UMA REPRESENTAÇÃO SPINORIAL PARA A TRANSFORMAÇÃO DE KUSTAANHEIMO E STIEFEL.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida pela aluna Maria de Lourdes T. Menon e aprovada pela Comissão Julgadora

11 de fevereiro de 1988

JBellandi

Candidata : Maria de Lourdes T. Menon

Orientador: Prof.Dr. José Bellandi Filho

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Ao Marcio e aos meus pais

RESUMO

Mostra-se como obter uma representação spinorial para a transformação de Kustaanheimo e Stiefel a partir da teoria dos spinores de Cartan e que essa representação apresenta todas as propriedades características de uma transformação de Levi-Civita. Apresenta-se também uma interpretação geométrica para essa representação spinorial bem como a obtenção de uma equação spinorial para o movimento de Kepler no R^3.

ABSTRACT

It is shown how to derive a spinor representation for the Kustaanheimo and Stiefel transformation from the Cartan spinor theory and that this representation has all the characteristic properties of the Levi-Civita transformation. It is also given a geometric interpretation for the spinor representation and the derivation of a spinor equation for the Kepler motion in R^3.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

No estudo do movimento de três corpos, Levi-Civita[1] introduziu uma transformação conforme entre dois planos w e z com a propriedade de que seções cônicas com centro na origem do plano w são transformadas em seções cônicas com um dos focos na origem do plano z. São transformações do R^2 no R^2 que permitem obter a regularização de equações diferenciais que apresentam singularidade na origem.

Com essas transformações pode-se, por exemplo, obter a regularização do movimento de Kepler no R^2. A hamiltoniana do movimento no R^2 se transforma numa hamiltoniana de um oscilador harmônico bi-dimensional.

Esse tipo de transformação foi utilizada por Pavão[2] no estudo da obtenção da função de Green do potencial coulombiano bi-dimensional via operador de evolução temporal. O autor mostra que é possível se fazer o desembaralhamento do operador de evolução temporal fazendo-se uma transformação de Levi-Civita e obtendo a função de Green dependente do tempo para o potencial coulombiano em termos da função de Green do oscilador harmônico bi-dimensional.

Transformações desse tipo para espaços de dimensão maior que dois só são possíveis se a dimensão for 4 ou 8[3]. Este fato de certa forma inviabilizaria uma regularização desse tipo para o problema de Kepler real, ou seja, a três dimensões.

Kustaanheimo e Stiefel [4] mostraram, entretanto, que é possível se obter uma transformação $R^4 \to R^3$, tipo Levi-Civita, que permite uma regularização do problema de Kepler tri-dimensional.

A transformação de Kustaanheimo e Stiefel é útil no estudo de problemas de forças centrais. Por exemplo, a equação de

Schrödinger para o átomo de hidrogênio é transformada em equações do tipo oscilador harmônico simples quadri-dimensional[11].

No caso do movimento de Kepler não perturbado, em particular, através da transformação de Kustaanheimo e Stiefel pode-se regularizar as equações de movimento obtendo-se quatro equações diferenciais tipo oscilador harmônico simples.

Neste trabalho, através da teoria dos spinores de Cartan[10] obtém-se uma representação spinorial para a transformação de Kustaanheimo e Stiefel, o que permite escrever as equações de Kepler regularizadas como uma equação spinorial a duas componentes, tipo oscilador harmônico simples.

No capítulo I apresenta-se uma revisão sobre a transformação de Kustaanheimo e Stiefel e no capítulo II sua aplicação ao movimento de Kepler. No capítulo III apresenta-se a obtenção de uma representação spinorial para essa transformação usando-se a teoria dos spinores de Cartan e todas as propriedades que dela advém: é uma transformação tipo Levi-Civita e a não injetividade se apresenta como uma simples transformação de gauge. Apresenta-se também uma interpretação geométrica para essa transformação.

CAPÍTULO I

A TRANSFORMAÇÃO DE KUSTAANHEIMO-STIEFEL

A transformação de Levi-Civita[1] é uma transformação conforme entre dois planos w e z na qual uma seção cônica com centro na origem do plano w é transformada numa seção cônica do plano z tendo um dos focos na origem. Desse modo, tal transformação é útil para se tratar a regularização do movimento de Kepler no plano.

Para obter uma regularização do movimento de Kepler no espaço tridimensional, P. Kustaanheimo e E.Stiefel[4] propõem uma transformação (transformação K-S), tipo Levi-Civita, do espaço quadri-dimensional R^4 sobre o espaço tridimensional R^3.

Neste capítulo apresenta-se como Kustaanheimo e Stiefel obtiveram a transformação K-S a partir do estudo da transformação de Levi-Civita,

I.1 - Transformação de Levi-Civita.

A regularização do movimento no plano proposta por Levi-Civita é feita através da transformação conforme

$$z = w^2 \tag{I.1}$$

onde

$$z = z_1 + i\, z_2$$

$$w = w_1 + i\, w_2$$

Observa-se que (I.1) escrita na forma polar fornece

$$z = |w|^2 e^{2i\theta} \tag{I.2}$$

Desse modo, na transformação de Levi-Civita tem-se que as distâncias no plano w são quadráticas no plano z e os ângulos no plano w são duplos no plano z. Uma discussão sobre as transformações de seções cônicas via transformação de Levi-Civita acha-se no Apêndice A.

I.2 - Transformação K-S

Kustaanheimo e Stiefel buscam obter uma transformação que permita estabelecer uma correspondência entre os espaços R^4 e R^3, através da analogia com as transformações de Levi-Civita em termos de diferenciais entre os espaços R^2 e R^2, z e w:

$$\begin{bmatrix} dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1 \\ dw_2 \end{bmatrix} \tag{I.3}$$

Note-se que a matriz de transformação de Levi-Civita tem as seguintes propriedades

i) seus elementos são funções lineares de w_1 e w_2

ii) ortogonalidade entre linhas e entre colunas

iii) a norma de cada linha ou coluna é $w_1^2 + w_2^2$

Matrizes de transformação com essas propriedades, para espaços de dimensão maior que dois, só são possíveis se a dimensão for 4 ou 8[3], o que inviabiliza uma tentativa de regularização de movimento por uma transformação tipo Levi-Civita no espaço R^3.Sen do assim, Kustaanheimo e Stiefel propõem a regularização das equações de movimento no R^3 de uma forma indireta, buscando uma correspondência via R^4, onde matrizes com as características exigidas pela transformação de Levi-Civita podem ser construídas. Uma matriz que satisfaz tais características no R^4 é por exemplo

$$A(\vec{u}) = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix} \tag{I.4}$$

Analisando a forma diferencial correspondente a (I.3)

$$2A(\vec{u}) \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

Kustaanheimo e Stiefel notaram que somente as três primeiras são diferenciais exatas, de tal maneira que se forem denotadas por dx_1, dx_2, dx_3, obtém-se por integração

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ x_2 &= 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) \\ x_3 &= 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) \end{aligned} \tag{I.6}$$

sendo que a última relação acarretará a condição

$$u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4 = 0 \qquad (I.7)$$

Assim, da forma diferencial no R^4

$$2 \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (I.8)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \qquad (I.9)$$

Devido às condições de Levi-Civita impostas à matriz de transformação $A(\vec{u})$, pode-se associar a (x_1, x_2, x_3) um vetor $\vec{x} \in R^3$, pois (x_1, x_2, x_3) corresponderá às componentes de $\vec{x}$ segundo uma base ortogonal em R^3. Portanto, a transformação K-S, através da matriz $A(\vec{u})$, estabelece uma correspondência entre um espaço R^4 de vetores (u_1, u_2, u_3, u_4) com um espaço R^3 de vetores (x_1, x_2, x_3). Na verdade,trata-se de uma transformação de $R^4 \rightarrow R^4$ com uma condição de vínculo; a quarta componente de um dos espaços é sempre nula, devido à condição (I.7). Tem-se assim um espaço de vetores $\vec{u} \in R^4$ particular. Ver-se-á, no capítulo II, que a condição (I.7) não impõe maiores restrições sobre o movimento em R^3, uma vez fixadas as condições iniciais.

Do exposto acima pode-se escrever (I.9) como

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \\ 0 \end{bmatrix} = A(\vec{u})\vec{u} \qquad (I.10)$$

onde $\vec{x} \in R^3$ e $\vec{u} \in R^4$

Como a matriz $A(\vec{u})$ tem todas as características da matriz de transformação de Levi-Civita, segue, em particular, da ortogonalidade entre linhas e colunas que

$$A^T(\vec{u})\; A(\vec{u}) = r\; I_{4x4} \qquad (I.11)$$

onde r é o comprimento do vetor posição $\vec{x} \in R^3$:

$$r = \left[\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{4} u_j^2 \qquad (I.12)$$

I.3 - <u>Propriedades da transformação K-S</u>

I.3.1 - <u>Tipo Levi-Civita</u>

Do discutido na seção I.2 pode-se dizer que a transformação (I.10) se dá entre espaços de dimensões distintas ($R^4 \to R^3$), não se tratando portanto de uma generalização da transformação de Levi-Civita. Entretanto, Kustaanheimo e Stiefel mostraram que tal transformação é tipo Levi-Civita. Para tanto consideraram o plano formado por dois vetores ortonormais u_i, $v_i \in R^4$ tais que

$$u_4v_1 - u_3v_2 + u_2v_3 - u_1v_4 = 0 \qquad \text{(I.13)}$$

e mostraram que se $\vec{x} \in R^2$, tendo coordenadas polares ρ e θ, sua imagem no R^3 é dada por

$$\vec{x} = \rho^2 \left[\vec{a} \cos 2\theta + (\vec{b} \cos w + \vec{c} \text{ sen } w) \text{ sen } 2\theta\right] \qquad \text{(I.14)}$$

onde w é o ângulo de polarização do R^2 e

$$a = \begin{bmatrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ 2(u_1u_3 - u_2u_4) \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 2(u_1u_2 + u_3u_4) \\ -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ 2(u_2u_3 - u_1 u_4) \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 2(u_1u_3 - u_2u_4) \\ 2(u_1u_4 + u_2u_3 \\ -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \end{bmatrix}$$

Assim, as distâncias são quadráticas e os ângulos são duplos, o que caracteriza a transformação de Levi-Civita. Desse modo, seção cônica com centro na origem do R^2 é transformada em seção cônica no R^3, com um dos focos na origem. Note-se que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ são ortonormais, pois são as colunas da matriz de Cayley (ver Apêndice B).

I.3.2 - Não injetividade

Uma outra característica da transformação K-S é o fato dela não ser injetiva. Se $u_i \in R^4$ é transformado em $x_k \in R^3$, todos os pontos $v_i \in R^4$ tais que

$$v_1 = u_1 \cos\phi - u_4 \operatorname{sen}\phi \qquad v_2 = u_2 \cos\phi + u_3 \operatorname{sen}\phi$$

$$v_4 = u_1 \operatorname{sen}\phi + u_4 \cos\phi \qquad v_3 = -u_2 \operatorname{sen}\phi + u_3 \cos\phi \tag{I.15}$$

são levados no mesmo ponto x_k onde ϕ é um ângulo arbitrário. Desse modo, a imagem de um ponto no R^3 é um círculo de raio $\sqrt{r}$ no R^4.

CAPÍTULO II

REGULARIZAÇÃO DO MOVIMENTO DE KEPLER

De posse da transformação K-S apresenta-se neste capítulo como se dá a regularização do movimento de Kepler.

II.1 - A equação de movimento no R^4

Considerando-se uma partícula de massa m que descreve uma trajetória $x_k(t)$, sujeita a uma força P_k, $k = 1,2,3$, tem-se que

$$m\,\ddot{x}_k = P_k \qquad \text{(II.1)}$$

Como os parâmetros u_i satisfazem a relação

$$u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4 = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

Kustaanheimo e Stiefel consideram u_i como coordenadas generalizadas, uma vez que a transformação é ortogonal, e obtêm o correspondente movimento no R^4 da seguinte maneira: seja v a velocidade da partícula de massa m. Como

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.3)}$$

segue da ortogonalidade da matriz de transformação que

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 4r(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2) \qquad \text{(II.4)}$$

Logo

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = 4r(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) \qquad \text{(II.5)}$$

A energia cinética da partícula é dada por

$$T = 2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) \qquad \text{(II.6)}$$

Para encontrar as forças generalizadas Q_i requer-se que o trabalho feito pelas forças seja invariante sob a transformação, ou seja

$$\sum_{K=1}^{3} P_K \, dx_K = \sum_{i=1}^{4} Q_i \, du_i \qquad \text{(II.7)}$$

que na forma matricial fornece

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.8)}$$

Substituindo-se (II.3) em (II.8) obtém-se que

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.9)}$$

Como as forças generalizadas Q_i são obtidas da equação de Lagrange por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} = Q_i \qquad i = 1,2,3,4 \qquad \text{(II.10)}$$

segue que as equações de movimento, correspondente ao R^4 são

$$4m \left[\frac{d}{dt}(r\dot{u}_i) - u_i(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2)\right] = Q_i \qquad \text{(II.11)}$$

Como observaram Kustaanheimo e Stiefel a equação de movimento (II.11) é de fato transformada sobre um movimento do R^3 se a condição (II.2) é satisfeita qualquer que seja t. Isso foi mostrado considerando em t=0 x_k^o e $\dot{x}_k^o$ a posição e velocidade iniciais da partícula de massa m. Pela inversão de (I.6) calcula-se u_i^o em R^4, correspondente a x_k^o (a menos de rotação). Como

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{bmatrix}$$

segue da ortogonalidade da matriz de transformação que

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

Logo, a velocidade inicial $\dot{u}_i^o$ correspondente a $\dot{x}_K^o$ é

$$\dot{u}_i^o = \frac{1}{2r_o} (u_1^o \dot{x}_1^o + u_2^o \dot{x}_2^o + u_3^o \dot{x}_1^o)$$

$$\dot{u}_2^o = \frac{1}{2r_o} (-u_2^o \dot{x}_1^o + u_1^o \dot{x}_2^o + u_4^o \dot{x}_3^o)$$

$$\dot{u}_3^o = \frac{1}{2r_o} (-u_3^o \dot{x}_1^o - u_4^o \dot{x}_2^o + u_1^o \dot{x}_3^o) \qquad \text{(II.12)}$$

$$\dot{u}_4^o = \frac{1}{2r_o} (u_4^o \dot{x}_1^o - u_3^o \dot{x}_2^o + u_2^o \dot{x}_3^o)$$

Logo, em t = 0 tem-se que

$$u_4^o \dot{u}_1^o - u_3^o \dot{u}_2^o + u_2^o \dot{u}_3^o - u_1^o \dot{u}_4^o = 0$$

Agora, multiplicando-se as equações (II.11) respectivamente por u_4, $-u_2$, u_3, $- u_1$ e adicionando-as obtém-se

$$4m\left[u_4 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_1)-u_3 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_2) + u_2 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_3)-u_1 \frac{d}{dt}(r\dot{u}_4)\right] = \tag{II.13}$$

$$= u_4Q_1 - u_3Q_2 + u_2Q_3 - u_1Q_4$$

Mas de (II.9) segue que

$$u_4Q_1 - u_3Q_2 + u_2Q_3 - u_1Q_4 = 0 \tag{II.14}$$

Logo (II.13) fica

$$4m \frac{d}{dt}\left[r(u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4)\right] = 0$$

ou seja

$$r(u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4) = cte \tag{II.15}$$

Então, se em t=0 as condições iniciais são tais que (II.15) é nulo, o mesmo é válido qualquer que seja t, ou seja, $u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4$ é uma constante de movimento.

As equações (II.11) têm singularidade na origem e para removê-las Kustaanheimo e Stiefel introduziram o trabalho W feito por essas forças:

$$W = \sum_{K=1}^{3} P_K dx_k = \sum_{i=1}^{4} Q_i \, du_i \tag{II.16}$$

Sendo o trabalho a variação da energia cinética tem-se que

$$2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) - \frac{1}{2} mv_o^2 = W \qquad (II.17)$$

onde v_o é a velocidade inicial em R^3.

Desse modo, a equação (II.11) fica

$$4m \frac{d}{dt} (r\dot{u}_1) - \frac{1}{r} (2W + mv_o^2) u_i = Q_i \qquad (II.18)$$

A singularidade dessa equação pode ser removida através de uma regularização no tempo:

$$s = \int \frac{dt}{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \qquad (II.19)$$

Em função da variável independente s, a equação de movimento se torna

$$4m \frac{d^2}{ds^2} u_i - (2W + mv_o^2) u_i = rQ_i \qquad (II.20)$$

II.2 - O problema de Kepler

Denotando por M o produto da constante gravitacional pela massa de uma partícula localizada na origem do R^3, a energia potencial de uma partícula de massa m, à distância r da origem é

$$V = \frac{-\,m\,M}{r} \qquad (II.21)$$

Logo, de $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial u_i}$ segue que

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{m\ M}{r}\right) = -\frac{2m\ M}{r^2}\, u_i \tag{II.22}$$

e introduzindo-se forças perturbativas Q_i' tem-se

$$Q_i = -\frac{2m\ M}{r^2}\, u_i + Q_i' \tag{II.23}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_2' \\ Q_3' \\ Q_4' \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} \tag{II.24}$$

O trabalho devido a atração central e às perturbações é:

$$W = mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right) + W' \tag{II.25}$$

de modo que a equação de movimento (II.20) fica

$$\frac{d^2u_i}{ds^2} + \frac{M}{4a_o}\, u_i = \frac{1}{4m}\,(rQ_i' + 2W'u_i) \tag{II.26}$$

onde

$$\frac{1}{a_o} = \frac{2}{r_o} - \frac{v_o^2}{M} \tag{II.27}$$

sendo a_o o semi-eixo maior da órbita.

Evidentemente, se o movimento é não perturbado, as equações são dadas por

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} + w^2 u_i = 0 \tag{II.28}$$

com $w^2 = \dfrac{M}{4a_o}$.

Tem-se assim quatro equações diferenciais tipo oscilador harmônico simples.

CAPÍTULO III

REPRESENTAÇÃO SPINORIAL PARA A TRANSFORMAÇÃO K-S

No capítulo anterior obteve-se que o movimento de Kepler não perturbado no R^3, através da transformação K-S pode ser descrito por quatro equações diferenciais que correpondem às equações de um oscilador harmônico simples quadridimensional no R^4

O objetivo deste capítulo é, usando a teoria dos spinores de Cartan, obter uma representação spinorial para a transformação K-S. Mostra-se que com tal representação são verificadas as propriedades da transformação K-S, como a não injetividade da transformação e o fato da transformação de um plano polarizado sobre o R^3 ser do tipo Levi-Civita.

Como consequência da representação spinorial para a transformação K-S obtém-se que as equações de movimento de Kepler regularizadas se reduzem a uma equação diferencial na forma spinorial num espaço de spinores a duas componentes.

Para se obter uma representação spinorial para as transformações K-S segundo a teoria dos spinores de Cartan, alguns cuidados devem ser tomados. A razão disso é que essa teoria estabelece uma correspondência entre um espaço spinorial a duas componentes e um subespaço do R^3 definido por vetores isotrópicos, ou seja, vetores de norma zero. Como deseja-se estabelecer uma relação entre vetores do R^4 e vetores do R^3 que não são isotrópicos, não se pode fazer uma aplicação direta desta teoria. No apêndice C apresenta-se os aspectos essenciais da teoria de Cartan que interessam neste trabalho.

Para aplicar a teoria de Cartan, introduziu-se um vetor quadridimensional x^{α} num espaço de Minkowski com métrica (1, -1, -1, -1), de forma que as componentes espaciais de x^{α} são as componentes do vetor $\vec{x}$ no R^3 e a quarta componente x^o é definida como sendo

$$x^o = ||\vec{x}|| = \left[\sum_i x_i^2 \right]^{1/2} \qquad \text{(III.1)}$$

Consequentemente, a norma de x^{α} é zero.
Define-se assim um subespaço de R^4, de Minkowski com vetores isotrópicos.

Segundo a teoria de Cartan pode-se associar a x^{α} uma matriz 2x2:

$$x^{\alpha} \rightarrow T_{AB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x^o + x^1 & x^2 - ix^3 \\ x^2 + ix^3 & x^o - x^1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.2)}$$

A matriz T_{AB} pode ser escrita em termos dos tensores τ_{AB}, definidos em função das matrizes de Pauli mais a identidade,

$$\tau_{oAB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \; \tau_{1AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \; \tau_{2AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; \tau_{3AB} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

com as seguintes propriedades

$$\tau^{\alpha AB} = \tau_{\alpha AB}, \; \alpha = 0,1,2 \qquad \text{e} \qquad \tau^{\alpha AB} = - \tau_{\alpha AB}, \; \alpha = 3$$

Portanto,

$$T_{AB} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha AB} x^{\alpha} \tag{III.3}$$

Das propriedades de $\tau_{\alpha AB}$, pode-se obter que

$$x^{\alpha} = \tau^{\alpha AB} T_{AB} \tag{III.4}$$

onde o comprimento de x^{α} é o determinante de T_{AB} que é nulo. O vetor x^{α} está assim, associado a uma matriz singular. Da mesma forma como Cartan associa um spinor a um vetor isotrópico, pode-se definir dois spinores complexos (1,1) Ψ_A e Ψ_B de tal maneira que

$$T_{AB} = \Psi_A \Psi_{\bar{B}} \tag{III.5}$$

onde

$$\Psi_{\bar{B}} = (\Psi_B)^*$$

Assim, pode-se escrever (III.4) como

$$x^{\alpha} = \tau^{\alpha AB} \Psi_A \Psi_{\bar{B}} \tag{III.6}$$

e (III.3) como

$$\Psi_A \Psi_{\bar{B}} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha AB} x^{\alpha} \tag{III.7}$$

ou ainda

$$2 \Psi_A \Psi_{\bar{B}} = \tau_{iAB} x^i + \tau_{oAB} x^o \tag{III.8}$$

A equação acima pode ser comparada com a equação de Kustaanheimo[5] obtida para a regularização spinorial do movimento de Kepler:

$$2\, S_A S_{B^\cdot} = x_a\, i_{aAB} + r\, \delta_{AB} \qquad \text{(III.9)}$$

onde

i_{aAB} são as matrizes de Pauli

δ_{AB} delta de Kronecker

S_A números complexos

$S_{B^\cdot}$ números complexos conjugados

III.1 - Transformação K-S na forma spinorial

A equação

$$x^\alpha = \tau^{\alpha AB}\, \Psi_A\, \Psi_{\bar{B}}$$

é tudo o que se necessita para se obter as relações entre R^3 e R^4 fornecidas pela transformação K-S e todas as propriedades que dela advém, já citadas no início deste capítulo.

Para se obter a transformação K-S faz-se uma correspondência linear entre um vetor $\vec{u}$ no espaço paramétrico R^4 e o spinor complexo (1,1) Ψ_A que será definido em termos de quatro parâmetros reais:

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} u_1 - i\, u_4 \\ u_2 + i\, u_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.10)}$$

Tal correspondência é linear

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\Psi + \beta\ \phi \qquad \text{(III.11)}$$

onde Ψ está associado a $\vec{u}$ e ϕ associado a $\vec{v}$. Além disso,

$$||u|| = ||\Psi|| \qquad \text{(III.12)}$$

Então da equação

$$x^{\alpha} = \tau^{\alpha AB}\ \Psi_A\ \Psi_{\bar{B}} \qquad \text{onde } \Psi_{\bar{B}} = \Psi_A^{*}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} x^1 &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ x^2 &= 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ x^3 &= 2(u_1u_3 + u_2u_4) \\ x^o &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \end{aligned} \qquad \text{(III.13)}$$

As três primeiras relações são as fornecidas pela transformação K-S entre R^3 e R^4 e a última é o quadrado da distância em R^4 e o módulo do vetor $\vec{x}$ em R^3.

III.2 - Propriedades da transformação K-S na forma spinorial

II.2.1 - Não injetividade

Apresentou-se no capítulo I que os pontos $v_i \; \varepsilon \; R^4$ relacionados a $u_i \; \varepsilon \; R^4$ por

$$v_1 = u_1 \cos\phi - u_4 \operatorname{sen}\phi \qquad v_2 = u_2 \cos\phi + u_3 \operatorname{sen}\phi$$

(III.14)

$$v_4 = u_1 \operatorname{sen}\phi + u_4 \cos\phi \qquad v_3 = -u_2 \operatorname{sen}\phi + u_3 \cos\phi$$

são transformados no mesmo ponto $x_K \; \varepsilon \; R^3$

Vê-se então que se

$$\Psi_A(\vec{v}) = \begin{bmatrix} v_1 - i\, v_4 \\ v_2 + i\, v_3 \end{bmatrix} \tag{III.15}$$

$$\Psi_A(\vec{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - i\, u_4 \\ u_2 + i\, u_3 \end{bmatrix} \tag{III.16}$$

da linearidade da associação entre um vetor $\vec{u}$ e o spinor $\Psi(\vec{u})$ obtem-se que (III.14) pode ser escrita na forma spinorial como

$$\Psi_A(\vec{v}) = e^{-i\phi} \; \Psi_A(\vec{u}) \tag{III.17}$$

Portanto, com uma simples transformação de Gauge na representação spinorial obtém-se a não injetividade da transformação K-S.

III.2.2 - Tipo Levi-Civita

Quer se mostrar agora que com a representação (III.6) também se obtém que a transformação de um plano polarizado R^2 sobre o R^3 é tipo Levi-Civita: distâncias à origem são quadradas e ângulos são duplos. Considere-se então $\vec{u}$, $\vec{v}$ ε R^4, vetores ortonormais que constituem um sistema de coordenadas cartesianas no R^2 e satisfazem a relação.

$$u_4v_1 - u_3v_2 + u_2v_3 - u_1v_4 = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

Então, se w é o ângulo de polarização do R^2, o sistema

$$\begin{aligned} u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 &= 0 \\ u_4v_1 - u_3v_2 + u_2v_3 - u_1v_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.19)}$$

permite se obter a seguinte relação entre as componentes $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 \cos w + u_3 \operatorname{sen} w & \quad v_2 &= -u_1 \cos w + u_4 \operatorname{sen} w \\ v_4 &= -u_2 \operatorname{sen} w + u_3 \cos w & \quad v_3 &= -u_1 \operatorname{sen} w - u_4 \cos w \end{aligned} \qquad \text{(III.20)}$$

Considere-se agora um ponto do R^2 com coordenadas polares ρ e θ na base $(\vec{u}, \vec{v})$ ε R^2. Então, pode-se escrever

$$\vec{\rho} = \rho \cos \theta \, \vec{u} + \rho \operatorname{sen} \theta \, \vec{v} \qquad \text{(III.21)}$$

Da linearidade da correspondência segue que o spinor associado a $\vec{\rho}$ é

$$\Psi(\vec{\rho}) = \rho \cos\theta \, \Psi(\vec{u}) + \rho \,\mathrm{sen}\, \theta \, \Psi(\vec{v}) \qquad \text{(III.22)}$$

Então, definindo-se

$$\Psi(\vec{\rho}) = \begin{bmatrix} \rho_1 - i\rho_4 \\ \rho_2 + i\rho_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.23)}$$

e das relações

$$x^{\alpha} = \tau^{\alpha AB} \Psi_A \Psi_B$$

e

$$v_1 = u_2 \cos w + u_3 \,\mathrm{sen}\, w \qquad v_2 = -u_1 \cos w + u_4 \,\mathrm{sen}\, w$$

$$v_4 = -u_2 \,\mathrm{sen}\, w + u_3 \cos w \qquad v_3 = -u_1 \,\mathrm{sen}\, w - u_4 \cos w$$

pode-se obter que a imagem de um ponto do R^2 sobre o R^3 é dada por

$$x_o = \rho^2$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \rho^2 \cos^2\theta \begin{bmatrix} u_1^2+u_4^2-u_2^2-u_3^2 \\ 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ 2(u_1u_3 + u_2u_4) \end{bmatrix} + \rho^2 \cos w \begin{bmatrix} 2(u_1u_2 + u_3u_4) \\ -u_1^2+u_2^2-u_3^2+u_4^2 \\ 2(u_2u_3 - u_1u_4) \end{bmatrix} \mathrm{sen}\, 2\theta \; +$$

$$+ \rho^2 \,\mathrm{sen}\, w \begin{bmatrix} 2(u_1u_3 - u_2u_4) \\ 2(u_1u_4 + u_2u_3) \\ -u_1^2-u_2^2+u_3^2+u_4^2 \end{bmatrix} \mathrm{sen}\, 2\theta$$

Identificando-se os vetores coluna da matriz de Cayley pode-se escrever

$$\vec{x} = \rho^2 \left[\cos 2\theta \; \vec{a} + (\vec{b} \cos w + \vec{c} \text{ sen } w) \text{ sen } 2\theta\right] \qquad \text{(III,24)}$$

Como a componente x^o é o comprimento ρ^2 do ponto imagem no R^3 segue que a transformação é do tipo Levi-Civita.

III.3 - Equação do movimento de Kepler na forma spinorial.

Apresentou-se no capítulo II as equações do movimento de Kepler regularizadas

$$\ddot{u}_i + w^2 u_i = 0 \quad i = 1,2,3,4 \qquad \text{(III.25)}$$

onde o ponto significa derivada em relação a s.

Pode-se escrever (III.25) como

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 - i\,\ddot{u}_4 + w^2 (u_1 - i\,u_4) &= 0 \\ \ddot{u}_2 + i\,\ddot{u}_3 + w^2 (u_2 + i\,u_3) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.26)}$$

Como definiu-se

$$\Psi(\vec{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - i\,u_4 \\ u_2 + i\,u_3 \end{bmatrix} \quad \text{e como} \quad \ddot{\Psi}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 - i\,\ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_2 + i\,\ddot{u}_3 \end{bmatrix}$$

segue que (III.26) pode ser escrita como

$$\ddot{\Psi}_A + w^2 \Psi_A = 0$$

Assim, as equações de movimento de Kepler, regularizadas, na representação spinorial, se reduzem a uma equação diferencial spinorial a duas componentes.

III.4 - Uma interpretação geométrica

Quando se verificou que a transformação K-S tem o caráter de uma transformação de Levi-Civita, ou seja, distâncias no R^2 se projetam quadraticamente no R^3 e ângulos com respeito à origem são duplos, utilizou-se de planos polarizados, isto é, planos com direção definida com relação ao R^3. Isso foi feito tanto do ponto de vista da transformação K-S como do spinorial.

A correspondência entre os vetores do R^2 e sua projeção no R^3 é feita pela matriz de Cayley. Note-se que o vetor $\vec{a}$ da eq.III-24 tem componentes no R^3 definidos pela transformação K-S e é ortogonal aos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Isto sugere que se pode tentar obter uma interpretação geométrica para a representação spinorial.

Considere-se então um plano polarizado definido por dois vetores ortonormais do R^3 $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Esse plano pode ser representado por um vetor $\vec{z}$ no plano complexo

$$\vec{z} = \vec{x}_1 + i\, \vec{x}_2 \qquad \text{(III.27)}$$

isotrópico, isto é, de módulo nulo. Se $z \equiv (\alpha, \beta\ , \gamma)$ segue que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \qquad \text{(III.28)}$$

Pela teoria de Cartan, pode-se associar a $\vec{z}$ um spinor $\Psi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ onde ξ e η são dados por

$$\alpha = -\xi^2 + \eta^2$$

$$\beta = -i(\xi^2 + \eta^2) \qquad \text{(III:29)}$$

$$\gamma = 2\xi\eta$$

Definindo-se

$$\Psi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & -i\ u_4 \\ u_2 & +i\ u_3 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\alpha = -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 + 2i(u_1u_4 + u_2u_3) = \alpha_R + i\ \alpha_I \qquad \text{(III.30)}$$

$$\beta = 2(u_2u_3 - u_1u_4) + i(-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) = \beta_R + i\ \beta_I$$

$$\gamma = 2(u_1u_2 + u_3u_4) + 2i(u_1u_3 - u_2u_4) = \gamma_R + i\ \gamma_I$$

A parte real de $\vec{z}$ define as componentes de $\vec{x}_1$ e a parte imaginária as componentes de $\vec{x}_2$. Note-se que

$$\text{Re}\ \vec{z} = \vec{b}$$

$$\text{Im}\ \vec{z} = \vec{c}$$

Logo, os dois vetores constituem duas das colunas da matriz de Cayley. O terceiro vetor coluna obtém-se através do produto vetorial entre $\vec{b}$ e $\vec{c}$, portanto $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \vec{x}$, cujas componentes são determinadas pela transformação K-S. Do ponto de vista geométrico, significa que a trajetória $\vec{x}(t)$ de um corpo no R^3 é orto gonal ao plano definido pèlo spinor Ψ .

Note-se que esta sistemática de tratamento, via matriz de Cayley, permite se obter a representação spinorial da transformação K-S partindo-se de um vetor isotrópico definido no R^3 e não no R^4 de Minkowski como fizemos neste trabalho, uma vez que a norma do spinor define o módulo do vetor de posição no R^3. Todas as outras propriedades podem ser obtidas da mesma forma.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

As transformações de Kustaanheimo e Stiefel permitem obter uma regularização do movimento de Kepler no R^3 da mesma forma que as de Levi-Civita regularizam esse movimento no R^2. Fundamentalmente elas transformam as equações de movimento que são singulares na origem em equações tipo oscilador harmônico, regulares na origem.

Neste trabalho mostrou-se como as transformações K-S podem ser descritas numa representação spinorial, utilizando-se da teoria dos spinores de Cartan. Essa representação é linear e contém todas as propriedades que caracterizam uma transformação tipo Levi-Civita. A equação do movimento de Kepler se reduz a uma equação diferencial spinorial a duas componentes e do tipo oscilador harmônico.

Mostrou-se também que quando se estuda o movimento de Kepler via representação spinorial, se faz mediante um plano polarizado determinado pelo spinor que é ortogonal ao vetor de posição do movimento de Kepler.

Como o mapeamento do R^4 no R^3, via transformação K-S, é feito mediante transformações ortogonais, cuja matriz de representação obedece as propriedades da matriz de Levi-Civita, as coordenadas no R^4 podem ser tratadas como coordenadas generalizadas. Pode-se definir um espaço de movimentos no R^4, cujo mapeamento no R^3 é feito pela mesma matriz de transformação. As coordenadas generalizadas nos dois espaços, de posição e momento, são coordenadas canonicamente conjugadas e consequentemente permitem fazer a quantização dessas transformações e se estudar, por exemplo, o problema quântico do átomo de hidrogênio[11].

Uma consequência natural deste trabalho é proceder-se à quantização da representação spinorial e aplicá-la ao estudo do átomo de hidrogênio. Isto é possível, pois as coordenadas são canônicas e a correspondência entre o espaço de operadores que define posição e momento e o espaço de spinores é linear.

APÊNDICE A

A TRANSFORMAÇÃO $z=w^2$ SOBRE SEÇÕES CÔNICAS

Mostrar-se-á neste apêndice que a transformação $z=w^2$ leva seção cônica com centro na origem do plano w em seção cônica com um dos focos na origem do plano z.

A transformação $z=w^2$ fornece

$$x = u^2 - v^2$$

$$y = 2uv \tag{A.1}$$

A equação cartesiana geral de uma seção cônica com centro na origem, no plano w, é dada por [6]

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \tag{A.2}$$

onde a é o semi-eixo maior e e é a excentricidade da cônica.

No caso de $0 < e < 1$, definimos $b^2 = a^2(1 - e^2)$ e a equação (a.2) corresponde a uma elipse. Se $e > 1$,definimos $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ e a equação (A.2) corresponde agora a uma hipérbole. Pode-se então escrever (A.2) como

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad ; \qquad b^2 = \begin{cases} a^2(1 - e^2) , & 0 < e < 1 \\ a^2(e^2 - 1) , & e > 1 \end{cases} \tag{A.3}$$

Usando-se a transformação (A.1) em (A.3) obtém-se

$$\frac{\left(x - \dfrac{a^2\, e^2}{2}\right)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad (A.4)$$

onde

$$A^2 = \frac{a^4}{4}\,(2 - e^2)^2 \text{ é o semi-eixo maior}$$

e

$$B^2 = \begin{cases} a^4(1 - e^2) & , \quad 0 < e < 1 \\ a^4(e^2 - 1) & , \quad e > 1 \end{cases} \quad \text{é o semi-eixo menor}$$

Para que a equação (A.4) seja a equação de uma cônica com foco na origem, é necessário que $\dfrac{a^2\, e^2}{2}$ seja a distância focal da cônica. De fato, se a ordenada do foco é C, tem-se que(1)

$$e = \frac{C}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \qquad \text{se} \quad 0 < e < 1$$

$$e = \frac{C}{A} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A} \qquad \text{se} \quad e > 1$$

Calculando-se então C = eA obtém-se para ambos os casos:

$$C = \frac{a^2\, e^2}{2}$$

Desse modo, (A.4) é a equação geral de uma cônica com um dos focos na origem do plano z.

APÊNDICE B

A MATRIZ DE CAYLEY

Apresenta-se neste apêndice a matriz de Cayley para a parametrização das rotações no espaço tri-dimensional[8].

Considera-se um espaço bi-dimensional com eixos complexos u e v. Uma transformação linear geral para esse espaço é

$$\begin{aligned} u' &= \alpha\, u + \beta\, v \\ v' &= \gamma\, u + \delta\, v \end{aligned} \qquad \text{(B-1)}$$

sendo então a matriz de transformação dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad \text{(B-2)}$$

Considerar-se-á transformações Q que sejam unitárias e com determinante + 1:

$$Q^{+}\, Q = Q\, Q^{+} = I \qquad \text{(B-3)}$$

$$\alpha\, \delta - \beta\, \gamma = 1 \qquad \text{(B-4)}$$

A matriz de transformação Q, por ter elementos complexos, possui oito quantidades a serem especificadas. Entretanto, as condições (B-3) e (B-4) reduzem o número de quantidades para três (o exigido para se especificar a rotação de um corpo rígido).

De (B-3) tem-se

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* &= 1 \\ \gamma\gamma^* + \delta\delta^* &= 1 \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* &= 0 \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(B-5)}$$

e do fato do determinante ser + 1 tem-se

$$\alpha\ \delta \ -\ \beta\ \gamma \qquad \text{(B-6)}$$

Das relações (B-5) e (B-6) obtém-se

$$\begin{aligned} \gamma &= -\beta^* \\ \delta &= \alpha^* \end{aligned} \qquad \text{(B-7)}$$

Logo

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \qquad \text{(B-8)}$$

com $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$

Seja agora o operador

$$P = \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix} \qquad \text{(B-9)}$$

onde x,y,z são as coordenadas de um ponto no espaço R^3. Suponha que P seja transformado por Q, através de uma transformação de similaridade

$$P' = Q\ P\ Q^+ \qquad \text{(B-10)}$$

Como $P^{+} = P$, P é hermitiano. Também, o traço de P é nulo. Sendo o traço e a hermiticidade de uma matriz invariantes por uma transformação de similaridade, deve-se ter que

$$P' = \begin{bmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{bmatrix} \tag{B-11}$$

O determinante de P também é invariante sob a transformação de similaridade (B-10). Como esse determinante é menos o comprimento do vetor $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ele é invariante por uma transformação de ortogonalidade. Assim a igualdade

$$|P| = |P'| \tag{B-12}$$

será reconhecida como condição de ortogonalidade.

A cada matriz unitária Q no espaço complexo bi-dimensional deverá existir associada alguma transformação ortogonal no espaço tridimensional ordinário.

Considere B a matriz de transformação ortogonal

$$x' = B\,x$$

e Q_1 a matriz unitária associada

$$P' = Q_1\, P\, Q_1^{+}$$

À matriz de transformação ortogonal

$$x'' = A\,x'$$

está associada a matriz unitária

$$P'' = Q_2 \; P' \; Q_2^+$$

Agora,

$$x'' = C\,x = ABx$$

e

$$P'' = Q_2 Q_1 P Q_1^+ Q_2^+$$

Como $Q_1^+ \; Q_2^+ = (Q_2 \; Q_1)^+$ e $Q_2 Q_1$ é unitário (pois Q_1 e Q_2 o são) então pode-se tomar $Q_3 = Q_2 Q_1$ que está associada a C. Assim, a correspondência entre matrizes unitárias complexas (que formam o grupo SU(2)) e matrizes ortogonais reais (que formam o grupo O_3^+, para determinantes + 1) é tal que qualquer relação entre as matrizes de um conjunto é satisfeita também pelas matrizes correspondentes do outro conjunto.Mostra-se mais adiante que essa relação é homomorfa

Pode-se escrever os elementos de uma matriz ortogonal em termos dos elementos da matriz homomorfa Q. Para tanto, por simplicidade toma-se

$$\begin{aligned} x_+ &= x+iy \\ x_- &= x-iy \end{aligned} \qquad \text{(B-13)}$$

Então, como $P' = Q \; P \; Q^+$ segue que

$$P' = \begin{bmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(B-14)}$$

Da igualdade acima obtém-se

$$
\begin{aligned}
x'_+ &= 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \gamma^2 x_+ \\
x'_- &= -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\
z' &= (\alpha\beta + \beta\gamma) z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+
\end{aligned}
\qquad (B-15)
$$

ou de forma explícita

$$x' + iy' = 2\gamma\delta z + (\delta^2 - \gamma^2)x + i(\delta^2 + \gamma^2)y \qquad (B-16)$$

$$x' - iy' = -2\alpha\beta z + (\alpha^2 - \beta^2)x - i(\alpha^2 + \beta^2)y \qquad (B-17)$$

$$z' = (\alpha\delta + \beta\gamma)z + (\beta\gamma - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y \qquad (B-18)$$

Por outro lado, a transformação ortogonal de um conjunto de coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ é escrita como

$$x'_i = \sum_i a_{ij}\, x_j \qquad i=1,2,3 \qquad (B-19)$$

Fazendo-se então

$$x'_1 = x \quad , \quad x'_2 = y \quad e \quad x'_3 = z$$

obtém-se x' somando-se (B-16) e (B-17) e y' subtraindo-se (B-16) e (B-17).

Desse modo, os elementos de matriz a_{ij} de (B-19) em termos de α β γ δ são

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-\delta^2) & \frac{i}{2}(-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2) & (\gamma\delta - \alpha\beta) \\ \frac{i}{2}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & -i(\gamma\delta + \alpha\beta) \\ (\beta\delta - \alpha\gamma) & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & (\alpha\delta + \beta\gamma) \end{bmatrix} \quad \text{(B-20)}$$

Os parâmetros α, β, γ e δ são chamados parâmetros de Cayley-Klein.

Mostra-se agora que o morfismo existente entre os grupos O_3^+ e SU(2) é sobrejetor[9]. De fato: A operação de SU(2) sobre uma matriz P é dada pela transformação de similaridade

$$P' = Q\, P\, Q^+ \quad \text{(B-21)}$$

Por outro lado, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix}$$

pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli σ_1, σ_2 e σ_3 :

$$P = x\,\sigma_1 + y\,\sigma_2 + z\,\sigma_3 \quad \text{(B-22)}$$

bem como

$$P' = x'\,\sigma_1 + y'\,\sigma_2 + z'\,\sigma_3 \quad \text{(B-23)}$$

Considere-se agora a matriz de transformação

$$Q = \begin{bmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{bmatrix} \quad \text{(B-24)}$$

Essa matriz é obtida escrevendo-se os parâmetros de Cayley-Klein em função dos ângulos de Euler. Nesse caso particular, para rotação em torno do eixo z.

Como $P' = Q\,P\,Q^{+}$, fazendo-se a transformação de semelhança sobre cada matriz unitária tem-se

$$Q_{\xi}\,\sigma_1\,Q_{\xi}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & e^{2i\xi} \\ e^{-2i\xi} & 0 \end{bmatrix} \tag{B-25}$$

Então

$$Q_{\xi}\,x\,\sigma_1\,Q_{\xi}^{+} = x\cos 2\xi\sigma_1 - x\,\mathrm{sen}\,2\xi\sigma_2 \tag{B-26}$$

De modo análogo

$$Q_{\xi}\,y\,\sigma_2\,Q_{\xi}^{+} = y\,\mathrm{sen}\,2\xi\sigma_1 + y\cos 2\xi\,\sigma_2 \tag{B-27}$$

$$Q_{\xi}\,z\,\sigma_3\,Q_{\xi}^{+} = z\,\sigma_3 \tag{B-28}$$

Tomando-se $\xi = \phi/2$ e da igualdade

$$x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = Q_{\phi/2}x\sigma_1 Q_{\phi/2}^{+} + Q_{\phi/2}y\sigma_2 Q_{\phi/2}^{+} + Q_{\phi/2}z\sigma_3 Q_{\phi/2}^{+}$$

obtem-se

$$x' = x\cos\phi + y\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\phi + y\cos\phi$$

$$z' = z$$

Logo, a transformação unitária $Q_{\phi/2}$ é equivalente à rotação $R_z(\phi)$.

A correspondência

$$Q_{\phi/2} = \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\,\phi & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\phi)$$

não é uma correspondência uma-a-uma pois como ϕ em $R_z(\phi)$ varia de 0 a 2π , $\phi/2$ em $Q_{\phi/2}$ varia de 0 a π

Assim,

$$R_z(\phi + 2\pi) = R_z(\phi)$$

$$Q_{\phi/2+} = \begin{bmatrix} -e^{+i\phi/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} = -Q_{\phi/2}$$

Logo, tanto $Q_{\phi/2}$ quanto $Q_{\phi/2+\pi} = -Q_{\phi/2}$ correspondem a $R_z(\phi)$. Portanto a correspondência entre SU(2) e O_3^+ é um morfismo sobrejetor.

APÊNDICE C

A DEFINIÇÃO DE SPINOR SEGUNDO CARTAN

Sejam E_3 espaço tridimensional e (x_1,x_2,x_3) um vetor isotrópico, i. é, de norma nula. Pode-se associar a esse vetor dois números ξ_o, ξ_1 dados por[10]

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \xi_o^2 - \xi_1^2 \\
x_2 &= i(\xi_o^2 + \xi_1^2) \\
x_3 &= -2\ \xi_o\ \xi_1
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

cujas soluções podem ser dadas por

$$
\begin{aligned}
\xi_o &= \pm \left[\frac{x_1 - i\ x_2}{2} \right]^{1/2} \\
\xi_1 &= \pm \left[\frac{-x_1 - i\ x_2}{2} \right]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

Observa-se que ao rotar-se o vetor isotrópico em torno do eixo x_3, de um ângulo α, $(x_1 - i\ x_2)$ é multiplicado por $e^{-i\alpha}$, e de (C.2), a quantidade ξ_o é multiplicada por $e^{-i\alpha/2}$.

Assim, se o ângulo de rotação é 2π, o vetor isotrópico volta à sua posição original enquanto que ξ_o fica multiplicado por -1.

Disso segue que não é possível fazer-se uma escolha consistente de sinal que valha para todo vetor isotrópico de maneira que a solução varie continuamente com o vetor.

Desse modo, Cartan define um spinor (ξ_o, ξ_1) como sendo uma classe de vetores isotrópicos "dirigidos" ou "polarizados". Uma rotação de 2π em torno de um eixo varia a polarização desse vetor isotrópico.

As equações para a direção isotrópica de um vetor associado a um spinor pode ser dada por

$$\begin{aligned} \xi_o x_3 + \xi_1 (x_1 - i\, x_2) &= 0 \\ \xi_o (x_1 + i\, x_2) - \xi_1 x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (C.3)$$

de tal maneira que se pode associar ao vetor $\vec{x}$ uma matriz

$$[X] = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - i\, x_2 \\ x_1 + i\, x_2 & - x_3 \end{bmatrix} \qquad (C.4)$$

que tem propriedades interessantes de verificação imediata:

i) $|X| = - ||\vec{x}||^2$

ii) $[X]^2 = [I] . ||\vec{x}||^2$

onde $|I|$ é a matriz identidade

iii) $\vec{x} . \vec{y} = \frac{1}{2} \{ [XY] + [YX] \}$

REFERÊNCIAS

1. T.Levi-Civita, Sur la resolution qualitative du problème restrient du trois corps, Op. Math. Vol.2, Bolagna, 1956

2. H.G.Pavão, Tese de Mestrado (1983), IFGW - UNICAMP

3. A.Hurwitz, Ueber die Komposition quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen, Math. Werke II,p.565-571

4. P.Kustaanheimo, E.Stiefel, Pertubation theory of Kepler motion based on spinor regularization, J.Reine angew. Math. 218(1965) 204

5. P.Kustaanehimo, Spinor regularization of the Kepler motion, Ann. Univ. Turkuens A.I. 73 (1964); Publ.Nº 102 of the Astronomical Observatory, Helsink (1964)

6. Leightold, Louis, O Cálculo com geometria analítica ., Harper & Row do Brasil, Ltda

7. M.R.Spiegel, Mathematical Handbook, Schaum's outline series

8. Goldstein, Herbert, Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1950

9. Arfeken, George,Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 2º Edition, 1970

10. Elie Cartan, The Theory of Spinor, The M.I.T.Press Hermann, Paris 1966

11. M.Boiteau, The three dimensional hidrogen atom as a restricted four-dimensional harmonic oscillator; Physica 65,381 (1973)

Agradecimentos

- Ao prof.Dr. José Bellandi Filho pela orientação e apoio.
- Ao prof.Dr. Bruto Max Pimentel Escobar pelas discussões e incentivo
- Ao Departamento de Raios Cósmicos, Cronologia, Altas Energias e Leptons que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq pela suporte financeiro.