

*Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida
pela aluna Conceição Aparecida Braga Salles da Costa
e aprovada pela Comissão julgadora*

Acad. de Universidade, 6 de julho de 1994

J. Bellandi Filho

ESTUDO ANALÍTICO DA DISTRIBUIÇÃO LATERAL HADRÔNICA NA ATMOSFERA

Conceição Aparecida Braga Salles da Costa

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin
da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
para a obtenção do Título de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Bellandi Filho

Universidade Estadual de Campinas
Campinas - São Paulo
Junho de 1994

Este trabalho foi realizado no Departamento de Raios C3smicos e Cronologia do Instituto de F3sica Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient3fico e Tecnol3gico (CNPq), e do Fundo de Apoio ao Ensino e Pesquisa da Unicamp (FAEP/PRP).

“ Vivemos em uma época perigosa. O homem dominou a natureza antes que tenha aprendido a dominar-se a si mesmo.”

Albert Schweitzer
(1875-1965)
médico francês.

Para

A natureza por me permitir perscrutá-la ...

A toda equipe do HC/UNICAMP que lutou bravamente
para que hoje eu estivesse aqui ...

Aos meus pais, sogro, irmãos, cunhados,
sobrinhos e amigos, nós conseguimos ...

Ao Cesar, Estêvão e Gustavo.
Razão mor para eu ter lutado ...

Agradecimentos

Ao mestre, na concepção mais ampla da palavra, Prof. Dr. José Belandi Filho, que me possibilitou resgatar o amor e a dedicação que sempre tive pela Física.

Aos seres inoperantes, que tentaram me deter rumo ao conhecimento, o meu muito obrigada pelo desafio.

Ao Departamento de Raios Cósmitos e Cronologia pela recepção amigável e novas oportunidades de aprendizagem. Em especial:

Aos amigos R.J.M. Covolan, Cesar G. S. da Costa, J. Montanha e L.M. Mundim, pelo interesse, acompanhamento e discussões proveitosas em nosso trabalho.

A Carola e J.A. Chinellato, pela vibração transmitida, incessante demonstração de carinho e respeito pela Física da Radiação Cósmitica e pelas discussões a cerca dos dados experimentais.

Ao Prof. E.H. Shibuya, pelos esclarecimentos no que se refere aos experimentos com câmaras de emulsão em altitudes de montanha. E de uma maneira geral, aos membros do grupo de emulsões pela acolhida.

Ao Mário Júnior, “expert” em Ciência da Computação, por todo o auxílio e interesse na parte computacional do trabalho.

Às “meninas”, Marilena, Sandra e “dona” Sebastiana, pela cortesia e solicitude.

A Adriana França, Marcelo Guzzo, Miriam Batista e Veríssimo Aquino, do grupo teórico, pelo companheirismo.

RESUMO

No presente trabalho procedemos à análise da distribuição lateral da cascata hadrônica induzida por um único nucleon na atmosfera.

Soluções analíticas para as equações de difusão tridimensionais das componentes hadônicas são obtidas, na aproximação de baixos ângulos. A partir destas soluções, realizamos o estudo qualitativo do comportamento do fluxo diferencial hadrônico na atmosfera, adotando uma dependência energética para o momento transversal das partículas. Seleccionamos dados das superfamílias da radiação cósmica, medidos em câmaras de emulsão nuclear, em altitudes de montanha: "Big event", detectada em Monte Chacaltaya (Bolívia), "Halina" e "P3'-C5-B505", detectadas em Pamir (ex-URSS), para as quais efetuamos o estudo quantitativo da distribuição lateral da cascata hadrônica.

O ajuste entre as curvas teóricas e os dados experimentais fornecem estimativas para os valores de energia do nucleon primário, E_0 , e para a profundidade atmosférica t_0 , de interação deste nucleon com os nucleons do ar, que são parâmetros relevantes na descrição de superfamílias da radiação cósmica, em altas energias.

ABSTRACT

In this work we analyse the lateral distribution of the hadronic cascade induced by one single nucleon in the atmosphere.

We obtain analytical solutions for the tridimensional diffusion equations of the hadronic components, in the small-angle multiple scattering approximation. With these solutions we perform a qualitative study of the behavior of hadronic differential fluxes, adopting an energy dependence in the transverse momentum of particles. We select the cosmic-ray superfamilies data, measured by nuclear emulsion chambers in mountain altitudes: "Big event", detected at Mt. Chacaltaya (Bolivia), "Halina" and "P3'-C5-B505", detected at Pamirs (former USSR), for which we make a quantitative study of the hadronic cascade lateral distributions. The adjust between theoretical curves and experimental data lead to estimatives for the values of primary nucleon energy, E_0 , and for the interaction depth t_0 , of this nucleon with the nucleons in air, which are relevant parameters in the description of high-energy cosmic-ray superfamilies.

Conteúdo

1	Introdução	13
2	Fluxo Diferencial Hadrônico	15
2.1	Equação de Difusão Hadrônica	17
2.2	Fluxo Hadrônico no Espaço de Momento	25
2.3	Fluxo Hadrônico no Espaço de Configuração	34
3	Análise Da Componente Lateral	39
4	Distribuição Lateral	51
4.1	Cálculo da Distribuição Lateral	51
4.2	Dados Experimentais	52
4.3	Resultados	57
5	Conclusão	63
A	\vec{r} e $\vec{\theta}$ e seus Momentos Conjugados	67
A.1	Momento linear	68
B	Experimentos em Altitudes de Montanha	71
B.1	Câmaras de Emulsão Nuclear	71
B.2	Processo de Medida	76

Lista de Figuras

3.1	Comparação do comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função da energia E para os casos: $p_T = cte.$ e $p_T = p_T(E)$	43
3.2	Comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função da energia E , para valores fixos de $\alpha = 28$ [TeV.cm] e $T = 240$ [g/cm^2].	44
3.3	Comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico em função da energia E , para diferentes valores de T (com $\alpha = 28$ [TeV.cm]).	45
3.4	Comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função da altura de interação T , para valores fixos de $\alpha = 28$ [TeV.cm] e profundidade de detecção, $t_f = 540$ [g/cm^2] (Chacaltaya).	46
3.5	Comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico em função da altura de interação T , para diferentes valores de α , com $E = 10^2$ [TeV] e $t_f = 540$ [g/cm^2] (Chacaltaya).	47
3.6	Comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função de α , para valores fixos de $E = 10^2$ [TeV] e $T = 240$ [g/cm^2].	48
3.7	Comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico em função de α , para diferentes valores de T (com $E = 10^2$ [TeV]).	49
4.1	Distribuição lateral hadrônica da superfamília "Big event", detectada em câmaras de emulsão, pela Colaboração Japão-Bolívia, em altitude do Mt. Chacaltaya, $t_f = 540$ g/cm^2	54
4.2	Dispersão lateral hadrônica da superfamília "Big event".	55

4.3	Dispersão lateral hadrônica das superfamílias “Halina” e “P3’-C5-B505”, detectadas em Pamir.	56
4.4	Ajuste da distribuição lateral hadrônica da superfamília “Big event” (Chacaltaya).	58
4.5	Ajuste da dispersão lateral hadrônica da superfamília “Big event” (Chacaltaya).	59
4.6	Ajuste da dispersão lateral hadrônica da superfamília “Halina”, detectada em Pamir.	60
4.7	Ajuste da dispersão lateral hadrônica da superfamília “P3’-C5-B505”, detectada em Pamir.	61
A.1	Ilustração dos vetores \vec{r} (posição) e $\vec{\theta}$ (ângulo), que aparecem na função de distribuição $F_i(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0)$	70
B.1	Esquema de uma câmara de emulsão nuclear.	74
B.2	Esquema de um detector típico de “famílias” altamente energéticas da radiação cósmica ($E_0 \geq 10^2$ TeV), posicionado em altitudes de montanha.	75
B.3	Diagrama de alvo corrigido típico de uma família da radiação cósmica . A partícula sobrevivente é o nucleon líder.	78

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros de $\langle p_{T_i} \rangle$ obtidos por Bellandi <i>et al</i> [26]. . .	40
4.1	Superfamílias da Radiação Cósmica.	53

Capítulo 1

Introdução

O estudo do comportamento das componentes da radiação cósmica na atmosfera terrestre tem sido de grande importância para o entendimento das interações nucleares em altas energias.

Partículas da radiação cósmica ao penetrarem na atmosfera terrestre, chamadas de partículas primárias, colidem com os nucleons dos átomos que compoem a atmosfera produzindo partículas secundárias. Estas por sua vez também interagem com a atmosfera, produzindo novas partículas e assim sucessivamente. Formam-se assim cascatas que se propagam pela atmosfera.

A detecção das partículas secundárias nas diferentes altitudes na atmosfera permite reconstruir a cascata e estudar a radiação primária. Dessa forma, além de se poder analisar os processos intermediários de interação nuclear pode-se também estudar a composição química da radiação primária.

Nos primórdios da física das partículas elementares, estudos com a radiação cósmica permitiram a descoberta de partículas elementares, cujas propriedades foram finalmente estabelecidas com o desenvolvimento da física de aceleradores.

Atualmente experimentos em radiação cósmica vem despertando muito interesse e grandes colaborações foram estabelecidas, pois além de serem experimentos de baixos custos, quando comparados com os de aceleradores, representam ainda o único meio possível para se realizar estudos sobre interações nucleares na região de altíssimas energias.

A obtenção de uma solução analítica para as equações de difusão

tridimensional para a cascata hadrônica na atmosfera é de fundamental importância para a análise de eventos detectados por câmaras de emulsão e por calorímetros hadrônicos montados tanto ao nível do mar [1] como em altitudes de montanha [2]. A construção desses detectores é de tal forma que se possa medir o fluxo de partículas, em chuveiros atmosféricos. Assim obtém-se medidas do fluxo longitudinal e da dispersão lateral do fluxo.

No presente trabalho é feito o estudo analítico da distribuição lateral da cascata hadrônica induzida por um único nucleon primário na atmosfera.

Adotando o Modelo de Partícula Líder, no Capítulo 2 apresentamos as equações de difusão das componentes hadrônicas (nucleons e píons). Tais equações compõem um sistema de equações diferenciais acopladas. Utilizando o Método de ordenação de operadores exponenciais de Feynman [3] obtemos a solução para o fluxo diferencial hadrônico.

No presente estudo o valor do momento transversal, p_T , é assumido ser igual ao seu valor médio, $p_T = \langle p_T \rangle$. A solução obtida para o fluxo diferencial hadrônico nos permite usar p_T igual a um valor constante ou escrevê-lo em função da energia E . No Capítulo 3, procedemos a uma análise do fluxo diferencial hadrônico em função de $p_T = cte.$ e $p_T = p_T(E)$. Uma vez escolhida a melhor expressão para o momento transversal, procedemos a uma análise detalhada do comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico.

Como não existem dados experimentais de fluxo diferencial hadrônico, utilizando a solução da componente lateral deste fluxo, apresentamos no Capítulo 4 os cálculos de algumas grandezas que são medidas experimentalmente e possibilitam o estudo da distribuição lateral da cascata hadrônica. Selecionando dados experimentais da distribuição lateral das “superfamílias” “Big event”, detectada em altitude do Monte Chacaltaya (Bolívia), “Halina” e “P3'-C5-B505”, detectadas em Pamir (ex-URSS), procedemos a um ajuste entre esses dados e os resultados de nossos cálculos.

Capítulo 2

Fluxo Diferencial Hadrônico

Para a realização do estudo analítico da distribuição lateral da cascata hadrônica, induzida por um único nucleon na atmosfera, devemos primeiramente obter a expressão para o fluxo diferencial hadrônico, ou seja, resolver um sistema acoplado de equações de difusão das componentes da cascata.

Ao escrevermos este sistema de equações, estaremos adotando algumas hipóteses quanto ao desenvolvimento da cascata na atmosfera:

- i) A partícula primária, que induz a cascata, é assumida ser um nucleon com energia E_0 . No *Modelo da Partícula Líder*, o nucleon ao interagir com os nucleons da atmosfera, a uma profundidade t_0 perde uma fração de energia produzindo secundários. O nucleon (N) sobrevivente após a colisão tem energia $\sigma_N E_0$. Define-se a elasticidade σ_N como sendo a fração de energia carregada pela partícula líder após a colisão.
- ii) As partículas secundárias por sua vez, interagem com os nucleons da atmosfera, a uma profundidade t , com energia E e elasticidade σ_i ($i=N, \pi$) resultando:

$$\begin{aligned} N - ar &\implies N, \pi^\pm, \pi^0 \\ \pi^\pm - ar &\implies \pi^\pm, \pi^0 \\ \text{Decaimento de } \pi^0 &\implies \gamma + \gamma. \end{aligned}$$

A influência do decaimento de píons em múons para o fluxo de píons secundários é relevante para partículas com $E < 0.5$ TeV [4]. Como estaremos trabalhando com dados de câmaras de emulsão, cuja energia limiar de detecção é $E \geq 1$ TeV, este decaimento é aqui desprezado.

Deve-se observar que os píons neutros, π^0 , vão dar origem a uma cascata eletromagnética. Sendo então a *cascata hadrônica composta por nucleons e píons carregados*:

$$\begin{aligned} \text{CASCATA HAD.} &= N + \pi^+ + \pi^- \\ &= N + \pi \end{aligned}$$

Estamos desprezando a produção de mésons mais pesados devido a multiplicidade piônica dominante.

- iii) A elasticidade σ_i está distribuída segundo uma função normalizada $f(\sigma_i)$, independente da energia. Assim sendo, a elasticidade média,

$$\langle \sigma_i \rangle = \int_0^1 \sigma_i f(\sigma_i) d\sigma_i,$$

é constante. No presente trabalho estaremos usando $f(\sigma_i) = 1$, ou seja, a *elasticidade está uniformemente distribuída no intervalo* $\sigma_i \in (0, 1)$, de tal forma que

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2}.$$

- iv) *A produção múltipla de píons carregados, com energia E , por nucleons ou píons, com energia E' , está sujeita a uma distribuição espectral $g(E, E')$. Essa função será apresentada no próximo item.*
- v) *Os livres caminhos médio de interação das componentes hadrônicas no ar, λ_i , serão considerados constantes e em média dados por*

$$\begin{aligned} \lambda_N &= 80g/cm^2, \\ \lambda_\pi &= 120g/cm^2. \end{aligned}$$

2.1 Equação de Difusão Hadrônica

De acordo com as hipóteses estabelecidas na seção anterior, podemos escrever as equações de difusão para as componentes da cascata hadrônica. Seja

$$F_i(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) dE d\vec{r} d\vec{\theta} \quad (i=N, \pi)$$

a distribuição diferencial nucleônica ou piônica, a uma profundidade t , com energia entre E e $E + dE$; numa posição entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$, onde \vec{r} é a posição das partículas medida a partir do centro da cascata num plano perpendicular à direção de incidência do primário à profundidade t ; e com o ângulo entre o traço da partícula e a direção do nucleon primário, entre $\vec{\theta}$ e $\vec{\theta} + d\vec{\theta}$ (maiores detalhes à respeito dos vetores \vec{r} e $\vec{\theta}$ se encontram no Apêndice A).

As equações de difusão tridimensionais para as componentes nucleônica e piônica são

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_N}{\partial t}(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) = & - \frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\ & - \frac{1}{\rho(t)} \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla}_r F_N(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\ & + \frac{1}{\lambda_N} \int f(\sigma_N) d\sigma_N \int dE' d\vec{\theta}' \Phi(E, E', \vec{\theta}') \\ & \times F_N(E', E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) = & - \frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\ & - \frac{1}{\rho(t)} \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla}_r F_\pi(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\ & + \frac{1}{\lambda_\pi} \int f(\sigma_\pi) d\sigma_\pi \int dE' d\vec{\theta}' \Phi_\pi(E, E', \vec{\theta}') F_\pi(E', E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0) \\ & + \int dE' d\vec{\theta}' \left[\chi_\pi(E, E', \vec{\theta}') \frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E', E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0) \right. \\ & \left. + \chi_N(E, E', \vec{\theta}') \frac{1}{\lambda_N} F_N(E', E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Em ambas as equações, no lado direito, temos:

- O primeiro termo corresponde à atenuação natural do fluxo por perda de partículas a cada livre caminho médio percorrido.
- O segundo termo descreve o efeito do deslocamento lateral da partícula, que num intervalo de profundidade dt entre duas colisões passa da posição $(\vec{r}, \vec{\theta})$ para $(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\theta} + d\vec{\theta})$. Neste termo, a densidade atmosférica, de acordo com o modelo isotérmico, é dada por

$$\rho(t) = \frac{t}{H_0}$$

onde H_0 é a chamada altura de escala, tomada como sendo aproximadamente igual a $7km$, para altitudes de montanha.

- O terceiro termo representa o ganho de partículas que após a colisão emergem com energia E e posição $(\vec{r}, \vec{\theta})$. A distribuição da partícula após a colisão é dada por

$$\Phi_i(E, E', \vec{\theta}) dE' d\vec{\theta} = \frac{1}{2\pi\theta} \delta\left(\theta - \frac{p_{T_i}}{E}\right) \delta(E - \sigma_i E') dE' d\vec{\theta}, \quad (2.3)$$

onde p_{T_i} é o momento transversal da partícula emergente recebido por recuo. Este termo é ponderado pela distribuição de elasticidade $f(\sigma_i)$.

Na eq. (2.2), para a componente piônica, existe uma contribuição a mais, dada pelo quarto termo no lado direito. Este termo corresponde ao acréscimo de píons devido à probabilidade de uma partícula i (N ou π), com energia E' , sofrer uma colisão produzindo píons com energia E . Esta probabilidade é ponderada pelo espectro de produção de píons carregados na produção múltipla. Ohsawa e Yamashita [5] assumindo a hipótese do "scaling" de Feynman [6], obtêm uma expressão empírica que descreve este espectro de produção,

$$\chi_i(E, E', \vec{\theta}') dE' d\vec{\theta}' = g_i(E/E') \frac{dE'}{E'} \frac{1}{2\pi\theta'} \delta\left(\theta' - \frac{p_{T_i}}{E}\right) d\vec{\theta}', \quad (2.4)$$

onde

$$g_i(E/E') = g(x) = \frac{5}{3} \frac{(1-x)^4}{x}, \quad (2.5)$$

é a função de produção, que é insensível à mudanças de escala na energia, pois depende somente da razão $x = E/E'$.

A resolução de equações de difusão deste tipo tem sido feita, durante muito tempo, via Transformadas de Mellin [7]. A solução final é expressa na forma de uma integral no plano complexo, sendo extremamente complicada e a integral complexa devendo ser calculada pelo método do ponto de sela [8] ou por métodos numéricos.

Soluções como estas foram obtidas por Rossi e Greisen [9] e posteriormente por Nishimura [10] para a cascata eletromagnética induzida por um fóton energético (gama) ou um elétron, aplicando Transformações de Mellin às equações acopladas que descrevem a difusão de gamas e pares elétron-pósitron. Para as cascatas nucleônica e hadrônica tridimensionais, iniciadas no topo da atmosfera por um fluxo primário com dependência energética na forma de potência, soluções similares foram obtidas por Messel e Green [11]. Mais recentemente, Ohsawa e Yamashita [5], seguindo o mesmo método de resolução, estudaram a cascata hadrônica iniciada por um único nucleon.

Em todos estes casos a solução final é sempre escrita em termos de complicadas integrais no plano complexo. Outra maneira de abordar o desenvolvimento de cascatas na atmosfera tem sido o método das aproximações sucessivas, cuja metodologia é um tanto quanto trabalhosa.

Buscando métodos alternativos, mais simples, de resolução das equações de difusão na atmosfera, foi proposto a utilização do método de Ordenação de Operadores Exponenciais de Feynman (OOEF) [3, 12]. Utilizando este método, é possível, por exemplo, reproduzir facilmente as soluções de Nishimura [10] para a cascata eletromagnética, ao se usar um formalismo spinorial [13]. Contudo esta solução ainda é escrita no espaço de Mellin.

Bellandi e Colaboradores, aplicando esta metodologia, OOEF, a uma gama de problemas de difusão na atmosfera, têm encontrado soluções “fechadas”, isto é, escritas no espaço de configuração (\vec{r}) e expressas através de funções analíticas simples ou de integrais de convolução de fácil manuseio. Por exemplo, soluções analíticas foram ob-

tidas para a cascata hadrônica iniciada no topo da atmosfera por um fluxo primário na forma de potência, tanto no caso unidimensional [14], quanto tridimensional [15]. A extensão dessas soluções para contabilizar o fluxo muônico, sujeito às mesmas condições iniciais, foram também objeto de amplos estudos [4, 16]. A cascata eletromagnética, sob semelhantes condições de contorno, foi recentemente estudada [17].

Este método de resolução das equações diferenciais, OOEF, possibilita ainda a análise do desenvolvimento de cascatas induzidas na atmosfera por um único nucleon, conforme abordado em estudos recentes da cascata nucleônica tridimensional [18] e da cascata hadrônica unidimensional [19, 20]. O presente trabalho é uma extensão desses cálculos, onde para resolver as equações de difusão tridimensionais nucleônica, eq. (2.1), e piônica, eq. (2.2), usaremos o método de OOEF.

As condições de contorno para as equações (2.1) e (2.2), tendo em vista que a cascata hadrônica é gerada em t_0 por um único nucleon, são:

$$F_N(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t = t_0) = \delta(E - E_0) \delta(\vec{r}) \delta(\vec{\theta}), \quad (2.6)$$

$$F_\pi(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t = t_0) = 0. \quad (2.7)$$

Reescrevendo de uma forma mais apropriada as equações eqs. (2.1) e (2.2), temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_N}{\partial t}(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\ &- \frac{1}{\rho(t)} \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla}_r F_N(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \int f(\sigma_N) \frac{d\sigma_N}{\sigma_N} \int d\vec{\theta}' \Psi_N(\vec{\theta}') \\ &\times F_N(E/d\sigma_N, E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) = -\frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\rho(t)} \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla}_r F_\pi(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0) \\
& + \frac{1}{\lambda_\pi} \int f(\sigma_\pi) \frac{d\sigma_\pi}{\sigma_\pi} \int d\vec{\theta}' \Psi_\pi(\vec{\theta}') F_\pi(E/d\sigma_\pi, E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0) \\
& + \frac{1}{\lambda_\pi} \int d\vec{\theta}' \Psi_\pi(\vec{\theta}') \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_\pi \left(\frac{E}{E'} \right) F_\pi(E', E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0) \\
& + \frac{1}{\lambda_N} \int d\vec{\theta}' \Psi_N(\vec{\theta}') \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \\
& \quad \times F_N(E', E_0, \vec{r}, \vec{\theta} - \vec{\theta}', t, t_0), \tag{2.9}
\end{aligned}$$

onde usamos uma das propriedades da função delta de Dirac [21],

$$\delta(E - \sigma_i E') = \frac{1}{\sigma_i} \delta(E/\sigma_i - E'), \tag{2.10}$$

e a função $\Psi_i(\vec{\theta})$ é dada pelas equações(2.3) e (2.4),

$$\Psi_i(\vec{\theta}) = \frac{1}{2\pi\theta} \delta\left(\theta - \frac{pT_i}{E}\right). \tag{2.11}$$

Estas equações podem ser escritas no espaço de momento aplicando-se uma Transformada de Fourier via $\exp(i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\vec{Q} \cdot \vec{\theta})$, onde

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= -i \vec{\nabla}_r \\
\vec{Q} &= -i \vec{\nabla}_\theta
\end{aligned}$$

são os momentos associados a \vec{r} e $\vec{\theta}$ (vide Apêndice A). Lembrando da definição da Transformada de Fourier de uma função $f(x)$ [8],

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = f(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \tag{2.12}$$

e usando o Teorema da Convolução das Transformadas de Fourier [8],

$$\mathcal{F}\{h(x)\} = f(\alpha) \cdot g(\alpha), \tag{2.13}$$

onde

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot g(x - \xi) d\xi = f(x) \cdot g(x), \tag{2.14}$$

podemos escrever as equações de difusão acima no espaço de momento,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_N}{\partial t}(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) \\ &- \frac{1}{\rho(t)} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_Q F_N(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \bar{\Psi}_N(\vec{Q}) \int_0^1 f(\sigma_N) \frac{d\sigma_N}{\sigma_N} F_N(E/d\sigma_N, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) \\ &- \frac{1}{\rho(t)} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_Q F_\pi(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} \bar{\Psi}_\pi(\vec{Q}) \int_0^1 f(\sigma_\pi) \frac{d\sigma_\pi}{\sigma_\pi} F_\pi(E/d\sigma_\pi, E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} \bar{\Psi}_\pi(\vec{Q}) \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_\pi \left(\frac{E}{E'} \right) F_\pi(E', E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \bar{\Psi}_N(\vec{Q}) \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_N \left(\frac{E}{E'} \right) F_N(E', E_0, \vec{p}, \vec{Q}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\bar{\Psi}_i(\vec{Q})$ é a Transformada de Fourier de função $\Psi_i(\vec{\theta})$,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_i(\vec{Q}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{Q}\cdot\vec{\theta}} \Psi_i(\vec{\theta}) d\vec{\theta} \\ &= \int \int e^{i\vec{Q}\cdot\vec{\theta}} \Psi_i(\vec{\theta}) \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Escrevendo a função exponencial na forma de uma série, tal que

$$e^{i\vec{Q}\cdot\vec{\theta}} = \sum_m i^m J_m \left(|\vec{Q}| \cdot |\vec{\theta}| \right) e^{im\varphi}, \quad (2.18)$$

e usando a eq.(2.11), reescrevemos a eq.(2.17),

$$\bar{\Psi}_i(\vec{Q}) = \sum_m i^m \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im\varphi} \int d\theta \delta \left(|\vec{\theta}| - \frac{pT_i}{E} \right) J_m \left(|\vec{Q}| \cdot |\vec{\theta}| \right). \quad (2.19)$$

O fator

$$\int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im\varphi} = \begin{cases} 1, & \text{para } m = 0, \\ 0, & \text{para } m \neq 0, \end{cases}$$

então,

$$\bar{\Psi}_i(\vec{Q}) = J_0 \left(\left| \vec{Q} \right| \cdot \frac{pT_i}{E} \right), \quad (2.20)$$

onde J_m é a função de Bessel de ordem m .

Nas equações (2.15) e (2.16), as grandezas t e \vec{Q} podem ser tratadas como parâmetros. Usando uma mudança de variável para t e \vec{Q} do tipo (veja Apêndice A),

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{Q} = \vec{Q}' - \vec{p}H_0 \ln(t'), \end{cases} \quad (2.21)$$

as equações (2.15) e (2.16) podem ser reescritas em função de \vec{Q}' e t' ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_N}{\partial t'}(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0) &= -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} J_0[\beta_N(t')] \int_0^1 f(\sigma_N) \frac{d\sigma_N}{\sigma_N} F_N(E/d\sigma_N, E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t'}(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0) &= -\frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} J_0[\beta_\pi(t')] \int_0^1 f(\sigma_\pi) \frac{d\sigma_\pi}{\sigma_\pi} F_\pi(E/d\sigma_\pi, E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} J_0[\beta_\pi(t')] \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_\pi \left(\frac{E}{E'} \right) F_\pi(E', E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} J_0[\beta_N(t')] \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_N \left(\frac{E}{E'} \right) F_N(E', E_0, \vec{p}, \vec{Q}', t', t_0), \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde

$$\beta_i(t') = \frac{pT_i}{E} \cdot |\tilde{Q}' - \bar{p}H_o \ln(t')|.$$

Do Apêndice A temos que

$$\tilde{Q}' = \bar{p}H_o \ln(t_f/t),$$

onde t_f é a profundidade no nível de detecção.

Reescrevendo as equações de difusão acima, em função de \bar{p} e t , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_N}{\partial t}(E, E_0, \bar{p}, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, \bar{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} J_0[\beta_N(t)] \int_0^1 f(\sigma_N) \frac{d\sigma_N}{\sigma_N} F_N(E/d\sigma_N, E_0, \bar{p}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \bar{p}, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, \bar{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} J_0[\beta_\pi(t)] \int_0^1 f(\sigma_\pi) \frac{d\sigma_\pi}{\sigma_\pi} F_\pi(E/d\sigma_\pi, E_0, \bar{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} J_0[\beta_\pi(t)] \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_\pi\left(\frac{E}{E'}\right) F_\pi(E', E_0, \bar{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} J_0[\beta_N(t)] \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} g_N\left(\frac{E}{E'}\right) F_N(E', E_0, \bar{p}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo agora

$$\begin{aligned} \beta_i(t) &= \frac{pT_i}{E} H_o p \ln(t_f/t) \\ &= \beta_i p \ln(t_f/t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.2 Fluxo Hadrônico no Espaço de Momento

Para obter o fluxo diferencial nucleônico e piônico no espaço de momentos, $F_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0)$ e $F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0)$ respectivamente, as equações (2.24) e (2.25) devem ser integradas no intervalo $t_0 \leq t \leq t_f$, com as seguintes condições de contorno:

$$F_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) = \delta(E - E_0), \quad (2.27)$$

$$F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) = 0. \quad (2.28)$$

A solução para a componente nucleônica foi recentemente obtida, por Bellandi *et al.* [18], usando o método de ordenação de operadores exponenciais de Feynman e na aproximação de baixos ângulos. O fluxo diferencial nucleônico no espaço de momentos é escrito como uma soma de dois termos,

$$F_N(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = F_N^0(E, E_0, t_f, t_0) + F_N^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0), \quad (2.29)$$

onde o primeiro termo corresponde à contribuição longitudinal:

$$F_N^0(E, E_0, t_f, t_0) = \exp[-(t_f - t_0)] \left\{ \delta(E - E_0) + (t_f - t_0) \frac{1}{E_0} \frac{2}{u} I_1(u) \right\}, \quad (2.30)$$

onde $I_1(u)$ é a função de Bessel modificada e

$$u = [4(t_f - t_0) \ln(E_0/E)]^{1/2}.$$

A variável profundidade está escrita em unidades de livre caminho médio de interação, $t = t/\lambda_N$. Doravante estaremos adotando esta notação, por simplicidade.

O segundo termo do fluxo nucleônico descreve o deslocamento lateral:

$$F_N^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = -\frac{1}{4} \exp[-(t_f - t_0)] \int_{t_0}^{t_f} \beta_N^2(t) G(E, E_0, z) dz, \quad (2.31)$$

onde

$$G(E, E_0, z) = G_1(E, E_0, z) + G_2(E, E_0, z),$$

tal que

$$G_1(E, E_0, z) = \frac{1}{E_0} (t_f - z) \int_E^{E_0} dE' \frac{E'^2}{E'^3} \frac{2}{u'_2} I_1(u'_2) I_0(u'_1), \quad (2.32)$$

$$G_2(E, E_0, z) = \frac{1}{E_0} I_0(u'_0), \quad (2.33)$$

com

$$\begin{aligned} u'_0 &= [4(z - t_0) \ln(E_0/E)]^{1/2}, \\ u'_1 &= [4(z - t_0) \ln(E_0/E')]^{1/2}, \\ u'_2 &= [4(t_f - z) \ln(E'/E)]^{1/2}. \end{aligned}$$

A solução para a componente piônica pode ser obtida seguindo o mesmo procedimento adotado para o cálculo do fluxo diferencial nucleônico.

A equação de difusão piônica, eq.(2.25), pode ser reescrita em função de operadores. Ao se introduzir os operadores $\hat{\sigma}_i$ e $\hat{\Sigma}_i$, tal que

$$\hat{\sigma}_i h(E) = \int_0^1 f(\sigma_i) h(E/\sigma_i) \frac{d\sigma_i}{\sigma_i}, \quad (2.34)$$

e

$$\hat{\Sigma}_i h(E) = \int_E^{E_0} g_i \left(\frac{E}{E'} \right) h(E') \frac{dE'}{E'}, \quad (2.35)$$

e tomando $\lambda_\pi = 3/2\lambda_N$, a eq.(2.25) se transforma em

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) &= -\frac{2}{3} F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{2}{3} J_0 [\beta_\pi(t)] \hat{\sigma}_\pi F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{2}{3} J_0 [\beta_\pi(t)] \hat{\Sigma}_\pi F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ J_0 [\beta_N(t)] \hat{\Sigma}_N F_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Vamos escrever esta equação na aproximação de baixos ângulos, $\theta \ll 1$, onde para partículas extremamente relativísticas (vide Apêndice A),

$$\theta \approx \frac{p_{Ti}}{E} \ll 1 \rightarrow \beta_i(t) \ll 1.$$

Expressando $J_0[\beta_i(t)]$ como uma expansão em série de potências

$$J_0(y) = 1 - \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} - \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

onde para $y = \beta_i(t) \ll 1$, obtemos

$$J_0[\beta_i(t)] \approx 1 - \frac{\beta_i^2(t)}{4}. \quad (2.37)$$

Usando este resultado (2.37), na equação (2.36) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) &= -\frac{2}{3} F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{2}{3} \left[1 - \frac{\beta_\pi^2(t)}{4} \right] \hat{\sigma}_\pi F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ \frac{2}{3} \left[1 - \frac{\beta_\pi^2(t)}{4} \right] \hat{\Sigma}_\pi F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ \left[1 - \frac{\beta_N^2(t)}{4} \right] \hat{\Sigma}_N F_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.38)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) &= \hat{H}_\pi(t) F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) \\ &+ \hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\pi(t) &= \hat{A}_\pi + \hat{B}_\pi(t) \\
\hat{A}_\pi &= -\frac{2}{3} [1 - \hat{\sigma}_\pi - \hat{\Sigma}_\pi] \\
\hat{B}_\pi(t) &= -\frac{1}{6} \beta_\pi^2(t) [-\hat{\sigma}_\pi - \hat{\Sigma}_\pi] \\
\hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0) &= \left[1 - \frac{\beta_N^2(t)}{4} \right] \hat{\Sigma}_N F_N(E, E_0, \vec{p}, t, t_0). \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Sendo $\hat{H}_\pi(t)$ um operador, onde \hat{A}_π e $\hat{B}_\pi(t)$ não comutam, a solução formal da equação (2.39) é dada por

$$F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} dz \text{Exp} \left[\int_z^{t_f} \hat{H}_\pi(z') dz' \right] \hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, z, t_0), \quad (2.41)$$

onde a notação *Exp* se refere ao operador Expansional [3, 12, 22], definido por uma soma de múltiplas integrais ordenadas. No presente caso temos,

$$\text{Exp} \left[\int_z^{t_f} dz' \hat{H}_\pi(z') \right] = \hat{I} + \int_z^{t_f} \hat{H}_\pi(z') dz' + \int_z^\lambda d\lambda \hat{H}_\pi(\lambda) \int_z^\lambda dz' \hat{H}_\pi(z') + \dots \quad (2.42)$$

sendo \hat{I} a representação do operador identidade.

Da regra de decomposição para operadores expansionais podemos escrever

$$\begin{aligned}
\text{Exp} \left[\int_z^{t_f} \hat{H}_\pi(z') dz' \right] &= \text{Exp} \left[\int_z^{t_f} dz' \{ \hat{A}_\pi + \hat{B}_\pi(z') \} \right] \\
&= \text{Exp} \left[\int_z^{t_f} dz' \text{Exp} \left\{ \int_{z'}^{t_f} d\lambda \hat{A}_\pi \right\} \hat{B}_\pi(z') \text{Exp} \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \int_{z'}^{t_f} d\lambda \hat{A}_\pi \right\} \right] \text{Exp} \left\{ \int_z^{t_f} dz' \hat{A}_\pi \right\}. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Definindo o operador

$$\hat{O}_\pi(t_f, z) = \text{Exp} \left\{ \int_z^{t_f} dz' \hat{A}_\pi \right\},$$

e uma vez que \hat{A}_π não depende explicitamente da profundidade z' , temos

$$\begin{aligned}\hat{O}_\pi(t_f, z) &= \exp\{\hat{A}_\pi(t_f - z)\} \\ &= \exp\left\{-\frac{2}{3}(t_f - z) [1 - \hat{\sigma}_\pi - \hat{\Sigma}_\pi]\right\}.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Usando as expressões (2.43) e (2.44) na equação (2.41), obtemos

$$\begin{aligned}F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= \int_{t_0}^{t_f} dz \text{Exp} \left[\int_z^{t_f} dz' \hat{O}_\pi(t_f, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi(z', t_0) \right] \\ &\times \hat{O}_\pi(t_f, z) \hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, z, t_0).\end{aligned}\quad (2.45)$$

Aplicando a definição de Expansionais, eq.(2.42), na equação acima e desprezando, daqui por diante, termos de ordem superior a dois no momento transversal, p_{T_i} , temos que

$$\begin{aligned}F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= \int_{t_0}^{t_f} dz \hat{O}_\pi(t_f, z) \hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, z, t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} dz \left\{ \int_z^{t_f} dz' \hat{O}_\pi(t_f, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi(z', t_0) \right\} \\ &\times \hat{O}_\pi(t_f, z) \hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, z, t_0).\end{aligned}\quad (2.46)$$

Usando a eq.(2.29) em $\hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, z, t_0)$, a expressão (2.40) pode ser escrita na forma

$$\hat{P}_N(E, E_0, \vec{p}, z, t_0) = \left[1 - \frac{\beta_N^2(t)}{4} \right] \hat{\Sigma}_N \left[F_N^0(E, E_0, z, t_0) + F_N^L(E, E_0, \vec{p}, z, t_0) \right], \quad (2.47)$$

onde, de acordo com Bellandi *et al.* [18, 23] as contribuições do fluxo diferencial nucleônico podem ser escritas em função de operadores,

$$F_N^0(E, E_0, z, t_0) = \hat{O}_N(z, t_0) \delta(E - E_0) \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}F_N^L(E, E_0, \vec{p}, z, t_0) &= \left\{ \int_{t_0}^z dz' \hat{O}_N(z, z') \hat{B}_N(z') \hat{O}_N(z', t_0) \right\} \\ &\times \delta(E - E_0),\end{aligned}\quad (2.49)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{O}_N(z, t_0) &= \exp[-(z - t_0)(1 - \hat{\sigma}_N)], \\ \hat{B}_N(z) &= -\frac{\beta_N^2(t)}{4}\hat{\sigma}_N.\end{aligned}$$

As equações (2.47) e (2.49) nos permitem escrever a expressão para o fluxo diferencial piônico, eq.(2.46), em função da delta de Dirac em energia. Escrevendo a $\delta(E - E_0)$ na representação da integral complexa de Mellin,

$$\delta(E - E_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} ds, \quad (2.50)$$

podemos definir uma base de energia ortonormalizada.

A solução piônica, eq. (2.46), pode então ser escrita nesta base de energia, sendo da mesma maneira que a nucleônica, composta por duas contribuições, a longitudinal e a lateral,

$$F_\pi(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = F_\pi^0(E, E_0, t_f, t_0) + F_\pi^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0), \quad (2.51)$$

onde,

$$F_\pi^0(E, E_0, t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} dz \langle E | \hat{O}_\pi(t_f, z) \hat{\Sigma}_N \hat{O}_N(z, t_0) | E_0 \rangle, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}F_\pi^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= F_{\pi 1}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) \\ &+ F_{\pi 2}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) + F_{\pi 3}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0),\end{aligned} \quad (2.53)$$

tal que

$$\begin{aligned}F_{\pi 1}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= \\ \int_{t_0}^{t_f} dz \langle E | \hat{O}_\pi(t_f, z) \hat{\Sigma}_N \int_{t_0}^z dz' \hat{O}_N(z, z') \hat{B}_N(z') \hat{O}_N(z', t_0) | E_0 \rangle,\end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
 F_{\pi 2}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= -\frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_f} dz \langle E | \int_z^{t_f} dz' \hat{O}_\pi(t_f, z') \\
 &\times \frac{2}{3} \left\{ \beta_\pi^2(z') \hat{\sigma}_\pi(z') \hat{O}_\pi(z', z) \hat{\Sigma}_N \hat{O}_N(z, t_0) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^2(z') \hat{\Sigma}_\pi \hat{O}_\pi(z', z) \right\} | E_0 \rangle, \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\pi 3}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= \\
 &-\frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_f} dz \langle E | \hat{O}_\pi(t_f, z) \alpha^2(z) \hat{\Sigma}_N \hat{O}_N(z, t_0) | E_0 \rangle, \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

Introduzindo estados intermediários em energia e sabendo que o valor médio em energia do operador $\hat{\Sigma}_i$ é dado por

$$\langle E' | \hat{\Sigma}_i | E'' \rangle = g_i \left(\frac{E'}{E''} \right), \quad (2.57)$$

onde a função $g_i(E'/E'')$ é dada pela equação (2.5), reescrevemos as expressões (2.52), (2.54), (2.55) e (2.56),

$$F_\pi^0(E, E_0, t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} dz \int_E^{E_0} dE' g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \langle E' | \hat{O}_\pi(t_f, z) \hat{O}_N(z, t_0) | E_0 \rangle, \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
 F_{\pi 1}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= \int_{t_0}^{t_f} dz \int_E^{E_0} dE' \left(\frac{E}{E'} \right)^2 g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \int_{E'}^{E_0} dE'' \\
 &\times \langle E' | \hat{O}'_\pi(t_f, z) | E_0 \rangle F_N^L(E'', E_0, \vec{p}, z, t_0), \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\pi 2}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= -\frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_f} dz \int_z^{t_f} dz' \int_E^{E_0} dE' \int_{E'}^{E_0} dE'' \\
 &\times \langle E | \hat{O}_\pi(t_f, z') \frac{2}{3} \beta_\pi^2(z') \hat{\sigma}_\pi(z') \hat{O}_\pi(z', z) | E' \rangle g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) F_N^0(E'', E_0, z, t_0), \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

$$F_{\pi 3}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = -\frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_f} dz \int_E^{E_0} dE' \int_{E'}^{E_0} dE''$$

$$\times \langle E | \hat{O}'_{\pi}(t_f, z') \alpha^2(z) | E' \rangle g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) F_N^0(E'', E_0, z, t_0), \quad (2.61)$$

onde $F_N^L(E'', E_0, \vec{p}, z, t_0)$ e $F_N^0(E'', E_0, z, t_0)$ são dados pelas equações (2.31) e (2.30), respectivamente; $\hat{O}'_{\pi}(t_f, z)$ é o operador obtido após $\hat{O}_{\pi}(t_f, z)$ atuar sobre a função $(1/E^2)$ e estamos desprezando termos que contenham o operador $\hat{\Sigma}_{\pi}$, isto porque a contribuição de píons por píons na produção múltipla é desprezível.

Escrevendo a base em energia na representação integral complexa de Mellin e escolhendo um caminho adequado de integração sobre o plano complexo, obtemos a solução final para o fluxo diferencial piônico:

→ Contribuição Longitudinal:

$$F_{\pi}^0(E, E_0, t_f, t_0) =$$

$$\frac{2}{E_0} \int_{t_0}^{t_f} dz T'(z) \exp[-T'(z)] \left[\int_E^{E_0} dE' g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{I_1(u)}{u} \right]$$

$$+ g_N \left(\frac{E}{E_0} \right) \int_{t_0}^{t_f} dz \exp[-T'(z)], \quad (2.62)$$

onde

$$T'(z) = \frac{2}{3} (t_f - z) + (z - t_0),$$

$$u = \left[4 T'(z) \ln \left(\frac{E_0}{E'} \right) \right]^{1/2}.$$

→ Contribuição Lateral:

$$F_{\pi 1}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} dz \exp \left[-\frac{2}{3} (t_f - z) \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \int_E^{E_0} dE' \left(\frac{E}{E'} \right)^2 g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \left\{ F_N^L(E', E_0, \vec{p}, z, t_0) + \frac{2}{3}(t_f - z) \right. \\ & \quad \left. \times \int_{E'}^{E_0} dE'' \frac{E'^2}{E''^3} \frac{2}{u_1} I_1(u_1) F_N^L(E'', E_0, \vec{p}, z, t_0) \right\}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} F_{\pi^2}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= -\frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_f} dz \int_E^{E_0} dE' F_{\pi}^L(E, E', \vec{p}, t_f, z) \\ & \quad \times \int_{E'}^{E_0} dE'' g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) F_N^0(E'', E_0, z, t_0), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} F_{\pi^3}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) &= -\frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_f} dz \alpha^2(z) \exp \left[-\frac{2}{3}(t_f - z) \right] \\ & \quad \times \left\{ \int_E^{E_0} dE' g_N \left(\frac{E}{E'} \right) F_N^0(E', E_0, z, t_0) \right. \\ & \quad + \int_E^{E_0} dE' \frac{E^2}{E'^3} \frac{2}{u_2} I_1(u_2) \frac{2}{3}(t_f - z) \\ & \quad \left. \times \int_{E'}^{E_0} dE'' g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) F_N^0(E'', E_0, z, t_0) \right\}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde

$$\begin{aligned} u_1 &= \left[\frac{8}{3}(t_f - z) \ln \left(\frac{E''}{E'} \right) \right]^{1/2} \\ u_2 &= \left[\frac{8}{3}(t_f - z) \ln \left(\frac{E'}{E} \right) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

e a função $F_{\pi}^L(E, E', \vec{p}, t_f, z)$ é escrita na mesma forma que a expressão para $F_N^L(E, E', \vec{p}, t_f, z)$, eq. (2.31), bastando trocar N por π .

A solução hadrônica é a soma das soluções nucleônica e piônica:

→ Contribuição Longitudinal:

$$F_H^0(E, E_0, t_f, t_0) = F_N^0(E, E_0, t_f, t_0) + F_{\pi}^0(E, E_0, t_f, t_0). \quad (2.66)$$

→ Contribuição Lateral:

$$F_H^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) = F_N^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0) + F_{\pi}^L(E, E_0, \vec{p}, t_f, t_0). \quad (2.67)$$

2.3 Fluxo Hadrônico no Espaço de Configuração

A solução hadrônica, no espaço de configuração \vec{r} , é obtida ao se aplicar a anti-transformada de Fourier na solução no espaço de momento. Entretanto, ao se efetuar a operação, temos que a anti-transformada de Fourier das equações (2.29) e (2.51) são divergentes.

Com o objetivo de obter uma solução significativa para o fluxo diferencial hadrônico no espaço \vec{r} , devemos reescrever a solução no espaço de momento de uma forma apropriada, o que significa reproduzir o termo $[1 - \beta_i^2(t)]/4$, que na aproximação de baixos ângulos equivale a reconstruir a função $J_0[\beta_i(t)]$ nas equações (2.29) e (2.51) e então calcular a anti-transformada de Fourier.

Com este procedimento obtemos o fluxo diferencial no espaço \vec{r} das componentes hadrônicas, as quais têm duas contribuições cada, uma que descreve o fluxo de partículas ao longo da direção vertical e a outra que contabiliza o fluxo de partículas distribuídas lateralmente:

→ Componente Nucleônica [18]:

$$F_N(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = F_N^V(E, E_0, t_f, t_0) \delta(\vec{r}) + F_N^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0), \quad (2.68)$$

com

$$F_N^V(E, E_0, t_f, t_0) = \exp\{-T\} \left(\delta(E - E_0) - \int_{t_0}^{t_f} dt G_1(E, E_0, t) \right). \quad (2.69)$$

e

$$F_N^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = H(\alpha_{max} - \alpha_N) t_f \exp\{-T\} \times \frac{E^2}{p_{TN}^2 \cdot H_0^2} \frac{e^{-\alpha_N}}{\alpha_N} G(E, E_0, t_f e^{-\alpha_N}), \quad (2.70)$$

onde temos introduzido as variáveis altura de interação, $T = t_f - t_0$ e

$$\alpha_{max} = \ln\left(\frac{t_f}{t_0}\right)$$

2.3. FLUXO HADRÔNICO NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO 35

$$= -\ln \left[1 - \frac{T}{t_f} \right]; \quad (2.71)$$

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{p_{T_i} \cdot H_o}, \quad (2.72)$$

sendo α a dispersão lateral dada por

$$\alpha = E r. \quad (2.73)$$

A função de Heaviside, $H(\alpha_{max} - \alpha_N)$, na equação (2.70) introduz um limite natural para o desenvolvimento lateral da cascata. A função $G(E, E_0, t) = G_1(E, E_0, t) + G_2(E, E_0, t)$ é dada pelas equações (2.32) e (2.33).

→ Componente Piônica:

$$F_\pi(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = F_\pi^V(E, E_0, t_f, t_0) \delta(\vec{r}) + F_\pi^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0), \quad (2.74)$$

com

$$F_\pi^V(E, E_0, t_f, t_0) = F_{\pi 1}^V(E, E_0, t_f, t_0) + F_{\pi 2}^V(E, E_0, t_f, t_0) + F_{\pi 3}^V(E, E_0, t_f, t_0), \quad (2.75)$$

tal que

$$F_{\pi 1}^V(E, E_0, t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} dz \exp [t_\pi(z) - t_N(z)] \int_E^{E_0} dE' \left(\frac{E}{E'} \right)^2 g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \times \left\{ \int_{t_0}^z G_N(E', E_0, z') dz' + t_\pi \int_{E'}^{E_0} dE'' \frac{E'^2}{E''^3} \times \frac{2}{u_1} I_1(u_1) \int_{t_0}^z G_N(E'', E_0, z') dz' \right\}, \quad (2.76)$$

$$F_{\pi 2}^V(E, E_0, t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} dz \exp [-(t_\pi(z) + t_N(z))] \int_E^{E_0} dE'$$

$$\begin{aligned} & \times \int_z^{t_f} G_\pi(E, E', z') dz' \left\{ g_N \left(\frac{E'}{E_0} \right) \right. \\ & \quad \left. + t_N \int_{E'}^{E_0} dE'' g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) \frac{1}{E_0} \frac{2}{u_3} I_1(u_3) \right\}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} F_{\pi_3}^V(E, E_0, t_f, t_0) &= \int_{t_0}^{t_f} dz \exp[t_\pi(z)] \\ & \times \int_E^{E_0} dE' \left\{ g_N \left(\frac{E}{E'} \right) F_N^0(E', E_0, z, t_0) + t_\pi(z) \frac{E^2}{E'^3} \frac{2}{u_2} I_1(u_2) \right. \\ & \quad \left. \times \int_{E'}^{E_0} dE'' g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) F_N^L(E'', E_0, z, t_0) \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

e sendo

$$\begin{aligned} t_N(z) &= (z - t_0), \\ t_\pi(z) &= \frac{2}{3} (t_f - z), \\ u_3 &= \left[4(z - t_0) \ln \left(\frac{E_0}{E''} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} F_\pi^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) &= F_{\pi_1}^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) \\ & \quad + F_{\pi_2}^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) + F_{\pi_3}^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0), \end{aligned} \quad (2.79)$$

tal que

$$\begin{aligned} F_{\pi_1}^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) &= \\ & \frac{1}{p_{T_N}^2 \cdot H_0^2} \int_{t_0}^{t_f} z dz \exp[t_\pi(z) - t_N(z)] \int_E^{E_0} dE' \left(\frac{E}{E'} \right)^2 g_N \left(\frac{E}{E'} \right) \\ & \times \left\{ H \left[\ln \left(\frac{z}{t_0} \right) - \alpha_N(E') \right] \frac{e^{-\alpha_N(E')}}{\alpha_N(E')} E^2 G_N(E', E_0, z e^{-\alpha_N(E')}) \right. \\ & \quad + \int_{E'}^{E_0} dE'' H \left[\ln \left(\frac{z}{t_0} \right) - \alpha_N(E'') \right] \frac{e^{-\alpha_N(E'')}}{\alpha_N(E'')} t_\pi(z) \frac{E'^2}{E''} \frac{2}{u_4} I_1(u_4) \\ & \quad \left. \times G_N(E'', E_0, z e^{-\alpha_N(E'')}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.3. FLUXO HADRÔNICO NO ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO 37

$$\begin{aligned}
 & F_{\pi 2}^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = \\
 & \frac{e^{-\alpha\pi}}{\alpha_\pi} \frac{E^2}{p_{T\pi}^2 \cdot H_0^2} t_f \int_{t_0}^{t_f} dz H \left[\ln \left(\frac{t_f}{z} \right) - \alpha_\pi \right] \exp[-(t_\pi(z) + t_N(z))] \\
 & \times \int_E^{E_0} dE' G_\pi(E, E', t_f e^{-\alpha\pi}) \\
 & \times \left\{ g_N \left(\frac{E'}{E_0} \right) + t_N(z) \int_{E'}^{E_0} dE'' g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) \frac{1}{E_0} \frac{2}{u_5} I_1(u_5) \right\}, \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_{\pi 3}^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = \\
 & \frac{e^{-\alpha\pi}}{\alpha_\pi} \frac{E^2}{p_{T\pi}^2 \cdot H_0^2} t_f H [\alpha_{max} - \alpha_\pi] \exp \left[\frac{2}{3} t_f (e^{-\alpha\pi} - 1) \right] \\
 & \times \int_E^{E_0} dE' \left\{ g_N \left(\frac{E'}{E'} \right) F_N^0(E', E_0, t_f e^{-\alpha\pi}, t_0) \right. \\
 & + \frac{2}{3} t_f (1 - e^{-\alpha\pi}) \frac{E^2}{E'^3} \frac{2}{u_6} I_1(u_6) \\
 & \left. \times \int_{E'}^{E_0} dE'' g_N \left(\frac{E'}{E''} \right) F_N^0(E'', E_0, t_f e^{-\alpha\pi}, t_0) \right\}. \quad (2.82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_4 &= \left[\frac{8}{3} (t_f - z) \ln(E''/E') \right]^{1/2}, \\
 u_5 &= [4(z - t_0) \ln(E_0/E'')]^{1/2}, \\
 u_6 &= \left[\frac{8}{3} (t_f - t_f e^{-\alpha\pi}) \ln(E'/E) \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

→ Componente Hadrônica:

$$F_H(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = F_H^V(E, E_0, t_f, t_0) \delta(\vec{r}) + F_H^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0), \quad (2.83)$$

com

$$F_H^V(E, E_0, t_f, t_0) = F_N^V(E, E_0, t_f, t_0) + F_\pi^V(E, E_0, t_f, t_0) \quad (2.84)$$

e

$$F_H^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) = F_N^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0) + F_\pi^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0). \quad (2.85)$$

Capítulo 3

Análise Da Componente Lateral

Apresentamos neste Capítulo um estudo do comportamento lateral do fluxo diferencial da cascata hadrônica induzida em t_0 , por um único nucleon com energia E_0 . Notemos que, para uma dada profundidade t_f , esses são os únicos parâmetros livres em nossa solução. Para se ter uma idéia do comportamento de nossa solução, vamos fixar para a energia do primário $E_0 = 10^4$ TeV. Analisaremos a solução para Chacaltaya, $t_f = 540g/cm^2$ (ou $t_f = 6.75$ em unidades de λ_N).

Ao se proceder a uma análise lateral do fluxo de partículas, uma primeira questão levantada é em relação ao momento transversal: em geral têm-se descrito as contribuições laterais dos fluxos nucleônico [18] e hadrônico [5, 15] em função de $p_{T\pi} = p_{TN} = \langle p_{T_i} \rangle$ constante, assumindo o valor

$$p_{T_i} = 0.4 \text{ GeV}/c \quad (i = N, \pi). \quad (3.1)$$

Entretanto dados de câmaras de emulsão [24] e aceleradores [25, 26], apontam para uma dependência crescente de $\langle p_T \rangle$ com a energia E . Sendo que esta dependência é mais forte para valores de E acima de 10^5 GeV (10^2 TeV).

A solução obtida por nós para o fluxo lateral hadrônico, eq. (2.85), permite usar $\langle p_{T_i} \rangle = cte$ ou $\langle p_{T_i} \rangle = f(E)$.

Assumindo $p_{T_i} = \langle p_{T_i} \rangle = f(E)$, podemos escrever

$$p_{T_i} = a_i + b_i \ln(s), \quad (3.2)$$

onde s é a variável de Mandelstan, de modo que \sqrt{s} representa a energia total no referencial do centro de massa, relacionada com a energia no laboratório através da relação aproximada

$$s = 2m_p E,$$

tal que $m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$ é a massa do próton; e para os parâmetros a_i , b_i estamos usando valores expressos por Bellandi *et al.* [26], conforme indicado na Tabela 3.1, sendo que para os píons carregados em nossa solução hadrônica devemos usar

$$a_\pi = \frac{a_{\pi^+} + a_{\pi^-}}{2}$$

e

$$b_\pi = \frac{b_{\pi^+} + b_{\pi^-}}{2},$$

visto que em nossos cálculos os píons carregados, π^+ e π^- , não são tratados separadamente. Para os nucleons, usamos

$$a_N = a_p = a_{\bar{p}}.$$

Tabela 3.1: Parâmetros de $\langle p_{T_i} \rangle$ obtidos por Bellandi *et al* [26].

	π^-	π^+	\bar{p}
a [GeV/c]	0.2610	0.2858	0.3473
b [GeV/c]	0.0123	0.0089	0.0216

Na Figura 3.1 é plotado o fluxo diferencial lateral, F_i^L ($i=N, \pi$, Hádrons), em função da energia E , tanto para $p_{T_i} = cte$ quanto para

$p_{T_i} = f(E)$, equações (3.1) e (3.2) respectivamente. Observamos que ao usar p_{T_i} dependente ou não da energia em nossos cálculos, obtemos resultados muito próximos, sendo que na região de energias acima de 10^2 TeV é que começa a haver uma diferença significativa, porém ainda pequena, de modo que nos parece razoável usar $p_T = cte$. Contudo, para sermos rigorosos em nossos cálculos, vamos adotar doravante a expressão para p_{T_i} dada em função da E conforme a equação (3.2).

Apresentamos na Figura 3.2 o fluxo lateral F_i^L em função da energia E , mostrando que existe um ponto crítico onde a componente piônica atinge um máximo. Abaixo deste ponto, para energias menores, os píons têm uma grande probabilidade de apresentar um espectro maior do que os nucleons; acima deste, para energias maiores, o comportamento é inverso, visto que não se espera encontrar um grande fluxo de píons com energias próximas a energia do nucleon primário, E_0 . Na Figura 3.3 temos a componente hadrônica, em função de E , para diferentes valores de T . Vemos que a baixas energias, eventos iniciados próximos ao nível de detecção ($t_0 \sim t_f \rightarrow T$ pequeno) apresentam um fluxo diferencial menor do que aqueles eventos iniciados próximo ao topo da atmosfera ($t_0 \sim 0 \rightarrow T$ grande); na região de altas energias, $E \sim E_0$, o resultado é oposto a este. Tal comportamento traduz o fato de que cascatas iniciadas próximo a t_f não têm profundidade suficiente a percorrer, o número de interações hádron-ar é pequeno, portanto temos hádrons mais energéticos.

A dependência das componentes laterais em relação a altura de interação T é mostrada na Figura 3.4. Existe um ponto crítico onde o fluxo piônico atinge um máximo, tal comportamento é análogo aquele observado na cascata eletromagnética, onde o ponto de inflexão define a "age" de seu desenvolvimento [10]. O fluxo nucléônico é muito menor do que o piônico, visto que estamos com uma energia E próxima ao máximo da curva F_π^L versus E , apresentada na Figura 3.1. Na Figura 3.5 temos o comportamento da componente hadrônica para diferentes valores da dispersão lateral, α (eq. (2.73)). Para cada valor de α existe uma altura de interação mínima, T_{MIN} , acima do nível de detecção, indicando que cascatas iniciadas abaixo desse T_{MIN} não se desenvolvem o suficiente para serem detectadas com tal valor de dispersão lateral α . Este resultado é uma consequência do limite natural no desenvolvimento da cascata que em nossos cálculos é descrito pela função de

Heaviside, na qual a variável α_{MAX} é função da relação T/t_f .

Naturalmente, nesta Figura 3.5, para um valor fixo de E , valores maiores de α implicam em raios r maiores, de modo que o fluxo se torna cada vez menor, como pode ser visto das curvas com α [TeV.cm] = 28, 56 e 84. Este comportamento também pode ser observado diretamente da Figura 3.6 e está em acordo com os dados experimentais, visto que em geral é esta a tendência que observamos nos diagramas de alvo corrigido (ver Apêndice B).

Na Figura 3.6, notamos ainda o domínio da componente piônica sobre a nucleônica, e isto se deve a escolha em particular de E e T . A dependência do fluxo hadrônico em função da dispersão lateral é apresentada na Figura 3.7 para alguns valores de T , e notamos que existe um valor máximo de α (α_{MAX}) para cada valor de T onde o fluxo é mínimo.

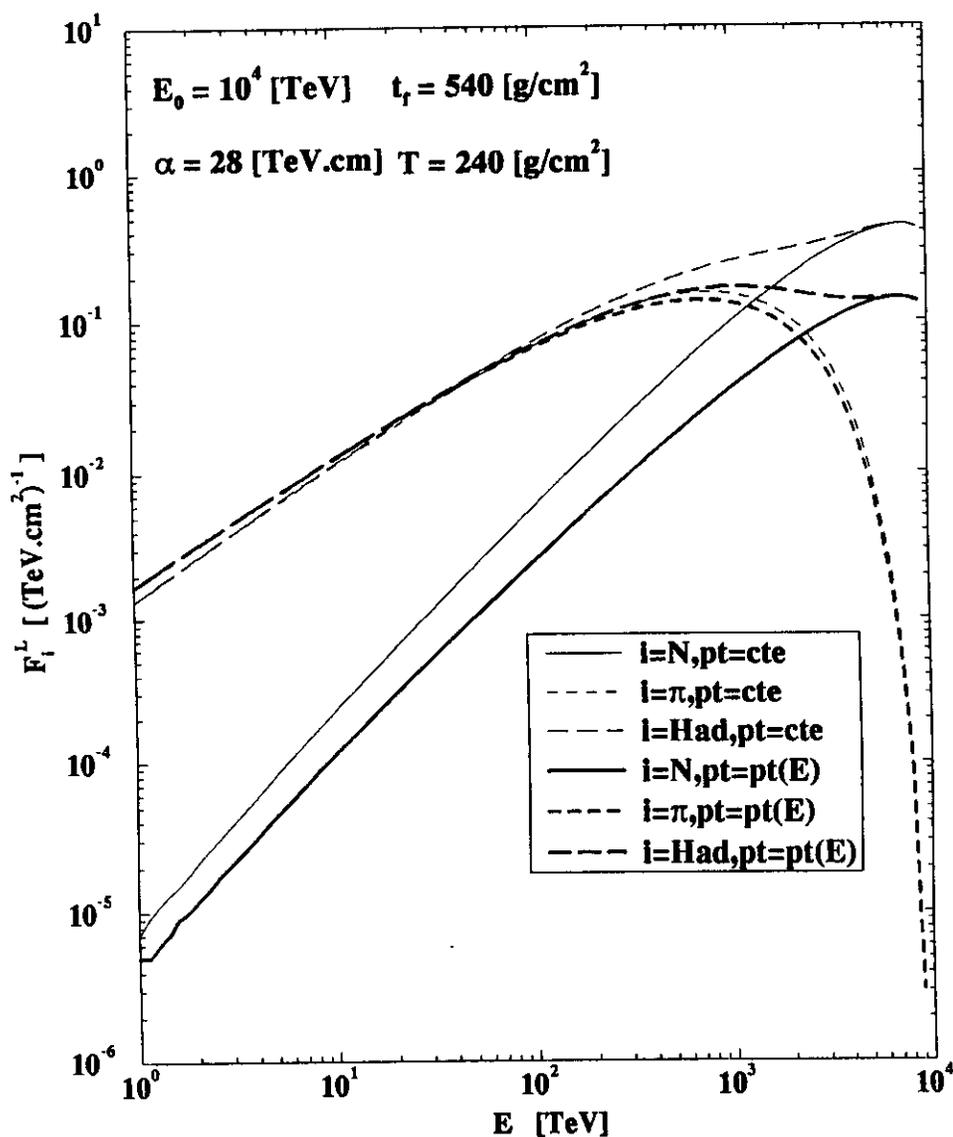


Figura 3.1: Comparação do comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função da energia E para os casos: $p_T = cte.$ e $p_T = p_T(E)$.

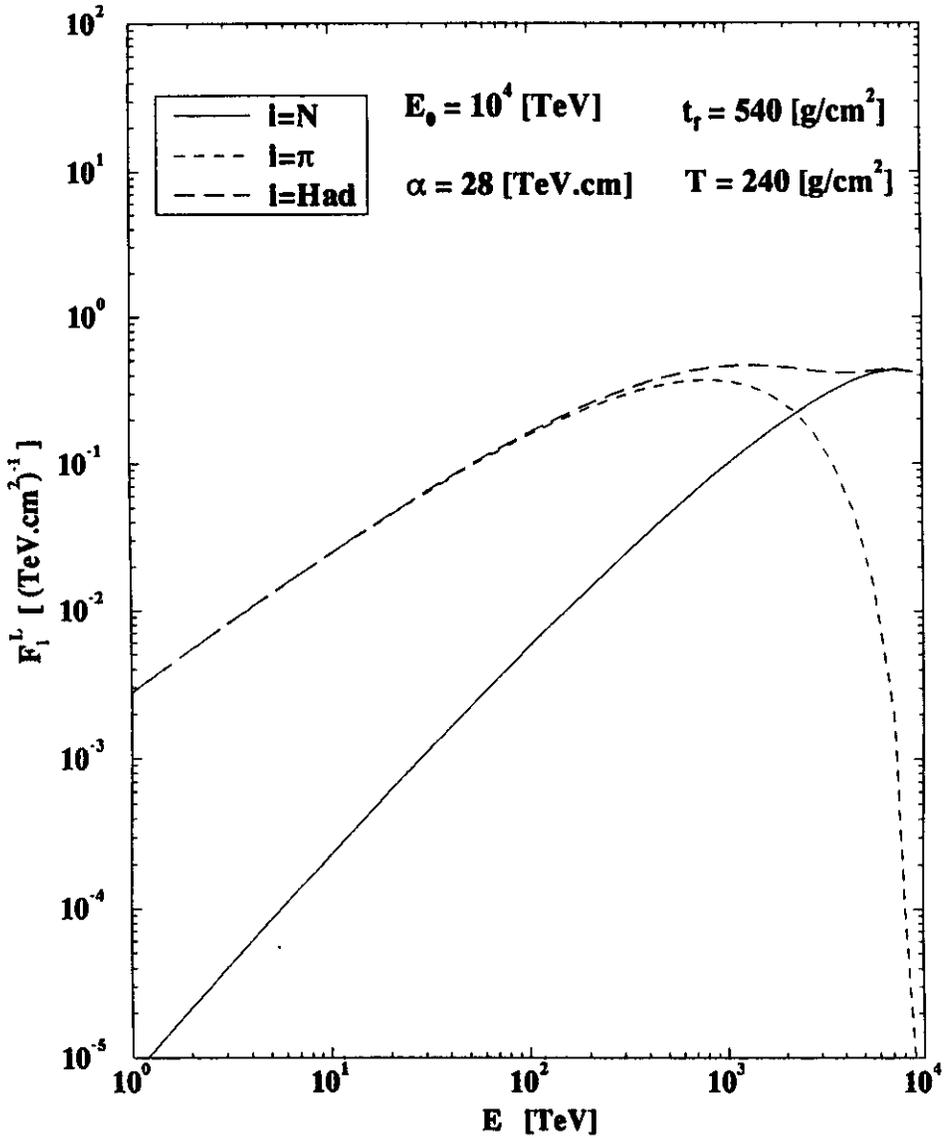


Figura 3.2: Comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função da energia E , para valores fixos de $\alpha = 28$ [TeV.cm] e $T = 240$ [g/cm²].

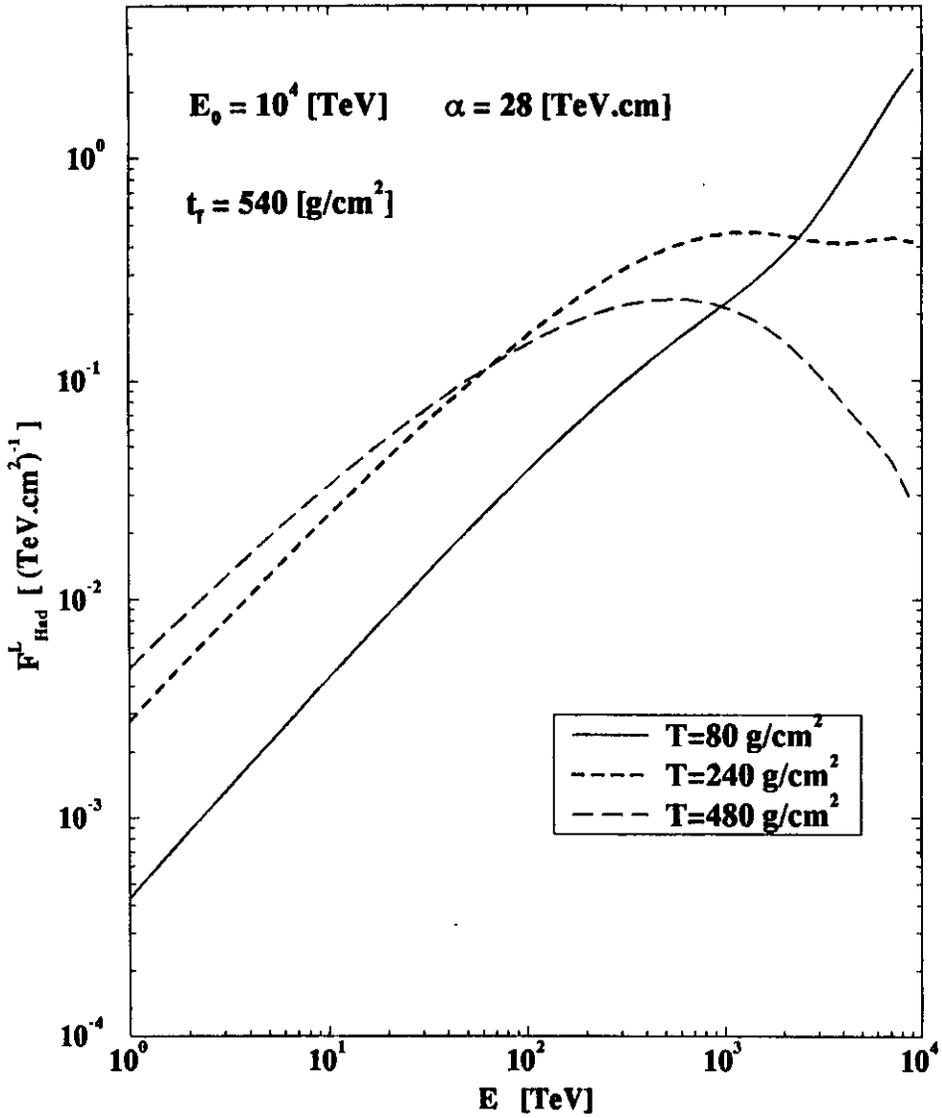


Figura 3.3: Comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico em função da energia E , para diferentes valores de T (com $\alpha = 28$ [TeV.cm]).

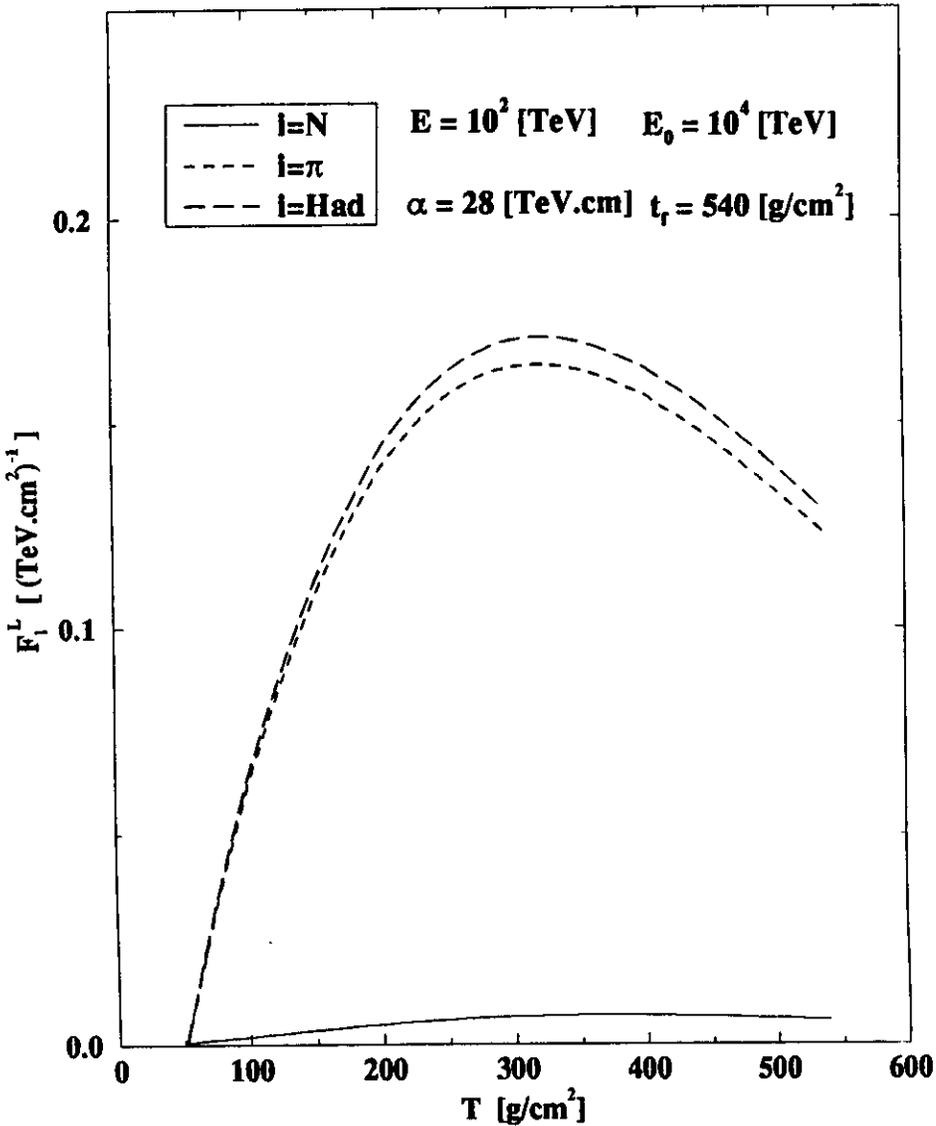


Figura 3.4: Comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função da altura de interação T , para valores fixos de $\alpha = 28$ [TeV.cm] e profundidade de detecção, $t_f = 540$ [g/cm²] (Chacaltaya).

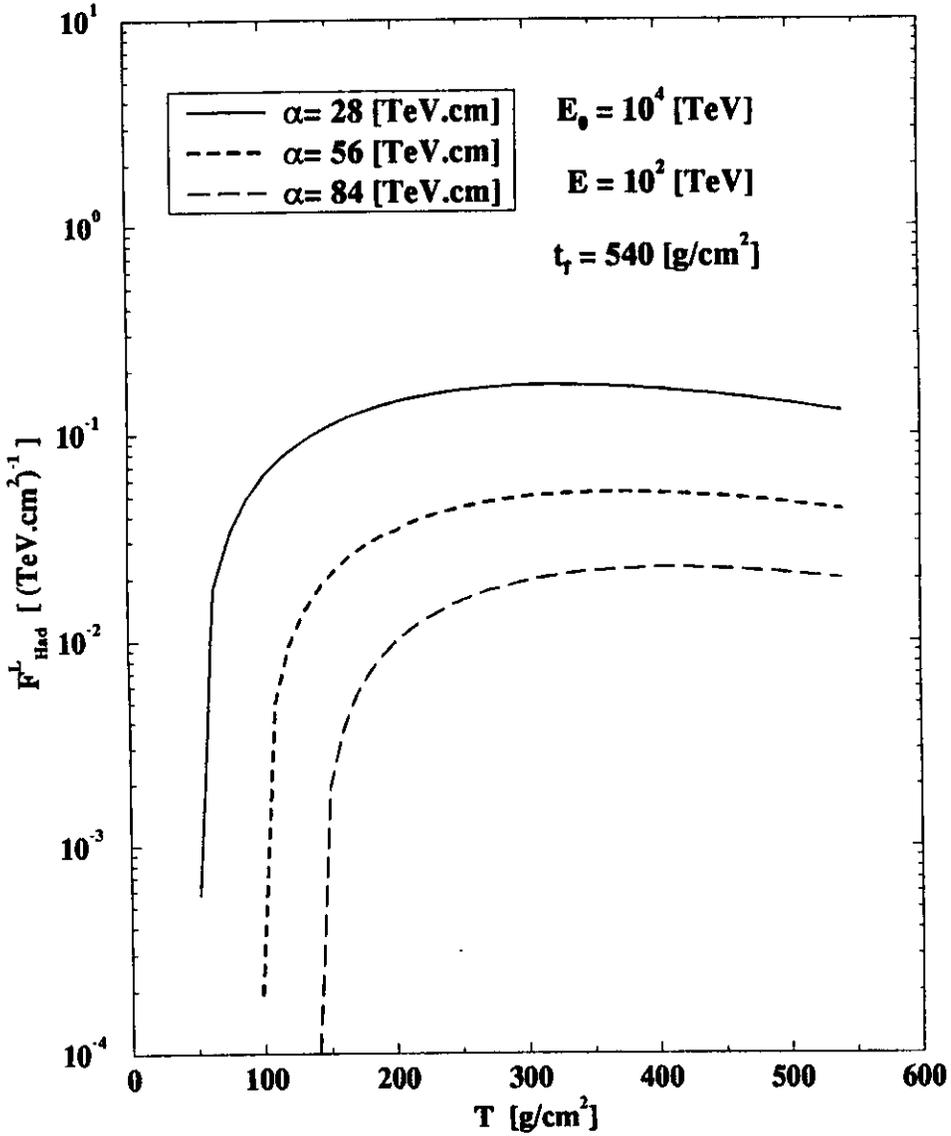


Figura 3.5: Comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico em função da altura de interação T , para diferentes valores de α , com $E = 10^2$ [TeV] e $t_f = 540$ [g/cm²] (Chacaltaya).

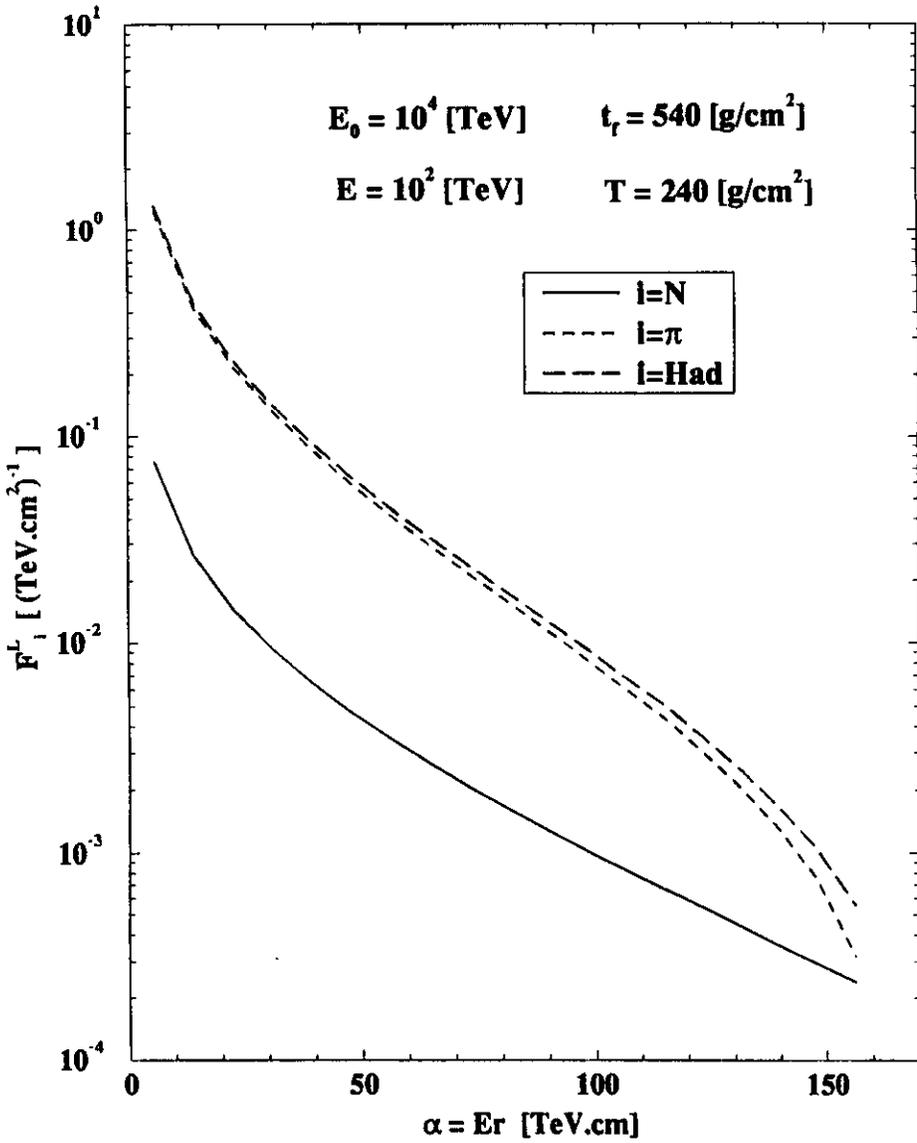


Figura 3.6: Comportamento lateral do fluxo diferencial nucleônico, piônico e hadrônico em função de α , para valores fixos de $E = 10^2$ [TeV] e $T = 240$ [g/cm²].

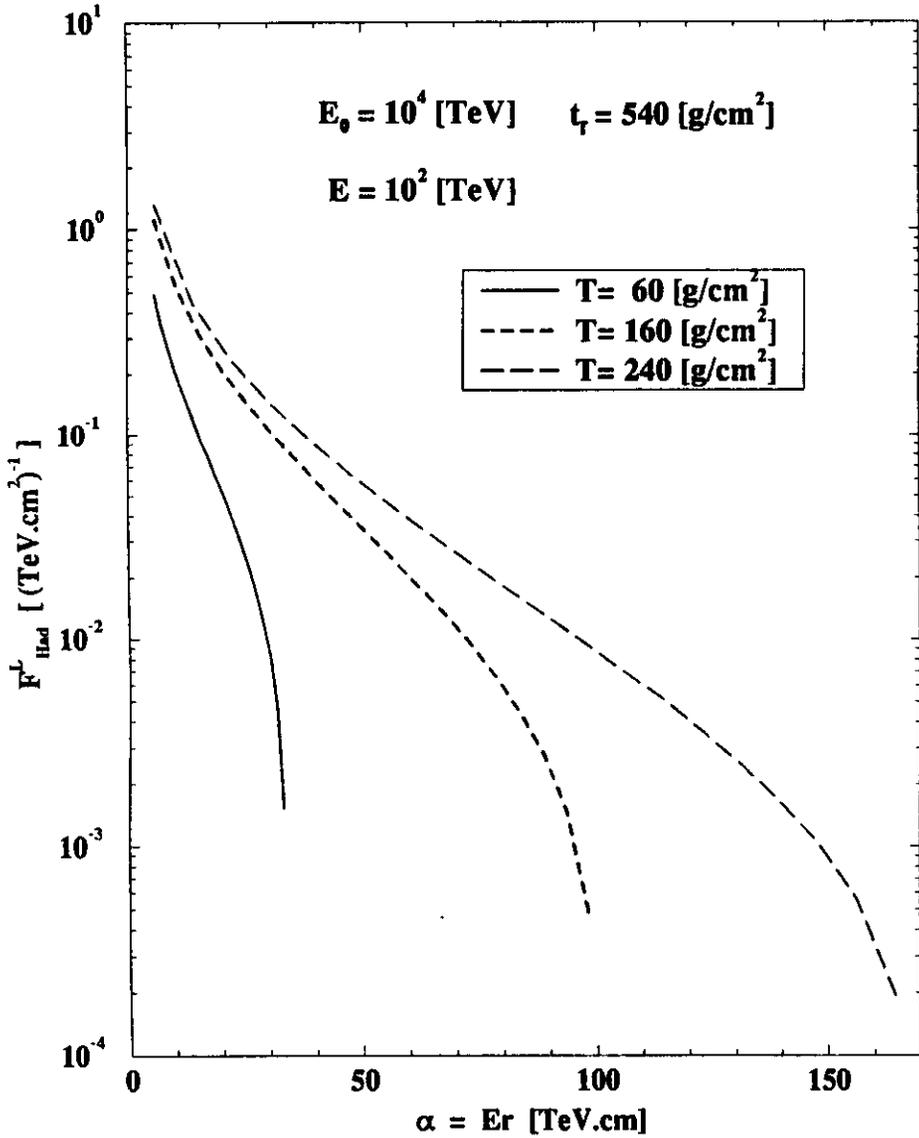


Figura 3.7: Comportamento lateral do fluxo diferencial hadrônico em função de α , para diferentes valores de T (com $E = 10^2$ [TeV]).

Capítulo 4

Distribuição Lateral

A análise da contribuição lateral do fluxo diferencial hadrônico apresentada no Capítulo anterior, indica que os nossos cálculos descrevem de forma coerente o comportamento esperado para o desenvolvimento da cascata hadrônica induzida por um único nucleon na atmosfera. Entretanto não existem dados experimentais do fluxo diferencial, de modo a confrontarmos diretamente esses dados com os nossos resultados.

Neste Capítulo, usando as soluções para o fluxo hadrônico obtidas no Capítulo 2, vamos proceder ao cálculo de algumas grandezas que são medidas experimentalmente: o número de hádrons por unidade de área, N_H/cm^2 e a dispersão lateral hadrônica na forma integral, $N_H(> Er)$. No intuito de confrontar diretamente estes cálculos com dados experimentais coletados em câmaras de emulsão, descrevemos de forma sucinta, os conjuntos de dados a serem utilizados em nossas análises. O aparato experimental e o processo de medidas em câmaras de emulsão nuclear estão descritos no Apêndice B.

4.1 Cálculo da Distribuição Lateral

Podemos definir o número de hádrons por unidade de área de acordo com a expressão

$$N_H/cm^2 = \int dE F_H^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0). \quad (4.1)$$

A dispersão lateral hadrônica na forma integral pode ser escrita como

$$N_H(> Er) = \int dE' \int d\vec{r}' F_H^L(E', E_0, \vec{r}', t_f, t_0) H[(E'r') - (Er)]. \quad (4.2)$$

4.2 Dados Experimentais

Dos diversos eventos detectados em câmaras de emulsão nuclear à altitude de montanha, apenas alguns têm informações suficientes a respeito da componente hadrônica. No que se refere a contribuição lateral desta componente, o número de eventos com tal informação é ainda mais reduzido.

Para o estudo da distribuição lateral, selecionamos algumas superfamílias com energia total visível acima de 10^3 TeV: uma proveniente da Colaboração Japão- Bolívia, denominada “Big event” e duas da Colaboração Pamir, denominadas “Halina” e “P3'-C5-B505”.

“**Big event**” - Detectado no Monte Chacaltaya pela Colaboração Japão-Bolívia, e analisado no Japão [24, 27]. Este é um evento de altas energias, o qual é estimado ser iniciado por um próton com energia em torno de 10^5 a 10^6 TeV. A energia total visível é da ordem de $\sum E_{vis} = 2810$ TeV, sendo que a energia total hadrônica visível é $\sum E_H^\gamma = 1382$ TeV, o que equivale a $\sim 50\%$ da energia total visível.

Na Figura 4.1 é apresentado o número de hádrons por unidade de área, em função da distância destes ao centro ponderado de energia, ou seja, N_H/cm^2 versus r_H . A Figura 4.2 ilustra a dispersão lateral de hádrons desta superfamília, portanto a dispersão lateral hadrônica na forma integral, $N_H(> E_H^\gamma r_H)$, versus $E_H^\gamma r_H$. Nas duas figuras temos que a energia em forma de gama dos hádrons $E_H^\gamma \geq 10$ TeV.

“**Halina**” - Detectado na câmara de carbono C42 do experimento Pamir [28] no período de 1979-1980, com um ângulo zenital incidente estimado em 78° . O evento é muito energético, com

$\sum E_{vis} = 2566$ TeV, sendo que para a componente hadrônica visível temos $\sum E_H^\gamma = 936$ TeV, ou seja, $\sim 30\%$ da energia total visível.

“P3’-C5-B505” - Detectado na câmara P3’ (“Joint Chamber”) em Pamir, no período de 1983-1985, e analisado no Japão [29]. Esse evento é altamente energético com uma energia total visível de 1197 TeV. Para a componente hadrônica temos $\sum E_H^\gamma = 513$ TeV, ou seja $\sim 43\%$ da energia total visível.

Na Figura 4.3 apresentamos a dispersão lateral hadrônica na forma integral, $N_H(> E_H^\gamma r_H)$ versus $E_H^\gamma r_H$, para as famílias “Halina” e “P3’-C5-B505” detectadas em Pamir, que está a uma profundidade atmosférica $t_f = 596$ g/cm² (ou $t_f = 7.45$ em unidades de λ_N).

A Tabela 4.1 resume as informações descritas acima para as superfamílias, t_f , $\sum E_H^\gamma$, $\sum E_{vis}$ e a fração de energia visível correspondente à componente hadrônica,

$$Q_H = \frac{\sum E_H^\gamma}{\sum E_{vis}}. \quad (4.3)$$

Tabela 4.1: Superfamílias da Radiação Cósmica.

EVENTO	t_f (g/cm ²)	N_H	$\sum E_H^\gamma$ (TeV)	$\sum E_\gamma$ (TeV)	$\sum E_{vis}$ (TeV)	Q_H
Big event	540	57	1382	1428	2810	49%
Halina	596	65	936	1630	2566	37%
P3’-C5-B505	596	49	513	684	1197	42%

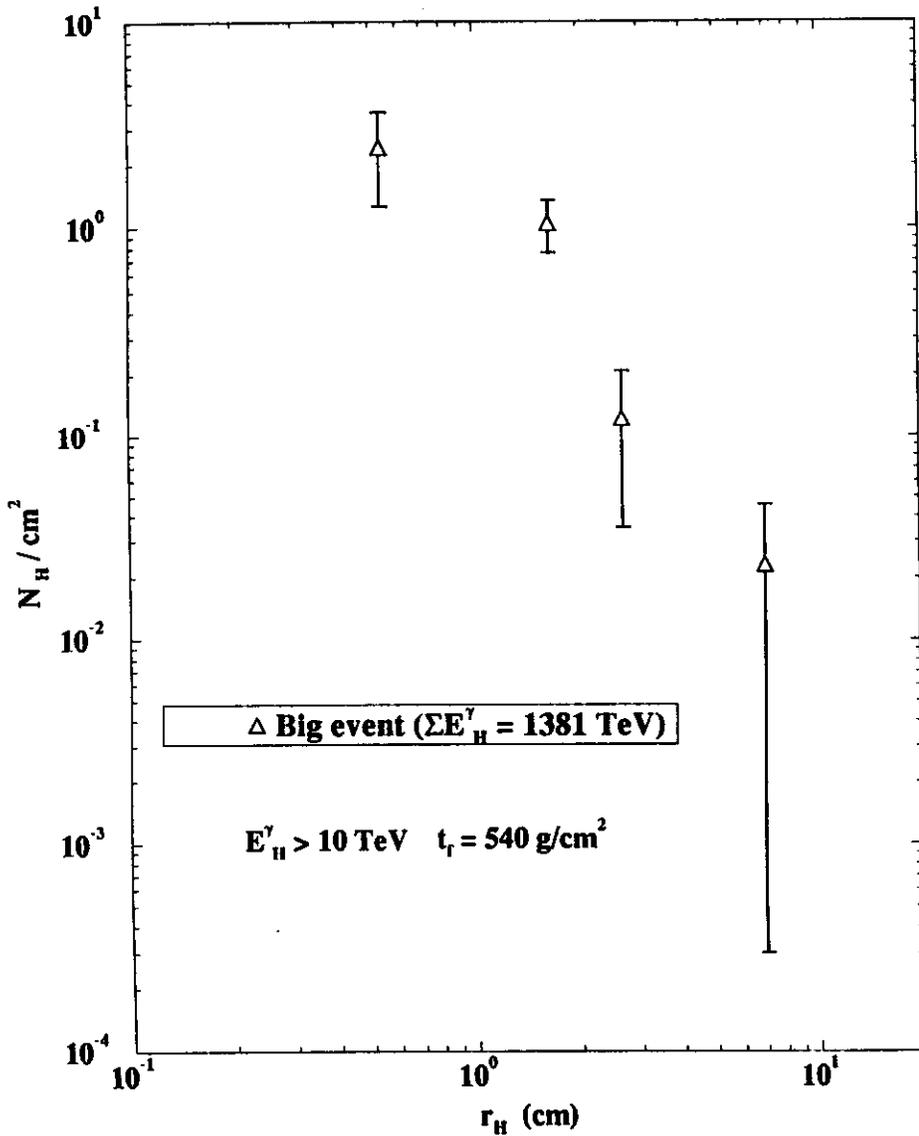


Figura 4.1: Distribuição lateral hadrônica da superfamília “Big event”, detectada em câmaras de emulsão, pela Colaboração Japão-Bolívia, em altitude do Mt. Chacaltaya, $t_f = 540$ g/cm².

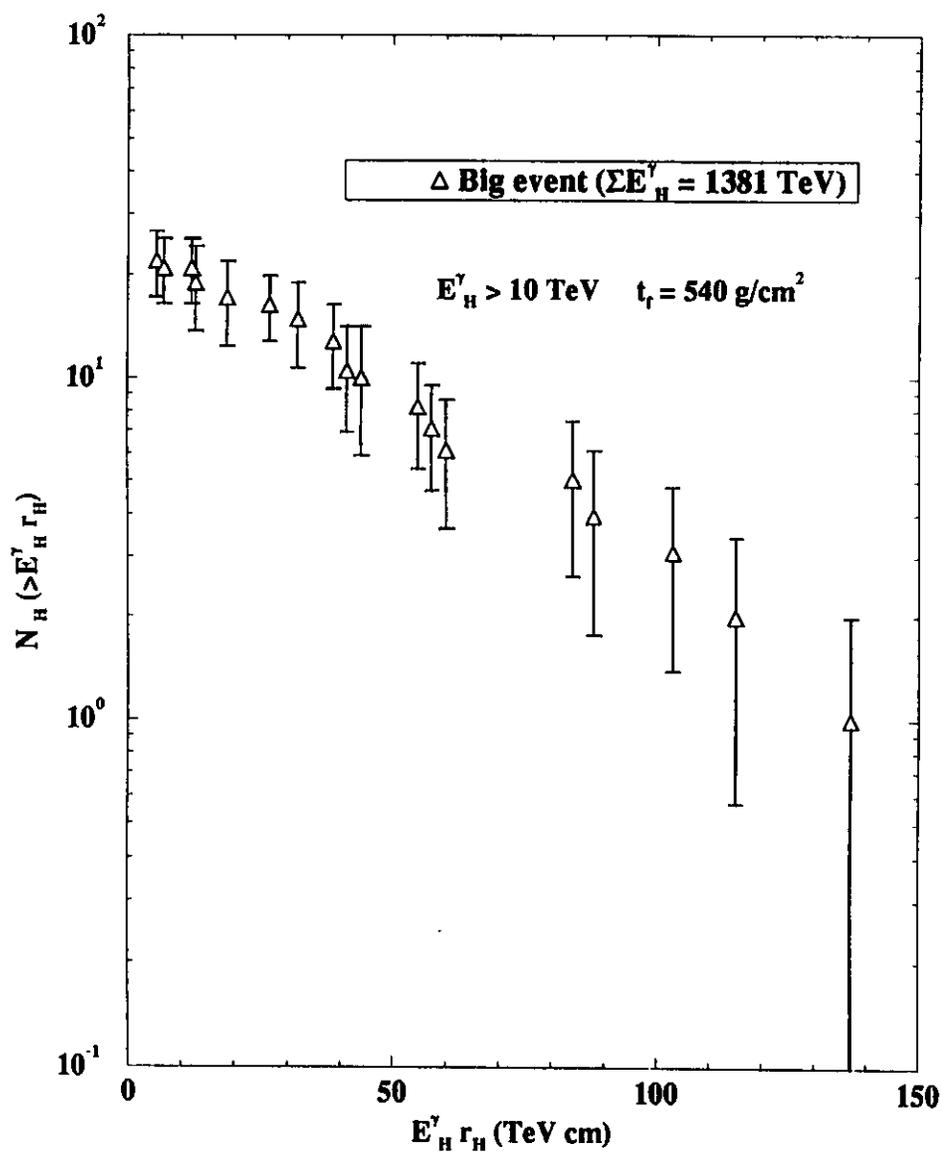


Figura 4.2: Dispersão lateral hadrônica da superfamília “Big event”.

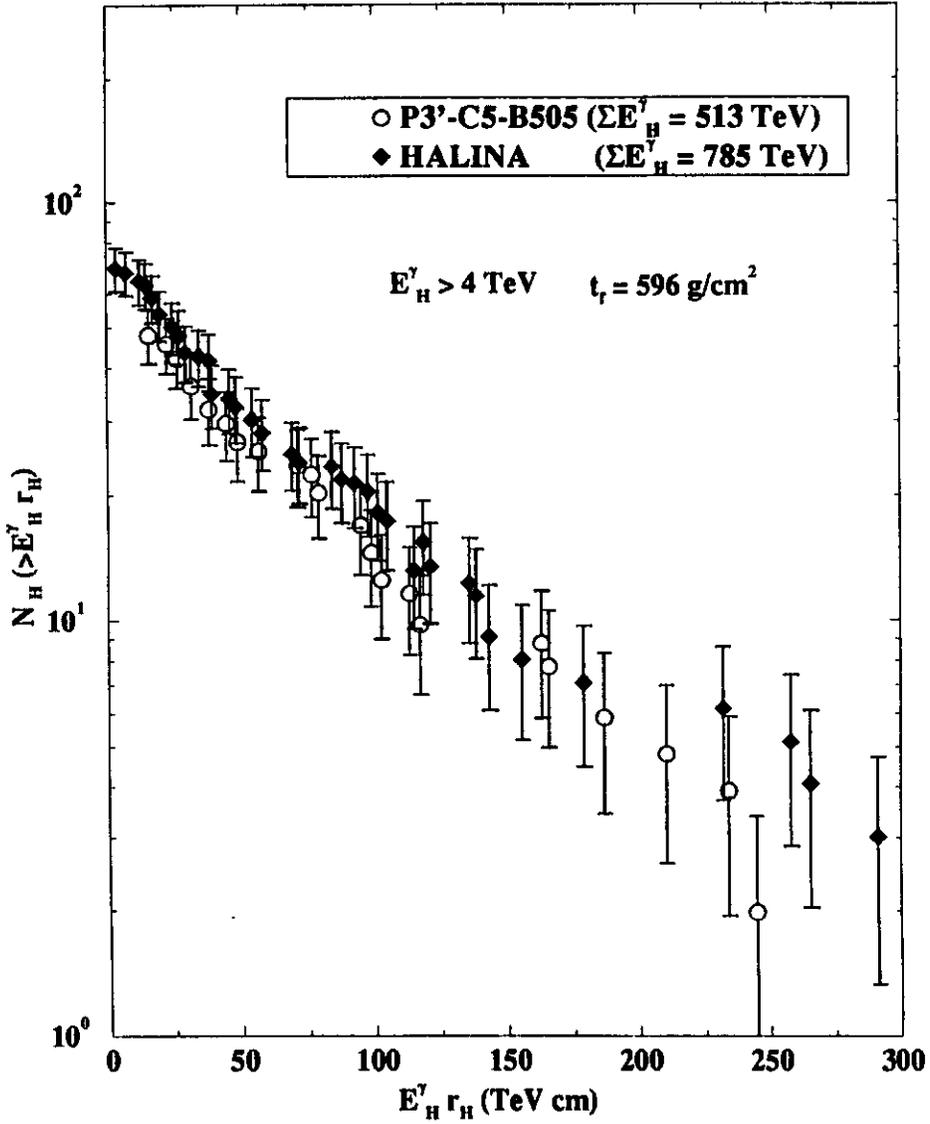


Figura 4.3: Dispersão lateral hadrônica das superfamílias “Halina” e “P3'-C5-B505”, detectadas em Pamir.

4.3 Resultados

Com os cálculos apresentados para a distribuição lateral na seção 4.1, equações (4.1) e (4.2), procedemos a reprodução teórica dos dados experimentais selecionados acima, ajustando valores para a energia visível do nucleon primário, E_0^γ e para a profundidade atmosférica de interação primária t_0 . Para realizar o ajuste destes parâmetros, utilizamos a rotina de minimização chamada D506-MINUIT, da biblioteca de “softwares” do CERN.

Para a superfamília “Big event” apresentamos nas Figuras 4.4 e 4.5 o melhor ajuste entre os dados experimentais e as curvas teóricas do número de hádrons por unidade de área, N_H^γ , versus r_H e da dispersão lateral na forma integral, $N_H^\gamma (> E_H^\gamma r_H)$, versus $E_H^\gamma r_H$, respectivamente. Com este ajuste simultâneo, visto que os dois conjuntos de dados procedem de uma mesma família, obtivemos os seguintes valores para a energia visível do nucleon primário e para a profundidade atmosférica de interação: $E_0^\gamma = 43000$ TeV e $t_0 = 190$ g/cm², respectivamente.

O ajuste entre a curva teórica e os dados experimentais para a dispersão lateral na forma integral para a superfamília “Halina” é apresentada na Figura 4.6. Nesta figura, com os parâmetros ajustados $E_0^\gamma = 7000$ TeV e $t_0 = 1$ g/cm² (topo da atmosfera), temos que a curva teórica “reproduz” muito bem o comportamento qualitativo e quantitativo dos dados experimentais.

A Figura 4.7 apresenta o ajuste teórico dos dados experimentais da dispersão lateral na forma integral, para a superfamília “P3'-C5-B505”. Os valores dos parâmetros ajustados são: $E_0^\gamma = 8250$ TeV e $t_0 = 10$ g/cm² (topo da atmosfera). Neste caso também obtemos uma excelente descrição dos dados experimentais através dos nossos cálculos.

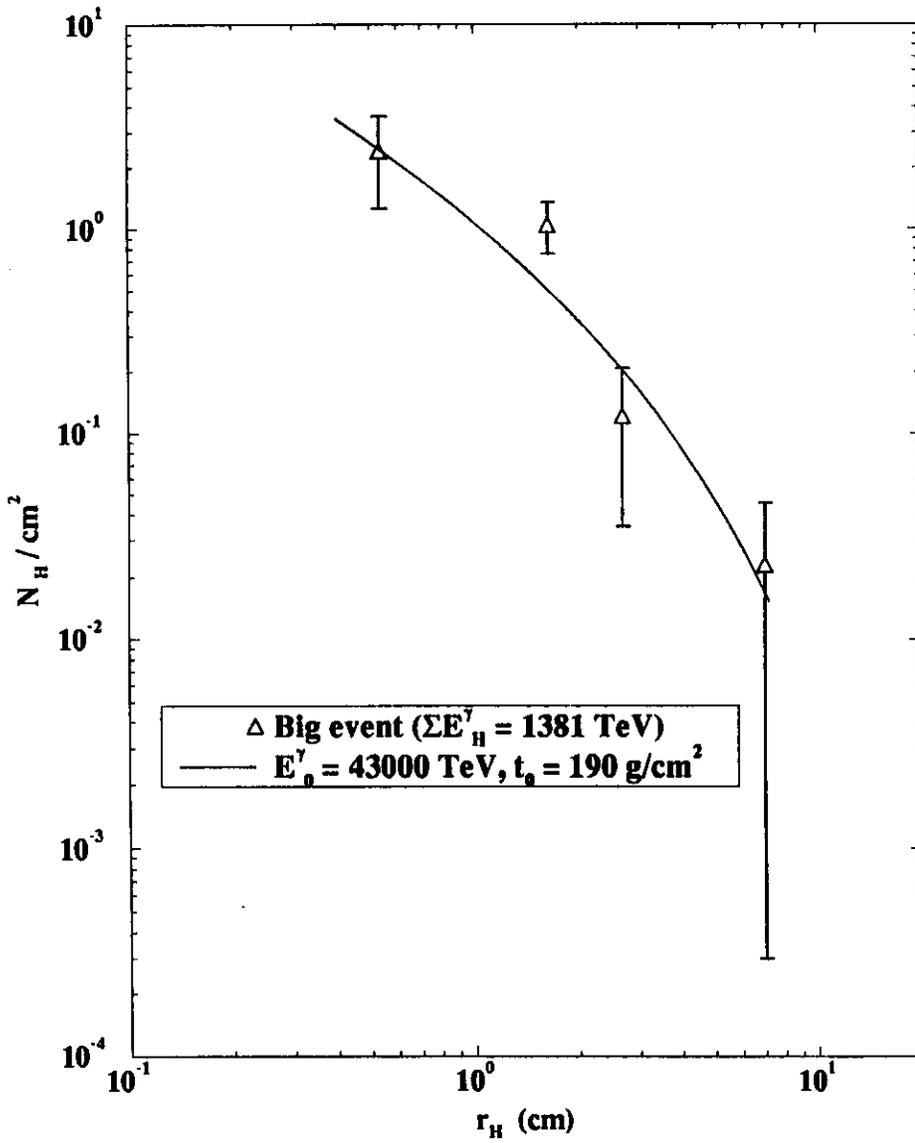


Figura 4.4: Ajuste da distribuição lateral hadrônica da superfamília “Big event” (Chacaltaya).

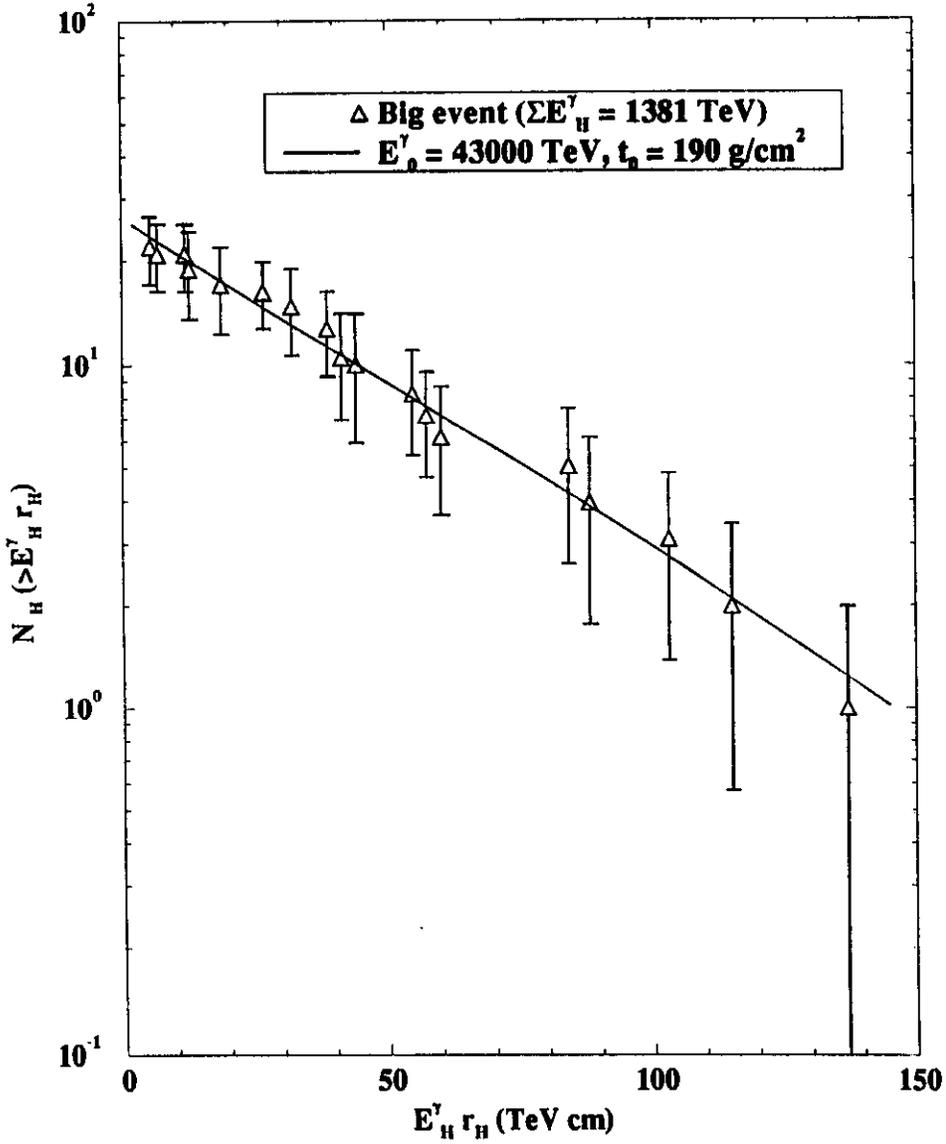


Figura 4.5: Ajuste da dispersão lateral hadrônica da superfamília “Big event” (Chacaltaya).

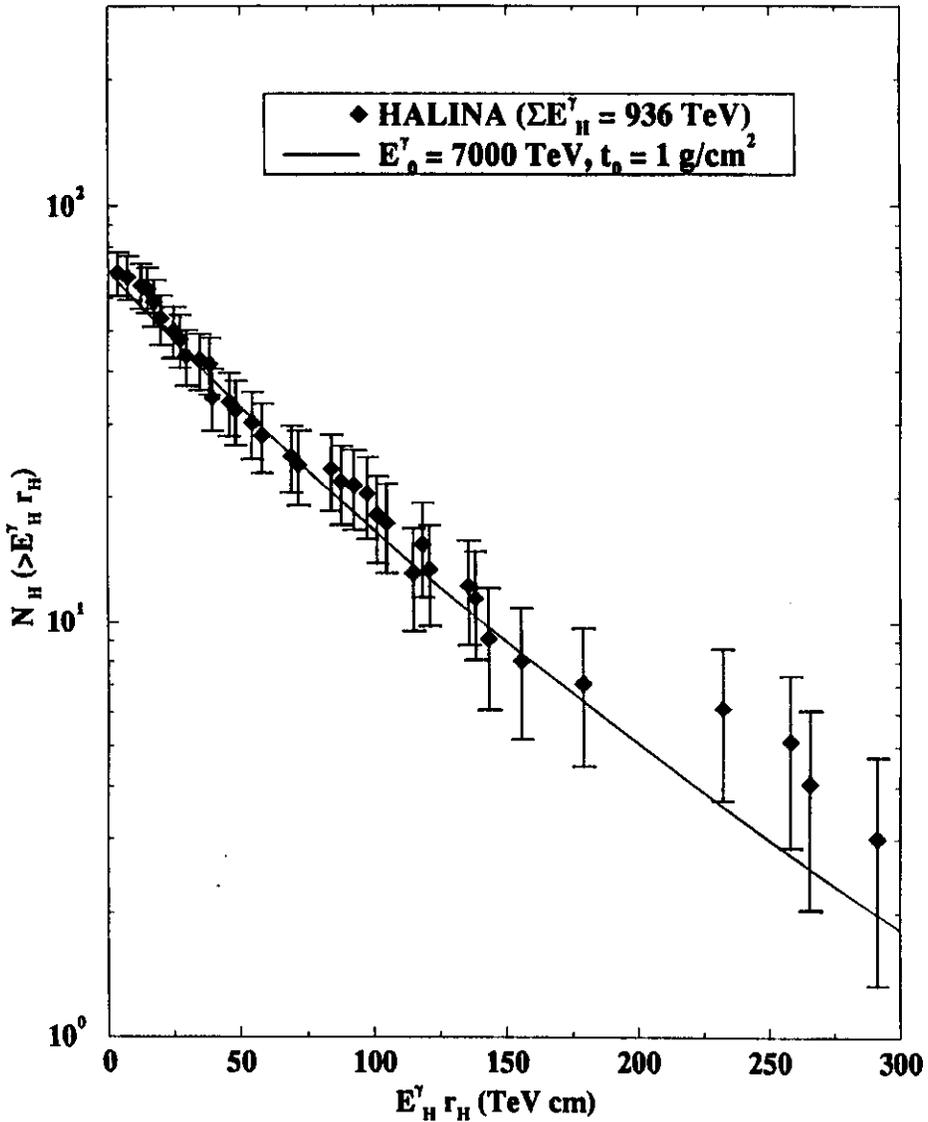


Figura 4.6: Ajuste da dispersão lateral hadrônica da superfamília “Halina”, detectada em Pamir.

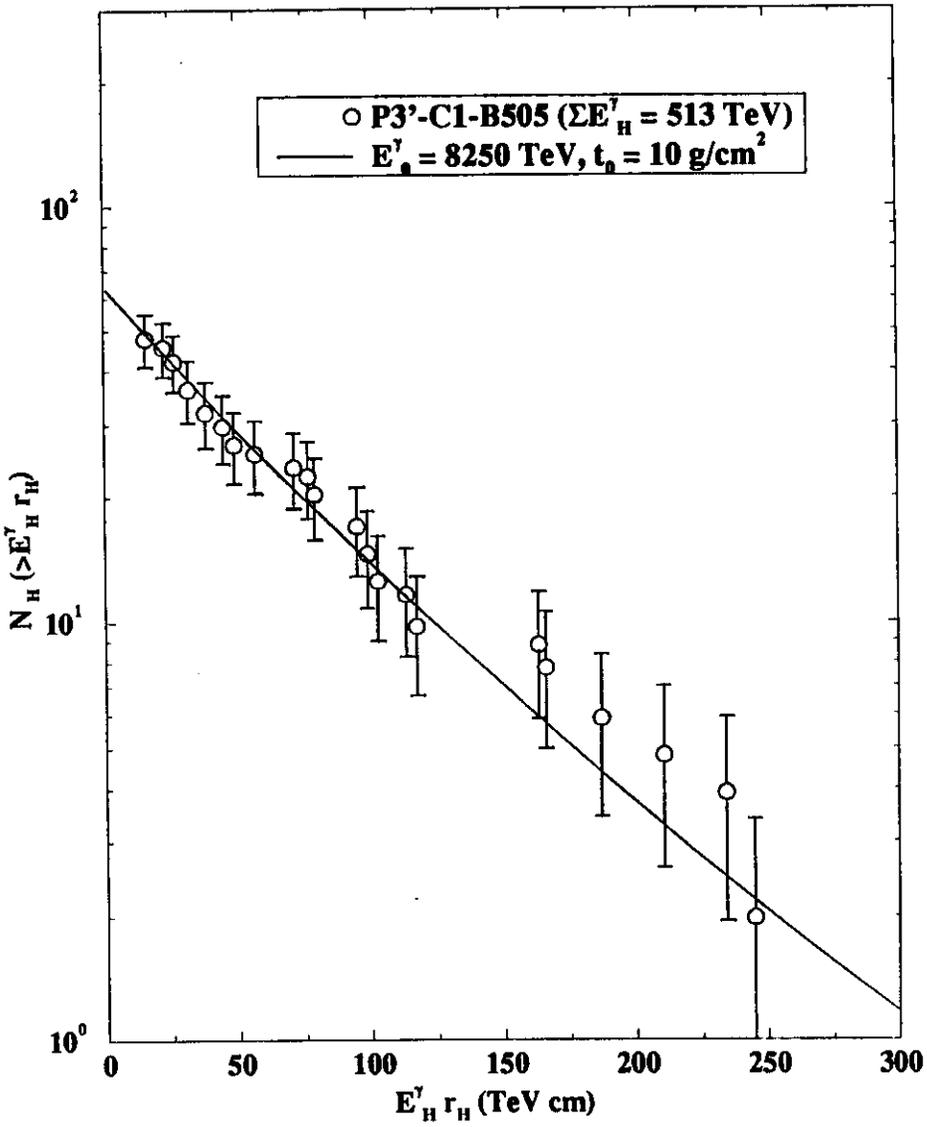


Figura 4.7: Ajuste da dispersão lateral hadrônica da superfamília “P3'-C5-B505”, detectada em Pamir.

Capítulo 5

Conclusão

No presente trabalho, ao discutirmos o problema da difusão de cascatas hadrônicas induzidas por um único nucleon na atmosfera, utilizamos o Método de Ordenação de Operadores Exponenciais de Feynman para resolver o sistema acoplado de equações de difusão que descrevem o desenvolvimento de tais cascatas na atmosfera. Ao aplicar este método obtivemos soluções “fechadas”, ou seja soluções escritas no espaço de configuração e expressas através de funções analíticas simples ou de integrais de convolução de fácil manuseio, para o fluxo diferencial hadrônico.

Algumas considerações foram feitas quanto ao desenvolvimento da cascata na atmosfera: adotamos o Modelo da Partícula Líder; tomamos o livre caminho médio de interação nucleon-ar e pión-ar constante e igual ao seu valor médio; desprezamos o decaimento de píons em múons assim como a contribuição dos mésons mais pesados e a produção de píons por píons; descrevemos o espectro de produção múltipla de píons através da Lei de “scaling” de Feynman; e assumimos uma distribuição de elasticidade uniforme.

Na solução lateral da componente hadrônica escrevemos o momento transversal como uma função logarítmica em energia, sendo porém mostrado que ao se tomar um valor constante para este momento, obtemos resultados similares, com uma pequena discrepância em regiões de altíssimas energias ($E \sim 10^4$ TeV).

Apesar da não existência de dados experimentais do fluxo diferencial hadrônico, a análise teórica da componente lateral deste fluxo,

$F_H^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0)$, resultou numa concordância entre os nossos cálculos e o comportamento esperado para o desenvolvimento lateral hadrônico na atmosfera. Por exemplo, ao se analisar o comportamento do $F_H^L(E, E_0, \vec{r}, t_f, t_0)$ em função da dispersão lateral $\alpha = Er$, Figuras 3.6 e 3.7, obtivemos um resultado que está em acordo, qualitativo, com o comportamento apresentado nos diagramas de alvo corrigido, Figura B.3 do Apêndice B.

Ao confrontarmos diretamente os nossos cálculos com dados experimentais da distribuição lateral hadrônica, com hipóteses simples à respeito do desenvolvimento da cascata na atmosfera, conseguimos descrever muito bem, de forma qualitativa e quantitativa, o comportamento lateral hadrônico de superfamílias de radiação cósmica detectadas em câmaras de emulsão em altitudes de montanha. O ajuste entre as curvas teóricas e os dados experimentais forneceu estimativas para os valores da energia do nucleon primário, E_0^γ , e para a profundidade t_0 , de interação deste nucleon com os nucleons do ar, que são parâmetros relevantes na descrição de famílias da radiação cósmica.

As soluções analíticas das equações de difusão permitem, assim, a análise de dados experimentais do fluxo hadrônico na atmosfera, não só para experimentos realizados com câmaras de emulsão, mas também com calorímetros hadrônicos acoplados a experimentos de chuviscos extensos à nível do mar [1] e em altitudes de montanha [2].

Apesar de se conseguir analisar dados de câmaras de emulsão, as soluções analíticas aqui apresentadas ainda não são completas, para uma análise mais detalhada de processos de produção múltipla de partículas em altíssimas energias. Grandezas cujos resultados de aceleradores mostram ser dependentes da energia, devem ser incorporados nos cálculos levando-se em conta sua explícita variação com a energia.

O livre caminho médio de interação é inversamente proporcional à seção de choque inelástica, portanto uma função da energia. O parâmetro de elasticidade, fração de energia carregada pela partícula líder após a colisão depende também da energia. Apesar de não existirem dados experimentais além dos dados do ISR sobre a distribuição de partícula líder, a quebra de “scaling de Feynman” na seção de choque inclusiva é uma evidência de que a elasticidade tem que ser uma função da energia.

A dependência explícita com a energia desses parâmetros que ca-

racterizam as interações fortes, pode ser incorporada às equações de difusão, cujas soluções analíticas ainda são factíveis de ser obtidas.

Estudos nessa direção já começaram a ser feitos como uma continuação natural deste trabalho, esperando-se realizar uma análise mais abrangente dos dados de câmaras de emulsão em altíssimas energias.

Apêndice A

\vec{r} e $\vec{\theta}$ e seus Momentos Conjugados

Seja uma partícula que atravessa planos em diferentes profundidades, t , conforme ilustrado na Figura A.1. Desta figura temos que a posição da partícula é determinada pelos vetores $(\vec{r}, \vec{\theta})$, onde \vec{r} dá a posição (no plano) da partícula medida a partir do centro dos planos e $\vec{\theta}$ é o ângulo entre o traço da partícula e a direção normal aos planos (esta normal é coincidente com a direção de chegada na atmosfera do nucleon primário). Para $\theta \ll 1$, a hipotenusa é aproximadamente l e $\Delta\vec{r} \sim l\vec{\theta}$. A posição \vec{r} da partícula após percorrer uma distância l entre planos a profundidades t' e t , é dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(t') + \Delta\vec{r} \\ &= \vec{r}(t') + l\vec{\theta}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Os momentos associados a \vec{r} e $\vec{\theta}$ são:

$$\begin{aligned}\vec{r} &\rightarrow \vec{p} = -i\vec{\nabla}_r \\ \vec{\theta} &\rightarrow \vec{Q} = -i\vec{\nabla}_\theta.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Para se derivar as equações diferenciais (2.15) e (2.16) com dependência do fluxo no espaço de momento, somente como função de \vec{p} , algumas considerações foram feitas.

Em geral os dados experimentais apresentados são o resultado da soma de eventos medidos para todos os ângulos θ . Conseqüentemente o nosso fluxo deve ser somado sobre todos os possíveis valores de $\vec{\theta}$.

Devido a particular escolha da distribuição $\Psi(\vec{\theta})$, a distribuição no espaço de momento Q apresenta simetria azimutal e conseqüentemente a relação entre o espaço em $\vec{\theta}$ e o em \vec{Q} é dado efetivamente por uma transformada de Hankel de ordem zero. Uma conseqüência direta desse fato é que a integral sobre todo o espaço θ é simplesmente determinada pela solução no espaço de momento \vec{Q} com $|\vec{Q}| = 0$. Podemos levar em conta esse fato para simplificar a equação diferencial e escrevê-la somente como função de \vec{P} .

Notemos que o termo que descreve o deslocamento lateral, que é da forma diferencial

$$-\frac{H_0}{t} \vec{p} \cdot \nabla_Q$$

pode ser eliminado por uma transformação de variável simples,

$$Q \rightarrow Q' + pH_0 \ln t,$$

relação esta que deve valer em cada plano de profundidade t . Q será sempre zero se Q' tiver a mesma dependência em p na forma $pH_0 \ln z$. De forma que a escolha de $Q = -pH_0 \ln t/T$, manterá $Q = 0$ toda vez que $T = t$.

Com essa escolha adequada de parametrização para a dependência de Q em \vec{p} e t , obtém-se facilmente as equações (2.24) e (2.25) para $F_i(E, E_0, \vec{p}, t, t_0)$, $i = N, \pi$.

A.1 Momento linear

Para partículas extremamente relativísticas (massa de repouso $m_0 \ll E$, sendo E a energia total da partícula), temos que o momento linear é dado por

$$P \sim E. \quad (\text{A.3})$$

Usando a relação acima, podemos escrever o momento linear transversal p_T da seguinte forma

$$p_T = P \operatorname{sen} \theta \sim E \operatorname{sen} \theta,$$

na aproximação de baixos ângulos, $\theta \ll 1$,

$$p_T \sim E\theta.$$

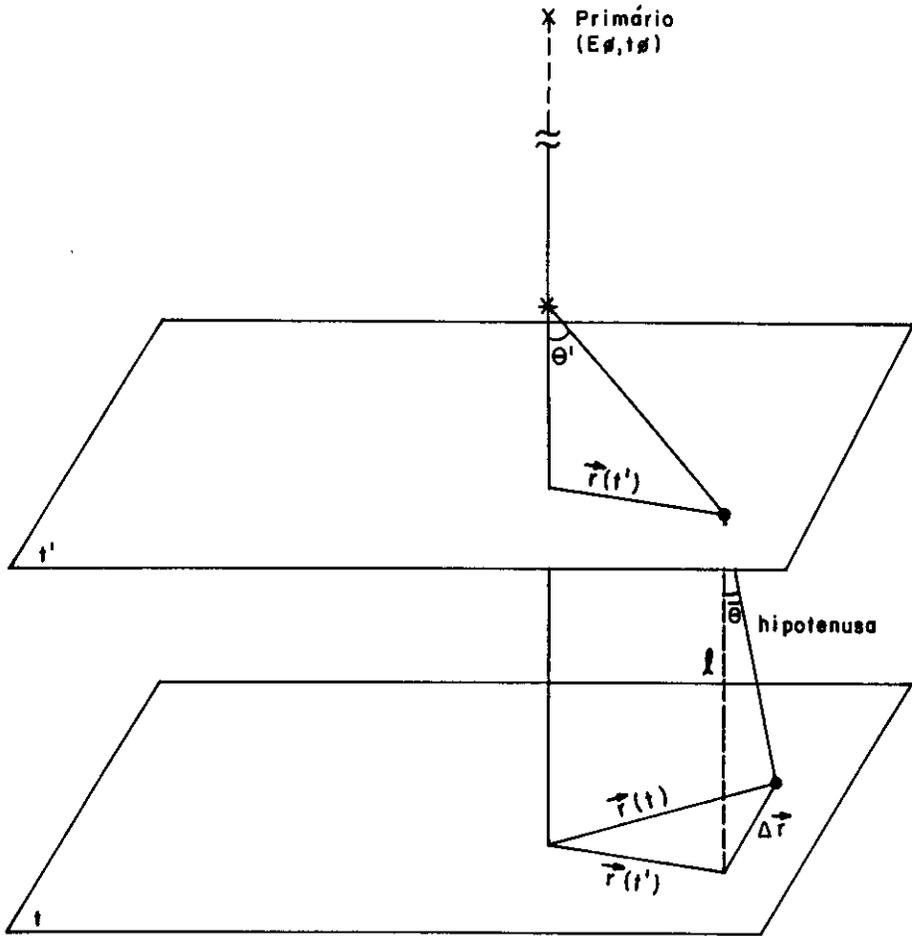


Figura A.1: Ilustração dos vetores \vec{r} (posição) e $\vec{\theta}$ (ângulo), que aparecem na função de distribuição $F_i(E, E_0, \vec{r}, \vec{\theta}, t, t_0)$.

Apêndice B

Experimentos em Altitudes de Montanha

Um método tradicional de se analisar eventos da radiação cósmica em altas energias, cujo fluxo de partículas decresce muito rapidamente, é através dos chuviros atmosféricos extensos, que usa um grande número de detectores espalhados por uma grande área. Para se obter informações a respeito do desenvolvimento destes chuviros atmosféricos extensos na atmosfera, são realizados alguns experimentos [30], por exemplo, com detectores do tipo câmaras de emulsão nuclear, posicionados em altitudes de montanha.

Atualmente um dos maiores experimentos deste tipo é realizado no Monte Chacaltaya, na Bolívia, pela Colaboração Brasil-Japão [31, 32, 33]. Foi em Chacaltaya (1946) que Lattes, Occhialini e Powell [34] detectaram pela primeira vez o decaimento de píons em múons.

B.1 Câmaras de Emulsão Nuclear

As câmaras de emulsão são calorímetros eletromagnéticos, com uma resolução espacial da ordem de microns, cuja estrutura é construída em camadas, na forma de um sanduiche de placas de chumbo (Pb) e material fotossensível: filmes de Raio-X e placas de emulsão nuclear.

Um elétron ou fóton ao incidir na câmara de emulsão formam uma cascata (chuviro) eletromagnética que poderá ser registrada pelas di-

ferentes camadas do material fotossensível. Nos filmes de Raios-X observamos a olho nu manchas escuras, e com um microscópio os traços deixados nas emulsões nucleares. É possível se acompanhar o desenvolvimento do chuveiro ao longo dos sucessivos blocos de material fotossensível e então determinar a localização e a direção de chegada da partícula incidente, acima de uma energia de limiar. Energias típicas de limiar são 2 TeV para os filmes de Raios-X, e 0.5 TeV para as emulsões nucleares.

A Figura B.1 ilustra uma câmara de emulsão nuclear [31].

A energia de um chuveiro é medido pela contagem do número de traços, dentro de um certo círculo nas emulsões, ou por fotodensitometria nas chapas de Raios-X. Ao se acompanhar o chuveiro ao longo de todas as camadas da câmara, podemos determinar a curva de transição do chuveiro, que é definida como a variação do número de traços do chuveiro em função da profundidade na câmara (em unidades de cascata [35], *uc*). Esta curva nos descreve portanto o desenvolvimento do chuveiro eletromagnético no interior da câmara. A energia do chuveiro pode ser estimada ao se comparar estas curvas de transição com curvas teóricas para a cascata eletromagnética.

Para se analisar os eventos chamados de “família”, conjunto de partículas que descendem de uma mesma partícula primária, da radiação cósmica com energia $E_0 \geq 10^2$ TeV, é conveniente pelos motivos expostos a seguir, que detectores sejam constituídos não somente por uma única câmara de emulsão, mas sim, de uma forma generalizada, pela seguinte estrutura:

- Câmara de Emulsão Superior
- Alvo de Carbono
- Área Livre
- Câmara de Emulsão Inferior

Na câmara de emulsão superior são detectados gamas e hádrons provenientes de interações nucleares ocorridas na atmosfera, denominadas A-jatos, ou no interior da própria câmara superior (como, por exemplo,

interações nucleares ocorridas no chumbo, chamadas Pb-jatos superiores). Esta câmara atua como detector e também como blindagem para a componente eletromagnética.

O alvo, por ser de carbono (número atômico Z pequeno), é quase transparente para a componente eletromagnética e opaco para os hádrons. Portanto os hádrons podem produzir cascatas. A escolha da largura do alvo é feita de forma que o número de interações sucessivas em seu interior possam ser desprezadas.

O espaço entre as câmaras permite que a cascata de partículas secundárias tenha a possibilidade de abrir lateralmente, de forma que a observação das medidas de partículas secundárias na câmara inferior seja possível, sem problemas com a superposição dos eventos.

A câmara de emulsão inferior atua como um detector para os raios gamas secundários originários das interações hádron-alvo de carbono e também para os hádrons interagirem produzindo os Pb-jatos inferiores.

A Figura B.2 ilustra o aparato experimental descrito acima.

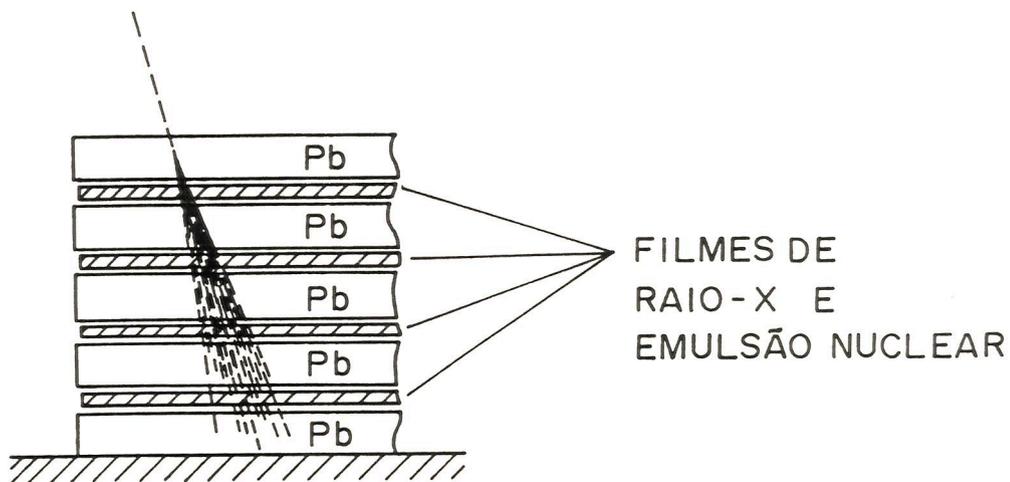


Figura B.1: Esquema de uma câmara de emulsão nuclear.

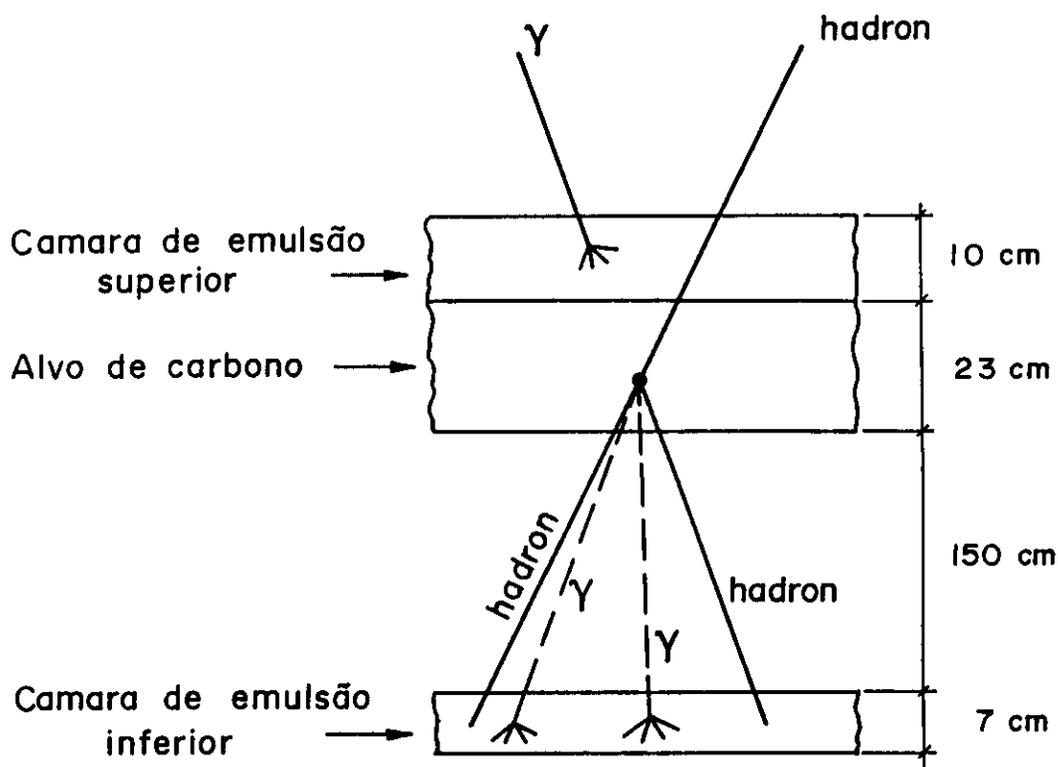


Figura B.2: Esquema de um detector típico de "famílias" altamente energéticas da radiação cósmica ($E_0 \geq 10^2$ TeV), posicionado em altitudes de montanha.

B.2 Processo de Medida

O processo de medida começa pela câmara de emulsão inferior ao se procurar chuveiros que tenham uma direção de chegada passando pela câmara superior. Examina-se ao microscópio o chuveiro para uma verificação em sua estrutura de caroço. Denominamos caroço ou núcleo do chuveiro o sinal deixado nas placas de emulsões nucleares devido à passagem do chuveiro eletromagnético através das mesmas.

Um caroço simples significa provavelmente uma interação hadrônica na própria câmara inferior. Havendo múltiplos caroços, o evento (denominado chuveiro de C-jato) é uma interação no alvo.

Para cada C-jato detectado na câmara de emulsão inferior, determina-se a correspondente curva de transição e obtém-se a energia dos gamas, E_{γ}^{C-jato} , e sua posição em relação a um sistema de eixo arbitrário, $(x_H^{\gamma}, y_H^{\gamma})$. Cada C-jato é designado pela somatória da energia dos gamas, $\sum E_{\gamma}^{C-jato} = E_H^{\gamma}$, onde E_H^{γ} é a energia em forma de gama do hádron que originou o C-jato. E_H^{γ} é chamada propriamente de energia hadrônica visível e está relacionada à energia original E_H através da expressão

$$E_H^{\gamma} = \langle k_{\gamma} \rangle E_H, \quad (B.1)$$

sendo $\langle k_{\gamma} \rangle$ a inelasticidade média de gamas. Este parâmetro não está ainda bem definido [36] e sua variação está limitada ao intervalo $0.2 \leq \langle k_{\gamma} \rangle \leq 0.4$.

A energia total visível de uma “família” é definida como a soma da energia total da componente eletromagnética $\sum E_{\gamma}$ com a energia total hadrônica visível,

$$\sum E_{vis} = \sum E_{\gamma} + \sum E_H^{\gamma}, \quad (B.2)$$

onde do item (B.1) acima, temos que a E_{γ} e a posição (x_{γ}, y_{γ}) são medidas seguindo procedimento similar adotado para os C-jatos. O mesmo ocorre para hádrons detectados na câmara superior.

Quando $\sum E_{vis}$ de um evento de câmaras de emulsão se encontra na faixa de $10^3 - 10^4$ TeV, este é conhecido como “superfamília”.

Uma vez obtida a energia total visível, pode-se estimar o valor da energia E_0 do nucleon primário que originou a “família”.

Determinar a origem dos chuveiros de C-jatos é uma tarefa um tanto quanto árdua, entretanto podemos executá-la ao escolher como origem do centro de coordenadas o centro ponderado de energia. Define-se centro ponderado de energia o ponto (X_{cp}, Y_{cp}) onde a partícula (nucleon) primário atingiria o filme de Raios-X se não houvesse a dispersão lateral. Podemos obter as coordenadas cartesianas (X_{cp}, Y_{cp}) uma vez medida a posição e energia de cada chuveiro:

$$X_{cp} = \frac{\sum E_i x_i}{\sum E_{vis}} \quad (i = H, \gamma),$$

$$Y_{cp} = \frac{\sum E_i y_i}{\sum E_{vis}},$$

onde E_i para os hádrons é a energia dos hádrons em forma de gama, E_H^γ . Com estas coordenadas definidas, podemos obter as distâncias r_i de cada chuveiro em relação ao centro ponderado de energia, escrevendo

$$r_i = \sqrt{(x_i - X_{cp})^2 + (y_i - Y_{cp})^2}. \quad (\text{B.3})$$

Conhecendo as coordenadas do centro ponderado de energia e dos chuveiros eletromagnéticos, podemos construir o diagrama de alvo corrigido, onde representa-se as coordenadas dos chuveiros eletromagnéticos detectados da interação. Este “mapa” está contido no plano ortogonal à direção de incidência da partícula primária (nucleon), direção esta que pode ser determinada aplicando-se métodos de triangulação [37], com os quais é possível ainda estimar a altura de interação t_0 a partir da qual a família começou a se desenvolver.

Na Figura B.3 apresentamos um típico diagrama de alvo corrigido [38].

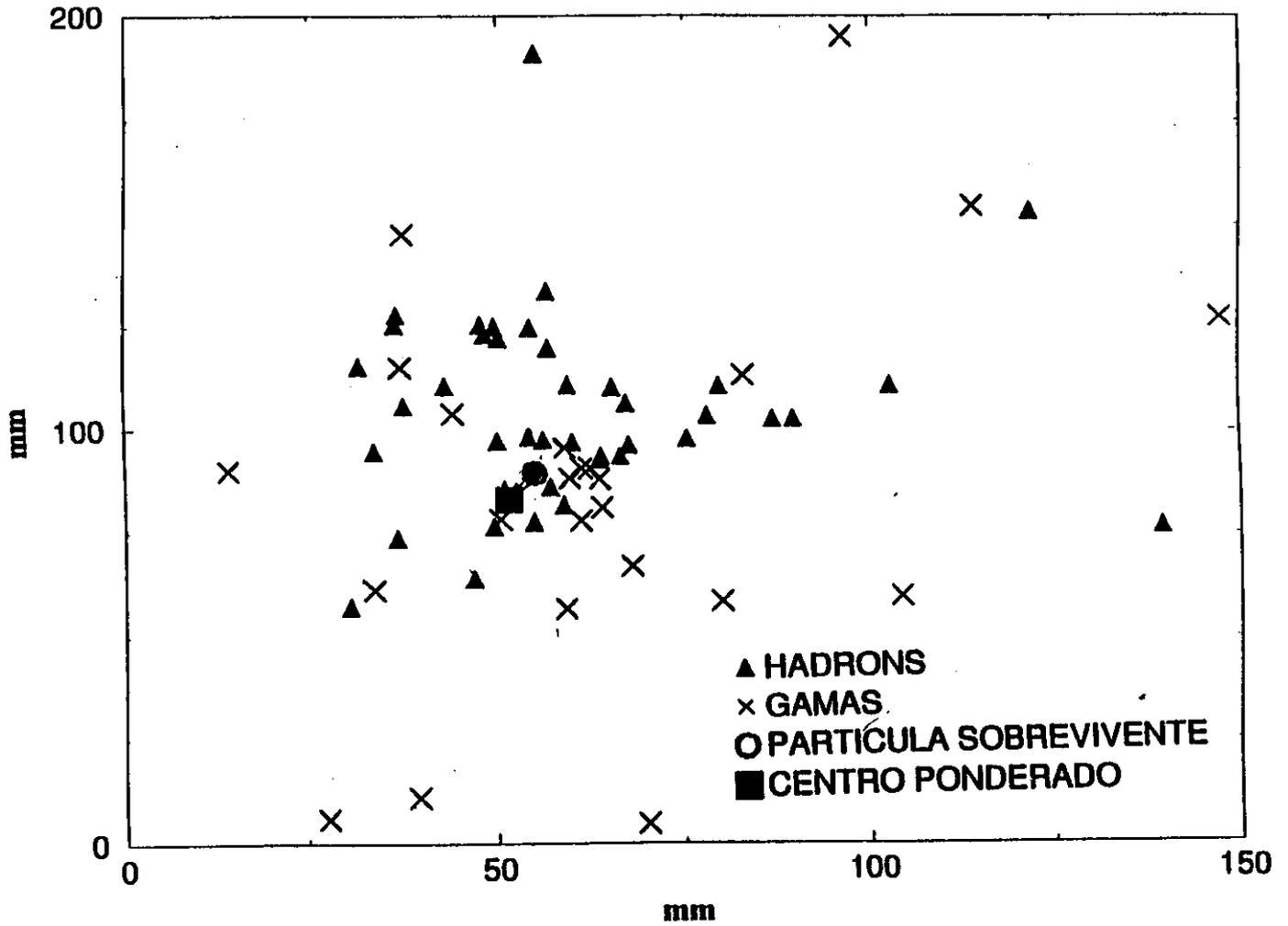


Figura B.3: Diagrama de alvo corrigido típico de uma família da radiação cósmica. A partícula sobrevivente é o nucleon líder.

Bibliografia

- [1] H.H. Mielke, M. Föller, J. Engler and J. Knapp, Proc. 23rd Intern. Cosmic Ray Conference (ICRC), Calgary, **5**, 155 (1993).
- [2] M. Aglietta *et al.*, Nuovo Cimento **15C**, 735 (1992).
- [3] R.P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).
- [4] L.M. Mundim Filho, “*Espectro Vertical de Múons induzidos por uma Cascata Hadrônica na Atmosfera*”, Tese de Mestrado (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1990).
- [5] A. Ohsawa and S. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **77**, 1411 (1987).
- [6] R.P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969).
- [7] I.N. Sneddon, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, New York (1972).
- [8] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Third Ed., Academic Press, San Diego (1985).
- [9] B. Rossi and K. Greisen, Rev. Mod. Phys. **13**, 240 (1941).
- [10] J. Nishimura, *Theory of cascade showers*, in Handbuch der Physik, Vol. XLVI/2, pp. 1, Springer-Verlag, Berlin (1967).
- [11] H. Messel and H.S. Green, Proc. Phys. Soc. (London) **A66**, 1009 (1953).
- [12] I. Fujiwara, Prog. Theor. Phys. **7**, 433 (1952).

- [13] J. Bellandi F^o, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, C.G.S. Costa and L.M. Mundim F^o, J.Phys. A: Math. Gen. **25**, 877 (1992).
- [14] J. Bellandi F^o, S.Q. Brunetto, J.A. Chinellato, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit and M.A. Alves, Nuovo Cim. **14C**, 15 (1991).
- [15] J. Bellandi F^o, S.Q. Brunetto, J.A. Chinellato, R.J.M. Covolan and C. Dobrigkeit, Hadronic Journal **13**, 493 (1990).
- [16] J. Bellandi, C.G.S. Costa, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, L.M. Mundim and C. Salles, Nuovo Cimento **A** (1994), a ser publicado.
- [17] J. Bellandi, C.G.S. Costa and C. Salles, Preprint DRC-IFGW-TH:02/94.
- [18] J. Bellandi, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, C.G.S. Costa and L.M. Mundim, J.Phys G: Nucl. Part. Phys. **18**, 1559 (1992).
- [19] C.G.S. da Costa, "*Estudo Analítico da Componente Hadrônica de Superfamílias da Radiação Cósmica detectadas em Câmaras de Emulsão Nuclear*". Tese de Doutorado (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993).
- [20] J. Bellandi, C.G.S. Costa, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, L.M. Mundim and C. Salles, submetido para publicação em Phys. Rev. **D** (1994).
- [21] J. Bellandi Filho, "*Funções Especiais*", Ed. Papirus, Campinas (1985).
- [22] J. Bellandi Filho, "*Funções de Green*". Notas de Física do Instituto de Física Gleb Wataghin, N^o **1** (1992).
- [23] J. Bellandi F^o, S.Q. Brunetto, L.M. Mundim F^o, M.A. Alves, R.J.M. Covolan, A.B. Pádua, J.A. Chinellato and C. Dobrigkeit, Hadronic Journal **13**, 165 (1990).
- [24] T. Matano *et al.*, Proc. 19th Intern. Cosmic Ray Conference (ICRC), La Jolla, **6**, 296 (1985).
- [25] T. Alexopoulos *et al.*, Phys. Rev. **D48**, 984 (1993).

- [26] J. Bellandi, R.J.M. Covolan, C.G.S. Costa, J. Montanha and L.M. Mundim, *Phys. Rev.* **D49**, N^o 11 (1994), a ser publicado.
- [27] T. Matano *et al.*, Proc. 21th Intern. Cosmic Ray Conference (ICRC), Adelaide, **8**, 174 (1990).
- [28] H. Bielawska, A. Krysz, I. Maciaszczyk, J. Malinowski, M. Tamada and A. Tomaszewski, *Nuovo Cim.* **12C**, 763 (1989).
- [29] Colaboração Pamir, Proc. 20th Intern. Cosmic Ray Conference (ICRC), Moscow, **5**, 383 (1987).
- [30] J. Bellandi F^o, “Física da Radiação Cósmica, Uma Introdução”. Notas de Física do Instituto de Física Gleb Wataghin, N^o **6**, (1993).
- [31] C.M.G. Latte, Y. Fujimoto and S. Hasegawa, *Phys. Reports*, **65**, 151 (1980).
- [32] E.H. Shibuya, “*High Energy Interactions through Cosmic Rays Results*”, (1991) - unpublished.
- [33] Y. Fujimoto, Proc. of the Gleb Wataghin School on High Energy Phenomenology - Campinas, Brasil (1990).
- [34] C.M.G. Lattes, G.S.P. Occhialini and C.F. Powell, *Nature*, **160**, 486 e 543 (1947).
- [35] M. Okamoto and T. Shibata, *Nuclear Instruments and Methods*, **A257**, 155 (1987).
- [36] A. Ohsawa and K. Sawayanagi, Preprint ICRR-Report-250-91-19 (University of Tokyo).
- [37] J.A. Chinellato, “*Características principais e análise de um evento ('Ursa Maior') de energia observada da ordem de 10^{15} eV, detectada pela câmara de emulsões nucleares, filmes de raio-X e chumbo N^o 15, da colaboração Brasil-Japão*”, Tese de Doutorado (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1981).

- [38] P.C. Beggio, “*Remedição e análise de alguns eventos exóticos em interações hadrônicas de altas energias*”. Tese de Mestrado (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994).