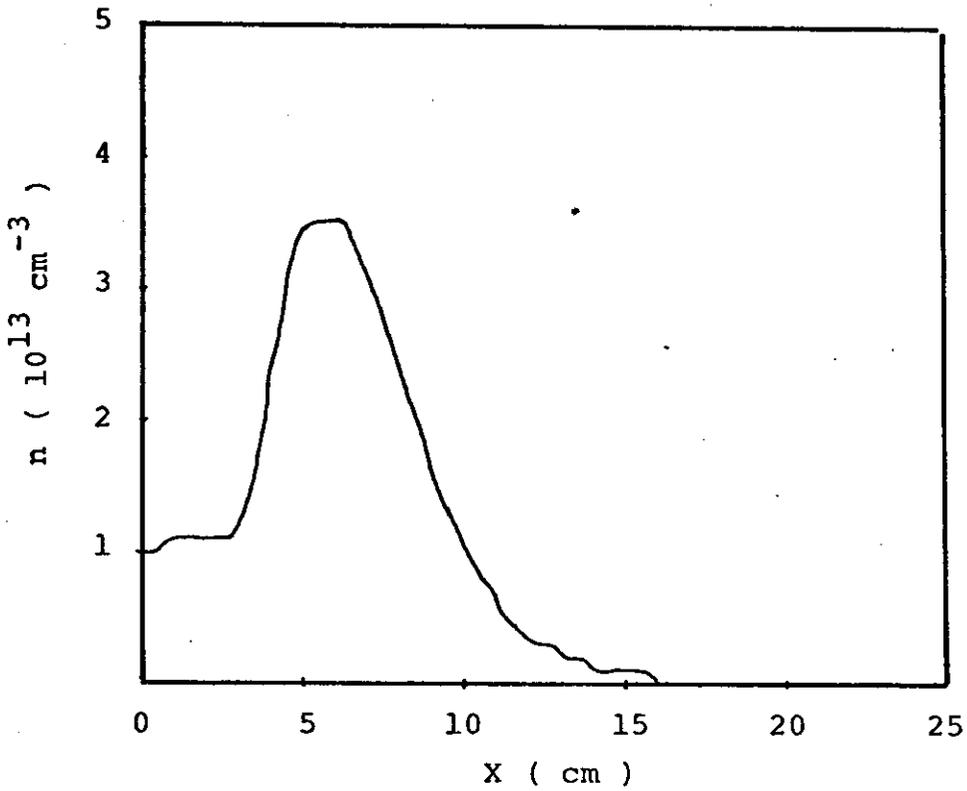
Na figura 18, correspondente a 153 ns, estão os resultados obtidos com o modelo de três fluidos. O perfil da densidade, - figura 18a, apresenta um máximo na região de  $x = 6,5$  cm, que vale  $3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  e tem uma largura de 7,5 cm. Neste caso o perfil de densidade apresenta características de reflexão de partículas. A temperatura, figura 18c, apresenta um máximo, na região de  $x = 11,25$  cm, que vale quase 1 keV.

Finalmente tem-se os resultados da situação sem polarização. Os resultados da simulação, usando o modelo de dois fluidos, estão apresentados na figura 19, correspondente a 136 ns. O perfil da densidade, figura 19a, apresenta um pico, em  $x = 8,75$  cm, cujo valor é de  $4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  e a largura é de 5 cm. A temperatura, figura 19b, apresenta um valor muito alto próximo à parede e vale cerca de 1 keV na região próxima de  $x = 10$  cm.

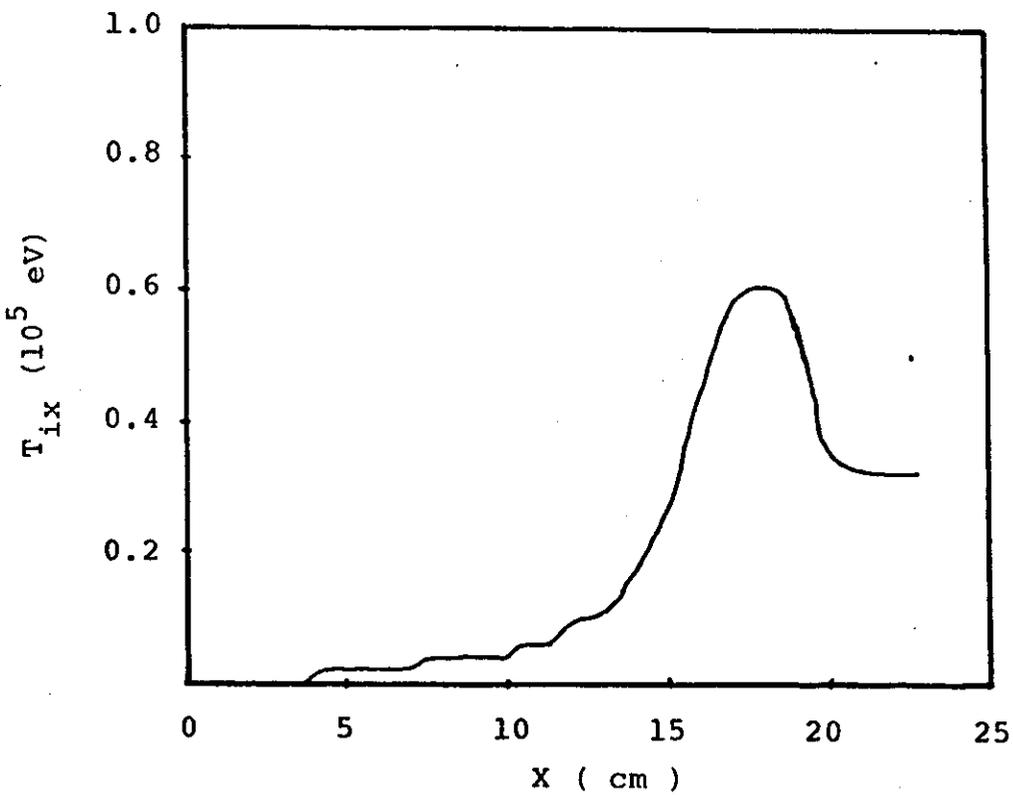
Já os resultados para este caso, com o modelo de três fluidos, estão apresentados na figura 20, correspondente a 136 ns. O perfil de densidade, figura 20a, apresenta um máximo de  $4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , próximo de  $x = 8$  cm, sua largura é de 6,25 cm. A temperatura, figura 20b, apresenta um máximo de 1,1 keV nas proximidades de 7,5 cm.

Analisando estes resultados, obtidos para uma densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , observa-se novamente que a situação em que há mais reflexões corresponde àquela em que o campo de polarização é anti-

FIGURA 15



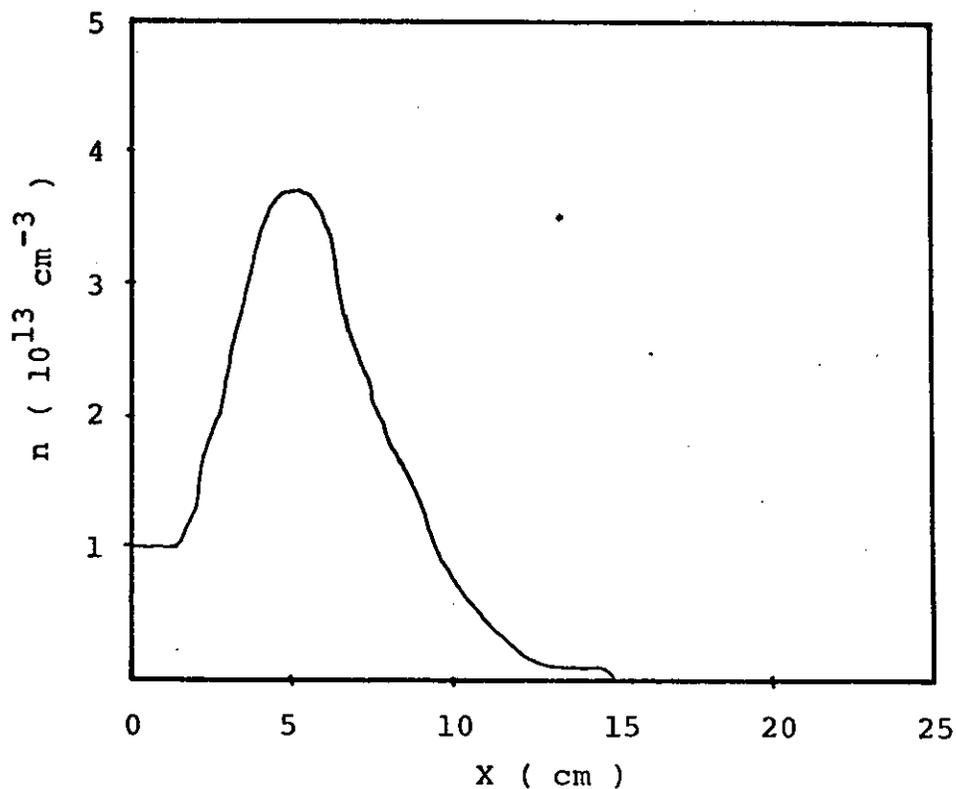
15 a



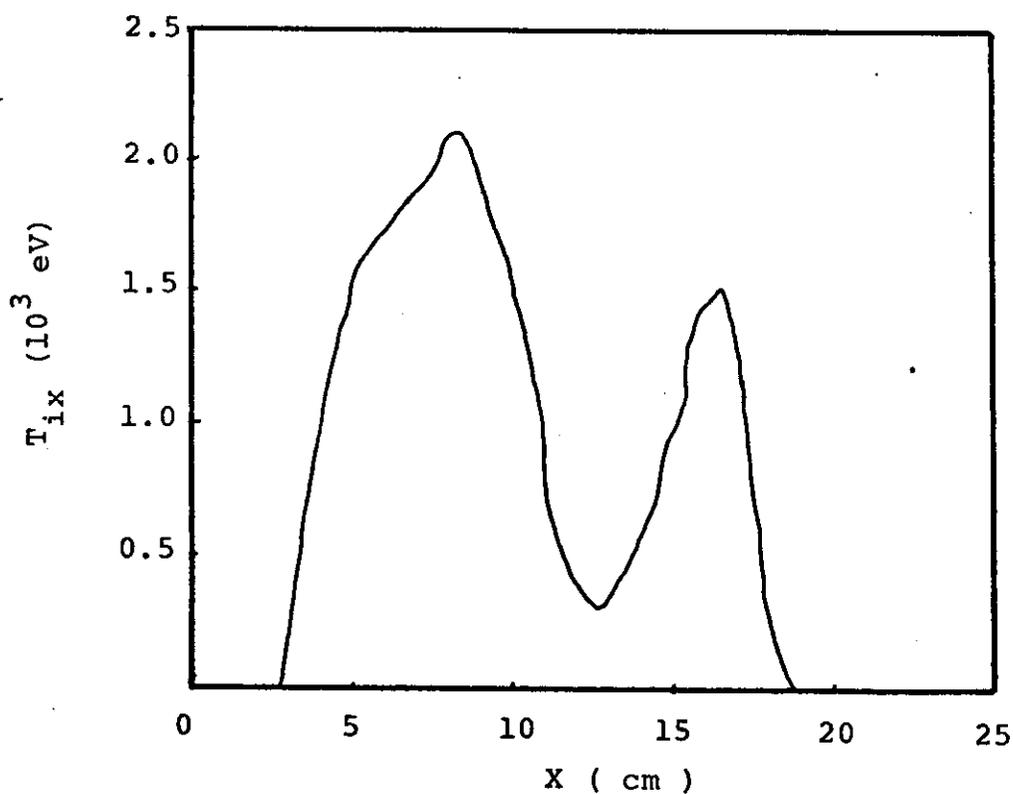
15 b

Modelo de dois fluidos com densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de 600G. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 16



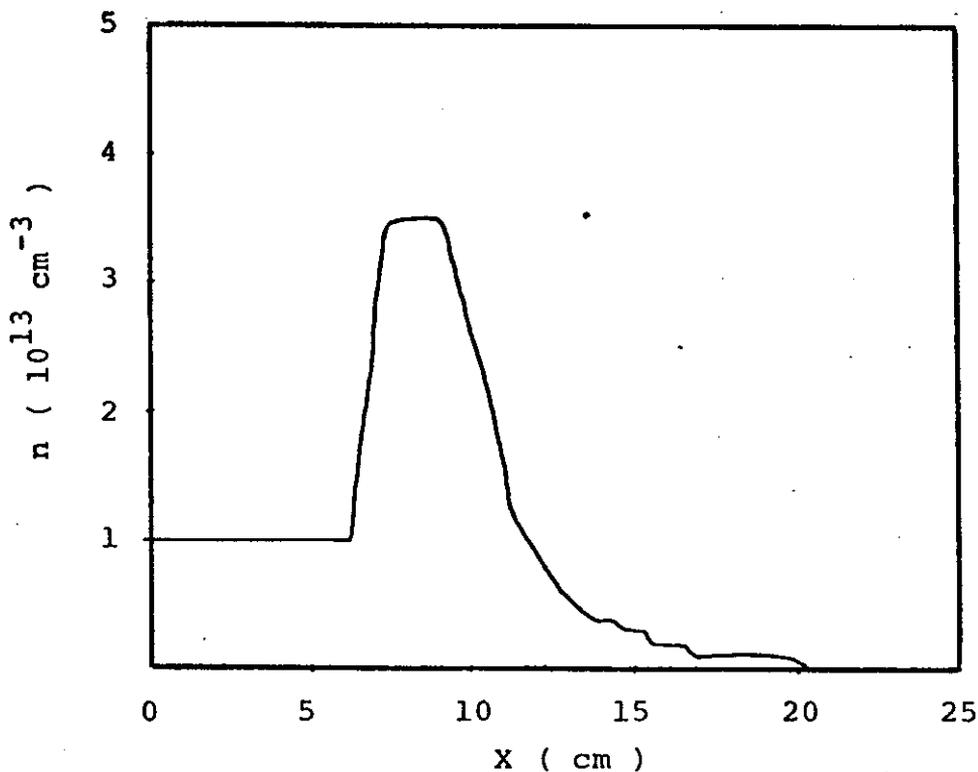
16 a



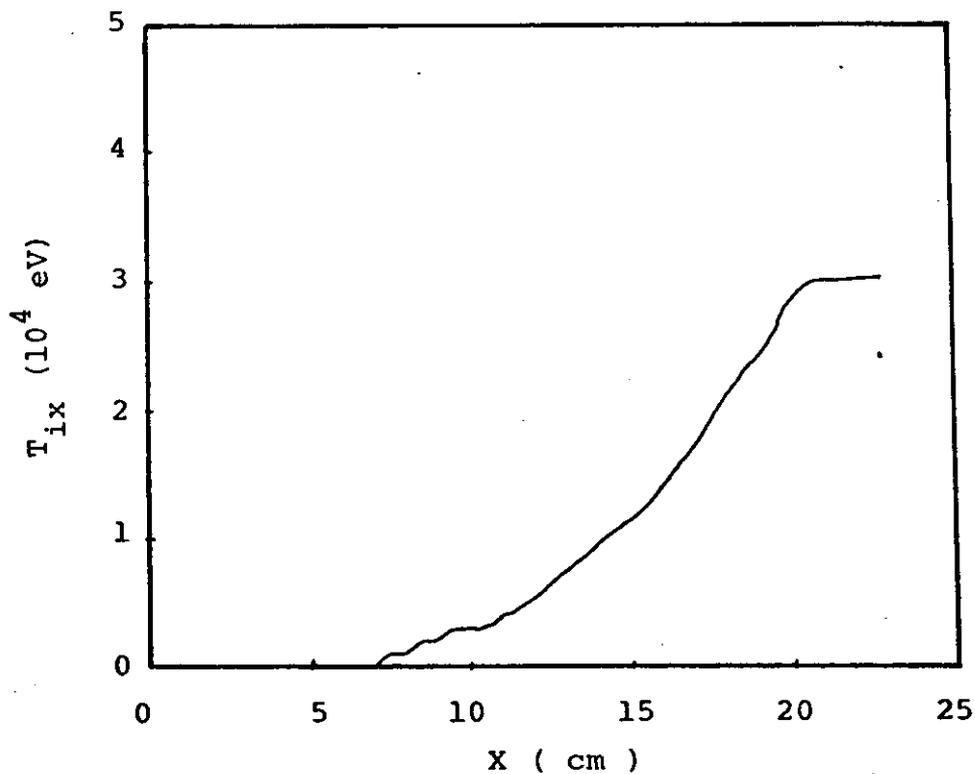
16 b

Modelo de três fluidos com densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de 600G. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 17



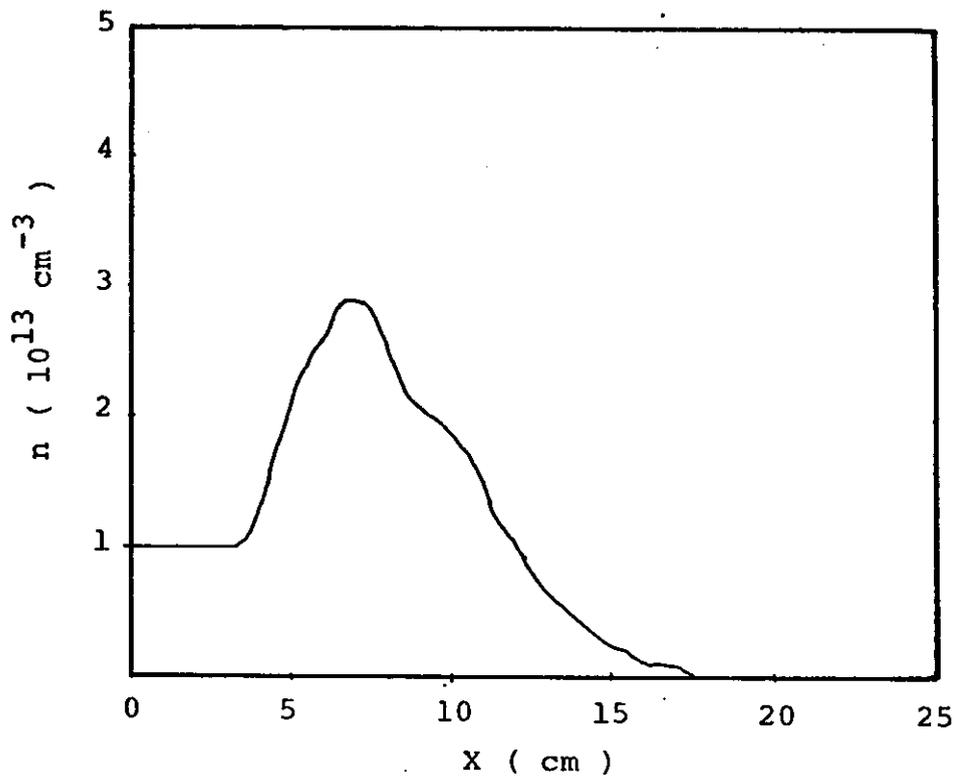
17 a



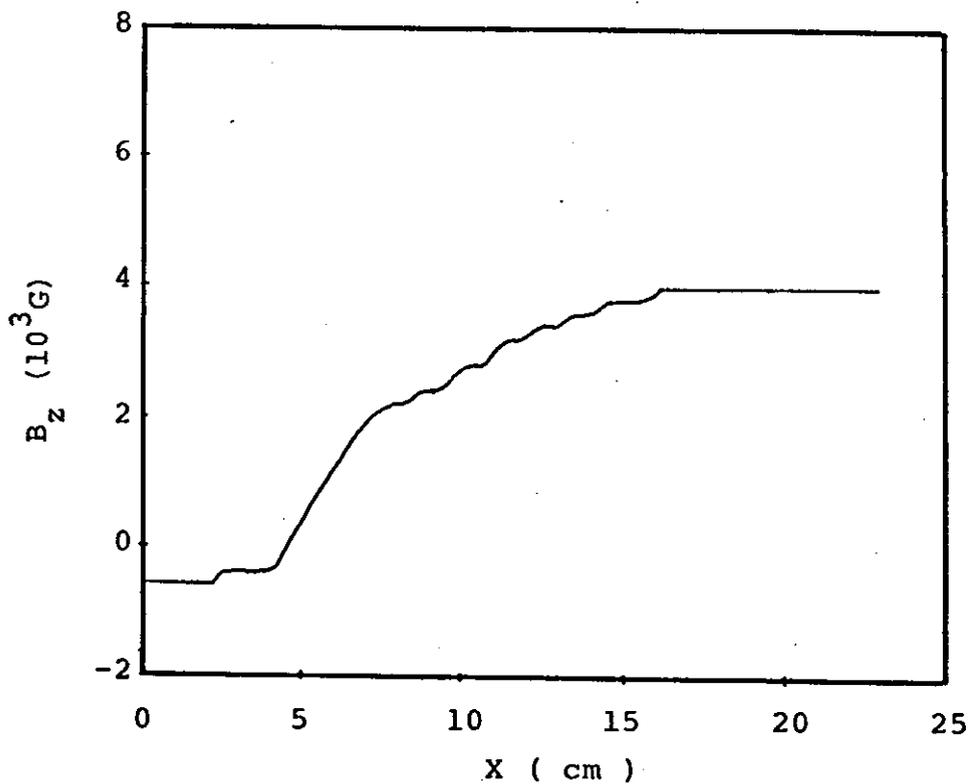
17 b

Modelo de dois fluidos com densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de  $-600\text{G}$ . Referem-se a  $153 \text{ ns}$ .

FIGURA 18



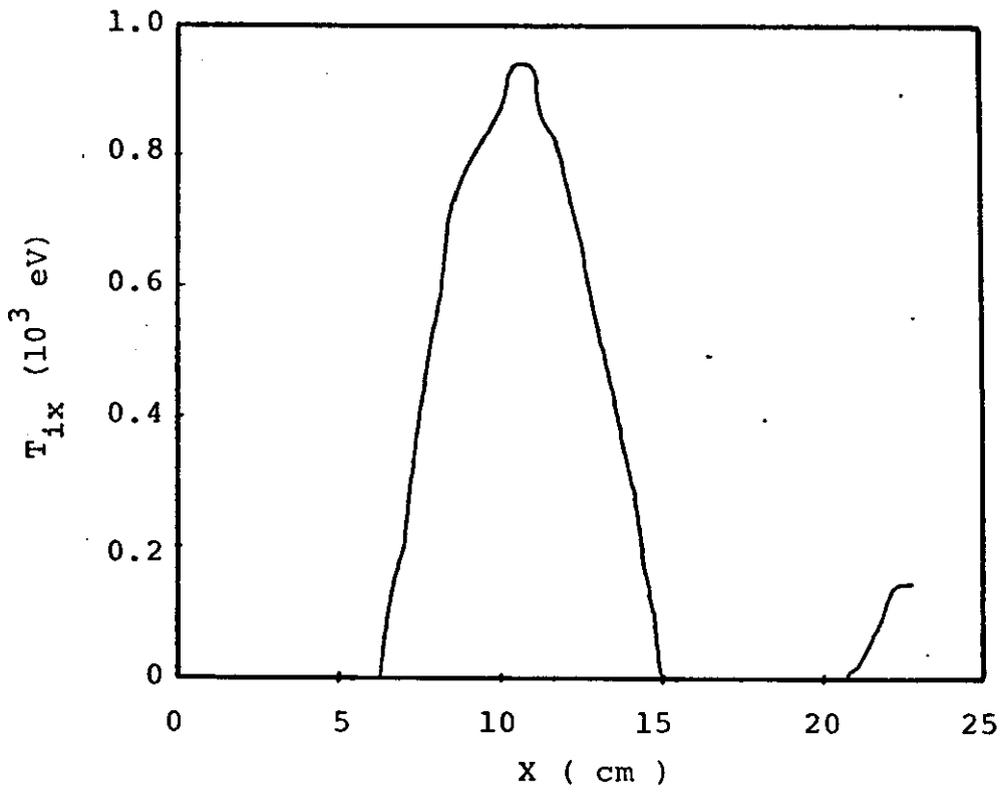
18 a



18 b

Modelo de três fluidos com densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de -600G. Referem-se a 153 ns.

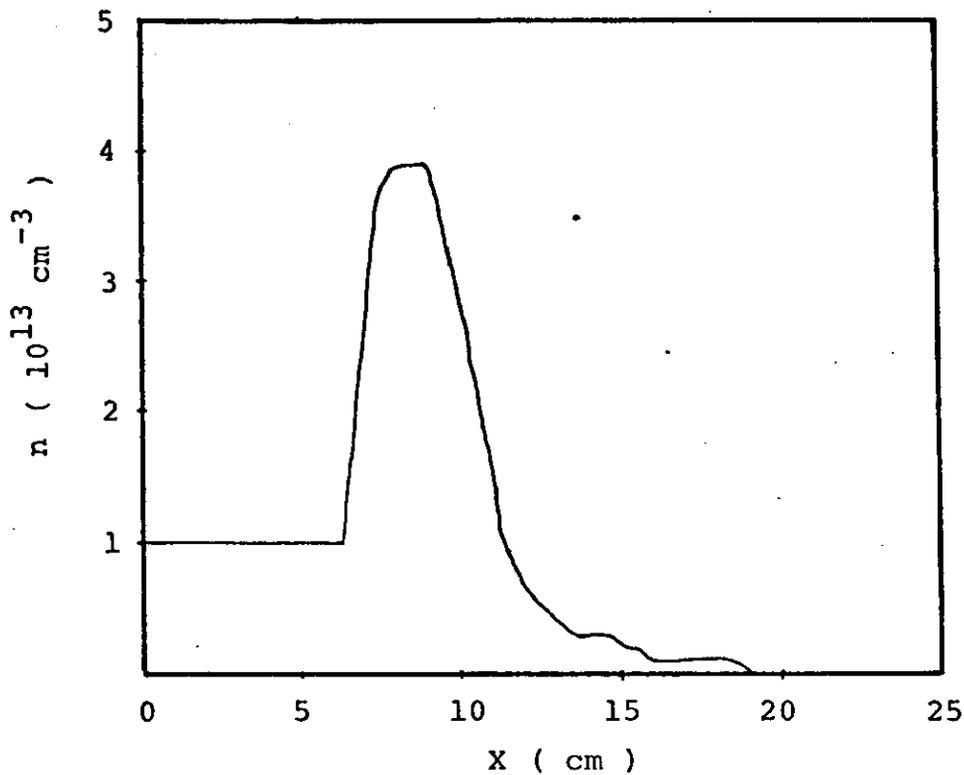
FIGURA 18



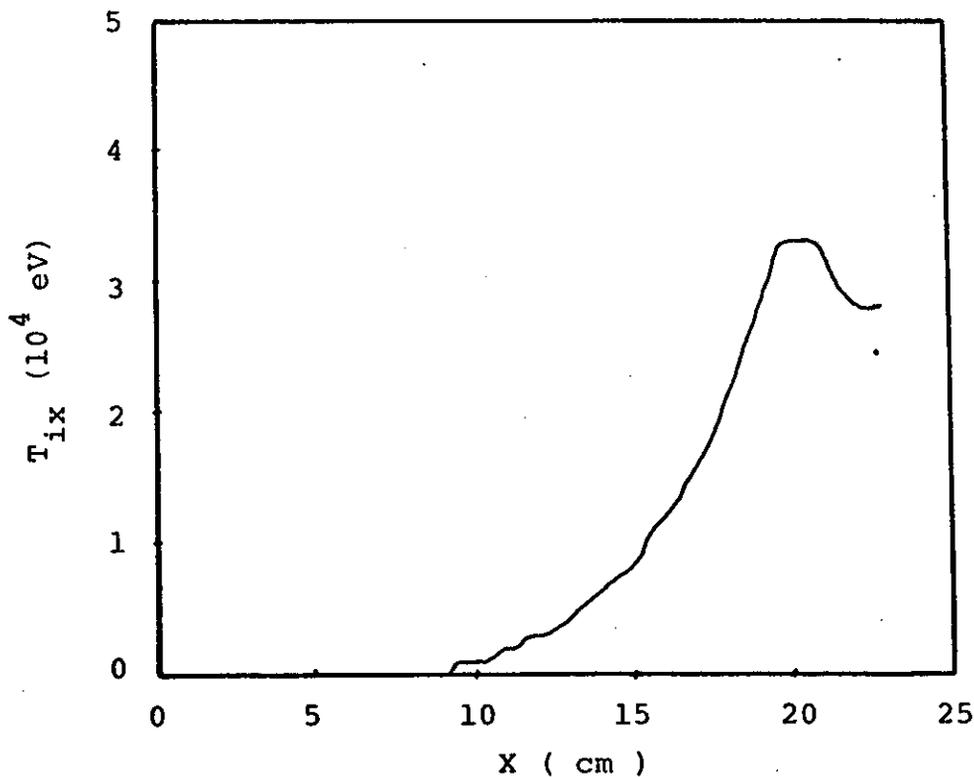
18 c

A figura acima refere-se a 153 ns.

FIGURA 19



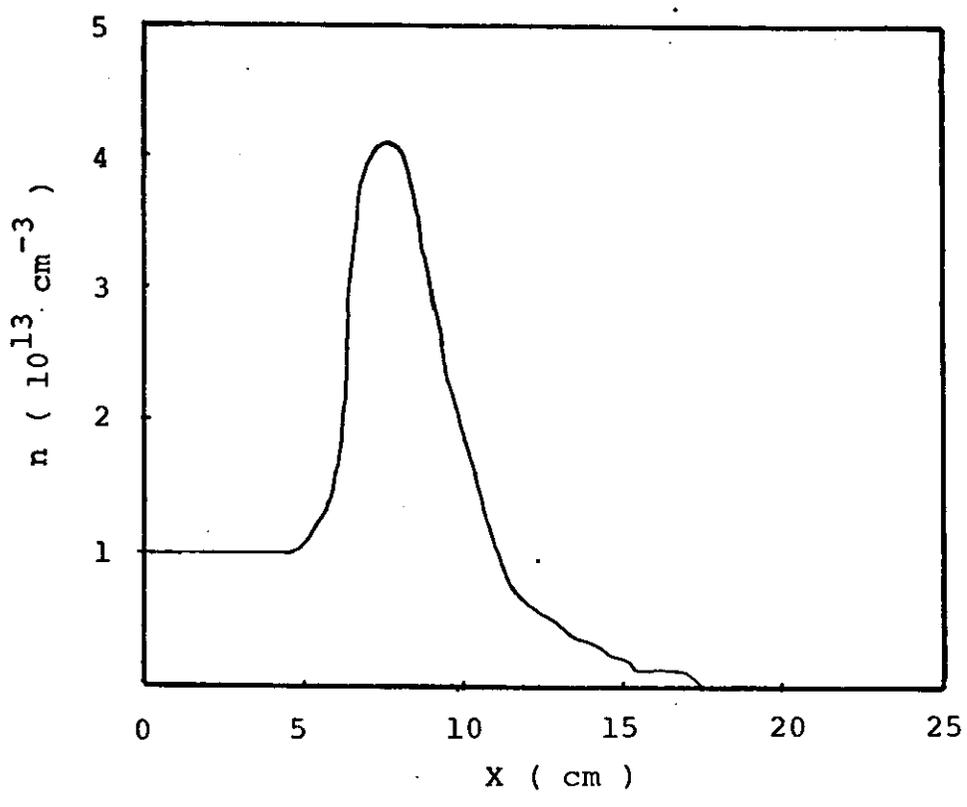
19 a



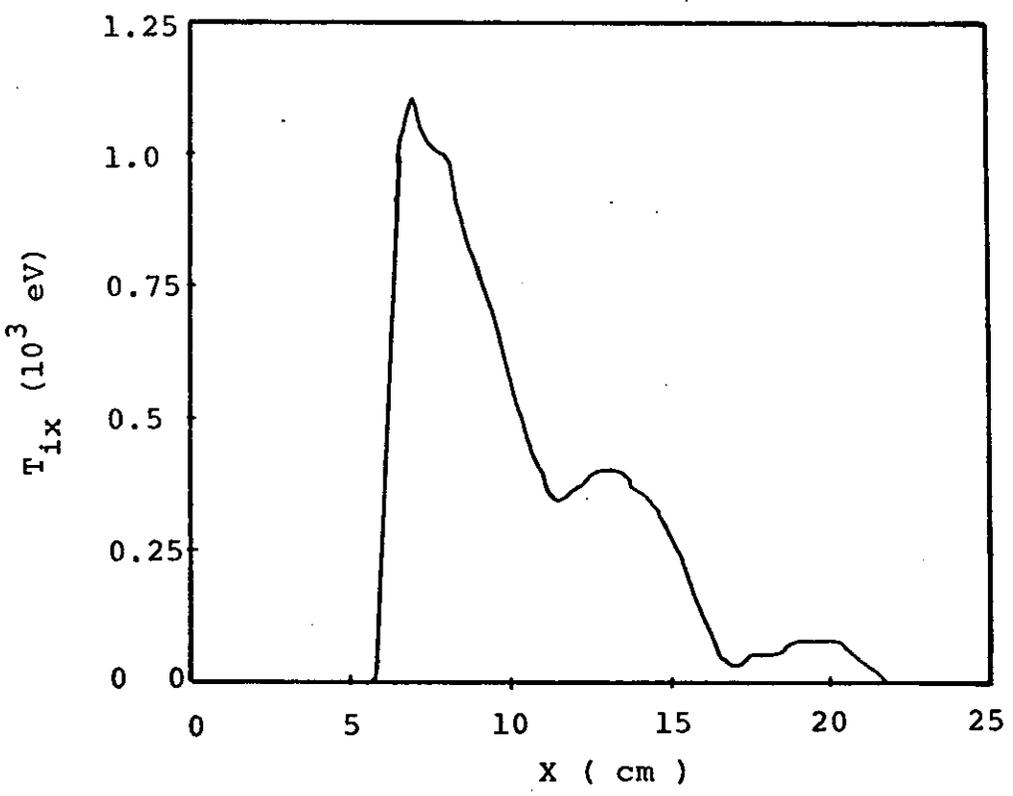
19 b

Modelo de dois fluidos com densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , sem campo de polarização. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 20



20 a



20 b

Modelo de três fluidos com densidade de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , sem campo de polarização. Referem-se a 136 ns.

paralelo, se bem que para êstes parâmetros a compressão parece ser pequena e não há compressão do campo de polarização inicial, figura 18b.

Será considerado, a seguir, o caso com densidade de  $10^{14}$   $\text{cm}^{-3}$  com um campo magnético que vai a 20 kG em 273 ns e um campo de polarização de 2 kG. Novamente foram usados na simulação o modelo de dois fluidos e o modelo de três fluidos.

Os resultados da simulação com campo de polarização de + 2 kG, usando o modelo de dois fluidos, estão apresentados na figura 21, correspondente a 119 ns. O perfil da densidade, figura 21a, apresenta um máximo de  $3,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , nas proximidades de  $x = 10$  cm, com uma largura próxima a 5 cm. A temperatura, figura 21b, apresenta um valor muito alto nas proximidades de  $x = 15$  cm, onde a densidade é muito baixa, e tem um máximo com 2 keV nas proximidades de  $x = 10$  cm.

Na figura 22, correspondente a 136 ns, estão apresentados os resultados da simulação com o modelo de três fluidos. O perfil de densidade, figura 22a, apresenta um máximo de  $4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , em  $x = 5$  cm, com uma largura igual a 6,25 cm. A temperatura, figura 22b, apresenta um máximo que vale quase 10 keV em  $x = 3,75$  cm, vale 8 keV em  $x = 5$  cm e tem um outro pico em  $x = 11,25$  cm que vale 6 keV.

A seguir são apresentados resultados com o campo de polarização de - 2000 G. Os resultados obtidos, usando o modelo de dois fluidos, estão apresentados na figura 23, correspondente a - 170 ns. O perfil da densidade, figura 23a, apresenta um máximo de quase  $5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , cuja largura é de 5 cm, nas proximidades de  $x = 7,5$  cm. A temperatura, figura 23b, apresenta um valor muito ele-

vado nas proximidades de  $x = 12,5$  cm.

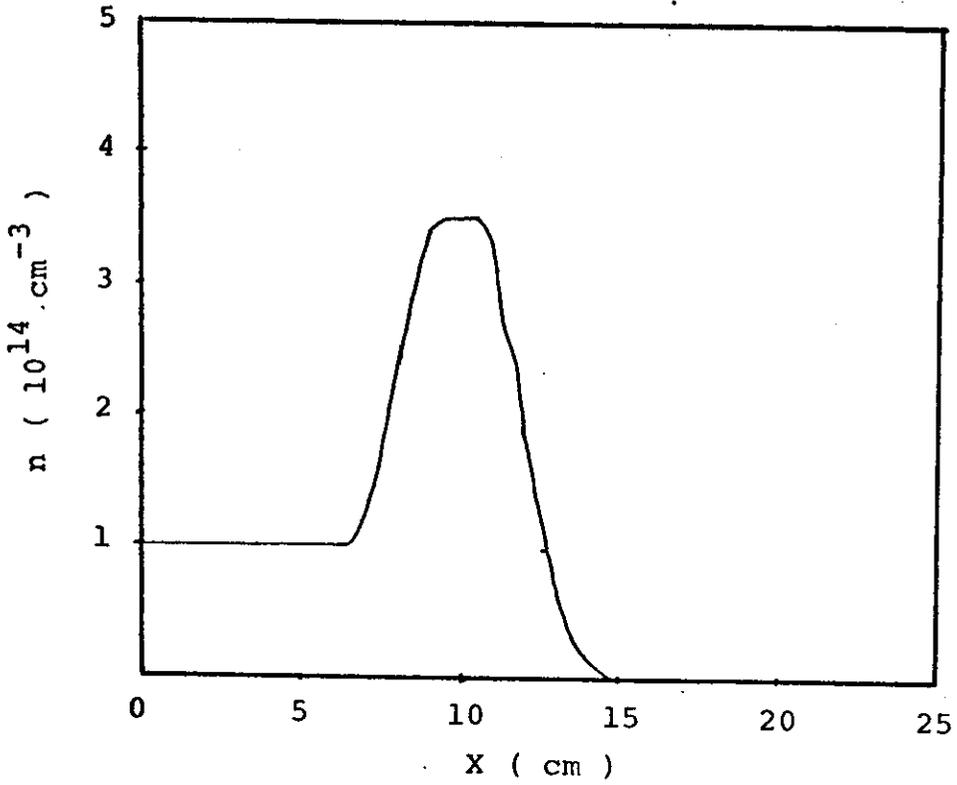
Na figura 24 estão os resultados da simulação, com o modelo de três fluidos, do mesmo caso do parágrafo anterior. O perfil da densidade, figura 24a, tem um máximo de  $4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , em  $x = 6,25$  cm, cuja largura é de 9,5 cm e, além disso, apresenta um perfil que indica a presença de íons refletidos. O perfil do campo magnético, figura 24b, apresenta compressão do campo de polarização inicial, valendo este - 3 kG em  $x = 3,75$  cm. A temperatura, figura 24c, apresenta um valor de 14 keV nas proximidades de 6,25 cm.

Finalmente tem-se os resultados da simulação sem campo de polarização. Os resultados da simulação, usando o modelo de dois fluidos, estão apresentados na figura 25, correspondente a 136 ns. O perfil da densidade, figura 25a, apresenta um máximo de  $3,6 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  em  $x = 9,4$  cm, com uma largura de 5,0 cm. A temperatura, figura 25b, apresenta um pico próximo a  $x = 15$  cm, de valor muito elevado.

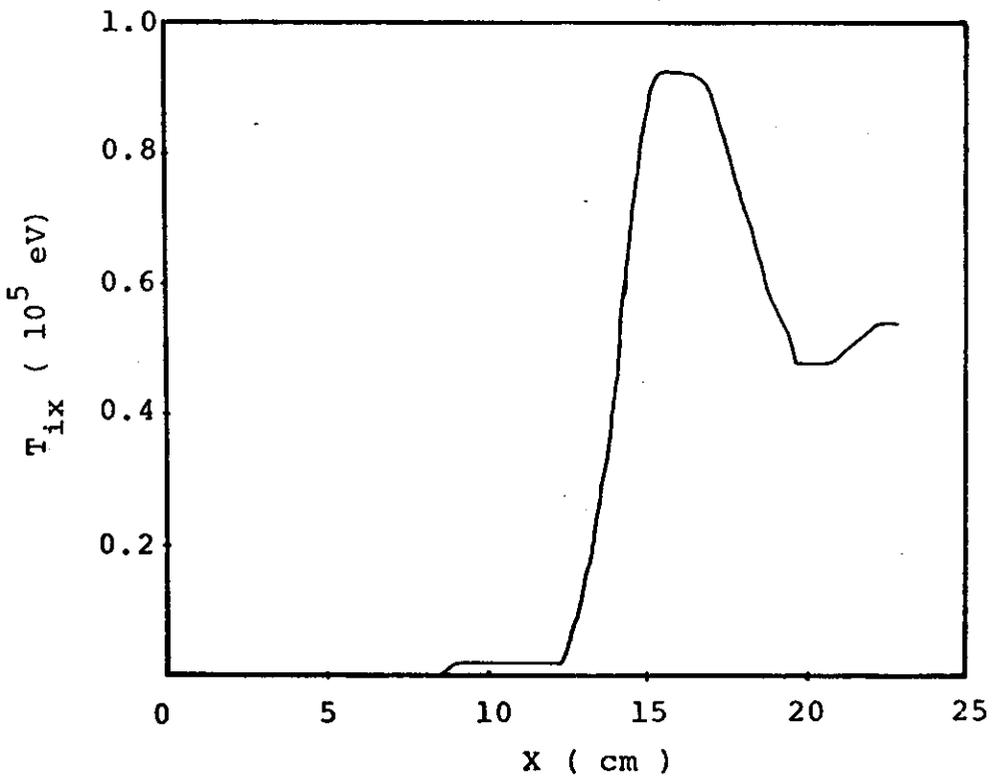
Os resultados para este caso, com o modelo de três fluidos, estão apresentados na figura 26, correspondente a 153 ns. O perfil da densidade, figura 26a, tem um máximo de  $4,2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , em  $x = 4$  cm, com uma largura de 8,0 cm e apresenta perfil indicativo da existência de íons refletidos. A temperatura, figura 26b, apresenta um máximo com valor próximo a 7 keV, em  $x = 3,75$  cm, e outro máximo com mais de 10 keV próximo de  $x = 10$  cm.

A análise dos resultados, para este caso com densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , indica novamente uma maior presença de íons refletidos - no caso de campo de polarização anti-paralelo.

FIGURA 21



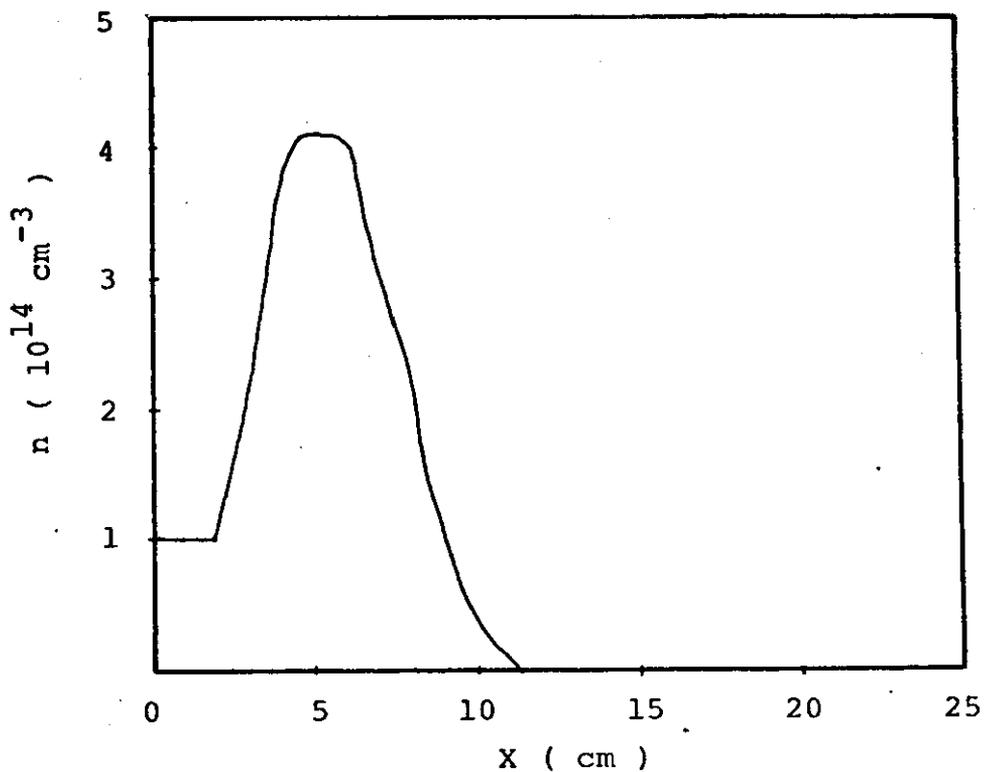
21 a



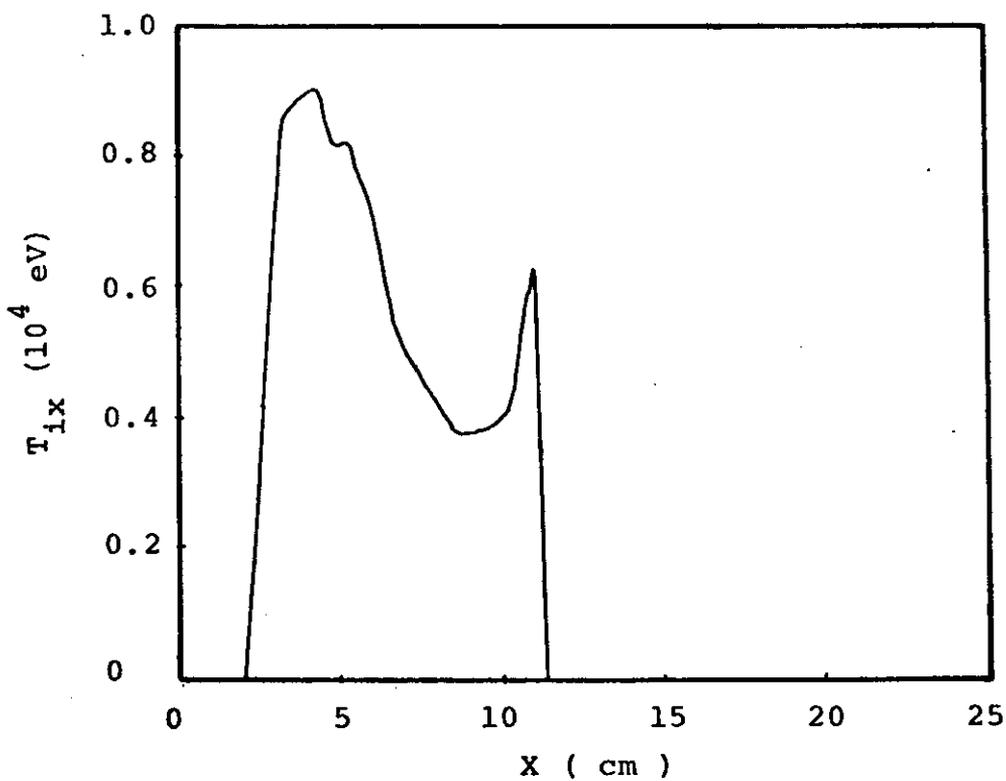
21 b

Modelo de dois fluidos com densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de 2000G. Referem-se a 119 ns.

FIGURA 22



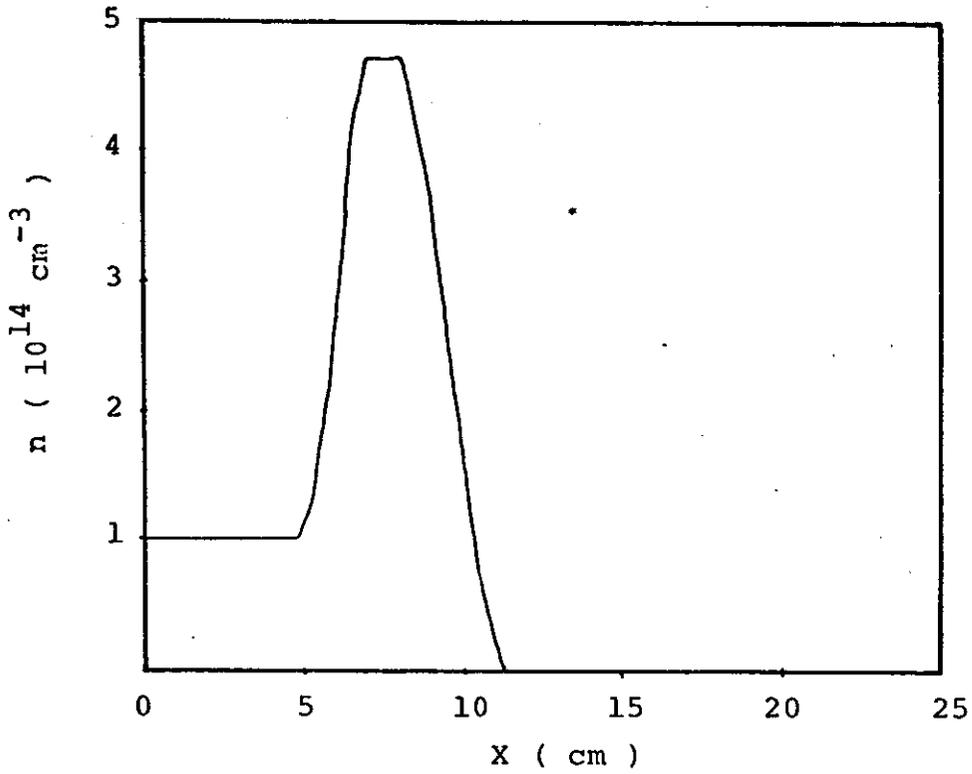
22 a



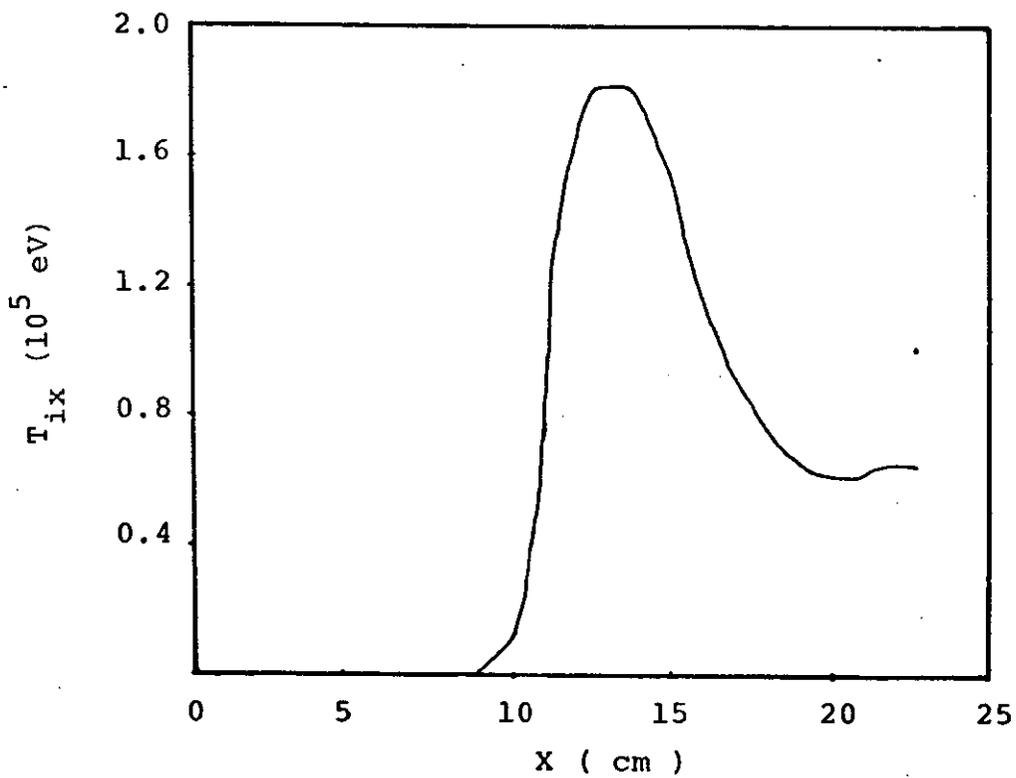
22 b

Modelo de três fluidos com densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de 2000G. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 23



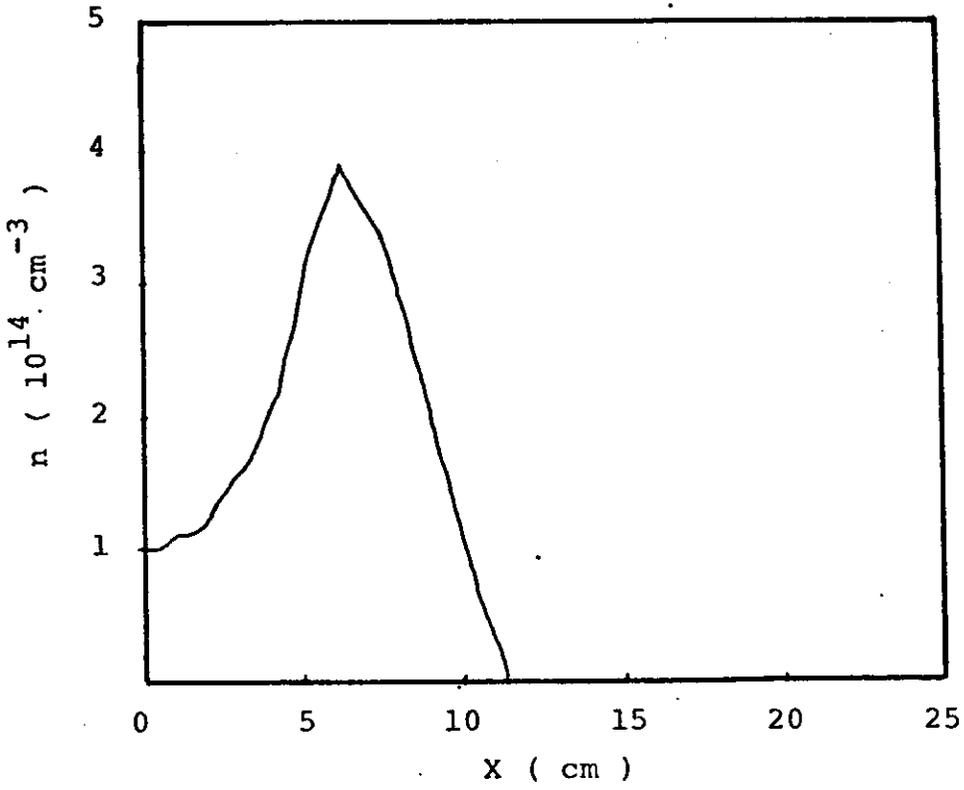
23 a



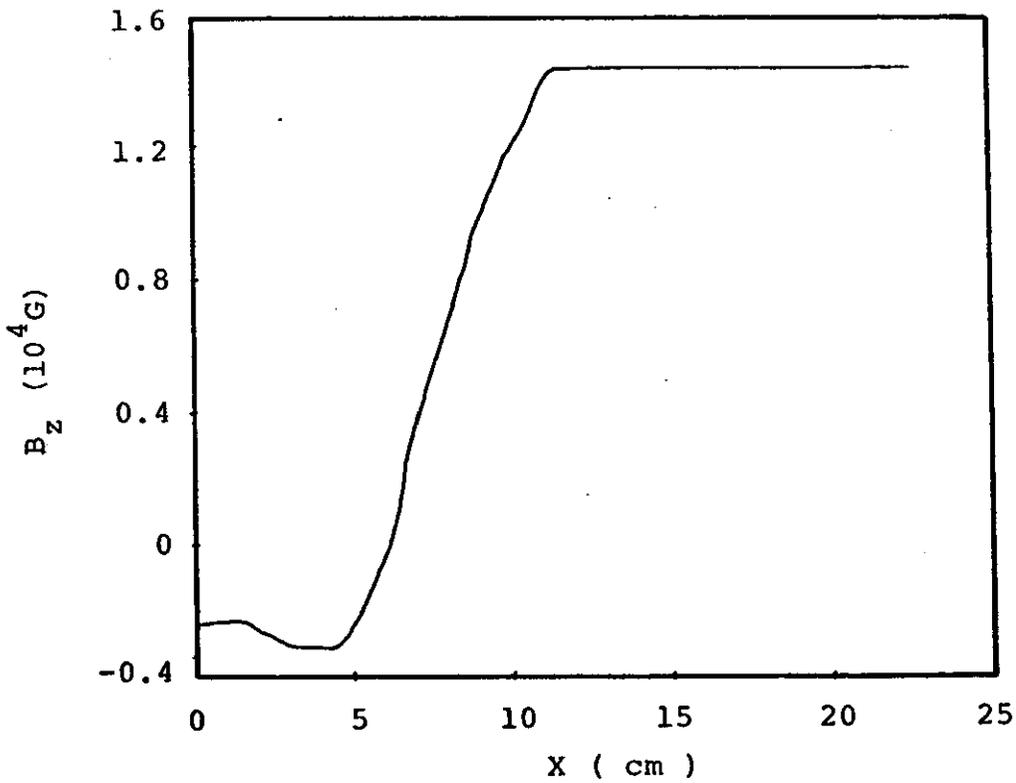
23 b

Modelo de dois fluidos para densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de  $-2000\text{G}$ . Refere-se a  $170 \text{ ns}$ .

FIGURA 24



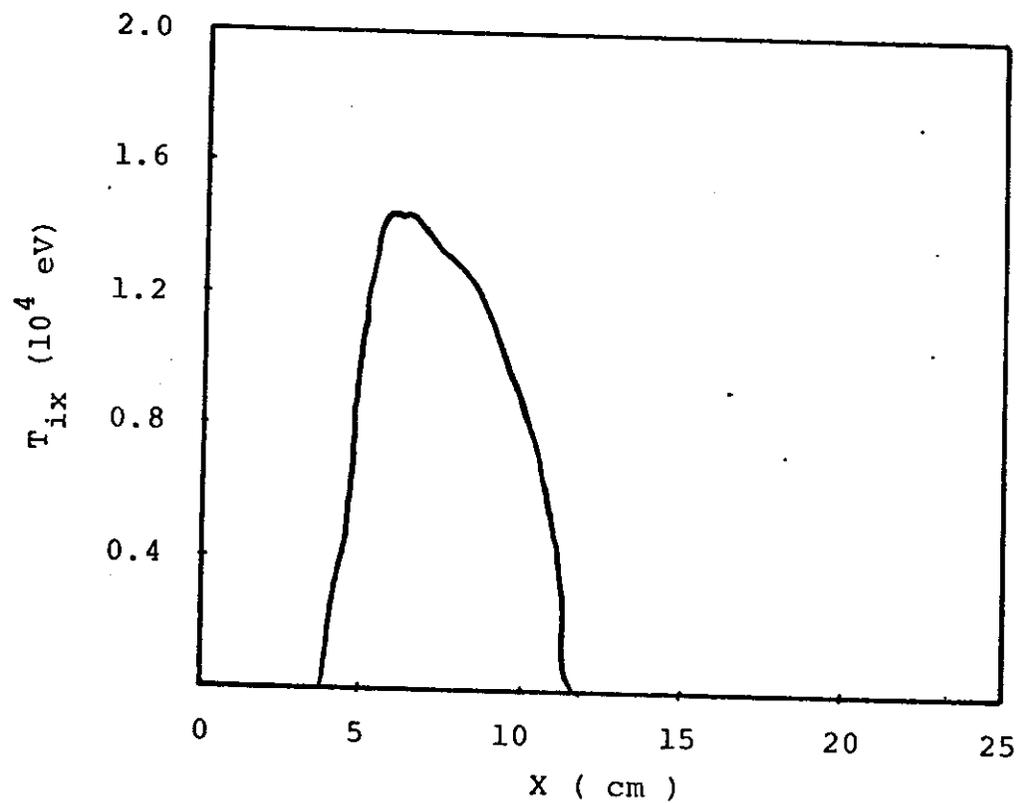
24 a



24 b

Modelo de três fluidos com densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , com campo de polarização de -2000G. Refere-se a 170 ns.

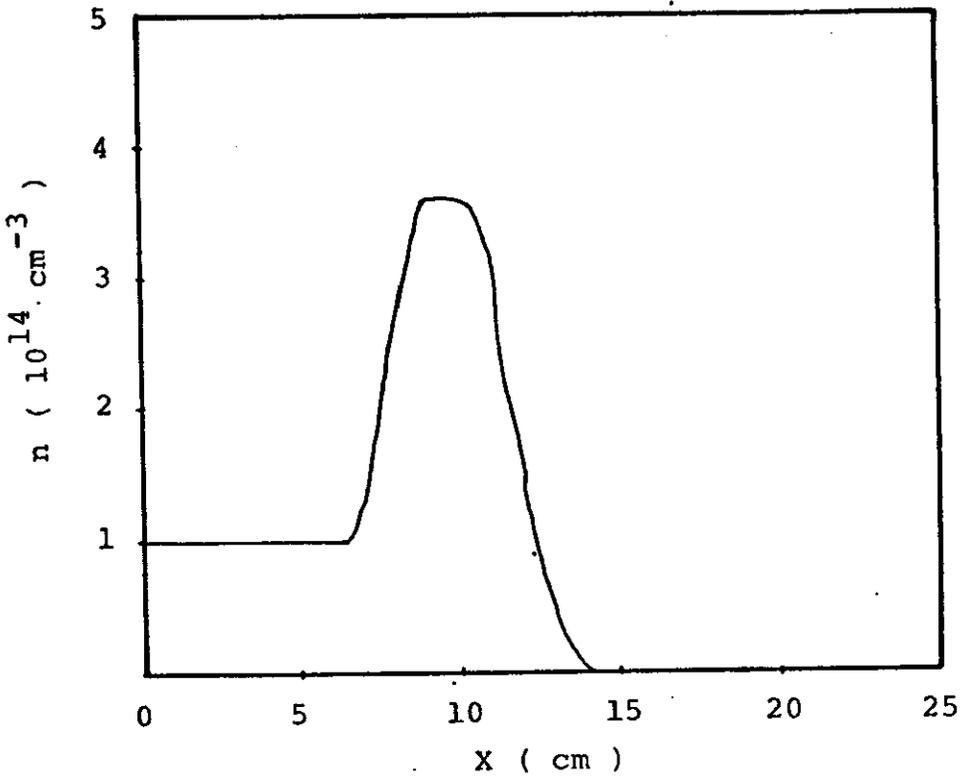
FIGURA 24



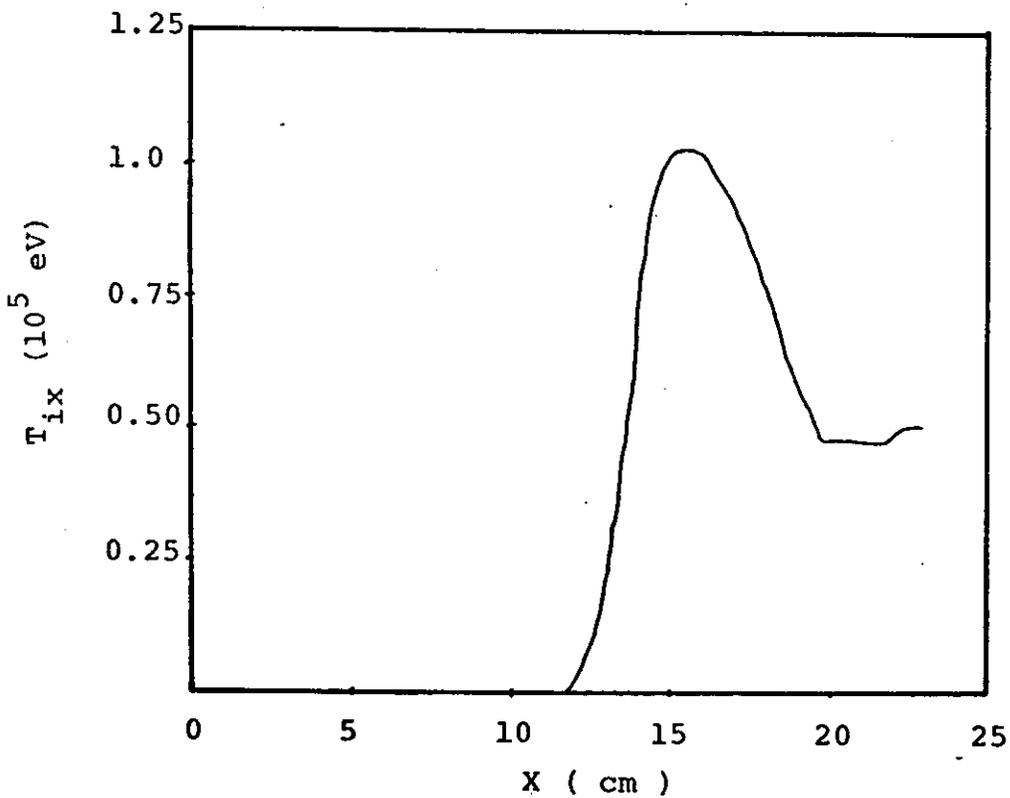
24 c

A figura acima refere-se a 170 ns.

FIGURA 25



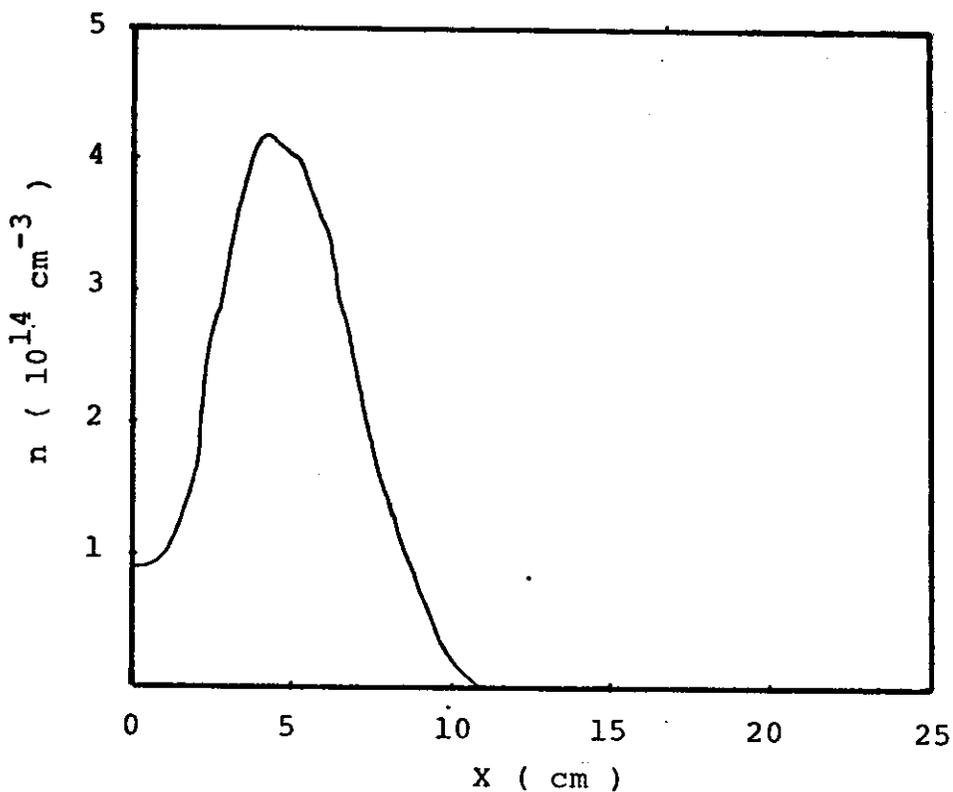
25 a



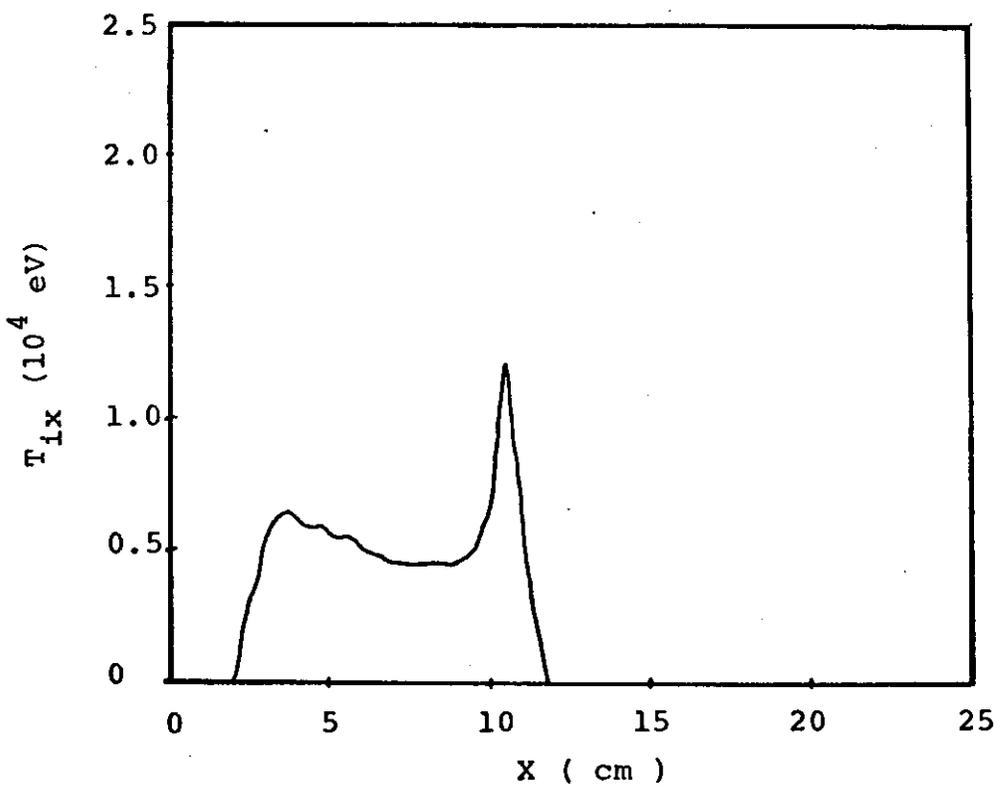
25 b

Modelo de dois fluidos com densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , sem campo de polarização. Referem-se a 136 ns.

FIGURA 26



26 a



26 b

Modelo de três fluidos com densidade de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , sem campo de polarização. Referem-se a 153 ns.

Aqui termina a apresentação dos resultados, referentes à simulação do  $\theta$ -pinch rápido de Maryland, obtidos com o modelo desenvolvido. Os resultados desta simulação foram favoráveis ao modelo apresentado, pois este forneceu bons resultados tanto ao simular diferentes valores de densidade inicial e campo de polarização, como ao satisfazer leis de escala simples. O programa computacional, desenvolvido, é confiável e será aplicado a seguir à simulação do Tupã( $\theta$ -pinch da UNICAMP).

## 10 - Tupã

O sistema Tupã-I é um  $\theta$ -pinch da UNICAMP constituído de um solenóide que mede 1 m de comprimento e o tubo do plasma (câmara de vácuo), no seu interior, tem um diâmetro de 15 cm (Kayama - 1985). Foram feitas simulações de implosões do Tupã-I para dois conjuntos de parâmetros.

Na primeira simulação foi utilizado o seguinte conjunto de dados (Kayama 1985; Sakanaka 1984) para o modelo de três fluidos:

- gás hélio
- densidade inicial de  $2,6 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  (correspondente à pressão inicial de 8 mTorr).
- campo magnético máximo de 9 kG, com tempo de subida de  $1,2 \mu\text{s}$  e sem campo de polarização.

Este modelo supõe um plasma de elétrons e íons, estes tendo todos o mesmo grau de ionização. Mas ao comparar o comportamento dos gases hélio e hidrogênio, nota-se que para ionizar o hidrogênio são necessários 13 eV, enquanto para a primeira ionização do hélio são necessários 24,481 eV enquanto para a segunda ionização são necessários 54,403 eV; logo a aproximação de plasma completamente ionizado é mais razoável no caso de hidrogênio do que do

hélio. E realmente no caso do Tup  a ioniza o   baixa.

Feitas estas considera es, para este primeiro caso o programa de três fluidos foi executado supondo-se três íons diferentes de hélio:

- o hélio uma vez ionizado, caso  $\text{He}^{+1}$
- o hélio com carga efetiva 1,5, caso  $\text{He}^{+1,5}$
- o hélio completamente ionizado, caso  $\text{He}^{+2}$

Os resultados obtidos encontram-se apresentados nas figuras 27 a 29.

#### 11 - CASO $\text{He}^{+1}$

Na figura 27, sendo 27a e 27b correspondentes a 390 ns e 27c e 27d correspondentes a 420 ns, encontram-se os resultados correspondentes   simula o com o modelo de três fluidos. O perfil da densidade, figura 27a, apresenta um máximo em  $x=2$  cm e que vale  $9,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  com uma largura da ordem de 3,5 cm. A temperatura, figura 27b, na região  $x=2$  cm   baixa e vale cerca de 5 eV. Já o perfil da densidade, figura 27c, apresenta um máximo de  $1,4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , que já atingiu a origem. A temperatura, figura 27d, continua baixa, inferior a 10 eV, indicando provavelmente que falta algo ao modelo, como mais ioniza o ou temperatura inicial maior.

#### 12 - CASO $\text{He}^{+1,5}$

Na figura 28, sendo 28a e 28b correspondentes a 375 ns enquanto 28c e 28d correspondem a 400 ns, estão apresentados resultados referentes   simula o com modelo de três fluidos. O perfil da densidade, figura 28a, apresenta um pico com densidade que vale quase  $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  na posi o  $x=2,75$  cm e tem uma largura de 2 cm. A temperatura, figura 28b,   baixa na região de  $x=2,75$  cm e

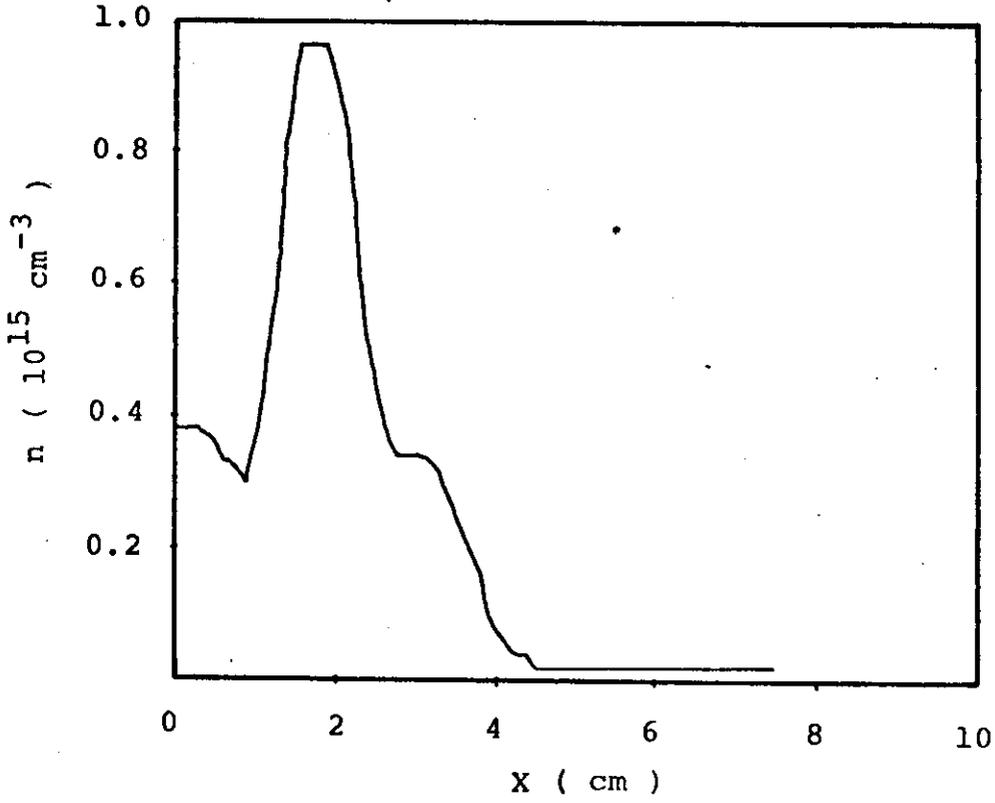
vale menos de 3 eV. O perfil da densidade, figura 28c, tem um pico superior a  $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  em  $x=1,75 \text{ cm}$  com uma presença de íons refletidos em sua frente. A temperatura mantém-se próxima de 4 eV na região em torno de  $x=1 \text{ cm}$ .

### 13 - CASO He<sup>+2</sup>

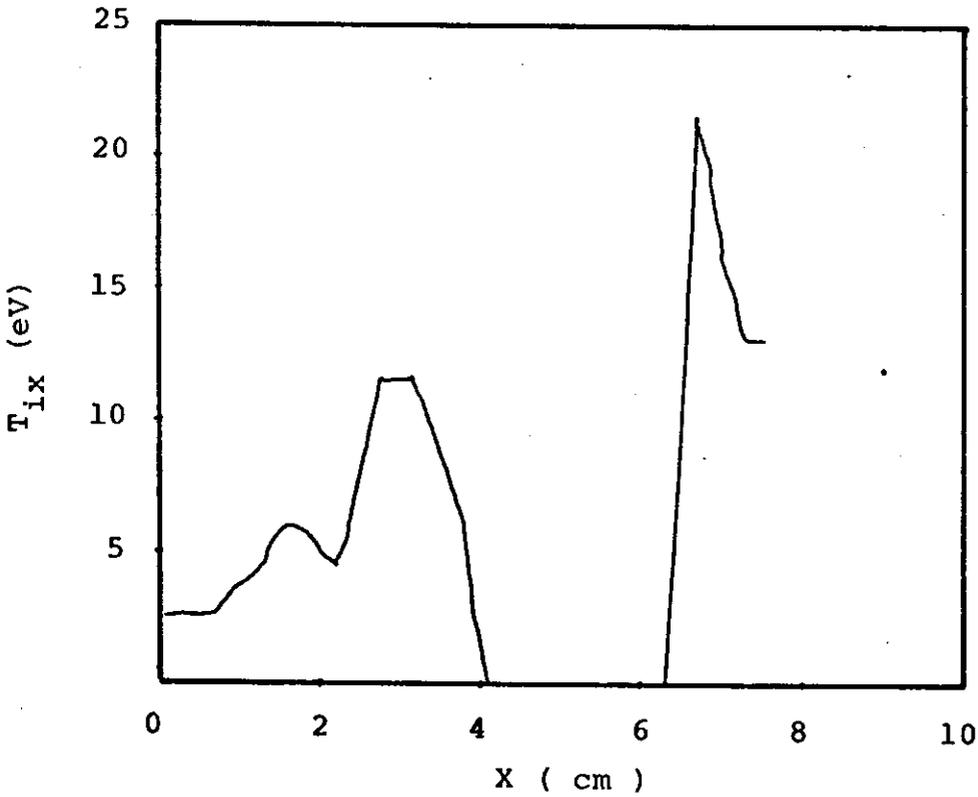
Na figura 29, sendo 29a e 29b correspondentes a 375 ns enquanto 29c, 29d e 29e correspondem a 400 ns, estão apresentados resultados correspondentes à simulação com o modelo de três fluidos. O perfil da densidade, figura 29a, apresenta um máximo de  $1,25 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , em  $x=2 \text{ cm}$ , cuja largura é da ordem de 2 cm. Sendo que o perfil da densidade, figura 29c, correspondente a 400 ns tem um máximo que vale cerca de  $1,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  em  $x=6 \text{ cm}$ , com um perfil característico da presença de íons refletidos, que já alcançou a origem. Já a temperatura neste caso, figuras 29b e 29d, apesar de apresentar picos elevados na região atrás do pistão magnético, onde a densidade é baixa, tem um valor entre 100 e 500 eV na região entre  $x=1 \text{ cm}$  e  $x=1,2 \text{ cm}$ , como pode ser visto a partir da figura 29e que corresponde a um perfil mais detalhado dos valores da temperatura na região próxima ao centro (entre 0 e 1,6 cm).

Da análise dos três resultados apresentados constata-se que é o caso He<sup>+1,5</sup> o que fornece resultados mais próximos das medidas experimentais referentes a tempo de implosão (Kayama 1985) que foi de 600 ns (no caso da simulação, para este caso He<sup>+1,5</sup>, tem-se aproximadamente 500 ns, sendo menor nos outros dois casos). Já o caso He<sup>+2</sup> foi o que deu melhores resultados para o valor da temperatura que foi estimada entre 300 eV e 1,2 keV (a simulação para este caso He<sup>+2</sup> deu entre 100 eV e 500 eV, enquanto deu da ordem de 5 eV para os outros dois casos). Estes resultados estão a indicar a necessidade de haver certo grau de ionização maior do que um para explicar os resultados obtidos.

FIGURA 27



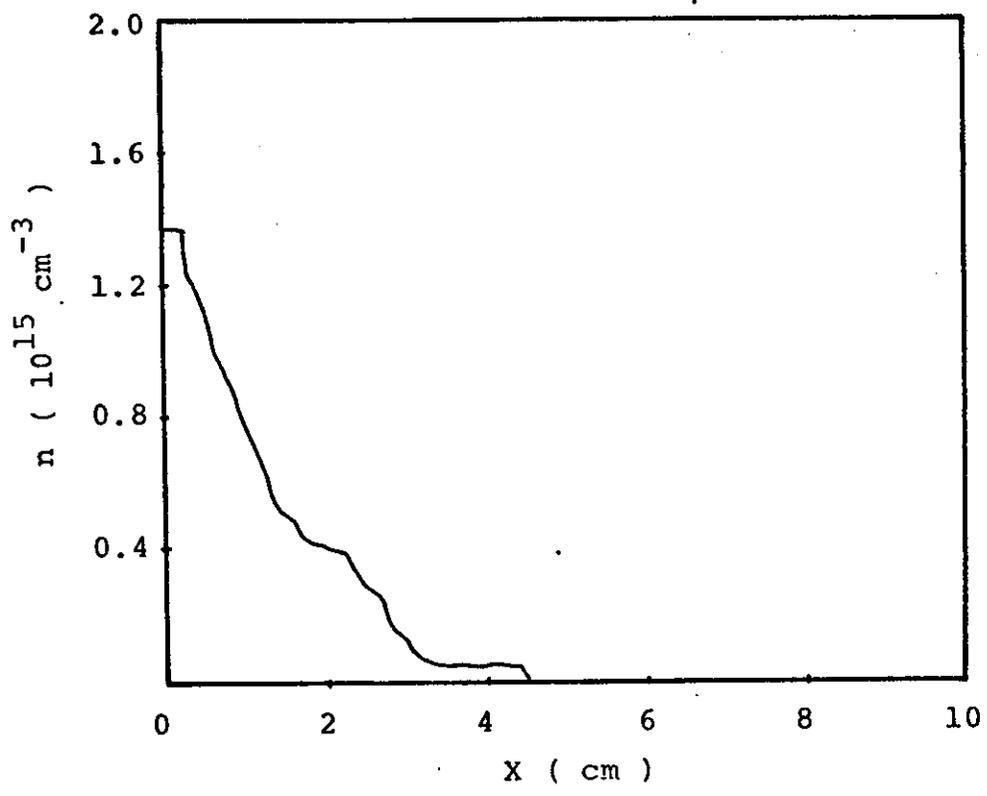
27 a



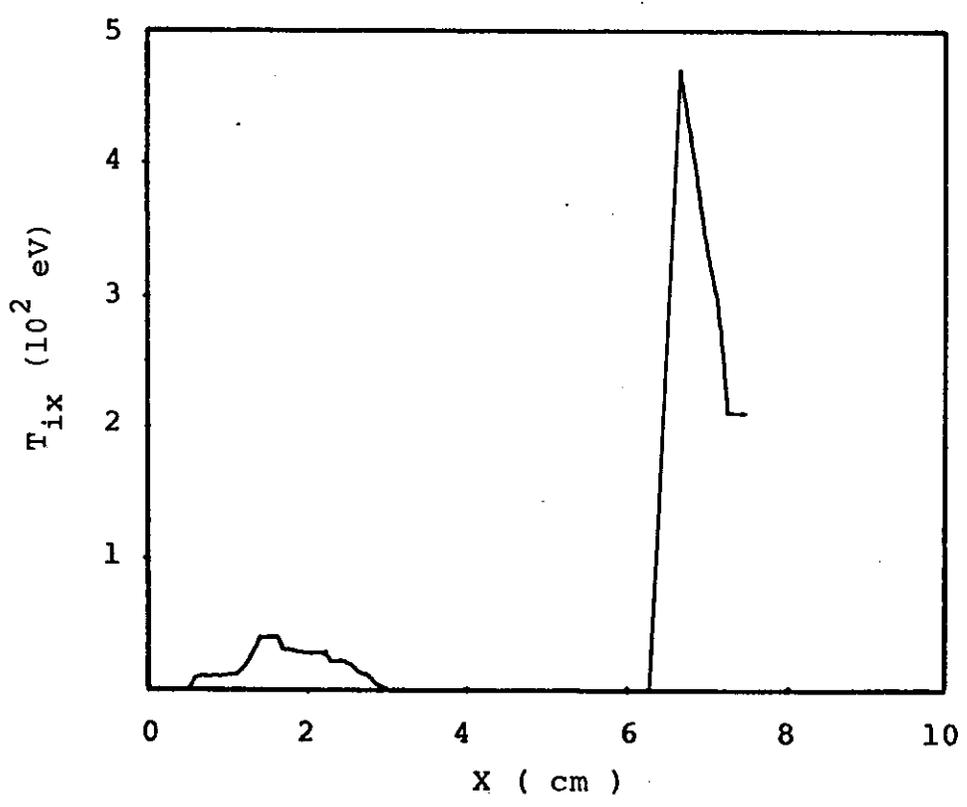
27 b

Modelo de três fluidos para o caso  $\text{He}^{+1}$  sem campo de polarização.  
Referem-se a 390 ns.

FIGURA 27



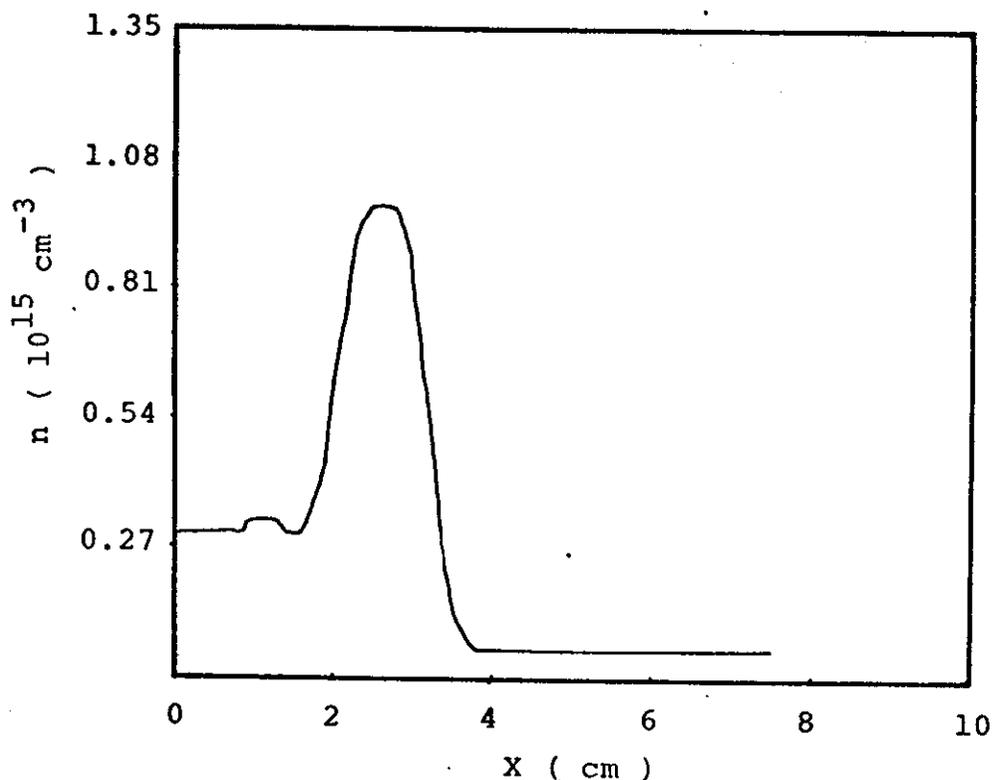
27 c



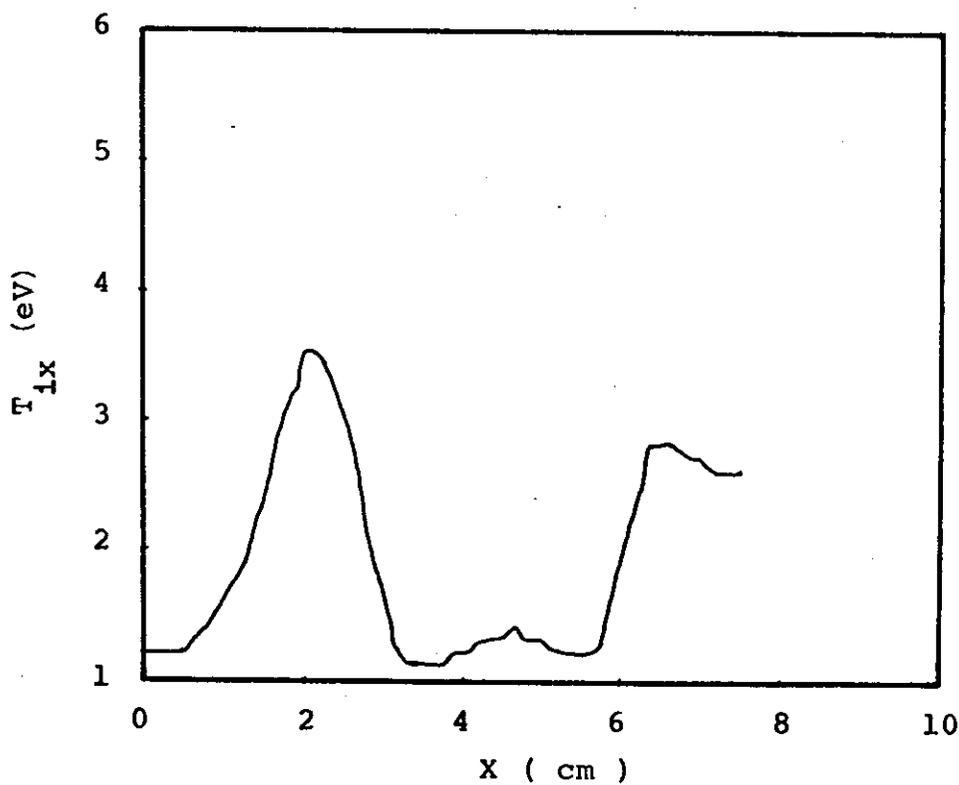
27 a

As figuras acima referem-se a 420 ns.

FIGURA 28



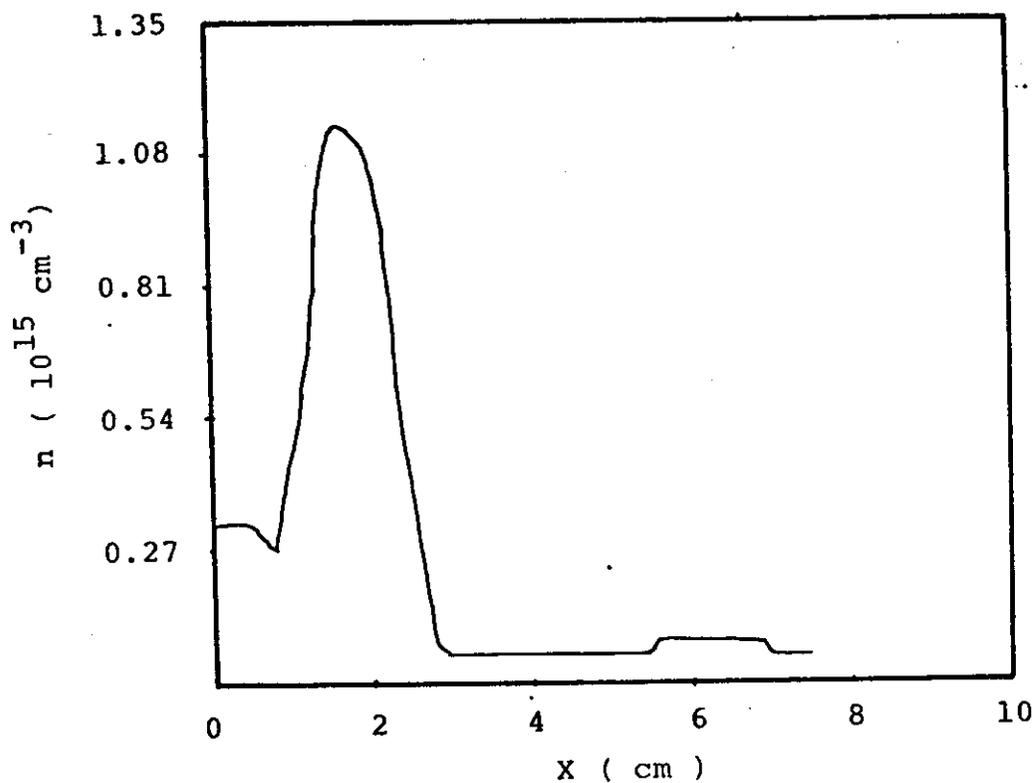
28 a



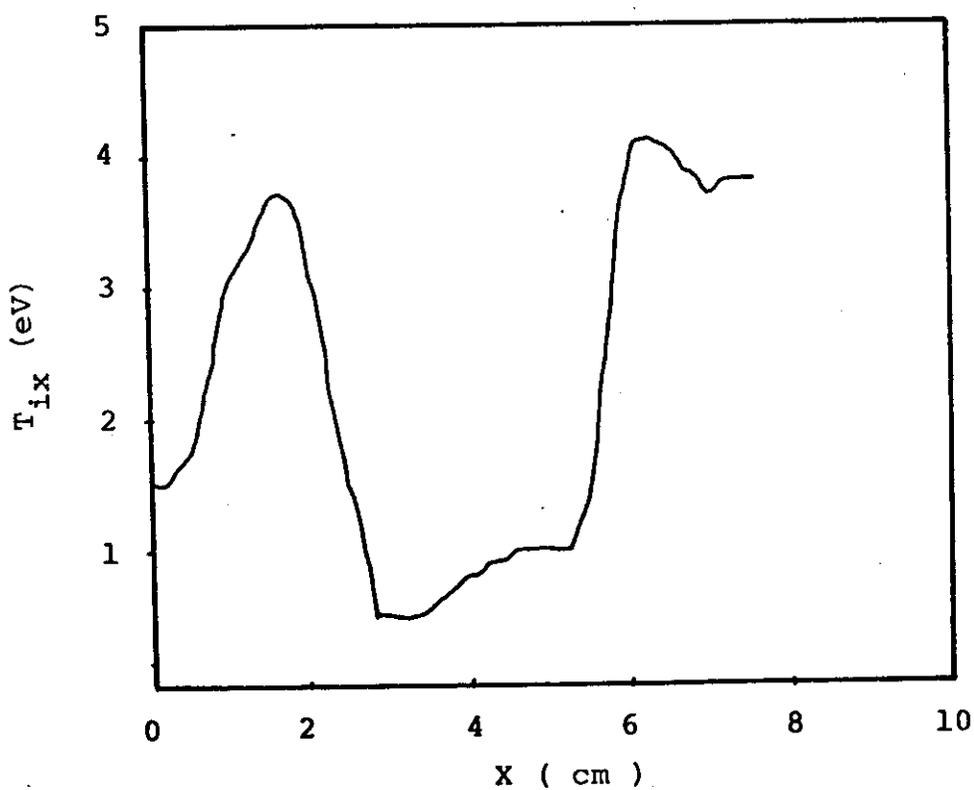
28 b

Modelo de três fluidos para o caso  $\text{He}^{+1,5}$  sem campo de polarização. Referem-se a 375 ns.

FIGURA 28



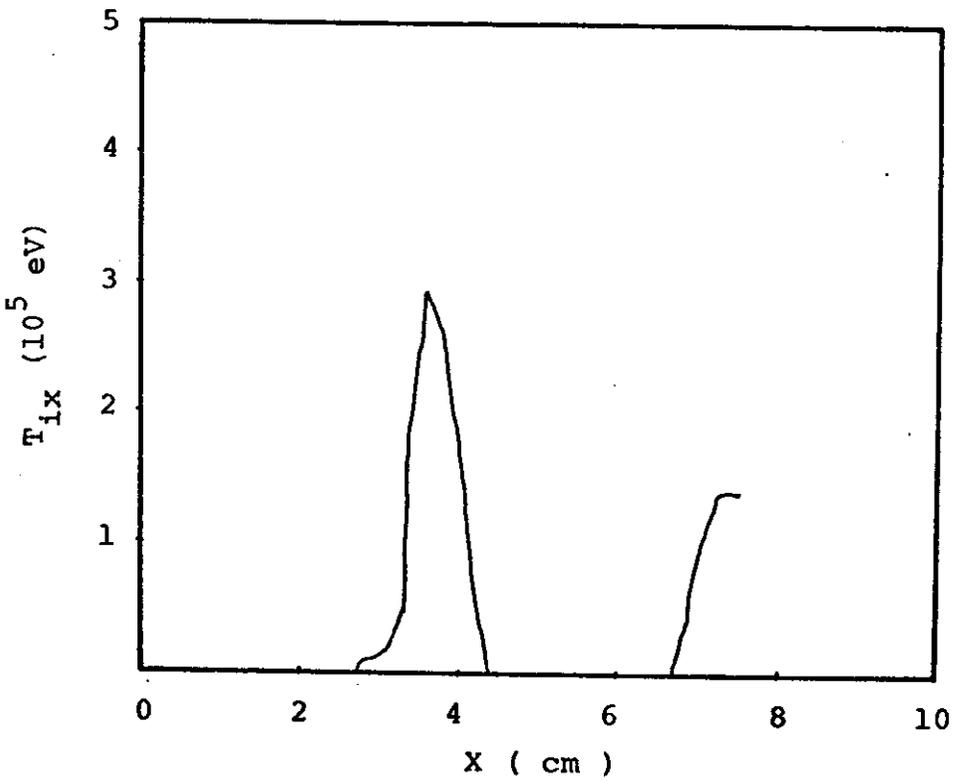
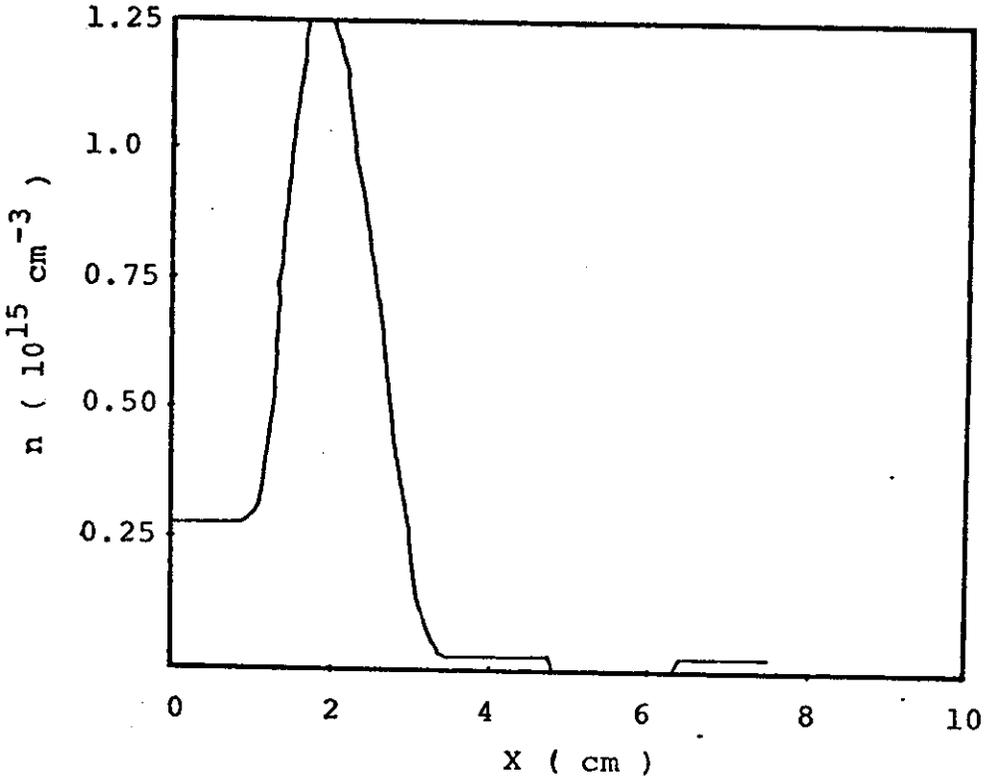
28 c



28 d

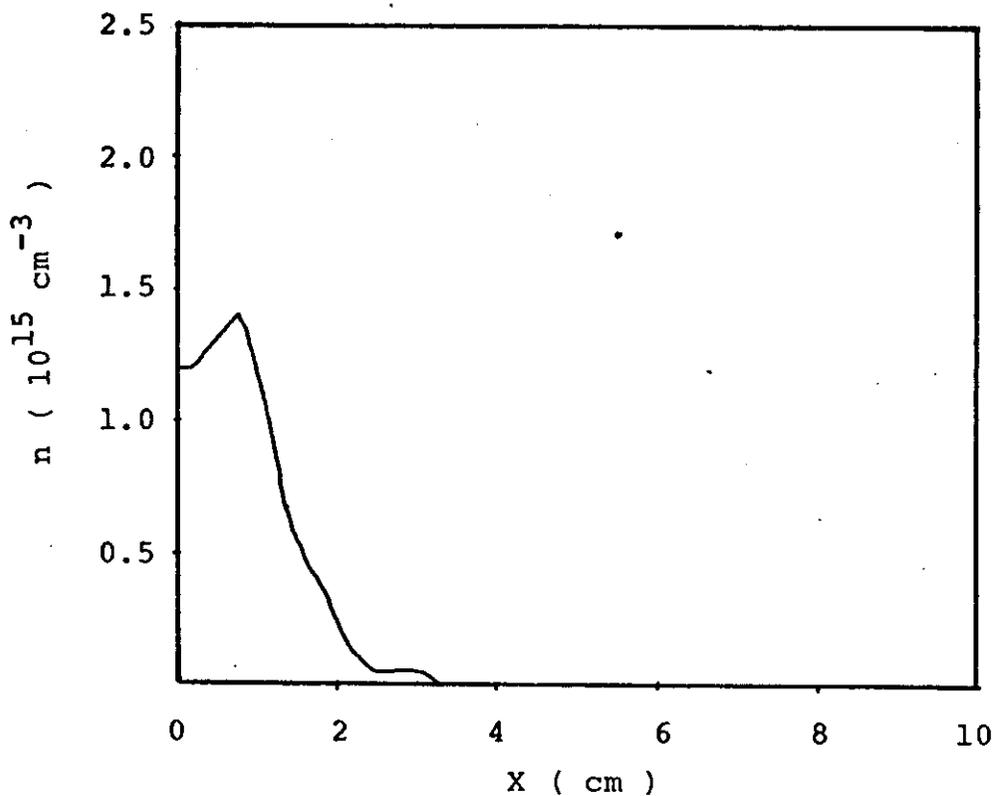
As figuras acima referem-se a 400 ns.

FIGURA 29

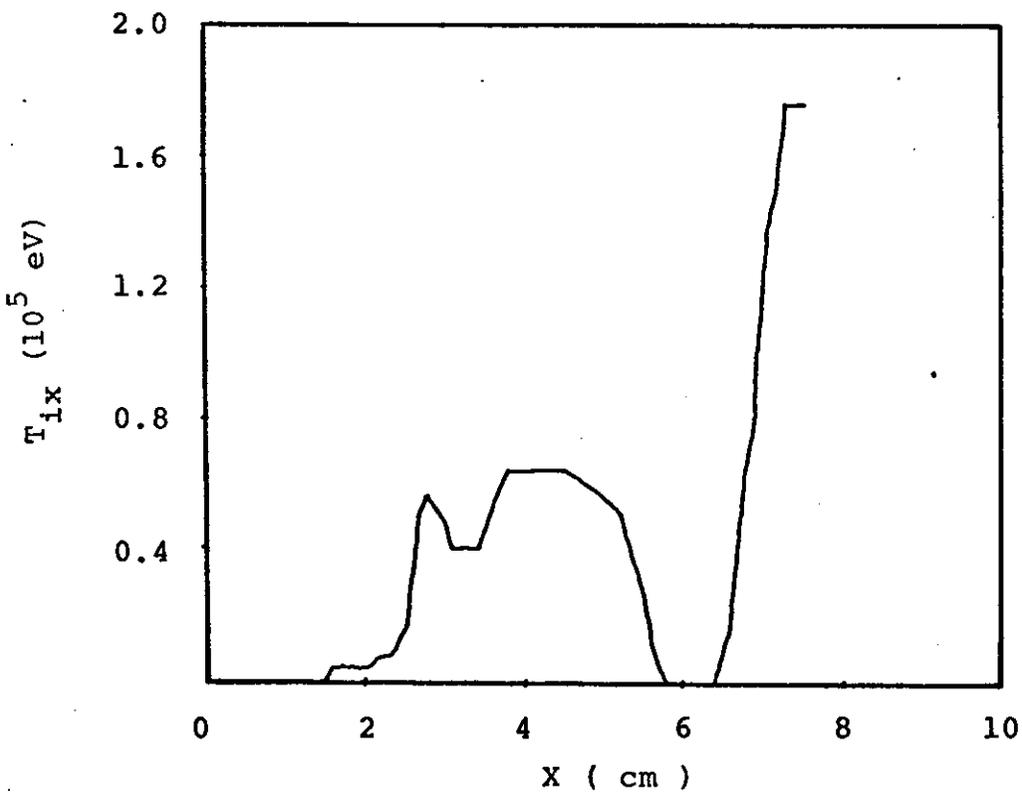


Modelo de três fluidos para o caso  $\text{He}^{+2}$ , sem campo de polarização. Referem-se a 375 ns.

FIGURA 29



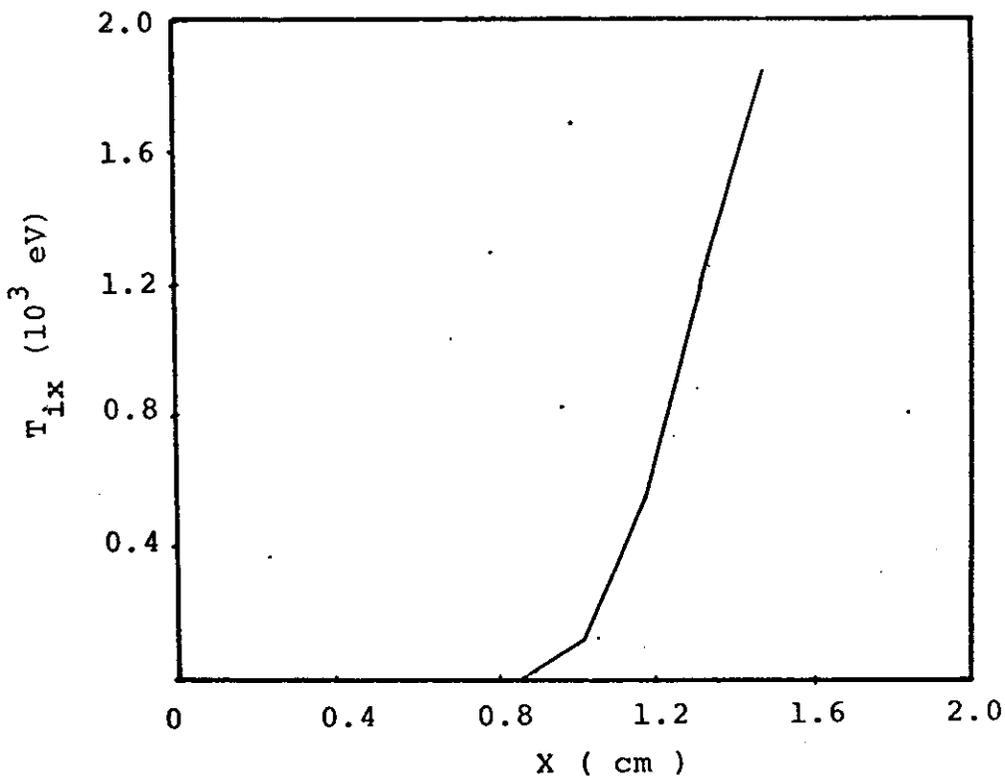
29 c



29 d

As figuras acima referem-se a 400 ns.

FIGURA 29



29 e

Perfil detalhado da temperatura na região próxima à origem, no instante 400 ns.

14 - TUPÃ COM CAMPO DE POLARIZAÇÃO NEGATIVO

Na segunda simulação foi utilizado o seguinte conjunto de parâmetros:

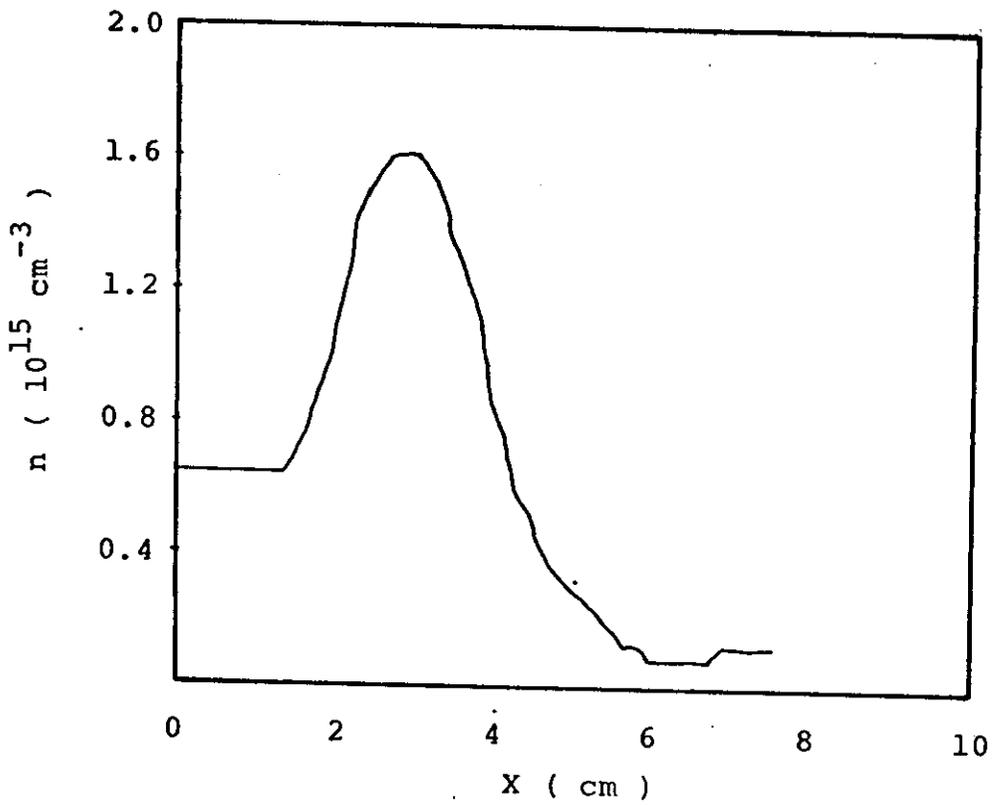
- gás hélio
- densidade inicial de  $6,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$
- campo magnético máximo de 5,4 kG, com tempo de subida de 1,2  $\mu\text{s}$
- campo de polarização anti-paralelo de -390 G

Neste caso o modelo de três fluidos foi usado para simular o caso  $\text{He}^{+1}$  com  $T_i$  inicial de 1 eV. Os resultados desta simulação encontram-se na figura 30, correspondente a 630 ns. O perfil da densidade, figura 30a, apresenta um máximo de  $1,6 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  em  $x=3 \text{ cm}$ , cuja largura é de 2,5 cm. A temperatura, figura 30b, apresenta-se com um valor muito baixo valendo cerca de 2 eV na região  $x=3 \text{ cm}$ . Novamente parece faltar algo ao modelo para explicar temperaturas mais elevadas da ordem de 150 eV. Foi testada uma simulação com  $\text{He}^{+1,5}$ , mas para este caso o pistão magnético caminhou muito depressa e o tempo de implosão ficou muito abaixo dos 300ns, correspondentes a este experimento.

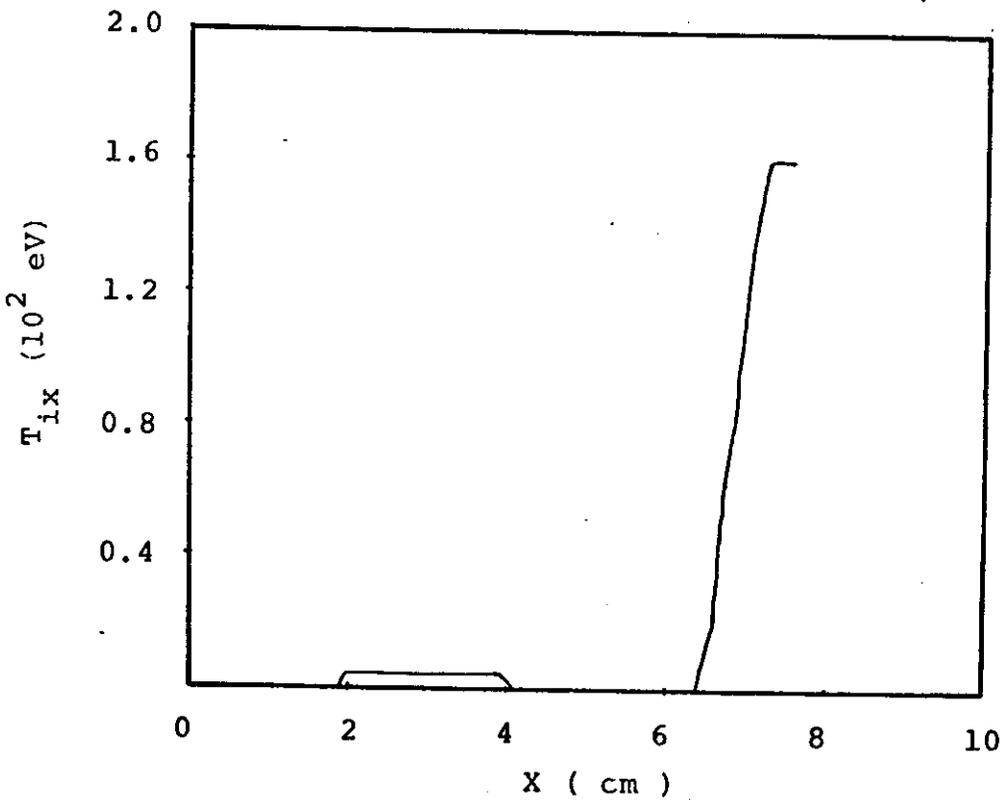
Fez-se uma nova simulação com o modelo de três fluidos para o caso  $\text{He}^{+1}$ , somente que agora  $T_i$  foi tomada como sendo igual a 5 eV, os resultados desta simulação encontram-se na figura 31, sendo que 31a e 31b referem-se a 690 ns enquanto 31c, 31d e 31e referem-se a 810 ns.

O perfil de densidade, figura 31a, apresenta um máximo de  $1,7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  em  $x=2,5 \text{ cm}$ , com largura de 3 cm, indicando a presença de íons refletidos. O perfil do campo magnético, figura

FIGURA 30



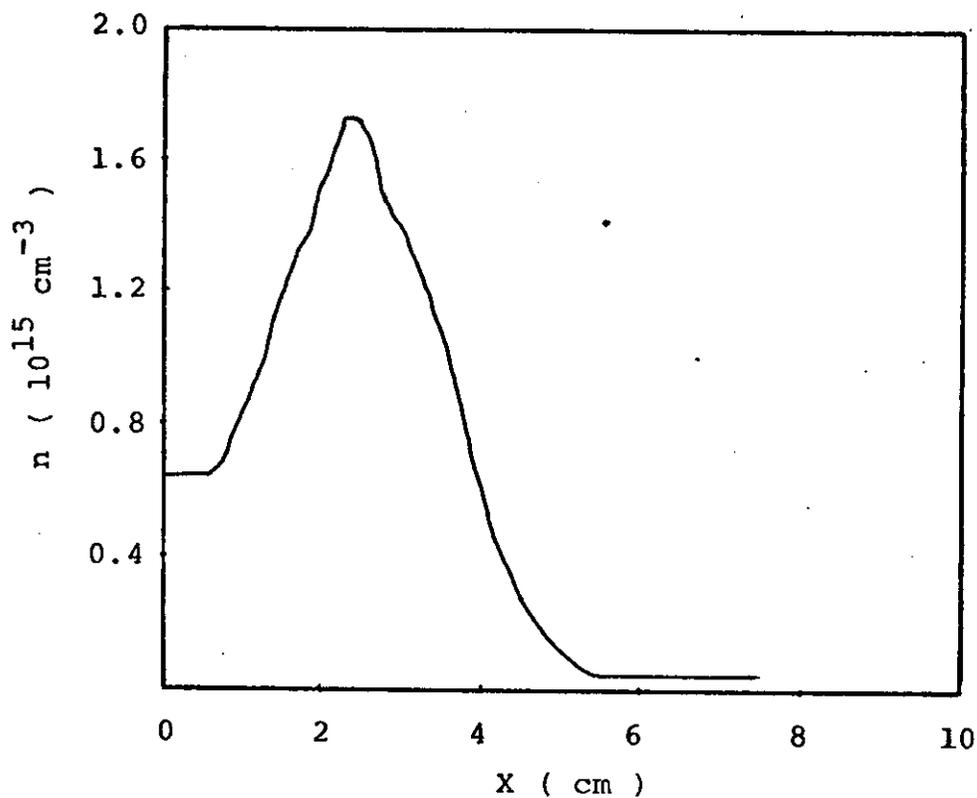
30 a



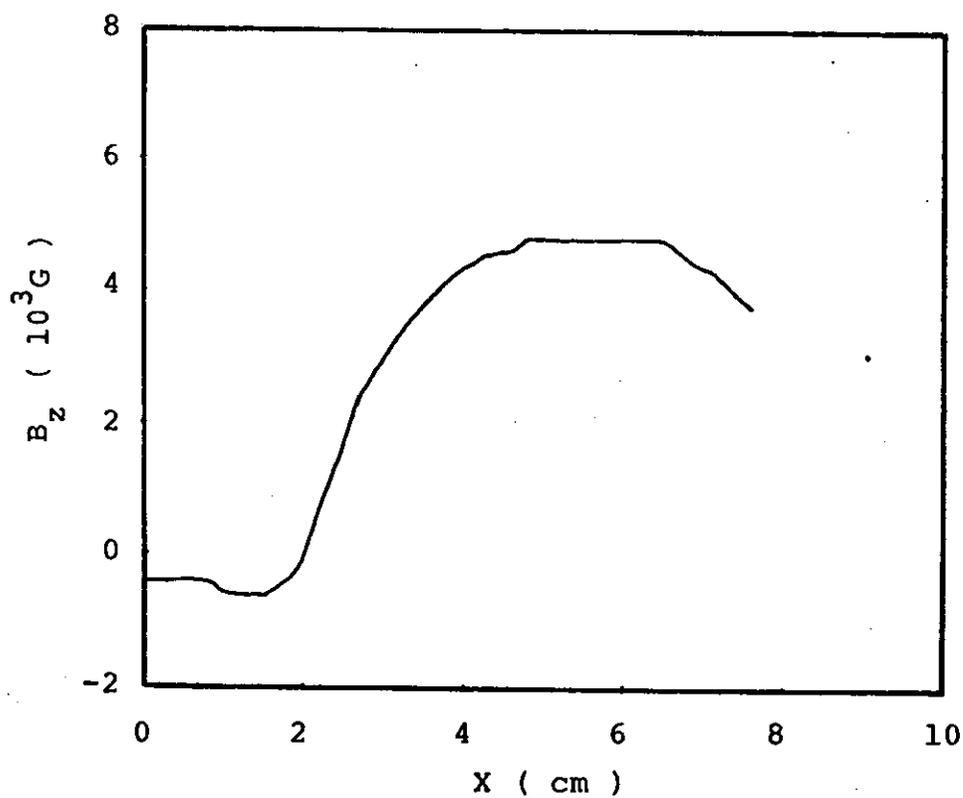
30 b

Modelo de três fluidos com campo de polarização de -390 G e temperatura inicial de 1 eV. Referem-se a 630 ns.

FIGURA 31



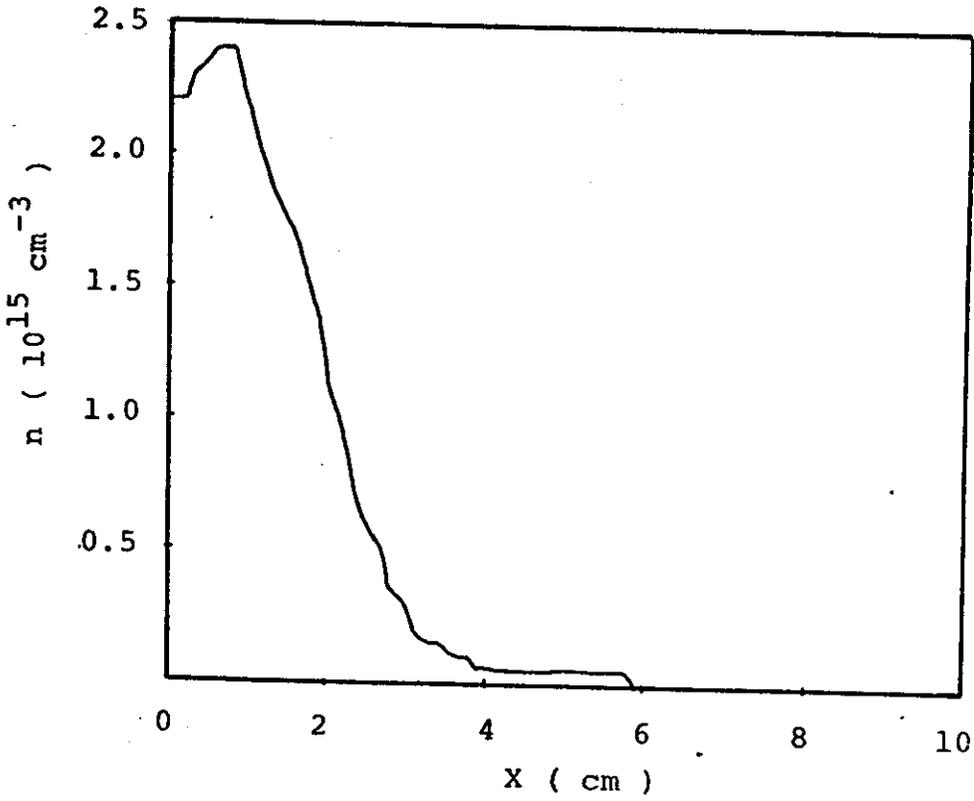
31 a



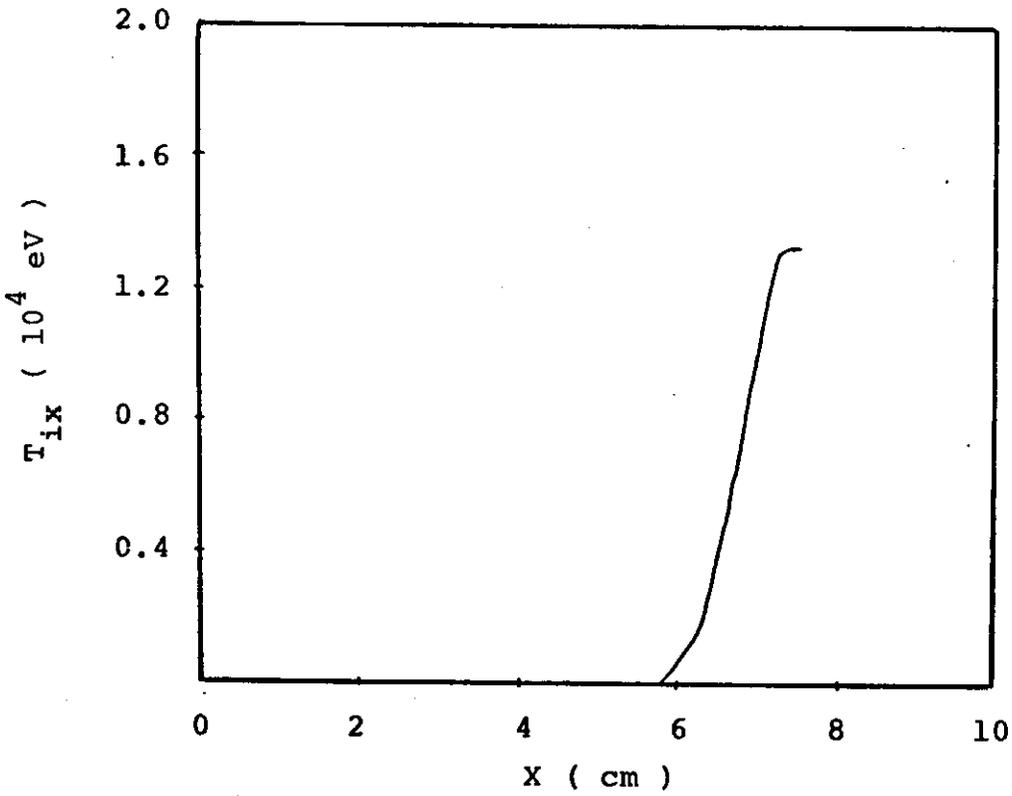
31 b

Modelo de três fluidos com campo de polarização de -390 G e temperatura inicial de 5 eV. Referem-se a 690 ns.

FIGURA 31



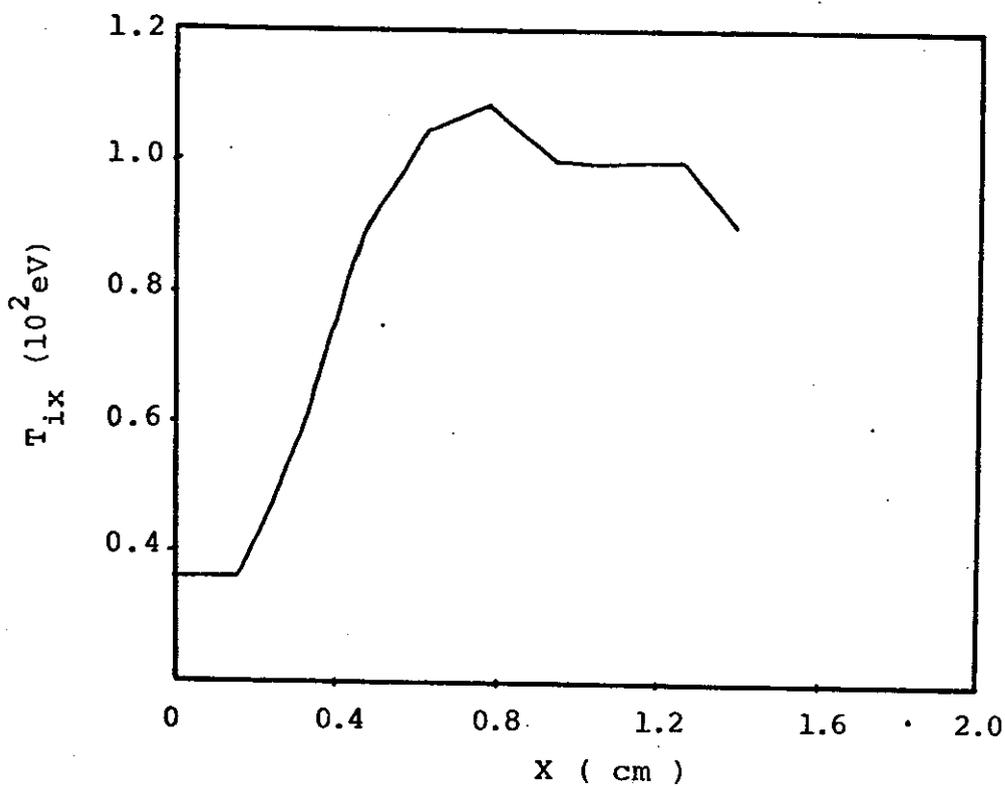
31 c



31 d

As figuras acima referem-se a 810 ns.

FIGURA 31



31 e

Perfil detalhado da temperatura na região próxima à origem no instante 810 ns.

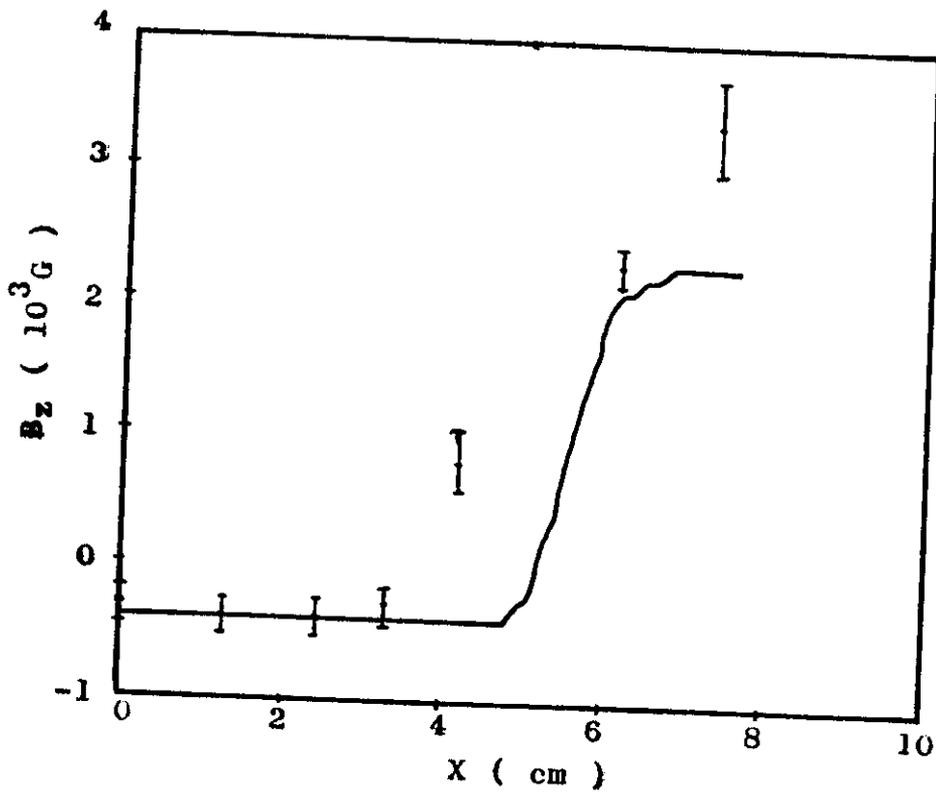
31b, apresenta compressão do campo de polarização inicial que na região entre 1 e 1,5 cm chega a -500 G.

Na figura 31c, o pico de densidade está praticamente na origem, o que indica um tempo de implosão da ordem de 800 ns, como verificado por outros modelos (Kayama, 1987). E a temperatura na região da origem, figura 31d e mais detalhadamente na figura 31e (que fornece o perfil de temperatura na região entre 0 e 1,6 cm), está por volta de 100 eV, valor próximo do obtido com outros modelos que foi de 150 eV.

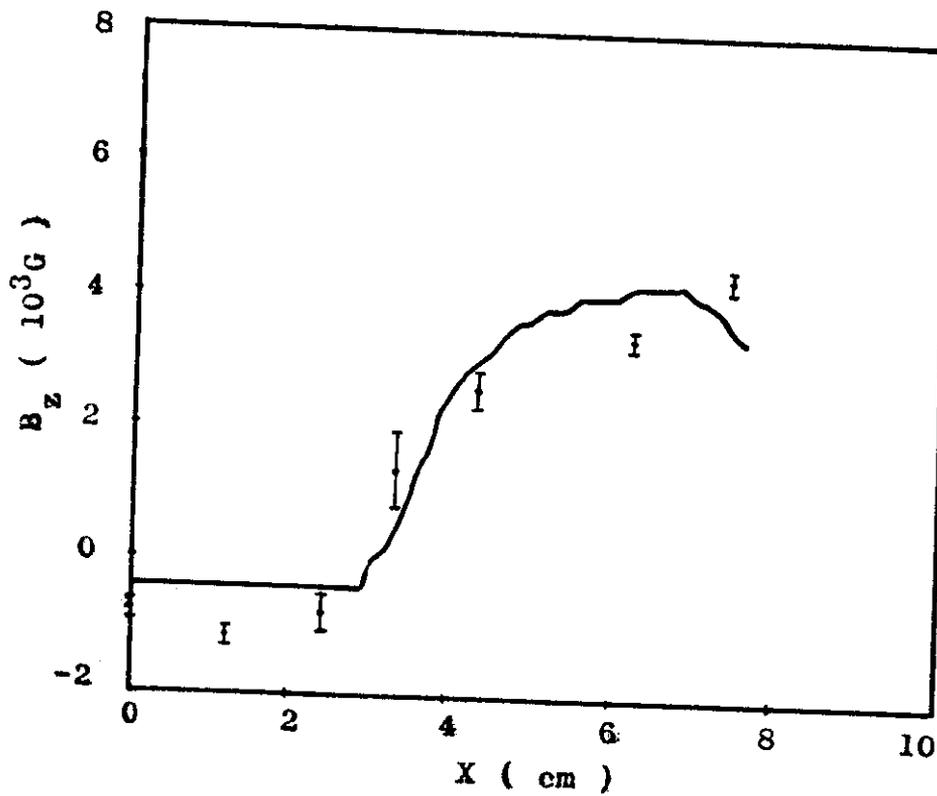
Nas figuras 31f e 31g estão comparados os perfis do campo magnético, para os instantes 0,4 e 0,6  $\mu$ s respectivamente, obtidos com o modelo de três fluidos aos valores do campo magnético determinado experimentalmente (Kayama, 1987). Verifica-se da comparação que a resistividade fornecida pelas colisões anômalas segundo o modelo de Liewer e Krall, é insuficiente (como já se verificara através de modelos híbridos) pois a partir dos dados experimentais constata-se que há uma penetração maior do campo magnético, pelo menos inicialmente.

Baseado nestes dois conjuntos de parâmetros, que foram utilizados para simular o Tupã, constata-se que na simulação de um plasma de gás hélio, com um modelo de simulação completamente ionizado é importante a consideração de outros parâmetros no modelo como  $Z_{ef}$  e temperatura inicial dos íons. Além disso um outro fator importante não levado em conta, foi o perfil inicial de ionização; que dá diferenças grandes no tempo de implosão.

FIGURA 31



31 f



31 g

Perfis radiais de  $B_z$  obtidos com o modelo de três fluidos e valores de  $B_z$  determinados experimentalmente.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÃO

Foi desenvolvido um modelo para levar em conta íons refletidos em códigos de fluidos. O modelo, basicamente, trata as reflexões que ocorrem em potenciais abruptos como colisões. Os momentos, no espaço de velocidades, deste termo colisional fornecem a contribuição dos íons refletidos para a dinâmica de implosão do  $\theta$ -pinch.

Baseado neste modelo para os íons refletidos foi elaborado um programa computacional, de três fluidos, que foi utilizado na simulação do  $\theta$  - pinch.

Tal programa foi utilizado na simulação do  $\theta$  - pinch rápido de Maryland, para diferentes valores do campo de polarização e da densidade inicial do plasma. Além disso verificou-se que ele obedece a leis de escala, referentes aos íons refletidos, corretamente, ao variar a densidade inicial, temperatura dos íons e tempo de subida. E assim chega-se a conclusão de que o modelo é confiável.

A seguir ele foi aplicado à simulação do Tupã mostrando a necessidade de considerar-se diferentes graus de ionização, bem como diferentes valores da temperatura inicial de hélio, para fornecer resultados corretos na simulação.

O programa computacional apresenta a vantagem de necessitar tempo de computação curto, porém, tem como desvantagens a geometria cartesiana e o tratamento da região atrás do pistão, que -

traz resultados não físicos nestas regiões. O problema da parte - atrás do pistão é comum a todos os modelos devido à baixa densidade do plasma nesta região.

A utilidade deste modelo não está restrita ao  $\theta$  - pinch podendo ser aplicado a todas as situações, em física de plasmas, - em que houver potenciais abruptos oriundos, por exemplo, da maior interação dos elétrons com algum campo externo que passe a atuar - sobre o plasma, sendo os íons obrigados a segui-los devido a condição de quaseneutralidade, sendo esta uma situação muito comum em física de plasmas. Por exemplo é o caso de double layers, que são saltos de potencial localizados e nos quais o campo elétrico é muito mais intenso do que no plasma que os cerca.

APÊNDICE A

ESCALA ESPACIAL, TEMPORAL E DE VELOCIDADE NA IMPLOÇÃO DO  $\theta$  - PINCH

A maneira mais direta de compreender o mecanismo da implosão é observar o movimento do centro-guia das partículas (Comiso 1975), que durante boa parte da fase de implosão do  $\theta$  - pinch é equivalente ao movimento macroscópico do plasma.

Devido ao fato de que  $\frac{\Omega_e^{-1}}{\Omega_i^{-1}} = \frac{m_e}{m_i}$  durante a maior parte da implosão os íons não são diretamente afetados pelo campo magnético e podem ser considerados não magnetizados enquanto os elétrons são fortemente magnetizados. Baseado nestes argumentos, juntamente com o fato de que o plasma tende a manter-se quase neutro, verifica-se que a dinâmica dos íons é determinada pela dinâmica dos elétrons - através do campo elétrico de separação de cargas.

Considera-se inicialmente um campo magnético  $\vec{B} = B_z \hat{e}_z$ , - onde  $B_z = B_z(r, t)$ . Este campo magnético variando com o tempo induz um campo elétrico tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

e supondo simetria na direção  $\theta$  implica que

$$E_\theta(r, t) = - \frac{1}{rc} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^r B_z(r', t) r' dr' \right\}$$

A força que atua numa partícula de plasma é

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c})$$

Supondo o elétron inicialmente em repouso, na superfície do plasma, ele ganha uma velocidade transversal ao campo magnético, devido a aceleração de  $E_\theta$ , e tão logo ganhe uma velocidade transversal o elétron passa a sentir o efeito do campo magnético e começa a executar sua órbita. O centro-guia do elétron simplesmente é acelerado radialmente para dentro desde zero até a velocidade de drift  $\vec{E} \times \vec{B}$ , num tempo da ordem de  $\Omega_e^{-1}$

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} c$$

logo, 
$$v = \frac{E_\theta}{B_z} c$$

Os íons não adquirem esta velocidade de drift, pois não tiveram ainda a possibilidade de completar uma volta na órbita. Destaforma, surge um campo elétrico de separação de cargas,  $E_r = E_r(r,t)$ , e os íons movem-se para dentro puxados pelos elétrons.

Os elétrons, devido à presença do campo  $E_r$ , passam também a ter um drift na direção  $\theta$ , dado por

$$v_\theta = -\frac{E_r}{B_z} c$$

Devido a este movimento em  $\theta$  surge uma corrente  $J_{e\theta}$  que origina um gradiente em  $B_z$  dado por

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e$$

e como  $\vec{j}_e = n_e v_{e\theta} = -\frac{n_e E_r c}{B_z}$  pode-se escrever:

$$E_r = -\frac{1}{4\pi n_e e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

que determina  $E_r$  enquanto a pressão dos elétrons não for suficientemente grande. Assim ficam caracterizados os aspectos básicos da implosão e a partir disto pode-se passar a determinar as escalas - temporal, espacial e velocidade de implosão.

A escala temporal pode ser obtida a partir das relações acima mais a equação de movimento para os elétrons e os íons, correspondentes a esta fase inicial da implosão com  $T_e = T_i = 0$ , e usando coordenadas cartesianas.

Tem-se então que

$$E_x = -\frac{B_z v_{ey}}{c} \tag{A.1}$$

$$V_{ex} = V_{ix} \tag{A.2}$$

$$M_i \frac{dv_{ex}}{dt} = eE_x \text{ (que é a equação de movimento para os íons)} \tag{A.3}$$

$$m_e \frac{dv_{ey}}{dt} = \frac{e v_{ex} B_z}{c} \tag{A.4}$$

Supondo  $\frac{d}{dt} = -i\omega$  tem-se de (A.3)

$$- i\omega v_{ix} M_i = ieE_x \quad (A.5)$$

de (A.2) e (A.5) tem-se

$$v_{ex} = \frac{ieE_x}{\omega M_i} \quad (A.6)$$

e de (A.4) e (A.6)

$$- i\omega m_e v_{ey} = \frac{B_z ie^2 E_x}{c\omega M_i} \quad (A.7)$$

e de (A.7) e (A.1) tem-se que

$$\omega^2 = \Omega_e \Omega_i \Rightarrow \omega = \omega_{LH} = \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$$

portanto a escala temporal do fenômeno é  $\omega^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_e \Omega_i}}$  que é a escala temporal da frequência híbrida inferior.

A escala espacial da implosão é determinada pelo skin depth no caso de uma onda com frequência  $\omega < \omega_{pe}$ . Neste caso  $\delta \approx \frac{c}{\omega_{pe}}$ , e esta é a escala espacial da implosão (Gekker 1982).

A escala de velocidade é determinada por

$$V = \frac{\delta}{\tau} = \frac{\delta}{\omega_{LH}^{-1}} = \delta \omega_{LH} = \frac{B_z}{\sqrt{4\pi M_i n}} = V_A.$$

APÊNDICE BACELERAÇÃO DE UM PISTÃO DE PLASMA

Neste apêndice discute-se rapidamente o modelo que é usado no estudo da interação de campos eletromagnéticos intensos com plasmas densos (Gekker 1982) e que por analogia foi utilizado na formulação do modelo de íons refletidos.

Suponha-se que uma onda eletromagnética plana, de frequência  $\omega$ , incide numa região em que haja um plasma denso completamente ionizado com  $\omega_{pe} > \omega$ . A onda penetra no plasma somente até o comprimento do skin depth  $\delta = \frac{c}{\omega_{pe}}$ . Nesta região, uma força ponderomotiva, a que se atribue um quasepotencial  $\phi$ , tal que  $\vec{F} = -\nabla\phi$ , atua. Quando a energia cinética média dos elétrons  $kT \ll \phi$ , eles não conseguem ultrapassar a barreira de potencial. Os íons estão acoplados aos elétrons pela força de carga espacial, por causa da condição de quaseneutralidade (com  $\delta \gg r_{De}$ ). Assim o plasma quase não penetra na região ocupada pelo campo, e vice-versa.

Quando a pressão da onda excede a pressão do plasma, a fronteira plasma-onda move-se com velocidade  $v_0$ . Para uma camada de plasma limitada na direção longitudinal (com dimensões longitudinais  $L$ , com  $L > \delta$ ), pode-se supor que o plasma é empurrado por uma parede eletromagnética movendo-se com velocidade  $v_0$ , com as partículas de plasma sendo sucessivamente refletidas com velocidade  $2v_0$ .

## APÊNDICE C

### ÍONS REFLETIDOS

Este modelo de íons refletidos é a base teórica de uma técnica para estimar, por meio de medidas espectroscópicas, o potencial eletrostático do plasma na direção radial (Comisso e Kunze 1975; Comisso e Liewer 1973). A técnica envolve a medida da razão da intensidade das linhas espectrais, de íons de impureza, que são acrescentados ao plasma como probes não perturbativas.

A idéia de desenvolver tal técnica surgiu quando verificou-se que a intensidade das linhas espectrais do átomo de argônio, introduzido como impureza num plasma de hidrogênio, calculada teoricamente, baseada numa suposição da razão de mistura constante de átomos de argônio e hidrogenio, revelou-se quatro vezes superior ao valor determinado experimentalmente. As análises mostraram que a hipótese duma razão de mistura constante não vale para o caso de átomos de argônio, muito mais pesados que o hidrogênio, e que não estão sendo carregados durante a implosão do  $\theta$  - pinch. Tal fato permite a determinação espectroscópica do potencial eletrostático, como se verá adiante.

Como supõe o modelo de reflexão de íons, na implosão, os elétrons são acelerados na frente dos íons, produzindo um potencial eletrostático de separação de cargas. Os íons são então puxados pelos elétrons via campo de separação de cargas. Destaforma, pode-se considerar que uma rampa de potencial move-se no plasma com uma velocidade  $v_p$  (velocidade do pistão magnético). Esta rampa foi detectada com probes elétricas.

No plasma inicial os íons estão praticamente parados, de tal modo que no sistema de referência do pistão pode-se descrevê-los como movendo-se com velocidade  $v_p$  em direção ao pistão. Os íons serão refletidos ou carregados com o pistão se

$$\frac{1}{2} M_L v_p^2 < z_L e \Delta\phi$$

onde:

$M_L$  é a massa do íon leve;

$\Delta\phi$  é a variação de potencial através do pistão;

e  $z_L e$  é a carga do íon leve.

Íons que satisfazem esta condição devem ser encontrados - em concentração apropriada no plasma, durante a implosão.

No caso dos íons pesados que não são encontrados em concentração apropriada no plasma, como o argônio, a diferença de potencial no pistão é muito baixa para acelerar estes íons até a velocidade do pistão, isto é,

$$\frac{1}{2} M_P v_p^2 > z_P e \Delta\phi$$

onde:

$M_P$  é a massa do íon pesado;

e  $z_P e$  é a carga do íon pesado.

Assim

$$\frac{\frac{1}{2} M_L v_p^2}{Z_L e} \leq \Delta\phi \leq \frac{\frac{1}{2} M_p v_p^2}{Z_p e}$$

Conseqüentemente, encontrando-se dois tipos de íons de impureza, um que vá com o pistão e outro que não vá (e isto pode ser determinado espectroscopicamente, pela diferença entre os valores teóricos e os medidos da intensidade das linhas espectrais) consegue-se determinar  $\Delta\phi$  com precisão uma vez que  $v_p$  é conhecido.

Os resultados obtidos para a diferença de potencial radial no  $\theta$  - pinch foram comparados com estimativas obtidas com probes elétricas, e concordaram dentro de um fator de ordem dois (Comisso 1975), o que reforça a plausibilidade do modelo de íons refletidos utilizado.

REFERÊNCIAS

- Alder, B., "Methods in Computational Physics", vol. 9, Academic Press (1970)
- Artsimovich, L.A., "Controlled Thermonuclear Reactions", Gordon and Breach Science Publishers, New York (1964)
- Batrouni, G.G., et al, Phys. Review D 32, 2736 (1985)
- Birdsall, C.K., Landgon, A.B., "Plasma Physics via Computer Simulation", McGraw-Hill Book Company, USA (1985)
- Boris, J.P., Book, D.L., J. Comp. Phys. 11, 38 (1973)
- Chodura, R., Nucl. Fusion 15, 55 (1975)
- Comisso, R.J., PhD Thesis, University of Maryland (1975)
- Comisso, R.J., Kunze, H.-J., Phys. Fluids 18, 392 (1975)
- Comisso, R.J., Liewer, P.C., Bull. Am. Phys. Soc. 18, 659 (1973)
- Davis, W., et al, "Proc. 1971 IAEA Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion Research", 3, 289 (IAEA, Viena, 1971)
- Dawson, J. N., "Proc. of the US-Japan Workshop on Advanced Plasma Modelling", Nagoya (1985)
- Dolan, T.J., "Fusion Research", vol.2, Pergamon Press, New York (1982)

- Dove, W. F., Phys. Fluids 14, 2359 (1971)
- Forslund, D.W., Freidberg, J. P., Phys. Rev. Lett. 27, 1189 -  
(1971)
- Gekker, I.R., "Interaction of Strong Electromagnetic Fields with  
Plasmas", Oxford University Press, New York (1982)
- Gill, R. D., ed., "Plasma Physics and Nuclear Fusion Research",  
Academic Press (1981)
- Kayama, M. E., et al, Rev. Bras. Aplic. Vácuo, 5, (1,2) (1985)
- Kayama, M. E. (comunicação particular)
- Krall, N. A., Trivelpiece, A. W., "Principles of Plasma Physics",  
McGraw-Hill, New York (1973)
- Liewer, P. C., PhD Thesis, University of Maryland (1972)
- Liewer, P. C., Krall, N. A., Phys. Fluids 16, 1953 (1973)
- Liewer, P. C., Nucl. Fusion, 16, 817 (1976)
- Manheimer, W. M., Haber, I., Phys. Fluids 17, 706 (1974)
- Mason, R.J., Phys. Fluids 15, 1082 (1972)
- Morse, R. L., Phys. Fluids 10, 1017 (1967)
- Oliphant, T. A., Nucl. Fusion 14, 377 (1974)

- Potter, D., "Computational Physics", John Willey & Sons (1973)
- Sagdeev, R. Z., "Reviews of Plasma Physics", vol. 4, Consultants, New York (1966)
- Sakanaka, P.H., "Proceedings of IV Japan-Brazil Symposium on - Science and Technology", 3, 129 (1984)
- Sgro, A. G., Nielson, C. W., Phys. Fluids 19, 126 (1976)
- Silva, A. W. de, et al, Phys. Fluids 14, 42 (1972)
- Teller, E., ed., "Fusion", vol. 1 part B, Academic Press (1981)