

REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS E TEOREMAS DE ADIÇÃO
PARA FUNÇÕES ESPECIAIS

048

Edmundo Cabelas de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. José Bellandi Filho

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Doutor em Ciências

Fevereiro/1982

RESUMO

Usando-se de um método de funções de Green determina-se novas representações integrais e novos teoremas de adição ou regras de soma para as funções hipergeométricas e para as funções hipergeométricas confluentes.

As funções hipergeométricas estudadas neste trabalho são as funções de Jacobi, Legendre, Gegenbauer e Tchebichef. Dentre as hipergeométricas confluentes tem-se as funções de Kummer, Whittaker, Hermite, Laguerre e Bessel.

ABSTRACT

By means of Green's functions method we calculate new integrals representations and new additions theorems or sum rules for hypergeometric functions and for confluent hypergeometric functions.

Hypergeometric functions discussed in this work are, Jacobi, Legendre, Gegenbauer and Tchebichef functions. For confluent hypergeometric functions we have, Kummer, Whittaker, Hermite, Laguerre and Bessel functions.

Dedicado a
M. Cláudia, Patrícia e Adriano

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
I - FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES	
<i>Função de Green para a equação diferencial</i>	
1.1 de Kummer	4
1.2 de Laguerre	5
1.3 de Hermite	6
1.4 de Whittaker	7
1.5 de Bessel	8
1.6 radial do oscilador harmônico isotrópico multidimensional	9
<i>Representação Integral para um produto de funções</i>	
1.7 de Whittaker	11
1.8 de Kummer	13
1.9 de Laguerre	14
1.10 de Hermite	15
1.11 de Bessel	16
<i>Regra de Soma para as funções</i>	
1.12 de Whittaker	17
1.13 de Kummer	18
1.14 de Laguerre	19
1.15 de Hermite	19
1.16 de Bessel	20
Referências	22
II - FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS	
<i>Função de Green para a equação diferencial</i>	
2.1 de Jacobi	23
2.2 Associada de Legendre	25
2.3 de Gegenbauer	26
2.4 de Tchebichef	27
2.5 de Legendre	29

Representação Integral para um produto de funções

2.6 de Jacobi	30
2.7 Associadas de Legendre	35
2.8 de Gegenbauer	36
2.9 de Tchebichef	36
2.10 de Legendre	37

Regra de Soma para as funções

2.11 de Jacobi	38
2.12 Associadas de Legendre	40
2.13 de Gegenbauer	41
2.14 de Tchebichef	42
2.15 de Legendre	44

Referências	45
-------------	----

III - TEOREMAS DE ADIÇÃO

3.1 Funções de Jacobi	46
3.2 Funções Associadas de Legendre	50

Referências	52
-------------	----

IV - FUNÇÃO DE GREEN PARA O PIÃO SIMÉTRICO

Referências	62
-------------	----

CONCLUSÕES	63
------------	----

APÊNDICE A - Método de Sturm-Liouville	65
--	----

APÊNDICE B - A Segunda Solução	67
--------------------------------	----

APÊNDICE C - Fórmula de Hille-Hardy	69
-------------------------------------	----

APÊNDICE D - Harmônicos Esféricos Generalizados	72
---	----

Referências	73
-------------	----

AGRADECIMENTOS	74
----------------	----

INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresentam-se novos resultados sobre representações integrais, regras de soma e teoremas de adição para as funções especiais da física matemática.

Na obtenção desses resultados emprega-se uma técnica de cálculo usando-se funções de Green.

O procedimento normal para obtenção de representações integrais e teoremas de adição é utilizar-se das funções geratrizes das funções especiais ou então por meio de técnicas de teorias de grupo.

Esse procedimento leva a resultados que envolvem somente funções de primeira espécie, ou seja, funções que são a primeira solução da equação diferencial e, portanto, regulares na origem e que, quase sempre, podem ser definidas por meio de uma função geratriz.

A técnica de função de Green desenvolvida neste trabalho permite obter representações integrais e teoremas de adição para um produto de duas funções, não de mesma espécie, ou seja, das duas soluções linearmente independentes das equações diferenciais estudadas.

A técnica empregada é global, não diferenciando entre funções que definem soluções radiais e aquelas que definem soluções angulares.

As funções aqui estudadas são as funções hipergeométricas, denominadas funções de Jacobi e as funções hipergeométricas confluentes, denominadas funções de Kummer.

A sistemática de cálculo consiste em se determinar as funções de Green por dois procedimentos. Um é o método usual tipo Sturm-Liouville em que a função de Green é obtida diretamente em termos das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea. O outro

é calcular a função de Green mediante a função de Green para a equação de Schrödinger com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico multidimensional. Essa segunda técnica fornece a função de Green numa representação integral.

Para o caso das funções de Kummer esse método é aplicado diretamente, pois a equação radial do oscilador harmônico isotrópico multidimensional é uma equação diferencial de Whittaker e, portanto, a identificação é imediata. Essas funções são estudadas na secção I.

Para as funções de Jacobi, a identificação com a função de Green de um oscilador não é imediata. A equação diferencial de Jacobi está relacionada com a equação diferencial radial de um potencial Coulombiano multidimensional por meio da transformada de Fourier. Pode-se, assim, calcular a função de Green para a equação diferencial de Jacobi no espaço de momentos e, calcular-se a antitransformada de Fourier, obtendo-se uma representação integral para o produto de duas funções de Jacobi não de mesma espécie.

Na secção II determina-se uma representação integral para o produto de funções de Jacobi usando-se uma representação integral explícita para as funções de Jacobi, mostrando-se a equivalência com o método da transformada de Fourier. Obtém-se, também, as respectivas regras de soma para as funções de Jacobi.

Usando-se, ainda, essa representação integral determina-se, secção III, teoremas de adição para as funções de Jacobi.

Finalmente, secção IV, como aplicação calcula-se a função de Green para o pião simétrico.

I. FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES

Desenvolve-se nesta secção uma técnica de função de Green para de terminação de representações integrais e regras de soma para um produto de funções hipergeométricas confluentes.

A vantagem primordial dessa técnica é que ela permite obter representações integrais e teoremas de adição para um produto de duas soluções das equações diferenciais que são linearmente independentes. O que se encontra normalmente na literatura são representações integrais para um produto de duas funções de mesma espécie, em geral para a primeira solução da equação diferencial.

Para se obter essas representações integrais e teoremas de adição calcula-se as funções de Green por dois processos de cálculo: um usando o método tradicional tipo Sturm-Liouville⁽¹⁾ que permite calcular a função de Green em função do produto das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea; outro usando a função de Green para a equação diferencial de Schrödinger com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico⁽²⁾.

As funções hipergeométricas aqui estudadas são as funções de Whittaker, Kummer, Laguerre, Hermite e Bessel.

A função de Green para a equação diferencial de Schrödinger com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico multidimensional calculada via fórmula de Mehler fornece diretamente uma representação integral para esta função de Green⁽³⁾. Devido a simetria esférica do potencial pode-se fazer uma expansão em ondas parciais⁽⁴⁾, para se determinar a função de Green radial, a qual satisfaz a uma equação diferencial de Whittaker.

Identificando-se, convenientemente, as equações diferenciais

obtem-se representações integrais para um produto de duas soluções linearmente independentes para as funções de Whittaker, Kummer, Laguerre, Hermite e Bessel.

E, finalmente, para cada representação integral, utiliza-se a fórmula de Hille-Hardy⁽¹⁵⁾ para se obter as respectivas regras de soma.

1.1 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE KUMMER

A função de Green para a equação diferencial de Kummer satisfaz a seguinte equação diferencial não homogênea

$$1.1.1 \quad Q_z G(z, z') = \delta(z - z')$$

limitada entre $0 \leq z < \infty$, onde o operador diferencial de Kummer é:

$$1.1.2 \quad Q_z = z \frac{d^2}{dz^2} + (c - z) \frac{d}{dz} - a$$

com as restrições nos parâmetros dadas por: (i) $c \neq -m$, m inteiro não negativo e todos valores de a ; (ii) $a \neq -n$, $c = -m$ ou $a = -n$, $c = -m$ e $m < n$, onde m e n são inteiros não negativos. Para o caso especial em que $c \neq -m$ e $a = -n$ onde m e n são inteiros não negativos tem-se soluções polinomiais.

Utiliza-se o método de expansão tipo Sturm-Liouville (Apêndice A) para resolver a equação (1.1.1). A respectiva equação diferencial homogênea é:

$$1.1.3 \quad \left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + (c - z) \frac{d}{dz} - a \right\} v(z) = 0$$

e as duas soluções linearmente independentes da equação (1.1.3) são as fun-

ções de Kummer

$$1.1.4 \quad v_1(z) = {}_1F_1(a;c;z) \quad v_2(z) = U(a;c;z)$$

sendo ${}_1F_1(a;c;z)$ regular na origem e $U(a;c;z)$ regular no infinito, cujo determinante Wronskiano⁽⁶⁾ é dado por

$$1.1.5 \quad W(v_1, v_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{-c} e^z.$$

A solução da equação (1.1.1) será:

$$1.1.6 \quad G_K(z, z') = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a;c;z_<) U(a;c;z_>)$$

onde $\operatorname{Re}(c) > 1$, $\operatorname{Re}(a) > 0$ e $z_< (z_>)$ é o menor (maior) de $z (z')$.

1.2 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LAGUERRE

A equação diferencial de Laguerre é um caso particular da equação diferencial de Kummer com os parâmetros dados por $a = -v$, com v inteiro não negativo e $c = 1 + \alpha$ onde $\alpha > -1$.

A relação entre a função de Kummer e a função de Laguerre é dada por⁽⁶⁾:

$$1.2.1 \quad L_v^\alpha(z) = \frac{\Gamma(v+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(v+1)} {}_1F_1(-v; 1+\alpha; z).$$

A segunda solução da equação diferencial de Laguerre pode ser definida em termos da segunda solução da equação diferencial de Kummer $U(a;c;z)$

por (Apêndice B)

$$1.2.2 \quad N_v^\alpha(z) = \frac{\Gamma(-v) \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)} U(-v; 1+\alpha; z) .$$

Substituindo-se as expressões (1.2.1) e (1.2.2) na expressão (1.1.6) obtêm-se a função de Green para a equação diferencial de Laguerre

$$1.2.3 \quad G_L(z, z') = L_v^\alpha(z_<) N_v^\alpha(z_>)$$

onde $z_<(z_>)$ é o menor(maior) de $z(z')$.

1.3 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE HERMITE

A função de Hermite é um caso particular da função de Laguerre, com $\alpha = \pm 1/2$ dependendo da paridade, $\alpha = 1/2$ paridade ímpar e $\alpha = -1/2$ paridade par.

As relações entre as funções de Laguerre e Hermite são

$$1.3.1 \quad L_n^{1/2}(z^2) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} z^{-1} 2^{2n-1} H_{2n+1}(z)$$

$$1.3.2 \quad L_n^{-1/2}(z^2) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} 2^{-2n} H_{2n}(z)$$

e, para a segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Hermite, em termos da segunda solução da equação diferencial de Laguerre define-se $\mathcal{H}(z)$ como

$$1.3.3 \quad N_n^{1/2}(z^2) = \frac{2}{z} 2^{2n} \Gamma(n+1) \mathcal{H}_{2n+1}(z)$$

1.3.4

$$N_n^{-1/2}(z^2) = 2^{2n} \Gamma(n+1) \mathcal{H}_{2n}(z) .$$

Substituindo-se as expressões (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) e (1.3.4) na expressão (1.2.3), convenientemente, obtêm-se

1.3.5

$$G_H^-(z, z') = (-1)^n (zz')^{-1} H_{2n+1}(z_<) \mathcal{H}_{2n+1}(z_>)$$

1.3.6

$$G_H^+(z, z') = (-1)^n H_{2n}(z_<) \mathcal{H}_{2n}(z_>)$$

onde $G_H^-(z, z')$ e $G_H^+(z, z')$ são as funções de Green para a equação diferencial de Hermite com paridade ímpar e com paridade par, respectivamente.

1.4 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE WHITTAKER

Para se obter a equação diferencial de Whittaker, faz-se uma transformação de Kummer na equação (1.1.3)

1.4.1

$$v(z) = e^{z/2} z^{-c/2} u(z)$$

e obtêm-se a seguinte equação diferencial

1.4.2

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{v}{z} + \frac{1/4 - v^2}{z^2} \right) \right\} u(z) = 0$$

onde definiu-se $a = \mu - v + 1/2$ e $c = 2\mu + 1$.

As duas soluções linearmente independentes da equação (1.4.2) são as funções de Whittaker

$$1.4.3 \quad u_1(z) = M_{\mu; \nu}(z) \quad u_2(z) = W_{\mu; \nu}(z)$$

sendo $u_1(z)$ regular na origem e $u_2(z)$ regular no infinito. O determinante Wronskiano é dado por

$$1.4.4 \quad W(u_1, u_2) = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(-\nu+\mu+1/2)}.$$

A equação (1.4.2) está na forma auto-adjunta, logo, a função de Green para a equação diferencial de Whittaker não homogênea é:

$$1.4.5 \quad G_W(z, z') = -\frac{\Gamma(-\nu+\mu+1/2)}{\Gamma(2\mu+1)} M_{\nu; \mu}(z_<) W_{\nu; \mu}(z_>)$$

com $\text{Re}\{-\nu+\mu+1/2\} > 0$ e $z_<(z_>)$ é o menor(maior) de $z(z')$.

1.5 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BESSEL

Um caso particular da função de Green para a equação diferencial de Whittaker é a função de Green para a equação diferencial de Bessel modificada. Fazendo-se $\nu=0$, tem-se

$$1.5.1 \quad M_{0; \mu}(z) = \Gamma(\mu+1) z^{2\mu} z^{1/2} I_{\mu}(z/2)$$

$$1.5.2 \quad W_{0; \mu}(z) = \pi^{-1/2} z^{1/2} K_{\mu}(z/2).$$

Substituindo-se as expressões (1.5.1) e (1.5.2) na expressão (1.4.5) obtém-se

$$1.5.3 \quad G_B(z, z') = (zz')^{1/2} I_\mu(z_</2) K_\mu(z_>/2)$$

que é a função de Green para a equação diferencial de Bessel modificada não homogênea. Para as demais funções de Bessel basta usar as relações, conhecidas, entre a função de Bessel modificada e as demais funções de Bessel.

1.6 FUNÇÃO DE GREEN RADIAL PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER COM UM POTENCIAL TIPO OSCILADOR HARMÔNICO ISOTRÓPICO MULTIDIMENSIONAL

A função de Green para a equação diferencial de Schrödinger com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico multidimensional satisfaz a seguinte equação diferencial não homogênea

$$1.6.1 \quad \left(\nabla^2 + \frac{1}{2} k r^2 \right) G(\vec{r}, \vec{r}'; E) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano multidimensional.

A solução da equação (1.6.1) calculada via fórmula de Mehler, numa representação integral⁽²⁾ é:

$$G^N(\vec{r}, \vec{r}'; E) = \pi^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}^2 + \vec{r}'^2)\right\} \cdot$$

1.6.2

$$\cdot \int_0^1 d\xi \xi^{-\lambda+N/2-1} (1-\xi^2)^{-N/2} \exp\left\{\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{1-\xi^2} \xi - \frac{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2}{1-\xi^2} \xi^2\right\}$$

com $\text{Re}\{-\lambda + N/2 - 1\} > 0$, onde N é a dimensão do oscilador harmônico e λ é o parâmetro da energia.

Uma vez que o potencial tem simetria esférica faz-se uma expansão da função de Green em ondas parciais⁽⁴⁾

$$1.6.3 \quad G^N(\vec{r}, \vec{r}'; E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi^{-N/2} \frac{\Gamma(N/2)}{N-2} (\ell + N/2 - 1) C_{\ell}^{\frac{N-2}{2}}(\cos \theta) G_{\ell}(r, r'; \lambda)$$

onde $C_{\ell}^N(x)$ são os polinômios de Gegenbauer, θ é o ângulo formado por $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ e $G_{\ell}(r, r'; \lambda)$ é a função de Green radial.

Faz-se a expansão de $\exp(z \cos \theta)$ numa série tipo Neumann⁽⁴⁾, ou seja, com $N \geq 3$

$$1.6.4 \quad \frac{\exp(z \cos \theta)}{\Gamma(\frac{N-2}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{N-2}{2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + N/2 - 1) C_{\ell}^{\frac{N-2}{2}}(\cos \theta) I_{\ell + N/2 - 1}(z)$$

onde $z = \frac{2rr'\xi}{1-\xi^2}$ e $I_{\mu}(x)$ é a função de Bessel modificada, tem-se, comparando com a expressão (1.6.2), a expressão

$$G_{\ell}(r, r'; \lambda) = 2 (rr')^{-N/2+1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}^2 + \vec{r}'^2)\right\} \cdot$$

1.6.5

$$\cdot \int_0^1 d\xi \xi^{-\lambda} [1-\xi^2]^{-1} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2}{1-\xi^2} \xi^2\right) I_{\ell + N/2 - 1}\left(\frac{2rr'}{1-\xi^2} \xi\right)$$

que é a função de Green radial para a equação de Schrödinger com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico multidimensional, e que é solução da seguinte equação diferencial não homogênea

$$1.6.6 \quad \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+N-2)}{r^2} - r^2 + 2\lambda \right\} G_{\ell}(r, r'; \lambda) = (rr')^{\frac{1-N}{2}} \delta(r-r')$$

Fazendo-se a mudança de variável do tipo $\kappa^2 = z$ na equação (1.6.6) obtêm-se

$$1.6.7 \quad \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{N}{2z} \frac{d}{dz} - \frac{\ell(\ell+N-2)}{4z^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2z} \right\} G_\ell(z, z'; \lambda) = (zz')^{\frac{1-N}{4}} \delta(z-z')$$

que tem como solução a expressão (1.6.5) com $\kappa^2 = z$ e $\kappa'^2 = z'$.

Escrevendo-se

$$1.6.8 \quad G_\ell(z, z'; \lambda) = (zz')^{-N/4} G_\ell(z, z')$$

e substituindo-se na equação (1.6.7) obtêm-se

$$1.6.9 \quad \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2z} - \frac{N(N-4)/16 + \ell(\ell+N-2)/4}{z^2} \right\} G_\ell(z, z') = \delta(z-z')$$

que é uma equação diferencial de Whittaker cuja solução é

$$G_\ell(z, z') = 2(zz')^{1/2} \int_0^1 d\xi \xi^{-\lambda} (1-\xi^2)^{-1} \cdot$$

1.6.10

$$\cdot \exp\left(-\frac{z+z'}{2} \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\right) I_{\ell+N/2-1}\left(2\sqrt{zz'} \frac{\xi}{1-\xi^2}\right)$$

com $\text{Re}[\ell+N/2-1] > 0$.

1.7 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE WHITTAKER

Na secção anterior mostrou-se que a equação diferencial para a função de Green radial com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico multidimensional nada mais é do que uma equação diferencial de Whittaker.

A solução da equação (1.6.9) é dada pela equação (1.4.5) com

$$1.7.1 \quad 2\nu = \lambda \quad \text{e} \quad 4\mu = N+2\ell-2$$

Logo

$$G(z, z') = \Gamma(N/4 + \ell/2 - \lambda/2) \cdot$$

1.7.2

$$\cdot \mathcal{M}_{\lambda/2; 1/2(N/2 - \ell + 1)}(z) \quad \mathcal{W}_{\lambda/2; 1/2(N/2 - \ell + 1)}(z')$$

onde $\mathcal{M}_{\ell; m}(z) = M_{\ell; m}(z) / \Gamma(1+2m)$.

Identificando-se a expressão (1.6.10) com a expressão (1.7.2)

obtem-se

$$\Gamma(N/4 + \ell/2 - \lambda/2) \mathcal{M}_{\lambda/2; 1/2(N/2 - \ell + 1)}(z) \mathcal{W}_{\lambda/2; 1/2(N/2 - \ell + 1)}(z') =$$

1.7.3

$$= 2(zz')^{1/2} \int_0^1 d\xi \xi^{-\lambda} (1-\xi^2)^{-1} \exp\left(-\frac{z+z'}{2} \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\right) I_{\ell+N/2-1}\left(2\sqrt{zz'} \frac{\xi}{1-\xi^2}\right)$$

Fazendo-se uma mudança de variável do tipo $\text{chv} = \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}$ e defini-

nindo-se $2\mu = N+2\ell-2$ e $2x = \lambda$ obtém-se

$$\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - x\right) \mathcal{M}_{x; \mu/2}(z) \mathcal{W}_{x; \mu/2}(z') =$$

1.7.4

$$= (zz')^{1/2} \int_0^\infty dv \text{cth}^{2x} v/2 \exp\left(-\frac{1}{2}(z+z') \text{chv}\right) I_\mu(\sqrt{zz'} \text{shv})$$

onde $z' > z$, $\text{Re}\left(\frac{1+\mu}{2} - x\right) > 0$ e $\text{Re}(\mu) > 0$.

Não há perda de generalidade na redefinição dos parâmetros pois, desde que as restrições sejam obedecidas, as funções de Whittaker são analíticas em todo plano complexo e a representação (1.7.4) é válida. Esse resultado não é novo pois essa representação integral é bem conhecida na literatura⁽⁷⁾.

1.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE KUMMER

As funções de Kummer e as funções de Whittaker estão relacionadas por meio das transformações de Kummer

$$1.8.1 \quad M_{\ell; m/2}^{(1+m)}(z) = e^{-z/2} z^{\frac{1+m}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1+m}{2} - \ell; 1+m; z\right)$$

$$1.8.2 \quad W_{\ell; m/2}(z) = e^{-z/2} z^{\frac{1+m}{2}} U\left(\frac{1+m}{2} - \ell; 1+m; z\right)$$

Substituindo-se as expressões (1.8.1) e (1.8.2) na expressão (1.7.4) obtêm-se

$$1.8.3 \quad \frac{\Gamma(\frac{1+\mu}{2} - x)}{\Gamma(1+\mu)} {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} - x; 1+\mu; z\right) U\left(\frac{1+\mu}{2} - x; 1+\mu; z'\right) = \\ = (zz')^{-\mu/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z+z')\right\} \int_0^\infty dv \operatorname{cth}^{2x} v/2 \exp\left\{-\frac{1}{2}(z+z') \operatorname{ch} v\right\} I_\mu(\sqrt{zz'} \operatorname{sh} v)$$

Utilizando-se a identidade $1 + \operatorname{ch} v = 2 \operatorname{sh}^2 v/2$ e definindo-se

$$1+\mu-2x = 2\alpha \quad \text{e} \quad 1+\mu = c, \quad \text{tem-se}$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a; c; z) U(a; c; z') =$$

1.8.4

$$= (zz')^{1-c} \int_0^\infty dv \operatorname{cth}^{c-2a} v/2 \exp\{-(z+z') \operatorname{sh}^2 v/2\} I_{c-1}(\sqrt{zz'} \operatorname{sh} v)$$

onde $z' > z$, com $\operatorname{Re}(c) > 1$ e $\operatorname{Re}(a) > 0$. Esse resultado, no entanto é novo; define uma representação integral para o produto das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de Kummer. Note que as restrições nos parâmetros são as restrições usuais para se definir as funções de Kummer.

1.9 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE LAGUERRE

Para se obter uma representação integral para o produto de duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de Laguerre basta fazer $a = -v$, $c = 1 + \alpha$ com $\alpha > -1$ e $-v =$ inteiro não negativo, na expressão (1.8.4), logo

$${}_1F_1(-v; 1 + \alpha; z) U(-v; 1 + \alpha; z') =$$

(1.9.1)

$$= \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(-v)} (zz')^{-\alpha/2} \int_0^\infty dv \operatorname{cth}^{1+\alpha+2v} v/2 \exp\{-(z+z') \operatorname{sh}^2 v/2\} I_\alpha(\sqrt{zz'} \operatorname{sh} v)$$

ou ainda, usando-se as expressões (1.2.1) e (1.2.2) obtém-se

$$L_v^\alpha(z) N_v^\alpha(z') =$$

1.9.2

$$= (zz')^{-\alpha/2} \int_0^\infty dv \operatorname{cth}^v v/2 \exp\{-(z+z') \operatorname{sh}^2 v/2\} I_\alpha(\sqrt{zz'} \operatorname{sh} v)$$

onde $\gamma = 1 + \alpha + 2\nu$, com $\text{Re}(-\nu) > 0$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $z' > z$.

1.10 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE HERMITE

As funções de Hermite são um particular caso das funções de Laguerre, com o parâmetro $\alpha = \pm 1/2$ dependendo da paridade, $\alpha = 1/2$ paridade ímpar e $\alpha = -1/2$ paridade par.

Primeiramente, paridade par, façamos $\alpha = -1/2$ na expressão (1.9.2), logo

$$\begin{aligned} 1.10.1 \quad L_{\nu}^{-1/2}(z) N_{\nu}^{-1/2}(z') &= \\ &= (zz')^{1/4} \int_0^{\infty} dv \, \text{cth}^{2\nu+1/2} v/2 \exp\{-(z+z')sh^2 v/2\} I_{-1/2}(\sqrt{zz'}shv) \end{aligned}$$

Usando-se as expressões (1.3.2) e (1.3.4) obtêm-se

$$\begin{aligned} 1.10.2 \quad H_{2n}(z) \mathcal{H}_{2n}(z') &= \\ &= (-1)^n (zz') \int_0^{\infty} dv \, \text{cth}^{2n+1/2} v/2 \exp\{-(z^2+z'^2)sh^2 v/2\} I_{-1/2}(zz'shv) \end{aligned}$$

com $z' > z$.

Um procedimento, inteiramente análogo, onde agora $\alpha = 1/2$ e usando-se as expressões (1.3.1) e (1.3.3) obtêm-se a expressão para um produto de duas funções de Hermite com paridade ímpar

$$\begin{aligned} 1.10.3 \quad H_{2n+1}(z) \mathcal{H}_{2n+1}(z') &= \\ &= (-1)^n (zz')^{1/2} \int_0^{\infty} dv \, \text{cth}^{2n+3/2} v/2 \exp\{-(z^2+z'^2)sh^2 v/2\} I_{1/2}(zz'shv) \end{aligned}$$

onde $z' > z$.

1.11 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE BESSEL

A expressão (1.7.4), quando o parâmetro $v=0$, reduz-se a

$$\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) M_{0;\mu/2}(z) W_{0;\mu/2}(z') =$$

1.11.1

$$= (zz')^{1/2} \int_0^\infty dv \exp\left\{-\frac{1}{2}(z+z')chv\right\} I_\mu(\sqrt{zz'}shv)$$

As funções de Bessel modificadas estão relacionadas com as funções de Whittaker através das expressões (1.5.1) e (1.5.2), logo

$$I_\mu(z/2) K_\mu(z'/2) = \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+1/2)} 2^{-2\mu} \pi^{-1/2} \cdot$$

1.11.2

$$\cdot \int_0^\infty dv \exp\left\{-\frac{1}{2}(z+z')chv\right\} I_{2\mu}(\sqrt{zz'}shv)$$

Utilizando-se a fórmula de duplicação de Legendre⁽⁶⁾ obtêm-se a bem conhecida representação integral para um produto de duas funções de Bessel modificadas, a saber

$$1.11.3 \quad I_\mu(z) K_\mu(z') = \int_0^\infty dv \exp\left\{-(z+z')chv\right\} I_{2\mu}(2\sqrt{zz'}shv)$$

com $\text{Re}(\mu) > -1/2$ e $z' > z$.

Representações integrais para as demais funções de Bessel podem ser obtidas, facilmente, desta expressão, bastando para tal usar as conhecidas relações entre as funções de Bessel modificadas e as demais funções de Bessel, dentre elas, Hankel, Neumann, etc..

1.12 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE WHITTAKER

A partir da representação integral para o produto de duas funções de Whittaker pode-se obter uma regra de soma para um produto de duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de Whittaker utilizando-se a fórmula de Hille-Hardy^[5]

$$(1-z)^{-1} \exp\left(\frac{z+1}{z-1} \frac{x+y}{2}\right) I_{2\ell}\left(\frac{2\sqrt{xyz'}}{1-z}\right) =$$

1.12.1

$$= (xy)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+\ell} \frac{\Gamma(2\ell+n+1)}{\Gamma(n+1)} M_{n+\ell+1/2;\ell}(x) M_{n+\ell+1/2;\ell}(y)$$

que pode ser demonstrada usando-se a fórmula de Mehler e a função de onda do oscilador harmônico isotrópico bidimensional (Apêndice C).

Fazendo-se $\xi^2 = y$ na expressão (1.7.3) com o parâmetro μ definido como $2\mu = N/2 + \ell - 1$, obtêm-se

$$\Gamma(\mu+1/2-\lambda/2) M_{\lambda/2;\mu}(z) W_{\lambda/2;\mu}(z') =$$

1.12.2

$$= (zz')^{1/2} \int_0^{\infty} dy y^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)} (1-y)^{-1} \exp\left(-\frac{z+z'}{2} \frac{1+y}{1-y}\right) I_{2\mu}\left(\frac{2\sqrt{zz'y'}}{1-y}\right)$$

Substituindo-se a expressão (1.12.1) na expressão (1.12.2) e invertendo-se o sinal de soma com o de integral tem-se

$$\Gamma(\mu+1/2-\lambda/2) \mathcal{M}_{\lambda/2;\mu}(z) \mathcal{W}_{\lambda/2;\mu}(z') =$$

1.12.3

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{\Gamma(n+1)} \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z) \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z') \cdot \\ \cdot \int_0^1 dy y^{n+\mu-\frac{1}{2}(\lambda+1)}$$

com $\operatorname{Re}(\mu-\lambda/2+1/2) > 0$ e $z' > z$.

A integral resultante é de resolução imediata, daí podemos escrever a seguinte regra de soma

$$\Gamma(\mu-\nu+1/2) \mathcal{M}_{\nu;\mu}(z) \mathcal{W}_{\nu;\mu}(z') =$$

1.12.4

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu-\mu-n-1/2} \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{\Gamma(n+1)} \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z) \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z')$$

com $\operatorname{Re}(\mu-\nu+1/2) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ e $z' > z$.

1.13 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE KUMMER

As funções de Kummer estão relacionadas com as funções de Whittaker através das relações dadas pelas expressões (1.8.1) e (1.8.2), substituindo-se essas expressões na expressão (1.12.4) tem-se

$$\Gamma(m) \Gamma(2\mu+1) {}_1F_1(m; 2\mu+1; z) U(m; 2\mu+1; z') =$$

$$1.13.1 \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+m} \frac{\Gamma(n+2\mu+1)}{\Gamma(n+1)} {}_1F_1(-n; 2\mu+1; z) {}_1F_1(-n; 2\mu+1; z')$$

com $z' > z$, $m = -\nu + \mu + 1/2$, $\text{Re}(m) > 0$ e $\text{Re}(\mu) > -1/2$.

1.14 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE LAGUERRE

A função de Laguerre é um caso particular da função de Kummer.

Substituindo-se as expressões (1.2.1) e (1.2.2) na expressão (1.13.1) obtém-se

$$L_m^{2\mu}(z) N_m^{2\mu}(z') =$$

$$1.14.1 \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+m} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\mu+1)} L_n^{2\mu}(z) L_n^{2\mu}(z')$$

com $z' > z$, $m = -\nu + \mu + 1/2$, $\text{Re}(m) > 0$ e $\text{Re}(\mu) > -1/2$.

1.15 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE HERMITE

Como ressaltado, quando das representações integrais para um produto de funções de Hermite, aqui também, deve-se separar em dois casos, ou se $\mu = -1/4$ e paridade par $\mu = 1/4$.

Primeiramente, paridade par, substituindo-se $\mu = -1/4$ na expressão (1.14.1) obtêm-se

$$1.15.1 \quad L_{\nu-1/4}^{-1/2}(z) N_{\nu-1/4}^{-1/2}(z') =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{- \nu + n + 1/4} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} L_n^{-1/2}(z) L_n^{-1/2}(z')$$

utilizando-se as relações (1.10.2) e (1.10.3) escreve-se

$$1.15.2 \quad (-1)^{\ell} H_{2\ell}(z) \mathcal{H}_{2\ell}(z') =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-2n}}{n-\ell} \frac{1}{\Gamma(2n+1)} H_{2n}(z) H_{2n}(z')$$

com $z' > z$, $\ell = \nu - 1/4$ e $\text{Re}(\ell) > -1/2$.

Analogamente para as funções de Hermite com paridade ímpar $\mu = 1/4$, obtêm-se

$$1.15.3 \quad (-1)^{\ell} H_{2\ell+1}(z) \mathcal{H}_{2\ell+1}(z') =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-\ell} \frac{2^{-2n-1}}{\Gamma(2n+2)} H_{2n+1}(z) H_{2n+1}(z')$$

onde $z' > z$, $\ell = \nu - 3/4$ e $\text{Re}(\ell) > -1$.

1.16 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE BESSEL

A representação integral para um produto de duas funções de Whittaker; expressão (1.7.4) é a fórmula de Hille-Hardy, expressão (1.12.1) leva

ã regra de soma para um produto de duas funções de Whittaker, expressão (1.12.4).

Fazendo-se $v=0$ na expressão (1.12.4) obtêm-se

$$\Gamma(\mu+1/2) \mathcal{M}_{0;\mu/2}(z) \mathcal{W}_{0;\mu/2}(z') =$$

1.16.1

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\mu+1/2} \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{\Gamma(n+1)} \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z) \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z')$$

mas as funções de Whittaker com o parâmetro $v=0$ estão relacionadas com as funções de Bessel modificadas por meio das expressões (1.11.2) e (1.11.3). Substituindo-se estas expressões na expressão (1.16.1) obtêm-se a respectiva regra de soma para as funções de Bessel modificadas em termos das funções de Whittaker

$$(zz')^{1/2} I_{\mu}(z/2) K_{\mu}(z'/2) =$$

1.16.2

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\mu+1/2} \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{\Gamma(n+1)} \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z) \mathcal{M}_{n+\mu+1/2;\mu}(z')$$

com $z' > z$ e $\text{Re}(\mu) > 0$.

A partir da expressão (1.16.2) pode-se obter as respectivas regras de soma para as demais funções de Bessel, bastando para tal, usar as conhecidas relações entre as funções de Bessel modificadas e as demais funções de Bessel.

REFERÊNCIAS

- (1) E. Capelas de Oliveira, The Green's function for the tridimensional harmonic Oscillator, Rev. Bras. Fis. 9, 697 (1979)
- (2) J. Bellandi F9 and E. S. Caetano Neto, J. Phys. A, Math. and Gen. 9, 683 (1976)
- (3) E. S. Caetano Neto, Tese de Mestrado - Instituto de Física Teórica (1976)
- (4) Erdélyi, A., Higher Transcendental Function volume nº2 (New York - McGraw Hill - 1953)
- (5) Erdélyi, A., Higher Transcendental Function volume nº3 (New York - McGraw Hill - 1955)
- (6) Erdélyi, A., Higher Transcendental Function volume nº1 (New York - McGraw Hill - 1953)
- (7) Buchholz, H., The Confluent Hypergeometric Function (Springer - Verlag - Berlin - 1969)

11. FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

Na secção I apresentou-se o cálculo de representações integrais e regras de soma para as funções hipergeométricas confluentes, completando algumas lacunas existentes na literatura. No caso das funções hipergeométricas ou funções de Jacobi a situação é mais crítica devido, praticamente, à quase total inexistência de tais representações integrais e teoremas de adição. Dentre as funções hipergeométricas a única função exhaustivamente estudada é a função de Legendre com representações integrais e teoremas de adição. As funções de Legendre serão usadas aqui como um parâmetro de teste para as representações integrais e teoremas de adição obtidos.

Segue-se o mesmo procedimento da secção anterior. Determina-se as funções de Green, primeiramente, para as funções de Jacobi e como casos particulares as funções de Gegenbauer, Legendre e Tchebichef. Usa-se as funções de Green para determinar representações integrais, regras de soma e teoremas de adição.

Deve-se ressaltar que a técnica de função de Green usada neste capítulo é uma técnica global, valendo tanto para funções de Jacobi como para polinômios de Jacobi, ou seja, na linguagem usual, tanto vale para soluções ra diais como para soluções angulares de uma equação diferencial.

2.1 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE JACOBI

A função de Green para a equação diferencial de Jacobi satisfaz a

seguinte equação diferencial não homogênea

$$2.1.1 \quad Q_x G(x, x') = \delta(x-x')$$

limitada entre $0 \leq x < \infty$, onde o operador diferencial de Jacobi⁽¹⁾ é

$$2.1.2 \quad Q_x = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + [2(\beta-\alpha) - 2(\alpha+\beta+1)x] \frac{d}{dx} + \mu(\mu+2\alpha+2\beta+1)$$

onde $\alpha > -1/2$ e $\beta > -1/2$ a fim de que a função peso seja não negativa e integrável, mas as relações formais são válidas mesmo sem estas restrições. A escolha conveniente dos parâmetros é só para facilitar notação, e também para quando do estudo do pião simétrico.

Utilizando-se o método de expansão tipo Sturm-Liouville para solucionar a equação (2.1.1) necessita-se das duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea,

$$2.1.3 \quad \left\{ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + [2(\beta-\alpha) - 2(\alpha+\beta+1)x] \frac{d}{dx} + \mu(\mu+2\alpha+2\beta+1) \right\} v(x) = 0$$

As duas soluções linearmente independentes da equação (2.1.3) são as funções de Jacobi

$$2.1.4 \quad v_1(x) = P_{\mu}^{(2\alpha; 2\beta)}(x) \quad \text{e} \quad v_2(x) = Q_{\mu}^{(2\alpha; 2\beta)}(x)$$

onde a primeira é regular na origem e a segunda é regular no infinito.

O determinante Wronskiano⁽²⁾ dessas duas soluções é dado por

$$2.1.5 \quad W(v_1; v_2) = 2^{2\alpha+2\beta} \frac{\Gamma(\mu+2\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\Gamma(\mu+2\beta+1)}{\Gamma(\mu+2\alpha+2\beta+1)} (x-1)^{-2\alpha-1} (x+1)^{-2\beta-1}$$

e a solução da equação (2.1.1) é dada por:

$$2.1.6 \quad G_J(x, x') = 2^{-2(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+2\alpha+1)} \frac{\Gamma(\mu+2\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\mu+2\beta+1)} p_{\mu}^{(2\alpha; 2\beta)}(x_{<}) q_{\mu}^{(2\alpha; 2\beta)}(x_{>})$$

onde $x_{<}(x_{>})$ é o menor(maior) de $x(x')$.

A expressão (2.1.6), solução da equação (2.1.1), é a função de Green para a equação diferencial de Jacobi não homogênea.

2.2 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL ASSOCIADA DE LEGENDRE

Para se determinar a função de Green para a equação diferencial associada de Legendre, a partir da função de Green para a equação diferencial de Jacobi, faz-se $2\alpha = m$ e $2\beta = -m$ na equação (2.1.6).

A relação entre a função de Jacobi, $p_n^{(m; -m)}(x)$, e a função associada de Legendre, $P_n^m(x)$, pode ser obtida usando-se as funções hipergeométricas, ${}_2F_1(a, b; c; z)^{(3)}$,

$$2.2.1 \quad p_{\mu}^{(m; -m)}(x) = \frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{m/2} p_{\mu}^{-m}(x)$$

Por um procedimento, inteiramente análogo, obtém-se para a segunda solução, a relação

$$2.2.2 \quad q_{\mu}^{(m; -m)}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\mu-m+1)}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{m/2} q_{\mu}^m(x)$$

Substituindo-se as expressões (2.2.1) e (2.2.2) na expressão (2.1.6) obtém-se

$$2.2.3 \quad G_L^m(x, x') = (-1)^m \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-m/2} \left(\frac{1-x'}{1+x'}\right)^{-m/2} P_\mu^{-m}(x) Q_\mu^m(x')$$

A expressão (2.2.3) satisfaz a equação diferencial (2.1.1) com $2\alpha = m$ e $2\beta = -m$. Deve-se observar que com estes parâmetros obtêm-se uma variação da equação diferencial associada de Legendre. Para se obter a equação diferencial associada de Legendre que aparece, usualmente, na literatura deve-se omitir a função peso, portanto

$$2.2.4 \quad G_L^m(x, x') = (-1)^m P_\mu^{-m}(x_<) Q_\mu^m(x_>)$$

que é a função de Green para a equação diferencial associada de Legendre⁽⁴⁾.

2.3 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE GEGEMBAUER

A equação diferencial de Gegembauer também é um caso particular da equação diferencial de Jacobi com os parâmetros dados por $2\alpha = 2\beta = \lambda - 1/2$ com $\lambda > -1/2$. a relação que envolve estas funções é

$$2.3.1 \quad P_\mu^{\{\lambda-1/2; \lambda-1/2\}}(x) = 2^{2\lambda-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+1/2)}{\Gamma(2\lambda+\mu)} C_\mu^\lambda(x)$$

e para a segunda solução tem-se

$$2.3.2 \quad Q_\mu^{\{\lambda-1/2; \lambda-1/2\}}(x) = \frac{\Gamma(\mu+\lambda+1/2)}{\Gamma(\mu+2\lambda)} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\lambda)} D_\mu^\lambda(x)$$

onde $D_\mu^\lambda(x)$ é a segunda solução linearmente independente da equação diferen-

cial de Gegembauer. Estas relações podem ser determinadas usando-se as expressões para essas funções em termos das funções hipergeométricas⁽²⁾.

Substituindo-se as expressões (2.3.1) e (2.3.2) na expressão (2.1.6) obtêm-se

$$2.3.3 \quad G_G(x, x') = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+2\lambda)} C_\mu^\lambda(x_<) D_\mu^\lambda(x_>)$$

com $\text{Re}(\mu+1) > 0$ e $x_<(x_>)$ é o menor(maior) de $x(x')$.

2.4 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE TCHEBICHEF

As funções de Tchebichef aparecem na literatura como funções de Tchebichef de primeira e de segunda espécies, dependendo do parâmetro λ que aparece na função de Gegembauer.

Para a função de Tchebichef de primeira espécie tem-se $\lambda=0$, que substituindo-se na expressão (2.3.3), obtêm-se

$$2.4.1 \quad G_T^I(x, x') = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)} C_\mu^0(x) D_\mu^0(x')$$

As funções de Tchebichef de primeira espécie estão relacionadas com as funções de Gegembauer através das expressões

$$2.4.2 \quad C_\mu^0(x) = \frac{2}{\mu} T_\mu(x)$$

$$2.4.3 \quad D_\mu^0(x) = \frac{1}{2} U_\mu(x)$$

onde $V_n(z)$ é a segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Tchebichef de primeira espécie que está definida, em termos da função hipergeométrica, pela relação

$$2.4.4 \quad D_{\mu}^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} D_{\mu}^{\lambda}(x) = \frac{1}{2} V_{\mu}(x)$$

onde

$$2.4.5 \quad D_{\mu}^{\lambda}(z) = 2^{-\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(2\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} z^{-\mu-2\lambda} {}_2F_1(\lambda+\mu/2, \lambda+\mu/2+1/2; \lambda+\mu+1; 1/z^2)$$

Substituindo-se as expressões (2.4.2) e (2.4.3) na expressão (2.4.1) obtêm-se

$$2.4.6 \quad G_T^1(x) = T_{\mu}(x_{<}) V_{\mu}(x_{>})$$

onde $x_{<}(x_{>})$ é o menor(maior) de $x(x')$.

Para a função de Tchebichef de segunda espécie tem-se que, quando, substituído $\lambda=1$ na expressão (2.3.3) obtêm-se

$$2.4.7 \quad G_T^2(x, x') = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+2)} C_{\mu}^1(x) D_{\mu}^1(x')$$

As funções de Tchebichef de segunda espécie estão definidas em termos das funções de Gegenbauer através das relações

$$2.4.8 \quad C_{\mu}^1(x) = U_{\mu}(x)$$

$$2.4.9 \quad D_{\mu}^1(x) = (\mu+1) X_{\mu}(x)$$

onde $X_\mu(x)$ é a segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Tchebichef de segunda espécie que está definida em termos da função hipergeométrica como

$$2.4.10 \quad X_\mu(x) = \frac{1}{\mu+1} 2^\mu (2x)^{-\mu-2} {}_2F_1(1+\mu/2, 3/2+\mu/2; \mu+2; 1/x^2)$$

Substituindo-se as expressões (2.4.8) e (2.4.9) na expressão (2.4.7) obtém-se

$$2.4.11 \quad G_T^2(x, x') = U_\mu(x_<) X_\mu(x_>)$$

onde $x_<(x_>)$ é o menor(maior) de $x(x')$.

2.5 FUNÇÃO DE GREEN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LEGENDRE

A equação diferencial de Legendre é um caso particular da equação diferencial de Gegenbauer com o parâmetro $\lambda=1/2$.

Fazendo-se $\lambda=1/2$ na expressão (2.3.3) obtém-se

$$2.5.1 \quad G_L^0(x, x') = C_\mu^{1/2}(x) P_\mu^{1/2}(x')$$

As funções de Legendre estão relacionadas com as funções de Gegenbauer através das relações

$$2.5.2 \quad C_\mu^{1/2}(x) = P_\mu(x)$$

$$2.5.3 \quad \begin{aligned} P_{\mu}^{1/2}(x) &= 2^{-\mu-1} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+3/2)} x^{-\mu-1} {}_2F_1\left(\frac{1+\mu}{2}, \frac{2+\mu}{2}; \mu+\frac{3}{2}; 1/x^2\right) \\ &= Q_{\mu}(x) \end{aligned}$$

onde $Q_{\mu}(z)$ é a segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Legendre. Substituindo-se as expressões (2.5.2) e (2.5.3) na expressão (2.5.1) obtêm-se

$$2.5.4 \quad G_L^0(x, x') = P_{\mu}(x_{<}) Q_{\mu}(x_{>})$$

onde $x_{<}(x_{>})$ é o menor(maior) de $x(x')$.

Deve-se notar que a expressão (2.5.4) pode ser obtida diretamente da expressão (2.1.6) com os parâmetros $2\alpha = 2\beta = 0$ uma vez que $P_n^{(0;0)}(x) = P_n(x)$ e $Q_n^{(0;0)}(x) = Q_n(x)$.

2.6 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE JACOBI

Para se estudar as representações integrais para as funções de Jacobi segue-se um procedimento um pouco diferente do caso das funções hipergeométricas confluentes somente por facilidade de cálculo.

Um procedimento inteiramente análogo seria calcular a transformada de Fourier da equação diferencial não homogênea de Jacobi. A equação diferencial de Jacobi está ligada, por meio da transformada de Fourier, com a equação diferencial radial de um potencial Coulombiano multidimensional ou de um oscilador harmônico isotrópico. Calculando-se a antitransformada de Fourier da função de Green radial Coulombiana pode-se obter a função de Green para a

equação diferencial de Jacobi⁽⁵⁾.

Determina-se uma representação integral e regras de soma para as funções de Jacobi, Legendre, Gegenbauer e Tchebichef.

Por simplicidade obtêm-se a equação diferencial de Jacobi a partir da equação diferencial de Legendre. Esse procedimento facilita a identificação dos casos particulares das funções hipergeométricas bem como o estudo da função de Green para o pião simétrico.

A equação diferencial de Legendre homogênea é

$$2.6.1 \quad \{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + v(v+1)\} u(x) = 0$$

que tem solução polinomial quando o parâmetro v é inteiro.

Diferenciando-se a equação (2.6.1) m vezes obtêm-se

$$2.6.2 \quad \{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{d}{dx} + (v-m)(v+m+1)\} \phi(x) = 0$$

$$\text{onde } \phi(x) = \frac{d^m}{dx^m} u(x).$$

Fazendo-se $\phi(x) = (x^2-1)^{-m/2} w(x)$ e substituindo-se na equação anterior obtêm-se a equação diferencial associada de Legendre

$$2.6.3 \quad \{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + v(v+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\} w(x) = 0$$

que com a substituição

$$2.6.4 \quad w(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-m/2} \psi(x)$$

pode ser escrita como

$$2.6.5 \quad \{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2(m+x) \frac{d}{dx} + v(v+1)\} \psi(x) = 0$$

Diferenciando-se a equação (2.6.5) n vezes, obtêm-se

$$2.6.6 \quad \{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2[m+(n+1)x] \frac{d}{dx} + [v(v+1) - n(n+1)]\} G(x) = 0$$

onde $G(x) = \frac{d^n}{dx^n} \psi(x)$.

Definindo-se os parâmetros $\beta + \alpha = n$; $\beta - \alpha = m$ e $\mu = v - \alpha - \beta$ obtêm-se a seguinte equação diferencial

$$2.6.7 \quad \{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + [2(\beta - \alpha) - (2\alpha + 2\beta + 2)x] \frac{d}{dx} + \mu(\mu + 2\alpha + 2\beta + 1)\} G(x, x') = \delta(x - x')$$

que é a equação diferencial de Jacobi não homogênea.

A solução da equação (2.6.7) é dada pela expressão (2.1.6). Portanto,

$$2.6.8 \quad G(x, x') = 2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} \cdot P_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x_<) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x_>)$$

onde $P_c^{(a; b)}(x)$ e $Q_c^{(a; b)}(x)$ são, respectivamente, a primeira e a segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Jacobi homogênea e $x_<(x_>)$ é o menor(maior) de $x(x')$.

Estuda-se, primeiramente, o caso das funções de Jacobi, ou seja, funções definidas no domínio $1 < x < \infty$. Por uma simples generalização obtêm-se,

também, para os polinômios de Jacobi definidos no domínio $0 \leq x < 1$. Para se obter uma representação integral para o produto de duas funções de Jacobi introduz-se na equação (2.6.8) as seguintes representações integrais

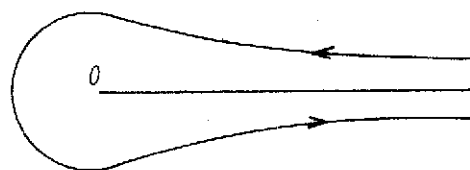
$$2.6.9 \quad 2^{-n} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} P_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) = (-1)^{\nu-n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{0^+} dt e^{-xt} t^{n-1} W_{m; \nu+1/2}(2t)$$

$$2.6.10 \quad 2^{-n} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma(\nu-m+1)} Q_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt e^{-xt} t^{n-1} M_{m; \nu+1/2}(2t)$$

onde $M_{m; \ell}(x)$ e $W_{m; \ell}(x)$ são as funções de Whittaker.

O contorno que aparece na representação integral da expressão (2.6.9) é o contorno expresso pela figura ao lado.



A função $G(x, x')$, para $x' > x$ pode ser escrita na forma

$$G(x, x') = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)} (-1)^{\nu-n+1}.$$

2.6.11

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_0^{0^+} e^{-xt-x't'} (tt')^{n-1} M_{m; \nu+1/2}(2t) W_{m; \nu+1/2}(2t') dt dt'$$

Note-se que o produto das duas funções de Whittaker que aparece na expressão (2.6.11) corresponde à função de Green radial do potencial Coulombiano citada anteriormente⁽⁵⁾ na situação em que $t' > t$.

Sem perda de generalidade pode-se escrever o produto das funções de Whittaker na representação integral dada pela expressão (1.7.6) com $t' > t$.

Isso pode ser mostrado mudando-se as variáveis $t \rightarrow t/x$ e $t' \rightarrow t'/x'$ e observando-se que $t/x < t'/x'$. Usa-se a representação integral para o produto de funções de Whittaker, expressão (1.7.6), na expressão (2.6.11), e volta-se às variáveis originais. A expressão para $G(x, x')$ é

$$G(x, x') = \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)} (-1)^{\nu-n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0^+} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt dt' dv \cdot$$

$$(tt')^{n-1/2} e^{-(x+chv)t - (x'+chv)t'} \text{cth}^{2m}_{\nu/2} I_{2\nu+1}(2\sqrt{tt'}shv)$$

onde $I_{\nu}(x)$ é a função de Bessel modificada.

As integrais em t e t' são facilmente realizadas ⁽⁶⁾, obtendo-se para $G(x, x')$ a seguinte expressão

$$G(x, x') = (-1)^{\nu-n+1} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0^+} dv (shv)^{2\nu+1} \text{cth}^{2m}_{\nu/2} \cdot$$

$$\cdot \{(x+chv)(x'+chv)\}^{-\nu-n-1} {}_2F_1\{\nu+n+1, \nu+n+1; 2\nu+2; \frac{sh^2_{\nu}}{(x+chv)(x'+chv)}\}.$$

Pode-se identificar a função ${}_2F_1(a, b; c; x)$ que aparece na expressão anterior com a segunda solução da equação diferencial de Jacobi e escreve-se a seguinte representação integral para o produto de duas funções de Jacobi

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} p_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

$$= (-1)^{\nu-n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0^+} dv (shv)^{-2n-1} \text{cth}^{2m}_{\nu/2} Q_{\nu-n}^{(2n; 0)} \left\{ 2 \frac{(x+chv)(x'+chv)}{sh^2_{\nu}}, -1 \right\}$$

com $x' > x$, $1 < x < \infty$ e $1 < x' < \infty$.

Essa representação integral é válida, também, no domínio $|x| < 1$, pois o desenvolvimento nesse domínio é inteiramente análogo.

2.7 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES ASSOCIADAS DE LEGENDRE

Para se obter a representação integral para o produto das duas funções associadas de Legendre, particulariza-se a expressão (2.6.14) fazendo-se o parâmetro $n=0$. As relações entre as funções de Jacobi e as associadas de Legendre são dadas por

$$2.7.1 \quad P_{\mu}^{(-m;m)}(x) = \frac{\Gamma(\mu-m+1)}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-m/2} P_{\mu}^m(x)$$

$$2.7.2 \quad Q_{\mu}^{(-m;m)}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-m/2} Q_{\mu}^m(x)$$

obtem-se, assim, a respectiva representação integral

$$\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-m/2} \left(\frac{x'+1}{x'-1} \right)^{-m/2} P_{\nu}^m(x) Q_{\nu}^m(x') =$$

2.7.3

$$= (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0^+} dv (shv)^{-1} \operatorname{cth}^{2m} v / 2 \quad Q_{\nu} \left\{ 2 \frac{(x+chv)(x'+chv)}{sh^2 v} - 1 \right\}$$

onde $Q_{\ell}(x)$ é a segunda solução da equação diferencial associada de Legendre uma vez que $Q_{\ell}^{(0;0)}(x) = Q_{\ell}(x)$ com $x' > x$, $1 \leq x < \infty$ e $1 \leq x' < \infty$.

2.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE GEGEMBAUER

As funções de Gegembauer são um caso particular das funções de Jacobi com o parâmetro $n=0$. Utilizando-se as expressões (2.3.1) e (2.3.2) obtem-se

$$\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} (x-1)^m (x'-1)^m C_{\nu-m}^{m+1/2}(x) D_{\nu-m}^{m+1/2}(x') =$$

$$2.8.1 \quad = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0+} dv (shv)^{-1} \operatorname{cth}^{2m} v/2 Q_{\nu} \left\{ 2 \frac{(x+chv)(x'+chv)}{sh^2 v} - 1 \right\}$$

com $x' > x$, $1 \leq x < \infty$ e $1 \leq x' < \infty$.

2.9 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE TCHEBICHEF

Como anteriormente ressaltado tem-se que, para as funções de Tchebichef, destacar dois casos, ou seja, funções de Tchebichef de primeira e segunda espécies.

A função de Tchebichef de primeira espécie é um caso particular da função de Jacobi com o parâmetro $n=0$ e o parâmetro $m=-1/2$.

Substituindo-se $n=0$ e $m=-1/2$ na expressão (2.8.1) e utilizando-se as expressões (2.4.2) e (2.4.3) obtém-se

$$2.9.1 \quad \begin{aligned} & (x-1)^{-1/2} (x'-1)^{-1/2} T_{\nu+1/2}(x) U_{\nu+1/2}(x') = \\ & = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0+} dv \frac{dv}{shv \operatorname{cth} v/2} Q_{\nu} \left\{ 2 \frac{(x+chv)(x'+chv)}{sh^2 v} - 1 \right\} \end{aligned}$$

com $x' > x$, $1 \leq x < \infty$ e $1 \leq x' < \infty$.

Analogamente, para as funções de Tchebichef de segunda espécie, basta tomar $n=0$ e $m=1/2$ na expressão (2.8.1) e utilizar as expressões (2.4.8) e (2.4.9), logo

$$\begin{aligned}
 & (x-1)^{1/2} (x'-1)^{1/2} U_{\nu-1/2}(x) X_{\nu-1/2}(x') = \\
 2.9.2 \quad & = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0+} dv \frac{c h v / 2}{s h v} Q_{\nu} \left\{ 2 \frac{(x+c h v)(x'+c h v)}{s h^2 v} - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

com $x' > x$, $1 \leq x < \infty$ e $1 \leq x' < \infty$.

2.10 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA UM PRODUTO DE FUNÇÕES DE LEGENDRE

As funções de Legendre são um caso particular das funções de Jacobi com os parâmetros $m = n = 0$.

Substituindo-se $m = n = 0$ na expressão (2.6.14) obtém-se a seguinte representação integral

$$\begin{aligned}
 & P_{\nu}(x) Q_{\nu}(x') = \\
 2.10.1 \quad & = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0+} \frac{dv}{s h v} Q_{\nu} \left\{ 2 \frac{(x+c h v)(x'+c h v)}{s h^2 v} - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

com $x' > x$, $1 \leq x < \infty$ e $1 \leq x' < \infty$.

2.11 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE JACOBI

Analogamente ao caso das funções hipergeométricas confluentes obtêm-se regras de soma para as funções de Jacobi sendo que, no presente caso usa-se uma expansão em série para a segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Jacobi.

Utilizando-se a expressão (2.6.14)

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} P_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

2.11.1

$$= (-1)^{v-n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0+} dv (shv)^{-2n-1} \cosh^{2m} v/2 Q_{v-n}^{(2n; 0)} \left\{ 2 \frac{(x+chv)(x'+chv)}{sh^2 v} - 1 \right\}$$

expande-se a função $Q_{\ell}^{(m; n)}(y)$ em termos de uma série⁽⁷⁾ e, já invertendo o sinal de integral com o de somatório obtêm-se

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} P_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

$$2.11:2 = \frac{1}{2} (-1)^{v-n+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \begin{pmatrix} v-n+\mu \\ v-n \end{pmatrix} \frac{\Gamma(v+n+\mu+1)}{\Gamma(2v+2+\mu)} \Gamma(v-n+1) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0+} dv (sh^2 v)^{v+\mu+1/2} \cosh^{2m} v/2 \{ (x+chv)(x'+chv) - sh^2 v \}^{-v-\mu-n-1}$$

Fazendo-se uma mudança de variável do tipo $chv = \xi^{-1}$ obtêm-se

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} p_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

2.11.3

$$= \frac{1}{2} (-1)^{v-n+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{v-n+\mu}{v-n} \frac{\Gamma(v+\mu+n+1)}{\Gamma(2v+\mu+2)} \Gamma(v-n+1) (x+x')^{-\mu-v-n-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi=0}^{\infty} d\xi \xi^{-\mu-v+n-1} (1+\xi)^{v+\mu+m} (1-\xi)^{v+\mu-m} \left(\frac{1+x x'}{x+x'} \xi + 1 \right)^{-\mu-v-n-1}$$

A integral que aparece na expressão anterior, depois de feita a continuação analítica, é a função F_1 de Picard⁽⁸⁾, logo

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} p_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

2.11.4

$$= \frac{1}{2} (-1)^{v-n+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{v-n+\mu}{v-n} \frac{\Gamma(v+\mu+n+1)}{\Gamma(2v+\mu+2)} \Gamma(v-n+1) (x+x')^{-\mu-v-n-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{B(-m+v+\mu+1; -v-\mu+n)}{\Gamma(-m+v+\mu+1) \Gamma(-v-\mu+n)} F_1 \left(-v-\mu+n; -m-v-\mu; v+\mu+n+1; n-m+1; -1; -\frac{1+x x'}{x+x'} \right)$$

onde $B(x; y)$ é a função beta e $\text{Re}(m+v+\mu+1) > 0$ e $\text{Re}(v+\mu+n) > 0$.

Lembrando-se a relação entre a função de Picard que aparece na expressão (2.11.4) e a função hipergeométrica⁽⁸⁾

$$2.11.5 \quad F_1(a, b, b'; b+b'; z; y) = (1-y)^{-a} {}_2F_1(a, b; b+b'; \frac{z-y}{1-y})$$

pode-se escrever a seguinte expressão

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} P_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

2.11.6

$$= \frac{1}{2} (-1)^{v-n+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{v-n+\mu}{v-n} \frac{\Gamma(v+\mu+n+1)}{\Gamma(2v+2+\mu)} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(n-m+1)} (x+x')^{-2v-2\mu-1} \cdot$$

$$\cdot \{(x+1)(x'+1)\}^{v+\mu-n} {}_2F_1\{-v-\mu+n, -v-\mu-m; n-m+1; \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x'-1}{x'+1}\}$$

A função hipergeométrica que aparece na expressão (2.11.6) nada mais é do que a função de Jacobi, logo

$$2^{-2n} \frac{\Gamma(v-n+1)}{\Gamma(v-m+1)} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(v+m+1)} P_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{v-n}^{(n-m; n+m)}(x') =$$

$$2.11.7 \quad = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+v-n}{v-n} \frac{\Gamma(\mu+v+n+1)}{\Gamma(\mu+2v+2)} \Gamma(v-n+1) 2^{-n+\mu+v+1} \cdot$$

$$\cdot (x+x')^{-\mu-v-n-1} P_{v+\mu-n}^{(n-m; n+m)}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

com $\text{Re}(n+v+\mu+1) > 0$ e $x' > x$.

2.12 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES ASSOCIADAS DE LEGENDRE

As funções associadas de Legendre são um caso particular das funções de Jacobi. Faz-se $n=0$ e $m=-m$ e usando-se as expressões (2.2.3) e (2.2.4) tem-se

$$(-1)^m \left\{ \frac{(x-1)(x'-1)}{(x+1)(x'+1)} \right\}^{m/2} P_v^m(x) Q_v^{-m}(x') =$$

2.12.1

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+v}{v} \frac{\Gamma(v+1) \Gamma(\mu+v-m+1)}{\Gamma(\mu+2v+2)} (-1)^{\mu+v+m} \cdot$$

$$\cdot (x+x')^{-\mu-v-1} P_{v+\mu}^{(m;-m)} \left(\frac{1+xx'}{x+x'} \right)$$

Utilizando-se a expressão (2.2.3) pode-se escrever a função de Jacobi, que aparece na expressão (2.12.1), em termos da função associada de Legendre, logo obtêm-se uma regra de soma para as funções associadas de Legendre, ou seja

$$P_v^m(x) Q_v^{-m}(x') =$$

2.12.2

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+v}{v} \frac{\Gamma(v+1) \Gamma(v+\mu-m+1)}{\Gamma(\mu+2v+2)} \left(\frac{x+x'}{2} \right)^{-\mu-v-1} P_{v+\mu}^m \left(\frac{1+xx'}{x+x'} \right)$$

com $\operatorname{Re}(m+v+\mu+1) > 0$ e $x' > x$.

2.13 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE GEGEMBAUER

As funções de Gegembauer também são um caso particular das funções de Jacobi com os parâmetros dados por $n=0$ e $m=m$. Substituindo-se esses parâmetros na expressão (2.11.7) e usando-se as expressões (2.3.1) e (2.3.2) obtêm-se

$$\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} C_{\nu-m}^{m+1/2}(x) D_{\nu-m}^{m+1/2}(x') =$$

2.13.1

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1) \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+2\nu+2)} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\mu-\nu-1} P_{\nu+\mu}^{(-m;m)}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

A função de Jacobi que aparece no segundo membro da expressão anterior pode ser escrita em termos da função de Gegembauer através da relação

$$2.13.2 \quad P_{\ell}^{(-m;m)}(x) = \frac{\Gamma(m+1/2) \Gamma(\ell-m+1)}{\Gamma(1/2) \Gamma(\ell+1)} 2^m (x-1)^m C_{\ell-m}^{m+1/2}(x)$$

Substituindo-se a expressão (2.13.2) na expressão (2.13.1) obtêm-se a respectiva regra de soma para as funções de Gegembauer

$$\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} C_{\nu-m}^{m+1/2}(x) D_{\nu-m}^{m+1/2}(x') =$$

2.13.3

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(m+1/2) \Gamma(\mu+\nu-m+1)}{\Gamma(1/2) \Gamma(\mu+2\nu+2)} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\gamma} C_{\nu+\mu-m}^{m+1/2}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

com $\text{Re}(\mu+\nu+m+1) > 0$ e $x' > x$, onde $\gamma = \mu + \nu + m + 1$.

2.14 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE TCHEBICHEF

As funções de Tchebichef também são um caso particular das funções de Jacobi. Para as funções de Tchebichef de primeira espécie tem-se os parâmetros dados por $n=0$ e $m=-1/2$ e, para as funções de Tchebichef de segunda espécie $n=0$ e $m=1/2$.

Usando-se as propriedades da função gama⁽³⁾ escreve-se a expressão (2.13.3) na seguinte forma

$$2.14.1 \quad \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} C_{\nu-m}^{m+1/2}(x) D_{\nu-m}^{m+1/2}(x') =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\mu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu+2\nu+2)} \frac{\Gamma(\nu+\mu-m+1)}{\Gamma(m+3/2)} \frac{\Gamma(m+3/2)}{m+1/2} C_{\nu+\mu-m}^{m+1/2}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

Fazendo-se $m=-1/2$ na expressão (2.14.1) e utilizando-se as expressões (2.4.2) e (2.4.3) tem-se

$$2.14.2 \quad T_{\nu+1/2}(x) U_{\nu+1/2}(x') =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(\mu+\nu+3/2)}{\Gamma(\mu+2\nu+2)} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\mu-\nu-1/2} T_{\nu+\mu+1/2}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

com $\text{Re}(\mu+\nu+1/2) > 0$ e $x' > x$.

Para as funções de Tchebichef de segunda espécie tem-se $n=0$ e $m=1/2$, logo, substituindo-se esses parâmetros na expressão (2.13.3), obtêm-se

$$2.14.3 \quad \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+3/2)} C_{\nu-1/2}^1(x) D_{\nu-1/2}^1(x') =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+2\nu+2)} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\nu-\mu-3/2} C_{\nu+\mu-1/2}^1\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

Usando-se as expressões (2.4.8) e (2.4.9) obtêm-se a regra de soma para as funções de Tchebichef de segunda espécie, ou seja

$$u_{\nu-1/2}(x) \chi_{\nu-1/2}(x') =$$

2.14.4

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\mu+\nu+1/2)}{\Gamma(1/2) \Gamma(\mu+2\nu+2)} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\mu-\nu-3/2} u_{\nu+\mu-1/2}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

onde usou-se o fato que $C_\ell^1(x) = u_\ell(x)$ com $\text{Re}(\nu+\mu+3/2) > 0$ e $x' > x$.

2.15 REGRA DE SOMA PARA AS FUNÇÕES DE LEGENDRE

As funções de Legendre são um caso particular das funções de Jacobi com os parâmetros $n=m=0$. Substituindo-se $n=m=0$ na expressão (2.11.7) obtêm-se

$$P_\nu(x) Q_\nu(x') =$$

2.15.1

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+2\nu+2)} \left(\frac{x+x'}{2}\right)^{-\mu-\nu-1} P_{\nu+\mu}\left(\frac{1+xx'}{x+x'}\right)$$

com $\text{Re}(\mu+\nu+1) > 0$ e $x' > x$. Convém ressaltar que a expressão anterior poderia, também, ser obtida da expressão (2.12,2) fazendo-se $m=0$ uma vez que $P_m^0(x) = P_m(x)$.

REFERÊNCIAS

- (1) J. Bellandi F^o and E. Capelas de Oliveira, The Green's function for Jacobi Special Functions Rev. Bras. Fis. 10, 107 (1980).
- (2) Erdélyi, A., Higher Transcendental Function volume nº 2 (New York - McGraw Hill - 1953)
- (3) Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni, R. P., Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics (Springer Verlag - New York, Inc. 1966)
- (4) J. Bellandi F^o and E. Capelas de Oliveira, The Green's functions for the Associated Legendre Differential Equation. Rev. Bras. Fis. 9, 813 (1980)
- (5) J. Bellandi F^o and E. Capelas de Oliveira, The radial Coulomb Green's function and Jacobi Green's function (sub. Revista Brasileira de Física)
- (6) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, Inc. 1980)
- (7) Szegő, G., Orthogonal Polynomials (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, volume 23, New York 1939)
- (8) Erdélyi, A., Higher Transcendental Function volume nº 2 (New York - McGraw Hill - 1953)

III. TEOREMAS DE ADIÇÃO

Na secção anterior obteve-se uma representação integral para um produto de duas funções de Jacobi. Utilizando-se essa representação integral obtêm-se um teorema de adição para as funções de Jacobi e como caso particular o teorema de adição para as funções associadas de Legendre.

3.1 FUNÇÕES DE JACOBI

Seja a função $G(x, x')$ dada pela expressão (2.6.13)

$$G(x, x') = (-1)^{v-n+1} \frac{\Gamma(v-n+1) \Gamma(v+n+1)}{\Gamma(2v+2)} .$$

$$3.1.1 \quad \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0^+} dv (shv)^{2v+1} cth^{2m} v/2 \{ (x+chv)(x'+chv) \}^{-v-n-1} .$$

$$\cdot {}_2F_1\{v+n+1, v+n+1; 2v+2; \frac{sh^2 v}{(x+chv)(x'+chv)}\}$$

Fazendo-se uma mudança de variável, $chv = \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}$, na expressão anterior e usando-se uma representação integral para a função hipergeométrica em termos de funções de Bessel⁽¹⁾, pode-se escrever para $G(x, x')$ a seguinte representação integral

$$3.1.2 \quad G(x, x) = \frac{2\pi}{\text{sen}\{\pi(v-n+1/2)\}} \alpha^{-m} \beta^{-n} \int_{\eta=0} d\eta \eta^{-2m+2n-1} .$$

$$\cdot \int_0^\infty J_{2v+1}(2t) \left(\frac{z_1 - z_2/\eta^2}{z_1 - z_2\eta^2} \right)^n y_{2n} \left\{ \left(\frac{z_1 - z_2/\eta^2}{z_1 - z_2\eta^2} \right)^2 \left(\frac{1}{z_1 - z_2\eta^2} \right)^2 t \right\} dt$$

onde o contorno da integral em η , $\eta^2 = \alpha \xi^2$, é um contorno fechado em torno da origem definido no sentido positivo, e os parâmetros sendo definidos por

$$3.1.3 \quad \alpha^2 = \frac{(x+1)(x'+1)}{(x-1)(x'-1)} \quad \beta^2 = (x^2-1)(x'^2-1) \quad z_1^2 = \alpha\beta \quad z_2^2 = \frac{\beta}{\alpha} .$$

Para integrar em η pode-se escolher um círculo de raio unitário em torno da origem, parametrizando-se $\eta^2 = e^{i\phi}$.

Com essa parametrização expande-se a função de Bessel usando-se a regra de soma de Graf⁽²⁾

$$3.1.4 \quad e^{i\nu\psi} Y_\nu(\bar{w}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Y_{\nu+\ell}(z_1) J_\ell(z_2) e^{i\ell\phi}$$

onde $\bar{w}, \psi, z_1, z_2$ e ϕ , com $z_1 > z_2$, estão relacionados através das relações

$$z_1 - z_2 \cos\phi = \bar{w} \cos\psi$$

$$z_2 \sin\phi = \bar{w} \sin\psi$$

ou ainda

$$\bar{w}^2 = (z_1 - z_2 e^{i\phi})(z_1 - z_2 e^{-i\phi}) \quad e^{2i\psi} = \frac{z_1 - z_2 e^{-i\phi}}{z_1 - z_2 e^{i\phi}}$$

assim, tem-se

$$3.1.5 \quad \left(\frac{z_1 - z_2 e^{-i\phi}}{z_1 - z_2 e^{i\phi}} \right)^n Y_{2n} \{ (z_1 - z_2 e^{-i\phi})(z_1 - z_2 e^{i\phi}) t \} = \\ = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Y_{2n+\ell}(z_1 t) J_\ell(z_2 t) e^{i\ell\phi}$$

com essa expansão, a integral em η reproduz uma função delta de Kronecker restando somente a seguinte integral

$$G(x, x') = \pi \frac{\beta^{-n} \alpha^{-m}}{\sin\{\pi(\nu-n+1/2)\}} \cdot$$

3.1.6

$$\cdot \int_0^\infty J_{2\nu+1}(2t) y_{m+n}(z_1 t) J_{m-n}(z_2 t) dt$$

Multiplica-se, ambos os membros da igualdade (3.1.6), pela função peso. No segundo membro a função peso cancela o termo $\alpha^{-m} \beta^{-n}$, logo

$$\frac{n-m}{(x-1)^2} \frac{n+m}{(x+1)^2} \frac{n-m}{(x'-1)^2} \frac{n+m}{(x'+1)^2} G(x, x') =$$

3.1.7

$$= \frac{\pi}{\sin\{\pi(\nu-n+1/2)\}} \int_0^\infty J_{2\nu+1}(2t) y_{m+n}(z_1 t) J_{m-n}(z_2 t) dt.$$

Multiplicando-se ambos os membros da expressão (3.1.7) por $\exp(i\mu)$, substituindo-se a respectiva função $G(x, x')$ e somando-se no parâmetro m tem-se

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} W(x, x') P_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) Q_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x') e^{i\mu} =$$

3.1.8

$$= \frac{\pi}{\sin\{\pi(\nu-n+1/2)\}} \int_0^\infty J_{2\nu+1}(2t) dt \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_{m+n}(z_1 t) J_{m-n}(z_2 t) e^{i\mu}$$

onde $W(x, x')$ é a função peso.

A soma que aparece na expressão (3.1.8) pode ser calculada usando-se a expressão (3.1.4), obtendo-se

$$3.1.9 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} w(x, x') p_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) q_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x') e^{i m \rho} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\{\pi(\nu-n+1/2)\}} e^{i n \rho + 2 i n \Psi} \int_0^{\infty} dt J_{2\nu+1}(2t) y_{2n}(wt)$$

onde

$$e^{2i\Psi} = \frac{z_1 - z_2 e^{-i\rho}}{z_1 - z_2 e^{i\rho}} \quad e \quad w^2 = (z_1 - z_2 e^{i\rho})(z_1 - z_2 e^{-i\rho}) .$$

A integral na expressão (3.1.9) reproduz, novamente, a função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$, logo

$$3.1.10 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} w(x, x') p_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) q_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x') e^{i m \rho} =$$

$$= e^{i(\rho+2\Psi)n} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \frac{2^{2\nu+1}}{w^{2\nu+2}} {}_2F_1(\nu+n+1, \nu-n+1; 2\nu+2; 4/w^2)$$

A função hipergeométrica que aparece no segundo membro da expressão anterior define a segunda solução da equação diferencial de Jacobi, então

$$3.1.11 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} w(x, x') p_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x) q_{\nu-n}^{(n-m; n+m)}(x') e^{i m \rho} =$$

$$= e^{i(\rho+2\Psi)n} \left(\frac{w}{2}\right)^{2n} q_{\nu-n}^{(0; 2n)}(w^2/2 - 1)$$

onde $x > 1$, $x' > 1$, $0 < \Psi < \pi/2$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Escrevendo-se, explicitamente, o argumento da função de Jacobi e incorporando-se a função peso obtêm-se

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} (x-1)^{\frac{n-m}{2}} (x+1)^{\frac{n+m}{2}} (x-1)^{\frac{n-m}{2}} (x'+1)^{\frac{n+m}{2}} .$$

$$\begin{aligned} 3.1.12 \quad & \cdot P_{\nu-n}^{(n-m;n+m)}(x) Q_{\nu-n}^{(n-m;n+m)}(x') e^{i\mu\rho} = \\ & = e^{i(\rho+2\psi)n} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2n} Q_{\nu-n}^{(0;2n)}\{xx' - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\rho\} \end{aligned}$$

onde $x>1$, $x'>1$, $0<\psi<\pi/2$ e $\rho\in\mathbb{R}$.

Agora, no caso em que $|x|<1$, soluções angulares, pode-se escrever o teorema de adição para os polinômios de Jacobi

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} (-1)^n (1-\cos\theta)^{\frac{n-m}{2}} (1+\cos\theta)^{\frac{n+m}{2}} (1-\cos\theta')^{\frac{n-m}{2}} (1+\cos\theta')^{\frac{n+m}{2}} .$$

$$\begin{aligned} 3.1.13 \quad & \cdot P_{\nu-n}^{(n-m;n+m)}(\cos\theta) Q_{\nu-n}^{(n-m;n+m)}(\cos\theta') e^{i\mu\rho} = \\ & = e^{i(\rho+2\psi)n} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^n Q_{\nu-n}^{(0;2n)}(\cos\gamma) \end{aligned}$$

onde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \cos\rho$, com $0<\theta<\pi/2$, $0<\theta'<\pi$, $0<\theta+\theta'<\pi$, $0<\psi<\pi/2$ e $\rho\in\mathbb{R}$.

Um teorema de adição para os harmônicos esféricos generalizados é discutido no apêndice D.

3.2 FUNÇÕES DE LEGENDRE

Como anteriormente mencionado as funções de Legendre serviriam como um parâmetro de teste para a obtenção do respectivo teorema de adição.

As funções de Legendre são um caso particular das funções de Jacobi com o parâmetro $n=0$. Fazendo-se $n=0$ na expressão (3.1.12) e utilizando-se as expressões (2.2.1) e (2.2.2) escreve-se

$$3.2.1 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m P_{\nu}^{-m}(x) Q_{\nu}^m(x') e^{im\rho} = Q_{\nu}\{xx' - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\rho\}$$

onde $x, x' \in \mathbb{R}$, $1 < x < x'$, $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

O caso em que $|x| < 1$, soluções angulares, escreve-se $x = \cos\theta$ e $x' = \cos\theta'$ e, faz-se $n=0$ na expressão (3.1.13), obtendo-se

$$3.2.2 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m P_{\nu}^{-m}(\cos\theta) Q_{\nu}^m(\cos\theta') e^{im\rho} = Q_{\nu}(\cos\gamma)$$

onde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \cos\rho$, com $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \theta' < \pi$, $0 < \theta + \theta' < \pi$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Teoremas estes perfeitamente conhecidos na Literatura⁽³⁾.

REFERÊNCIAS

- (1) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products, (Academic Press, Inc. 1980)
- (2) Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni, R.P., Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, (Springer Verlag -New York Inc. 1966)
- (3) Erdélyi, A., Higher Transcendental Function volume nº1 (New York - McGraw Hill 1953)

IV. PIÃO SIMÉTRICO

Uma aplicação do apresentado nos capítulos anteriores é o cálculo da função de Green para a equação diferencial do pião simétrico.

A equação diferencial para o pião simétrico parametrizada em termos dos ângulos de Euler⁽¹⁾, após a separação de variáveis, resulta, num dos ângulos, segunda rotação, numa equação diferencial de Jacobi, enquanto que nos outros dois ângulos têm-se equações de solução imediata do tipo exponencial.

Sendo α, β e γ os ângulos de Euler, tem-se que o operador energia cinética é dado por

$$4.1.1 \quad T = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right\}$$

onde tomou-se os momentos de inércia iguais à unidade.

A equação diferencial para o pião simétrico é

$$T \psi = E \psi$$

onde os níveis de energia são dados por⁽¹⁾ $2E = v(v+1)$ com $v=0, 1, 2, \dots$

A equação diferencial não homogênea é

$$4.1.2 \quad \{ T - v(v+1) \} G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; v) = \delta(\alpha - \alpha') \delta(\cos \beta - \cos \beta') \delta(\gamma - \gamma')$$

Decompondo-se a função de Green que aparece na expressão (4.1.2) numa série de Fourier

$$4.1.3 \quad G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{im(\alpha-\alpha')} G_m^k(\beta, \beta'; \nu) e^{ik(\gamma-\gamma')}$$

onde a função $G_m^k(\beta, \beta'; \nu)$ satisfaz a seguinte equação diferencial não homogênea

$$4.1.4 \quad \left\{ \frac{d^2}{d\beta^2} + \cot\beta \frac{d}{d\beta} - \left[\frac{m^2 + k^2 - 2mk \cos\beta}{\sin^2\beta} - \nu(\nu+1) \right] \right\} G_m^k(\beta, \beta'; \nu) = \delta(\cos\beta - \cos\beta')$$

Uma mudança de variável do tipo $\cos\beta = x$ leva à seguinte equação diferencial não homogênea

$$4.1.5 \quad \left\{ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - \left[\frac{m^2 + k^2 - 2mkx}{1-x^2} - \nu(\nu+1) \right] \right\} G_m^k(x, x'; \nu) = \delta(x-x')$$

Primeiramente estuda-se a equação diferencial homogênea

$$4.1.6 \quad \left\{ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - \left[\frac{m^2 + k^2 - 2mkx}{1-x^2} - \nu(\nu+1) \right] \right\} v(x) = 0$$

Fazendo-se

$$4.1.7 \quad v(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}|k-m|} (1+x)^{\frac{1}{2}|k+m|} G(x)$$

obtem-se a seguinte equação diferencial

$$4.1.8 \quad \left\{ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + [(|k+m| - |k-m|) - (|k+m| + |k-m| + 2)x] \frac{d}{dx} + \right. \\ \left. + n(n + |k-m| + |k+m| + 1) \right\} G(x) = 0$$

onde $n = \nu - \frac{1}{2}(|k-m| + |k+m|)$. Para se ter soluções limitadas no intervalo fechado $-1 < x < 1$, n deve ser inteiro e positivo, logo a combinação $\frac{1}{2}(|k-m| + |k+m|)$ não pode exceder ν , o que significa $|k| \leq \nu$ bem como $|m| \leq \nu$.

A equação diferencial (4.1.8), não homogênea, tem solução dada pela expressão (2.1.6), ou seja

4.1.9

$$G(x, x'; \nu) =$$

$$= 2^{-(|k+m| + |k-m|)} \frac{\Gamma(\nu+1-1/2|k+m|-1/2|k-m|)}{\Gamma(\nu+1-1/2|k-m|+1/2|k+m|)} \frac{\Gamma(\nu+1+1/2|k+m|+1/2|k-m|)}{\Gamma(\nu+1+1/2|k-m|-1/2|k+m|)} \cdot$$

$$\cdot P\left(\begin{matrix} |k-m|; |k+m| \\ \nu-\frac{1}{2}|k-m|-\frac{1}{2}|k+m| \end{matrix}\right) (x) \quad Q\left(\begin{matrix} |k-m|; |k+m| \\ \nu-\frac{1}{2}|k-m|-\frac{1}{2}|k+m| \end{matrix}\right) (x')$$

para $x' > x$.

A solução da equação diferencial (4.1.5) é obtida multiplicando-se pela função peso

$$D(x, x') = (1-x)^{\frac{1}{2}|k-m|} (1+x)^{\frac{1}{2}|k+m|} (1-x')^{\frac{1}{2}|k-m|} (1+x')^{\frac{1}{2}|k+m|} \quad \text{logo}$$

4.1.10

$$G_m^k(x, x'; \nu) = D(x, x') 2^{-(|k+m| + |k-m|)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\nu+1-1/2|k-m|-1/2|k+m|)}{\Gamma(\nu+1-1/2|k-m|+1/2|k+m|)} \frac{\Gamma(\nu+1+1/2|k-m|+1/2|k+m|)}{\Gamma(\nu+1+1/2|k-m|-1/2|k+m|)} \cdot$$

$$\cdot P\left(\begin{matrix} |k-m|; |k+m| \\ \nu-\frac{1}{2}|k-m|-\frac{1}{2}|k+m| \end{matrix}\right) (x) \quad Q\left(\begin{matrix} |k-m|; |k+m| \\ \nu-\frac{1}{2}|k-m|-\frac{1}{2}|k+m| \end{matrix}\right) (x')$$

para $x' > x$.

Para calcular a função de Green para o pião simétrico deve-se efetuar as somas dadas na expressão (4.1.3), levando-se em conta que a combinação dos parâmetros $\frac{1}{2}|k-m| + \frac{1}{2}|k+m|$ não pode exceder o valor de $v^{(1)}$.

Num procedimento análogo à secção (3.1) escreve-se o produto das duas funções de Jacobi numa representação integral⁽²⁾

$$4.1.11 \quad G_m^k(x, x'; v) = \frac{D(x, x')}{\Gamma(v+p+1) \Gamma(-v+p)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (tt')^{p-1/2} \operatorname{cth}^{-2q} v/2 \cdot \\ \cdot e^{-(x+chv)t - (x'+chv)t'} I_{2v+1}(2\sqrt{tt'} shv) dv dt dt'$$

com $x' > x$, $\operatorname{Re}(2v+1) > 0$ e $\operatorname{Re}(v+p+1) > 0$. Na expressão (4.1.11) tem-se que $I_\nu(x)$ é a função de Bessel modificada e os parâmetros p e q , introduzidos para simplificar notação, são definidos por

$$4.1.12 \quad p = \frac{1}{2}|k+m| + \frac{1}{2}|k-m| \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2}|k+m| - \frac{1}{2}|k-m|.$$

As integrais nas variáveis t e t' são imediatas⁽²⁾, obtendo-se

$$4.1.13 \quad G_m^k(x, x'; v) = D(x, x') \frac{\Gamma(v+p+1)}{\Gamma(2v+2) \Gamma(-v+p)} \cdot \\ \cdot \int_0^\infty dv (shv)^{2v+1} \operatorname{cth}^{-2q} v/2 \{ (x+chv)(x'+chv) - sh^2 v \}^{-v-p-1} \cdot \\ \cdot {}_2F_1\{v+p+1, v-p+1; 2v+2; \frac{sh^2 v}{sh^2 v - (x+chv)(x'+chv)}\}$$

onde $x' > x$.

Uma mudança de variável do tipo $\chi v = \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}$ permite escrever

$$4.1.14 \quad G_m^k(x, x'; v) = \frac{\Gamma(v+p+1)}{\Gamma(2v+2) \Gamma(-v+p)} \mathcal{D}(x, x') 2^{2v+2} (-1)^{v+p+1} .$$

$$\cdot \int_{\xi=0}^1 d\xi \xi^{-2(p-q)-1} (1-\xi^2)^{2p} \left\{ B\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \left(\frac{A-\xi}{\xi-A}\right) \right\}^{-v-p-1} .$$

$$\cdot {}_2F_1\{v+p+1, v-p+1; 2v+2; \frac{4}{B(\xi-1/\xi)(A/\xi-\xi/A)}\}$$

onde $A^2 = (1+x)(1+x')/(1-x)(1-x')$ e $B^2 = (1-x^2)(1-x'^2)$.

A função hipergeométrica que aparece no integrando da expressão anterior pode ser colocada numa representação integral, em termos de um produto de funções de Bessel⁽²⁾, logo

$$4.1.15 \quad G_m^k(x, x'; v) = 2 (-1)^{v+p+1} \int_{\eta=0}^1 d\eta \eta^{-2(p-q)-1} \cdot \int_0^\infty dt J_{2v+1}(2t) \left(\frac{z_1 - z_2 \eta^2}{z_1 - z_2 / \eta^2} \right)^p J_{2p} \left\{ (z_1 - z_2 \eta^2)^{\frac{1}{2}} (z_1 - z_2 / \eta^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

onde fez-se a mudança de variável $\xi = \sqrt{A} \eta$ e definiu-se $\frac{B}{A} = \frac{z_1^2}{t^2}$ e $AB = \frac{z_2^2}{t^2}$.

Usando-se a regra de soma tipo Graf⁽³⁾

$$4.1.16 \quad e^{i\nu\psi} J_\nu(R) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) J_{\nu+k}(\tau) e^{ik\phi}$$

onde $0 < \psi < \pi/2$; $e^{2i\psi} = \frac{\tau - \rho e^{-i\phi}}{\tau - \rho e^{+i\phi}}$ e $R^2 = \tau^2 + \rho^2 - 2\tau\rho \cos\phi$, expande-se a função de Bessel que aparece na expressão (4.1.15), obtendo-se

$$4.1.17 \quad G_m^k(x, x'; \nu) = 2\pi (-1)^{\nu+p+1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i} \int d\phi e^{2i\phi(p-q)/2} \int_0^\infty dt J_{2\nu+1}(2t) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(z_2) J_{\mu+2p}(z_1) e^{i\mu\phi}$$

onde $\eta^2 = e^{-i\phi}$.

A integral em ϕ reproduz a função delta de Kronecker que cancela a soma, sendo $\mu=q-p$, tem-se

$$4.1.18 \quad G_m^k(x, x'; \nu) = 2\pi (-1)^{\nu+p+1} \int_0^\infty J_{2\nu+1}(2t) J_{q-p}(z_2) J_{q+p}(z_1) dt$$

Agora tem-se que efetuar as somas que aparecem na expressão (4.1.3), ou seja

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{im(\alpha-\alpha')} G_m^k(x, x'; \nu) e^{ik(\gamma-\gamma')} =$$

$$4.1.19 \quad = (-1)^{\nu+q+1} \int_0^\infty dt J_{2\nu+1}(2t) \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{im(\alpha-\alpha')} J_{p-q}(z_2) J_{p+q}(z_1) e^{ik(\gamma-\gamma')}$$

Para efetuar-se as somas que aparecem na expressão anterior introduz-se a função teta de Heaviside, ou seja, da expressão (4.1.3) tem-se

$$G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty dt J_{2\nu+1}(2t) \cdot$$

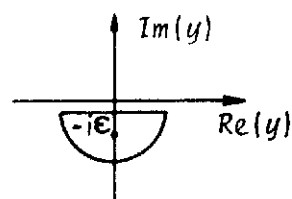
4.1.20

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^q e^{im(\alpha-\alpha')} J_{p-q}(z_2) J_{p+q}(z_1) e^{ik(\gamma-\gamma')} \Theta(\nu-m) \Theta(m-k)$$

para o caso em que $m > k$.

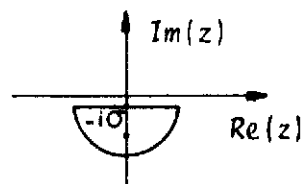
As funções teta de Heaviside numa representação integral são dadas por, com os respectivos contornos,

$$\Theta(\nu-m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iy(\nu-m)}}{y+i\epsilon} dy$$



4.1.21

$$\Theta(m-k) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz(m-k)}}{z+i\sigma} dz$$



Introduzindo-se as expressões dadas por (4.1.21) na expressão (4.1.20) obtêm-se

$$G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty dt J_{2\nu+1}(2t) \cdot$$

$$4.1.22 \quad \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-iy\nu}}{y+i\epsilon} \cdot \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z+i\sigma} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{im(\alpha-\alpha')} e^{ik(\gamma-\gamma')} e^{imy-imz+ikz} J_{k+m}(z_2) J_{k-m}(z_1)$$

A soma no parâmetro k é efetuada usando-se, novamente, a regra de soma de Graf, expressão (4.1.16), logo

$$G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty dt J_{2\nu+1}(2t) \cdot$$

$$4.1.23 \quad \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-iy\nu}}{y+i\epsilon} \quad \cdot \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z+i\sigma} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{im(\alpha-\alpha') + im(y-z) + 2im\Psi} J_{2m}(R)$$

$$\text{onde } e^{2i\Psi} = \frac{z_1 - z_2 e^{-i(\gamma-\gamma')-iz}}{z_1 - z_2 e^{+i(\gamma-\gamma')+iz}} \quad \text{e } R^2 = \{z_1 - z_2 e^{-i(\gamma-\gamma'+z)}\} \{z_1 - z_2 e^{+i(\gamma-\gamma'+z)}\}$$

com $0 < \Psi < \pi/2$.

A soma no parâmetro m pode ser realizada por meio da função geratriz da função de Bessel⁽⁴⁾, ou seja,

$$G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty dt J_{2\nu+1}(2t) \cdot$$

4.1.24

$$\cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-iy\nu}}{y+i\epsilon} \quad \cdot \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z+i\sigma} \{2 \cos(R \cos \theta)\}$$

$$\text{onde } \theta = \Psi + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma') + \frac{1}{2}y.$$

As integrais nas variáveis y e z podem ser realizadas usando-se o teorema de Cauchy uma vez que as funções são analíticas e, daí tomar os limites com os parâmetros ϵ e σ indo a zero, obtendo-se

$$4.1.25 \quad G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = 2 (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty J_{2\nu+1}(2t) \cos Kt \, dt$$

onde definiu-se $K = R_0 \cos\{\phi + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma')\}$ e os parâmetros R_0 e ϕ dados por

$$R_0^2 = \{z_1 - z_2 e^{-i(\gamma - \gamma')}\} \{z_1 - z_2 e^{i(\gamma - \gamma')}\} \quad e \quad e^{2i\phi} = \frac{z_1 - z_2 e^{-i(\gamma - \gamma')}}{z_1 - z_2 e^{+i(\gamma - \gamma')}}.$$

(4.1.26)

A integral que aparece na expressão (4.1.25) nada mais é do que a transformada de Fourier em co-senos da função de Bessel⁽⁵⁾, logo

$$4.1.27 \quad G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = (-1)^{\nu+1} {}_2F_1(-\nu, \nu+1; 1/2; K^2/4)$$

com $\text{Re}(\nu) > -1$ e $0 < K < 2$.

Para o caso em que $k > m$ basta fazer as transformações

$$(\alpha - \alpha') \rightarrow (\gamma - \gamma') \quad e \quad (\gamma - \gamma') \rightarrow (\alpha - \alpha')$$

nas expressões dadas por (4.1.26), logo a função de Green para o pião simétrico é

$$G(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \nu) = (-1)^{\nu+1}.$$

4.1.28

$$\{ {}_2F_1(-\nu, \nu+1; 1/2; K^2/4) + {}_2F_1(-\nu, \nu+1; 1/2; K_1^2/4) \}$$

com $\text{Re}(\nu) > -1$ e $0 < K, K_1 < 2$, sendo K_1 dado pela expressão (4.1.26) com os ângulos dados por $(\alpha - \alpha') \rightarrow (\gamma - \gamma')$ e $(\gamma - \gamma') \rightarrow (\alpha - \alpha')$.

REFERÊNCIAS

- (1) Margenau, H. and Murphy, G.M., *The Mathematics of Physics and Chemistry* (D. Van Nostrand Company, Inc. 1956)
- (2) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., *Table Of Integrals, Series and Products* (Academic Press, Inc. 1980)
- (3) Erdélyi, A., *Higher Transcendental Function* volume nº 2 (New York-McGraw Hill - 1953)
- (4) Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni, R.P., *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (Springer - Verlag New York, Inc. 1966)
- (5) Bateman Manuscript Projects, *Tables of Integral Transforms*, Edited by A.Erdélyi volume nº 1 (New York - McGraw-Hill - 1954)

CONCLUSÕES

Com este trabalho encerra-se um ciclo de estudos sobre propriedades das funções especiais da física matemática, iniciado no trabalho de Mestrado, quando estudou-se a função de Green para a equação diferencial de Schrödinger com um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico multidimensional e aplicações.

Desenvolveu-se com esses resultados uma técnica de estudo de propriedades das funções especiais, como, representações integrais para produto de funções não de mesma espécie, regras de soma e teoremas de adição.

Essa técnica de cálculo permitiu obter resultados novos tanto para as funções de Kummer como para as funções de Jacobi. Particularmente, os resultados mais expressivos são os obtidos para as funções de Jacobi, uma vez que as únicas funções dessa espécie, exhaustivamente estudadas, são as funções de Legendre. As funções de Jacobi propriamente ditas, as funções de Gegembauer e as funções de Tchebichef estão, agora, completas em suas propriedades.

Dentre essas funções, as mais inexpressivas são as funções de Tchebichef, as outras, no entanto, estão ligadas à álgebra e representações específicas de grupos.

As funções de Legendre são as mais conhecidas, pois definem os harmônicos esféricos que são realizações da álgebra de momento angular do grupo $O(3)$.

As funções de Gegembauer aparecem quando do estudo do grupo $O(4)$, na explícita definição dos hiperesféricos harmônicos, que também, são realizações da álgebra de momento angular.

As funções de Jacobi definem os harmônicos esféricos generalizados e, como definidos no apêndice D, são de grande importância no estudo das representações do grupo $QU(2)$ das matrizes unimodulares quase unitárias de segunda ordem.

Finalmente, essas funções de Jacobi ainda aparecem como realizações das representações irredutíveis do grupo de rotação, cuja equação diferencial dessas representações é basicamente a equação diferencial do pião simétrico parametrizada em termos dos ângulos de Euler.

Uma continuação natural deste trabalho seria tentar estudar-se as propriedades desses grupos utilizando-se dessa técnica de função de Green pois, as propriedades de grupo são naturalmente manifestadas pelas funções de Green.

APÊNDICE A

MÉTODO DE EXPANSÃO TIPO STURM-LIOUVILLE PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO HOMOGÊNEAS

O método de cálculo de função de Green conhecido como método de expansão tipo Sturm-Liouville ou método de Lagrange consiste, essencialmente em se procurar transformar o operador diferencial dado em um operador diferencial tipo Sturm-Liouville, cuja equação diferencial homogênea tem soluções conhecidas.

O operador diferencial de Sturm-Liouville é da forma

$$A.1 \quad Q = \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x)$$

onde $p(x)$ é uma função contínua que tem derivada primeira contínua num certo intervalo $[a, b]$ e $q(x)$ é, também, uma função contínua nesse intervalo.

De maneira geral há interesse em se obter soluções para a equação diferencial não homogênea

$$A.2 \quad Q y(x) + f(x) = 0$$

onde $y(x)$ satisfaz certas condições de contorno no intervalo $[a, b]$.

Conhecendo-se a função de Green $G(x, x')$ para o operador differencial de Sturm-Liouville Q satisfazendo à equação diferencial não homogênea

$$A.3 \quad Q G(x, x') = \delta(x - x')$$

a solução $y(x)$ é dada por

$$A.4 \quad y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$$

onde $G(x, x')$ é dado por

$$A.5 \quad G(x, x') = \begin{cases} \frac{u(x) v(x')}{w(u, v) p(x')} & \text{para } a \leq x < x' \\ \frac{u(x') v(x)}{w(u, v) p(x')} & \text{para } x' < x \leq b \end{cases}$$

sendo $u(x)$ e $v(x)$ as duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea, uma regular num dos extremos e a outra regular no outro extremo e $w(u, v)$ é o determinante Wronskiano dessas duas soluções.

APÊNDICE B

A SEGUNDA SOLUÇÃO LINEARMENTE INDEPENDENTE

A segunda solução linearmente independente da equação diferencial de Kummer $U(a; c; z)$, em termos da primeira solução $\bar{e}$

$$B.1 \quad U(a; c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)} {}_1F_1(a; c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; z)$$

onde ${}_1F_1(a; c; z)$ é a primeira solução linearmente independente da equação diferencial de Kummer.

A função de Laguerre escrita em termos da função de Kummer $\bar{e}^{(1)}$

$$B.2 \quad {}_1F_1(-v; 1+\alpha; z) = \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)} L_v^\alpha(z)$$

fazendo-se $a=-v$ e $c=1+\alpha$ na expressão (B.1) obtêm-se

$$B.3 \quad U(-v; 1+\alpha; z) = \frac{\Gamma(-\alpha) \Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+v)}{\Gamma(-v-\alpha) \Gamma(v+\alpha+1)} L_v^\alpha(z) + \\ + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-v)} z^{-\alpha} {}_1F_1(-v-\alpha; 1-\alpha; z)$$

que pode ser escrita como

$$B.4 \quad \frac{\Gamma(-v) \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)} U(-v; 1+\alpha; z) = \frac{\Gamma(-\alpha) \Gamma(-v) \Gamma(v+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(v+1)}{\Gamma(-v-\alpha) \Gamma(v+\alpha+1) \Gamma(v+\alpha+1)} L_v^\alpha(z) + \\ + \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)} z^{-\alpha} {}_1F_1(-v-\alpha; 1-\alpha; z)$$

Usando-se a expressão (1.2.2) tem-se

$$N_v^\alpha(z) = \frac{\Gamma(-\alpha) \Gamma(1+\alpha) \Gamma(-v) \Gamma(v+1) \Gamma(v+1)}{\Gamma(-v-\alpha) \Gamma(v+\alpha+1) \Gamma(v+\alpha+1)} L_v^\alpha(z) +$$

B.5

$$+ \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)} z^{-\alpha} {}_1F_1(-v-\alpha; 1-\alpha; z)$$

Deve-se, agora mostrar que a expressão (B.5) é solução da equação diferencial de Laguerre.

Tem-se que $U(a; c; z)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$B.6 \quad \left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + (c-z) \frac{d}{dz} - a \right\} U(a; c; z) = 0$$

ou ainda

$$B.7 \quad \left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + (1+\alpha-z) \frac{d}{dz} + v \right\} U(-v; 1+\alpha; z) = 0$$

Substituindo-se a expressão (1.2.2) na expressão (B.7) obtêm-se

$$B.8 \quad \frac{\Gamma(v+\alpha+1)}{\Gamma(-v) \Gamma(v+1)} \left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + (1+\alpha-z) \frac{d}{dz} + v \right\} N_v^\alpha(z) = 0$$

que, nada mais é do que a equação diferencial de Laguerre, logo, a função $N_\ell^n(x)$ é uma solução linearmente independente da equação diferencial de Laguerre, uma vez que as funções de Kummer ${}_1F_1(a; c; z)$ e $U(a; c; z)$ têm o determinante Wronskiano diferente de zero⁽¹⁾.

Um procedimento análogo pode ser empregado para as funções de Hermite e Tchebichef.

APÊNDICE C

A FUNÇÃO DE ONDA DO OSCILADOR HARMÔNICO ISOTRÔPICO BIDIMENSIONAL E A FÓRMULA DE HILLE-HARDY

A função de onda do oscilador harmônico isotrópico bidimensional em coordenadas polares no plano $\bar{e}^{(2)}$

$$C.1 \quad \Psi_{n,m}(\rho, \phi) = \left\{ \frac{\Gamma(k+m+1)}{\pi \Gamma(k+1)} \right\}^{-1/2} e^{-\rho^2/2} \rho^m L_k^m(\rho^2) e^{\pm i m \phi}$$

onde $n = |m| + 2k$ com $k = 0, 1, 2, \dots$

Usando-se a relação que envolve as funções de Laguerre com as funções de Whittaker⁽¹⁾

$$C.2 \quad L_k^m(x^2) = \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(k+1)} x^{-m-1} e^{x^2/2} \mathcal{M}_{k+(m+1)/2; m/2}(x^2)$$

pode-se escrever para

$$C.3 \quad \Psi_{n,m}(\rho, \phi) \Psi_{n,m}^*(\rho', \phi') = \frac{\Gamma(k+|m|+1)}{\pi \Gamma(k+1)} (\rho \rho')^{-1} \exp(i m \theta) \cdot \\ + \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho^2) \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho'^2)$$

onde $\theta = \phi - \phi'$.

Somando-se a expressão (C.3), ou seja

$$C.4 \quad \pi \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \sum_{|m|+2k=n} \psi_{n,m}(\rho, \phi) \psi_{n,m}^*(\rho', \phi') =$$

$$= \frac{1}{\rho \rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n .$$

$$\cdot \sum_{|m|+2k=n} \frac{\Gamma(k+|m|+1)}{\Gamma(k+1)} \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho^2) \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho'^2) e^{im\theta}$$

usando-se agora a fórmula de Mehler tem-se

$$C.5 \quad (1-\xi^2)^{-1} \exp\left(\frac{\xi^2+1}{\xi^2+1} \frac{\vec{\rho}^2+\vec{\rho}'^2}{2}\right) \exp\left(\frac{2\rho\rho'}{1-\xi^2} \xi \cos\eta\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho\rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n .$$

$$\cdot \sum_{|m|+2k=n} \frac{\Gamma(k+|m|+1)}{\Gamma(k+1)} \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho^2) \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho'^2) e^{im\theta}$$

onde η é o ângulo entre $\vec{\rho}$ e $\vec{\rho}'$.

Usando-se a expansão da função exponencial em termos da função de Bessel⁽³⁾ obtêm-se

$$C.6 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1-\xi^2)^{-1} \exp\left(\frac{\xi^2+1}{\xi^2+1} \frac{\rho^2+\rho'^2}{2}\right) \exp(im\theta) I_{|m|}\left(\frac{2\rho\rho'}{1-\xi^2} \xi\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho\rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n .$$

$$\cdot \sum_{|m|+2k=n} \frac{\Gamma(k+|m|+1)}{\Gamma(k+1)} \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho^2) \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho'^2) e^{im\theta}$$

onde $I_\ell(x)$ é a função de Bessel modificada.

Expandindo-se as somas e cancelando-se a soma no parâmetro m , bem como a exponencial obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & (1-\xi^2)^{-1} \exp \left(\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1} \frac{\vec{\rho}^2+\vec{\rho}'^2}{2} \right) I_{|m|} \left(\frac{2\rho\rho'}{1-\xi^2} \xi \right) = \\
 \text{C.7} \quad & = \frac{1}{\rho\rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \cdot \\
 & \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2k+|m|;n} \frac{\Gamma(k+|m|+1)}{\Gamma(k+1)} \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho^2) \mathcal{M}_{k+(|m|+1)/2; |m|/2}(\rho'^2)
 \end{aligned}$$

onde a função delta de Kronecker restringe o parâmetro n , $n=2k+|m|$.

Chamando-se $\rho^2=x$, $\rho'^2=y$, $\xi^2=z$ e definindo-se $|m|=2\ell$ obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & (1-z)^{-1} \exp \left(\frac{z+1}{z-1} \frac{x+y}{2} \right) I_{2\ell} \left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z} \right) = \\
 \text{C.8} \quad & = (xy)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2\ell+1)}{\Gamma(n+1)} \mathcal{M}_{n+\ell+1/2; \ell}(x) \mathcal{M}_{n+\ell+1/2; \ell}(y) z^{n+\ell}
 \end{aligned}$$

que é a bem conhecida fórmula de Hille-Hardy⁽⁴⁾.

HARMÔNICOS ESFÉRICOS GENERALIZADOS

O teorema de adição para as funções de Jacobi, expressão (3.1.11), pode ser escrito numa forma mais compacta introduzindo-se os harmônicos esféricos generalizados⁽⁵⁾.

Os harmônicos esféricos generalizados estão definidos em termos das funções de Jacobi através das relações

$$D.1 \quad B_{\nu}^{(\alpha+\beta; \beta-\alpha)}(x) = 2^{-(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\nu-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} (x-1)^{\alpha} (x+1)^{\beta} P_{\nu-\alpha-\beta}^{(2\alpha; 2\beta)}(x)$$

$$D.2 \quad K_{\nu}^{(\alpha+\beta; \beta-\alpha)}(x) = 2^{-(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu-\alpha-\beta+1)} (x-1)^{\alpha} (x+1)^{\beta} Q_{\nu-\alpha-\beta}^{(2\alpha; 2\beta)}(x)$$

Substituindo-se as expressões (D.1) e (D.2) na expressão (3.1.11), convenientemente, obtêm-se o teorema de adição para os harmônicos esféricos generalizados

$$D.3 \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\nu}^{n;m}(x) K_{\nu}^{n;m}(x') e^{im\rho} = e^{i(\rho+2\psi)n} K_{\nu}^{n;n} \left\{ x x' - \frac{1}{2}(x^2-1) \frac{1}{2}(x'^2-1) \cos \rho \right\}$$

onde $1 < x < x'$, $0 < \psi < \pi/2$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Os parâmetros ψ, w e ρ estão relacionados através de

$$D.4 \quad e^{2i\psi} = \frac{z_1 - z_2 e^{-i\rho}}{z_1 - z_2 e^{i\rho}} \quad \text{e} \quad w^2 = (z_1 - z_2 e^{i\rho})(z_1 - z_2 e^{-i\rho})$$

com z_1 e z_2 dados pela expressão (3.1.3)

REFERÊNCIAS

- (1) Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni, R.P., *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (Springer - Verlag New York, Inc. 1966)
- (2) Powell, J.L. and Crasemann, B., *Quantum Mechanics* (Addison - Wesley California, 1961)
- (3) Erdélyi, A., *Higher Transcendental Function* volume n°2 (New York - McGraw - Hill 1953)
- (4) Erdélyi, A., *Higher Transcendental Function* volume n°3 (New York - McGraw - Hill 1955)
- (5) Miller Jr, W., *Lie Theory and Special Functions* (Academic Press Inc. New York 1968)

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof.Dr. José Bellandi Filho, sem cuja participação efetiva a realização deste trabalho teria sido impossível;

Ao Prof.Dr. Cesare M.G. Lattes, chefe do Departamento de Cronologia, Raios Cômicos e Altas Energias pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho;

A Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo apoio financeiro;

A meus familiares! em especial Conceição e Eduardo;

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho, em especial ao Hamilton.