
OSCILAÇÕES ENTRE TRÊS

SABORES

DE NEUTRINOS

Veríssimo Manoel de Aquino

Oscilações entre três Sabores de Neutrinos

Veríssimo Manoel de Aquino

Orientador: Dr. José Bellandi Filho ^{OK}

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado defendida pelo Sr. Veríssimo Manoel de Aquino e aprovada pela comissão julgadora

J. Bellandi

Tese apresentada ao Instituto de Física *Gleb Wataghin*

para obtenção do título de Doutor em Física

Área: Fenomenologia de Partículas Elementares

Campinas, UNICAMP, 1995



INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE
VERÍSSIMO MANOEL DE AQUINO

DATA: 17 / 08 / 95

BANCA EXAMINADORA:


- Prof. Dr. José Bellandi Filho (Orientador)


- Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal


- Prof. Dr. Felice Pisano


- Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato


- Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo

Banca Examinadora

- Prof. Dr. José Bellandi Filho (Orientador) - IFGW/UNICAMP
- Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal - IFUSP/USP
- Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo - IFGW/UNICAMP
- Profa. Dra. Carola Dobrigkeit - IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Felice Pisano - IFT/UNESP
- Prof. Dr. José Augusto Chinellato - IGFW/UNICAMP (Suplente)
- Prof. Dr. Adolfo Maia - IMECC/UNICAMP (Suplente)

*À Bernard, Betina e
Heidi*

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Dr. José Bellandi Filho por ter me indicado, com segurança, o caminho das pedras. Ao Professor Dr. Marcelo M. Guzzo, pela orientação nesse trabalho.

Aos amigos, Professor Ary, Adriana e Miriam pela grande ajuda nas questões computacionais.

Ao J. Montanha, R. Covolan e demais amigos do Instituto de Física Gleb Wataghin, pelos bons momentos compartilhados.

Um agradecimento especial à Professora Dra. Carola Dobrigkeit-Chinellato, pelas produtivas discussões durante esses anos.

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e da Universidade Estadual de Londrina.

Conteúdo

Resumo.....	3
1 Introdução.....	4
2 O Problema do Neutrino Solar.....	6
2.1 Previsões teóricas para o fluxo de neutrinos.....	7
2.2 Detecção de neutrinos e resultados experimentais.....	8
2.3 Confronto entre previsão e experimento.....	11
3 Neutrinos à luz do modelo padrão e além.....	12
3.1 Os neutrinos e o modelo padrão.....	12
3.2 Além do modelo padrão.....	19
3.2.1 O termo de massa de Dirac.....	20
3.2.2 O termo de massa de Majorana.....	23
3.2.3 O termo de massa de Dirac-Majorana.....	25
4 Oscilações de neutrinos.....	27
4.1 Oscilações de neutrinos.....	27
4.2 Oscilações de neutrinos no contexto da existência de dois sabores.....	28
4.2.1 Soluções no vácuo e à densidade de matéria constante.....	29
4.2.2 Oscilações em regime adiabático.....	32
4.2.3 Oscilações em regime não adiabático.....	33
5 Oscilações entre três sabores de neutrinos à densidade de matéria constante.....	40
5.1 A equação de evolução temporal.....	41
5.2 Soluções da equação de evolução temporal.....	42
5.2.1 O caso do vácuo.....	42
5.2.2 O caso da densidade de matéria constante.....	43
5.3 Os ângulos de mistura na matéria.....	46
5.4 Análise dos resultados.....	54

6 Evolução temporal à densidade de matéria variável	56
6.1 Oscilações entre três sabores de neutrinos à densidade de matéria variável.....	57
6.2 Solução da equação de evolução em regime adiabático.....	62
6.3 Neutrinos em evolução em torno da ressonância 1.....	63
6.4 Neutrinos em evolução em torno da ressonância 2.....	73
6.5 A probabilidade de sobrevivência.....	78
7 Conclusões.....	80
7.1 Análise dos resultados.....	80
7.2 Possíveis extensões ao trabalho.....	81
8 Apêndices.....	83
8.1 Apêndice A.....	83
8.2 Apêndice B.....	91
Abstract.....	99
Bibliografia.....	100.

Resumo

Apresentam-se neste trabalho as soluções para a equação de evolução temporal para um spinor a três componentes, quando a hamiltoniana do sistema depende do tempo e quando ela for constante. Discute-se as soluções para um sistema de três estados de sabores de neutrinos na presença da matéria solar. Quando se assume que o potencial de interação de neutrinos com a matéria é independente do tempo as soluções obtidas são exatas. Para o caso do potencial dependente do tempo as soluções são aproximadas. Discute-se também como se analisar transições ressonantes entre diferentes sabores de neutrino quando o potencial for dependente do tempo.

Capítulo 1

Introdução

A física de neutrinos iniciada na década de trinta com o estudo do decaimento beta, apresenta uma evolução avalisada por cuidadosos experimentos (1930 a 1962), culminando com uma descrição satisfatória dos neutrinos através da teoria padrão das interações eletrofracas de Glashow, Weinberg e Salam. Na década de setenta, no entanto, experimentos com interesses astrofísicos, criaram o chamado problema do neutrino solar. O fluxo de neutrinos provenientes do Sol detetados na terra apresentava-se menor que o fluxo esperado a partir do modelo padrão para o Sol . A frente deste problema duas alternativas se apresentam: Ou o modelo do Sol está errado, ou a descrição correta dos neutrinos vai além do modelo padrão.

Partindo da segunda opção apresentada, modelos alternativos ao padrão, onde a hipótese de existência de massa para os neutrinos é introduzida, vem sendo analisados em vários trabalhos como proposta de solução ao problema do neutrino solar.

Neste contexto, na evolução de um neutrino no vácuo ou na matéria, transições entre auto estados de sabor podem ocorrer, o que poderia explicar o déficit de neutrinos eletrônicos observado.

A grande maioria destes trabalhos analisa o problema no contexto da existência de dois sabores de neutrinos, existindo umas poucas referência sobre o assunto no contexto da existência de três sabores, as quais, lançam mão de métodos aproximativos para obtenção de soluções da equação de evolução temporal.

No presente trabalho, apresentamos no capítulo 2 um breve histórico da física de neutrinos e os dados experimentais que geram o problema do neutrino solar.

No capítulo 3 apresentaremos como os neutrinos interagem com a matéria à luz do modelo padrão e alguns aspectos de modelos alternativos envolvendo neutrinos massivos.

No capítulo 4 a análise do problema e os resultados existentes até então no contexto de dois sabores de neutrinos (ν_e e ν_μ) são apresentados.

Nos capítulos 5 e 6 apresentamos soluções para a equação de evolução temporal no contexto da existência de três sabores de neutrinos, à densidade de matéria constante, (quando uma solução analítica exata pode ser obtida), e à densidade de matéria variável .

Finalmente, no capítulo 7, uma análise dos resultados obtidos é efetuada.

Capítulo 2

O Problema do Neutrino Solar

Os estudos sobre decaimento beta na década de trinta marcam o início da física de neutrinos . Por simples considerações de balanceamento energético chegou-se a conclusão de que nessas reações se deveria introduzir a existência de uma nova partícula de massa muito pequena. Por considerações de carga infere-se que esta partícula deve ter carga zero. Essa partícula foi chamada por Fermi de neutrino, um neutro de massa muito pequena. Uma série de experimentos foram realizados para o estabelecimento definitivo das características dessa nova partícula: Cowan e Reines [1] (comprovação da existência de neutrinos); Davis e Harmer [2] (diferenciação entre neutrinos e antineutrinos) ;C.S.Wu [3] (atribuição do número quântico helicidade aos neutrinos ("Todos o neutrinos são left-handed e todos os antineutrinos são right-handed".) ; e os testes experimentais de Brookhaven ,(1962), [4] onde a conservação do número leptônico por família foi testada.

Com a comprovação da existência de três sabores de léptons [5], um quadro das características físicas dos neutrinos pode ser apresentado como abaixo.

ν	Q	L_e	L_μ	L_τ	m_ν	h
ν_e	0	1	0	0	0	-1
ν_μ	0	0	1	0	0	-1
ν_τ	0	0	0	1	0	-1

tabela1

Nesta tabela, Q é a carga elétrica do neutrino, L_i corresponde ao número leptônico por família, m_ν é a massa do neutrino e h sua helicidade ($h = 1$

para partículas cujo spin é paralelo à velocidade da partícula e -1 quando antiparalelo).

Na teoria unificada das interações eletrofracas que descreve muito bem as interações de neutrinos com a matéria, os neutrinos apresentam as propriedades da tabela 1, embora os limites experimentais para a massa dos neutrinos até então são dados por

$$m_{\nu e} < 7.2eV$$

$$m_{\nu\mu} < .27MeV$$

$$m_{\nu\tau} < 31MeV$$

e tais limites foram obtidos na referência [5].

A física dos neutrinos solares é mais recente, começando na década de 70 com os experimentos de Davis realizados numa mina de ouro ao sul de Dakota nos EUA.

Com a evolução da física das interações eletrofracas, a determinação teórica de fluxo de neutrinos solares tornou-se possível e ao mesmo tempo gerou o problema dos neutrinos solares, uma vez que não há concordância entre as previsões teóricas e as medidas realizadas em diversos experimentos. A seguir faremos uma breve descrição dessas previsões e dos principais resultados experimentais. Uma descrição mais completa a esse respeito pode ser encontrada na ref [6].

2.1 Previsões teóricas para o fluxo de neutrinos solares.

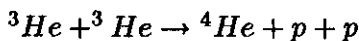
A partir dos dados experimentais para fluxo de neutrinos solares iniciados por interesses astrofísicos [7], a física de neutrinos toma um novo impulso. Segundo o modelo teórico para o Sol desenvolvido principalmente pelo grupo de Bahcall [8], a produção de neutrinos no Sol ocorre principalmente através das cadeias ppI ($\sim 86\%$ do fluxo), ppII ($\sim 14\%$ do fluxo) e ppIII,

cadeia ppI

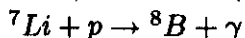
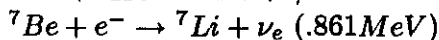
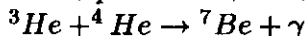
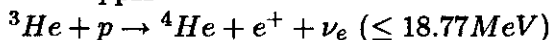
$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e (\leq .42MeV)$$

$$p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e (1.44MeV)$$

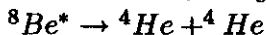
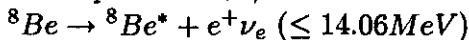
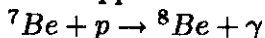
$$d + p \rightarrow \gamma + {}^3He$$



cadeia ppII



cadeia ppIII



a energia dos neutrinos produzidos estando indicada entre parênteses. A partir destas previsões e levando-se em conta quantidades como densidade eletrônica solar, seção de choque para o espalhamento entre neutrinos e elétrons, $\sigma(\nu_e, e)$, distância entre produção e detecção de neutrinos e luminosidade solar, o fluxo de neutrinos esperado na terra é

$$\Phi \approx 6 \times 10^{10}/\text{cm}^2.s.$$

Um espectro detalhado do fluxo esperado em função da energia dos neutrinos é apresentado na Figura {2.1}.

2.2 Detecção de neutrinos e resultados experimentais.

Os detetores de neutrinos em atividade atualmente, baseiam-se em três técnicas.

1- Detetores de Cerenkov (Kamiokande) . Este experimento utiliza aproximadamente 3 Kton de água como detetor de luz Cerenkov. Fotomultiplicadoras vêem luz Cerenkov proveniente de elétrons que são espalhados por neutrinos. A energia de limiar do neutrino para que o elétron possa ser detetado é 7.3MeV .

2-Detetores radioquímicos (Davis, Gran Sasso e Sage). Utilizam-se do decaimento beta inverso para a detecção como por exemplo no experimento

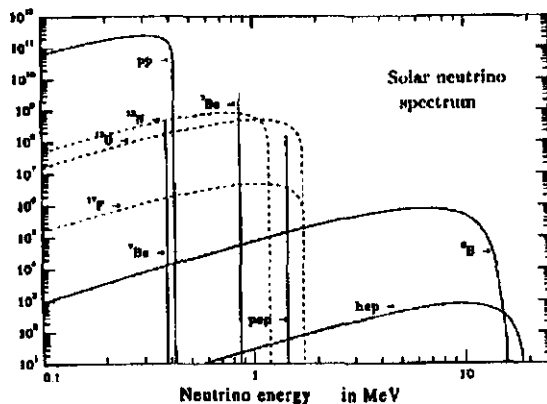
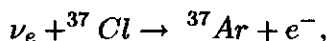


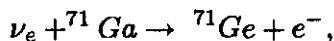
Figure 2.1: Fluxo de neutrinos em $\text{N}/\text{cm}^2 \text{ s} \times \text{energia em MeV}$. Figura adaptada da referência [6]

de Davis [9], onde uma piscina contendo cloro absorve neutrinos eletrônicos produzindo argônio através da reação



os átomos de argônio sendo posteriormente contados (obs. vida média do argônio ≈ 35 dias). A energia de limiar do neutrino para que ocorra a transformação é $.814\text{MeV}$.

Nos experimentos de Sage e Gran Sasso o elemento químico utilizado é o gálio, através da reação



a energia de limiar do neutrino para tal reação sendo $.23\text{MeV}$.

3-Detecores geoquímicos. Utilizam-se de processos análogos ao radioquímico com elementos de vida média da ordem de 10^6 anos (análise de material obtido em minas profundas).

Os resultados experimentais para o experimento de Davis [10] indicando

$$\frac{\Phi_{obs.}}{\Phi_{esp.}} \approx \frac{2.1 \pm .9 SNU}{7.9 \pm 2.6 SNU}$$

um SNU correspondendo a 10^{-36} átomos de argônio por átomo de cloro por dia. Na Figura {2.2} apresentamos os dados experimentais obtidos por Davis entre 1970 e 1990.

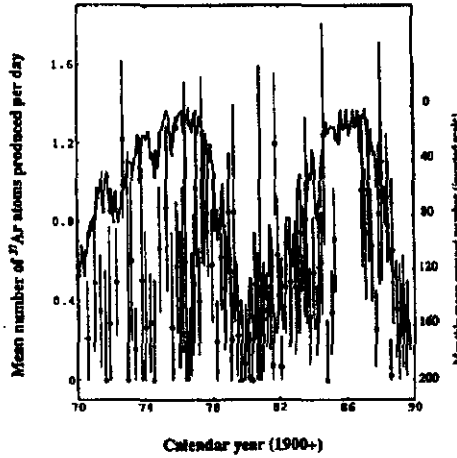


Figure 2.2: Os Dados de Davis. Número de átomos de ^{37}Ar produzidos x tempo em anos. Figura adaptada da referência [12].

O segundo experimento efetuado em Kamiokande [11] apresentou o seguinte resultado

$$\frac{\Phi_{obs.}}{\Phi_{esp.}} \approx .46 \pm .13(stat.) \pm .08(syst.) \text{ entre junho/87 e maio/88.}$$

$$\frac{\Phi_{obs.}}{\Phi_{esp.}} \approx .39 \pm .09(stat.) \pm .06(syst.) \text{ entre junho/88 e maio/89.}$$

Um terceiro experimento SAGE [12] apresentou o seguinte resultado

$$\frac{\Phi_{obs.}}{\Phi_{esp.}} = .52 \pm .09.$$

Os dados mais recentes são os dados de GALLEX [13], (1992), apresentando os seguintes resultados:

$$\frac{\Phi_{obs.}}{\Phi_{esp.}} = .60 \pm .09.$$

2.3 Confronto entre previsão e experimento. O problema do neutrino solar.

Embora não haja efetivamente um acordo entre os dados experimentais, todos apontam um déficit do fluxo de neutrinos observado em relação ao fluxo esperado para o Sol. Tal déficit é conhecido como problema do neutrino solar . Frente a tal problema duas alternativas se apresentam.

- 1- Nosso entendimento do Sol é incompleto.
- 2- Um melhor entendimento do neutrino vai além do modelo padrão.

Uma das propostas que vem sendo analisada seguindo a segunda alternativa apresentada, é a de que por interferência da matéria e campo magnético entre a produção e detecção dos neutrinos, alguma coisa acontece com os neutrinos tornando-os "invisíveis " .

No próximo capítulo analisaremos como os neutrinos interagem com a matéria a luz do modelo padrão e algumas propostas de modelos que possibilitam a solução ao problema do neutrino solar.

Capítulo 3

Neutrinos à luz do modelo padrão e além

3.1 Os neutrinos e o modelo padrão.

Tomando como base a ótima concordância entre os dados experimentais existentes sobre a física das interações fracas e eletromagnéticas com a teoria das interações eletrofracas de Glashow [14], Weinberg [15] e Salan [16], é razoável assumir que, na procura de solução para o problema dos neutrinos solares, as interações de neutrinos com quarks e léptons são descritas pela lagrangeana padrão. Pequenas modificações na teoria padrão ou outros modelos devem, em princípio, reproduzir os mesmos resultados obtidos na teoria padrão no que diz respeito a interação com a matéria, de forma que soluções ao problema do neutrino solar possam ser encontradas sem causar problemas em um setor cuja física é fenomenologicamente bem estabelecida.

No presente capítulo apresentaremos como os neutrinos interagem a luz do modelo padrão e alguns aspectos de modelos apresentando termos de massa para os neutrinos.

A lagrangeana do modelo padrão é construída de maneira a ser invariante sob transformações locais do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$; desta forma, os termos de corrente obtidos são totalmente compatíveis com o que observamos na natureza. Os campos descrevendo as componentes LH dos léptons e campos de quarks formando dubletos do grupo $SU(2)_L$ são

$$\Psi_{lL} = \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l_L \end{pmatrix}; l = e, \mu, \tau$$

$$\Psi_{1L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}; \Psi_{2L} = \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}; \Psi_{3L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

os campos d', s' e b' sendo determinados a partir dos campos de quarks d, s e b a partir da relação

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

onde C é a matriz de Kobayashi Maskawa. As componentes RH dos campos descrevendo léptons carregados e quarks são singletos com respeito a este grupo. A hipercarga fraca dos dubletos de férmions e singletos é escolhida de maneira a satisfazer a relação de Gell-Mann Nishijima

$$Q = T_3^W + \frac{Y}{2}$$

onde Q é a carga elétrica (em unidades de carga do próton) e T_3^W é a terceira componente de isospin fraco. Desta forma

$$Y_L^{lep} = -1; Y_L^{quark} = \frac{1}{3}; Y_R^{lep} = -2; Y_R^{quark} = 2eq$$

onde eq é a carga do quark.

A lagrangeana padrão pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\mathcal{H}} + \mathcal{L}_{\mathcal{V}} + \mathcal{L}_{int}$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{V}}$ correspondem às partes descrevendo os campos escalares, fermiônicos e vetoriais respectivamente e $\mathcal{L}_{int}$ as várias interações possíveis. Preocupando-se apenas com os termos da lagrangeana de interação envolvendo os léptons $\mathcal{L}(lep)$

$$\mathcal{L}(lep) = \sum_{l=e, \mu, \tau} \left\{ (\bar{\nu}_{lL}, l_L) i \partial_\mu \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l_L \end{pmatrix} + \bar{l}_R i \partial_\mu \gamma^\mu l_R - m(\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) \right\}$$

$$-i[g_w J_\mu^{ch} \cdot W^\mu + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu] \quad (3.2)$$

onde g_w e g' são as constantes de acoplamento fraco, J_μ^{ch} a corrente quiral dada por

$$J_\mu^{ch} = \sum_{l=e,\mu,\tau} \overline{\Psi}_{lL} \tau_i \gamma^\mu \Psi_{lL} + \sum_{i=1,2,3} \overline{\Psi}_{iL} \tau_i \gamma^\mu \Psi_{iL}$$

e J_μ^Y é a corrente de hipercarga fraca

$$J_\mu^Y = 2J_\mu^{em} - J_\mu^3 = \sum_{l=e,\mu,\tau} -2\overline{l}_R \gamma^\mu l_R - \overline{l}_L \gamma^\mu l_L - \overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L.$$

Queremos observar que os campos $W_{1,2,3}$ e B não representam partículas físicas, tais sendo descritas por combinações lineares dos mesmos, quais sejam

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \mp iW^2)$$

$$A^\mu = B^\mu \cos \theta_w + W_3^\mu \sin \theta_w$$

$$Z_\mu = -B^\mu \sin \theta_w + W_3^\mu \cos \theta_w,$$

onde θ_w é o ângulo de Weinberg que relaciona as constantes de acoplamento fraco e eletromagnético (g_e)

$$g_w \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = g_e$$

e na expressão (3.2)

$$\begin{aligned} J_\mu \cdot W^\mu &= J_\mu^1 W_1^\mu + J_\mu^2 W_2^\mu + J_\mu^3 W_3^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ W_+^\mu + J_\mu^- W_-^\mu) + J_\mu^3 W_3^\mu \end{aligned} \quad (3.3)$$

τ_i são as matrizes de Pauli e

$$\tau^\pm = \tau^1 \pm i\tau^2.$$

Explicitando um termo típico da parte carregada de $L_{VF}(lep)$

$$-i\frac{g_w}{2} W_\lambda^+ \sqrt{2}(\overline{\nu}_{lL} \gamma^\lambda l_L) - i\frac{g_w}{2} W_\lambda^- \sqrt{2}(\overline{l}_L \gamma^\lambda \nu_{lL})$$

o qual é o termo responsável pelos seguintes vértices básicos da teoria envolvendo léptons e bósons carregados (Fig. {3.1}).



Fig.{3.1}

Podemos ainda escrever a contribuição carregada na forma

$$-i\frac{g_w}{2\sqrt{2}}W_\lambda^+[\bar{\nu}_l\gamma^\lambda(1-\gamma^5)l - i\frac{g_w}{2\sqrt{2}}W_\lambda^-\bar{l}\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\nu_l$$

o que define o fator de vértice carregado V-A (vetorial-axial) puro

$$-i\frac{g_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\lambda(1-\gamma^5).$$

A contribuição neutra é

$$-ig_\omega J_\mu^3 W_3^\mu - i\frac{g'}{2}[\text{sen}\theta_\omega J_\mu^3 B^\mu]$$

ou, em termos dos campos A_μ e Z_μ

$$-i\{[g_\omega \text{sen}\theta_\omega J_\mu^3 + \frac{g' \cos\theta_\omega}{2}(2J_\mu^{em} - 2J_\mu^3)]A_\mu\}$$

$$-i\{[g_\omega \cos\theta_\omega J_\mu^3 - \frac{g' \text{sen}\theta_\omega}{2}(2J_\mu^{em} - 2J_\mu^3)]Z_\mu\}$$

de onde, utilizando-se as relações entre as constantes de acoplamento, a contribuição dependente de A_μ para alguma família leptônica resulta

$$-ig_e A_\mu (\bar{\Psi}_l Q \gamma^\mu \Psi_l)$$

responsável pelos vértices básicos da figura {3.2}

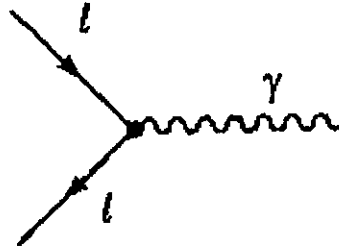


Fig.{3.2}

com o fator de vértice eletromagnético sendo dado por $-ig_e \gamma^\mu$.

Definindo-se $g_z = \frac{g_e}{\sin\theta_w \cos\theta_w}$, $\mathcal{L}_{int}(Z_\mu)$ para alguma família de lépton resulta

$$\mathcal{L}_{int}(Z_\mu) = -i\frac{g_z}{2} [\bar{\nu}_l \gamma^\mu (\frac{1-\gamma^5}{2}) \nu_l + \bar{l} (-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w + \frac{\gamma^5}{2}) l] \cdot Z_\mu \quad (3.4)$$

que gera vértices básicos da figura {3.3}, com os fatores de vértice para os neutrinos e léptons sendo dados por,

$-i\frac{g_z}{2} \gamma^\mu (\frac{1-\gamma^5}{2})$ e $-i\frac{g_z}{2} \gamma^\mu (-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w + \frac{\gamma^5}{2})$ respectivamente.

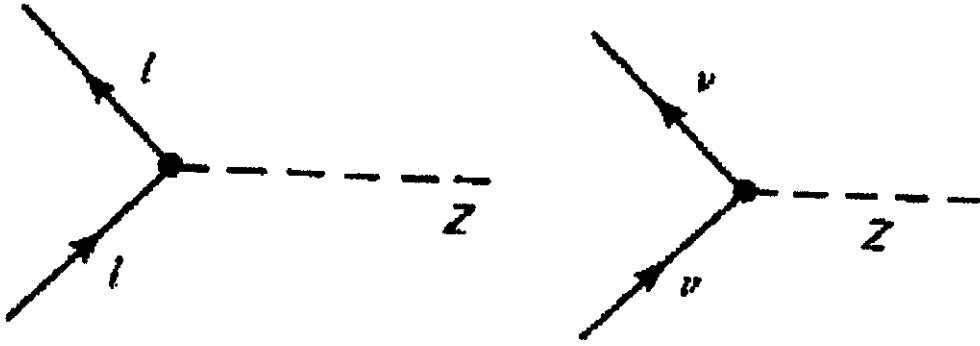


Fig.{3.3}

É comum apresentar-se os fatores de vértice dos férmions que acoplam-se na corrente neutra por

$$-i\frac{g_z}{2}\gamma^\mu(C_V^F - C_A^F\gamma^5)$$

os valores de C_V e C_A para os diversos férmions sendo apresentados na tabela 2 [17].

F	C_V	C_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2\text{sen}^2\theta_\omega$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$+\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\text{sen}^2\theta_\omega$	$+\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\text{sen}^2\theta_\omega$	$-\frac{1}{2}$

Tabela 2

No setor de quarks, a mistura ocasionada pela matriz de Kobaiashi Mas-
kawa (eq.3.1) implica na existência de vértices como os da figura {3.4},

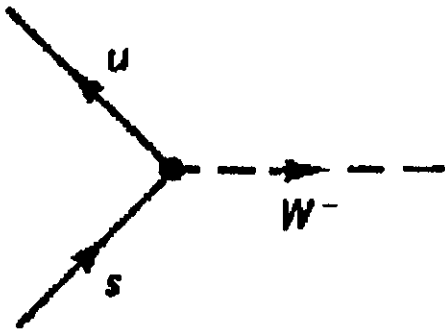


Fig.{3.4}

relacionados a processos como o decaimento do kaon conforme figura {3.5},

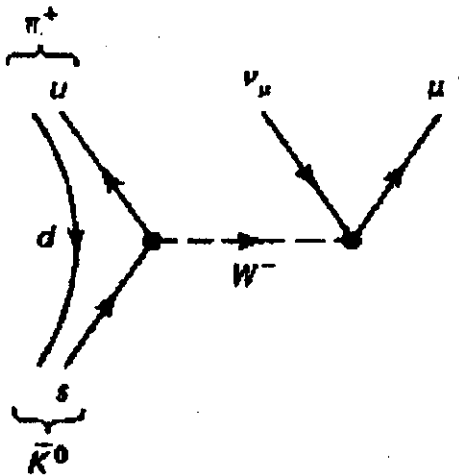


Fig.{3.5}

de forma que, diferentemente do que acontece no setor leptônico, existem vértices envolvendo quarks de diferentes famílias. Como veremos a seguir, modelos com neutrinos massivos podem introduzir na teoria a possibilidade da existência de uma matriz de mistura aos moldes da matriz de Kobayashi Maskawa para o setor leptônico. Resumindo, a luz do modelo padrão os neutrinos interagem fracamente com fatores de vértice V-A puro, tanto no setor carregado quanto no setor neutro. Os férmions carregados interagem no setor eletrofraco carregado apenas com suas componentes LH e suas componentes RH tomando parte somente no setor neutro.

3.2 Além do modelo padrão.

Existem modelos alternativos ao modelo padrão, os quais, conseguem dar conta das interações dos neutrinos com a matéria sem introduzir complicações neste setor, introduzindo porém a possibilidade de conversão entre sabores. Destacamos neste sentido, aqueles construídos, (analogamente ao modelo padrão), de maneira a procurar ser invariante por transformações do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Tais modelos, assim como outros mais sofisticados, implicam na possibilidade de introdução de termos de massa para os neutrinos na lagrangeana que descreve o setor leptônico por basicamente três caminhos alternativos.

1- Introdução na lagrangeana de um termo de massa do tipo Dirac. (Mak et al., (1962) [18]; Elieser e Ross, (1974) [19]; Bilenki e Pontecorvo, (1976) [20]; Fritzsche e Minkowski, (1976) [21]).

2- Introdução na lagrangeana de um termo de massa do tipo Majorana. (Gribov e Pontecorvo, (1969 [22]).

3- Introdução na lagrangeana de um termo de massa do tipo Dirac-Majorana. (Bilenki e Pontecorvo, (1976) [20]; Barger et al., (1980) [23]; Bilenky, Hosek, e Petcok, (1980) [24]; Kobzarev et al., (1980) [25]; Schechter e Valle, (1980) [26]).

Na presente secção analisaremos as consequências da introdução de tais termos, assim como, o comportamento dos mesmos se impomos sobre os modelos que os utilizam invariança CP. Queremos salientar que nossa opção por discussão sobre os termos de massa e não os modelos que os contém, dá-se pelo fato de que são eles os que determinam a forma da equação de evolução temporal de um sistema de neutrinos. Uma discussão mais geral

sobre modelos alternativos ao padrão pode ser encontrada por exemplo na referência [6]. Na referência [27], uma discussão detalhada dos possíveis termos de massa e seus comportamentos sob tranformações CP pode ser encontrada.

3.2.1 O TERMO DE MASSA DE DIRAC.

Consideremos uma pequena extensão ao modelo padrão, onde além dos campos já existentes no setor leptônico,

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

$$e_R; \mu_R \text{ e } \tau_R$$

introduzimos os singletos de SU(2)

$$\nu_{eR}; \nu_{\mu R} \text{ e } \nu_{\tau R}$$

de maneira que um termo de massa do tipo

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{l, l' = e, \mu, \tau} \overline{\nu_{l'R}} M_{ll'}^D \nu_{lL} + h.c. \quad (3.5)$$

possa ser construido. Com o auxilio da matrizes colunas

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}; \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}$$

tal termo pode ser escrito como

$$\mathcal{L}^D = - \overline{\nu_R} M^D \nu_L + h.c. \quad (3.6)$$

e é chamado termo de massa de Dirac.

Podemos reduzir o termo de massa de Dirac a forma padrão por diagonalização da matriz de massa M^D através de uma transformação biunitária

$$M^D = V m U^\dagger$$

onde V e U são matrizes unitárias e m uma matriz com elementos

$$m_{ik} = m_k \delta_{ik} ; m_k \geq 0.$$

Deste modo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^D &= -\bar{\nu}_R V m U^\dagger \nu_L + h.c. \\ &= -\bar{\nu}_R' m \nu_L' + h.c. \\ &= -\bar{\nu}' m \nu' \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\nu_L' = U^f \nu_L ; \nu_R' = V^f \nu_R$$

e

$$\nu' = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

ν_1, ν_2 e ν_3 descrevendo neutrinos com massa m_k . Da unitariedade de U tem-se que

$$\nu_{lL} = \sum_{k=1}^3 U_{lk} \nu_{kL} ; l = e, \mu, \tau. \quad (3.8)$$

Se o termo de massa para os neutrinos tem a forma eq.(3.5) os campos que descrevem os auto estados de sabor ν_{lL} presentes na corrente leptônica fraca padrão são combinações lineares das componentes LH de campos que descrevem neutrinos com definidas massas. U é a matriz de mistura e evidentemente os neutrinos descritos pelos campos ν_k são partículas de Dirac.

Invariança sob CP do termo de massa de Dirac.

Vejamos o que acontece se impomos invariança sob CP ao termo de massa de Dirac

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{a,b} \bar{\nu}_{aR}(x) M_{ab} \nu_{bL}(x) + h.c. \quad (3.9)$$

onde

$$h.c. = - \sum_{a,b} \bar{\nu}_{bL}(x) M_{ba}^* \nu_{aR}(x) = -\bar{\nu}_L M^{D\dagger} \nu_R.$$

Escrevendo $\mathcal{L}^D$ em termos dos campos CP transformados (para maiores detalhes ver apêndice A)

$$\begin{aligned}(\nu_{bL})^C(-x) &= i\gamma^2\gamma^0 P_L \nu_b^*(x) \\ \overline{(\nu_{aR})^c}(-x) &= i\nu_a^T(x) P_R \gamma^0\gamma^2\gamma^0\end{aligned}$$

de maneira que

$$(\overline{\nu_{aR}}(x) M_{ab} \nu_{bL}(x))^{CP} = -\nu_a^T(x) P_R \gamma^0\gamma^2\gamma^0 M_{ab} \gamma^2\gamma^0 P_L \nu_b^*(x). \quad (3.10)$$

Lembrando-nos que, para uma matriz Γ (4×4) genérica e dois spinores representando campos fermiônicos

$$\begin{aligned}\Psi^T \Gamma \Psi' &= \sum_{\alpha, \beta} \Psi_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} \Psi'_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \Psi'_\beta \Gamma_{\alpha\beta} \Psi_\alpha \\ &= -\Psi'^T \Gamma^T \Psi\end{aligned} \quad (3.11)$$

onde o sinal negativo advém da troca na ordenação dos campos fermiônicos, podemos escrever

$$(\overline{\nu_{aR}}(x) M_{ab} \nu_{bL}(x))^{CP} = \overline{\nu_{bL}}(x) M_{ab} \nu_{aR}(x)$$

de maneira que

$$\mathcal{L}'^D = - \sum_{a,b} \overline{\nu_{bL}}(x) M_{ab} \nu_{aR}(x) + h.c. \quad (3.12)$$

ou

$$\mathcal{L}'^D = -\overline{\nu}_L(x) M^{DT} \nu_R(x) + h.c..$$

Se impomos invariança CP

$$-\overline{\nu}_L(x) M^{DT} \nu_R(x) = -\overline{\nu}_L(x) M^{D\dagger} \nu_R(x)$$

de maneira que

$$(M^D)^T = (M^D)^\dagger.$$

Desta forma, se a teoria é invariante sob CP, a matriz de massa é real. Uma matriz real pode ser diagonalizada via uma transformação biortogonal

$$M = O' m O^T.$$

Se adicionalmente M for simétrica,

$$M = O m O^T,$$

uma vez que toda matriz real simétrica pode ser diagonalizada via uma transformação ortogonal.

Em princípio, existem fatores de fase associados as transformações CP. Se estes são levados em conta, invariança sob CP implica em que a matriz de mistura tem a forma

$$U_{lk} = e^{i\alpha_l} O_{lk} e^{-i\alpha_k} e^{i\alpha'}$$

onde O é uma matriz ortogonal. No apêndice (A) demonstramos que tais fatores de fase podem ser desprezados.

3.2.2 O termo de massa de Majorana.

Seja a densidade lagrangeana, onde além dos espinores básicos da teoria padrão, incluímos os campos conjugados de carga $(\nu_L)^c$ definidos pela relação

$$(\nu_L)^c = C \gamma^0 \nu_L^*$$

onde C é a matriz de conjugação de carga a qual obedece às relações

$$C \gamma_\alpha^T C^{-1} = -\gamma_\alpha; C^T C = 1; C^T = -C$$

de maneira que um termo de massa do tipo

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \overline{(\nu_L)^c} M^M \nu_L + h.c. \quad (3.13)$$

pode ser construído, tal termo é chamado de termo de massa de Majorana. Com um pouco de algebra é fácil mostrar que

$$\overline{(\nu_L)^c} = -\nu_L^T C^{-1}; \overline{(\nu_R)^c} = -\nu_R^T C^{-1}$$

$$\overline{(\nu_L)^c} M^M \nu_L = \overline{(\nu_L)^c} (M^M)^T \nu_L$$

o que implica em que

$$(M^M)^T = M^M$$

desta forma, para que um termo de massa de Majorana possa ser construído, necessitamos que a matriz de massa seja simétrica. Uma matriz complexa simétrica pode ser sempre escrita na forma

$$M = (U^f)^T m U^\dagger$$

onde m , é a matriz de elementos $m_{ik} = m_k \delta_{ik}$; $m_k \geq 0$ e $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$. Substituindo M em (3.13) o termo de massa de Majorana pode ser escrito como

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum \overline{(n_L)^c} m n_L - \frac{1}{2} \overline{n_L} m (n_L)^c \quad (3.14)$$

onde

$$n_L = U^\dagger \nu_L; (n_L)^c = C \overline{n_L}^T,$$

ou ainda em termos dos campos definidos por $\chi = n_L + (n_L)^c$

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \overline{\chi} m \chi = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k \overline{\chi_k} \chi_k. \quad (3.15)$$

Desta forma

$$\nu_L = U \chi_L$$

e as componentes LH existentes na corrente eletrofraca padrão são combinações lineares de componentes LH de campos de partículas com massas definidas m_k . Os campos descrevendo estas partículas são tais que

$$\chi_k(x) = C \overline{\chi_k}^T(x)$$

de maneira que as partículas por eles descritas são partículas de Majorana.

Invariança sob CP do termo de massa de Majorana.

Vejamos o que acontece se impomos invariança CP ao termo de massa de Majorana com a suposição de que os campos ν_{lL} existentes na corrente fraca transformem-se sob CP como as componentes LH de campos de Dirac. Escrevendo

$$(\mathcal{L}^M)' = (\mathcal{L}^M)^c$$

onde

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \nu_L^T C^{-1} M^M \nu_L - \frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^\dagger \bar{\nu}_L^T \quad (3.16)$$

em termos dos campos CP transformados

$$\begin{aligned} (\nu_L)^c &= i\gamma^2 \nu_L^* \\ ((\nu_L)^c)^c &= \nu_L \\ (\mathcal{L}^M)' &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^M C \bar{\nu}_L^T + h.c \end{aligned} \quad (3.17)$$

de maneira que

$$M^M = (M^M)^\dagger.$$

Levando-se em conta que $M = M^T$, se a teoria é invariante sob CP, a matriz de massa é real. Desta forma, se invariança CP é imposta sobre a densidade lagrangeana com termo de massa de Majorana para os neutrinos, a matriz de mistura que conecta auto-estados de sabor com auto-estados de massa é a principio uma matriz ortogonal O . Queremos salientar que embora O diagonalize a matriz de massa simétrica e real M , não podemos garantir que os elementos da matriz diagonal são todos não negativos, no entanto, se supomos a existência de uma entrada negativa $(OMO^T)_{ii}$ a matriz $U = KO$ onde K é uma matriz diagonal de elementos $K_{ii} = i$; $K_{jj} = 1$; $j \neq i$ é tal que UMU^T é diagonal com elementos não negativos.

3.2.3 O termo de massa de Dirac-Majorana.

No caso de termos de massa de Dirac-Majorana, (para detalhes ver referência [27]), pode-se mostrar, que para que tal termo possa ser construído, deve-se ter:

$$M = M^T$$

de modo que a matriz de mistura é uma matriz unitária. As partículas descritas neste caso são partículas de Majorana.

3.2.4 Considerações gerais.

Para modelos que apresentam termos de massa de Dirac com matriz de massa simétrica, de Majorana, ou de Dirac-Majorana, a matriz de mistura é uma

matriz unitária U . Uma matriz 3×3 unitária U é totalmente determinada pelo conhecimento de quatro parâmetros, três ângulos e uma fase. Nos cálculos que efetuaremos nos próximos capítulos utilizaremos para U a forma

$$U = e^{i\psi\Lambda_7}\Gamma e^{i\phi\Lambda_5}e^{i\omega\Lambda_2} \quad (3.18)$$

onde $\Lambda_{2,5,7}$ são matrizes de Gell-Mann,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}$$

onde delta é um parâmetro que caracteriza quebra de simetria CP, esta parametrização sendo equivalente a outras como a de Maiani [28] ou a parametrização canônica [29]. Se a teoria é invariante sob CP envolvendo termos de massa de Dirac ou de Majorana,

$$O = e^{i\psi\Lambda_7}e^{i\phi\Lambda_5}e^{i\omega\Lambda_2}$$

é a matriz de mistura, onde fizemos aqui a suposição de que a matriz diagonal

$$m = m_k\delta_{ik} = OMO^T$$

tem elementos maiores ou iguais a zero.

Capítulo 4

Oscilações de neutrinos.

4.1 Oscilações de neutrinos.

Existe uma série de trabalhos sobre oscilações de neutrinos no contexto da existência de dois sabores, no vácuo, e na matéria, principalmente após a derivação por L. Wolfenstein [30], S.P. Mikheyev e A. Yu Smirnov [31] de que efeitos de matéria (MSW), podem aumentar consideravelmente as possibilidades de transição entre sabores de neutrinos ou entre neutrinos e antineutrinos. Duas importantes revisões sobre o tema são apresentadas por Palash B. Pal [32] e A. Yu. Smirnov [33].

Neste capítulo apresentaremos somente alguns resultados que entendemos como importantes no que diz respeito a oscilações no contexto da existência de dois sabores de neutrinos, no vácuo, e na matéria em regime adiabático, sem derivar explicitamente estes resultados uma vez que os mesmos encontram-se na literatura e podem ser obtidos diretamente do formalismo mais geral (evolução do sistema no contexto da existência de três sabores de neutrinos), o qual desenvolveremos explicitamente.

No que diz respeito a transições em regime não adiabático, a probabilidade de transição entre auto estados de energia $P(\nu_1, \nu_2)$ é tradicionalmente calculada na aproximação de Landau-Zener [34], Nas referências [35] e [36] uma nova maneira de calcular-se amplitudes de transição em regime não adiabático é apresentada por utilização do método dos operadores exponenciais ordenados de Feynman [37] e do método da fase estacionária [38]. Desta maneira reproduziremos tais resultados explicitamente, uma vez que boa

parte deles serão de utilidade no cálculo mais geral (oscilações no contexto da existência de três sabores de neutrinos). Na referência [39] S.T. Petcov apresenta uma solução analítica para a equação de evolução temporal no contexto da existência de dois sabores de neutrinos, sob a influência de uma densidade de matéria com variação exponencial. Tais resultados no entanto, não apresentam alguma utilidade no que diz respeito à procura de soluções envolvendo tres sabores de neutrinos, dada a complexidade apresentada pelas expressões para as amplitudes de transição, (expressões em termos de funções hipergeométricas confluentes).

Nos cálculos efetuados neste capítulo utilizaremos a matriz de mistura unitária U de maneira que estamos com isto abrangendo os casos de matrizes de massa simétricas de Dirac e Majorana discutidos no capítulo anterior.

4.2 Oscilações de neutrinos no contexto da existência de dois sabores de neutrinos.

A equação de evolução temporal para um sistema envolvendo dois sabores de neutrinos ν_e e ν_μ na presença da matéria [40], tratados como neutrinos de Schrödinger, na aproximação relativística

$$E_\nu = |p| + \frac{m_\nu^2}{2|p|}$$

pode ser escrita como

$$i \frac{d}{dt} \nu_f(t) = \frac{1}{2E} \left\{ U \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} U^{-1} + \hat{A} \right\} \nu_f(t) \quad (4.1)$$

onde

$$\nu_f(t) = \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix}$$

U é a matriz

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

θ é o ângulo de mistura tal que

$$\nu_f(t) = U \nu_p(t); \nu_l(t) = \sum_{i=1,2} U_{li} \nu_i, l = e, \mu,$$

e

$$\nu_p(t) = \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}$$

ν_1 e ν_2 representando partículas de massas definidas $m_{1,2}$. $\hat{A}$ é a matriz devida a interação com a matéria

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$, obtida por computar-se para $L_{efet.}$ os diagramas correspondentes aos processos de espalhamento elástico (ν_l, e) ver apêndice (B). G_F é a constante de Fermi e N_e a densidade de elétrons na matéria. Queremos observar que existe um termo diagonal relativo à corrente neutra a ser computado para ambas as componentes de neutrinos igualmente, de maneira que pode ser desprezado uma vez que não interfere nas probabilidades de transição.

Com as definições anteriores podemos escrever (4.1) como

$$i \frac{d}{dt} \nu_f(t) = \tilde{H} \nu_f(t) \quad (4.2)$$

onde

$$\tilde{H} = \frac{1}{4E} \left\{ (\Sigma + A) + \begin{pmatrix} A - \Delta \cos 2\theta & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta - A \end{pmatrix} \right\} \quad (4.3)$$

com

$$\Sigma = m_1^2 + m_2^2; \quad \Delta = m_2^2 - m_1^2.$$

4.2.1 Soluções no vácuo e à densidade de matéria constante.

A solução da equação (4.1) no caso da densidade de matéria constante é trivial e resulta para as amplitudes de probabilidade de encontrar-se o sistema num estado eletrônico ou muônico a partir de um estado inicial eletrônico

$$\nu_f(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu_e(t) = e^{-i(\frac{\Sigma+A}{4E})t} \left\{ \cos\left(\frac{\bar{\omega}t}{4E}\right) - i \frac{(A - \Delta \cos 2\theta)}{\bar{\omega}} \text{sen} \frac{\bar{\omega}t}{4E} \right\} \quad (4.4)$$

$$\nu_\mu(t) = -i e^{-i(\frac{\Sigma+A}{4E})t} \frac{\Delta \text{sen} 2\theta}{\bar{\omega}} \text{sen} \frac{\bar{\omega}t}{4E} \quad (4.5)$$

onde

$$\bar{\omega} = \sqrt{\Delta^2 + A^2 - 2A\Delta \cos 2\theta}.$$

Os autovalores para as massas quadráticas efetivas na matéria $\tilde{m}_i^2$ (autovalores da hamiltoniana (4.3)) podem ser obtidos facilmente e resultam

$$\tilde{m}_1^2 = \frac{\Sigma + A}{4E} - \frac{1}{4E} \sqrt{\Delta^2 + A^2 - 2A\Delta \cos 2\theta} \quad (4.6)$$

$$\tilde{m}_2^2 = \frac{\Sigma + A}{4E} + \frac{1}{4E} \sqrt{\Delta^2 + A^2 - 2A\Delta \cos 2\theta} \quad (4.7)$$

assim como a expressão para o ângulo de mistura efetivo na presença da matéria

$$\text{sen}^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \text{sen}^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \text{sen}^2 2\theta}, \quad (4.8)$$

ficando evidente na expressão (4.8) que para $A_R = \Delta \cos 2\theta$ o ângulo de mistura $\tilde{\theta}$ toma o valor $\frac{\pi}{4}$ o que representa a situação de mistura máxima entre as duas componentes de sabor. Tal situação é chamada de ressonante e corresponde ao caso em que a diferença entre as massas efetivas quadráticas toma o seu menor valor como pode ser observado nas figuras {4.1} e {4.2}.

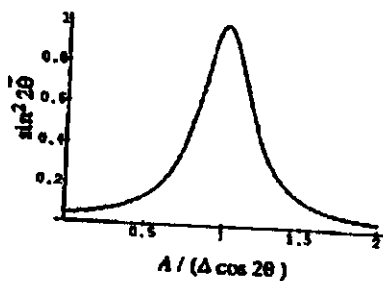


Fig.{4.1} : $\sin 2\tilde{\theta} \times \frac{A}{\Delta \cos 2\theta}$.
 figura adaptada da referência [32].

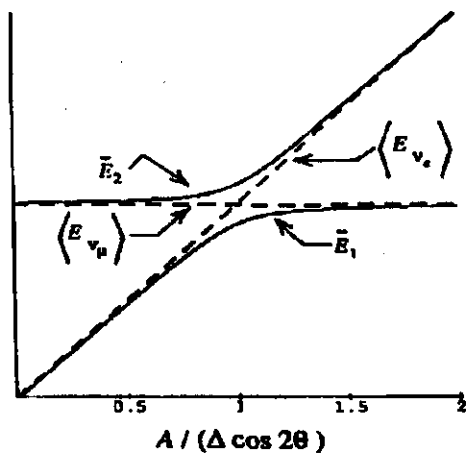


Fig.{4.2} : Energia efetiva $(\tilde{E}_i = \frac{\tilde{m}_i^2}{2E} + E) \times \frac{A}{\cos 2\theta}$.
 figura adaptada da referência [32].

A solução no vácuo pode ser obtida facilmente a partir da solução anterior por fazer-se $A = 0$ e resulta

$$\nu_e(t) = e^{-i\left(\frac{\Sigma}{4E}\right)t} \left\{ \cos\left(\frac{\Delta t}{4E}\right) + i \cos 2\theta \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta t}{4E}\right) \right\} \quad (4.9)$$

$$\nu_\mu(t) = -i e^{-i\left(\frac{\Sigma}{4E}\right)t} \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta t}{4E}\right) \quad (4.10)$$

as massas quadráticas efetivas e expressões para ângulo de mistura retomando seus valores no vácuo. Ressaltamos aqui a diferença entre a frequência angular da amplitude no vácuo $\frac{\Delta}{4E}$, com a frequência angular na matéria $\bar{\omega}$ demonstrando a importância de levar-se em conta o chamado efeito MSW.

4.2.2 Oscilações em regime adiabático.

Na matéria o sistema pode evoluir de duas maneiras tratadas de formas distintas. Em regime adiabático, quando o "potencial" varia lentamente e não ocorrem transições entre os auto estados ν_1 e ν_2 , e em regime não adiabático quando transições entre ν_1 e ν_2 podem ocorrer (caso que trataremos na secção seguinte). No primeiro caso a solução pode ser tratada por utilização do teorema adiabático [41], o qual determina que a evolução do sistema depende essencialmente dos estados inicial e final, de maneira que a amplitude de permanência de um sistema criado como neutrino eletrônico no mesmo estado é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\nu_e, \nu_e) &= \langle \nu_e(x') | \nu_e(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \nu_e(x') | \nu_i(x') \rangle \langle \nu_i(x') | \nu_i(x) \rangle \langle \nu_i(x) | \nu_e(x) \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

de maneira que a probabilidade de permanência $P^{ad}(\nu_e, \nu_e)$ resulta em

$$P^{ad}(\nu_e, \nu_e) = \left| e^{i \int dx' \tilde{E}_1(x')} \cos \tilde{\theta} \cos \theta + e^{i \int dx' \tilde{E}_2(x')} \operatorname{sen} \tilde{\theta} \operatorname{sen} \theta \right|^2 \quad (4.12)$$

a qual, desprezando-se termos oscilantes [42], resulta em

$$P^{ad}(\nu_e, \nu_e) = \cos^2 \tilde{\theta} \cos^2 \theta + \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \theta. \quad (4.13)$$

Queremos ressaltar que Petcov na referência [42], faz uma análise detalhada dos termos oscilantes envolvidos nas probabilidades de troca ou permanência entre sabores, concluindo que tais termos podem ser desprezados em todas as situações práticas.

A questão da adiabaticidade ou não do regime de evolução do sistema é determinada pelo parâmetro de adiabaticidade γ , ver por exemplo referências [32] e [43]

$$\gamma(x) = \frac{(\Delta/E)^2 \sin^2 \theta}{2\sqrt{2}G_F \sin^3 \tilde{\theta}} \frac{1}{\left| \frac{dN_s}{dx} \right|} \quad (4.14)$$

e é definido impondo-se que o ângulo de mistura na matéria não varie muito fortemente

$$\left| \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \right| \ll \left| \frac{\tilde{m}_1^2 - \tilde{m}_2^2}{2E} \right|.$$

Quando γ for muito maior que um o sistema evolui em regime adiabático, em caso contrário, transições entre auto estados ν_1 e ν_2 passam a ser importantes.

4.2.3 Oscilações em regime não adiabático.

Em regime de ressonância, situações não adiabáticas, (γ pequeno), podem ocorrer. Neste caso, transições entre auto estados ν_1 e ν_2 modificam a probabilidade de permanência de um neutrino criado como eletrônico atravessando uma região adiabática e uma região não adiabática, a qual é dada por [32]

$$P(\nu_e, \nu_e) = (1 - x)P^{ad}(\nu_e, \nu_e) + xP^{ad}(\nu_e, \nu_\mu) \quad (4.15)$$

onde x é a probabilidade de transição entre auto estados ν_1 e ν_2 . A probabilidade de transição entre auto estados ν_1 e ν_2 , (ver por exemplo referências [32] e [43]), pode ser calculada pelo método de Landau Zener [34] e resulta

$$x = e^{\left[-\frac{E_{NA}}{E} \right]} \quad (4.16)$$

onde

$$E_{NA} = \frac{\pi \Delta \sin^2 2\theta}{4 \cos 2\theta} L_0; \quad \frac{1}{L_0} = \left| \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dL} \right|_{L=L_R}$$

E é a energia do neutrino e ρ a densidade de matéria.

Na referência [36] uma nova maneira de calcular a probabilidade x é introduzida, a qual passamos a apresentar.

Seja a equação de evolução (4.1) escrita com o auxílio das matrizes de Pauli $\sigma_{1,2,3}$

$$i \frac{d}{dt} \nu_f(t) = \frac{1}{2E} \{a_0 \mathbf{1} + a_1(\sigma_+ + \sigma_-) + a_3 \sigma_3\} \nu_f(t) \quad (4.17)$$

com

$$\sigma_{+-} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$$

e

$$a_1 = \frac{\Delta s 2\theta}{4E}; \quad a_3 = \frac{A - \Delta c 2\theta}{4E}; \quad a_0 = \frac{\Sigma + A}{4E}.$$

Definindo um novo spinor

$$\nu'_f(t) = e^{i \int_0^t (a_0 \mathbf{1} + a_3 \sigma_3) dt_1} \nu_f(t)$$

podemos escrever (4.17) como

$$i \frac{d}{dt} \nu'_f(t) = e^{i \int^t (a_0 \mathbf{1} + a_3 \sigma_3) dt_1} a_1(\sigma_+ + \sigma_-) e^{-i \int^t (a_0 \mathbf{1} + a_3 \sigma_3) dt_1} \nu'_f(t). \quad (4.18)$$

Calculando-se as quantidades

$$e^{i \int^t (a_0 \mathbf{1} + a_3 \sigma_3) dt_1} \sigma_{+-} e^{-i \int^t (a_0 \mathbf{1} + a_3 \sigma_3) dt_1}$$

utilizando-se a relação de Backer-Hausdorff e as relações de comutação entre as matrizes sigma (vide apêndice A)

$$e^{i \int^t a_3 \sigma_3 dt_1} \sigma_+ e^{-i \int^t a_3 \sigma_3 dt_1} = e^{i \int^t 2a_3 dt_1} \sigma_+ = \varphi \sigma_+$$

$$e^{i \int^t a_3 \sigma_3 dt_1} \sigma_- e^{-i \int^t a_3 \sigma_3 dt_1} = e^{-i \int^t 2a_3 dt_1} \sigma_- = \varphi^* \sigma_-$$

(4.18) pode ser escrita como

$$i \frac{d}{dt} \nu'_f(t) = a_1(\varphi \sigma_+ + \varphi^* \sigma_-) \nu'_f(t) \quad (4.19)$$

ou em termos de suas componentes

$$\frac{d}{dt}\nu'_1(t) = -ia_1\varphi\nu'_2(t) \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt}\nu'_2(t) = -ia_1\varphi^*\nu'_1(t). \quad (4.21)$$

A equação (4.19) tem como solução

$$\nu'(t) = G(t, t_0)\nu'(t_0)$$

onde

$$G(t, t_0) = \text{Exp}\left[-i \int_{t_0}^t \Lambda(t_1) dt_1\right] \quad (4.22)$$

e o símbolo Exp significa um expansional definido como a soma de integrais múltiplas ordenadas temporalmente [37] e [44]

$$G(t, t_0) = \mathbf{1} - i \int_{t_0}^t \Lambda(t_1) dt_1 + i^2 \int_{t_0}^t \Lambda(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t_2) dt_2 + \dots \quad (4.23)$$

com

$$\Lambda(t) = a_1(\varphi\sigma_+ + \varphi^*\sigma_-). \quad (4.24)$$

Substituindo-se (4.23) em (4.22) e utilizando-se as regras de produto entre matrizes sigma

$$G(t, t_0) = \mathbf{1} + \Sigma^+\sigma_+ + \Sigma^-\sigma_- + \Sigma^{+-}\sigma_+\sigma_- + \Sigma^{-+}\sigma_-\sigma_+ \quad (4.25)$$

onde

$$\Sigma^+ = -i \int_{t_0}^t a_1\varphi_1 dt_1 + i \int_{t_0}^t a_1\varphi_1 dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1\varphi_1^* dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1\varphi_1 dt_3 - \dots \quad (4.26)$$

$$\Sigma^- = -i \int_{t_0}^t a_1\varphi_1^* dt_1 + i \int_{t_0}^t a_1\varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1\varphi_1 dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1\varphi_1^* dt_3 - \dots \quad (4.27)$$

$$\Sigma^{-+} = - \int_{t_0}^t a_1\varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1\varphi_1 dt_2 + \int_{t_0}^t a_1\varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1\varphi_1 dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1\varphi_1^* dt_3 \int_{t_0}^{t_3} a_1\varphi_1 dt_4 - \dots \quad (4.28)$$

$$\Sigma^{+-} = 1 - \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1 dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1^* dt_2 + \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1 dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1^* dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1 dt_3 \int_{t_0}^{t_3} a_1 \varphi_1^* dt_4 - \dots \quad (4.29)$$

Seja agora o caso em que $A = 2\sqrt{2}G_F N_{e\odot} E$ onde a densidade eletrônica corresponde à densidade eletrônica solar, a qual assumimos seja uma distribuição decrescendo exponencialmente ao longo da trajetória do neutrino [8],[45]

$$\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_{e\odot} = \alpha e^{-\beta t} \quad (4.30)$$

onde

$$\alpha = 1.25 \times 10^{-11} eV; \quad \beta = 3.13 \times 10^{-15} eV$$

e $t = 0$ correspondendo a um ponto no centro do Sol. Em regime de ressonância, quando $A = \Delta \cos 2\theta$, o expansional $G(t, t_0)$ envolve integrais do tipo

$$I = \int_{t_0}^t a_1 e^{i\rho(t_1)} dt_1$$

com

$$\rho(t) = \int \frac{(\Delta \cos 2\theta - A)}{2E} dt_1$$

as quais, dada a distribuição de matéria (4.30) são tais que o integrando oscila muito rapidamente, a maior contribuição para o valor da integral ficando por conta dos pontos em torno de uma fase estacionária [38], determinada pela condição

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{t=t_R} = 0$$

o que nos leva a que nossa fase estacionária corresponde à condição ressonante. O cálculo das séries existentes em $G(t, t_0)$ pode então ser efetuado pelo método da fase estacionária, (vide apêndice B), e resulta

$$\Sigma^+ = -i \frac{2\xi}{1 + \xi^2} e^{-i[\rho(t_R) + \frac{\pi}{4}]} = \mathcal{A}_R(\nu_\mu, \nu_e) \quad (4.31)$$

$$\Sigma^- = -i \frac{2\xi}{1 + \xi^2} e^{i[\rho(t_R) + \frac{\pi}{4}]} = \mathcal{A}_R(\nu_e, \nu_\mu) \quad (4.32)$$

$$1 + \Sigma^{-+} = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} = \mathcal{A}_R(\nu_e, \nu_e) \quad (4.33)$$

$$1 + \Sigma^{+-} = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} = \mathcal{A}_R(\nu_\mu, \nu_\mu) \quad (4.34)$$

onde

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left| \frac{d^2 \rho}{dt^2} \right|_{t=t_R}^{-1} \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta} \quad (4.35)$$

restritas à condição $\xi^2 < 1$. Queremos observar que

$$\xi^2 = \frac{\pi}{16} \gamma \quad (4.36)$$

de maneira que situações em que $\xi^2 > 1$ correspondem a γ muito maior do que 1, caso em que a aproximação adiabática pode ser utilizada.

Definindo os instantes t_+ e t_- como os instantes imediatamente posterior e imediatamente anterior a ressonância, a amplitude de probabilidade de transição entre auto estados de matéria pode ser calculada

$$\begin{aligned} \langle \nu_2(t_+) | \nu_1(t_-) \rangle = & \mathcal{A}_R(\nu_e, \nu_e) s \tilde{\theta}(t_+) c \tilde{\theta}(t_-) - \mathcal{A}_R(\nu_\mu, \nu_e) s \tilde{\theta}(t_+) s \tilde{\theta}(t_-) \\ & + \mathcal{A}_R(\nu_e, \nu_\mu) c \tilde{\theta}(t_+) c \tilde{\theta}(t_-) - \mathcal{A}_R(\nu_\mu, \nu_\mu) c \tilde{\theta}(t_+) s \tilde{\theta}(t_-) \end{aligned} \quad (4.37)$$

de maneira que a probabilidade de transição entre auto estados de matéria resulta

$$\begin{aligned} x = & \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 s^2 [\tilde{\theta}(t_+) - \tilde{\theta}(t_-)] + \\ & \frac{2\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \{ c^2 [\tilde{\theta}(t_+) - \tilde{\theta}(t_-)] + c^2 [\tilde{\theta}(t_+) + \tilde{\theta}(t_-)] \} \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde os termos oscilantes foram desprezados.

Considerando $\tilde{\theta}(t_+) = \theta$; $\tilde{\theta}(t_-) = \frac{\pi}{2}$ na figura{4.3} uma comparação entre os resultados obtidos para x via uma extensão da aproximação de Landau Zener [51] e pelo método da fase estacionária é efetuada.

Desta forma, no contexto da existência de dois sabores de neutrinos, a expressão para x (4.38) juntamente com a expressão para o ângulo de mistura na matéria (4.8) nos fornecem a probabilidade de sobrevivência para um neutrino criado como eletrônico (4.15). Parte destes resultados serão utilizados no caso mais geral (existência de três sabores de neutrino).

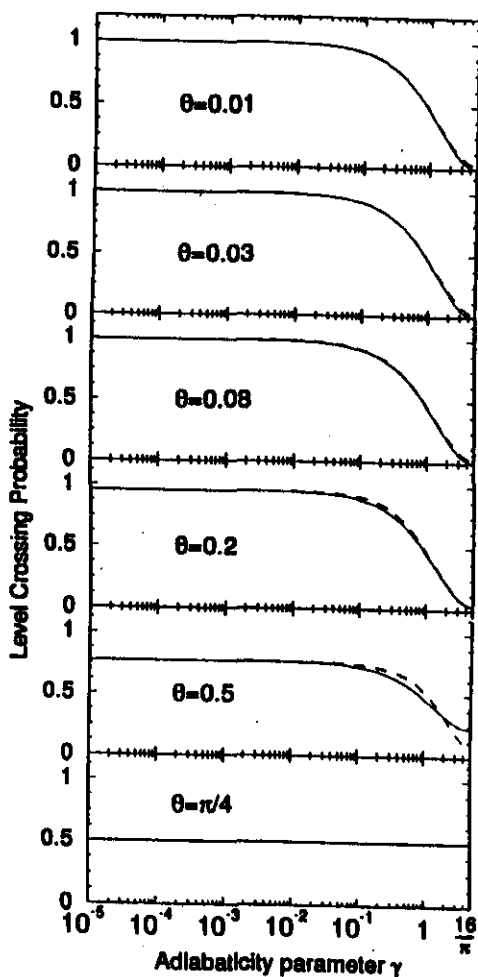


Fig. {4.3}

Fig.{4.3}: Comparação de nossa expressão para a probabilidade de transição entre auto estados de energia (x) eq.{4.38} (linha sólida), com a usualmente aceita expressão para a mesma quantidade, (extensão baseada na eq.(4.16) [51]), (linha pontilhada), em função do parâmetro de adiabaticidade γ , para vários valores do ângulo de mistura no vácuo θ e para $\xi^2 = \frac{\pi}{16}\gamma < 1$. Nós assumimos variação exponencial para a densidade de matéria eq.(4.30) e tomamos $\tilde{\theta}(t_+) = \theta$ e $\tilde{\theta}(t_-) = \frac{\pi}{2}$.

Capítulo 5

Oscilações entre três sabores de neutrinos à densidade de matéria constante.

A equação de evolução para um sistema neutrínico no contexto da existência de três sabores tem sido analisada por alguns autores. Barger et al., na referência [46], apresentam uma solução aproximada para o sistema evoluindo a densidade de matéria constante. T.K. Kuo e James Pantaleone, na referência [43], apresentam solução para a equação diferencial com densidade de matéria variável em torno de regiões ressonantes por utilização do método de Landau- Zener, nesta referência, expressões aproximadas para os ângulos de mistura são obtidas.

No presente capítulo, apresentamos a solução para a equação de evolução temporal no contexto da existência de três sabores de neutrinos no vácuo (a solução é trivial neste caso), uma solução analítica exata para a equação de evolução sob a influência da matéria à densidade constante é também apresentada. As expressões corretas para os ângulos de mistura na presença da matéria são obtidas e o caso da evolução no contexto da existência de dois sabores é derivado como caso particular do formalismo mais geral, (existência de três sabores de neutrinos). Finalmente, uma análise dos resultados obtidos no capítulo é apresentada.

Queremos observar que no presente capítulo estaremos assumindo a notação :

$$C\phi = \cos \phi; \quad S\phi = \sin \phi$$

com expressões equivalentes para os ângulos de mistura ω e ψ . Definimos as quantidades: $\Delta = m_2^2 - m_1^2$; $\Sigma = m_2^2 + m_1^2$; $\Delta_1 = m_2^2 + m_1^2 - 2m_3^2$; e $\Lambda = \Sigma - \Delta C 2\omega$, como forma de simplificar as expressões envolvidas nos cálculos. Adicionalmente, estaremos trabalhando com a suposição de que $m_3^2 > m_2^2 > m_1^2$.

5.1 A equação de evolução temporal.

A equação de evolução para um sistema neutrínico na aproximação relativística (eq. 4.1) pode ser generalizada para o caso da existência de três sabores [40] e resulta em

$$i \frac{d}{dt} \nu_f(t) = \frac{1}{2E} \{ U M^2 U^{-1} + A \} \nu_f(t) \quad (5.1)$$

onde U é a matriz de mistura

$$U = e^{i\psi\Lambda_7} e^{i\phi\Lambda_5} e^{i\omega\Lambda_2}$$

ou, de forma mais explícita

$$U = \begin{pmatrix} C\phi C\omega & C\phi S\omega & S\phi \\ -C\psi S\omega - S\psi S\phi C\omega & C\psi C\omega - S\phi S\psi S\omega & S\psi C\phi \\ S\psi S\omega - C\psi S\phi C\omega & -S\psi C\omega - C\psi S\phi S\omega & C\psi C\phi \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

onde, a partir de (3.18) assumimos invariança sob transformações CP; E é a energia do sistema; A é a matriz (3×3) de interação com a matéria cujos elementos são: $A_{11} = 2\sqrt{2}G_F N_e E$ e todos os outros elementos iguais a zero; M^2 é a matriz

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

e a quantidade $\nu_f(t)$ é dada por

$$\nu_f(t) = \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

de maneira que $\nu_f(t) = U\nu_p(t)$ onde $\nu_p(t)$ representa os auto estados de energia do sistema

$$\nu_p(t) = \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

5.2 Soluções da equação de evolução temporal.

5.2.1 O caso do vácuo.

A equação de evolução temporal para o sistema no vácuo ($A = 0$), escrita como

$$i\frac{d}{dt}\nu_f(t) = \frac{1}{2E} \{UM^2U^{-1}\} \nu_f(t), \quad (5.6)$$

tem como solução

$$\nu_f(t) = G(t, t_0)\nu_f(t_0) \quad (5.7)$$

onde $G(t, t_0)$ é dado por

$$G(t, t_0) = Ue^{[-\frac{i}{2E}M^2(t-t_0)]}U^{-1}. \quad (5.8)$$

Expandindo M^2 em termos das matrizes de Gell-Mann T_i , (vide apêndice B), $G(t, t_0)$ resulta

$$G(t, t_0) = Ue^{-\frac{i}{2E}[A_0(0)1 + A_3(0)T_3 + A_8(0)T_8](t-t_0)}U^{-1}. \quad (5.9)$$

Utilizando-se o fato de que $[T_3, T_8] = 0$, e considerando-se os resultados das aplicações das exponenciais $e^{iA_{3,8}(0)(t-t_0)T_{3,8}}$ sobre os spinores bases

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

a solução (5.7) para a equação diferencial, sujeita à condição

$$\nu_f(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

que define um estado inicial eletrônico resulta em

$$\nu_e(t) = C^2 \omega C^2 \phi e^{-i \frac{m_1^2}{2E} t} + S^2 \omega C^2 \phi e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} + S^2 \phi e^{-i \frac{m_3^2}{2E} t} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \nu_\mu(t) = & C\psi S\omega C\omega C\phi [e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} - e^{-i \frac{m_1^2}{2E} t}] + \\ & S\psi [C\phi S\phi (e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} - S^2 \omega e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} - C^2 \omega e^{-i \frac{m_1^2}{2E} t})] \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \nu_\tau(t) = & -S\psi S\omega C\omega C\phi [e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} - e^{-i \frac{m_1^2}{2E} t}] + \\ & C\psi [C\phi S\phi (e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} - S^2 \omega e^{-i \frac{m_2^2}{2E} t} - C^2 \omega e^{-i \frac{m_1^2}{2E} t})]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.2.2 O caso da densidade de matéria constante.

Seja a equação de evolução temporal (5.1) com $A = \text{constante}$, escrita como

$$i \frac{d}{dt} \nu_f(t) = H^o \nu_f(t) \quad (5.15)$$

onde H^o é dado por

$$H^o = \frac{1}{2E} \{ U M^2 U^{-1} + A \}.$$

Note-se que a matriz A é invariante por uma rotação $e^{-i\psi\Lambda_7}$. Pode-se assim definir um novo spinor $\Phi(t)$ por

$$\Phi(t) = e^{-i\psi\Lambda_7} \nu_f(t)$$

a equação (5.15) em termos do spinor $\Phi(t)$ torna-se

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = -iH \Phi(t) \quad (5.16)$$

onde H é dado por

$$H = \frac{1}{2E} [e^{i\phi\Lambda_5} e^{i\omega\Lambda_2} M^2 e^{-i\phi\Lambda_5} e^{-i\omega\Lambda_2} + A].$$

Observe-se que a hamiltoniana H admite os mesmos auto valores que a hamiltoniana H^0 .

A equação (5.16) no caso em que H é independente de t pode ser resolvida efetuando-se uma transformação de Laplace [52]. Seja $f(p) = L[\Phi(t)]$ então

$$pf(p) - \Phi(t_0) = -iHf(p) \quad (5.17)$$

e

$$\Phi(t) = L^{-1}[(p1 + iH)^{-1}]\Phi(t_0).$$

A solução $\Phi(t)$ pode ser expressa em função dos elementos da matriz H e das raízes λ_i ($i = 1, 2, 3$) de seu polinômio característico [47]

$$\det[p1 + iH] = 0, \quad (5.18)$$

as quais são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + A}{6E} - \frac{1}{E}\sqrt{\frac{-Q}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} \quad (5.19)$$

$$\lambda_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + A}{6E} + \frac{1}{2E}\sqrt{\frac{-Q}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2E}\sqrt{-Q} \sin \frac{\alpha}{3} \quad (5.20)$$

$$\lambda_3 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + A}{6E} + \frac{1}{2E}\sqrt{\frac{-Q}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2E}\sqrt{-Q} \sin \frac{\alpha}{3}, \quad (5.21)$$

onde

$$Q = \frac{-1}{(2E)^2} \left\{ \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta_1^2}{12} + \frac{A^2}{3} - \frac{A\Delta C^2 \phi C 2\omega}{2} + \frac{\Delta_1 A (C^2 \phi - 2S^2 \phi)}{6} \right\},$$

$$\begin{aligned} R = & \frac{-1}{27(2E)^3} \left\{ \frac{\Delta_1^3}{4} - 2A^3 - \frac{9\Delta_1 \Delta^2}{4} + \frac{3\Delta_1^2 A (C^2 \phi - 2S^2 \phi)}{4} \right\} + \\ & \frac{-1}{27(2E)^3} \left\{ \frac{9}{2} A^2 \Delta C^2 \phi C 2\omega - \frac{9}{4} A \Delta^2 (C^2 \phi - 2S^2 \phi) \right\} + \\ & \frac{-1}{27(2E)^3} \left\{ -\frac{3}{2} \Delta_1 A^2 (C^2 \phi - 2S^2 \phi) + \frac{9}{2} \Delta_1 A \Delta C^2 \phi C 2\omega \right\}, \end{aligned}$$

e

$$\cos \alpha = \frac{-R}{2\sqrt{\frac{-Q^3}{27}}}.$$

No caso do vácuo, o polinômio característico do sistema pode ser fatorado, as raízes λ_i neste caso resultam em

$$\lambda_1^v = \frac{m_3^2}{2E}; \lambda_2^v = \frac{m_1^2}{2E}; \text{ e } \lambda_3^v = \frac{m_2^2}{2E}. \quad (5.22)$$

Dada a arbitrariedade na escolha das raízes, (auto valores das massas quadráticas efetivas na matéria),utilizamo-nos dos limites no vácuo para ordená-las. Assim

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{m}_3^2}{2E}; \lambda_2 = \frac{\tilde{m}_1^2}{2E}; \text{ e } \lambda_3 = \frac{\tilde{m}_2^2}{2E}.$$

Finalmente, a solução da equação (5.15) em termos de uma matriz de transição T é dada por

$$\nu_f(t) = e^{i\psi\Lambda_7} T e^{-i\psi\Lambda_7} \nu_f(t_0) \quad (5.23)$$

onde os elementos da matriz T , dados em termos das raízes λ_i e dos elementos de H são os seguintes:

i)elementos diagonais

$$T_{ii} = \sum_{n=1}^3 C_n [(\lambda_n - H_{jj})(\lambda_n - H_{kk}) - H_{jk}^2] e^{-i\lambda_n t} \quad (5.24)$$

ii)elementos não diagonais ($T_{ij}=T_{ji}$)

$$T_{ij} = \sum_{n=1}^3 C_n [H_{ij}(\lambda_n - H_{kk}) - H_{ik}H_{jk}] e^{-i\lambda_n t} \quad (5.25)$$

onde

$$C_n = [(\lambda_n - \lambda_l)(\lambda_n - \lambda_m)]^{-1}$$

com $n \neq m \neq l$ e $n, m, l = (1, 2, 3)$.

Note-se que, se as raízes (5.22) são introduzidas em (5.24) e(5.25), (o caso do vácuo), a expressão (5.23) fornece os resultados (5.12),(5.13) e(5.14) para um estado inicial tomado como eletrônico.

Note-se ainda que se $\phi = \psi = 0$, (caso em que o polinômio pode ser fatorado), as raízes λ_i são

$$\lambda_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + A}{4E} - \frac{1}{4E} \sqrt{\Delta^2 + A^2 - 2A\Delta C 2\omega}$$

$$\lambda_3 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + A}{4E} + \frac{1}{4E} \sqrt{\Delta^2 + A^2 - 2A\Delta C 2\omega}$$

$$\lambda_1 = \frac{m_3^2}{2E}$$

de maneira que, a partir de um estado inicial eletrônico

$$\nu_f(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

os conhecidos resultados no contexto da existência de dois sabores de neutrinos são recuperados.

De uma maneira geral, a partir de um estado inicial eletrônico, podemos escrever $\nu_f(t)$ como:

$$\nu_f(t) = \begin{pmatrix} T_{11} \\ C\psi T_{21} + S\psi T_{31} \\ -S\psi T_{21} + C\psi T_{31} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

note-se que os elementos desse spinor definem as amplitudes de transição de um estado inicial eletrônico para estados finais eletrônicos, muônicos e tauônicos, respectivamente, tanto para transições no vácuo, como na matéria.

Na seção 3 apresentaremos alguns resultados obtidos para as probabilidades de transição $P(\nu_e, \nu_e)$, $P(\nu_e, \nu_\mu)$ e $P(\nu_e, \nu_\tau)$ obtidos a partir desta expressão.

5.3 Os ângulos de mistura na matéria.

As soluções da equação (5.15) na matéria constante podem ser escritas em termos de três ângulos de mistura em analogia com as soluções no vácuo, uma vez que a matriz de transição na equação (5.23) é simétrica.

Assim

$$\nu_f(t) = \tilde{U} e^{-i \frac{\tilde{M}^2}{2E} t} \tilde{U}^{-1} \nu_f(t_0)$$

onde $\tilde{U}$ é a matriz de mistura na matéria, generalização de (5.2), substituindo-se os ângulos de mistura no vácuo por seus valores correspondentes na matéria. A solução para a equação de evolução temporal à densidade de matéria constante pode ser escrita, a menos de um fator de fase que depende da energia do neutrino como:

$$\nu_e(t) = C^2 \tilde{\omega} C^2 \tilde{\phi} e^{-i \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} t} + S^2 \tilde{\omega} C^2 \tilde{\phi} e^{-i \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} t} + S^2 \tilde{\phi} e^{-i \frac{\tilde{m}_3^2}{2E} t} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \nu_\mu(t) = & -[C\tilde{\psi}S\tilde{\omega} + S\tilde{\psi}C\tilde{\omega}S\tilde{\phi}]C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}e^{-i \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} t} + \\ & [C\tilde{\psi}C\tilde{\omega} - S\tilde{\phi}S\tilde{\psi}S\tilde{\omega}]C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}e^{-i \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} t} + S\tilde{\psi}C\tilde{\phi}S\tilde{\phi}e^{-i \frac{\tilde{m}_3^2}{2E} t} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \nu_\tau(t) = & C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}[S\tilde{\psi}S\tilde{\omega} - C\tilde{\psi}C\tilde{\omega}S\tilde{\phi}]e^{-i \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} t} - \\ & C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}[S\tilde{\psi}C\tilde{\omega} + C\tilde{\psi}S\tilde{\phi}S\tilde{\omega}]e^{-i \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} t} + C\tilde{\psi}C\tilde{\phi}S\tilde{\phi}e^{-i \frac{\tilde{m}_3^2}{2E} t}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para obtermos as expressões para os ângulos de mistura na matéria basta agora comparar tais expressões com a solução obtida anteriormente (5.26), de maneira que, após alguma álgebra obtemos:

$$S^2 \tilde{\phi} = \frac{\lambda_1^2 - (H_{22} + H_{33})\lambda_1 + H_{22}H_{33} - H_{23}^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \quad (5.30)$$

$$tg^2 \tilde{\omega} = \frac{\lambda_3^2 - (H_{22} + H_{33})\lambda_3 + H_{22}H_{33} - H_{23}^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2^2 - (H_{22} + H_{33})\lambda_2 + H_{22}H_{33} - H_{23}^2(\lambda_3 - \lambda_1)} \quad (5.31)$$

$$tg \tilde{\psi} = \frac{(H_{12}\lambda_1 + H_{13}H_{23} - H_{12}H_{33})C\psi + (H_{13}\lambda_1 + H_{12}H_{23} - H_{22}H_{13})S\psi}{(H_{13}\lambda_1 + H_{12}H_{23} - H_{22}H_{13})C\psi - S\psi(H_{12}\lambda_1 + H_{13}H_{23} - H_{12}H_{33})}, \quad (5.32)$$

tais expressões reproduzem os valores corretos nos limites do vácuo ($A = 0$) e no contexto da existência de somente dois sabores de neutrinos ($\phi = \psi = 0$).

Na figura {5.1} o comportamento das massas quadráticas efetivas e dos ângulos de mistura $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\omega}$ na matéria são apresentados em função do parâmetro A . Os parâmetros físicos do sistema no vácuo neste caso são [43]:

$$\begin{aligned} m_3^2 &= 5m_2^2 = 25m_1^2 \\ S^2\phi &= 5 \times 10^{-4} \\ S^2\omega C^2\phi &= 5 \times 10^{-2}, \end{aligned}$$

fixados para mostrar o comportamento destas quantidades com a variação do parâmetro A . As massas quadráticas efetivas e a quantidade A são apresentadas em unidades de m_1^2 .

Na figura {5.2}, o comportamento dos ângulos de mistura $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\omega}$ na matéria são apresentados em função do parâmetro A num intervalo maior de variação deste parâmetro, de maneira a melhor explicitarmos o comportamento destes ângulos para grandes valores de A .

Para os parâmetros físicos no vácuo analisados por Barger et al. [46]

$$\begin{aligned} S^2\phi &= .383^2 \\ S^2\omega C^2\phi &= .663356^2 \\ \Delta m_{31}^2 &= .9eV^2, \end{aligned}$$

onde Δm_{31}^2 é escolhido por indicações de reatores [47],[48], $S^2\phi$ e $S^2\omega C^2\phi$ são escolhidos a partir de considerações sobre dados de reatores e possíveis soluções ao problema do neutrino solar [49], apresentamos as probabilidades de sobrevivência $P(\nu_e, \nu_e)$ em função da energia no vácuo figura {5.3}, e as probabilidades de troca e sobrevivência $P(\nu_e, \nu_\mu)$, $P(\nu_e, \nu_\tau)$ e $P(\nu_e, \nu_e)$ para uma densidade eletrônica constante $N_e = 2 \frac{N_A}{cm^3}$ ($N_A = 6 \times 10^{23}$), figuras {5.4} e {5.5}. Nestes diagramas consideramos o neutrino criado como eletrônico em t_0 e as probabilidades são calculadas após o neutrino percorrer a distância de $5 \times 10^6 m$. Dois valores da diferença de massa quadrática Δm_{21}^2 são assumidos ($.05eV^2$ e $10^{-4}eV^2$).

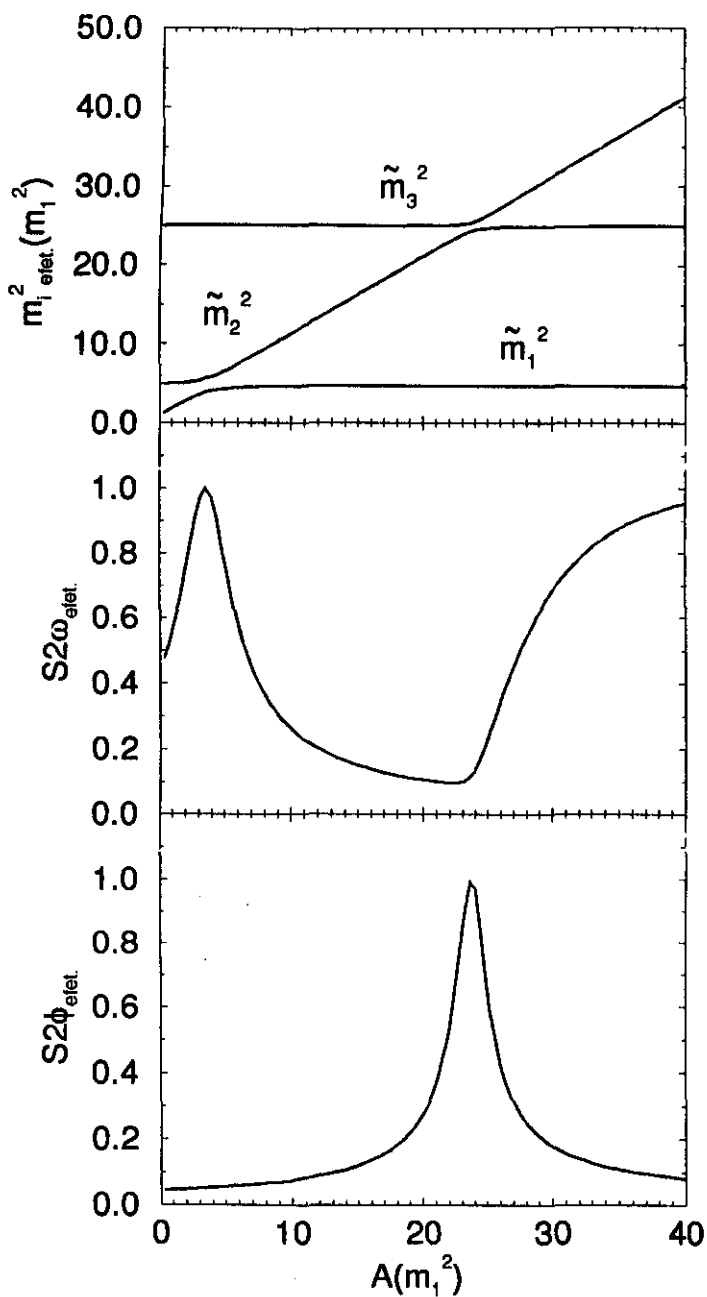
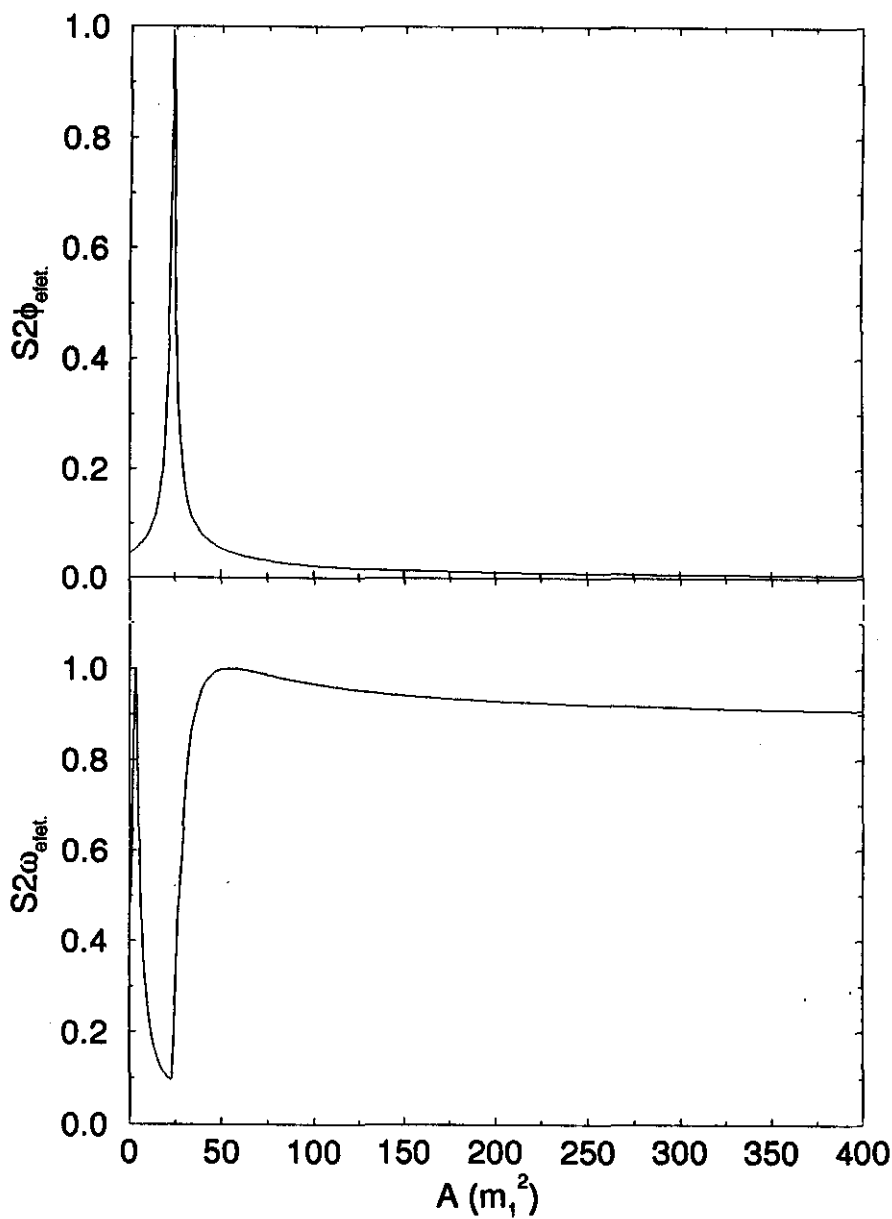
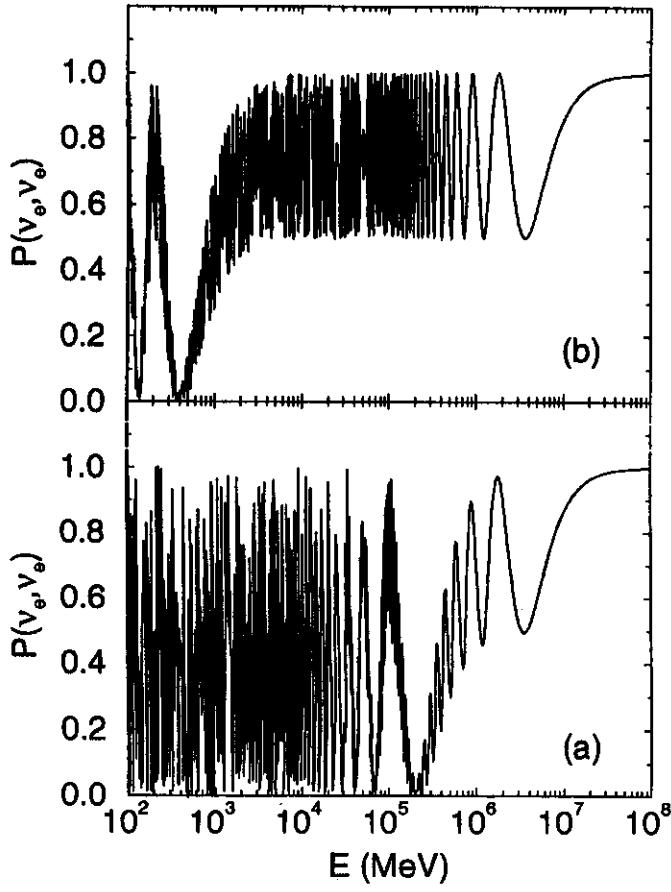


Fig.{5.1}; $\tilde{m}_i^2 \times A$; $S2\tilde{\phi} \times A$; $S2\tilde{\omega} \times A$.
 $\tilde{m}_i^2$ e A em unidades de $\tilde{m}_1^2$.



Fig{5.2} : $S2\tilde{\omega} \times A; S2\tilde{\phi} \times A$
 A em unidades de m_1^2 .



*Fig. {5.3} : $P(\nu_e, \nu_e) \times E$; (a) $\Delta m_{21}^2 = .05 eV^2$;
(b) $\Delta m_{21}^2 = .10^{-4} eV^2$.*

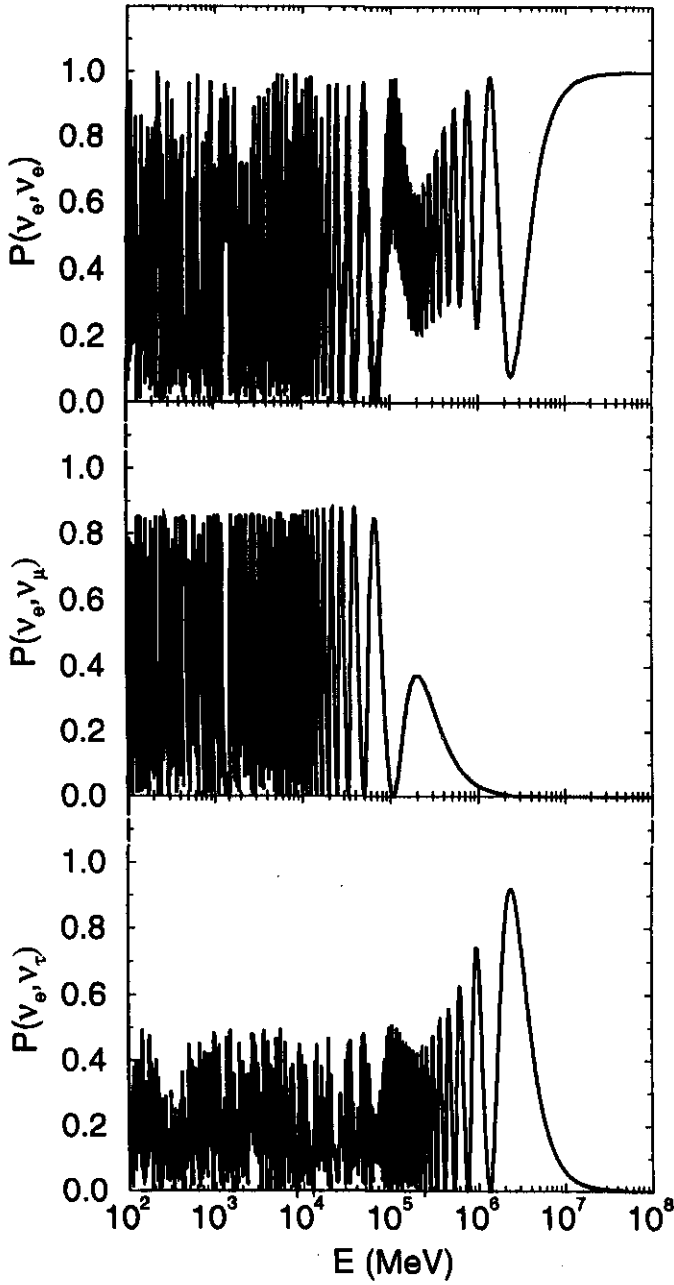


Fig.{5.4} : $P(\nu_e, \nu_l) \times E$; $l = e, \mu, \tau$.

$$\Delta m_{21}^2 = .05 eV^2$$

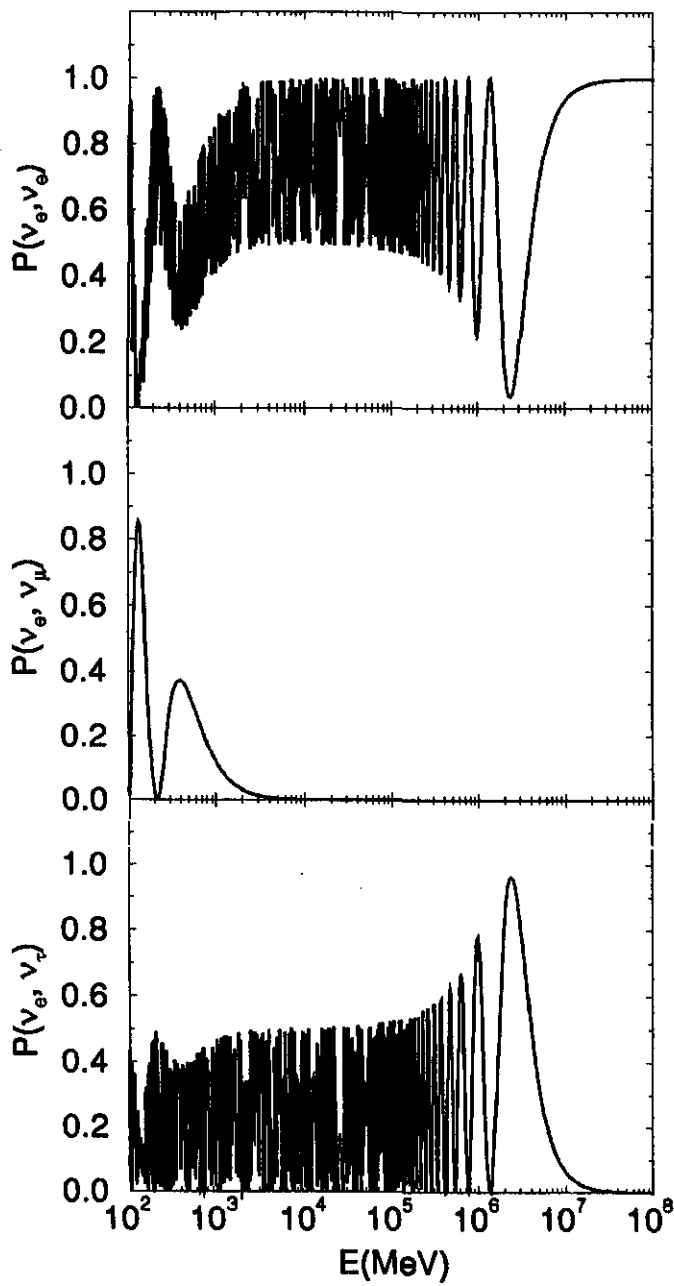


Fig. {5.5} : $P(\nu_e, \nu_l) \times E$; $l = e, \mu, \tau$.

$$\Delta m_{21}^2 = 10^{-4} eV^2$$

5.4 Análise dos resultados

Na figura {5.1} observamos claramente que as situações ressonantes 1 e 2 determinadas pelos valores mínimos das diferenças de massa quadrática efetivas $\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2$ e $\tilde{m}_3^2 - \tilde{m}_1^2$ ocorrem para os valores máximos das quantidades $S2\tilde{\omega}$ e $S2\tilde{\phi}$ respectivamente, e o ângulo de mistura efetivo $\tilde{\omega}$ é tal que $S2\tilde{\omega}$ apresenta um mínimo quando $S2\tilde{\phi}$ é máximo.

As condições ressonantes aqui apresentadas como sendo determinadas pelos valores máximos das quantidades $S2\tilde{\phi}$ e $S2\tilde{\omega}$, podem alternativamente ser obtidas observando-se que a componente eletrônica na matéria escrita em termos dos auto estados de energia é dada por

$$\nu_e(t) = C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}\nu_1(t) + C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}\nu_2(t) + S\tilde{\phi}\nu_3(t).$$

Na ressonância 1 a componente eletrônica apresenta uma mistura máxima dos auto estados ν_1 e ν_2 , os coeficientes associados a estes auto estados devem ser iguais nesta situação, desta forma

$$C\tilde{\phi}C\tilde{\omega} = C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}$$

o que reflete o resultado $S2\tilde{\omega} = 1$ na situação ressonante 1.

Na ressonância 2, a mistura máxima entre auto estados ν_2 e ν_3 nos leva a que:

$$C\tilde{\phi}S\tilde{\omega} = S\tilde{\phi},$$

o que, diferentemente do que se pode obter via cálculos aproximados [43] (nesta referência $(tg\tilde{\phi}) = 1$) determina o valor para $tg\tilde{\phi} = S\tilde{\omega}$ neste ponto.

Na figura {5.2} podemos observar que $S2\tilde{\phi}$ assume um valor um pouco abaixo de 1 no ponto de ressonância 2, diferentemente do que acontece com o $S2\tilde{\omega}$ na ressonância 1.

Observe-se ainda o comportamento diferenciado de $S2\tilde{\omega}$ na matéria, fig {5.2} quando comparado ao comportamento de $S2\tilde{\theta}$ fig. {4.1}, a existência de um mínimo para $S2\tilde{\omega}$ no ponto de ressonância 2 apresentando-se como um resultado novo e não esperado.

As figuras {5.3}, {5.4} e {5.5} apresentam as probabilidades de permanência e troca entre sabores a partir de um estado inicial eletrônico, para os parâmetros do sistema analisados por Barger et al., no vácuo, fig. {5.3} e na matéria, figuras {5.4} e {5.5}. Diferentemente dos resultados obtidos por eles na matéria, nossos resultados podem ser obtidos quaisquer que sejam os

parâmetros físicos do sistema no vácuo. Uma análise mais clara de possíveis diferenças entre os dois resultados não pode ser efetuada devido à inexistência naquela referência dos limites de validade associados às soluções por eles obtidas.

Capítulo 6

Evolução temporal à densidade variável.

Diferentemente do que acontece no contexto da existência de dois sabores de neutrinos, a evolução do sistema sob ação de uma densidade de matéria variável não pode ser resolvida pura e simplesmente por algum método aproximativo, como o método de Landau-Zener ou o método da fase estacionária. O que acontece no contexto da existência de três sabores de neutrinos é que a possibilidade de existência, "a princípio", de duas condições propícias para ressonância, pode, dependendo dos parâmetros físicos do sistema no vácuo, sobrepor as regiões de ressonância. Neste caso, nem uma condição clara de ressonância nem de fase estacionária podem ser bem definidas.

Nos casos em que as regiões de ressonância apresentam-se bem separadas, no que diz respeito a energia do neutrino, análises através de um ou outro método podem ser realizadas. Acreditamos que pelo menos no que diz respeito a estes dois métodos tais situações devem ser analisadas caso a caso.

No presente capítulo analisaremos a evolução do sistema cujos parâmetros físicos são aqueles analisados por Kuo e Pantaleone [43], evoluindo a densidade de matéria por nós assumida para o Sol (eq. 4.30), com estes dados, como veremos a seguir, as regiões ressonantes aparecem bem separadas.

6.1 Oscilações entre três sabores de neutrinos à densidade de matéria variável.

Seja um sistema de neutrinos cujo valores dos parâmetros físicos no vácuo são aqueles analisados por Kuo e Pantaleone [43]:

$$S^2\phi = 5 \times 10^{-4}$$

$$S^2\omega = .050025$$

$$m_1^2 = 0$$

$$m_2^2 = 10^{-8}eV^2$$

$$m_3^2 = 1.44 \times 10^{-4}eV^2.$$

Vamos analisar a questão da evolução temporal para tal sistema no que diz respeito a condições ressonantes supondo o centro do Sol como ponto de criação de neutrinos com energia variando entre $10^{-5}MeV$ e 10^5MeV . Tomando como base estes parâmetros e a densidade de matéria por nós assumida para o Sol (eq. 4.30), podemos fazer uma análise do comportamento das massas quadráticas efetivas em função da energia no intervalo de variação de interesse. Na figura {6.1} apresentamos o comportamento de $\tilde{m}_i^2 \times E$. Na figura {6.2} a diferença entre as massas quadráticas $\Delta\tilde{m}_{21}^2$ e as quantidades $C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}$ e $C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}$ em função de E são apresentadas. Note-se que o ponto de intersecção das curvas $C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}$ e $C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}$ coincide com o ponto em que $\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2$ é mínima, nesse ponto ocorre a máxima mistura entre os estados ν_1 e ν_2 , determinando-se assim o primeiro ponto de ressonância. Na figura {6.3} apresentamos a diferença entre as massas quadráticas $\Delta\tilde{m}_{32}^2$ e as quantidades $C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}$ e $S\tilde{\phi}$ em função de E . Note-se que o ponto de intersecção das curvas $C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}$ e $S\tilde{\phi}$ coincide com o ponto em que $\tilde{m}_3^2 - \tilde{m}_2^2$ é mínima, nesse ponto ocorre a máxima mistura entre os estados ν_2 e ν_3 , determinando-se assim o segundo ponto de ressonância. Os valores das massas quadráticas e diferenças entre massas quadráticas efetivas são dados em unidades de m_2^2 .

Como podemos observar nestes diagramas, as duas possibilidades de ressonância apresentam-se bem separadas no que diz respeito a energia dos neutrinos, o que nos possibilita, a princípio, resolver a equação de evolução pelo método da fase estacionária. Adicionalmente, para neutrinos criados no centro do Sol com energia entre $10^{-5}MeV$ e 10^5MeV , três possibilidades para a evolução dos neutrinos se apresentam:

1. Neutrinos com energia $E < 177eV$, os quais evoluem no Sol sem atravessar nenhuma região ressonante (evolução em regime adiabático).

2. Neutrinos com energia $177\text{eV} \leq E \leq 3.16 \times 10^6\text{eV}$, os quais evoluem no Sol atravessando a primeira região ressonante.
3. Neutrinos com energia $E > 3.16 \times 10^6\text{eV}$, os quais evoluem no Sol atravessando duas regiões ressonantes.

Desta forma, nas seções posteriores apresentaremos as soluções para a equação de evolução temporal para neutrinos pertencentes as três classes descritas anteriormente, a questão da adiabaticidade ou não do regime nos casos 2 e 3 será analisada posteriormente.

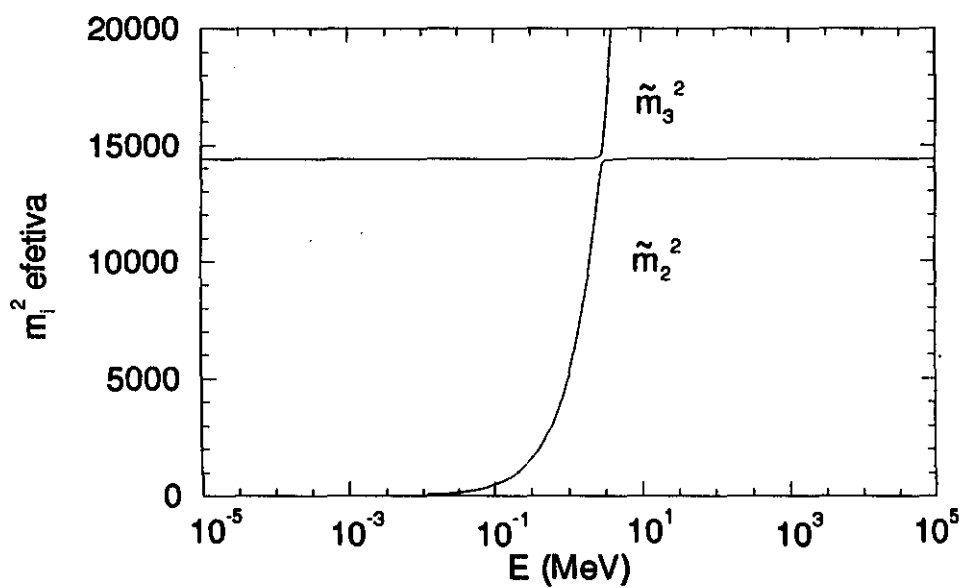
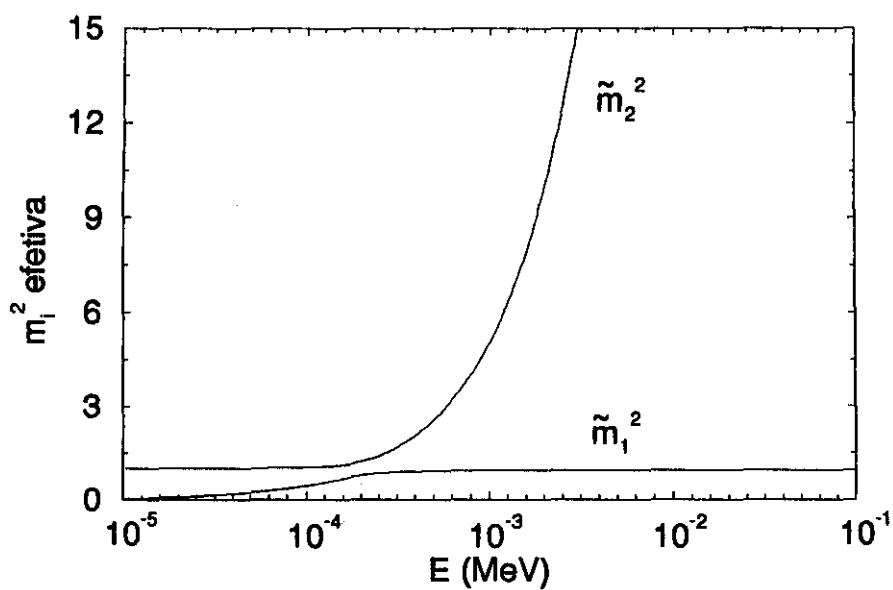


Fig. {6.1}- $\tilde{m}_i^2 \times E(\text{MeV})$

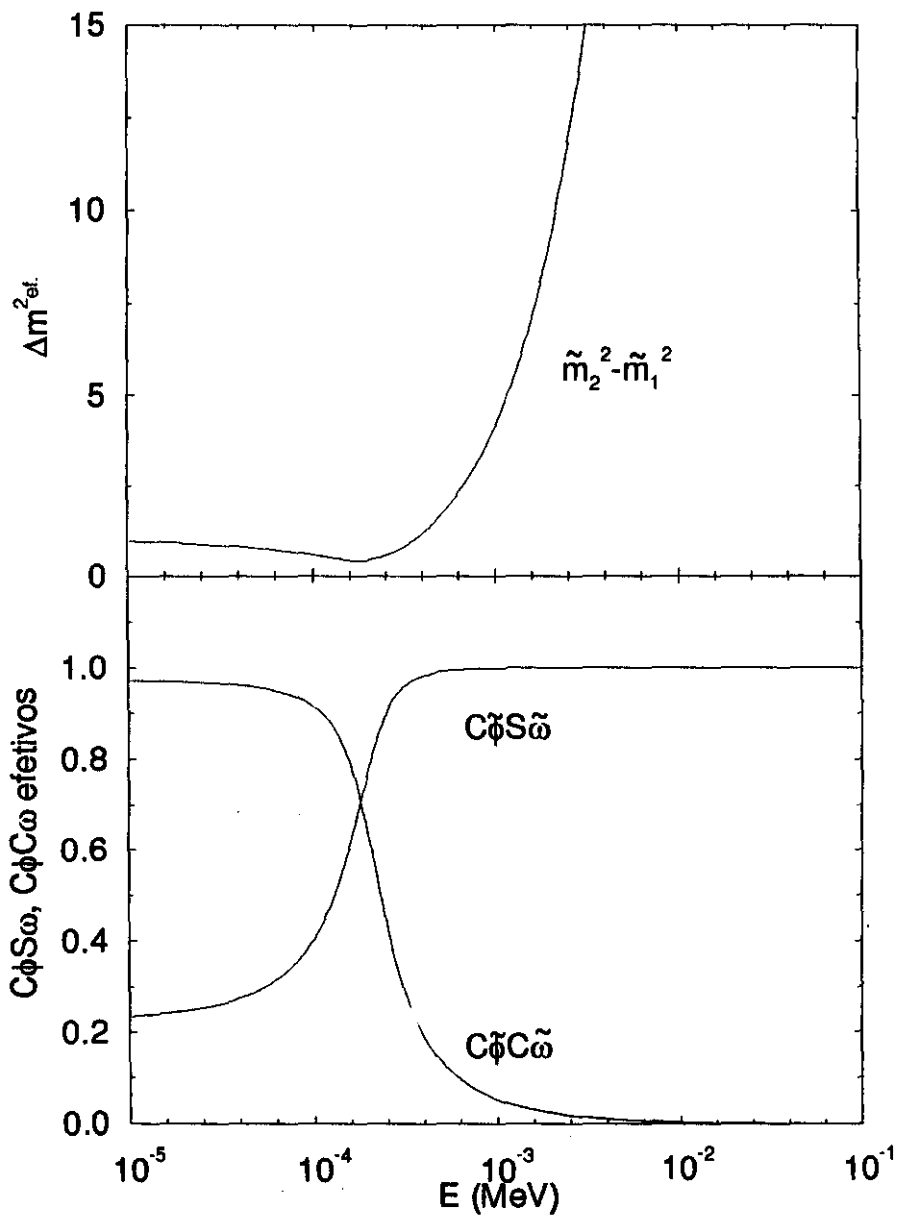


Fig. {6.2}- $\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2(m_2^2)$; $C\phi C\omega$; $C\phi S\omega \times E(\text{MeV})$

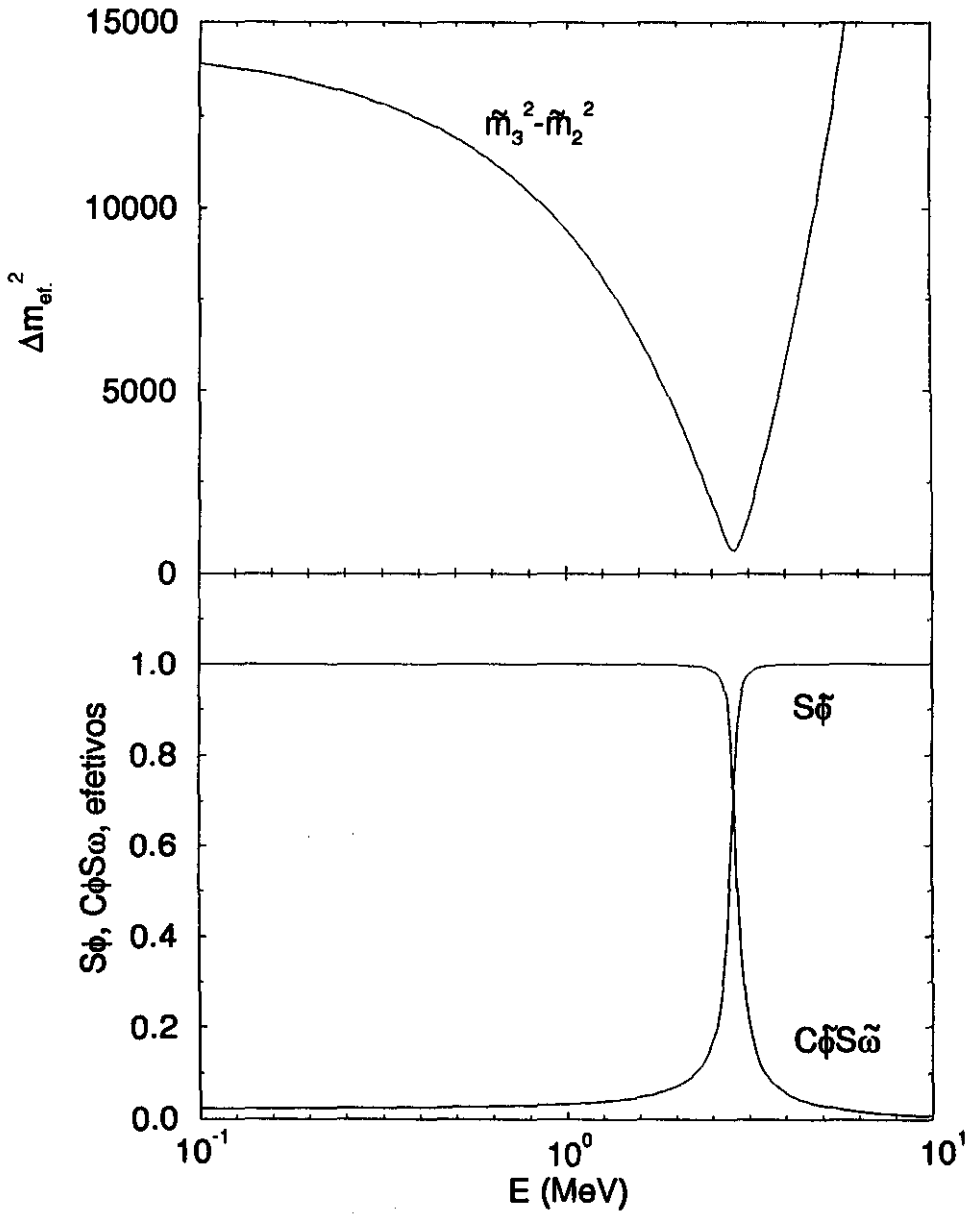


Fig. {6.3}- $\tilde{m}_3^2 - \tilde{m}_2^2(m_2^2)$; $C\phi S\omega$; $S\phi \times E(\text{MeV})$

Antes de apresentarmos soluções à equação de evolução em regime de ressonância queremos observar que no cálculo de $P(\nu_e, \nu_e)$ para um neutrino atravessando regiões cujo regime de evolução é ora adiabático ora não adiabático, (quantidade de interesse na procura de solução ao problema do neutrino solar), as probabilidades $x_1 = P(\nu_1, \nu_2)$ e $x_2 = P(\nu_2, \nu_3)$ são as quantidades essenciais para o cálculo de $P(\nu_e, \nu_e)$ fazendo parte de uma expressão análoga à (eq.4.15), extensão da mesma para o contexto da existência de três sabores de neutrinos.

Adicionalmente, queremos observar que o espinor $\Phi(t)$, definido pela relação

$$\nu_f(t) = e^{i\psi\Lambda_7}\Phi(t)$$

possui sua primeira componente igual a $\nu_e(t)$, de maneira que a probabilidade de sobrevivência da componente eletrônica é igual a probabilidade de sobrevivência da componente Φ_1 . Desta forma, a solução para a equação de evolução do espinor $\Phi(t)$ é suficiente para a determinação de $P(\nu_e, \nu_e)$, desde que não estejamos interessados nas probabilidades de troca entre sabores. Tais fatos nos levam a uma simplificação nos cálculos, uma vez que a equação de evolução para o espinor $\Phi(t)$ não envolve o ângulo de mistura ψ . Queremos ainda salientar que, caso as probabilidades de troca sejam de interesse, a solução para o espinor $\nu_f(t)$ pode ser obtida de forma análoga a que apresentaremos para $\Phi(t)$.

6.2 Solução da equação de evolução em regime adiabático.

Seja inicialmente a equação de evolução temporal para neutrinos com energia até 177eV . A probabilidade de sobrevivência em regime adiabático $P^{ad}(\nu_e, \nu_e)$ é

$$P^{ad}(\nu_e, \nu_e) = |\langle \nu_e(x) | \nu_e(x_0) \rangle|^2$$

a qual podemos escrever na forma

$$P^{ad}(\nu_e, \nu_e) = \sum_{i=1}^3 |\langle \nu_e(x) | \nu_i(x) \rangle \langle \nu_i(x) | \nu_i(x_0) \rangle \langle \nu_i(x_0) | \nu_e(x_0) \rangle|^2.$$

Tomando $\nu_e(x_0)$ como

$$\nu_e(x_0) = C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}\nu_1(x_0) + C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}\nu_2(x_0) + S\tilde{\phi}\nu_3(x_0)$$

e $\nu_e(x)$ como a expressão equivalente para o vácuo, podemos escrever $P^{ad}(\nu_e, \nu_e)$ na forma

$$P^{ad}(\nu_e, \nu_e) = \left| C\phi C\omega C\tilde{\phi} C\tilde{\omega} e^{i\int_{x_0}^x \tilde{E}_1(x_1)dx_1} + C\phi S\omega C\tilde{\phi} S\tilde{\omega} e^{i\int_{x_0}^x \tilde{E}_2(x_1)dx_1} + S\phi S\tilde{\phi} e^{i\int_{x_0}^x \tilde{E}_3(x_1)dx_1} \right|^2 \quad (6.1)$$

onde, conforme o teorema adiabático [41], assumimos:

$$\langle \nu_k(x) | \nu_j(x_0) \rangle = e^{i\int_{x_0}^x \tilde{E}_j(x_1)dx_1} \delta_{jk}.$$

Desprezando-se termos oscilantes $P^{ad}(\nu_e, \nu_e)$ resulta em

$$P^{ad}(\nu_e, \nu_e) = C^2\phi C^2\tilde{\phi}(C^2\omega C^2\tilde{\omega} + S^2\omega S^2\tilde{\omega}) + S^2\phi S^2\tilde{\phi}. \quad (6.2)$$

6.3 Neutrinos em evolução em torno da ressonância 1.

Seja a equação de evolução temporal para neutrinos com energia no intervalo $177eV \leq E \leq 3.16 \times 10^6 eV$. Como vimos anteriormente, interessa-nos a solução da equação de evolução para o espinor $\Phi(t)$

$$i\frac{d}{dt}\Phi(t) = H\Phi(t), \quad (6.3)$$

onde H é dado por

$$H = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} \Lambda C^2\phi + 2m_3^2 S^2\phi + 2A & \Delta S 2\omega C\phi & \left(m_3^2 - \frac{\Lambda}{2}\right) S 2\phi \\ \Delta S 2\omega C\phi & \Sigma + \Delta C 2\omega & -\Delta S 2\omega S\phi \\ \left(m_3^2 - \frac{\Lambda}{2}\right) S 2\phi & -\Delta S 2\omega S\phi & \Lambda S^2\phi + 2m_3^2 C^2\phi \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Similarmente ao que ocorre no caso de dois sabores de neutrinos esperamos a existência de duas fases estacionárias determinadas pelas condições

$$H_{11} - H_{22} = 0; \text{ e } H_{11} - H_{33} = 0.$$

Como veremos posteriormente, a condição $H_{11} - H_{33} = 0$ está relacionada com a segunda ressonância. A condição $H_{11} - H_{22} = 0$, no entanto, não está relacionada à nenhuma condição de ressonância.

Definindo um novo espinor $\Phi'(t)$ pela relação

$$\Phi'(t) = e^{-i\phi\Lambda_5}\Phi(t)$$

a equação de evolução em termos deste novo espinor torna-se

$$i\frac{d}{dt}\Phi'(t) = H'(t)\Phi'(t) \quad (6.5)$$

onde

$$H'(t) = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} \Sigma - \Delta C2\omega + 2AC^2\phi & \Delta S2\omega & AS2\phi \\ \Delta S2\omega & \Sigma + \Delta C2\omega & 0 \\ AS2\phi & 0 & 2(m_3^2 + AS^2\phi) \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Essa nova matriz, em princípio, pode definir duas condições de ressonância:

$$H'_{11} - H'_{22} = 0; \text{ e } H'_{11} - H'_{33} = 0.$$

A condição $H'_{11} - H'_{33} = 0$, no entanto, não tem zeros compatíveis com nenhuma das condições de ressonância impostas por mistura máxima de auto estados de energia. A condição $H'_{11} - H'_{22} = 0$ porém, tem um zero no ponto de máxima mistura ν_1 e ν_2 , coincidindo com a condição para a primeira ressonância.

Com o auxílio das matrizes de Gell-Mann definidas no apêndice B, podemos escrever (6.5) como

$$i\frac{d}{dt}\Phi'(t) = [A_0\mathbf{1} + A_1T_1 + A_3T_3 + A_4T_4 + A_8T_8]\Phi'(t) \quad (6.7)$$

onde

$$A_0 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + A}{6E}; \quad A_4 = \frac{AS2\phi}{2E}; \quad A_1 = \frac{\Delta S2\omega}{2E}; \quad (6.8)$$

$$A_3 = \frac{AC^2\phi - \Delta C2\omega}{2E}; \quad A_8 = \frac{\Sigma + AC^2\phi - 2(m_3^2 + AS^2\phi)}{2E\sqrt{3}}. \quad (6.9)$$

Definindo ainda um novo espinor $\Psi(t)$ pela relação

$$\Phi'(t) = e^{-i \int^t (A_0 1 + A_3 T_3 + A_8 T_8) d\lambda} \Psi(t) \quad (6.10)$$

a equação de evolução em termos de $\Psi(t)$ torna-se

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = e^{i \int^t (A_3 T_3 + A_8 T_8) d\lambda} [A_1 T_1 + A_4 T_4] e^{-i \int^t (A_3 T_3 + A_8 T_8) d\lambda} \Psi(t). \quad (6.11)$$

Introduzindo as matrizes $T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$ e $V_{\pm} = T_4 \pm iT_5$ e por utilização da relação de Backer-Hausdorff, (vide apêndice), a equação (6.11) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = [-i \frac{A_1}{2} \varphi_1 T_+ - i \frac{A_1}{2} \varphi_1^* T_- - i \frac{A_4}{2} \varphi V_+ - i \frac{A_4}{2} \varphi^* V_-] \Psi(t) \quad (6.12)$$

ou, em termos das componentes de $\Psi(t)$,

$$\dot{\Psi}_1(t) = -i [\frac{A_1}{2} \varphi_1 \Psi_2(t) + \frac{A_4}{2} \varphi \Psi_3(t)] \quad (6.13)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = -i \frac{A_1}{2} \varphi_1^* \Psi_1(t) \quad (6.14)$$

$$\dot{\Psi}_3(t) = -i \frac{A_4}{2} \varphi^* \Psi_1(t) \quad (6.15)$$

onde

$$\varphi_1 = e^{i \int^t (A_3(\lambda)) d\lambda}; \quad \varphi = e^{i \int^t (\frac{A_8 \sqrt{3} + A_3}{2}) d\lambda}.$$

Podemos escrever (6.12) como

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = \Xi(t) \Psi(t) \quad (6.16)$$

onde

$$\Xi(t) = [-i \frac{A_1}{2} \varphi_1 T_+ - i \frac{A_1}{2} \varphi_1^* T_- - i \frac{A_4}{2} \varphi V_+ - i \frac{A_4}{2} \varphi^* V_-], \quad (6.17)$$

a qual tem como solução

$$\Psi(t) = G(t, t_0)\Psi(t_0),$$

onde $G(t, t_0)$ é o expansional dado por

$$G(t, t_0) = \mathbf{1} - i \int_{t_0}^t \Xi(\lambda) d\lambda + i^2 \int_{t_0}^t \Xi(\lambda) d\lambda \int_{t_0}^{\lambda} \Xi(\lambda_1) d\lambda_1 + \dots \quad (6.18)$$

Explicitando-se o expansional e utilizando-se as regras de multiplicação das matrizes $T_{\pm}$ e $V_{\pm}$ (vide apêndice B) podemos escrever $G(t, t_0)$ como

$$G(t, t_0) = \mathbf{1} + \Sigma_1 T_+ + \Sigma_2 T_- + \Sigma_3 V_+ + \Sigma_4 V_- + \quad (6.19)$$

$$\Sigma_5 T_- T_+ + \Sigma_6 T_+ T_- + \Sigma_7 V_- V_+ + \Sigma_8 U_+ + \Sigma_9 U_-$$

onde $U_{\pm} = T_6 \pm iT_7$ e Σ_k são certas séries das quais explicitaremos a seguir aquelas de interesse.

Escrevendo $\Psi(t_0)$ como

$$\Psi(t_0) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t_0) \\ \Psi_2(t_0) \\ \Psi_3(t_0) \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

definindo os espinores $\overline{\Psi}_i$ como

$$\overline{\Psi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{\Psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{e} \quad \overline{\Psi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

e observando-se que

$$\begin{aligned} T_+ \overline{\Psi}_1 &= T_+ \overline{\Psi}_3 = 0; \quad T_+ \overline{\Psi}_2 = \overline{\Psi}_1 \\ T_- \overline{\Psi}_2 &= T_- \overline{\Psi}_3 = 0; \quad T_- \overline{\Psi}_1 = \overline{\Psi}_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} T_- T_+ \overline{\Psi}_2 &= \overline{\Psi}_2 \\ T_+ T_- \overline{\Psi}_1 &= \overline{\Psi}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_+ \overline{\Psi_1} = V_+ \overline{\Psi_2} = 0; V_+ \overline{\Psi_3} = \overline{\Psi_1} \\ V_- \overline{\Psi_2} = V_- \overline{\Psi_3} = 0; V_- \overline{\Psi_1} = \overline{\Psi_3} \end{aligned} \implies \begin{aligned} V_+ V_- \overline{\Psi_1} = \overline{\Psi_1} \\ V_- V_+ \overline{\Psi_3} = \overline{\Psi_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_+ \overline{\Psi_1} = U_+ \overline{\Psi_2} = 0; U_+ \overline{\Psi_3} = \overline{\Psi_2} \\ U_- \overline{\Psi_2} = U_- \overline{\Psi_3} = 0; U_- \overline{\Psi_1} = \overline{\Psi_3} \end{aligned} \implies \begin{aligned} U_+ U_- \overline{\Psi_2} = \overline{\Psi_2} \\ U_- U_+ \overline{\Psi_3} = \overline{\Psi_3} \end{aligned}$$

$\Psi(t)$ para um instante qualquer resulta em

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} (1 + \Sigma_6)\Psi_1(t_0) + \Sigma_1\Psi_2(t_0) + \Sigma_3\Psi_3(t_0) \\ (1 + \Sigma_5)\Psi_2(t_0) + \Sigma_2\Psi_1(t_0) + \Sigma_8\Psi_3(t_0) \\ (1 + \Sigma_7)\Psi_3(t_0) + \Sigma_4\Psi_1(t_0) + \Sigma_9\Psi_2(t_0) \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

A solução para $\Psi(t)$ é obtida com o conhecimento das quantidades Σ_1, Σ_3 e Σ_6 , visto que $\Psi_2(t)$ e $\Psi_3(t)$ podem ser obtidas via integração de $\Psi_1(t)$ (vide equações (6.14 e 6.15)).

Explicitando se as séries integrais de interesse, tem-se

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & -i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda + i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 + \\ & i \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 - \\ & i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_3 \int_{t_0}^{\lambda_3} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_4 - \\ & i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_3 \int_{t_0}^{\lambda_3} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_4 - \\ & i \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_3 \int_{t_0}^{\lambda_3} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_4 - \\ & i \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_3 \int_{t_0}^{\lambda_3} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_4 + \dots, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_3 = & -i \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda + i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda_2 + \\ & i \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda_2 + \dots, \quad (6.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_6 = & - \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 - \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 + \\ & \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_3 + \quad (6.25) \\ & \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_3 + \\ & \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_3 + \\ & \int_{t_0}^t \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda \int_{t_0}^\lambda \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_4}{2} \varphi d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_4}{2} \varphi^* d\lambda_3 + \dots\end{aligned}$$

As séries Σ_i existentes em $G(t, t_0)$ envolvem integrais do seguinte tipo

$$I_1 = \int_{t_0}^t e^{i \int_{t_1}^{t_1} (A_3(\lambda)) d\lambda} dt_1,$$

$$I_2 = \int_{t_0}^t e^{i \int_{t_1}^{t_1} (\frac{A_2 \sqrt{3} + A_3}{2}) d\lambda} dt_1,$$

ou mais geralmente,

$$I = \int_{t_0}^t e^{i f(\lambda)} g(\lambda) d\lambda.$$

Dada a distribuição de matéria por nós assumida para o Sol, tais integrais possuem integrandos que oscilam muito rapidamente, a menos em torno daqueles pontos onde existam fases estacionárias determinadas por

$$\left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_R} = 0. \quad (6.26)$$

Da expressão para $A_3(\lambda)$ (eq. 6.9) observamos que a integral I_1 apresenta uma fase estacionária em λ_{R1} determinada por

$$A(\lambda_{R1}) = \frac{\Delta C 2\omega}{C^2 \phi} \quad (6.27)$$

a qual coincide com a condição ressonante 1 por nós analisada no capítulo anterior.

Em torno da fase estacionária determinada por (6.27), os termos envolvendo integrais I_2 não apresentam contribuição relevante para o expansional $G(t, t_0)$, os termos envolvendo somente I_1 podendo ser calculados resolvendo-se a integral I_1 pelo método da fase estacionária (vide apêndice B). Desta forma, computando-se somente as contribuições mais importantes em torno da ressonância 1

$$\Sigma_1 = -i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda + i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^{\lambda} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 + \quad (6.28)$$

$$i \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^{\lambda} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_3 \int_{t_0}^{\lambda_3} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_4 - \dots$$

$$\Sigma_6 = - \int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^{\lambda} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 + \quad (6.29)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda \int_{t_0}^{\lambda} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_1 \int_{t_0}^{\lambda_1} \frac{A_1}{2} \varphi_1 d\lambda_2 \int_{t_0}^{\lambda_2} \frac{A_1}{2} \varphi_1^* d\lambda_3 + \dots,$$

o que torna o problema equivalente a solução de um sistema de dois sabores de neutrinos, como pode ser visto eliminando-se as contribuições A_4 dependentes nas equações (6.13, 6.14 e 6.15)

$$\dot{\Psi}_1(t) = -i\frac{A_1}{2}\varphi_1\Psi_2(t) \quad (6.30)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = -i\frac{A_1}{2}\varphi_1^*\Psi_1(t) \quad (6.31)$$

$$\dot{\Psi}_3(t) = 0 \quad (6.32)$$

a solução sendo similar àquela obtida para o caso de dois sabores. Calculando-se as séries pelo método da fase estacionária obtemos as soluções para o espinor $\Psi(t)$

$$\Psi_1(t) = \frac{(1 - \eta_1^2)}{1 + \eta_1^2}\Psi_1(t_0) - i\frac{2\eta_1}{1 + \eta_1^2}e^{-i[\varepsilon_1(\lambda_{R1}) + \frac{\pi}{4}]}\Psi_2(t_0) \quad (6.33)$$

$$\Psi_2(t) = \frac{(1 - \eta_1^2)}{1 + \eta_1^2}\Psi_2(t_0) - i\frac{2\eta_1}{1 + \eta_1^2}e^{i[\varepsilon_1(\lambda_{R1}) + \frac{\pi}{4}]}\Psi_1(t_0) \quad (6.34)$$

$$\Psi_3(t) = \Psi_3(t_0) \quad (6.35)$$

onde definimos:

$$\eta_1^2 = \frac{\pi\Delta S^2 2\omega}{16\beta EC 2\omega} \quad (6.36)$$

$$\varepsilon_1(\lambda) = \int_{t_0}^{\lambda} \frac{(\Delta C 2\omega - AC^2\phi)}{2E} d\lambda_1 \quad (6.37)$$

e tal solução é restrita à condição $\eta_1^2 < 1$, situação em que as séries Σ_6 e Σ_1 convergem.

Efetuando-se as anti-transformações sobre $\Psi(t)$, $\Phi(t)$ é dado por

$$\Phi(t) = e^{i\phi\Lambda_5} e^{-i\int^t (A_0\mathbf{1} + A_3T_3 + A_8T_8)d\lambda} \Psi(t). \quad (6.38)$$

Observemos que a primeira exponencial atuando sobre o espinor $\Psi(t)$ resulta

$$e^{-i \int^t (A_0 1 + A_3 T_3 + A_8 T_8) d\lambda} \Psi(t) = e^{-i \int^t A_0 d\lambda} \begin{pmatrix} e^{-iK_1} \Psi_1(t) \\ e^{-iK_2} \Psi_2(t) \\ e^{iK_3} \Psi_3(t) \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

onde

$$K_1 = \int^t \left(\frac{A_3}{2} + \frac{A_8}{2\sqrt{3}} \right) d\lambda \quad (6.40)$$

$$K_2 = \int^t \left(\frac{A_3}{2} - \frac{A_8}{2\sqrt{3}} \right) d\lambda \quad (6.41)$$

$$K_3 = \int^t \frac{A_8}{\sqrt{3}} d\lambda. \quad (6.42)$$

Finalmente, efetuando-se a anti-transformação em ϕ , obtemos

$$\Phi(t) = G(t, t_0) \Phi(t_0),$$

onde

$$G(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(\Phi_1, \Phi_1) & A(\Phi_2, \Phi_1) & A(\Phi_3, \Phi_1) \\ A(\Phi_1, \Phi_2) & A(\Phi_2, \Phi_2) & A(\Phi_3, \Phi_2) \\ A(\Phi_1, \Phi_3) & A(\Phi_2, \Phi_3) & A(\Phi_3, \Phi_3) \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

com

1. $A(\Phi_1, \Phi_1) = C^2 \phi g_1 e^{-iK_1} + S^2 \phi e^{iK_3}$
2. $A(\Phi_2, \Phi_1) = -i f_1 C \phi e^{-i(F_1 + K_1)}$
3. $A(\Phi_3, \Phi_1) = A(\Phi_1, \Phi_3) = C \phi S \phi [e^{iK_3} - g_1 e^{-iK_1}]$
4. $A(\Phi_1, \Phi_2) = -i f_1 C \phi e^{i(F_1 - K_2)}$
5. $A(\Phi_2, \Phi_2) = g_1 e^{-iK_2}$
6. $A(\Phi_3, \Phi_2) = i f_1 S \phi e^{i(F_1 - K_2)}$

$$7. A(\Phi_2, \Phi_3) = i f_1 S \phi e^{-i(F_1 + K_1)}$$

$$8. A(\Phi_3, \Phi_3) = S^2 \phi g_1 e^{-iK_1} + C^2 \phi e^{iK_3}$$

onde definimos as quantidades

$$g_1 = \frac{1 - \eta_1^2}{1 + \eta_1^2}; \quad f_1 = \frac{2\eta_1}{1 + \eta_1^2}; \quad F_1 = \epsilon_1 + \frac{\pi}{4}. \quad (6.44)$$

Observe-se aqui a independencia das amplitudes $A(\Phi_i, \Phi_j)$ com o estado inicial $\Phi(t_0)$. Finalmente, a partir das relações entre as componentes Φ_i e os auto estados de energia do sistema

$$\nu_1 = C\phi C\omega\Phi_1 - S\omega\Phi_2 - S\phi C\omega\Phi_3$$

$$\nu_2 = C\phi S\omega\Phi_1 + C\omega\Phi_2 - S\phi S\omega\Phi_3$$

e das expressões para $A(\Phi_i, \Phi_j)$, podemos calcular a quantidade

$$\langle \nu_2(t_+) | \nu_1(t_-) \rangle = C\phi S\omega C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}A(\Phi_1, \Phi_1) - C\phi S\omega S\tilde{\omega}A(\Phi_2, \Phi_1) -$$

$$C\phi S\omega S\tilde{\phi}C\tilde{\omega}A(\Phi_3, \Phi_1) + C\omega C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}A(\Phi_1, \Phi_2) - C\omega S\tilde{\omega}A(\Phi_2, \Phi_2) -$$

$$C\omega S\tilde{\phi}C\tilde{\omega}A(\Phi_3, \Phi_2) - S\phi S\omega C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}A(\Phi_1, \Phi_3) + S\phi S\omega S\tilde{\omega}A(\Phi_2, \Phi_3) +$$

$$S\phi S\omega S\tilde{\phi}C\tilde{\omega}A(\Phi_3, \Phi_3). \quad (6.45)$$

Calculando-se o módulo ao quadrado de $\langle \nu_2(t_+) | \nu_1(t_-) \rangle$, desprezando-se termos oscilantes, $x_1 = |\langle \nu_2(t_+) | \nu_1(t_-) \rangle|^2$ resulta em

$$x_1 = \{ S^2 \omega C^2 \tilde{\omega} [C^2 \phi C^2 \tilde{\phi} + S^2 \phi S^2 \tilde{\phi} + 2 S \phi C \phi S \tilde{\phi} C \tilde{\phi}] + C^2 \omega S^2 \tilde{\omega} \} g_1^2 +$$

$$\{C^2\omega C^2\tilde{\omega}[C^2\phi C^2\tilde{\phi} + S^2\phi S^2\tilde{\phi} + 2S\phi C\phi S\tilde{\phi}C\tilde{\phi}] + S^2\omega S^2\tilde{\omega}\} f_1^2. \quad (6.46)$$

Queremos observar que a condição $\eta_1^2 < 1$ implica em que a solução apresentada anteriormente é válida para neutrinos com energia $E > \bar{E}_1 = 1.3 \times 10^5 eV$. A relação entre o parâmetro η_1 e o parâmetro de adiabaticidade γ (eq.4.36) determina que neutrinos com energia menor que este valor atravessam a primeira região ressonante evoluindo adiabaticamente.

6.4 Evolução do neutrino em torno da ressonância 2.

Sejam neutrinos com energia $E > 3.16 \times 10^6 eV$. A equação de evolução a ser resolvida neste caso eq(6.3) é tal que a fase estacionária determinada por $H_{11}^o - H_{33}^o$ coincide com a condição de ressonância 2 analisada no capítulo anterior.

Conforme procedimento anterior, escrevemos a equação de evolução (6.3) com o auxílio das matrizes de Gell-Mann da forma

$$i \frac{d}{dt} \Phi(t) = [B_0 \mathbf{1} + B_1 T_1 + B_3 T_3 + B_4 T_4 + B_6 T_6 + B_8 T_8] \Phi(t) \quad (6.47)$$

onde

$$B_0 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + A}{6E}; \quad B_4 = \frac{(m_3^2 - \frac{A}{2})S2\phi}{2E}; \quad B_1 = \frac{\Delta S2\omega C\phi}{2E};$$

$$B_3 = \frac{2A - \Delta_1 S^2\phi - \Delta C2\omega(1 + C^2\phi)}{4E}; \quad B_6 = -\frac{\Delta S2\omega S\phi}{2E}$$

$$B_8 = \sqrt{3} \left\{ \frac{\Sigma(1 + C^2\phi) + \Delta C2\omega S^2\phi + 2m_3^2 S^2\phi + 2A}{4E} - 2B_0 \right\}.$$

Definindo um novo espinor $\Psi(t)$ pela relação

$$\Phi(t) = e^{-i \int^t (B_0 1 + B_3 T_3 + B_8 T_8) d\lambda} \Psi(t) \quad (6.48)$$

a equação de evolução em termos de $\Psi(t)$ torna-se

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = e^{i \int^t (B_3 T_3 + B_8 T_8) d\lambda} [B_1 T_1 + B_4 T_4 + B_6 T_6] e^{-i \int^t (A_3 T_3 + A_8 T_8) d\lambda} \Psi(t). \quad (6.49)$$

Ou, em termos das matrizes $T_{\pm}$, $V_{\pm}$ e $U_{\pm}$

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = -i \left[\frac{B_1}{2} (\varphi_1 T_+ + \varphi_1^* T_-) + \frac{B_4}{2} (\varphi_4 V_+ + \varphi_4^* V_-) + \frac{B_6}{2} (\varphi_6 U_+ + \varphi_6^* U_-) \right] \Psi(t). \quad (6.50)$$

Para as componentes de $\Psi(t)$ têm-se as seguintes equações

$$\dot{\Psi}_1(t) = -i \left[\frac{B_1}{2} \varphi_1' \Psi_2(t) + \frac{B_4}{2} \varphi_4 \Psi_3(t) \right] \quad (6.51)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = -i \frac{B_1}{2} \varphi_1^* \Psi_1(t) - i \frac{B_6}{2} \varphi_6 \Psi_3(t) \quad (6.52)$$

$$\dot{\Psi}_3(t) = -i \frac{B_4}{2} \varphi_4^* \Psi_1(t) - i \frac{B_6}{2} \varphi_6^* \Psi_2(t) \quad (6.53)$$

onde

$$\varphi_1' = e^{i \int^t (B_3(\lambda)) d\lambda}; \quad \varphi_4 = e^{i \int^t (\frac{B_8 \sqrt{3} + B_3}{2}) d\lambda}; \quad \varphi_6 = e^{i \int^t (\frac{B_8 \sqrt{3} - B_3}{2}) d\lambda},$$

e

$$B_3 = H_{11}^o - H_{22}^o; \quad \frac{B_8 \sqrt{3} + B_3}{2} = H_{11}^o - H_{33}^o; \quad \text{e} \quad \frac{B_8 \sqrt{3} - B_3}{2} = H_{22}^o - H_{33}^o.$$

A equação diferencial (6.50) tem como solução

$$\Psi(t) = G'(t, t_0)\Psi(t_0) \quad (6.54)$$

onde o expansional $G'(t, t_0)$, cuja expressão é análoga a (6.19), possui séries envolvendo as integrais I'_1, I'_2 e I_3 dadas por

$$I'_1 = \int \frac{B_1}{2} \varphi'_1 d\lambda; \quad I'_2 = \int \frac{B_4}{2} \varphi_4 d\lambda \text{ e } I_3 = \int \frac{B_6}{2} \varphi_6 d\lambda.$$

As integrais I'_1 e I'_2 , dada a densidade de matéria por nós assumida para o Sol, são tais que os integrandos oscilam muito rapidamente. A maior contribuição ficando por conta dos pontos em torno das fases estacionárias determinadas por $H_{11}^o - H_{22}^o = 0$, (situação em que I'_2 não apresenta contribuição relevante), e $H_{11}^o - H_{33}^o = 0$, que é a situação de interesse, uma vez que a fase estacionária determinada neste caso por

$$A_{R2} = \frac{(\Delta C 2\omega - \Delta_1) C 2\phi}{2} \quad (6.55)$$

coincide com o ponto de ressonância 2 analisado no capítulo anterior. As integrais I_3 , no entanto, não são integrais do mesmo tipo das anteriores, $H_{22}^o - H_{33}^o$ é t independente e o integrando não oscila muito rapidamente.

As séries integrais que resolvem o problema não podem a princípio serem resolvidas pura e simplesmente pelo método da fase estacionária como anteriormente, embora as integrais I_3 envolvidas nas séries possam ser resolvidas exatamente, as séries que misturam integrais I_3 e I'_2 não admitem a princípio uma expressão simples. No entanto, dados os parâmetros físicos para o sistema no vácuo envolvidos no problema, a quantidade $\frac{B_4}{B_6}$ neste caso é muito grande

$$\frac{B_4}{B_6} \approx 6 \times 10^4$$

de maneira que podemos restringir nosso sistema de equações diferenciais a

$$\dot{\Psi}_1(t) = -i \frac{B_4}{2} \varphi_4 \Psi_3(t) \quad (6.56)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = 0 \quad (6.57)$$

$$\dot{\Psi}_3(t) = -i \frac{B_4}{2} \varphi_4^* \Psi_1(t) \quad (6.58)$$

o que leva novamente nosso problema a solucionar um sistema de duas componentes. Analogamente ao caso anterior pode-se definir

$$\eta_2^2 = \frac{\pi S^2 2\phi(\Delta C 2\omega - \Delta_1)}{32\beta E C 2\phi} \quad (6.59)$$

$$\varepsilon_2(\lambda) = - \int_{t_0}^{\lambda} \frac{B_8 \sqrt{3} + B_3}{2} d\lambda_1, \quad (6.60)$$

e a solução para o sistema (6.56, 6.57 e 6.58) resulta

$$\Psi_1(t) = \frac{(1 - \eta_2^2)}{1 + \eta_2^2} \Psi_1(t_0) - i \frac{2\eta_2}{1 + \eta_2^2} e^{-i[\varepsilon_2(\lambda_{R2}) + \frac{\pi}{4}]} \Psi_3(t_0) \quad (6.61)$$

$$\Psi_3(t) = \frac{(1 - \eta_2^2)}{1 + \eta_2^2} \Psi_3(t_0) - i \frac{2\eta_2}{1 + \eta_2^2} e^{i[\varepsilon_2(\lambda_{R2}) + \frac{\pi}{4}]} \Psi_1(t_0) \quad (6.62)$$

$$\Psi_2(t) = \Psi_2(t_0), \quad (6.63)$$

restrita à condição $\eta_2^2 < 1$.

Efetuando-se a antitransformação sobre $\Psi(t)$, obtemos o espinor $\Phi(t)$ dado por

$$\Phi(t) = e^{-i \int^{t_0} (B_0 \mathbf{1} + B_3 T_3 + B_8 T_8) d\lambda} \Psi(t), \quad (6.64)$$

o qual pode ser escrito como

$$\Phi(t) = G^h(t, t_0) \Phi(t_0) \quad (6.65)$$

onde

$$G^h(t, t_0) = \begin{pmatrix} A^h(\Phi_1, \Phi_1) & A^h(\Phi_2, \Phi_1) & A^h(\Phi_3, \Phi_1) \\ A^h(\Phi_1, \Phi_2) & A^h(\Phi_2, \Phi_2) & A^h(\Phi_3, \Phi_2) \\ A^h(\Phi_1, \Phi_3) & A^h(\Phi_2, \Phi_3) & A^h(\Phi_3, \Phi_3) \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

com

1. $A^h(\Phi_1, \Phi_1) = g_2 e^{-iK'_1}$
2. $A^h(\Phi_2, \Phi_1) = 0$
3. $A^h(\Phi_3, \Phi_1) = -i f_2 e^{-i(F_2 + K'_1)}$
4. $A^h(\Phi_1, \Phi_3) = -i f_2 e^{i(F_2 + K'_3)}$
5. $A^h(\Phi_1, \Phi_2) = 0$
6. $A^h(\Phi_2, \Phi_2) = e^{-iK'_2}$
7. $A^h(\Phi_3, \Phi_2) = 0$
8. $A^h(\Phi_2, \Phi_3) = 0$
9. $A^h(\Phi_3, \Phi_3) = g_2 e^{iK'_3}$

onde definimos as quantidades

$$g_2 = \frac{1 - \eta_2^2}{1 + \eta_2^2}; \quad f_2 = \frac{2\eta_2}{1 + \eta_2^2}; \quad F_2 = \epsilon_2 + \frac{\pi}{4}.$$

$$K'_1 = \int^t \left(\frac{B_3}{2} + \frac{B_8}{2\sqrt{3}} \right) d\lambda$$

$$K'_2 = \int^t \left(\frac{B_3}{2} - \frac{B_8}{2\sqrt{3}} \right) d\lambda$$

$$K'_3 = \int^t \frac{A_8}{\sqrt{3}} d\lambda.$$

Finalmente, utilizando-se as relações entre as componentes Φ_i e os auto estados de energia do sistema, ν_2 e ν_3 , a quantidade $|\langle \nu_3(t_+) | \nu_2(t_-) \rangle|^2$, sem considerar termos oscilantes, resulta em

$$x_2 = \left\{ S^2 \tilde{\omega} [S^2 \phi C^2 \tilde{\phi} + C^2 \phi S^2 \tilde{\phi}] \right\} g_2^2 + \quad (6.67)$$

$$\left\{ S^2 \tilde{\omega} [C^2 \phi C^2 \tilde{\phi} + S^2 \phi S^2 \tilde{\phi}] \right\} f_2^2.$$

Como no caso anterior, a condição para limite de validade desta solução $\eta_2^2 < 1$, implica em que neutrinos com energia $E < \overline{E}_2 = 1.807 \times 10^7 \text{ eV}$ atravessam a segunda região ressonante evoluindo adiabaticamente.

6.5 A probabilidade de sobrevivência

Definindo as quantidades P^l e P^h por

$$P^l = \Theta(E - \bar{E}_1)x_1 \quad (6.68)$$

$$P^h = \Theta(E - \bar{E}_2)x_2 \quad (6.69)$$

onde $\Theta(E)$ é a função de Heaviside, a probabilidade de sobrevivência de um neutrino criado no centro do sol com energia no intervalo $10^{-5} MeV$ e $10^5 MeV$ pode ser escrita como [43]

$$P(\nu_e, \nu_e) = U_{e3}^2 P_A + U_{e2}^2 P_B + U_{e1}^2 P_C \quad (6.70)$$

onde

$$P_A = \tilde{U}_{e3}^2 (1 - P^h) + \tilde{U}_{e2}^2 P^h$$

$$P_B = \tilde{U}_{e3}^2 P^h (1 - P^l) + \tilde{U}_{e2}^2 (1 - P^h) (1 - P^l) + \tilde{U}_{e1}^2 P^l$$

$$P_C = \tilde{U}_{e3}^2 P^h P^l + \tilde{U}_{e2}^2 P^l (1 - P^h) + \tilde{U}_{e1}^2 (1 - P^l)$$

com

$$U_{e1} = C\phi C\omega; \quad U_{e2} = C\phi S\omega; \quad e \quad U_{e3} = S\phi.$$

Na figura {6.4} apresentamos a probabilidade de sobrevivência para neutrinos criados no centro do sol com energia no intervalo $10^{-5} MeV < E < 10^5 MeV$ em função da energia. Os parâmetros físicos no vácuo são aqueles definidos no início deste capítulo.

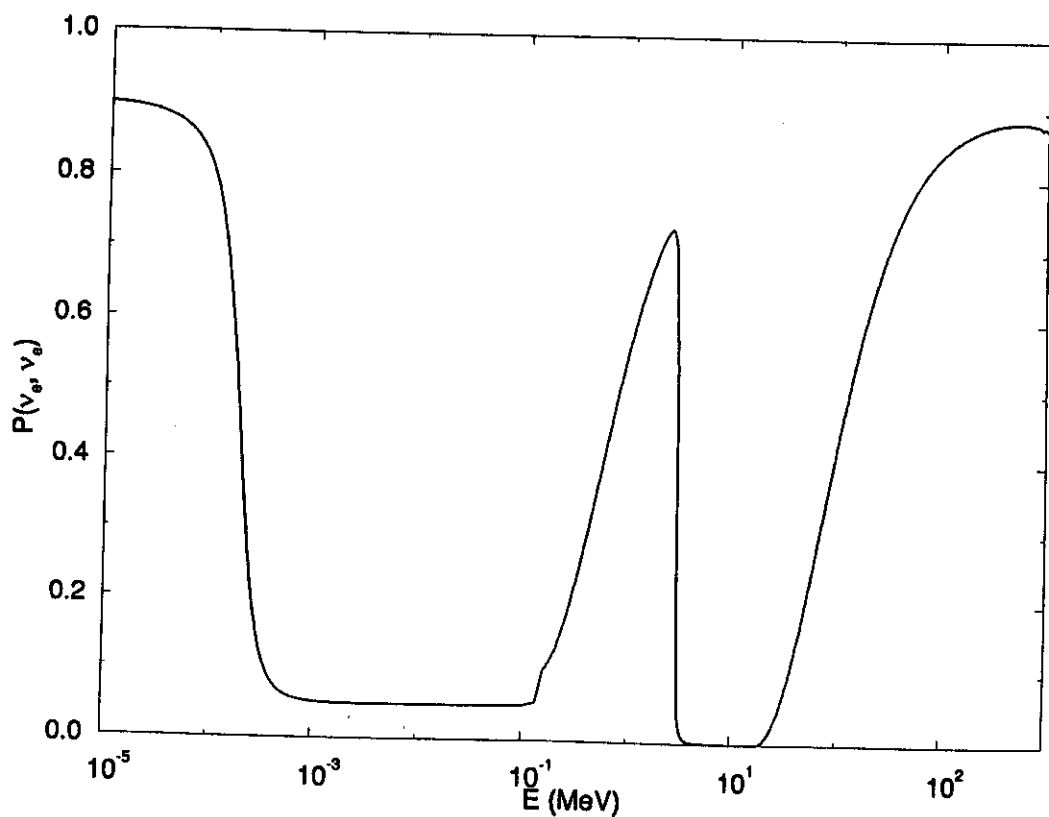


Fig. {6.4} : $P(\nu_e, \nu_e) \times E(\text{MeV})$

Na figura {6.4} observamos claramente a influência das probabilidades de troca entre auto estados de energia ν_1 e ν_2 , iniciando-se a partir dos valores $\overline{E}_1$ e $\overline{E}_2$ respectivamente. Os resultados obtidos neste diagrama são muito similares àqueles obtidos na referência [43] por utilização do método de Landau-Zener.

Capítulo 7

Conclusões.

7.1 Análise dos resultados

Nos dois capítulos precedentes obtivemos resultados dos quais desejamos discutir alguns aspectos que consideramos importantes. Inicialmente queremos observar que a expressão exata para as amplitudes de probabilidade $\nu_f(t)$ de um sistema de neutrinos evoluindo à densidade de matéria constante, a partir de um estado genérico $\nu_f(t_0)$, por nós obtida no capítulo 5 (eq.5.23), juntamente com as expressões para os ângulos de mistura na matéria equações.(5.30,5.31 e 5.32), consistem num conjunto de expressões que entendemos como fundamentais para possíveis análises que possam vir a ser feitas de dados experimentais sobre oscilações de neutrinos em experimentos terrestres. Observe que diferentemente da solução obtida por Barger et al. [46], a qual para calcular-se as quantidades $P(\nu_e, \nu_l)$ para diferentes pontos da trajetória do neutrino necessita que soluções numéricas sejam efetuadas a cada passo, nossa solução não apresenta esta demasiada quantidade de trabalho.

Adicionalmente, a partir da expressão conectando o auto estado de sabor eletrônico com os auto estados de energia na presença da matéria,

$$\nu_e = C\tilde{\phi}C\tilde{\omega}\nu_1 + C\tilde{\phi}S\tilde{\omega}\nu_2 + S\tilde{\phi}\nu_3$$

prevê-se, a partir da expressão aproximada obtida por Kuo e Pantaleone [43] para o ângulo de mistura $S2\tilde{\phi}$ na situação de mistura máxima entre auto

estados de energia ν_2 e ν_3

$$S2\tilde{\phi}_{(Kuo/Pant)} = \frac{S2\phi(m_3^2 - \frac{\Lambda}{2})}{\{[A - C2\phi(m_3^2 - \frac{\Lambda}{2})]^2 + S^2 2\phi(m_3^2 - \frac{\Lambda}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

que nesta situação existe 50% de probabilidade de encontrar-se tal sistema no auto estado ν_3 e 50% de probabilidade de encontrarmos o sistema nos outros dois estados. Observe que $tg\tilde{\phi}_{(Kuo/Pant)} = 1$ nesta situação. Tal previsão não é correta, como pode ser visto através da expressão para o ângulo de mistura $\tilde{\phi}$ obtida a partir da equação (5.30),

$$\tilde{\phi} = \arcsen \sqrt{\frac{\lambda_1^2 - (H_{22} + H_{33})\lambda_1 + H_{22}H_{33} - H_{23}^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}}$$

a qual prevê como pode ser visto na figura {6.3}, $(tg\tilde{\phi})_{Re ss.} = S\tilde{\omega}$. Tais diferentes expressões para os ângulos de mistura na matéria, levam a diferentes resultados para a probabilidade de sobrevivência $P(\nu_e, \nu_e)$ eq.(6.70), de uma maneira geral. Acreditamos que a similaridade entre os resultados por nós obtidos para $P(\nu_e, \nu_e)$ com aqueles obtidos por Kuo e Pantaleone na ref.[43] não se verificará para outros valores dos parâmetros físicos do sistema no vácuo.

Queremos ainda enfatizar que, a partir dos resultados do capítulo 6, embora não tenhamos obtido uma forma geral para solução da equação de evolução temporal à densidade variável, obtivemos uma forma de resolvê-la que, embora restrita a algumas situações, (depende dos valores dos parâmetros físicos do sistema no vácuo), pode ser utilizada para outros valores que não aqueles assumidos no capítulo 6. Nosso interesse, portanto, não foi o de explorar as várias possibilidades, mas sim de apontar um caminho para solução em algumas situações.

7.2 Possíveis extensões ao trabalho.

Inicialmente entendemos que a primeira extensão que necessita ser efetuada ao trabalho consiste em estender a solução para a equação de evolução temporal à densidade de matéria variável eq. (6.3) para um intervalo maior de valores dos parâmetros físicos do sistema no vácuo. A solução do sistema de equações (6.51, 6.52, e 6.53) sem a restrição $\frac{B_A}{B_6} \gg 1$ sendo o fator primordial

para que isto venha a tornar-se possível. Acreditamos que uma análise mais cuidadosa sobre os resultados obtidos exatamente no caso da densidade de matéria constante possa nos indicar um caminho para alcançar este objetivo.

Adicionalmente, a partir dos resultados obtidos neste trabalho e de limites experimentais para as massas de neutrinos, uma análise do conjunto de parâmetros físicos do sistema no vácuo que resolvem o problema do neutrino solar pode ser efetuada.

Finalmente, a extensão da equação de evolução temporal de maneira a incluir a interação com campos eletromagnéticos no contexto da existência de três sabores de neutrinos, parece um caminho lógico a ser trilhado.

Apêndices

8.1 Apêndice A.

8.1.1 As matrizes de Pauli.

As matrizes de Pauli formam um conjunto de três matrizes σ_1 , σ_2 e σ_3 dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que obedecem as seguintes regras de comutação, anti-comutação e multiplicação respectivamente:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k; \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}; \quad \text{e } \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

Definindo-se as matrizes auxiliares σ_+ e σ_- por

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$$

é fácil verificar-se que:

1. $\sigma_+^2 = 0$
2. $\sigma_-^2 = 0$
3. $\sigma_+\sigma_-\sigma_+ = \sigma_+$

3. $\sigma_+\sigma_-\sigma_+ = \sigma_+$

$$4. \sigma_- \sigma_+ \sigma_- = \sigma_-$$

Com as relações entre as matrizes de Pauli e auxiliares, e a relação de Backer-Hausdorff dada por

$$e^{-F} G e^F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{n!}; \quad G_0 = G; \quad e G_n = [G_{n-1}, F],$$

pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} e^{iA_3\sigma_3} \sigma_+ e^{-iA_3\sigma_3} &= e^{2iA_3} \sigma_+ \\ e^{iA_3\sigma_3} \sigma_- e^{-iA_3\sigma_3} &= e^{-2iA_3} \sigma_- \end{aligned} \quad (8.1)$$

8.1.2 As matrizes gama.

Na representação de Dirac as matrizes gama formam um conjunto de quatro matrizes básicas γ^0 , γ^1 , γ^2 e γ^3 , construídas de maneira a obedecer a regra de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nesta representação

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli.

A partir das matrizes básicas podemos construir as matrizes auxiliares $\sigma^{\mu\nu}$ e γ^5

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

ou

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

as quais obedece às relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0.$$

Das definições acima não é difícil mostrar que

1. $(\gamma^0)^2 = 1$
2. $(\gamma^i)^2 = -1$
3. $(\gamma^\alpha)^T = \gamma^\alpha; \alpha = 0, 2$
4. $(\gamma^\alpha)^T = -\gamma^\alpha; \alpha = 1, 3$
5. $(\gamma^5)^T = \gamma^5$

Igualdades adicionais podem ser obtidas em qualquer bom texto de mecânica quântica.

8.1.3 Campos de Dirac.

Um spinor de Dirac é uma matriz coluna de 4 elementos

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

que se transforma sob transformações de Lorentz segundo

$$\Psi' = S\Psi$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix}; a_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \mathbf{1}. \quad (8.3)$$

Com o auxílio das matrizes gama e auxiliares podemos construir as quantidades

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi & \quad (\text{escalar sob transformações de Lorentz}) \\ \bar{\Psi}\gamma^5\Psi & \quad (\text{pseudo escalar sob transformações de Lorentz}) \end{aligned}$$

$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ (vetorial sob transformações de Lorentz)

$\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$ (tensorial sob transformações de Lorentz)

onde $\bar{\Psi}$ é o espinor adjunto definido por

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$$

Os campos descritos por spinores de Dirac são chamados campos de Dirac.

A partir de um espinor de Dirac podemos construir suas componentes LH e RH por aplicação dos operadores de projeção

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5); \text{ (projeta a parte left handed do campo)}$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5); \text{ (projeta a parte right handed do campo)}$$

sobre o espinor de Dirac, de maneira que

$$\Psi = L + R$$

$$L = P_L \Psi; \quad R = P_R \Psi.$$

É direto verificar-se que

$$\bar{R} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 - \gamma^5)$$

$$\bar{L} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 + \gamma^5)$$

$$\gamma^5 R = R; \quad \gamma^5 L = -L; \quad \bar{R}\gamma^5 = -\bar{R}; \quad \bar{L}\gamma^5 = -\bar{L}$$

$$\bar{\Psi}\Psi = \bar{L}R + \bar{R}L$$

$$(1 + \gamma^5)L = (1 - \gamma^5)R = 0$$

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \bar{L}\gamma^\mu L + \bar{R}\gamma^\mu R.$$

8.1.4 A matriz de conjugação de carga e o operador paridade.

Seja um campo descrito pelo spinor $\Psi(x)$, podemos construir o campo conjugado de carga descrito pelo spinor conjugado de carga $(\Psi(x))^c$

$$(\Psi(x))^c = C\gamma^0\Psi^*(x) \tag{8.4}$$

onde C é a matriz de conjugação de carga a qual obedece as seguintes relações

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$$

$$C\gamma^{\alpha T}C^{-1} = -\gamma^\alpha; \quad C^{-1}\gamma^5C = \gamma^{5T}.$$

Na representação de Dirac C é escrito como

$$C = i\gamma^2\gamma^0.$$

O operador paridade P é definido de maneira que sua aplicação sobre um espinor $\Psi(x, t)$ gera a quantidade $\Psi(-x, t)$

$$P\Psi(x, t) = \Psi(-x, t) \quad (8.5)$$

na representação de Dirac $P = \gamma^0$. A aplicação de P e C sobre os spinors básicos de Dirac $u_{1,2}$ e $v_{1,2}$ (soluções da equação de Dirac) demonstrando que existem fatores de fase arbitrários associados a estas transformações os quais podem ser desprezados (não existem evidências de fatores de fase físicos associados a partículas de Dirac). De uma maneira geral podemos escrever

$$P\Psi(x, t) = \eta_p\gamma^0\Psi(x, t)$$

$$(\Psi)^c(x, t) = \eta_c i\gamma^2\gamma^0 \gamma^0\Psi^*(x, t) \quad (8.6)$$

onde η_p e η_c são fatores de fase arbitrários.

Invariança sob CP do termo de massa de Dirac.

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{a,b} \bar{\nu}_{aR}(x) M_{ab} \nu_{bL}(x) + h.c. \quad (8.7)$$

onde

$$h.c. = - \sum_{a,b} \bar{\nu}_{bL}(x) M_{ba}^* \nu_{aR}(x) = -\bar{\nu}_L M^{D\dagger} \nu_R. \quad (8.8)$$

Escrevendo $\mathcal{L}^D$ em termos dos campos CP transformados

$$(\nu_{bL})^C(-x) = i\gamma^2\gamma^0 P_L \nu_b^*(x) \quad (8.9)$$

$$(\nu_{aR})^C(-x) = i\gamma^2\gamma^0 P_R \nu_a^*(x) = \Gamma \nu_a^*(x), \quad (8.10)$$

e observando que para um spinor genérico $\Psi' = \Gamma\Psi$ onde Γ é uma matriz (4×4)

$$\overline{\Psi'} = (\Psi^\dagger \Gamma^\dagger) \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 = \overline{\Psi} \overline{\Gamma}$$

onde $\overline{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$, de modo que

$$\overline{(\nu_{aR})^c}(-x) = i\nu_a^T(x) P_R \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0$$

de maneira que

$$(\overline{\nu_{aR}}(x) M_{ab} \nu_{bL}(x))^{CP} = -\nu_a^T(x) P_R \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 M_{ab} \gamma^2 \gamma^0 P_L \nu_b^*(x). \quad (8.11)$$

Lembrando-nos que, para uma matriz Γ (4×4) genérica e dois spinores representando campos fermiônicos

$$\begin{aligned} \Psi^T \Gamma \Psi' &= \sum_{\alpha, \beta} \Psi_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} \Psi'_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \Psi'_\beta \Gamma_{\alpha\beta} \Psi_\alpha \\ &= -\Psi'^T \Gamma^T \Psi \end{aligned}$$

onde o sinal negativo advém da troca na ordenação dos campos fermiônicos, podemos escrever

$$\begin{aligned} (\overline{\nu_{aR}}(x) M_{ab} \nu_{bL}(x))^{CP} &= \nu_b^{*T}(x) [P_R \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 M_{ab} \gamma^2 \gamma^0 P_L]^T \nu_a(x) \\ &= \nu_b^{*T}(x) P_L \gamma^0 \gamma^{2T} \gamma^0 M_{ab} \gamma^{2T} \gamma^0 P_R \nu_a(x) \\ &= \nu_b^{*T}(x) \gamma^0 P_R \gamma^2 \gamma^0 M_{ab} \gamma^2 \gamma^0 P_R \nu_a(x) \\ &= \overline{\nu_{bL}}(x) \gamma^2 \gamma^0 M_{ab} \gamma^2 \gamma^0 \nu_{aR}(x) \\ &= \overline{\nu_{bL}}(x) M_{ab} \nu_{aR}(x) \end{aligned} \quad (8.12)$$

de maneira que

$$\mathcal{L}'^D = - \sum_{a,b} \overline{\nu_{bL}}(x) M_{ab} \nu_{aR}(x) + h.c. \quad (8.13)$$

ou

$$\mathcal{L}'^D = -\overline{\nu}_L(x) M^{DT} \nu_R(x) + h.c..$$

Se impomos invariança sob CP

$$-\overline{\nu}_L(x) M^{DT} \nu_R(x) = -\overline{\nu}_L(x) M^{D\dagger} \nu_R(x)$$

de maneira que

$$(M^D)^T = (M^D)^\dagger.$$

Desta forma, se a teoria é CP invariante, a matriz de massa é real. Uma matriz real pode ser diagonalizada via uma transformação biortogonal

$$M = O' m O^T.$$

Se adicionalmente M é simétrica,

$$M = O m O^T,$$

uma vez que toda matriz real simétrica pode ser diagonalizada via uma transformação ortogonal.

Se os fatores de fase arbitrários associados as transformações CP forem levados em conta, CP invariança implica em que a matriz de mistura tem a forma

$$U_{lk} = e^{i\alpha_l} O_{lk} e^{-i\alpha_k} e^{i\alpha'}$$

onde O é uma matriz ortogonal. Tais fatores de fase podem ser absorvidos por observar-se que a matriz $U' = e^{i\alpha_l'} \delta_{ll'} U e^{-i\beta_{k'}} \delta_{kk'}$ também diagonaliza a matriz de massa M as constantes arbitrárias $\alpha_{l'}$ e $\beta_{k'}$ podendo ser utilizadas para absorver as constantes de fase arbitrárias.

Invariança sob CP do termo de massa de Majorana.

Escrevendo

$$(\mathcal{L}^M)' = (\mathcal{L}^M)^c$$

onde

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \nu_L^T C^{-1} M^M \nu_L - \frac{1}{2} \bar{\nu}_L (M^M)^\dagger \bar{\nu}_L^T \quad (8.14)$$

em termos dos campos transformados sob CP

$$(\nu_L)^c = i\gamma^2 \nu_L^*$$

$$((\nu_L)^c)^c = \nu_L$$

$$(\mathcal{L}^M)' = -\frac{1}{2} \nu_L^{*T} \gamma^0 M^M i\gamma^2 \nu_L^* + h.c. \quad (8.15)$$

$$(\mathcal{L}^M)' = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M^M C \bar{\nu}_L^T + h.c$$

de maneira que

$$M^M = (M^M)^\dagger.$$

E na expressão (8.14) utilizamo-nos do fato que

$$\overline{(\nu_L)^c} = (i\gamma^2 \nu_L^*)^\dagger \gamma^0 = -i\nu_L^T (\gamma^2)^\dagger \gamma^0$$

$$\overline{(\nu_L)^c} = i\nu_L^T \gamma^2 \gamma^0 = -\nu_L^T C^{-1}.$$

8.1.5 Diagonalização de uma matriz complexa simétrica.

Uma matriz M complexa sempre pode ser diagonalizada por uma transformação biunitária

$$M = V m U^\dagger$$

onde $m = V^\dagger M U$ é tal que $m_{ik} = m_k \delta_{ik}$; $m_k \geq 0$; e $V V^\dagger = U U^\dagger = \mathbf{1}$.

Uma matriz complexa simétrica pode ser sempre diagonalizada por uma matriz unitária U

$$m = (U^\dagger)^T M U^\dagger.$$

Desde que se $M = M^T$

$$V m U^\dagger = (U^\dagger)^T m V^T$$

$$M M^\dagger = V m U^\dagger U m V^\dagger = V m^2 V^\dagger,$$

no entanto

$$M M^f = (U^\dagger)^T m V^T (V^T)^\dagger m U^T = (U^f)^T m^2 U^T,$$

desta forma

$$(U^f)^T m^2 U^T = V m^2 V^\dagger$$

de onde

$$m^2 U^T V = U^T V m^2. \quad (8.16)$$

Mas $U^T V$ é unitária e pela relação (8.16) diagonal, assim

$$U^T V = S$$

onde

$$S_{ik} = e^{i2\alpha_k} \delta_{ik}; \quad \alpha_k = \text{constante real}.$$

Desta forma

$$(U^T)^\dagger U^T V = (U^T)^\dagger S,$$

mas

$$V = (U^T)^\dagger S,$$

de onde

$$(U^T)^\dagger S m U^\dagger = M.$$

É fácil ver que tal relação pode ser escrita como

$$M = (U^T)^\dagger S^{\frac{1}{2}} m S^{\frac{1}{2}} U^\dagger$$

de onde, definindo-se

$$(U')^\dagger = S^{\frac{1}{2}} U^\dagger,$$
$$m = (U'^\dagger)^T M U'^\dagger.$$

8.2 Apêndice B.

8.2.1 As matrizes de Gell-Mann.

As matrizes T_i são definidas a partir das matrizes de Gell-Mann Λ_i pela relação

$$T_i = \frac{\Lambda_i}{2},$$

e são dadas por:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

As regras de comutação, anticomutação e multiplicação entre as matrizes T_i são

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3}\delta_{ab} + d_{abc}T_c$$

$$T_a T_b = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}\delta_{ab} + (d_{abc} + if_{abc})T_c \right]$$

respectivamente. As constantes totalmente antisimétricas de SU(3), f_{abc} , e as constantes totalmente simétricas, d_{abc} , independentes e diferentes de zero estão listadas na tabela B-1.

abc	f_{abc}	klm	$2d_{klm}$	klm	$2d_{klm}$
123	1	118	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	366	-1
147	$\frac{+1}{2}$	146	+1	377	-1
156	$\frac{-1}{2}$	157	+1	448	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
246	$\frac{+1}{2}$	228	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	558	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
257	$\frac{+1}{2}$	247	-1	668	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
345	$\frac{+1}{2}$	256	+1	778	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
367	$\frac{-1}{2}$	338	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	888	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	344	+1		
678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	355	+1		

Definindo-se as matrizes auxiliares

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2; \quad V_{\pm} = T_4 \pm iT_5; \quad e \quad U_{\pm} = T_6 \pm iT_7,$$

é fácil mostrar que as relações básicas diferentes de zero envolvendo o produto de duas destas matrizes são:

$$1. \quad T_+ T_- = V_+ V_-$$

$$2. \quad U_+ U_- = T_- T_+$$

$$3. U_- U_+ = V_- V_+$$

$$4. T_+ U_+ = V_+$$

$$5. T_- V_+ = U_+$$

$$6. V_+ U_- = T_+$$

$$7. V_- T_+ = U_-$$

$$8. U_+ V_- = T_-$$

$$9. U_- T_- = V_-$$

de onde

$$1. T_+ T_- T_+ = T_+$$

$$2. T_- T_+ T_- = T_-$$

$$3. V_+ V_- V_+ = V_+$$

$$4. V_- V_+ V_- = V_-$$

$$5. U_- U_+ U_- = U_-$$

$$6. U_+ U_- U_+ = U_+$$

Seja agora a quantidade $F = e^{-i\Sigma}$ onde Σ é a matriz dada por

$$\Sigma = a_1 T_+ + a_2 T_- + a_3 V_+ + a_4 V_-$$

onde os coeficientes a_j são constantes, expandindo F e utilizando-se das regras de multiplicação entre as matrizes T_j , podemos escrever:

$$F = 1 + \Sigma_1 T_+ + \Sigma_2 T_- + \Sigma_3 V_+ + \Sigma_4 V_- + \Sigma_5 T_- T_+ + \\ \Sigma_6 T_+ T_- + \Sigma_7 V_- V_+ + \Sigma_8 U_+ + \Sigma_9 U_- ,$$

e nesta expressão Σ_i são séries envolvendo as constantes a_j .

Analogamente ao cálculo efetuado em (8.1) podemos calcular a quantidade

$$e^{-i \int (A_3 T_3 + A_8 T_8) dy} (A_1 T_1 + A_4 T_4) e^{-i \int (A_3 T_3 + A_8 T_8) dy}$$

a qual resulta

$$\frac{A_1}{2} (\varphi_1 T_+ + \varphi_1^* T_-) + \frac{A_4}{2} \varphi_4 V_+ + \varphi_4^* V_-.$$

8.2.2 O método da fase estacionária.

A avaliação de integrais do tipo

$$I = \int_0^t e^{i\delta f(t_1)} g(t_1) dt_1, \quad (8.17)$$

quando δ é um parâmetro real positivo muito grande, pode ser efetuada pelo método da fase estacionária[38]. O integrando nestes casos, oscila rapidamente, de maneira que a maior contribuição para o valor da integral origina-se das vizinhanças imediatas dos extremos de integração e das vizinhanças daqueles pontos t_R para os quais $f(t_1)$ é estacionária

$$\left(\frac{df(t_1)}{dt_1} \right)_{t=t_R} = 0, \quad (8.18)$$

a contribuição da fase estacionária, se existir, sendo mais importante que a dos extremos. Nestes casos, a integral pode ser avaliada, e resulta

$$I = \left[\frac{2\pi}{\delta f''(t_R)} \right]^{\frac{1}{2}} g(t_R) e^{i(\delta f(t_R) + \frac{\pi}{4})}.$$

Seja a série (eq. 4.27)

$$\Sigma^- = -i \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1^* dt_1 + i \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1 dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1^* dt_3 - \dots$$

onde

$$a_1 = \frac{\Delta \sin 2\theta}{4E}; \quad \varphi_1(t) = e^{-i\rho(t)}$$

com

$$\rho(t) = \int^t \frac{(\Delta \cos 2\theta - A)}{2E} dt_1.$$

Tal série envolve integrais do tipo (eq. 8.17) que podem ser avaliadas pelo método da fase estacionária, a fase estacionária que é determinada pela condição (8.18) o que determina

$$A(t_R) = \Delta \cos 2\theta,$$

de modo que as integrais de Σ^- resultam

$$\begin{aligned} -i \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1^* dt_1 &= -i 2\xi e^{i(\frac{\pi}{4} + \rho(t_R))} \\ i \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1 dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1^* dt_3 &= i 2\xi^3 e^{i(\frac{\pi}{4} + \rho(t_R))} \end{aligned}$$

com

$$\xi = \left[\frac{\pi}{2\rho'(t_R)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta \sin 2\theta}{4E}; \quad (8.19)$$

calculando-se mais alguns termos e generalizando-se para mais altas ordens obtemos

$$\Sigma^- = -i 2\xi [1 - \xi^2 + \xi^4 - \xi^6 + \dots]$$

a qual converge para

$$\Sigma^- = -i \frac{2\xi}{1 + \xi^2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \rho(t_R))}$$

quando $\xi^2 < 1$.

Evidentemente a série Σ^+

$$\Sigma^+ = -i \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1 dt_1 + i \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1 dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1^* dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1 dt_3 - \dots$$

resulta

$$\Sigma^+ = -i \frac{2\xi}{1 + \xi^2} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \rho(t_R))}.$$

As séries Σ^{+-} e Σ^{-+}

$$\begin{aligned} \Sigma^{+-} &= 1 - \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1 dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1^* dt_2 + \\ &\int_{t_0}^t a_1 \varphi_1 dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1^* dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1 dt_3 \int_{t_0}^{t_3} a_1 \varphi_1^* dt_4 - \dots \end{aligned}$$

$$\Sigma^{-+} = 1 - \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1 dt_2 + \int_{t_0}^t a_1 \varphi_1^* dt_1 \int_{t_0}^{t_1} a_1 \varphi_1 dt_2 \int_{t_0}^{t_2} a_1 \varphi_1^* dt_3 \int_{t_0}^{t_3} a_1 \varphi_1 dt_4 - \dots$$

podem ser avaliadas pelo mesmo processo e resultam

$$1 + \Sigma^{+-} = 1 + \Sigma^{-+} = \frac{-2\xi^2}{1 + \xi^2}.$$

Não é difícil verificar que a série Σ_1 de (6.28) pode ser avaliada pelo mesmo processo.

8.2.3 O termo de interação com a matéria.

Podemos escrever a hamiltoniana efetiva relativa à corrente carregada na forma:

$$H_{W\pm} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{e}(p_1) \gamma_\lambda P_L \nu_e(p_2) \} \{ \bar{\nu}_e(p_3) \gamma^\lambda P_L e(p_4) \} \quad (8.20)$$

ou, alternativamente,

$$H_{W\pm} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{\nu}_e(p_3) \gamma_\lambda P_L \nu_e(p_2) \} \{ \bar{e}(p_1) \gamma^\lambda P_L e(p_4) \},$$

onde a segunda forma é obtida via transformação de Fierz. [29].

Para espalhamento elástico tal que: $p_2 = p_3 = p$, podemos avaliar a média

$$\bar{\Pi} = \sum_\lambda \langle \bar{e} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) e \rangle$$

como forma de avaliar a influência da matéria na evolução temporal do estado neutrínico. Explicitando $\bar{\Pi}$

$$\bar{\Pi} = \langle \bar{e} \gamma^0 e \rangle + \langle \bar{e} \gamma^i e \rangle - \sum_\lambda \langle \bar{e} \gamma^\lambda \gamma^5 e \rangle,$$

onde podemos escrever a parte axial como

$$\sum_\lambda \langle \bar{e} \gamma^\lambda \gamma^5 e \rangle = \langle e^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 e \rangle + \sum_i \langle e^\dagger \gamma^0 \gamma^i \gamma^5 e \rangle.$$

Mas:

$$\gamma^0 \gamma^i = \gamma^5 \Sigma_i = \Sigma_i \gamma^5$$

onde

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Desta forma:

$$\langle \bar{e} \gamma^\lambda \gamma^5 e \rangle = \langle e^\dagger \gamma^5 e \rangle + \sum_i \langle e^\dagger \Sigma_i e \rangle,$$

onde o último termo corresponde à densidade de spin que é negligenciável para uma coleção de elétrons não relativísticos [6]. Podemos escrever o primeiro termo como

$$\begin{aligned} \langle e^\dagger \gamma^5 e \rangle &= \left\langle (e_A^\dagger, e_B^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_A \\ e_B \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle e_A^\dagger e_B + e_B^\dagger e_A \rangle \end{aligned}$$

que por misturar as componentes big e litte , pode ser desconsiderado frente a termos $e_A^\dagger e_A$ no limite não relativístico. Falta-nos agora avaliar as quantidades :

$$\langle \bar{e} \gamma^0 e \rangle \text{ e } \langle \bar{e} \gamma^i e \rangle.$$

Escrevendo

$$e(p) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

onde u_A e u_B são as chamadas componentes upper e lower as quais são para o elétron

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; -u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$u_B = \frac{c}{E + mc^2} (p \cdot \sigma) u_A$$

desta forma:

$$\bar{e} \gamma^i e = N^2 (u_A^\dagger, \frac{c}{E + mc^2} u_A^\dagger (p \cdot \sigma)^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

onde N é uma constante de normalização. Após alguma álgebra e utilizando-se N como [17]

$$N^2 = \frac{E + mc^2}{c}$$

obtemos:

$$\langle \bar{e} \gamma^i e \rangle = \langle \frac{cp_i}{E + mc^2} \rangle$$

que no limite não relativístico resulta simplesmente

$$\langle \bar{e} \gamma^i e \rangle \simeq \frac{v}{c}.$$

Lançando mão da equação da continuidade

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0$$

e interpretando o termo espacial como o fluxo de partículas, no limite não relativístico , obtemos para a componente temporal o resultado.

$$\langle \bar{e} \gamma^0 e \rangle = \langle e^\dagger e \rangle = N_e.$$

Desta forma o resultado para $H_{W\pm}$ é:

$$H_{W\pm} = 2\sqrt{2}G_F N_e.$$

Abstract

We present in this work solutions of the time evolution equation for a three component spinor, when the Hamiltonian is constant and a time dependent function. Solutions are discussed for a system of three flavor neutrino states in the solar matter. The obtained solutions are exact, when we assume that matter distribution is constant. Approximated solutions are got when the matter distribution is supposed to be a time-dependent function. We also discuss how to define mixed angles in the matter, and how to analyze resonant transitions between flavor neutrinos in a time-dependent matter distribution.

Bibliografia

1. F. Reines and C.L. Cowan, Phys. Rev. **92**, 8301 (1953); C.L. Cowan et al., Science **124**, 103 (1956).
2. R. Davis and D.S. Harmer, Bull. A. Phys. Soc. **4**, 217 (1959).
3. C.S. Wu et al., Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).
4. G. Damby et al., Phys. Rev. Lett. **9**, 36 (1962); L. Lederman, Scientific American (March 1963).
5. The Lep Electroweak Working Group, LEPEWWG/94-01; ver também Phys. Rev. D **50**, (1994).
6. Rabindra N. Mohapatra and P. B. Pal, Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics, World Scientific Lectures Notes in Physics **44**, 41 (1991).
7. J.N. Bahcall, Neutrinos Astrophysics, Cambridge Univ. Press (1969).
8. J. N. Bahcall and R. Ulrich, Rev. Modern Physics **60**, 297 (1988); H. Bethe, Phys. Rev. **55**, 303 (1939).
9. R. Davis Jr., Phys. Rev. Lett. **12**, 303 (1964).
10. R. Davis Jr., in Neutrinos '88, ed. J. Chneps et al., World Scientific (1988).
11. K.S. Hirata et al, Phys. Rev. Lett. **63**, 16 (1989); Phys. Rev. Lett. **65**, 1297, 1301 (1990).
12. G.T. Zatsepin, Neutrinos '92 Conference.
13. P. Anselman et al., Phys. Lett. B **285**, 390 , 376 (1992).
14. S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
15. Weinberg S., Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

16. Salam A., in *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and analyticity*, Proceedings of the Eighth Nobel Symposium, edited by N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm), 367 (1968).
17. David Griffiths, *Introduction To Elementary Particles*, J. Wiley & Sons, N.Y. (1976).
18. Maki Z. et al., *Phys. Rev. Lett.* **52**, 870 (1962).
19. Elieser S.E., and D.A. Ross, *Phys. Rev. D* **10**, 3088 (1974).
20. Bilenki S.M., and B. Pontecorvo, *Phys. Lett. B* **61**, 248 (1976); Bilenki S.M., and B. Pontecorvo, *Nuovo Cimento* **17**, 569 (1976).
21. Fritzsche H. and P., Minkowski, *Phys. Lett. B* **62**, 72 (1976).
22. V. Gribov, and B. Pontecorvo, *Phys. Lett. B* **28**, 463 (1969).
23. Barger V., et al., *Phys. Rev. D* **22**, 2718 (1980).
24. Bilenki S. M., J. Hosek, and S. T. Petcov, *Phys. Lett. B* **94**, 495 (1980).
25. Kobsarev et al., *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985).
26. J. Schechter, and J.W.F. Valle, *Phys. Rev. D* **22**, 2227 (1980).
27. S. M. Bilenki, and S.T. Petcov, *Rev. of Modern Phys.* **59**, (1987).
28. Maiani L., "New Currents ", in *Proc. 1977 Int. Symp. On Lepton and Photon Int. at High Energies*, ed. by F. Gutbrod (DESY, Hamburg, 1977).
29. O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics*, Springer-Verlag, N.Y. (1985).
30. L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **17**, 2369 (1978); **20**, 2634 (1979).
31. S.P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 1913 (1985); *Nuovo Cimento* **9C**, 17 (1986).
32. P.B. Pal, *Int. J. of Mod. Phys. A* **7**, 5387 (1992).

33. S. P. Mikheyev, and A. Yu. Smirnov, *Phys. Lett. B* **260**, 161 (1991).
34. C. Zener, *Proc. R. Soc. London A* **137**, 696 (1932); L. Landau, *Phys. Z. Sow.* **2**, 46 (1932).
35. M.M. Guzzo, and J. Bellandi, *Phys. Lett. B* **294**, 243 (1992).
36. M.M. Guzzo, J. Bellandi, and V.M. Aquino, *Phys. Rev. D* **49**, 1404 (1994).
37. R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **84**, 108 (1951).
38. A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover Pub. Inc. N.Y. (1956).
39. S.T. Petcov, *Phys. Lett. B* **200**, 373 (1988).
40. L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **17**, 2369 (1978).
41. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, (1962).
42. S.T. Petcov, *Nucl. Phys. B* **13**, 527 (1990).
43. T.K. Kuo, and James Pantaleone, *Phys. Rev. D* **35**, 3432 (1987).
44. I. Fujivara, *Prog. Theor. Phys.* **7**, 433 (1952).
45. E. Kh. Akhmedov, and O. V. Bychuk, *Sov. Phys. JETP* **68**, 250 (1989).
46. V. Barger, K. Whisnant, S. Pakvasa, and R.J.N. Phillips, *Phys. Rev. D* **22**, 2718 (1980).
47. V. Barger, K. Whisnant, D.B. Cline, and R.J.N. Phillips, *Phys. Lett. B* **93**, 194 (1980).
48. F. Reines, in *Unification of Elementary Forces and Gauge Theories*, *Proc. of the Ben Lee Memorial International Conference on Parity Nonconservation, Weak Neutral Currents, and Gauge Theories*, Fermilab, 1977, ed. by D.B. Cline and F.E. Mills (Harwood, Academy, N.Y.) 103 (1979).
49. J.N. Bahcall et al., *Phys. Rev. Lett.* **45**, 945 (1980).

50. Harry Bateman, Tables of Integral Transforms, Mc Graw-Hill, Book Company Inc. (1954).
51. S.T. Petcov, Phys. Lett. B **191**, 299 (1987).
52. J. Bellandi, M.M. Guzzo, J.R. Fleitas, and V.M. Aquino, (submetido para publicação).