

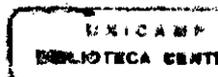
A Identidade de Feynman :  
um caso especial

João Variane Júnior

Orientador : Prof. Gustavo A. T. F. da Costa

Tese apresentada ao  
Instituto de Física *Gleb Wataghin*  
para obtenção do Título de Mestre em Física

Departamento de Raios CósMICOS e Cronologia  
IFGW - UNICAMP  
julho - 1997





INSTITUTO DE FÍSICA  
GLEB WATAGHIN

**PARECER DE APROVAÇÃO**

**DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE**

**JOÃO VARIANE JÚNIOR**

**DATA : 31 / 07 / 97**

**BANCA EXAMINADORA:**

**- Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa (Orientador do Candidato)**

**- Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti**

**- Prof. Dr. José Bellandi Filho**

## Banca Examinadora

- Prof. Dr. Gustavo A. T. F. da Costa ( orientador ) - IFGW / UNICAMP
- Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti - IF / USP
- Prof. Dr. José Bellandi Filho - IFGW / UNICAMP
- Prof. Dr. Márcio Rosa ( suplente ) - IMECC / UNICAMP
- Prof. Dr. Marcelo Guzzo ( suplente ) - IFGW / UNICAMP

# Contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Modelo de Ising</b>	<b>3</b>
2.1	Definição do modelo . . . . .	3
2.2	Formulação combinatorial do modelo de Ising . . . . .	7
<b>3</b>	<b>A Identidade de Feynman: um caso particular</b>	<b>22</b>
3.1	A Identidade de Feynman . . . . .	22
3.2	Caso Particular . . . . .	25
3.3	Cálculo dos pesos . . . . .	29
3.4	Cancelamento dos termos . . . . .	35
	<b>Apêndice A - Regra dos sinais</b>	<b>39</b>
	<b>Apêndice B - Cálculo de <math>W_r(l, N, s, T)</math></b>	<b>49</b>
B.1	Cálculo de $I_r(l)$ . . . . .	50
B.2	Cálculo de $q_r(l)$ . . . . .	50
	<b>Apêndice C - Cálculo dos pesos</b>	<b>52</b>

# List of Figures

Figura 1.1: Exemplos de redes em uma (a) e duas (b) dimensões . . . 4  
 Figura 1.2: Gráficos admissíveis sobre rede quadrada . . . . . 8  
 Figura 1.3: Giro de 180° . . . . . 9  
 Figura 1.4: Polígono simples . . . . . 10  
 Figura 1.5: Caminhos que percorrem o gráfico da Figura 4. . . . . 10  
 Figura 1.6: Exemplo de gráfico admissível . . . . . 11  
 Figura 1.7: Sub-gráficos associados a  $G$ . . . . . 11  
 Figura 1.8: Caminhos unicursais que percorrem  $G$ . . . . . 12  
 Figura 1.9: Contra-exemplo do cancelamento de caminhos unicursais. 13  
 Figura 1.10: Movimentos possíveis do vetor no vértice. . . . . 14  
  
 Figura 3.1: Rede com um sítio e  $R$  arestas. . . . . 23  
 Figura A.1: Cruzamentos em segmento  $D_i^{e_i}$ . . . . . 42  
 Figura A.3: Segmentos de curva  $(D_1^{e_{11}} \dots D_1^{e_{12}} \dots D_1^{e_{13}} \dots D_1^{e_{1k_1}})$  . . . 43  
 Figura A.3: Segmentos de curva  $(\dots D_j^{e_{j1}} \dots D_j^{e_{j2}} \dots D_j^{e_{j3}} \dots D_j^{e_{jk_j}})$  . . . 44  
 Figura A.4: Mudança de sinal no expoente . . . . . 45  
 Figura A.5: Cruzamentos devidos ao primeiro expoente negativo . . . 46  
 Figura A.6: Cruzamentos devidos ao primeiro e segundo expoentes  
           negativos . . . . . 46  
 Figura A.7: Cruzamentos devidos ao primeiro, segundo e terceiro  
           expoentes negativos . . . . . 47

# Resumo

A Identidade de Feynman relaciona certos tipos de gráficos e caminhos fechados sobre uma rede quadrada. Inicialmente conjecturada por Feynman, esta relação é importante no cálculo da função de partição do Modelo de Ising dentro da chamada formulação combinatorial do modelo.

Nesta tese um caso particular e não trivial desta identidade é investigado. Neste caso, a rede tem apenas um vértice e  $R$  arestas com todas as extremidades ligadas a ele. A existência da identidade neste caso é provada e alguns problemas até então em aberto sobre ele são resolvidos.

# Abstract

Feynman identity relates certain types of graphs with closed paths over a squared lattice. Originally conjectured by Feynman, this identity is an important element in the combinatorial formulation of the Ising Model and in the computation of the partition function of the model within this formulation.

In this Thesis a particular but nontrivial case of the identity is investigated. In this case, the lattice has only one site and  $R$  edges linked to it. The existence of the identity in this case is proved and some open problems related with it are solved.

# Chapter 1

## Introdução

A Identidade de Feynman [1-6] consiste de uma relação envolvendo certos tipos de gráficos e curvas fechadas sobre uma rede quadrada. De acordo com as referências [1] e [4] a existência desta identidade foi conjecturada por Richard Feynman no contexto do Modelo de Ising [7-11] em duas dimensões e originalmente apareceu formulada em notas de aula devidas a Feynman. Estas notas foram posteriormente publicadas em livro [5]. A identidade foi utilizada por ele no seu cálculo da fórmula de Onsager para a função de partição do modelo.

Onsager foi o primeiro a obter uma expressão exata para a função de partição do Modelo de Ising em duas dimensões, conhecida como *fórmula de Onsager* [8]. Ele se utilizou do chamado método algébrico, que consiste essencialmente em expressar a função de partição como o traço de uma determinada matriz. O cálculo segue da diagonalização desta matriz e da determinação de seus autovalores. O método algébrico é revisado nas referências [9-11].

Kac e Ward [12] propuseram a formulação combinatorial baseada na expansão da função de partição como soma sobre funções de gráficos e na ligação destes com funções de caminhos orientados não periódicos na rede. A maneira como se dá esta relação de equivalência entre as duas funções não foi bem definida por eles. Feynman propôs então uma conjectura que faz esta passagem.

A conjectura de Feynman afirma que existem funções  $I(G)$  e  $W(\gamma)$  definidas sobre certos gráficos  $G$  e caminhos fechados  $\gamma$  sobre uma rede quadrada re-

spectivamente, tais que a seguinte identidade é satisfeita:

$$\prod_{\gamma} [1 + W(\gamma)] = 1 + \sum_G I(G) \quad (1.1)$$

O produtório é sobre todos os caminhos fechados  $\gamma$  não periódicos e a somatória é sobre os chamados gráficos admissíveis na rede. Ambas as funções serão definidas no próximo capítulo.

São conhecidas duas provas da identidade, devidas a Sherman [1-3] e Burgoyne [4], respectivamente. Estas provas, contudo, não são inteiramente transparentes e, em geral, são de difícil leitura.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No segundo capítulo é definido o modelo de Ising em duas dimensões e revisto o cálculo da fórmula de Onsager na formulação combinatorial via identidade de Feynman. No Capítulo 3 a formulação de Sherman da identidade é apresentada e um caso particular porém não trivial dela é investigado com grande detalhe. Provamos a identidade neste caso e solucionamos alguns problemas ainda em aberto sobre o mesmo. Algumas relações matemáticas importantes utilizadas no capítulo 3 são derivadas nos apêndices.

# Chapter 2

## O Modelo de Ising

Neste capítulo será apresentada a definição do modelo de Ising e, a seguir, a fórmula de Onsager para a função de partição deste modelo será obtida na formulação combinatorial via Identidade de Feynman.

### 2.1 Definição do modelo

A meta principal da mecânica estatística consiste em estudar as propriedades termodinâmicas de um sistema de muitas partículas tais como entropia, calor específico, energia livre, pontos de transição de fase, etc. a partir de informações sobre como elas interagem. Uma classe de sistemas onde muitos exemplos de cálculo exato destas quantidades termodinâmicas têm, em geral, sido possíveis é a dos chamados modelos de spins na rede.

A rede é um conjunto conexo finito ou infinito de sítios, que se ligam através de arestas, em uma, duas ou mais dimensões como nos exemplos da Figura 1.1.

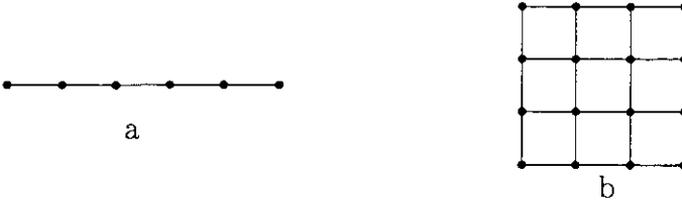


Figura 1.1: Exemplos de redes em uma (a) e duas (b) dimensões

A Figura ( 1.1-a ) mostra uma rede unidimensional, também chamada de cadeia, com 6 sítios e 5 arestas, enquanto a Figura ( 1.1-b ) mostra um exemplo de rede bidimensional chamada rede quadrada. As partículas que formam o sistema estão localizadas nos sítios da rede e as arestas indicam com quais partículas cada uma interage. Por exemplo, nas Figuras ( 1.1-a ) e ( 1.1-b ) a interação ocorre entre os vizinhos mais próximos de cada partícula.

Um modelo na rede está definido se a forma da interação entre as partículas é dada. As propriedades físicas do sistema podem, então, ser obtidas a partir da chamada *função de partição* [5].

Supondo que os estados do sistema são discretos a função de partição  $Z(T)$  do sistema é definida como

$$Z(T) = \sum_{\sigma \in S} \exp\left(-\frac{E(\sigma)}{kT}\right) \quad (2.1)$$

onde

$E(\sigma)$  é a energia do sistema no estado  $\sigma \in S$ ;

$k$  é a constante de Boltzmann;

$T$  a temperatura absoluta do sistema;

e a somatória é efetuada sobre todos os possíveis estados em  $S$ .

De maneira geral a energia  $E$  é dada pela soma da energia cinética com a energia potencial das partículas que compõem o sistema, mas, em geral, nestes modelos, elas se encontram fixas nos sítios e a energia cinética é nula. O único termo que resta é dado pela interação entre as partículas.

O modelo de rede primeiramente estudado e que teve sua função de partição e propriedades calculadas exatamente foi o chamado *Modelo de Ising*

em uma [7] e duas dimensões [8]. O modelo de Ising em duas dimensões está definido na rede quadrada com  $N$  sítios mostrada na figura ( 1.b ). Neste modelo cada partícula pode estar em um de dois estados possíveis denotados por  $\sigma_i = \pm 1$ , e  $i = 1, 2, \dots, N$ . O significado físico destes estados depende do contexto no qual o modelo é aplicado. Por exemplo, no estudo de ligas metálicas binárias eles podem representar cada um a presença de um certo tipo de átomo naquele sítio. No estudo das propriedades magnéticas de um metal os estados  $\pm 1$  são interpretados como as orientações possíveis de um dipolo magnético no sítio  $i$ . Tornou-se lugar comum chamar os estados  $\sigma_i$  de *spins*. As propriedades físicas do modelo de Ising e suas aplicações são discutidas em detalhe nas referências [5,9-11].

No modelo de Ising, as partículas interagem apenas com os seus primeiros vizinhos, ou seja, a interação ocorre ao longo das arestas da rede quadrada. A energia de interação entre dois spins é

$$E_{i,j} = \begin{cases} -J\sigma_i\sigma_j & \text{se os sítios } i \text{ e } j \text{ são primeiros vizinhos} \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $J$  é uma constante que dá a medida da força de interação entre as partículas do sistema.

Para o conjunto total de  $N$  spins há  $2^N$  combinações diferentes destes, correspondendo cada uma delas a uma configuração  $\sigma$  no conjunto  $S$  dos estados. A energia de cada uma destas configurações é dada pela soma da energia de interação entre as partículas

$$E\{\sigma\} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i\sigma_j \quad (2.3)$$

onde  $\langle i, j \rangle$  indica soma restrita aos termos nos quais  $i$  e  $j$  são primeiros vizinhos e  $\sigma_i, \sigma_j$  são estados da configuração  $\sigma$ .

Generalizações do modelo de Ising são possíveis. Por exemplo, no modelo de Potts [11] os spins podem assumir mais de dois valores. É também bastante estudado o caso em que há interação dos spins com um campo magnético externo uniforme  $H$ . Neste caso a energia é dada como

$$E\{\sigma\} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i\sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i \quad (2.4)$$

onde  $\mu$  é o momento magnético da partícula.

Onsager [8] foi o primeiro a obter uma expressão exata para a função  $Z(T)$ , definida pela relação ( 2.1 ) com a energia  $E\{\sigma\}$  dada por ( 2.3 ) para o caso bidimensional. Em dimensão maior ou igual a três o cálculo exato da função de partição permanece ainda sem solução. Na presença de campo magnético externo, onde a energia  $E\{\sigma\}$  é definida pela relação ( 2.4 ), isto também é verdade para dimensão maior ou igual a dois. Daqui em diante, ao mencionarmos o modelo de Ising, estaremos nos referindo ao modelo bidimensional sem campo magnético.

O modelo de Ising, embora assuma relações bastante simplificadas na descrição de interação entre os corpos, é eficiente em fornecer resultados exatos sobre características macroscópicas do sistema. Estas quantidades podem ser determinadas através da função de partição da rede e um dos possíveis métodos de calcular esta função exatamente será estudado na próxima seção.

## 2.2 Formulação combinatorial do modelo de Ising

Podemos escrever a função de partição do Modelo de Ising na forma

$$Z(T) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{\langle i,j \rangle} \exp(K\sigma_i\sigma_j) \quad (2.5)$$

onde  $K = J/kT$ .

O produto  $\sigma_i\sigma_j$  só pode tomar dois valores distintos:  $+1$  se  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  têm o mesmo sinal e  $-1$  se sinais opostos.

Se  $\sigma_i\sigma_j = +1$ , então

$$\exp(K\sigma_i\sigma_j) = \cosh K + \sinh K = (1 + \tanh K) \cosh K \quad (2.6)$$

e se  $\sigma_i\sigma_j = -1$ ,

$$\exp(K\sigma_i\sigma_j) = \cosh K - \sinh K = (1 - \tanh K) \cosh K \quad (2.7)$$

Portanto,

$$\prod_{\langle i,j \rangle} \exp(K\sigma_i\sigma_j) = (\cosh K)^x \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + \sigma_i\sigma_j \tanh K) \quad (2.8)$$

onde  $x$  é o número de termos do produtório, sendo igual ao número de interações entre os primeiros vizinhos ou o número de arestas da rede quadrada, e depende das condições de contorno utilizadas.

Envolvendo a rede em um toro liga-se a última coluna com a primeira coluna e a última linha da rede com a primeira linha e obtém-se as condições de contorno periódicas. Neste caso o número de ligações  $x$  é:

$$x = \frac{Nc}{2} \quad (2.9)$$

onde  $c$  é o número de primeiros vizinhos da rede. Especificamente para a rede quadrada  $c = 4$  e  $x = 2N$ .

Ao usar condições de contorno livres, os sítios localizados nas primeiras e últimas colunas e linhas da rede não possuem  $c$  primeiros vizinhos. Assim o número  $x$  de ligações da rede é menor do que o obtido ao usar condições de

contorno periódicas. Na rede quadrada com  $n$  linhas e  $n$  colunas ( $n^2 = N$ ) este é dado por

$$x = 2N - 2n = 2(N - N^{\frac{1}{2}}) \quad (2.10)$$

No limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$  e densidade constante) a primeira parcela de ( 2.10 ) é dominante e portanto  $x \rightarrow 2N$ . Nestas condições desprezamos o efeito de borda na contagem do número de ligações.

Substituindo ( 2.8 ) em ( 2.5 ) e fazendo  $u = \tanh K$ ,obtemos

$$Z(K) = (\cosh K)^{2N} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + u\sigma_i\sigma_j) \quad (2.11)$$

Note que

$$\prod_{\langle i,j \rangle} (1 + u\sigma_i\sigma_j) = 1 + \sum_p u^p \sum (\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}) \dots (\sigma_{i_{2p-1}}\sigma_{i_{2p}}) \quad (2.12)$$

onde a segunda somatória é sobre todos os  $p$  pares distintos  $\langle i_1 i_2 \rangle, \dots, \langle i_{2p-1} i_{2p} \rangle$ ,  $p = 1, 2, \dots, 2N$  de vizinhos mais próximos.

Observando que

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma = 0 \text{ e } \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma^2 = 2 \quad (2.13)$$

tem-se que os únicos termos não nulos em ( 2.12 ), e portanto na função de partição quando a soma sobre os estados é efetuada são aqueles nos quais cada  $\sigma_i$  aparece numa potência par. Os termos deste tipo, então, podem ser representados por um gráfico – chamado gráfico admissível – onde a cada sítio estão ligadas um número par de arestas, apenas.

São exemplos de gráficos admissíveis construídos sobre uma rede quadrada plana os seguintes:

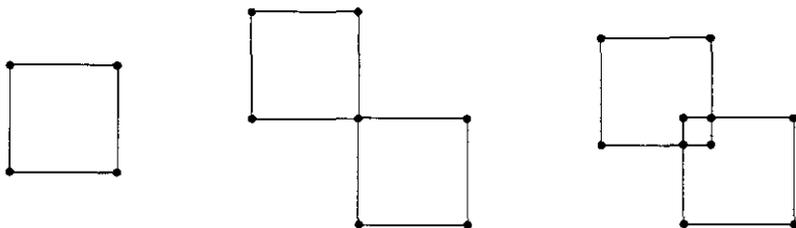


Figura 1.2: Gráficos admissíveis sobre rede quadrada

Efetuando as somas sobre  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  obtém-se um fator  $2^N$  e a função de partição fica na forma

$$Z = 2^N (\cosh K)^{2N} [1 + \sum_G I(G)] \quad (2.14)$$

onde a soma é tomada sobre todos os gráficos admissíveis  $G$  e  $I(G)$  é definido pela fórmula

$$I(G) = \prod_{i \in G} d_i \quad (2.15)$$

sendo o produtório tomado sobre as arestas  $i$  do gráfico  $G$  e  $d_i = u = \tanh K$ .

Em seguida a soma sobre gráficos admissíveis será expressa em termos de caminhos sobre a rede.

Um caminho  $\gamma$  sobre a rede consiste de uma sequência orientada de arestas de tal forma que cada uma começa onde termina a anterior. Serão considerados somente os caminhos fechados, ou seja, aqueles nos quais a última aresta do caminho termina no sítio no qual a primeira teve início. Uma restrição é imposta de tal forma que, na construção, não se pode percorrer a mesma linha duas vezes em seguida e em sentidos opostos, como na Figura 1.3:

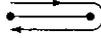


Figura 1.3: giro de  $180^\circ$

A cada caminho  $\gamma$  associa-se uma quantidade  $I(\gamma)$  dada por

$$I(\gamma) = d_{i_1}^{m_1} d_{i_2}^{m_2} \dots d_{i_k}^{m_k} \quad (2.16)$$

onde  $m_i$  é o número de vezes em que a aresta  $i$  foi percorrida no caminho.

Define-se  $W(\gamma)$  como sendo :

$$W(\gamma) = \text{sin}(\gamma) I(\gamma) \quad (2.17)$$

e o  $\text{sin}(\gamma)$  é dado pela fórmula

$$\text{sin}(\gamma) = (-1)^{\frac{\varphi}{2\pi} + 1} \quad (2.18)$$

onde  $\frac{\varphi}{2\pi}$  é o número de ângulos completos de  $2\pi$  efetuados por um vetor tangente ao caminho  $\gamma$  ao percorrê-lo. Pode-se verificar que em alguns casos

há uma relação imediata entre gráficos admissíveis e caminhos. Por exemplo, no caso em que os gráficos consistem de um único polígono simples como na figura abaixo:

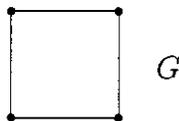


Figura 1.4: Polígono simples

A estes podem ser associados os dois caminhos fechados não periódicos mostrados na Figura 5:

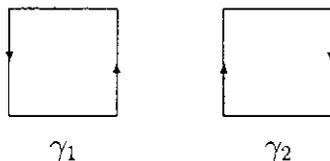


Figura 1.5: Caminhos que percorrem o gráfico da Figura 4.

Calculando explicitamente verifica-se que:

$$I(G) = W(\gamma_1) = W(\gamma_2) \tag{2.19}$$

Os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  diferem apenas no sentido no qual as arestas do gráfico são percorridas. Um é obtido do outro mediante uma *inversão*. Dois caminhos desta forma relacionados sempre têm o mesmo peso  $W(\gamma)$ , sendo considerados equivalentes. Apenas um deles é escolhido ao se estabelecer uma relação entre gráficos e caminhos.

Considere agora o caso de um gráfico formado por dois polígonos que se intersectam em apenas um sítio como na Figura 1.6.

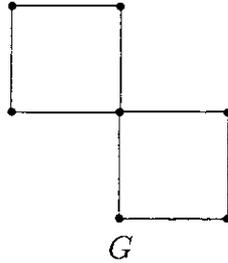


Figura 1.6: Exemplo de gráfico admissível.

Com os sub-gráficos admissíveis de  $G$  dados na Figura 1.6:

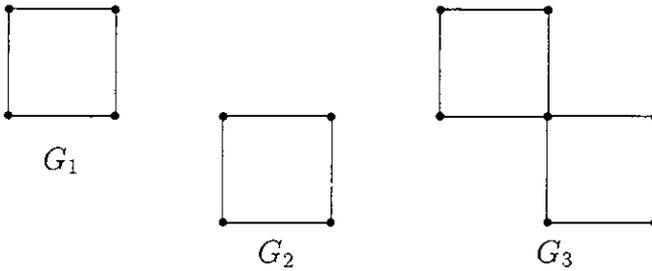


Figura 1.7: Sub-gráficos associados a  $G$ .

podem ser associados os seguintes caminhos que percorrem as linhas do gráfico no máximo uma vez:

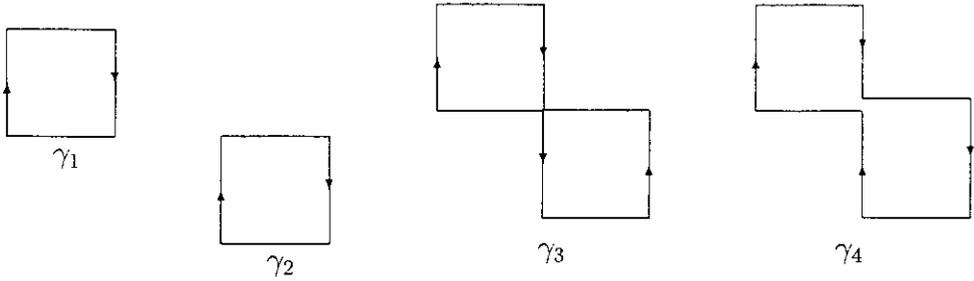


Figura 1.8: Caminhos unicursais que percorrem  $G$ .

e suas respectivas inversões.

Novamente o cálculo explícito mostra que:

$$\begin{aligned}
 1 + W(\gamma_1) + W(\gamma_2) + W(\gamma_1)W(\gamma_2) + W(\gamma_3) + W(\gamma_4) &= \\
 &= 1 + I(G_1) + I(G_2) + I(G_3)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

com

$$W(\gamma_3) + W(\gamma_4) = 0 \tag{2.21}$$

Pode-se entender a igualdade acima como uma relação entre todos os sub-gráficos admissíveis de uma certa rede com todos os caminhos ou produto de caminhos nos quais cada aresta é percorrida no máximo uma vez. Para que esta relação seja válida é necessário que a contribuição devida aos *caminhos unicursais*, ou seja, aqueles caminhos conexos que percorrem *todo o gráfico* passando uma vez por cada linha se anulem, como é o caso de  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  no exemplo anterior.

A proposição de que tal relação é válida para qualquer gráfico foi usada por Kac e Ward [12] na sua derivação da fórmula de Onsager mas descobriu-se, posteriormente, que a relação não se verificava para casos mais gerais como o da Figura 1.9,

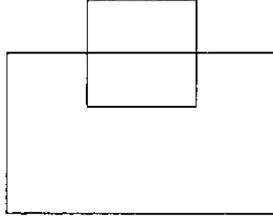


Figura 9: Contra-exemplo do cancelamento de caminhos unicursais.

onde a soma das funções  $W(\gamma)$  de caminhos unicursais não se anula [1].

Conjeturou-se, então, se uma identidade semelhante à utilizada por Kac e Ward seria válida se se considerassem também caminhos que passassem mais de uma vez pela mesma aresta. Esta é a *conjectura de Feynman* que pode ser expressa como [1] :

$$\prod_{\gamma} [1 + W(\gamma)] = 1 + \sum_G I(G) \quad (2.22)$$

O produto do lado direito é sobre todos os caminhos fechados não periódicos sobre a rede e a somatória sobre todos os gráficos admissíveis.

Introduzindo a conjectura na fórmula da função de partição, obtemos

$$Z = 2^N (\cosh K)^{2N} \prod_{\gamma} [1 + W(\gamma)] \quad (2.23)$$

Para efetuar o produto procederemos como segue.

Sejam  $(0, 0)$  e  $(x, y)$  dois sítios da rede. Considere um vetor que percorre as arestas da rede a partir da origem  $(0, 0)$  até o ponto  $(x, y)$ . Toda vez que o vetor chega a um sítio da rede há quatro direções possíveis que ele pode tomar.

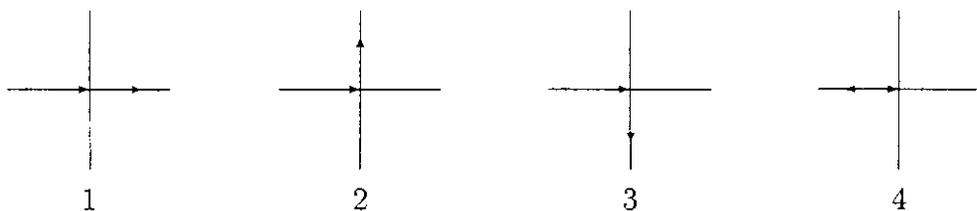


Figura 1.10: Movimentos possíveis do vetor no vértice.

O vetor

1. segue em frente, prosseguindo na mesma direção dada pelo passo anterior ( Figura 1.10-1 );
2. segue pela esquerda em relação ao passo anterior ( Figura 1.10-2 );
3. segue pela direita em relação ao passo anterior ( Figura 1.10-3 );
4. faz um giro de  $180^\circ$  ( Figura 1.10-4 ).

A cada uma destas quatro possibilidades é associada um peso ou amplitude definido como

$u$ , se o vetor segue em frente ( caso 1 );

$u\alpha$ , se o vetor segue pela esquerda ( caso 2 );

$u\alpha^{-1}$ , se o vetor segue pela direita ( caso 3 );

$0$ , se faz o giro de  $180^\circ$  ( caso 4 ).

A constante  $\alpha$  será definida mais adiante de forma a reproduzir na amplitude total o sinal do caminho.

De acordo com estas regras o primeiro passo não tem amplitude definida. Contudo, no caso de um caminho fechado, pode-se usar o movimento efetuado ao percorrer a última aresta do caminho para definir a amplitude do primeiro passo. Por exemplo, se a origem foi atingida com um movimento para cima no último passo, a amplitude do primeiro será dada por:

$u$ , se começa andando para cima;  
 $u\alpha$ , se começa andando para a esquerda;  
 $u\alpha^{-1}$ , se começa andando para a direita;  
 $0$ , se começa andando para baixo.

Obtém-se a amplitude total associada a um caminho pela multiplicação das amplitudes. Para um caminho de comprimento  $l$  ( $l$  arestas ou  $l$  sítios) a amplitude total terá um fator  $u^l$ , que corresponde ao produto  $I(\gamma)$  definido anteriormente. Só resta o fator decorrente do sinal do caminho, que vai ser dado pela constante complexa  $\alpha$ .

Observa-se que fazendo

$$\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (2.24)$$

temos que, no caso de um caminho fechado, a contribuição de  $\alpha$  para a amplitude total é

$$\alpha^{4n} = (e^{\frac{i\pi}{4}})^{4n} = -1 \quad (2.25)$$

se o caminho segue sempre pela esquerda em  $n$  sítios, e

$$\alpha^{-4n} = (e^{\frac{i\pi}{-4}})^{4n} = -1 \quad (2.26)$$

se ele segue pela direita. Uma vez que para cada giro completo de  $2\pi$  efetuado pelo vetor tangente há  $4n$  sítios em que dobra à esquerda ( ou à direita ), então  $\frac{\varphi}{2\pi} = 4n$  e

$$\alpha^{\pm 4n} = (-1)^{\frac{\varphi}{2\pi}} \quad (2.27)$$

com  $\varphi = 2\pi$ . Portanto, com a definição acima de  $\alpha$  o sinal difere daquele na definição de  $W(\gamma)$  por um fator  $-1$ .

Ao invés de alterar a definição da amplitude, este fator adicional será levado em conta no momento em que soma sobre todos os caminhos for efetuada.

As regras acima também podem ser usadas para definir pesos para caminhos abertos, que comecem em uma origem  $(0, 0)$  e terminem no sítio  $(x, y)$  da rede. As amplitudes para o passo inicial serão definidas considerando as diferentes possibilidades de se atingir o ponto  $(0, 0)$ . Nesta passagem a restrição de se considerar somente caminhos fechados é relaxada, mas será claro, mais adiante, como ela será novamente imposta. Deseja-se aqui encontrar uma relação entre as amplitudes tomadas no passo  $n + 1$  com as do passo  $n$ .

As amplitudes assim definidas dependem sempre do passo anterior. A melhor maneira de descrevê-las é a partir de quatro componentes que considerem as quatro direções de onde pode-se atingir o ponto  $(x, y)$ , a saber:

$U_n(x, y)$ , a amplitude de se alcançar o ponto  $(x, y)$  movendo para cima no último passo;

$D_n(x, y)$ , amplitude de se alcançar  $(x, y)$  movendo para baixo no último passo;

$L_n(x, y)$ , amplitude de se chegar a  $(x, y)$  movendo da esquerda;

$R_n(x, y)$ , amplitude de se chegar a  $(x, y)$  movendo da direita.

O índice  $n$  indica que  $n$  passos foram necessários para se chegar até  $(x, y)$ , ou seja,  $n$  arestas foram percorridas.

Desta forma pode-se, à medida que se percorre um dado caminho, 'seguir' a amplitude aplicando as regras já estabelecidas toda vez que se passa por um sítio. Este método permite relacionar as amplitudes recursivamente da seguinte forma. Por exemplo, a componente de amplitude relacionada com a chegada a  $(x, y)$  com movimento para cima em  $n + 1$  passos  $U_{n+1}(x, y)$  pode ser expressa em termos das componentes de amplitude a  $n$  passos, como

$$U_{n+1}(x, y) = uU_n(x, y - 1) + 0.D_n(x, y - 1) + u\alpha^{-1}R_n(x, y - 1) + u\alpha L_n(x, y - 1) \quad (2.28)$$

Da mesma forma para as outras componentes:

$$D_{n+1}(x, y) = 0.U_n(x, y + 1) + uD_n(x, y + 1) + u\alpha R_n(x, y + 1) + u\alpha^{-1}L_n(x, y + 1) \quad (2.29)$$

$$L_{n+1}(x, y) = \alpha^{-1}U_n(x - 1, y) + u\alpha D_n(x - 1, y) + 0.R_n(x - 1, y) + uL_n(x - 1, y) \quad (2.30)$$

$$R_{n+1}(x, y) = u\alpha U_n(x + 1, y) + u\alpha^{-1}D_n(x + 1, y) + uR_n(x + 1, y) + 0.L_n(x + 1, y) \quad (2.31)$$

Pode-se contar os diferentes modos de se chegar ao ponto  $(x, y)$  partindo da origem e efetuando uma soma sobre  $n$ . Um problema ao efetuar tal soma é

que as amplitudes estão tomadas a pontos diferentes da rede. Para colocá-las na mesma variável introduz-se a transformada de  $U_n(x, y)$  definida como:

$$U_n(\xi, \eta) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} U_n(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} \quad (2.32)$$

e sua inversa

$$U_n(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi x} e^{i\eta y} U_n(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (2.33)$$

É fácil ver que a transformada de  $U_n(x, y - 1)$  é  $e^{-i\eta} U_n(\xi, \eta)$ , assim:

$$U_{n+1}(\xi, \eta) = u e^{-i\eta} U_n(\xi, \eta) + 0 \cdot e^{-i\eta} D_n(\xi, \eta) + u \alpha^{-1} e^{-i\eta} R_n(\xi, \eta) + u \alpha e^{-i\eta} L_n(\xi, \eta) \quad (2.34)$$

Relações semelhantes para as outras componentes que podem ser obtidas da mesma forma a partir de ( 2.29-31 ).

Seja  $\psi_n$  o vetor definido pela seguinte matriz coluna:

$$\psi_n = \begin{pmatrix} U_n \\ D_n \\ L_n \\ R_n \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

As quatro componentes do vetor de amplitudes transformadas no passo  $n + 1$ , são dadas, em relação às amplitudes no passo  $n$  pela relação

$$\psi_{n+1}(\xi, \eta) = u M(\xi, \eta) \psi_n(\xi, \eta) \quad (2.36)$$

onde  $M(\xi, \eta)$  é a matriz

$$M(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} e^{-i\eta} & 0 & \alpha e^{i\eta} & \alpha^{-1} e^{i\eta} \\ 0 & e^{i\eta} & \alpha^{-1} e^{-i\eta} & \alpha e^{-i\eta} \\ \alpha^{-1} e^{i\xi} & \alpha e^{i\xi} & e^{i\xi} & 0 \\ \alpha e^{-i\xi} & \alpha^{-1} e^{-i\xi} & 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

O vetor  $\psi_0$  definido como

$$\psi_0(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

dá a direção tomada no primeiro passo.

Aplicando sucessivamente ( 2.36 ) a partir do primeiro passo, temos que:

$$\psi_n(\xi, \eta) = (uM)^n \psi_0 \quad (2.39)$$

A amplitude total de se chegar ao ponto  $(x, y)$  com qualquer número de passos é obtida somando sobre  $n$ . No caso de caminhos fechados, então, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(0, 0) \quad (2.40)$$

Substituindo ( 2.33 ) em ( 2.40 ) segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(0, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi_0} e^{i\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (2.41)$$

Mas

$$U_n(\xi, \eta) = \psi_0^T \cdot \psi_n = \psi_0^T (uM)^n \psi_0 \quad (2.42)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0, 0) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi_0} e^{i\eta_0} \psi_0^T \cdot (uM)^n \cdot \psi_0 \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Até aqui foi levada em conta somente a componente  $U_n$  dada pelo  $\psi_0$  escolhido, isto é, a relação ( 2.38 ). Para levar em conta as outras direções pelas quais o caminho pode retornar à origem, temos que somar sobre outras direções iniciais possíveis, representadas pelos vetores coluna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Somando sobre estas demais componentes de  $\psi_0$  resulta que

$$\sum_{\psi_0} \psi_0^T (uM)^n \psi_0 = \text{Tr}(uM)^n \quad (2.45)$$

onde  $\text{Tr}(uM)^n$  é o traço da matriz  $(uM)^n$ .

Dois fatos foram deixados de lado até aqui, mas agora é necessária uma explicação sobre eles. O primeiro se deve ao fator  $-1$  não inserido na definição de  $\alpha$ . Será inserido agora na expressão obtida anteriormente. Outro decorre de, no produto sobre caminhos na Identidade de Feynman, caminhos obtidos um do outro por uma inversão serem considerados iguais, ou seja, contados um delas somente. No cálculo das amplitudes não foi imposta nenhuma restrição ao se construir um caminho, de forma que deve ser inserido um fator  $1/2$  para dar conta desta redundância. Portanto a amplitude total é dada pela integral

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Tr} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (uM)^n \right] \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (2.46)$$

Nesta integral uma origem  $(0,0)$  foi fixada. Contando que em uma rede de  $N$  vértices os  $N$  pontos são origens possíveis e que geram caminhos diferentes, deve-se inserir agora um fator  $N$  na equação. Além disto, um caminho de comprimento  $n$  gerado pelo termo  $(uM)^n$  possui este mesmo número de diferentes pontos iniciais e tem o seu peso, de acordo com a soma acima, contado  $n$  vezes. Esta recontagem pode ser eliminada dividindo cada termo na soma pelo comprimento do caminho equivalente, ficando:

$$-\frac{N}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Tr} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(uM)^n}{n} \right] \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (2.47)$$

Para verificar o significado desta fórmula comparámo-la com a expressão inicial de  $Z$

$$Z = 2^N (\cosh K)^{2N} \prod_{\gamma} [1 + W(\gamma)] \quad (2.48)$$

Calculando o logaritmo de ambos os lados da equação,obtemos

$$\log Z = N \log(2 \cosh^2 K) + \sum_{\gamma} \log[1 + W(\gamma)] \quad (2.49)$$

Expandindo o logaritmo em torno da origem, segue que (lembramos que  $|u| = |tghK| < 1$ , para qualquer valor de  $K$ )

$$\sum_{\gamma} \log[1 + W(\gamma)] = \sum_{\gamma} \left[ W(\gamma) - \frac{1}{2}(W(\gamma))^2 + \frac{1}{3}(W(\gamma))^3 - \dots \right] \quad (2.50)$$

O primeiro termo representa soma sobre caminhos não periódicos. Os outros termos com expoente  $\geq 2$  podem ser entendidos como soma sobre caminhos periódicos formados pela repetição de um dado caminho  $\gamma$  não periódico um número de vezes dado pelo expoente.

Como não foi feita no cálculo das amplitudes restrição sobre caminhos periódicos, estes termos estão todos representados na fórmula da integral.

$$\sum_{\gamma} \log[1 + W(\gamma)] = -\frac{N}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Tr}[\log(1 - uM)] \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (2.51)$$

onde foi usado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(uM)^n}{n} = \log[1 - uM] \quad (2.52)$$

Utilizando a propriedade

$$\text{Tr} \log \mathbf{A} = \log \det \mathbf{A} \quad (2.53)$$

e inserindo na equação anterior, fica

$$\sum_{\gamma} \log[1 + W(\gamma)] = -\frac{N}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\log \det(1 - uM)] \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (2.54)$$

Explicitamente da matriz  $M$ , obtém-se

$$\det(1 - uM) = (u^2 + 1)^2 - 2u(1 - u^2)(\cos \xi + \cos \eta) \quad (2.55)$$

e, finalmente a expressão de  $Z$ :

$$\frac{1}{N} \log Z = -\log 2 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \log[\cosh^2 2K - \sinh 2K(\cos \xi + \cos \eta)] \quad (2.56)$$

conhecida como fórmula de Onsager.

Obtida a expressão da função de partição determina-se de maneira direta quantidades termodinâmicas que caracterizam o sistema macroscópico, como, por exemplo, energia livre por spin ( $F$ )

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{kT}{N} \log Z(T) \quad (2.57)$$

entropia ( $S$ )

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (2.58)$$

e calor específico ( $c$ ).

$$c = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (2.59)$$

Pontos de transição de fase são encontrados através de singularidades na expressão de  $Z(T)$  ou de variáveis termodinâmicas, como as acima.

Embora seja importante o estudo das quantidades que caracterizam o modelo de Ising, a nossa meta foi a de revisar, neste capítulo, um dos métodos que permite encontrar uma expressão fechada para elas e, em particular, discutir a origem da identidade de Feynman.

O estudo desta identidade independentemente do modelo onde foi aplicada é assunto do próximo capítulo.

# Chapter 3

## A Identidade de Feynman: um caso particular

Neste capítulo investigaremos um caso particular da Identidade de Feynman. Em primeiro lugar, na seção ( 3.1 ), a formulação de Sherman desta identidade será discutida. Na seção ( 3.2 ) um caso particular será formulado e alguns problemas a seu respeito serão estudados. Nas seções seguintes, soluções a estes problemas serão então investigados.

### 3.1 A Identidade de Feynman

De acordo com as referências [1] e [4], a identidade de Feynman foi originalmente conjecturada por Richard Feynman, que a empregou no cálculo da fórmula de Onsager para a função de partição do Modelo de Ising em duas dimensões – revisado no capítulo anterior. Como vimos, ela completou alguns argumentos combinatórios sobre a função de partição devidos a Kac e Ward [12] e foi formulada em termos dos parâmetros

$$d_i = u = \tanh K \quad (3.1)$$

associados às arestas da rede, com  $K = J/kT$ .

Mais tarde, Sherman estendeu a identidade para o caso em que os parâmetros  $d_i$  são símbolos formais e não mais dados como em ( 3.1 ). Nesta formulação a identidade de Feynman

$$\prod_{\gamma} [1 + W(\gamma)] = 1 + \sum_G I(G) \quad (3.2)$$

onde

$$W(\gamma) = \text{sign}(\gamma) \prod_{i \in \gamma} d_i^{\mu_i} \quad (3.3)$$

e

$$I(G) = \prod_{i \in G} d_i \quad (3.4)$$

é uma relação formal. Como tal ela foi demonstrada por Sherman nas referências [1] e [3]. Uma segunda prova, devida a Burgoyne, aparece na referência [4].

Observe que a somatória no lado direito envolve apenas termos positivos enquanto que no lado esquerdo, pelo contrário, há termos positivos e negativos devidos aos sinais dos caminhos  $\gamma$ . Além disto, se a rede onde a identidade é definida é finita, o número de gráficos admissíveis é certamente finito, enquanto que, em geral, o número de caminhos possíveis no lado esquerdo é infinito. Está claro, então, que deve existir um mecanismo de cancelamento de termos que atua no lado esquerdo da relação. Os termos restantes, que ficam ap'os o cancelamento, podem ser organizados segundo gráficos admissíveis.

Infelizmente a análise dos cancelamentos que aparece nas referências [1] e [4] não é clara e sente-se que uma discussão transparente e definitiva sobre os mesmos ainda está faltando.

Na referência [2] Sherman considerou a identidade de Feynman no caso particular de uma rede com apenas um sítio e  $R$  arestas orientadas como na Figura ( 3.1 ).

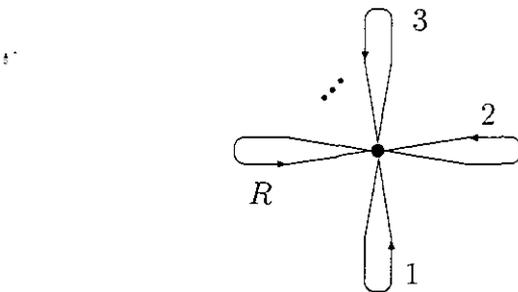


Figura 3.1: Rede com um sítio e  $R$  arestas.

É nossa meta nas próximas seções investigar alguns problemas ainda em aberto sobre este caso particular. O mecanismo de cancelamento neste caso

será identificado e sua existência estabelecida.

### 3.2 Caso Particular

Os gráficos admissíveis  $G$  na rede da Figura 3.1 são formados por todas as combinações possíveis de  $1, 2, \dots, R$  arestas. É fácil ver que, neste caso, o lado direito da ( 3.2 ) pode ser escrito como

$$1 + \sum_G I(G) = \prod_{1 \leq j \leq R} (1 + d_j) \quad (3.5)$$

A cada caminho  $\gamma$  podemos associar uma dada sequência  $(m_1, m_2, \dots, m_R)$  onde  $m_i$  é o número de vezes em que o caminho  $\gamma$  percorre a aresta  $i$ . Diferentes caminhos podem ser associados a uma mesma sequência graças às diferentes maneiras de se percorrer as mesmas arestas da rede. Sejam  $N_+(m_1, m_2, \dots, m_R)$  e  $N_-(m_1, m_2, \dots, m_R)$  os números de caminhos distintos e não periódicos com sinal positivo e negativo, respectivamente, associados à sequência  $(m_1, m_2, \dots, m_R)$ . O produto sobre caminhos pode, então, ser expresso como:

$$\prod_{\gamma} [1 + W(\gamma)] = \prod_{m_i \geq 0} (1 + d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_R^{m_R})^{N_+} (1 - d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_R^{m_R})^{N_-} \quad (3.6)$$

Portanto, no caso particular considerado, a Identidade de Feynman possui a seguinte forma:

$$\prod_{m_i \geq 0} (1 + d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_R^{m_R})^{N_+} (1 - d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_R^{m_R})^{N_-} = \prod_{1 \leq j \leq R} (1 + d_j) \quad (3.7)$$

No caso especial em que  $R = 1$ , isto é, a rede tem apenas uma aresta, é possível apenas um caminho não periódico com peso  $W(\gamma) = +d_1$ . Como a rede tem apenas uma aresta há apenas um gráfico admissível, que é a própria rede, com  $I(G) = d_1$ . A identidade é verificada trivialmente neste caso.

O primeiro caso não trivial é aquele em que  $R = 2$ , investigado na ref. [6]. Neste trabalho trataremos o caso  $R > 2$  generalizando os resultados obtidos em [6]. A não trivialidade da identidade no caso da rede com  $R \geq 2$  arestas decorre do fato de que o número de possíveis caminhos não periódicos distintos ser infinito, enquanto o número de gráficos admissíveis é finito.

Conseqüentemente, deve existir um mecanismo de cancelamento de termos atuando no lado esquerdo. Este será identificado na seção ( 3.3 ).

Considere, por um momento, somente os caminhos que percorrem uma única aresta da rede. A eles estão associadas as seguintes seqüências  $S'$

$$S' = \{m_i = 1, m_{j \neq i} = 0; i = 1, 2, \dots, R\} \quad (3.8)$$

Para cada seqüência de  $S'$  só há um caminho de sinal positivo e, portanto,

$$N_+ = 1 \quad \text{e} \quad N_- = 0 \quad (3.9)$$

O produto sobre as seqüências em  $S'$  coincide com aquele no lado direito da ( 3.7 ), que pode ser expressa como:

$$\prod_{S \neq S'} (1 + d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_R^{m_R})^{N_+} (1 - d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_R^{m_R})^{N_-} = 1 \quad (3.10)$$

É possível organizar o produtório sobre  $S$  em termos das seqüências em que apenas  $m_i$ 's não nulos comparecem, permitindo que se reescreva ( 3.10 ) do seguinte modo:

$$\prod_{r=2}^R \prod_{G_r} \prod_{S(G_r)} (1 + d_{i_1}^{m_{i_1}} d_{i_2}^{m_{i_2}} \dots d_{i_R}^{m_{i_R}})^{N_+} (1 - d_{i_1}^{m_{i_1}} d_{i_2}^{m_{i_2}} \dots d_{i_R}^{m_{i_R}})^{N_-} \quad (3.11)$$

Em ( 3.11 ), o segundo produtório é tomado sobre os diferentes subgráficos da rede com  $r$  arestas,  $r = 2, 3, \dots, R$ . O terceiro é sobre as seqüências

$$S(G_r) = \{m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r}; m_{i_j} > 0\} \quad (3.12)$$

associadas a caminhos que percorrem todas as arestas do subgráfico  $G_r$  pelo menos uma vez.

Note que podemos associar a cada seqüência  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r})$  um número  $N$  dado pela soma de seus elementos, ou seja,

$$N = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_r} \quad (3.13)$$

O produto sobre  $S(G_r)$  pode ser expresso em termos de  $N$  como

$$\prod_{N=r}^{\infty} \prod_{\substack{m_{i_j} > 0 \\ \sum_j m_{i_j} = N}} (1 + d_{i_1}^{m_{i_1}} d_{i_2}^{m_{i_2}} \dots d_{i_r}^{m_{i_r}})^{\theta_+} (1 - d_{i_1}^{m_{i_1}} d_{i_2}^{m_{i_2}} \dots d_{i_r}^{m_{i_r}})^{\theta_-} \quad (3.14)$$

onde o segundo produtório é sobre todas as sequências  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r})$  tais que ( 3.13 ) é satisfeita e, em seguida, faz-se o produto sobre todos os valores de  $N \geq r$ .

Os pesos  $\theta_{\pm}(N; m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r})$  representam o número de caminhos distintos e não periódicos associados à sequência  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r})$  com sinal positivo ( $\theta_+$ ) e sinal negativo ( $\theta_-$ ).

Mostraremos na seção ( 3.4 ) que, na verdade,

$$\prod_{N=r}^{\infty} \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum_{i=1}^r m_i = N}} (1 + d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r})^{\theta_+} (1 - d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r})^{\theta_-} = 1 \quad (3.15)$$

para cada valor de  $r$  separadamente, ou seja, há um mecanismo de cancelamento atuando no âmbito de cada subgráfico da rede com  $r$  arestas. Na referência [6] isto foi provado para o caso  $R = r = 2$

Na referência [2] Sherman comparou a relação ( 3.7 ) com uma outra identidade, conhecida dos matemáticos como a *identidade de Witt* [15]. A identidade de Witt está dada como:

$$\prod_{m_i \geq 0} (1 - z_1^{m_1} \dots z_R^{m_R})^{M(m_1, \dots, m_R)} = 1 - \sum_{i=1}^R z_i \quad (3.16)$$

onde  $z_1, z_2, \dots, z_R$  são símbolos e

$$M(m_1, \dots, m_R) = \frac{1}{N} \sum_{d | m_1, \dots, m_R} \mu(d) \frac{\left(\frac{N}{d}\right)!}{\left(\frac{m_1}{d}\right)! \dots \left(\frac{m_R}{d}\right)!} \quad (3.17)$$

e  $N = m_1 + \dots + m_R$ . A soma é sobre todos os divisores comuns  $d$  de  $m_1, m_2, \dots, m_R$  e  $\mu(d)$  é a função de Mobius a ser definida na seção seguinte. No caso em que  $z_1 = \dots = z_R$ , a identidade de Witt reduz-se a

$$\prod_{N=1}^{\infty} (1 - z^N)^{M_R(N)} = 1 - Rz \quad (3.18)$$

onde

$$M_R(N) = \frac{1}{N} \sum_{d|N} \mu(d) R^{\frac{N}{d}} \quad (3.19)$$

Sabemos pela referência [2] que a identidade de Witt também pode ser interpretada em termos de caminhos fechados sobre a rede com único sítio e  $R$  arestas. O expoente  $M$ , neste caso, é o número de caminhos que percorrem as arestas da rede sempre de acordo com a orientação previamente estabelecida para elas. O somatório do lado direito, no entanto, não cobre todos os gráficos admissíveis na rede, mas apenas aqueles que contém somente uma aresta.

A identidade ( 3.7 ) pode então ser entendida como uma generalização da identidade de Witt, na medida em que os caminhos podem percorrer as arestas da rede em todas as orientações e todos os gráficos admissíveis são considerados.

Mencionamos de passagem que a identidade de Witt é oriunda da teoria das álgebras de Lie em matemática e, neste contexto puramente algébrico ela pode ser estudada.

Na referência [2] Sherman não chegou a calcular os pesos  $N_{\pm}$  que aparecem na equação ( 3.7 ). Segundo ele, e por razões que não ficam claras, estes pesos não poderiam ser calculados em termos da função de Mobius  $\mu(d)$ . Na verdade estes pesos, na forma dos  $\theta_{\pm}$  em ( 3.14-15 ) podem e serão calculados explicitamente em termos da função de Mobius. Suas propriedades são cruciais na prova da identidade ( 3.7 ) e, em particular, de ( 3.15 ). Além disso, mostraremos que ha uma relacao direta entre  $\theta_{\pm}(N)$  e  $M(N)$  dado por (3.19).

### 3.3 Cálculo dos pesos

Nossa meta, neste seção é a de provar que a seguinte igualdade se verifica

$$\prod_{N=r}^{\infty} \prod_{\substack{m_i > 0 \\ \sum m_i = N}} (1 + d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r})^{\theta_+} (1 - d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r})^{\theta_-} = 1 \quad (3.20)$$

na situação na qual os parâmetros associados a cada linha são iguais, ou seja,

$$d_1 = d_2 = \dots = d_r = d \quad (3.21)$$

Isto será feito através do cálculo explícito dos valores dos pesos  $\theta_{\pm}$ .

Quando os símbolos  $d_i$  são iguais a equação ( 3.20 ) toma a forma

$$\prod_{N=r}^{\infty} (1 + d^N)^{\theta_+(N,r)} (1 - d^N)^{\theta_-(N,r)} = 1 \quad (3.22)$$

Os pesos  $\theta_{\pm}$  são funções apenas do comprimento total  $N$  de cada caminho.

Calcularemos os pesos  $\theta_{\pm}$  através da representação de caminhos por meio de ‘palavras’, que consiste no método que segue.

Fixamos primeiramente uma orientação para as arestas da rede. A escolha é arbitrária mas uma vez feita ela é mantida na representação. Neste trabalho a orientação escolhida para as arestas é aquela dada na Figura 3.1. Em seguida, a cada aresta  $i$  da rede é associado um símbolo  $D_i$  de modo que um caminho  $\gamma$  pode ser representado por uma sequência destes símbolos, de forma geral

$$\gamma \longrightarrow (D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}}) \quad (3.23)$$

onde

- a).  $i_k \neq i_{k+1}$ ;
- b).  $i_l \neq i_1$ ;
- c). todas as arestas da rede aparecem pelo menos uma vez na sequência  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ .

Nesta palavra, cada unidade  $D_i^{e_i}$  representa um segmento de caminho que percorre a aresta  $i$  da rede  $|e_i|$  vezes no sentido

a favor da orientação fixada para a aresta se  $e_i > 0$  ou  
no sentido contrário a esta orientação se  $e_i < 0$ .

A ordem em que as unidades  $D_i^{e_i}$  aparecem na palavra é importante porque ordem distintas dos mesmos representam caminhos distintos, em geral. Apesar disto, a representação apresenta redundâncias que precisarão ser subtraídas no cálculo dos pesos  $\theta_{\pm}$ . Por exemplo, o fato de os caminhos serem fechados implica que ele é indiferente à escolha da aresta que será percorrida em primeiro lugar, e que é representada pela unidade que aparece na extremidade esquerda da palavra. Um mesmo caminho pode, então, ser tanto representado por ( 3.23 ) quanto por qualquer uma das  $l$  permutações circulares da mesma:

$$\begin{aligned} & (D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}}) \\ & (D_{i_2}^{e_{i_2}} D_{i_3}^{e_{i_3}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}} D_{i_1}^{e_{i_1}}) \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & (D_{i_l}^{e_{i_l}} D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_{l-1}}^{e_{i_{l-1}}}) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para cada palavra há, ainda, sua inversa

$$(D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}}) \longrightarrow (D_{i_l}^{-e_{i_l}} D_{i_{l-1}}^{-e_{i_{l-1}}} \dots D_{i_2}^{-e_{i_2}} D_{i_1}^{-e_{i_1}}) \tag{3.25}$$

Ambas as palavras em ( 3.25 ) representam caminhos que diferem apenas no sentido em que se percorre as arestas. Para tais caminhos ( $\gamma$  e  $\gamma^{-1}$ ) o valor da função  $W$  é o mesmo

$$W(\gamma) = W(\gamma^{-1}) \tag{3.26}$$

e, na expressão apresentada para a Identidade de Feynman, somente um dos dois modos possíveis de se percorrer as arestas será escolhido para representar a classe de caminhos.

As palavras que representam caminhos periódicos devem ser também subtraídas. Estas podem ser colocadas na forma geral

$$(D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_k}^{e_{i_k}})^g \tag{3.27}$$

para algum  $g > 1$ , sendo que o termo entre parênteses é não periódico.

O método de cálculo dos pesos  $\theta_{\pm}(N, r)$  consiste, primeiramente, em calcular o número total de palavras  $W_r(N)$  para dados  $N$  e  $r$ . No cálculo, todas as palavras possíveis associadas a estes dois parâmetros são contados. Palavras redundantes – permutações circulares, inversões – e palavras periódicas são incluídas. Em seguida estas redundâncias terão que ser subtraídas e o que se obtém no final será  $\theta(N, r)$ , que é o número de palavras distintas não periódicas associadas a  $N$ , para um dado  $r$ . O sinal delas aqui não é relevante. Os pesos  $\theta_{\pm}(N, r)$  são obtidos, finalmente, mediante emprego da “regra dos sinais” derivada no apêndice A. Segundo esta regra, dada uma palavra na forma ( 3.23 ) com  $l$  unidades  $D_i^{e_i}$ , comprimento  $N$ , tal que

$$\sum_{j=1}^l |e_{i_j}| = N \quad (3.28)$$

com  $s$  e com  $s$  expoentes  $e_i$  negativos, o sinal do caminho  $\gamma$  que ela descreve é

$$(-1)^{N+l+s+T+1} \quad (3.29)$$

O parâmetro  $T$  que aparece em ( 3.29 ) é o número de subsequências associadas à sequência  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  formada pelas arestas percorridas por  $\gamma$ . O significado de  $T$  e destas subsequências é explicado no início do Apêndice A.

Seja  $W_r(l, N, s, T)$  o número de palavras com  $l$  unidades  $D_i^{e_i}$ , comprimento  $N$ ,  $s$  expoentes negativos e cujas sequências  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  possui  $T$  subsequências. Este número inclui as palavras periódicas, permutações circulares e inversões.

Uma fórmula para  $W_r(l, N, s, T)$  é calculada no Apêndice B, onde é mostrado que

$$W_r(l, N, s, T) = \binom{l}{s} \binom{N-1}{l-1} f_r(T, l) \quad (3.30)$$

A função  $f_r(T, l)$  é tal que satisfaz à seguinte relação:

$$\sum_T f_r(T, l) = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r+k+1} \binom{r-1}{k} \frac{k^l + (-1)^l k}{k+1} \quad (3.31)$$

Uma fórmula para  $f_r(T, l)$  pode, em princípio, ser calculada, mas ela não é necessária no cálculo dos pesos  $\theta_{\pm}(N, r)$ . É suficiente saber que a relação ( 3.31 ) é satisfeita.

Uma palavra no conjunto das palavras contadas pelo número  $W_r(l, N, s, T)$  pode ser colocada na forma genérica

$$(D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_k}^{e_{i_k}})^g \quad (3.32)$$

onde  $g \geq 1$ . A palavra entre parênteses é não periódica com parâmetros  $k = \frac{l}{g}$ ,  $N_k = \frac{N}{g}$ ,  $s_k = \frac{s}{g}$  e  $T_k = \frac{T}{g}$ . Se  $g > 1$  a palavra (3.32) é periódica e se  $g = 1$  é não periódica.

O conjunto de todas as palavras contadas por  $W_r(l, N, s, T)$  pode, então, ser dividido em dois subconjuntos. Um deles inclui todas as palavras não periódicas com  $g = 1$  mais suas permutações circulares. Outro inclui todas as palavras periódicas com  $g > 1$  mais suas permutações circulares.

Seja  $W_r\left(\frac{l}{g}, \frac{N}{g}, \frac{s}{g}, \frac{T}{g}\right)$  o número de palavras não periódicas, mais suas permutações circulares associadas aos parâmetros  $\frac{l}{g}$ ,  $\frac{N}{g}$ ,  $\frac{s}{g}$  e  $\frac{T}{g}$ . Então

$$W_r(l, N, s, T) = \sum_{g|(l, N, s, T)} \overline{W_r\left(\frac{l}{g}, \frac{N}{g}, \frac{s}{g}, \frac{T}{g}\right)} \quad (3.33)$$

onde a soma é efetuada sobre todos os divisores comuns de  $l, N, s$  e  $T$ .

Pelo que foi explicado anteriormente, nesta soma, o termo com  $g = 1$  conta somente as palavras não periódicas. Os termos que possuem  $g \geq 2$  contam as palavras com período  $g$  formadas pela repetição de alguma não periódica.

Em seguida usa-se a chamada Transformada Inversa de Mobius. Sejam duas funções  $F(x)$  e  $G(x)$  do inteiro positivo  $x$  relacionadas da seguinte forma:

$$F(x) = \sum_{d|x} G\left(\frac{x}{d}\right) \quad (3.34)$$

com a soma efetuada sobre os divisores  $g$  de  $x$ .

Seja  $\mu(d)$  a função de Mobius definida para inteiros positivos pelas regras:  $\mu(1) = +1$  e, para  $d = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_q^{e_q}$  onde  $p_1, p_2, \dots, p_q$  são números primos distintos,  $\mu(d) = 0$  se qualquer  $e_i > 1$  e, se não,  $\mu(p_1 p_2 \dots p_q) = (-1)^q$ .

A relação (3.34) pode ser invertida como

$$G(x) = \sum_{d|x} \mu(d) F\left(\frac{x}{d}\right) \quad (3.35)$$

que é a chamada Transformada Inversa de Mobius [16].

Esta propriedade pode ser estendida a funções de mais de uma variável sendo a soma tomada sobre os divisores comuns destas.

Aplicada a ( 3.33 ) a transformada inversa permite encontrar o número de palavras não periódicas, mais suas permutações circulares, que está associado a  $l, N, s, T$  para dado  $r$ . Segue,então,que

$$\overline{W_r(l, N, s, T)} = \sum_{g|(l, N, s, T)} \mu(g) W_r \left( \frac{l}{g}, \frac{N}{g}, \frac{s}{g}, \frac{T}{g} \right) \quad (3.36)$$

Como para uma palavra com  $l$  unidades  $D_i^{e_i}$  o número das permutações circulares é  $l$ , estas podem ser retiradas dividindo ambos os lados de ( 3.36 ) por  $l$ .

Portanto, o número de palavras distintas não periódicas associadas a  $N$  para um dado  $r$  é igual a

$$\theta(N, r) = \sum_{l=r}^N \sum_{s=0}^l \sum_T \frac{1}{l} \overline{W_r(l, N, s, T)} \quad (3.37)$$

A quantidade  $\theta(N, r)$  conta o número total de palavras associadas a um dado  $N$  somando as de sinal positivo com as de sinal negativo. A contagem das palavras com sinal positivo e negativo é feita usando o resultado obtido para o sinal

$$\text{senal}(\gamma) = (-1)^{N+l+s+T+1} \quad (3.38)$$

onde os parâmetros  $N, l, s$  e  $T$  podem ser obtidos a partir da palavra usada para representar o caminho.

O desenvolvimento que leva à relação acima é bastante longo e envolve um grande número de considerações. Ele está integralmente demonstrado no Apêndice A.

Os pesos  $\theta_{\pm}(N, r)$  são calculados efetuando a soma ( 3.37 ) sobre os valores de  $l, N, s$  e  $T$  tais que satisfaçam a regra dada por ( 3.38 ), ou seja,

$$\theta_{\pm}(N, r) = \sum_{l, s, T} \frac{1}{l} \overline{W_r(l, N, s, T)} \quad (3.39)$$

onde a somatória é sobre os valores de  $l, s, T$  tais que  $N + l + s + T + 1$  é um número par, no caso de  $\theta_{+}(N, r)$ , e  $N + l + s + T + 1$  é ímpar, no caso de  $\theta_{-}(N, r)$ .

Usando os resultados obtidos no Apêndice B para  $W_r(l, N, s, T)$  as somatórias sobre  $l, s, T$  em ( 3.39 ) podem ser calculadas. O cálculo é direto, mas longo e tedioso e, por isto, relegado para o Apêndice C. O resultado é o que segue:

$$\theta_+(N, r) = \sum_{g|N} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{l=1}^{\frac{N}{g}} \frac{1}{l} \left( \frac{N}{g} - 1 \right) 2^{l-1} \sum_T f_r(T, l) \quad (3.40)$$

onde a primeira somatória é sobre os divisores ímpares  $g$  do número  $N$  e  $\sum f_r$  esta dada pela (3.31).

O peso  $\theta_-(N, r)$  é dado em termos de  $\theta_+(N, r)$  como:

$$\theta_-(N, r) = \theta_+(N, r) \quad (3.41)$$

se  $N$  é ímpar ou primo ou então se  $N$  é par  $< 2r$ , e

$$\theta_-(N, r) = \theta_+(N, r) - \theta_+\left(\frac{N}{2}, r\right) \quad (3.42)$$

se  $N$  é par  $\geq 2r$ .

O cálculo que demonstra estas relações é direto e está inteiramente demonstrado no Apêndice C.

No caso em que  $R = r = 2$  os resultados acima reproduzem os obtidos na referência [6].

### 3.4 Cancelamento dos termos

As relações ( 3.41 ) e ( 3.42 ) satisfeitas por  $\theta_-(N, r)$  constituem o mecanismo de cancelamento responsável pela existência da identidade

$$\prod_{N=r}^{\infty} (1 + d^N)^{\theta_+(N,r)} (1 - d^N)^{\theta_-(N,r)} = 1 \quad (3.43)$$

É o que mostraremos a seguir. Em primeiro lugar vamos ilustrar através de alguns casos como o mecanismo atua.

Seja  $r = 3$ . Então, para  $N = 3$  temos que

$$(1 + d^3)^{\theta_+(3)} (1 - d^3)^{\theta_-(3)} = (1 - d^6)^{\theta_+(3)} \quad (3.44)$$

onde usamos que  $\theta_+(3) = \theta_-(3)$ , de acordo com ( 3.41 ). Portanto, os termos de ordem cúbica já foram cancelados. Os termos de ordem 6 aparecem, então, em

$$(1 - d^6)^{\theta_+(3)} (1 + d^6)^{\theta_+(6)} (1 - d^6)^{\theta_-(6)} \quad (3.45)$$

Mas, pela relação ( 3.41 ),  $\theta_-(6) = \theta_+(6) - \theta_+(3)$ .

Então ( 3.45 ) é igual a

$$(1 - d^6)^{\theta_+(3)} (1 + d^6)^{\theta_+(6)} (1 - d^6)^{\theta_+(6) - \theta_+(3)} = (1 - d^{12})^{\theta_+(6)} \quad (3.46)$$

Portanto, os termos de ordem 6 foram todos cancelados. Este mecanismo de cancelamento induzido pelas relações ( 3.41 ) e ( 3.42 ) atua em todas as ordens. É o que provaremos em seguida.

Defina

$$F(N) = (1 + d^N)^{\theta_+(N,r)} (1 - d^N)^{\theta_-(N,r)} \quad (3.47)$$

Queremos provar que

$$P(d) = \prod_{N=r}^{\infty} F(N) \quad (3.48)$$

se reduz à unidade com o uso das relações ( 3.41 ) e ( 3.42 ).

Consideramos, primeiramente, o caso em que  $r$  é ímpar. Separamos os termos em ( 3.48 ) de ordem par e de ordem ímpar, da seguinte forma

$$P(d) = \prod_{n \geq r}^{\infty} F(n) \prod_{k \geq r+1}^{\infty} F(k) \quad (3.49)$$

O primeiro produtório é tomado sobre os valores ímpares  $n$  de  $N$  e o segundo, sobre os valores pares  $k$  de  $N$  maiores ou iguais a  $r + 1$ .

Observe que para  $n$  ímpar vale a relação

$$\theta_-(n, r) = \theta_+(n, r) \quad (3.50)$$

que permite escrever o primeiro produtório de ( 3.50 ) como

$$\prod_{n \geq r}^{\infty} F(n) = \prod_{n \geq r}^{\infty} (1 - d^{2n})^{\theta_+(n, r)} \quad (3.51)$$

Para  $k$  par,  $k \geq r + 1$ ,  $\theta_-(k, r)$  satisfaz às seguintes relações

$$\theta_-(k, r) = \theta_+(k, r) \quad \text{se } r + 1 \leq k \text{ par} < 2r \text{ e} \quad (3.52)$$

$$\theta_-(k, r) = \theta_+(k, r) - \theta_+(k/2, r) \quad \text{se } k \text{ par} \geq 2r. \quad (3.53)$$

O segundo produtório em ( 3.49 ) pode ser separado como

$$\prod_{k \geq r+1}^{\infty} F(k) = \prod_{k < 2r} F(k) \prod_{k' \geq 2r}^{\infty} F(k') \quad (3.54)$$

Usando ( 3.52 ) obtemos que

$$\prod_{r+1 \leq k < 2r} F(k) = \prod_{r+1 \leq k < 2r} (1 - d^{2k})^{\theta_+(k, r)} \quad (3.55)$$

Um número par pode ser expresso na forma  $2^j l$ , onde  $j$  é inteiro  $\geq 1$  e  $l$  é um número ímpar. Usando esta notação vamos expressar os valores de  $k' \geq 2r$  como

$$k' = 2l', \text{ onde } l' \text{ é número ímpar } \geq r;$$

$$k' = 2^j l'', \text{ com } j \text{ inteiro } \geq 2.$$

Usando esta separação, segue que (3.55) é igual a

$$\prod_{\frac{r+1}{2} \leq l \leq r-1} (1 - d^{4l})^{\theta_+(2l, r)} \quad (3.56)$$

onde o produtório é sobre todos os  $l$  pares e ímpares entre  $\frac{r+1}{2}$  e  $r-1$ , e

$$\prod_{k' \geq 2r}^{\infty} F(k') = \prod_{l' \geq r}^{\infty} F(2l') \prod_{j \geq 2} \prod_{l'' \geq r/2^{j-1}}^{\infty} F(2^j l'') \quad (3.57)$$

onde o primeiro e terceiro produtório no lado direito são sobre  $l'$  e  $l''$  ímpares.

Pela equação ( 3.53 ), então,

$$\prod_{l' \geq r}^{\infty} F(2l') = \prod_{l' \geq r}^{\infty} (1 + d^{2l'})^{\theta+(2l',r)} (1 - d^{2l'})^{\theta+(2l',r)-\theta+(l',r)} \quad (3.58)$$

e, portanto

$$\prod_{l' \geq r}^{\infty} F(2l') = \prod_{l' \geq r}^{\infty} (1 - d^{4l'})^{\theta+(2l',r)} (1 - d^{2l'})^{-\theta+(l',r)} \quad (3.59)$$

Dadas as relações ( 3.49 ), ( 3.54 ), (3.56), (3.57) e ( 3.59), a função  $P(d)$  se escreve, agora, como dados por ( 3.52 ), ( 3.57 ) e ( 3.60 ), como

$$\begin{aligned} P(d) &= \prod_{n \geq r}^{\infty} (1 - d^{2n})^{\theta+(n,r)} \prod_{l \geq (r+1)/2}^{r-1} (1 - d^{4l})^{\theta+(2l,r)} \\ &\quad \prod_{l' \geq r}^{\infty} (1 - d^{4l'})^{\theta+(2l',r)} (1 - d^{2l'})^{-\theta+(l',r)} \\ &\quad \prod_{j \geq 2} \prod_{l'' \geq r/2^{j-1}}^{\infty} F(2^j l'') \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde os fatores de ordem  $2n$  e  $2l'$  no primeiro e terceiro produtório, respectivamente, se cancelam. Os termos de ordem  $4l$  e  $4l'$  no segundo e terceiro produtório, respectivamente, podem ser colocados juntos e, com isto, podemos escrever a ( 3.60 ) como

$$P(d) = \prod_{l \geq r/2}^{\infty} (1 - d^{4l})^{\theta+(2l,r)} \prod_{j \geq 2} \prod_{l'' \geq r/2^{j-1}}^{\infty} F(2^j l'') \quad (3.61)$$

Este resultado mostra que todos os termos até a ordem  $2l$  se cancelam. Provaremos agora, por indução que o mesmo mecanismo de cancelamento se estende por todos os termos.

Suponha que ele atua até a ordem  $2^x l$ . Então ele também vale para  $2^{x+1} l$ . Chamamos de  $P_{j \geq x}$  os termos de ( 3.62 ) com ordem  $> 2^x l$ ,

$$P_{j \geq x} = \prod_{l \geq r/2^{x-1}}^{\infty} (1 - d^{2^x l})^{\theta_+(2^{x-1} l, r)} \prod_{j \geq x} \prod_{l' \geq r/2^{j-1}}^{\infty} F(2^j l') \quad (3.62)$$

Abrindo o primeiro termo ( $j = x$ ) do produtório, a relação acima fica

$$\prod_{l \geq r/2^{x-1}}^{\infty} (1 - d^{2^x l})^{\theta_+(2^{x-1} l, r)} (1 + d^{2^x l})^{\theta_+(2^x l, r)} (1 - d^{2^x l})^{\theta_-(2^x l, r)} \prod_{j \geq x+1} \prod_{l' \geq r/2^{j-1}}^{\infty} F(2^j l') \quad (3.63)$$

Da relação ( 3.55 ), temos que,

$$\theta_-(2^x l, r) = \theta_+(2^x l, r) - \theta_+(2^{x-1} l, r) \quad (3.64)$$

e, portanto,

$$P_{j \geq x} = \prod_{l \geq r/2^x}^{\infty} (1 - d^{2^{x+1} l})^{\theta_+(2^x l, r)} \prod_{j \geq x+1} \prod_{l' \geq r/2^{j-1}}^{\infty} F(2^j l') = P_{j \geq x+1} \quad (3.65)$$

Assumindo que o cancelamento ocorre até a ordem  $2^x l$  ficou demonstrado por indução que também ocorre até  $2^{x+1} l$ . Podemos afirmar então que o mecanismo se mantém por todos os termos cancelando todas as ordens e provando a identidade ( 3.44 ). O caso em que  $r$  é par pode ser provado similarmente.

# Apêndice A - Regra dos sinais

Um caminho  $\gamma$  tem um sinal associado a ele dado como

$$\text{sinal}(\gamma) = (-1)^{s(\gamma)} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$s(\gamma) = 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \quad (\text{A.2})$$

e  $\frac{\varphi}{2\pi}$  é o número de ângulos completos de  $2\pi$  que um vetor tangente perfaz quando percorre  $\gamma$  a partir de um de seus pontos e retorna a ele.

Suponha a rede plana, de sorte que um caminho qualquer sobre ela pode ser desenhado de forma estendida, ou seja, sempre que um caminho percorrer uma aresta mais de uma vez as repetições serão desenhadas ligeiramente separadas de modo que, no final, o caminho confunde-se com uma curva plana fechada e normal, compatível com a palavra.

Por definição, uma curva normal é tal que cruza a si mesma somente em ângulos retos.

É claro que, dada uma palavra, é possível desenhar mais de uma curva normal que lhe é compatível e tem o mesmo sinal. Sendo assim, é possível estabelecer algumas regras que permitam desenhar a curva que seja mais conveniente para se determinar as propriedades de  $\gamma$ .

Seja  $V$  o número de cruzamentos em uma curva normal no plano. Um teorema de Whitney [18] afirma que o sinal da curva definido por ( A.2 ) é também dado por

$$(-1)^V \quad (\text{A.3})$$

Este teorema não afirma que  $V$  coincide com  $1 + \frac{\varphi}{2\pi}$ , mas sim que ambos têm a mesma paridade.

Este teorema será aplicado na prova do seguinte resultado.

Seja

$$\mathcal{W}(\gamma) = (D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}}) \quad (\text{A.4})$$

a palavra associada a  $\gamma$ . Então,

$$\text{sin}(\gamma) = (-1)^{N+l+T+s+1} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$N = \sum_{k=1}^l |e_{i_k}| \quad (\text{A.6})$$

é o comprimento de  $\gamma$ ;  $s$  é o número de expoentes  $e_i$  negativos e  $l$ , o número total de expoentes ou unidades  $D_i^e$  que formam a palavra.

O significado de  $T$  é mais sutil e diz respeito à sequência  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  de arestas da rede percorridas por  $\gamma$ .

Considere um conjunto ordenado de  $n$  elementos  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  tal que  $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ . A este conjunto será dado o nome de *sub-sequência*.

Uma sequência  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  pode ser decomposta em termos de sub-sequências como as definidas acima da seguinte forma: o caminho  $\gamma$  percorre  $i_1$  em primeiro lugar. Depois percorrerá  $i_2$ ,  $i_3$  e assim por diante, em ordem crescente dos elementos até que encontre um  $(i_{q_1})$  tal que  $i_{q_1} > i_{q_1+1}$ . Os primeiros  $q_1$  elementos formam uma sub-sequência  $(i_1 i_2 \dots i_{q_1})$ .

O caminho percorrerá, então, a partir de  $i_{q_1+1}$  as linhas  $i_{q_1+2}$ ,  $i_{q_1+3} \dots$  até encontrar  $i_{q_2}$ , onde  $i_{q_2} > i_{q_2+1}$ . O conjunto ordenado  $(i_{q_1+1} i_{q_1+2} \dots i_{q_2})$  forma a outra sub-sequência.

Proseguindo da mesma forma até o último elemento  $(i_l)$  da sequência, esta fica sendo formada pela união de  $T$  sub-sequências.

Por exemplo, no caso de  $r = 3$ , a sequência com  $l = 14$  elementos

$$(12123213232312) \quad (\text{A.7})$$

tem decomposição

$$(12)(123)(2)(13)(23)(23)(12) \quad (\text{A.8})$$

Neste exemplo  $T = 7$ .

Note que o exemplo anterior contém subseqüências em que a linha 1 não aparece. É o caso das sub-sequências (2), que aparece uma vez, e de (23), que aparece duas vezes.

Seja  $t$  o número das subseqüências na decomposição de  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  nas quais a linha 1 não aparece. No exemplo anterior  $t=3$ .

Defina também

$$k = k_2 + k_3 + \cdots + k_r \quad (\text{A.9})$$

onde  $k_i$  é o número de unidades  $D_i^{e_i}$  associadas a linha  $i$  na palavra ( A.4 ), com a soma iniciando realmente em  $k_2$ , e

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_r \quad (\text{A.10})$$

onde  $N_i$  é a soma dos valores absolutos dos expoentes nas unidades  $D_i^{e_i}$ .

Mostraremos, em primeiro lugar, que

$$\text{signal}(\gamma) = (-1)^{N+k+s+t+1} \quad (\text{A.11})$$

Como veremos no final deste Apendice, o resultado ( A.5 ) segue trivialmente de ( A.11 ), cuja prova não é tão simples. Serão discutidos então os pontos mais importantes do método de obtenção de ( A.11 ).

Para se chegar à relação ( A.11 ) vamos estabelecer regras para desenhar uma curva normal compatível com  $\mathcal{W}(\gamma)$  que seja conveniente para o cálculo do número  $V$  de cruzamentos.

É escolhida uma curva construída de tal forma que um segmento  $D_i^{e_i}$  é desenhado como uma espiral que percorre  $|e_i|$  vezes a aresta  $i$  no sentido do centro do círculo formado por ela como, por exemplo, na figura A.1. A orientação do segmento é dado pelo sinal do expoente  $e_i$ , sendo anti-horária se  $e_i > 0$  ou horária se  $e_i < 0$ . No caso positivo, o segmento tem a mesma orientação da aresta  $i$  (vide Figura 3.1); no caso negativo, o segmento tem orientação contrária àquela da aresta  $i$ . Depois de completado este segmento a curva se dirige para fora. Ao sair ela intersecta a si mesma um número de vezes dado por  $|e_i| - 1$ , como visto na Figura A.1.

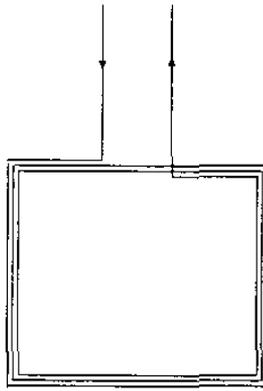


Figura A.1: Cruzamentos do segmento  $D_i^{e_i}$  onde  $e_i > 0$ .

Na Figura A.2 estão representados os segmentos de uma palavra genérica como (A.4) que percorrem a linha 1 somente, considerando primeiramente todos os expoentes positivos.

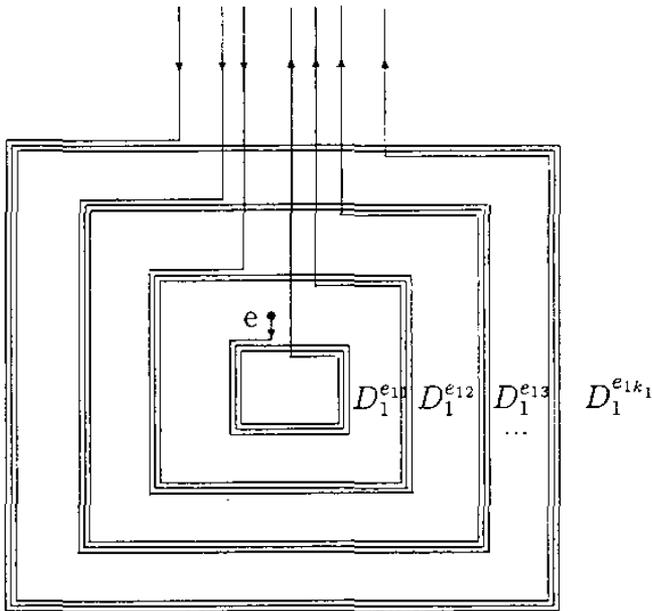


Figura A.2: Segmentos de curva ( $D_1^{e_{11}} \dots D_1^{e_{12}} \dots D_1^{e_{13}} \dots D_1^{e_{1k_1}} \dots$ )

Aqui o ponto  $e$  foi tomado como ponto inicial da curva, ou seja, a curva percorre primeiramente a aresta 1. Devido ao fato de que permutações cíclicas dos elementos das palavras são possíveis, esta escolha não restringe as curvas possíveis.

Observando a Figura A.2 vê-se que o número de cruzamentos ocorridos somente nestes termos é dado por

$$A = (e_{1_1} - 1) + 2(e_{1_2} - 1) + 4(e_{1_3} - 1) + \dots + 2(k_1 - 1)(e_{1_{k_1}} - 1) \quad (\text{A.12})$$

onde  $k_1$  é o número de unidades  $D_1^{e_i}$  ocorridas na palavra.

Para as outras  $j$  arestas da rede  $j = 2, 3, \dots, r$  um cálculo semelhante mostra que o número de cruzamentos para cada uma é (vide Figura A.3).

$$B_j = (e_{j_1} - 1) + 3(e_{j_2} - 1) + 5(e_{j_3} - 1) + \dots + (2k_j - 1)(e_{j_{k_j}} - 1) \quad (\text{A.13})$$

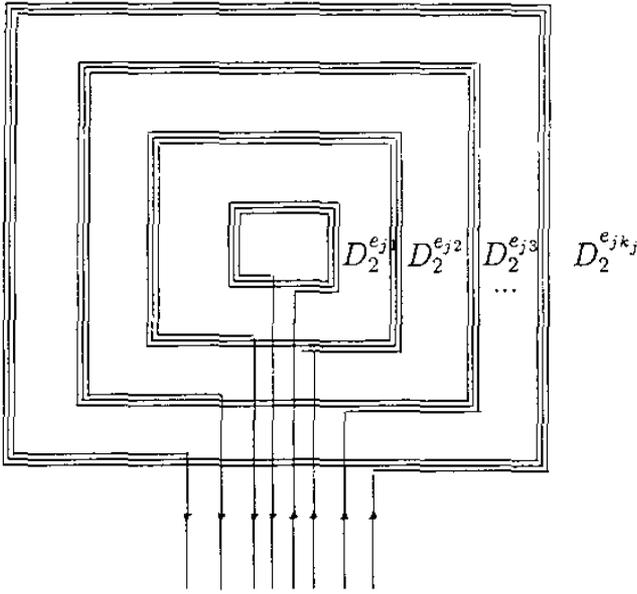


Figura A.3: Segmentos de curva  $(\dots D_j^{e_{j1}} \dots D_j^{e_{j2}} \dots D_j^{e_{j3}} \dots D_j^{e_{jkj}} \dots)$

Quando a curva, após percorrer o último termo  $D_l^{e_l}$ , se fecha sobre  $e$ , gera mais um certo número de cruzamentos dado por

$$C = e_{1_2} + \dots + e_{1_{k_1}} \quad (\text{A.14})$$

como visto na Figura A.2.

A soma de todos os termos para o número de cruzamentos é

$$V_1 = A_1 + \sum_{j=2}^r B_j + C \quad (\text{A.15})$$

Uma vez que a contribuição para o sinal é  $(-1)^{V_1}$ , os termos pares de  $A_1$ ,  $B_j$  e  $C$  não influem, ficando

$$(-1)^{V_1} = (-1)^{(e_{1_1}-1) + \sum_{j=2}^r [(e_{j_1}-1) + (e_{j_2}-1) + (e_{j_3}-1) + \dots + (e_{j_{k_j}}-1)] + e_{1_2} + \dots + e_{1_{k_1}}} \quad (\text{A.16})$$

ou, de forma mais simples

$$(-1)^{V_1} = (-1)^{\sum_{j=1}^r (e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_{k_j}}) + \sum_{j=2}^r [(-1)^{k_j}] - 1} \quad (\text{A.17})$$

Mas a soma dos expoentes  $e_{j_i}$  é o comprimento total  $N$  da palavra e fazendo

$$k = \sum_{j=2}^r k_j \quad (\text{A.18})$$

temos que

$$(-1)^{V_1} = (-1)^{N-k-1} = (-1)^{N+k+1} \quad (\text{A.19})$$

Em geral os expoentes presentes nas letras das palavras podem ser negativos. A presença destes não influi na contagem feita anteriormente, o que pode ser verificado invertendo o sentido de quaisquer linhas nas Figuras ( A.14 ) ou ( A.15 ).

A contribuição dos sinais negativos nos expoentes para o sinal da curva se dá quando cruzamentos adicionais são gerados ao efetuar-se a mudança mostrada na Figura A.4.



Figura A.4: Mudança de sinal no expoente

Esta mudança não ocorre no “enrolamento” do caminho  $\gamma$  em torno da aresta  $j$ . Ocorre sim antes de chegar a percorrê-la quando, devido a presença do sinal negativo no expoente, é obrigado a percorrer a aresta não no sentido da orientação ( anti-horário ), mas contrário a ela.

O termo da Figura A.4 representa a introdução de um sinal negativo no primeiro termo que passe pela aresta  $j$  de uma palavra genérica. Com isto pode se ver que a contribuição para o sinal que decorre da presença de sinais negativos no expoente pode ser calculado contando o número de cruzamentos gerados quando um número qualquer de termos na palavra tem seu sinal alterado para negativo ou positivo (depende do sinal de  $e_i$ )

Considere a situação na qual os primeiros  $s_j$  termos que percorrem a aresta  $j$  são negativos:

$$(\dots D_j^{-e_{j1}} \dots D_j^{-e_{j2}} \dots D_j^{-e_{j3}} \dots D_j^{-e_{js_j}} \dots D_j^{e_{js_j+1}} \dots) \quad (\text{A.20})$$

O número de cruzamentos gerados pelo sinal negativo localizado no primeiro termo é, verificando a Figura A.5 abaixo, igual a 1.

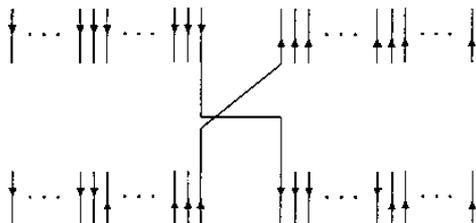


Figura A.5: Cruzamentos devidos ao primeiro expoente negativo

Com o segundo termo, o número de cruzamentos é acrescido de 5.

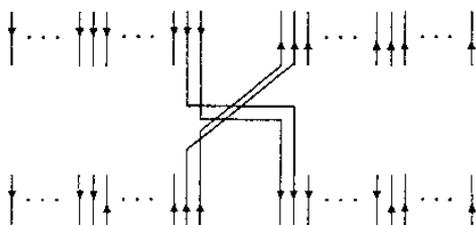


Figura A.6: Cruzamentos devidos ao primeiro e segundo expoentes negativos

No terceiro termo, ocorrem 9 cruzamentos a mais num total de 15 cruzamentos.

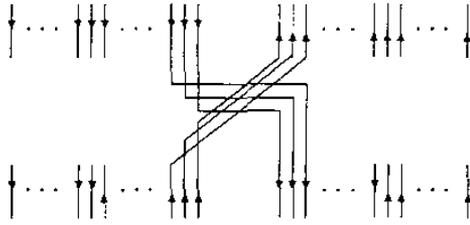


Figura A.7: Cruzamentos devidos ao 1o. , 2o. e 3o. expoentes negativos

Cada unidade  $D_j^{-e_j n}, n = 1, \dots, s_j$  contribue com  $4(n-1) + 1$  cruzamentos. Somando todas as contribuições, obtemos que:

$$V_{s_j \neq 0} = \sum_{n=1}^{s_j} [4(n-1) + 1] \quad (\text{A.21})$$

O sinal de uma curva é, então, modificado devido a presença de sinais negativos nos termos  $D_j^{e_j}$  por

$$(-1)^{V_{s_j \neq 0}} = (-1)^{s_j} \quad (\text{A.22})$$

visto que o primeiro termo de ( A.21 ) é sempre par e  $\sum_{n=1}^{s_j} 1 = s_j$ . Observe que mesmo que os sinais negativos não se localizem nos primeiros  $s_j$  termos, a contribuição para o sinal é a mesma, pois estará somando a cada termo em ( A.21 ) uma quantidade par que não influi no sinal.

Se para cada linha  $j$  a contribuição é  $(-1)^{s_j}$ , para as  $r$  linhas

$$(-1)^{\sum_{j=1}^r s_j} = (-1)^s \quad (\text{A.23})$$

No caso em que  $r > 2$  podem ocorrer cruzamentos, chamados de cruzamentos centrais, que são induzidos apenas pela sequência  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  de arestas em que se percorre o gráfico. A contribuição destes cruzamentos é dada por

$$(-1)^t \quad (\text{A.24})$$

na relação ( A.11 ).

A regra do sinal dada pela ( A.5 ) pode ser obtida de

$$\text{signal}(\gamma) = (-1)^{N+k+s+t+1} \quad (\text{A.25})$$

adicionando  $2k_1$  ao expoente de ( A.25 ) :

$$(-1)^{N+(k_1+k)+s+(k_1+t)+1} \quad (\text{A.26})$$

Como  $k_1 + k = l$  e  $k_1 + t = T$ , então

$$\text{signal}(\gamma) = (-1)^{N+l-s-T+1} \quad (\text{A.27})$$

# Apêndice B - Cálculo de $W_r(l, N, s, T)$

Vamos primeiramente calcular o número  $W_r(N)$  total de palavras

$$D_{i_1}^{e_{i_1}} D_{i_2}^{e_{i_2}} \dots D_{i_l}^{e_{i_l}} \quad (\text{B.1})$$

que podem ser associadas a um dado  $N$ , onde

$$N = \sum_{j=1}^l |e_{i_j}| \quad (\text{B.2})$$

Da definição de  $N$ , este número está relacionado com o número  $p_l(N)$  de partições de  $N$  em  $l$  partes não nulas; com o número de combinações de sinais no expoente, dado por  $2^l$ ; e com o número  $w_r(l)$  de sequências do tipo  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  que satisfazem às seguintes condições.

- a.  $i_k \neq i_{k+1}$ ;
- b.  $i_l \neq i_1$ ;
- c. todas as arestas da rede aparecem ao menos uma vez na sequência.

Portanto,

$$W_r(N) = \sum_{l=r}^N 2^l p_l(N) w_r(l) \quad (\text{B.3})$$

O número de partições  $p_l(N)$  é

$$p_l(N) = \binom{N-1}{l-1} \quad (\text{B.4})$$

Esta relação está provada na referência [17].

Para calcular o número  $w_r(l)$  de seqüências satisfazendo às condições a), b) e c), vamos inicialmente contar o número  $w_r^1(l)$  de seqüências  $(i_1 i_2 \dots i_l)$  com  $i_1$  é fixado.

O número  $w_r^1(l)$  é dado pela relação

$$w_r^1(l) = (r - 1)^{l-1} - q_r(l) - I_r(l) \quad (\text{B.5})$$

onde  $(r - 1)^{l-1}$  é o número de seqüências que satisfazem apenas a condição a) acima, considerando que o primeiro elemento foi fixado e que há  $r - 1$  escolhas possíveis para cada  $i_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, l$ .

O número  $(r - 1)^{l-1}$  inclui seqüências que não satisfazem às condições b) e c). Mas  $I_r(l)$  conta o número daquelas seqüências que satisfazem a) e terminam com  $i_l = i_1$ ;  $q_r(l)$  conta o número daquelas seqüências que satisfazem a) mas onde nem todas as arestas aparecem ao menos uma vez.

No que segue calcularemos expressão para  $I_r(l)$  e  $q_r(l)$ .

## B.1 Cálculo de $I_r(l)$

Pela condição a) e da definição de  $I_r(l)$  temos que  $i_l = i_1 \neq i_{l-1}$ . Portanto, o número  $I_r(l)$  é igual ao número  $((r - 1)^{l-2})$  de seqüências com  $l - 1$  elementos e  $i_{l-1} \neq i_1$ . Mas este número, por sua vez, é igual ao número de seqüências com  $l - 1$  elementos, exceto pelas  $I_r(l - 1)$  que terminam com  $i_{l-1} = i_1$ ; logo,

$$I_r(l) = (r - 1)^{l-2} - I_r(l - 1) \quad (\text{B.6})$$

A solução desta relação de recorrência é

$$I_r(l) = \frac{(r - 1)^{l-1} + (-1)^{l-1}(r - 1)}{r} \quad (\text{B.7})$$

## B.2 Cálculo de $q_r(l)$

Seja  $r \geq 3$ . Consideremos o conjunto das seqüências  $(i_1, \dots, i_l)$  onde apenas  $j < r$  dos seus elementos são distintos. O número de seqüências deste tipo que se iniciam com um mesmo  $i_1$  está dado por  $w_j^1(l)$ . Uma vez escolhido  $i_1$  restam  $r - 1$  números no conjunto  $\{1, 2, \dots, r\}$  onde podemos escolher  $j - 1$  elementos para compor a seqüência. Portanto, com  $j = 2, 3, \dots, r - 1$  segue que

$$q_r(l) = \sum_{j=2}^{r-1} \binom{r-1}{j-1} w_j(l) \quad (\text{B.8})$$

Uma relação de recorrência para  $q_r(l)$  pode ser obtida usando as relações ( B.5 ) e ( B.7 ), cuja solução é

$$q_r(l) = \sum_{k=1}^{r-2} (-1)^{r+k} \binom{r-1}{k} \frac{k^{l-1} + (-1)^l r}{k+1} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo esta expressão em ( B.5 ) e usando ( B.7 ) encontra-se que

$$w_r^1(l) = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r+k+1} \binom{r-1}{k} \frac{k^{l-1} + (-1)^l r}{k+1} \quad (\text{B.10})$$

O número  $w_r(l)$  está relacionada com  $w_r^1(l)$  da seguinte forma

$$w_r(l) = r w_r^1(l) \quad (\text{B.11})$$

visto haver  $r$  possíveis escolhas diferentes para se fixar o elemento  $i_1$  na sequência  $(i_1 i_2 \dots i_l)$ .

Pode-se decompor o número  $w_r(l)$  em termos do número  $f_r(T, l)$  de sequências cujas decomposições têm o mesmo número  $T$  de subsequências, ou seja,

$$w_r(l) = \sum_T f_r(T, l) \quad (\text{B.12})$$

Uma fórmula para o numero  $f_r$  pode em princípio ser calculada mas seria complicado, porém, o seu conhecimento explícito não será necessário (vide Apendice C). A utilização da decomposição acima e da expressão

$$2^l = \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} \quad (\text{B.13})$$

permite reescrever ( B.3 ) como

$$W_r(N) = \sum_{l=r}^N \sum_{s=0}^l \sum_T \binom{l}{s} \binom{N-1}{l-1} f_r(T, l) \quad (\text{B.14})$$

de onde se identifica

$$W_r(l, N, s, T) = \binom{l}{s} \binom{N-1}{l-1} f_r(T, l) \quad (\text{B.15})$$

# Apêndice C - Cálculo dos pesos

Neste apêndice as relações ( 3.40 ), ( 3.41 ), e ( 3.42 ) satisfeitas pelos pesos  $\theta_{\pm}(N, r)$  serão derivadas.

Como vimos no Capítulo 3, os pesos estão dados pela expressão

$$\theta_{\pm}(N, r) = \sum_{l,s,T} \frac{1}{l} \sum_{g|(l,N,s,T)} \mu(g) W_r \left( \frac{l}{g}, \frac{N}{g}, \frac{s}{g}, \frac{T}{g} \right) \quad (\text{C.1})$$

onde a primeira somatória em ( C.1 ) é sobre os parâmetros  $l, s, T$  tais que

$$N + l + s + T = \text{ímpar} \Rightarrow \theta_{+}(N, r);$$

$$N + l + s + T = \text{par} \Rightarrow \theta_{-}(N, r).$$

A segunda somatória é sobre os divisores comuns  $g$  de  $l, N, s, T$  e

$$W_r(l, N, s, T) = \binom{l}{s} \binom{N-1}{l-1} f_r(T, l) \quad (\text{C.2})$$

expressão esta que foi obtida no Apendice B.

Uma fórmula explícita para  $f_r(T, l)$  pode, em princípio, ser calculada, mas ela não é necessária para o cálculo dos pesos, bastando seja satisfeita e seguinte relação

$$\sum_T f_r(T, l) = w_r(l) \quad (\text{C.3})$$

Seja  $N$  par ( ímpar ). A condição para que  $N + l + s + T$  seja ímpar é a de que  $l + s + T$  seja ímpar (par), ou seja,

a).  $l, s, T$  ímpares ( pares );

b).  $l, s$  pares ( ímpares ) e  $T$  ímpar ( par );

c).  $l, T$  pares ( ímpares ) e  $s$  ímpar ( par );

d).  $s, T$  pares ( ímpares ) e  $l$  ímpar ( par ).

Para que  $N + l + s + T$  seja par:

e).  $l, s, T$  pares ( ímpares );

f).  $l, s$  ímpares ( pares ) e  $T$  par ( ímpar );

g).  $l, T$  ímpares ( pares ) e  $s$  par ( ímpar );

h).  $s, T$  ímpares ( pares ) e  $l$  par ( ímpar ).

Consideraremos o caso  $N$  par, isto é,  $N = 2^j n$ , onde  $n$  é um número ímpar e  $j$  é inteiro  $\geq 1$ . Neste caso, o cálculo de  $\theta_{\pm}(N, r)$  será efetuado fazendo a soma sobre  $l, s, T$  dados pelas condições a), b), c) e d) que não estão entre parênteses. Sendo assim,

$$\theta_{+}(N, r) = \left[ \sum_{a)} + \sum_{b)} + \sum_{c)} + \sum_{d)} \right] \frac{1}{l} \sum_{g|(l, N, s, T)} \mu(g) W_r \left( \frac{l}{g}, \frac{N}{g}, \frac{s}{g}, \frac{T}{g} \right) \quad (\text{C.4})$$

Considere a primeira soma em ( C.4 ). Os divisores comuns de  $N = 2^j n$  par e  $l, s, T$  ímpares estão entre os divisores ímpares de  $N$ , ou seja, entre os divisores de  $n$ . Será então invertida a ordem dos somatórios na equação, somando primeiramente sobre os valores ímpares de  $l, s, T$  que são múltiplos de um dado  $g$ , e depois sobre os divisores de  $n$  ( $g | n$ ). Estes valores são dados por:

$$l = g(2x + 1), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } \left[ 0, \frac{2^j n}{2g} - 1 \right];$$

$$s = g(2y + 1), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z + 1).$$

Temos, então, substituindo os valores de  $l, s$  e  $T$

$$\begin{aligned} \sum_{a)} \dots &= \sum_{g|n} \sum_{x=0}^{\frac{2^j n}{g} - 1} \sum_{y=0}^x \sum_z \frac{1}{g(2x + 1)} \mu(g) \\ &W_r \left( 2x + 1, \frac{2^j n}{g}, 2y + 1, 2z + 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Utilizando a expressão conhecida de  $W_r(l, N, s, T)$  ( C.2 ) e substituindo na equação acima,

$$\sum_a \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^{j-1}n}{g}-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j n}{g}-1}{2x} \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y+1} \sum_z f_r(2z+1, 2x+1) \quad (C.6)$$

A segunda somatória em ( C.4 ) é sobre os valores de  $l, s$  pares e de  $T$  ímpares. Os divisores comuns estão entre os divisores ímpares de  $N$ , daí os valores de tais parâmetros múltiplos de um dado  $g$  são

$$l = g(2x), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g}];$$

$$s = g(2y), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z+1).$$

A soma é dada por

$$\sum_b \dots = \sum_{g|n} \sum_{x=0}^{\frac{2^{j-1}n}{g}} \sum_{y=0}^x \sum_z \frac{1}{g(2x)} \mu(g) W_r \left( 2x, \frac{2^j n}{g}, 2y, 2z+1 \right) \quad (C.7)$$

ou, substituindo ( C.2 ),

$$\sum_b \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^{j-1}n}{g}} \frac{1}{2x} \binom{\frac{2^j n}{g}-1}{2x-1} \sum_{y=0}^x \binom{2x}{2y} \sum_z f_r(2z+1, 2x) \quad (C.8)$$

Os valores de  $l, T$  pares e  $s$  ímpares múltiplos de um dado  $g$ , novamente divisor ímpar de  $N$ , são

$$l = g(2x), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g}];$$

$$s = g(2y+1), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z).$$

Então

$$\sum_{c)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^j-1}{g}n} \frac{1}{2x} \binom{\frac{2^j}{g}n-1}{2x-1} \sum_{y=0}^x \binom{2x}{2y+1} \sum_z f_r(2z, 2x) \quad (C.9)$$

A última soma em ( C.4 ) é sobre os valores pares de  $s, T$  e ímpares de  $l$  múltiplos de  $g$ :

$$l = g(2x + 1), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g} - 1];$$

$$s = g(2y), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z).$$

e é expressa por

$$\sum_{d)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^j-1}{g}n-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j}{g}n-1}{2x} \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y} \sum_z f_r(2z, 2x+1) \quad (C.10)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{a)} \dots + \sum_{d)} \dots &= \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^j-1}{g}n-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j}{g}n-1}{2x} \\ &\quad \left[ \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y+1} \sum_z f_r(2z+1, 2x+1) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y} \sum_z f_r(2z, 2x+1) \right] \end{aligned} \quad (C.11)$$

Mas

$$\sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y+1} = \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y} = 2^{2x} \quad (C.12)$$

permitindo reescrever ( C.11 ) como

$$\sum_{a)} \dots + \sum_{d)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^{j-1}n}{g}-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x} 2^{2x} \left[ \sum_z f_r(2z+1, 2x+1) + \sum_z f_r(2z, 2x+1) \right] \quad (C.13)$$

$$= \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^{j-1}n}{g}-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x} 2^{2x} \sum_T f_r(T, 2x+1) \quad (C.14)$$

Cálculo semelhante mostra que

$$\sum_{b)} \dots + \sum_{c)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^{j-1}n}{g}-1} \frac{1}{2x} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x-1} 2^{2x-1} \sum_T f_r(T, 2x) \quad (C.15)$$

Reunindo os resultados obtidos em ( C.13 ) e ( C.15 )

$$\sum_{a)} \dots + \sum_{b)} \dots + \sum_{c)} \dots + \sum_{d)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \left[ \sum_{x=0}^{\frac{2^{j-1}n}{g}-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x} 2^{2x} \sum_T f_r(T, 2x+1) + \sum_{x=1}^{\frac{2^{j-1}n}{g}-1} \frac{1}{2x} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x-1} 2^{2x-1} \sum_T f_r(T, 2x) \right] \quad (C.16)$$

Usando ( C.3 ) obtemos finalmente que

$$\theta_+(2^j n, r) = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{l=1}^{\frac{2^j n}{g}} \frac{1}{l} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{l} 2^{l-1} w_r(T, l) \quad (C.17)$$

Para calcular  $\theta_-(N, r)$  procede-se da mesma maneira, mas as condições são agora dadas pelo conjunto e), f), g), h). Considerando  $N = 2^j n$  com  $n$

ímpar e  $j$  inteiro  $\geq 1$ ,

$$\theta_-(2^j n, r) = \left[ \sum_{e)} + \sum_{f)} + \sum_{g)} + \sum_{h)} \right] \frac{1}{l} \sum_{g|(l, N, s, T)} \mu(g) W_r \left( \frac{l}{g}, \frac{N}{g}, \frac{s}{g}, \frac{T}{g} \right) \quad (\text{C.18})$$

Temos que nas condições f), g), h) os divisores comuns entre  $2^j n$  e os parâmetros  $l, s, T$  estão entre os divisores ímpares de  $N$ , dados pelos divisores de  $n$  ( $g | n$ ), visto sempre haver elementos pares e ímpares nos casos acima.

A segunda soma em ( C.19 ) é sobre  $l, s$  ímpares e  $T$  pares que são múltiplos de  $g$

$$l = g(2x + 1), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g} - 1];$$

$$s = g(2y + 1), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z).$$

que é expressa por

$$\sum_{f)} \dots = \sum_{g|n} \sum_{x=0}^{\frac{2^j-1}{g}n-1} \sum_{y=0}^x \sum_z \frac{1}{g(2x+1)} \mu(g) W_r \left( 2x+1, \frac{2^j n}{g}, 2y+1, 2z \right) \quad (\text{C.19})$$

Substituindo a expressão ( B.12 )

$$\sum_{f)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^j-1}{g}n-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x} \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y+1} \sum_z f_r(2z, 2x+1) \quad (\text{C.20})$$

Os valores de  $l, T$  ímpares e  $T$  pares que são múltiplos de  $g | n$ , são dados por

$$l = g(2x + 1), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g} - 1];$$

$$s = g(2y), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z).$$

e a soma sobre estes valores

$$\sum_{g)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^j-1}{g}n-1} \frac{1}{2x+1} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x} \sum_{y=0}^x \binom{2x+1}{2y} \sum_z f_r(2z, 2x+1) \quad (\text{C.21})$$

Para a quarta soma em ( B.19 ), os valores são dados por

$$\begin{aligned} l &= g(2x), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g}]; \\ s &= g(2y+1), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x-1]; \\ T &= g(2z+1). \end{aligned}$$

sendo que o resultado, após substituirmos a expressão ( B.2 ) é

$$\sum_{h)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^j-1}{g}n} \frac{1}{2x} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x-1} \sum_{y=0}^{x-1} \binom{2x}{2y+1} \sum_z f_r(2z+1, 2x) \quad (\text{C.22})$$

Na condição e), onde todos os parâmetros são pares, os divisores comuns possíveis entre  $l, N, s, T$  não estão só entre os divisores ímpares de  $N$ , mas também entre os pares. Vamos considerar primeiramente o termo que corresponde a soma sobre os divisores ímpares de  $N$ , no caso,  $g \mid n$ . Os valores de  $l, s, T$  pares múltiplos de  $g$  são

$$\begin{aligned} l &= g(2x), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g}]; \\ s &= g(2y), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x]; \\ T &= g(2z). \end{aligned}$$

e o resultado da soma é

$$\sum_{e) \text{ ímpar}} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^j-1}{g}n} \frac{1}{2x} \binom{\frac{2^j n}{g} - 1}{2x-1} \sum_{y=0}^x \binom{2x}{2y} \sum_z f_r(2z, 2x+1) \quad (\text{C.23})$$

Somando a contribuição de e) somente para divisores ímpares de  $N$  com ( B.23 )

$$\begin{aligned}
\sum_{e) \text{ ímpar}} \dots + \sum_{h)} \dots &= \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=0}^{\frac{2^j-1}{g}n} \frac{1}{2x} \left( \frac{2^j n}{g} - 1 \right) \\
&\left[ \sum_{y=0}^x \binom{2x}{2y} \sum_z f_r(2z, 2x+1) + \right. \\
&\left. \sum_{y=0}^{x-1} \binom{2x}{2y+1} \sum_z f_r(2z+1, 2x) \right] \quad (C.24)
\end{aligned}$$

que, usando novamente ( B.12 ) fica sendo dada por

$$\sum_{e) \text{ ímpar}} \dots + \sum_{h)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^j-1}{g}n} \frac{1}{2x} \left( \frac{2^j n}{g} - 1 \right) 2^{2x-1} \sum_T f_r(T, 2x) \quad (C.25)$$

Somando ( B.21 ) e ( B.22 ) obtém-se

$$\sum_{f)} \dots + \sum_{g)} \dots = \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{x=1}^{\frac{2^j-1}{g}n-1} \frac{1}{2x+1} \left( \frac{2^j n}{g} - 1 \right) 2^{2x} \sum_T f_r(T, 2x+1) \quad (C.26)$$

A contribuição dos divisores ímpares de  $N$  para o peso é dada somando ( B.26 ) e ( B.27 )

$$\begin{aligned}
\sum_{e) \text{ ímpar}} \dots + \sum_{f)} \dots + \sum_{g)} \dots + \sum_{h)} \dots &= \sum_{g|n} \frac{\mu(g)}{g} \sum_{l=1}^{\frac{2^j n}{g}} \frac{1}{l} \left( \frac{2^j n}{g} - 1 \right) 2^{l-1} \\
&\sum_T f_r(T, l) = \quad (C.27)
\end{aligned}$$

$$= \theta_+(2^j, r) \quad (C.28)$$

O conjunto completo de divisores comuns entre  $l, 2^j n, s, T$  quando  $l, s, T$  são pares e  $j \geq 0$  é formada pelos divisores ímpares, cuja contribuição já foi calculada, e pelos divisores pares de  $N$ . Os divisores pares serão separados em dois conjuntos distintos:

{ produto entre dois números pares };

{ produto entre um número par e um ímpar  $\geq 1$  }.

No caso do primeiro conjunto, formado pelos divisores pares de  $N$  que podem ser escritos como produto entre outros dois números pares ( $2x$  e  $2y$ ), não há contribuição para a soma, uma vez que por definição da função de Mobius

$$\mu(2^2 xy) = 0 \quad (\text{C.29})$$

O conjunto de divisores de  $N$  que são o produto entre um número par e um ímpar são formados pelos elementos  $2^m g$ , onde  $g$  é divisor ímpar de  $2^j n$  e  $m = 1, 2, \dots, j$ . Se  $m = 1$  tem-se o conjunto  $\{2g\}$ . Se  $m \geq 2$  novamente a função de Mobius se anula.

Dos divisores pares os únicos que contribuem são dados pelo conjunto  $\{2g\}$  com  $g$  divisor ímpar de  $N \geq 1$ . Representamos a soma sobre este conjunto por

$$\sum_{e \text{ pares}} \frac{1}{l} \sum_{\{2g\}} \mu(2g) W_r \left( \frac{l}{2g}, \frac{2^j n}{2g}, \frac{s}{2g}, \frac{T}{2g} \right) \quad (\text{C.30})$$

Os valores de  $l, s, T$  pares múltiplos de  $g$  são

$$l = g(2x), \text{ com } x \text{ inteiro no intervalo } [0, \frac{2^j n}{2g}];$$

$$s = g(2y), \text{ com } y \text{ inteiro no intervalo } [0, x];$$

$$T = g(2z).$$

e permitem escrever ( B.31 ) como, ao substituímos a expressão de  $W_r$ ,

$$\sum_{e \text{ pares}} \dots = \sum_{d|n} \frac{1}{2dx} \mu(2g) \sum_{x=1}^{\frac{2^{j-1}n}{g}} \frac{1}{x} \binom{\frac{2^{j-1}n}{g} - 1}{x-1} \sum_{y=0}^x \binom{x}{y} \sum_z f_r(z, x) \quad (\text{C.31})$$

Mas existe a propriedade sobre a função de Mobius

$$\mu(2g) = \mu(2)\mu(g) = -\mu(g) \quad (\text{C.32})$$

que aplicada a ( B.32 ) resulta em

$$\sum_{e \text{ pares}} \dots = - \sum_{d|n} \frac{1}{d} \mu(g) \sum_{x=1}^{\frac{2^{j-1}n}{g}} \frac{1}{x} \binom{\frac{2^{j-1}n}{g} - 1}{x-1} 2^{x-1} w_r(l) = -\theta_+(2^{j-1}n) \quad (\text{C.33})$$

O resultado final foi obter a seguinte relação, válida para  $j \geq 1$

$$\theta_-(2^j n, r) = \theta_+(2^j n, r) - \theta_-(2^{j-1} n, r) \quad (\text{C.34})$$

O mesmo cálculo efetuado para o peso  $\theta_+$  deve agora ser feito para  $j = 0$ , ou seja, para  $N$  ímpar. Neste caso os divisores comuns do conjunto de parâmetros  $\{l, n, s, T\}$  estão entre os divisores ímpares de  $n$  em quaisquer das condições a), ..., h). Assim o termo ( B.34 ) não ocorre e temos

$$\theta_-(n, r) = \theta_+(n, r) \quad (\text{C.35})$$

# Bibliography

- [1] S.Sherman, *J.Math.Phys.***1**,202(1960)
- [2] S.Sherman, *Bull.Am.Math.Soc.***68**,225(1962).
- [3] S.Sherman, *J.Math.Phys.***4**,1213(1963).
- [4] P.N.Burgoyne, *J.Math.Phys.***4**,1320(1963).
- [5] R.P.Feynman, *Statistical Mechanics. A set of lectures.*  
The Benjamin/Cummings Publishing Co.,1972.
- [6] G.A.T.F.da Costa, *J.Math.Phys.***38**,1(1997).
- [7] E.Ising, *Z.Physik*,**31**,253(1925).
- [8] L.Onsager, *Phys.Rev.***65**,117(1944).
- [9] C.F.Newell and E.W.Montroll, *Rev.Mod.Phys.***25**,353(1953).
- [10] C.J.Thompson, *Mathematical Statistical Mechanics.*  
Princeton University Press, 1972.
- [11] R.J.Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics,*  
Academic Press,1982.
- [12] M.Kac and J.C.Ward, *Phys.Rev.***88**,1332(1952).
- [13] C.N.Yang and T.D.Lee, *Phys.Rev.***87**,404(1952).
- [14] F.Dyson, *Comm.Math.Phys.***12**,212(1969).
- [15] W.E.Witt, *Reine.Angew Math.***177**,152(1937).

- [16] T.M.Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer Verlag,1986.
- [17] G.E.Andrews, *The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison-Wesley publishing Co.,1976.
- [18] H.Whitney, *Comp.Math.***4**,176(1937).