

# Estudo Analítico da Componente Hadrônica de Superfamílias da Radiação Cósmica Detectadas em Câmaras de Emulsão Nuclear

Cesar Gustavo Silveira da Costa

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin  
da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)  
para a obtenção do Título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Bellandi Filho

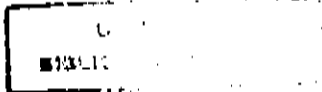
*Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida pelo aluno Cesar Gustavo Silveira da Costa e aprovada  
pela comissão julgadora*

Universidade Estadual de Campinas  
Campinas - São Paulo

Outubro de 1993

*9/14/1993*

*J. Bellandi*



UNIDADE IF

N.º CHAMADA:

V. Ex.

TOMBO BC/ 20189

PROC. 264/93

C  D

PREÇO CR\$ 800,00

DATA 05/01/94

N.º CPDC m.00052629-9

TR 192 P. 177-178  
m.

Para

Dad & Mamy,  
Con,  
Pebo & Guga

Três gerações  
de Incentivo, Amor e Carinho.

Este trabalho foi realizado no Departamento de Raios C3smicos e Cronologia do Instituto de F3sica Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient3fico e Tecnol3gico (CNPq), Funda3o de Amparo 3 Pesquisa do Estado de S3o Paulo (FAPESP) e Fundo de Apoio ao Ensino e Pesquisa da Unicamp (FAEP).

# Agradecimentos

A realização desta pesquisa somente se tornou possível graças à colaboração e ao apoio de muitos colegas e amigos que estiveram ao nosso lado, dentro e fora da Universidade. A todos aqueles que directa ou indirectamente ajudaram, proporcionando as condições para que concluíssemos este trabalho, o nosso mais sincero agradecimento.

Contudo, não podemos deixar de destacar o acompanhamento sério, persistente e frutífero de José Bellandi Filho, que mais do que devotado orientador, mostrou-se o grande amigo, de todas as horas.

É preciso ressaltar também, as inúmeras vezes em que contamos com o auxílio e o companheirismo de Carola Dobrigkeit, Roberto Covolan, Luiz Mundim e José Montanha, ao longo destes anos, prazerosamente trabalhando juntos.

Nossa gratidão se estende ainda aos outros colegas do Grupo Teórico, e aos amigos dos Grupos de Emulsões, de Leptons e de Cronologia, que fazem parte também dessa superfamília dos Raios Cósmicos.

Em particular, expressamos nossa gratidão a José Augusto Chinellato e a Edison Shibuya, pelo auxílio tantas vezes prestado com relação aos detalhes experimentais.

Vale lembrar também, que nosso cotidiano não seria o mesmo, sem a presença das meninas Marilena Borelli, Sandra Fonseca e “Dona” Sebastiana.

Ao Mario de Castro Jr. devemos a eficiente assessoria em assuntos computacionais.

Finalmente, e mais uma vez, agradecemos o incentivo diário e a paciência constante da companheira de sempre, Conceição.

# RESUMO

Obtém-se as soluções das equações de difusão unidimensional da cascata hadrônica induzida por um único nucleon na atmosfera, com livres caminhos médios de interação nucleônico e piônico constantes.

Por meio destas soluções descrevem-se analiticamente eventos da radiação cósmica, detectados em câmaras de emulsão nuclear, com energias hadrônicas totais visíveis da ordem de 1000 TeV (no referencial de laboratório). Para tanto, introduz-se violação do “Scaling” de Feynman no espectro de produção múltipla de partículas carregadas, em conformidade com os dados de aceleradores para a distribuição de densidade de partículas por intervalo de rapidez, e impõe-se auto consistência entre a elasticidade média nucleônica (e piônica) e a inelasticidade média.

A análise do espectro de energia hadrônica das superfamílias “P3’-C1-B90” e “C141G4836”, detectadas pela Colaboração Pamir, e das superfamílias “Ursa Maior” e “Mini-Andrômeda III”, detectadas no Monte Chacaltaya pela Colaboração Brasil-Japão, mostra que não é necessária a presença de primários pesados ou de mecanismos especiais de hadronização, para descrever suficientemente bem os dados experimentais de câmaras de emulsão.

# ABSTRACT

Solutions of the one-dimensional diffusion equation for the hadronic cascade induced by one single nucleon in the atmosphere are obtained, assuming constant nucleonic and pionic interaction mean-free-paths.

By mean of these solutions, it is possible to describe analytically cosmic-ray events detected in emulsion chambers, having total visible hadronic energy around 1000 TeV (in the laboratory system). It is necessary to introduce violation of the Feynman Scaling law in the charged multiparticle production spectra, accordingly to accelerator data on rapidity distributions, and it must be imposed consistency between the nucleonic (and pionic) mean elasticity and the mean inelasticity.

The analysis of hadronic energy spectrum for the superfamilies "P3'-C1-B90" and "C141G4836", detected by the Pamir Collaboration, and for the superfamilies "Ursa Maior" and "Mini-Andromeda III", detected in Mt. Chacaltaya by the Brazil-Japan Collaboration, shows that there is no need to introduce neither heavy primaries, nor unusual hadronization mechanisms, in order to explain quite well the emulsion chamber experimental data.

# Conteúdo

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>Da Cascata Hadrônica</b>                                | <b>11</b> |
| 2.1      | Das Equações de Difusão Hadrônica . . . . .                | 11        |
| 2.2      | Da Solução da Componente Nucleônica . . . . .              | 16        |
| 2.3      | Da Solução da Componente Piônica . . . . .                 | 19        |
| 2.4      | Do Comportamento do Fluxo Integral . . . . .               | 21        |
| <b>3</b> | <b>Das Superfamílias Hadrônicas</b>                        | <b>37</b> |
| 3.1      | Dos Experimentos em Câmaras de Emulsão . . . . .           | 37        |
| 3.2      | De Superfamílias da Radiação Cósmica . . . . .             | 38        |
| 3.3      | Do Ajuste com “Scaling” de Feynman . . . . .               | 45        |
| <b>4</b> | <b>Da Produção Múltipla de Píons</b>                       | <b>49</b> |
| 4.1      | Da Distribuição de Densidade em Pseudo-Rapidez . . . . .   | 49        |
| 4.2      | Dos Modelos com Violação de “Scaling” . . . . .            | 50        |
| 4.2.1    | Modelo de JBF et al. . . . .                               | 50        |
| 4.2.2    | Modelo de Capdevielle . . . . .                            | 52        |
| 4.3      | Da Inelasticidade em Função da Energia . . . . .           | 56        |
| <b>5</b> | <b>Do Espectro de Energia</b>                              | <b>59</b> |
| 5.1      | Da Distribuição de Elasticidade Auto Consistente . . . . . | 59        |
| 5.2      | Da Solução Hadrônica Autoconsistente . . . . .             | 61        |
| 5.3      | Da Descrição do Espectro de Energia . . . . .              | 62        |
| 5.3.1    | Do Evento “Ursa Maior” . . . . .                           | 62        |
| 5.3.2    | De Outras Superfamílias . . . . .                          | 67        |
| 5.3.3    | De Eventos Centauros . . . . .                             | 72        |
| <b>6</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>79</b> |
| <b>A</b> | <b>Transformada de Mellin</b>                              | <b>81</b> |
| A.1      | Definição . . . . .  | 81        |
| A.2      | Representação da função delta . . . . .                    | 82        |
| A.3      | Transformada inversa de $x_0^s (s + a)^{-n}$ . . . . .     | 82        |



|  |           |
|--|-----------|
| <b>B Operadores Expansionais</b>   | <b>85</b> |
| B.1 Definição . . . . .  | 85        |
| B.2 Propriedades . . . . .   | 86        |
| <b>C Produção Múltipla, <math>dN/d\eta^*</math> e <math>\langle K \rangle</math></b> | <b>87</b> |
| C.1 Variável de Feynman e pseudo-rapidez . . . . .                                   | 87        |
| C.2 Espectro de produção múltipla . . . . .  | 88        |
| C.3 Cálculo de elasticidade média . . . . .  | 89        |
| C.4 O “Corte” de Ohsawa . . . . .  | 90        |
| <b>D Fluxo Piônico Assimétrico</b>   | <b>93</b> |

# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Comportamento do fluxo integral nucleônico $I_N(> E)$ , em função da profundidade atmosférica $T_N$ (Curvas de Transição), para diversos valores de energia de limiar $E$ . . . . .                  | 23 |
| 2.2  | Comportamento do fluxo integral nucleônico $I_N(> E)$ , em função da energia de limiar $E$ (Espectro Integral de Energia), para diversos valores da profundidade atmosférica $T_N$ . . . . .         | 24 |
| 2.3  | Curvas de Transição do fluxo integral piônico $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas $I_\pi^{(1)}$ e $I_\pi^{(2)}$ , para a energia $E = 10^2$ TeV. . . . .  | 26 |
| 2.4  | Curvas de Transição do fluxo integral piônico $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas $I_\pi^{(1)}$ e $I_\pi^{(2)}$ , para a energia $E = 10^{-2}$ TeV. . . . .   | 27 |
| 2.5  | Espectro de Energia do fluxo integral piônico $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas $I_\pi^{(1)}$ e $I_\pi^{(2)}$ , para a profundidade $T_N = 2$ . . . . .   | 28 |
| 2.6  | Espectro de Energia do fluxo integral piônico $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas $I_\pi^{(1)}$ e $I_\pi^{(2)}$ , para a profundidade $T_N = 6$ . . . . .   | 29 |
| 2.7  | Espectro de Energia do fluxo integral piônico $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas $I_\pi^{(1)}$ e $I_\pi^{(2)}$ , para a profundidade $T_N = 12$ . . . . .  | 30 |
| 2.8  | Curvas de Transição do fluxo integral hadrônico $I_H(> E)$ , com suas parcelas $I_N$ e $I_\pi$ , para a energia $E = 10^{-2}$ TeV. . . . .   | 32 |
| 2.9  | Curvas de Transição do fluxo integral hadrônico $I_H(> E)$ , com suas parcelas $I_N$ e $I_\pi$ , para a energia $E = 10^2$ TeV. . . . .  | 33 |
| 2.10 | Espectro de Energia do fluxo integral hadrônico $I_H(> E)$ , com suas parcelas $I_N$ e $I_\pi$ , para a profundidade $T_N = 2$ . . . . .   | 34 |
| 2.11 | Espectro de Energia do fluxo integral hadrônico $I_H(> E)$ , com suas parcelas $I_N$ e $I_\pi$ , para a profundidade $T_N = 12$ . . . . .  | 35 |
| 3.1  | Fotografia da parte central de Mini-Andromeda III observada no filme de Raio-X, no ponto em que o halo atinge densidade eletrônica máxima (Ref.[27]) . . . . .                                       | 40 |
| 3.2  | Espectro Integral de Energia Hadrônica das superfamílias "P3'-C1-B90" e "C141G4836", detectadas em câmaras de emulsão, pela Colaboração Pamir (Refs. [29,30]). . . . .                               | 42 |
| 3.3  | Espectro Integral de Energia Hadrônica das superfamílias "Ursa Maior" e "Mini-Andromeda III", detectadas em câmaras de emulsão, pela Colaboração Brasil-Japão, no Mt. Chacaltaya (Ref.[27]). . . . . | 43 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.4 | Espectro Integral de Energia Hadrônica dos eventos “Centaurus I” e “Centaurus VII”, detectados em câmaras de emulsão, pela Colaboração Brasil-Japão, no Mt. Chacaltaya (Refs. [25,31]). . . . .  | 44 |
| 3.5 | Tentativa de ajuste do Espectro Integral de Energia Hadrônica de “C141G4836” (Pamir), com “scaling” de Feynman na produção múltipla de partículas. . . . .   | 46 |
| 3.6 | Tentativa de ajuste do Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Ursa Maior” (Chacaltaya), com “scaling” de Feynman na produção múltipla de partículas. . . . .   | 47 |
| 4.1 | Distribuição de Densidade de Rapidez para energias de aceleradores. A curva contínua é o ajuste calculado com “scaling” de Feynman. . . . .  | 51 |
| 4.2 | Distribuição de Densidade de Rapidez para energias de aceleradores. A curva tracejada é o ajuste calculado com o Modelo 1(a): JBF UA5 e a curva contínua com o Modelo 1(b): JBF UA5+7. . . . .   | 53 |
| 4.3 | Distribuição de Densidade de Rapidez para energias de aceleradores. A curva tracejada é o ajuste calculado com a Alternativa (a): “ln s” e a curva contínua com a Alternativa (b): “ $Z_{eff}$ ”; ambas segundo o Modelo de Capdevielle. . . . .   | 55 |
| 4.4 | Dependência energética da inelasticidade média $\langle K \rangle$ , calculada a partir de diferentes modelos de produção múltipla de partículas: Modelo 1(a): JBF UA5 (linha pontilhada), Modelo 1(b): JBF UA5+7 (linha tracejada) e Modelo 2: Capdevielle $Z_{eff}$ (linha contínua). Também estão indicados o “scaling” de Feynman e as energias dos aceleradores, usadas no ajuste dos parâmetros dos modelos. . . . . | 57 |
| 5.1 | Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Ursa Maior”, ajustado com o modelo de produção múltipla 1(a): JBF UA5. As curvas tracejada, pontilhada e contínua correspondem aos três casos de distribuição de elasticidade, discutidos no texto. $E_0^{(\gamma)}$ indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. . . . .   | 63 |
| 5.2 | Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Ursa Maior”, ajustado com o modelo de produção múltipla 1(b): JBF UA5+7. As curvas tracejada, pontilhada e contínua correspondem aos três casos de distribuição de elasticidade, discutidos no texto. $E_0^{(\gamma)}$ indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. . . . .   | 64 |

- 5.3 Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Úrsa Maior”, ajustado com o modelo de produção múltipla 2: Capdevielle. As curvas tracejada, pontilhada e contínua correspondem aos três casos de distribuição de elasticidade, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. . . . . 65
- 5.4 Espectro Integral de Energia Hadrônica de “P3’-C1-B90”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3). As curvas contínua, pontilhada e tracejada correspondem aos três modelos de produção múltipla, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. . . . . 68
- 5.5 Espectro Integral de Energia Hadrônica de “C141G4836”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3). As curvas contínua, pontilhada e tracejada correspondem aos três modelos de produção múltipla, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. . . . . 69
- 5.6 Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Mini Andromeda III”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3). As curvas contínua, pontilhada e tracejada correspondem aos três modelos de produção múltipla, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. 70
- 5.7 Distribuição de Elasticidade  $f(\sigma) = (1 + \beta)^\beta$  usando o valor médio  $\langle \beta \rangle$ , obtido com cada modelo de produção múltipla nos ajustes de fluxo integral (veja Tabela 5.3) . . . . . 73
- 5.8 Mapa isodensitométrico do evento “P3’-C1-B90” em 4 profundidades diferentes nas placas de chumbo, atravessando tanto a câmara superior (“Γ-block”) como a inferior (“H-block”). Extraído da Ref.[29]. . . . . 74
- 5.9 Espectro Integral de Energia Hadrônica do evento “Centauro I”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3), segundo os modelos de produção múltipla 1(b): JBF UA5+7 (curva contínua) e 2: Capdevielle (curva tracejada).  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste. . . . . 75
- 5.10 Espectro Integral de Energia Hadrônica do evento “Centauro VII”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3), segundo o modelo de produção múltipla 1(a): JBF UA5 (curva contínua).  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido no ajuste. . . . . 76



# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Super-Famílias da Radiação Cósmica . . . . .                        | 41 |
| 5.1 | Fluxo Hadrônico Integral - Ursa Maior (Chacaltaya) . . . . .        | 66 |
| 5.2 | Fluxo Hadrônico Integral - Local Simétrico . . . . .                | 77 |
| 5.3 | Distribuição Auto Consistente com $\langle \beta \rangle$ . . . . . | 77 |



# Capítulo 1

## Introdução

Estudos sobre radiação cósmica com emulsões nucleares têm-se revelado de grande importância para a física de interações nucleares a altas energias, desde a famosa descoberta do méson  $\pi$ , em 1947, por *Lattes, Occhialini e Powell* [1]. Posteriormente, essa descoberta foi confirmada com a produção artificial de píons, no ciclotron de Berkeley [2].

Atualmente, são diversas as colaborações internacionais vinculadas ao estudo da radiação cósmica a altíssimas energias ( $E_0 > 10^{15}$  eV), através da exposição de filmes de Raios-X e de emulsões nucleares em câmaras situadas em altitudes de montanha, como por exemplo a Colaboração Brasil-Japão, no Monte Chacaltaya (Bolívia, 5200m acima do nível do mar), a Colaboração Pamir (ex-URSS, 4370m) e a Colaboração do Monte Fuji (Japão, 3750m) [3]. A investigação das interações mais íntimas da matéria é também realizada por aceleradores, estes cada vez mais potentes, como o Fermilab (FNAL, nos EUA), o “Intersecting Storage Ring” (ISR) e o “Super Proton Synchrotron (SPS) Collider”, do Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN, na Suíça) e finalmente o Tevatron (FNAL, EUA), que produz colisões  $p - \bar{p}$  com energia no referencial do centro de massa  $\sqrt{s} = 1,8$  TeV (no referencial de laboratório,  $E_0 \sim 1600$  TeV). Há um interesse crescente em cruzar informações provenientes destes dois ramos da física de altas energias - raios cósmicos e aceleradores. Seguindo essa tendência, têm-se proposto nos últimos anos a construção de grandes detectores, entre outros aspectos, a fim de medir interações até então só encontradas em raios cósmicos (como o caso dos eventos Centauro). Em contrapartida, *Bellandi* [4], *Oh-sawa* [5] e *Capdevielle* [6], por exemplo, têm demonstrado a importância de se utilizar dados de aceleradores, como os de distribuição de densidade de partículas por intervalo de rapidez, na parametrização de modelos de produção múltipla de partículas carregadas, destinadas a descrever a interação da radiação cósmica na atmosfera a energias extremamente elevadas.

Essa ponte que transporta os resultados obtidos em aceleradores de partículas à análise de eventos de raios cósmicos, extrapolando-os ao regime de altíssimas energias, de certa forma contribui justificando a construção



radores. Em retorno, por vezes é possível “antecipar” resultados que, por enquanto, apenas as medidas de raios cósmicos podem fornecer.

O presente trabalho se insere precisamente dentro dessa filosofia de intercâmbio entre a física de raios cósmicos e os resultados provenientes de aceleradores.

No âmbito deste estudo, pretende-se mostrar como descrever analiticamente eventos de superfamílias hadrônicas da radiação cósmica, detectadas em câmaras de emulsão nuclear em altitudes de montanha.

Primeiramente obtém-se as soluções das equações de difusão da componente hadrônica da radiação cósmica, para a cascata induzida por um único nucleon na atmosfera. Para tanto, usa-se o método de ordenação de operadores exponenciais de Feynman, conforme discutido no Capítulo 2, onde também se analisa em detalhe o comportamento das soluções obtidas.

Em seguida, no Capítulo 3, apresenta-se o espectro integral de energia hadrônica de determinadas superfamílias da radiação cósmica: “P3-C1-B90” e “C141G4836” da Colaboração Pamir; “Ursa Maior” e “Mini-Andrômeda III” da Colaboração Brasil-Japão em Chacaltaya; além dos eventos “exóticos” conhecidos por “Centaurus I” e “Centaurus VII”. A validade do modelo de produção múltipla de partículas carregadas, obedecendo à Lei de “scaling” de Feynman, é então testada para algumas das superfamílias descritas acima.

Em se averiguando a necessidade de introduzir a violação do “scaling” de Feynman, conduz-se no Capítulo 4 ao exame de dois outros modelos de produção múltipla, o utilizado por Bellandi e colaboradores [4, 5], e aquele proposto por Capdevielle [6]. Uma vez obtidas as parametrizações destes modelos, exclusivamente a partir de dados de aceleradores, discute-se brevemente o comportamento da inelasticidade média em função da energia, segundo cada alternativa de produção múltipla.

A par da introdução de quebra do “scaling” nos espectros de produção de partículas, deve-se proceder a ajustes nos cálculos do fluxo hadrônico, conforme mostrado no Capítulo 5, a fim de torná-lo auto consistente, no que diz respeito à relação entre a elasticidade e a inelasticidade médias. Pode-se finalmente analisar até que extensão é possível descrever a componente hadrônica daqueles eventos da radiação cósmica, anteriormente selecionados, tendo por base as soluções analíticas das equações de difusão, calculadas a partir de um modelo extremamente simples para as interações nucleares na atmosfera, a altas energias.

# Capítulo 2

## Da Cascata Hadrônica

### 2.1 Das Equações de Difusão Hadrônica

Para analisar o espectro hadrônico integral de energia de superfamílias da radiação cósmica na atmosfera, detectado em câmaras de emulsão nuclear, devemos obter a solução das equações de difusão unidimensionais da cascata hadrônica, induzida por um único nucleon na atmosfera.

Para escrever as equações de difusão é necessário definir quais os mecanismos mais relevantes na interação hádron-ar. Começamos a análise com um modelo simplificado, utilizando as seguintes hipóteses:

- (i) *A cascata hadrônica é formada exclusivamente por nucleons e píons.* Isto significa, por exemplo, que desconsideramos a produção de mésons pesados, face à multiplicidade piônica.
- (ii) *A produção de píons por píons e o decaimento de píons em muons são desprezíveis.* Estas restrições estão ligadas ao fato de que se almeja proceder à análise de dados de altitudes de montanha, em altíssimas energias ( $> 10^{15}$  eV).
- (iii) *O desenvolvimento da cascata pode ser descrito pelo modelo da partícula líder.* Neste caso, após cada colisão, uma das partículas que emerge carrega considerável parcela da energia incidente. Define-se a *elasticidade*  $\sigma_i$  ( $i = N, \pi$ ) como sendo a fração da energia carregada pela partícula líder após a colisão.
- (iv) *A elasticidade está distribuída segundo uma função normalizada  $f(\sigma_i)$ , com  $i = N, \pi$ , independente da energia.* Assim sendo, a elasticidade média,

$$\langle \sigma_i \rangle = \int_0^1 \sigma_i f(\sigma_i) d\sigma_i \quad , \quad (2.1)$$

é constante. Por exemplo, se  $f(\sigma_i) = 1$ , ou seja, a elasticidade está uniformemente distribuída no intervalo  $\sigma_i \in (0, 1)$ , então  $\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2}$ .

- (v) Os livre caminhos médios (l.c.m.) de interação nucleon-ar e pión-ar são considerados independentes da energia, e iguais a  $\lambda_N = 80g/cm^2$  e  $\lambda_\pi = 120g/cm^2$ , respectivamente. Devido à fraca dependência energética da seção de choque inelástica de colisão hádron-ar, que é inversamente proporcional ao l.c.m. de interação, a hipótese de  $\lambda$  constante vem sendo largamente utilizada [7].
- (vi) A produção múltipla de partículas carregadas (com energia  $E$ ), por nucleons com energia  $E_0$  está sujeita a uma distribuição espectral  $g(E, E_0)$ . Essa função está relacionada à distribuição de densidade de partículas por intervalo de pseudo-rapidez  $dN/d\eta$ , conforme será discutido no Capítulo 3.

Deseja-se calcular o fluxo diferencial  $F_i(E, E_0, t, t_0) dE dt$  de nucleons e píons ( $i = N, \pi$ ), com energia entre  $E$  e  $E + dE$  detectados a uma profundidade atmosférica entre  $t$  e  $t + dt$  (medidos em  $g/cm^2$ ), para uma cascata hadrônica gerada à profundidade  $t_0$  pela colisão de um único nucleon com energia  $E_0$ .

De acordo com as hipóteses acima descritas, as equações de difusão se escrevem,

$$\begin{aligned} \frac{dF_N}{dt}(E, E_0, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, t, t_0) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \int_0^1 f(\sigma_N) d\sigma_N \int_{E_0}^E \delta(E - \sigma_N E') F_N(E', E_0, t, t_0) dE', \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_\pi}{dt}(E, E_0, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, t, t_0) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_\pi} \int_0^1 f(\sigma_\pi) d\sigma_\pi \int_{E_0}^E \delta(E - \sigma_\pi E') F_\pi(E', E_0, t, t_0) dE' \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \int_E^{E_0} g(E, E') F_N(E', E_0, t, t_0) dE' \end{aligned} \quad (2.3)$$

O primeiro termo no lado direito da eq. (2.2) corresponde à perda de nucleons, que antes de colidir possuíam energia  $E$  e imediatamente após passam a ter energia menor. O segundo termo representa o ganho de nucleons que antes possuíam energia  $E'$  e logo após uma colisão passam a ter energia

$$E = \sigma_N E' ,$$

condição essa que fica garantida pela  $\delta(E - \sigma_N E')$ . Para que seja satisfeita, porém, é necessário integrar sobre todos os possíveis valores de  $E'$  entre

$E$  e  $E_0$ , além de “escolher” o valores adequados de  $\sigma_N$ , ponderados pela distribuição de elasticidade  $f(\sigma_N)$ .

Os mesmos mecanismos estão presentes nos dois primeiros termos do lado direito da eq. (2.3) para a componente piônica. Píons colidem a uma profundidade atmosférica  $t$ , contribuindo para mais ou para menos ao fluxo piônico, dependendo de suas energias logo antes de colidir. Entretanto, existe agora uma contribuição extra, dado pelo terceiro termo no lado direito da equação de difusão piônica. Corresponde ao acréscimo ao fluxo de píons devido à probabilidade de que um nucleon com energia  $E'$  sofra uma colisão produzindo píons com energia  $E$ , ponderada pela distribuição espectral de produção múltipla  $g_N(E, E')$ , integrado para todos os possíveis valores de  $E'$ , entre  $E$  e  $E_0$ .

As eqs. (2.2) e (2.3) refletem as hipóteses citadas nos itens (i) a (vi) acima. Traduzindo o fato de que a cascata hadrônica é induzida por um único nucleon primário na atmosfera com energia  $E_0$ , as condições de contorno são:

$$F_N(E, E_0, t = t_0) = \delta(E - E_0) \quad , \quad (2.4)$$

$$F_\pi(E, E_0, t = t_0) = 0 \quad . \quad (2.5)$$

A forma usual de resolver estes tipos de equações de difusão tem sido, por muito tempo, o uso de *Transformadas de Mellin* (vide Apêndice A). Por exemplo, *Rossi e Greisen* [8] e posteriormente *Nishimura* [9] obtiveram a solução para a cascata eletromagnética induzida por um fóton energético (gama) ou um elétron, aplicando Transformação de Mellin às equações acopladas que descrevem a difusão de gamas e pares elétron-pósitron. A solução final na forma de integral no plano complexo é extremamente complicada e a integral complexa deve ser calculada pelo método do ponto de sela [10] ou por métodos numéricos.

O mesmo tem ocorrido no caso da cascata hadrônica. Por exemplo, há 40 anos atrás *Messel e Green* calcularam via Transformada de Mellin a solução para a cascata tridimensional nucleônica [11] e hadrônica [12], iniciadas no topo da atmosfera por um fluxo primário com dependência energética na forma de potência. Mais recentemente, *Ohsawa e Yamashita* [13] estudaram a cascata hadrônica iniciada por um único nucleon, mas em todos esses casos a solução final é sempre escrita em termos de complicadas integrais no plano complexo. Outra maneira de abordar o problema da difusão na atmosfera tem sido o método de aproximações sucessivas, que apresenta, contudo, uma metodologia um tanto quanto trabalhosa.

Tendo em conta o desejo de encontrar formas novas e mais simples de resolver as equações do desenvolvimento da radiação cósmica na atmosfera, foi proposta a utilização do método da *ordenação de operadores exponenciais de Feynman* [14, 15]. Com este procedimento de cálculo, é possível, por exemplo, se reproduzir facilmente as soluções de Nishimura [9] para a cascata eletromagnética, usando um formalismo espinorial [16]. Contudo esta

solução ainda é escrita no espaço de Mellin e o desafio tem sido encontrar soluções “fechadas”, isto é, escritas no espaço de configuração e expressas através de funções analíticas simples ou de integrais de convolução de fácil manuseio. Este objetivo foi alcançado por *Bellandi e colaboradores*, para o desenvolvimento da cascata hadrônica iniciada no topo da atmosfera por um fluxo primário na forma de espectro de potência, tanto no caso unidimensional [17], quanto tridimensional [18]. A extensão dessas soluções para englobar o fluxo muônico, sujeito às mesmas condições iniciais, foram também objeto de amplos estudos [19, 20].

Vejam agora como este método de ordenação de operadores exponenciais, cujos princípios básicos estão delineados no Apêndice B, pode ser aplicado também ao caso da difusão da cascata hadrônica induzida por um único nucleon na atmosfera.

Para tanto, retorna-se às equações de difusão, eqs. (2.2) e (2.3), que são re-escritas de maneira conveniente, lembrando-se da propriedade da função delta de Dirac [21],

$$\delta(E - \sigma_i E') = \frac{1}{\sigma_i} \delta(E/\sigma_i - E') \quad . \quad (2.6)$$

As eqs. (2.2) e (2.3) ficam

$$\begin{aligned} \frac{dF_N}{dt}(E, E_0, t, t_0) = & -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, E_0, t, t_0) + \\ & + \frac{1}{\lambda_N} \int_0^1 f(\sigma_N) F_N(E/\sigma_N, E_0, t, t_0) \frac{d\sigma_N}{\sigma_N} \quad , \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_\pi}{dt}(E, E_0, t, t_0) = & -\frac{1}{\lambda_\pi} F_\pi(E, E_0, t, t_0) + \\ & + \frac{1}{\lambda_\pi} \int_0^1 f(\sigma_\pi) F_\pi(E/\sigma_\pi, E_0, t, t_0) \frac{d\sigma_\pi}{\sigma_\pi} + \\ & + \frac{1}{\lambda_N} \int_E^{E_0} g(E, E') F_N(E', E_0, t, t_0) dE' \quad . \quad (2.8) \end{aligned}$$

Sejam as seguintes definições, em termos de operadores, atuando sobre os fluxos diferenciais,

$$\hat{\sigma}_i F_i(E, E_0) = \int_0^1 f(\sigma_i) F_i(E/\sigma_i, E_0) \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \quad ; \quad (2.9)$$

$$\hat{\Sigma}_N F_N(E, E_0) = \int_E^{E_0} g(E, E') F_N(E', E_0) dE' \quad . \quad (2.10)$$

com  $i = N, \pi$ . As eqs. (2.7) e (2.8) ficam, então,

$$\frac{\partial F_N}{\partial t}(E, E_0, t, t_0) = -\frac{1}{\lambda_N} [1 - \hat{\sigma}_N] F_N(E, E_0, t, t_0) \quad ; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, t, t_0) &= -\frac{1}{\lambda_\pi} [1 - \hat{\sigma}_\pi] F_\pi(E, E_0, t, t_0) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, E_0, t, t_0) \quad . \end{aligned} \quad (2.12)$$

As equações de difusão podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial F_N}{\partial t}(E, E_0, t, t_0) = \hat{A} F_N(E, E_0, t, t_0) \quad ; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pi}{\partial t}(E, E_0, t, t_0) &= \hat{B} F_\pi(E, E_0, t, t_0) + \\ &+ \hat{C} F_N(E, E_0, t, t_0), \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde introduzimos os operadores

$$\hat{A} = -\frac{1}{\lambda_N} [1 - \hat{\sigma}_N] \quad ; \quad (2.15)$$

$$\hat{B} = -\frac{1}{\lambda_\pi} [1 - \hat{\sigma}_\pi] \quad ; \quad (2.16)$$

$$\hat{C} = \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N \quad . \quad (2.17)$$

Se  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  fossem simplesmente funções escalares  $A(t), B(t), C(t)$ , as soluções das equações acopladas, eqs. (2.13) e (2.14), seriam [10]

$$F_N(t, t_0) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t A(t') dt' \right\} F_N(t = t_0) \quad ; \quad (2.18)$$

$$F_\pi(t, t_0) =$$

$$\exp \left\{ \int_{t_0}^t B(t') dt' \right\} \int_{t_0}^t dz \exp \left\{ - \int_{t_0}^z B(t') dt' \right\} C(z) F_N(z, t_0). \quad (2.19)$$

Na verdade  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  são operadores e de maneira geral a solução toma a forma

$$F_N(t, t_0) = \text{Exp} \left\{ \int_{t_0}^t \hat{A} dt' \right\} F_N(t = t_0) \quad ; \quad (2.20)$$

$$F_\pi(t, t_0) = \quad (2.21)$$

$$\text{Exp} \left\{ \int_{t_0}^t \hat{B} dt' \right\} \int_{t_0}^t dz \text{Exp} \left\{ - \int_{t_0}^z \hat{B} dt' \right\} \hat{C} F_N(z, t_0), \quad (2.22)$$

onde a notação  $\text{Exp}$  se refere aos *Expansionais*, definidos no Apêndice B e que dão conta do fato de que  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  são operadores e devem ser tratados como tais.

Neste caso particular, os operadores  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  atuam apenas na base de energia dos fluxos diferenciais, não afetando a dependência na profundidade  $t$ . Dessa maneira, conforme a relação (B.9), pode-se escrever

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = \exp \left\{ \hat{A}(t - t_0) \right\} F_N(E, E_0, t = t_0); \quad (2.23)$$

$$F_\pi(E, E_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t dz \exp \left\{ \hat{B}(t - z) \right\} \hat{C} F_N(E, E_0, z, t_0). \quad (2.24)$$

ou, finalmente, substituindo as definições (2.15), (2.16) e (2.17),

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{(t - t_0)}{\lambda_N} [1 - \hat{\sigma}_N] \right\} F_N(E, E_0, t = t_0); \quad (2.25)$$

$$F_\pi(E, E_0, t, t_0) =$$

$$\int_{t_0}^t dz \exp \left\{ -\frac{(t - z)}{\lambda_\pi} [1 - \hat{\sigma}_\pi] \right\} \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, E_0, z, t_0). \quad (2.26)$$

É importante ressaltar o fato de que nas eqs. (2.25) e (2.26), as exponenciais devem ser compreendidas no sentido mais amplo, que lhes é atribuído no Apêndice B; ou seja, de expansões em série de operadores ordenados.

Deste modo, as eqs. (2.25) e (2.26) representam, as soluções *formais* das equações de difusão, eqs. (2.2) e (2.3). Nas duas seções seguintes, trata-se de como obter, sem quaisquer aproximações matemáticas, formas explícitas destas soluções, em termos de funções simples ou de integrais manuseáveis.

## 2.2 Da Solução da Componente Nucleônica

Por simplicidade, definimos a profundidade total de interação, por unidade de l.c.m. nucleônico,

$$T_N = \frac{(t - t_0)}{\lambda_N}. \quad (2.27)$$

A solução formal da componente nucleônica, eq. (2.25), pode ser reescrita com (2.27) e explicitando a condição de contorno (2.4),

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = \exp \left\{ -T_N [1 - \hat{\sigma}_N] \right\} \delta(E - E_0). \quad (2.28)$$

Usando-se a representação de Mellin para  $\delta(E - E_0)$ , dada pela eq. (A.8) do Apêndice A,

$$\delta(E - E_0) = \mathcal{M}^{-1} \{E_0^s\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds \quad , \quad (2.29)$$

a eq. (2.28) fica

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp [T_N \hat{\sigma}_N] \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds. \quad (2.30)$$

Como já foi ressaltado, a exponencial deve ser compreendida em termos de operadores, que por sua vez atuam na base de energia, isto é,

$$\begin{aligned} \exp [T_N \hat{\sigma}_N] \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s &= E_0^s \exp [T_N \hat{\sigma}_N] E^{-(s+1)} \\ &= E_0^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [T_N^n \hat{\sigma}_N^n] E^{-(s+1)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Recordando a definição do operador  $\hat{\sigma}_N$ , dado pela eq. (2.9), verifica-se que,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N E^{-(s+1)} &= \int_0^1 f(\sigma_N) \left(\frac{E}{\sigma_N}\right)^{-(s+1)} \frac{d\sigma_N}{\sigma_N} \\ &= E^{-(s+1)} \int_0^1 \sigma_N^s f(\sigma_N) d\sigma_N \\ &= E^{-(s+1)} \langle \sigma_N^s \rangle \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para avaliar o “momento- $s$ ” de  $\sigma_N$ ,

$$\langle \sigma_N^s \rangle = \int_0^1 \sigma_N^s f(\sigma_N) d\sigma_N \quad , \quad (2.33)$$

é preciso assumir uma escolha explícita para a função de distribuição de elasticidade nucleônica  $f(\sigma_N)$ . Por ora, podemos supor que a distribuição seja uniforme, no intervalo  $\sigma_N \in (0, 1)$ ; isto é,  $f(\sigma_N) = 1$ . Mais adiante, no Capítulo 5, admitimos outras alternativas para  $f(\sigma_N)$ .

Para a distribuição uniforme,

$$\langle \sigma_N \rangle = \frac{1}{2} \quad , \quad (2.34)$$

$$\langle \sigma_N^s \rangle = \frac{1}{s+1} \quad , \quad (2.35)$$

e portanto,

$$\hat{\sigma}_N E^{-(s+1)} = \frac{E^{-(s+1)}}{s+1} \quad . \quad (2.36)$$



No somatório da eq. (2.31) esta operação aparece aplicada  $n$ -vezes, tal que,

$$(\hat{\sigma}_N)^n E^{-(s+1)} = \frac{E^{-(s+1)}}{(s+1)^n} \quad (2.37)$$

Com a eq. (2.37) em (2.31), retorna-se à solução (2.30), escrevendo

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T_N^n \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{(s+1)^n} \frac{1}{E} \left( \frac{E_0}{E} \right)^s ds \right] \quad (2.38)$$

É preciso calcular o termo entre colchetes no lado direito da eq. (2.38), para cada valor de  $n$ . Na verdade, trata-se da Transformada Inversa de Mellin,

$$R^{(n)}(E) = \mathcal{M}^{-1} \left\{ \frac{E_0^s}{(s+1)^n} \right\} \quad (2.39)$$

Para  $n = 0$ ,

$$R^{(0)}(E) = \mathcal{M}^{-1} \{ E_0^s \} = \delta(E - E_0) \quad (2.40)$$

Para  $n \geq 1$ , calculamos o valor da integral, pelo método de resíduos, como descrito no Apêndice A. O resultado, sem aproximações, é dado pela eq. (A.17),

$$R^{(n)}(E) = \frac{1}{(n-1)!} [\ln(E_0/E)]^{n-1} \frac{1}{E_0} \quad (2.41)$$

Assim sendo, com (2.40) e (2.41), a eq. (2.38) fica

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \left[ \delta(E - E_0) + \frac{T_N}{E_0} \frac{2}{u_N} I_1(u_N) \right] \quad (2.42)$$

uma vez que [10, 21]

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(T_N \ln(E_0/E))^{n-1}}{n! (n-1)!} \right] = T_N \frac{2}{u_N} I_1(u_N) \quad (2.43)$$

onde  $I_1$  é Função de Bessel Modificada de 1ª Ordem, e

$$u_N = 2\sqrt{T_N \ln(E_0/E)} \quad (2.44)$$

Novamente neste ponto, ressaltamos que a identificação feita na eq. (2.43) não contém aproximações. Portanto, a eq. (2.42), escrita no espaço real, é a solução *exata* da eq. (2.2), para a difusão da cascata nucleônica, induzida por um único nucleon na atmosfera [22, 23].

## 2.3 Da Solução da Componente Piônica

Na seção anterior, vimos em detalhe como se obtém a solução explícita da componente nucleônica unidimensional. Resolveremos a componente piônica das equações de difusão, utilizando os resultados anteriores. A simplicidade dos cálculos nos mostra a capacidade e a elegância do método empregado.

A solução formal para a componente piônica, eq. (2.26), pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_{\pi}(E, E_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \exp \left\{ -\frac{(t-z)}{\lambda_{\pi}} [1 - \hat{\sigma}_{\pi}] \right\} \times \int_E^{E_0} dE' \hat{\Sigma}_N \delta(E - E') F_N(E', E_0, z, t_0) \quad . \quad (2.45)$$

Mas, da definição do operador  $\hat{\Sigma}_N$ , eq. (2.10),

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_N \delta(E - E') &= \int_E^{E'} g(E, E'') \delta(E'' - E') dE'' \\ &= g(E, E') \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Além disso, o termo  $F_N(E', E_0, z, t_0)$  na eq. (2.45) já é conhecido e podemos usar diretamente a solução formal, eq. (2.25). Assim,

$$F_{\pi}(E, E_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \int_E^{E_0} dE' g(E, E') \times \exp \left\{ -\frac{(t-z)}{\lambda_{\pi}} [1 - \hat{\sigma}_{\pi}] \right\} \exp \left\{ -\frac{(z-t_0)}{\lambda_N} [1 - \hat{\sigma}_N] \right\} F_N(E', E_0, t = t_0). \quad (2.47)$$

Agora, é preciso escolher a distribuição  $f(\sigma_{\pi})$  que aparece na definição (2.9) do operador  $\hat{\sigma}_{\pi}$ . Em princípio,  $\hat{\sigma}_{\pi}$  não precisa estar correlacionado a  $\hat{\sigma}_N$  e no Capítulo 4 mostramos como lidar com o caso geral. Mas, por ora, tomamos

$$f(\sigma_{\pi}) = f(\sigma_N) = 1 \quad ,$$

de modo que  $\hat{\sigma}_{\pi}$  e  $\hat{\sigma}_N$  atuam indistintamente. Seja, então,

$$\hat{\sigma}_{\pi} = \hat{\sigma}_N \equiv \hat{\sigma} \quad , \quad (2.48)$$

de forma que podemos agrupar as exponenciais na eq. (2.47),

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{(t-z)}{\lambda_{\pi}} [1 - \hat{\sigma}_{\pi}] \right\} \exp \left\{ -\frac{(z-t_0)}{\lambda_N} [1 - \hat{\sigma}_N] \right\} &= \\ \exp \left\{ -\left( \frac{(t-z)}{\lambda_{\pi}} + \frac{(z-t_0)}{\lambda_N} \right) [1 - \hat{\sigma}] \right\} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

A relação (2.49) sugere que se defina a profundidade “em dois degraus”,

$$T(z) = \frac{(t - z)}{\lambda_\pi} + \frac{(z - t_0)}{\lambda_N} \quad . \quad (2.50)$$

Usando (2.49) e (2.50) acima, em conjunto com a condição de contorno nucleônica, eq. (2.4), o fluxo piônico (2.47) fica,

$$F_\pi(E, E_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \int_E^{E_0} dE' g(E, E') \times \\ [\exp \{-T(z)(1 - \hat{\sigma})\} \delta(E' - E_0)] \quad . \quad (2.51)$$

Pode-se observar que o termo a direita, entre colchetes, na eq. (2.51) tem exatamente a mesma forma do que a eq. (2.28), que dá a solução formal nucleônica em termos da função delta. Basta-nos, portanto, usar em seu lugar a expressão (2.42), que representa a solução nucleônica explícita, fazendo as modificações:

$$\begin{aligned} T_N &\rightarrow T(z) & ; \\ \sigma_N &\rightarrow \sigma & ; \\ E &\rightarrow E' & . \end{aligned}$$

Com isso, escrevemos a solução piônica na sua forma explícita,

$$F_\pi(E, E_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \int_E^{E_0} dE' g(E, E') e^{-T(z)} \times \\ \left[ \delta(E' - E_0) + \frac{T(z)}{E_0} \frac{2}{u_1} I_1(u_1) \right], \quad (2.52)$$

com

$$u_1 = 2 \sqrt{T(z) \ln(E_0/E')} \quad . \quad (2.53)$$

Uma forma mais conveniente de reescrever a eq. (2.52) é invertendo a convolução em energia. Além disso, a integral envolvendo a função delta, no lado direito dessa equação, pode ser efetuada analiticamente. Feitas estas alterações e introduzindo as seguintes definições, análogas ao caso nucleônico,

$$T_\pi = \frac{(t - t_0)}{\lambda_\pi} \quad , \quad (2.54)$$

e

$$u_z = 2 \sqrt{T(z) \ln(E'/E)} \quad , \quad (2.55)$$

escrevemos a forma final, *exata*, para a solução da componente piônica da cascata induzida por um único nucleon na atmosfera:

$$F_{\pi}(E, E_0, t, t_0) = \frac{\lambda_{\pi}}{\lambda_{\pi} - \lambda_N} g(E, E_0) [e^{-T_{\pi}} - e^{-T_N}] + \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} T(z) e^{-T(z)} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{2}{u_Z} I_1(u_Z) g(E', E_0) \quad (2.56)$$

## 2.4 Do Comportamento do Fluxo Integral

Quando se trata do estudo do desenvolvimento longitudinal de superfamílias da radiação cósmica, a grandeza de maior importância é o fluxo integral  $I(> E, E_0, t, t_0)$ , que determina o número de partículas com energia maior do que  $E$ , detectadas a uma certa profundidade atmosférica  $t$ .

O fluxo integral é calculado a partir do diferencial, simplesmente efetuando-se a integração em energia,

$$I_i(> E, E_0, t, t_0) = \int_E^{E_0} dE' F_i(E', E_0, t, t_0) \quad , \quad (2.57)$$

onde  $i = N, \pi, H$  representam os fluxos nucleônicos, piônicos ou hadrônicos, respectivamente.

Tomando as eqs. (2.42) e (2.56), calculados anteriormente para os fluxos diferenciais nucleônicos e piônicos, obtemos explicitamente,

$$I_N(> E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \left[ 1 + \frac{T_N}{E_0} \int_E^{E_0} dE' \frac{2}{u'_N} I_1(u'_N) \right], \quad (2.58)$$

e

$$I_{\pi}(> E, E_0, t, t_0) = I_{\pi}^{(1)}(> E, E_0, t, t_0) + I_{\pi}^{(2)}(> E, E_0, t, t_0), \quad (2.59)$$

com

$$I_{\pi}^{(1)}(> E, E_0, t, t_0) = \frac{\lambda_N}{\lambda_{\pi} - \lambda_N} [e^{-T_{\pi}} - e^{-T_N}] \int_E^{E_0} dE' g(E', E_0), \quad (2.60)$$

$$I_{\pi}^{(2)}(> E, E_0, t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} T(z) e^{-T(z)} \int_E^{E_0} dE'' \times \int_{E''}^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{2}{u'_Z} I_1(u'_Z) g(E', E_0), \quad (2.61)$$

onde definimos

$$u'_N = 2 \sqrt{T_N \ln(E_0/E')} \quad (2.62)$$

$$u'_Z = 2 \sqrt{T(z) \ln(E'/E'')} \quad (2.63)$$

Em (2.59) separamos a componente piônica em duas parcelas,  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$ , para simplicidade de cálculo.

Uma das grandes vantagens das soluções obtidas pelo método aqui empregado é a de que nos faculta a escolha livre da função de produção múltipla de partículas, representada por  $g(E/E_0)$ . A escolha mais simples corresponde a adotar o tão conhecido “scaling” de Feynman [24], traduzido matematicamente através da relação [13],

$$g(E, E_0)dE = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{E}{E_0}\right)^4 \frac{dE}{E} \quad (2.64)$$

Segundo essa expressão, uma mudança de escala nas energias  $E$  e  $E_0$  não afeta o espectro de produção múltipla, uma vez que depende exclusivamente da razão  $x = E/E_0$ . Maiores detalhes encontram-se no Apêndice C.

No Capítulo 3 discutimos a validade desta hipótese, e no Capítulo 4 analisamos outras funções de produção múltipla. Por ora, estamos interessados em adquirir uma compreensão a respeito do comportamento geral do fluxo integral, dado pelas eqs. (2.58) e (2.59), o que é conveniente seja feito adotando a dependência simples para  $g(E, E_0)$ , dada por (2.64).

Começemos analisando separadamente o fluxo integral nucleônico [23], eq. (2.58). A Figura 2.1 mostra o fluxo integral  $I_N$  em função da profundidade atmosférica  $T_N$ , também conhecido como *curva de transição*, para diferentes valores da energia de limiar  $E$ . A Figura 2.2 mostra  $I_N$  em função da energia, chamado de *espectro de energia*, para diferentes valores da profundidade  $T_N$ . Em ambos os casos e em todos aqueles seguintes, nos quais não se faz outra referência, adotamos a energia do nucleon primário como  $E_0 = 10^4$  TeV.

A Figura 2.1 revela que, para interações primárias ocorridas muito próximo ao nível de detecção ( $t_0 \rightarrow t \Rightarrow T_N \rightarrow 0$ ), é sempre possível encontrar um nucleon com energia maior do que  $E$ , qualquer que seja o valor  $E (< E_0)$ . De fato, se tomamos o limite,

$$\lim_{T_N \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{u'_N} I_1(u'_N) \right] = \lim_{u'_N \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{u'_N} I_1(u'_N) \right] = 1 \quad ,$$

de modo que na eq. (2.58),

$$\lim_{T_N \rightarrow 0} I_N = \lim_{T_N \rightarrow 0} \left[ e^{-T_N} \left\{ 1 + \frac{T_N(E_0 - E)}{E_0} \right\} \right] = 1 \quad .$$

Já a Figura 2.2 mostra que a probabilidade de encontrar um nucleon com energia maior do que um certo valor baixo (digamos, maior do que 1 TeV) é sempre grande, a menos que a cascata, tenha se desenvolvido longamente (como em  $T_N = 6$ ).

As duas Figuras mostram ainda, que quanto maior a profundidade de interação, menor a chance de encontrar nucleons muito energéticos. Na verdade, a probabilidade de encontrar nucleons com energia  $E \sim E_0$  cai exponencialmente, com  $T_N$ , pois

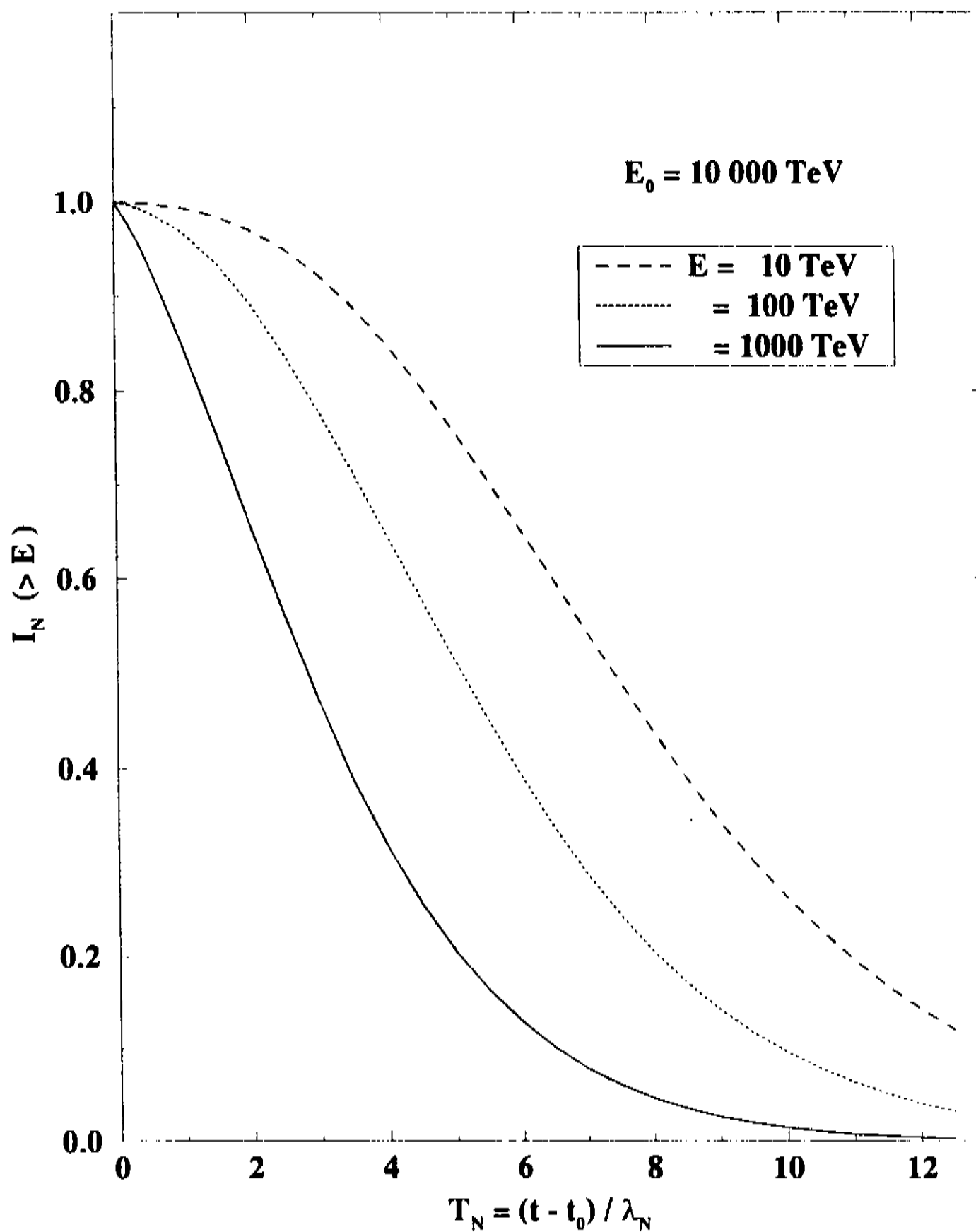


Figura 2.1: Comportamento do fluxo integral nucleônico  $I_N(> E)$ , em função da profundidade atmosférica  $T_N$  (Curvas de Transição), para diversos valores de energia de limiar  $E$ .

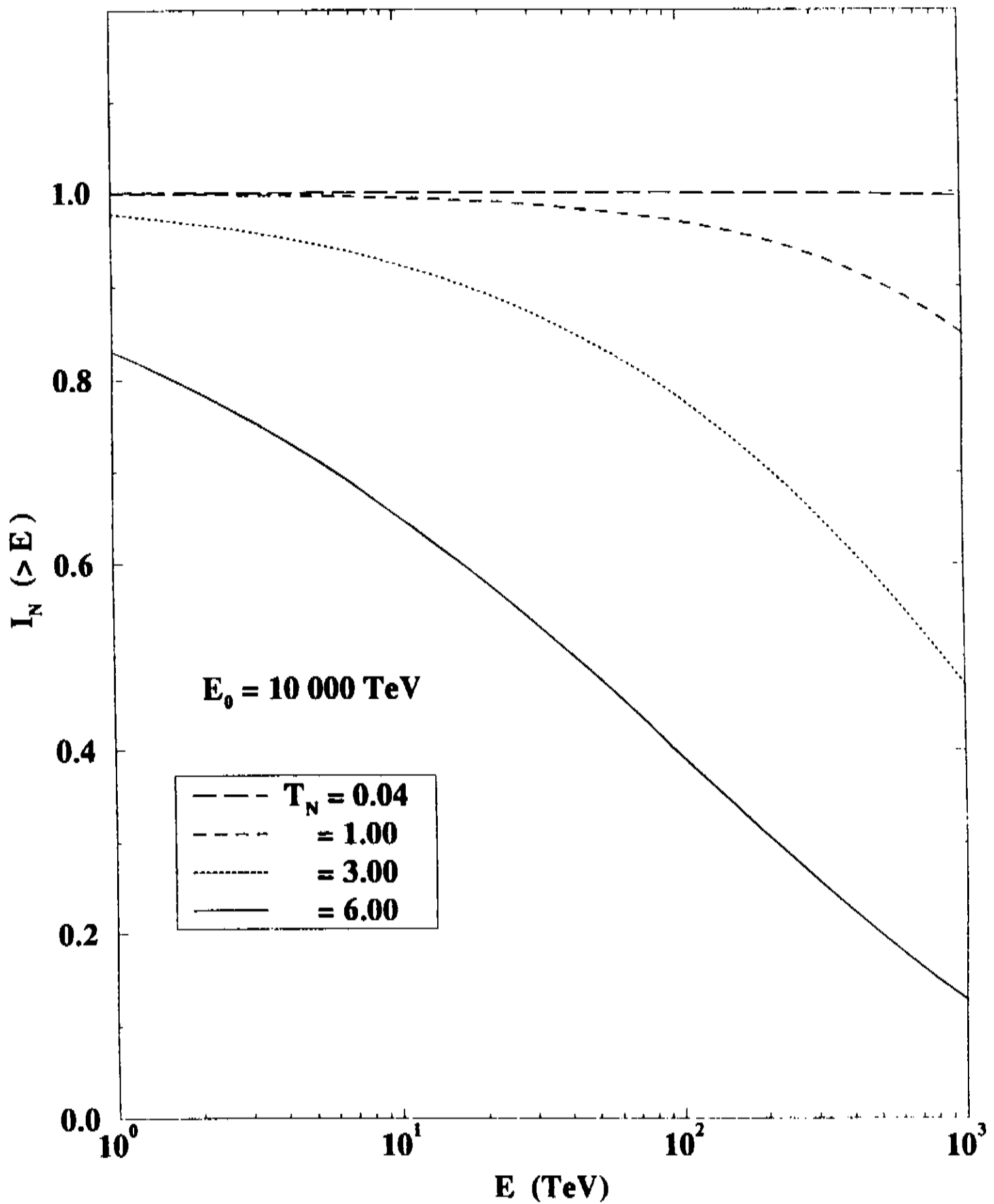


Figura 2.2: Comportamento do fluxo integral nucleônico  $I_N(> E)$ , em função da energia de limiar  $E$  (Espectro Integral de Energia), para diversos valores da profundidade atmosférica  $T_N$ .

$$E \rightarrow E_0 \Rightarrow u'_N \rightarrow 0$$

e

$$\lim_{E \rightarrow E_0} I_N = \lim_{E \rightarrow E_0} \left[ e^{-T_N} \left\{ 1 + \frac{T_N(E_0 - E)}{E_0} \right\} \right] = e^{-T_N}$$

Para abranger o fluxo piônico passamos o eixo das ordenadas para escala logarítmica, nos gráficos a seguir. As Figuras 2.3 e 2.4 mostram as curvas de transição para as componentes  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$  do fluxo integral piônico, para energias  $E$  bem diferentes, respectivamente  $E = 10^2$  TeV e  $E = 10^{-2}$  TeV. Em ambos os gráficos mostramos também o fluxo piônico resultante  $I_\pi$ , eq. (2.59).

A Figura 2.3 mostra que após certa profundidade de interação a chance de se encontrar píons muito energéticos vai diminuindo uma vez que os píons vão colidindo e perdendo energia no desenvolvimento da cascata. Por outro lado, se a energia de corte é muito baixa, como na Figura 2.4 sempre haverá certo número de píons com energia maior do que  $E$ , antes e depois dessas colisões.

Um aspecto interessante em ambas as Figuras 2.3 e 2.4 é a predominância da componente  $I_\pi^{(2)}$  sobre  $I_\pi^{(1)}$  para quase todos os valores de  $T_N$ , exceto quando a profundidade está entre 0 e 1 unidades de livre caminho médio. Os gráficos mostram que o cruzamento das curvas de  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$  se dá exatamente nas proximidades de 1 unidade de livre caminho médio. De fato, voltando à eq. (2.52) da seção anterior, constatamos que a origem do termo  $I_\pi^{(1)}$  está na convolução da função  $\delta(E' - E_0)$  com o espectro de produção  $g(E, E')$ , significando que o termo descreve píons produzidos pela colisão do nucleon primário e portanto estes píons são gerados preferencialmente dentro do intervalo  $T_N = 1$ , em unidades de livre caminho médio nucleônico.

Este aspecto da predominância de  $I_\pi^{(2)}$  sobre  $I_\pi^{(1)}$ , independente da energia, para  $T_N \gg 1$  está também representado nas Figuras 2.5, 2.6 e 2.7 que apresentam o espectro de energia piônico, em suas componentes, para três valores distintos de profundidade percorrida,  $T_N = 2, 6$  e  $12$ .

Podemos agora confrontar o fluxo nucleônico ao piônico. As Figuras 2.8 e 2.9 representam as curvas de transição para  $E = 10^{-2}$  TeV e  $10^2$  TeV, respectivamente. Em ambos os gráficos notamos a predominância do fluxo piônico sobre o nucleônico, na constituição da resultante hadrônica. O comportamento do fluxo total é completamente governado pela componente piônica. Quando a energia de limiar é baixa, Figura 2.8, coleta-se grande número de píons, mas o nucleon líder também está sempre presente, pois  $I_N(> E)$  não se afasta muito da reta que passa por  $I(> E) = 1$ . Quando a energia de limiar é mais alta, Figura 2.9, não se espera detectar tantas partículas com energia acima deste valor. Após algumas unidades de livre caminho médio de interação a curva de  $I_\pi(> E)$  apresenta um



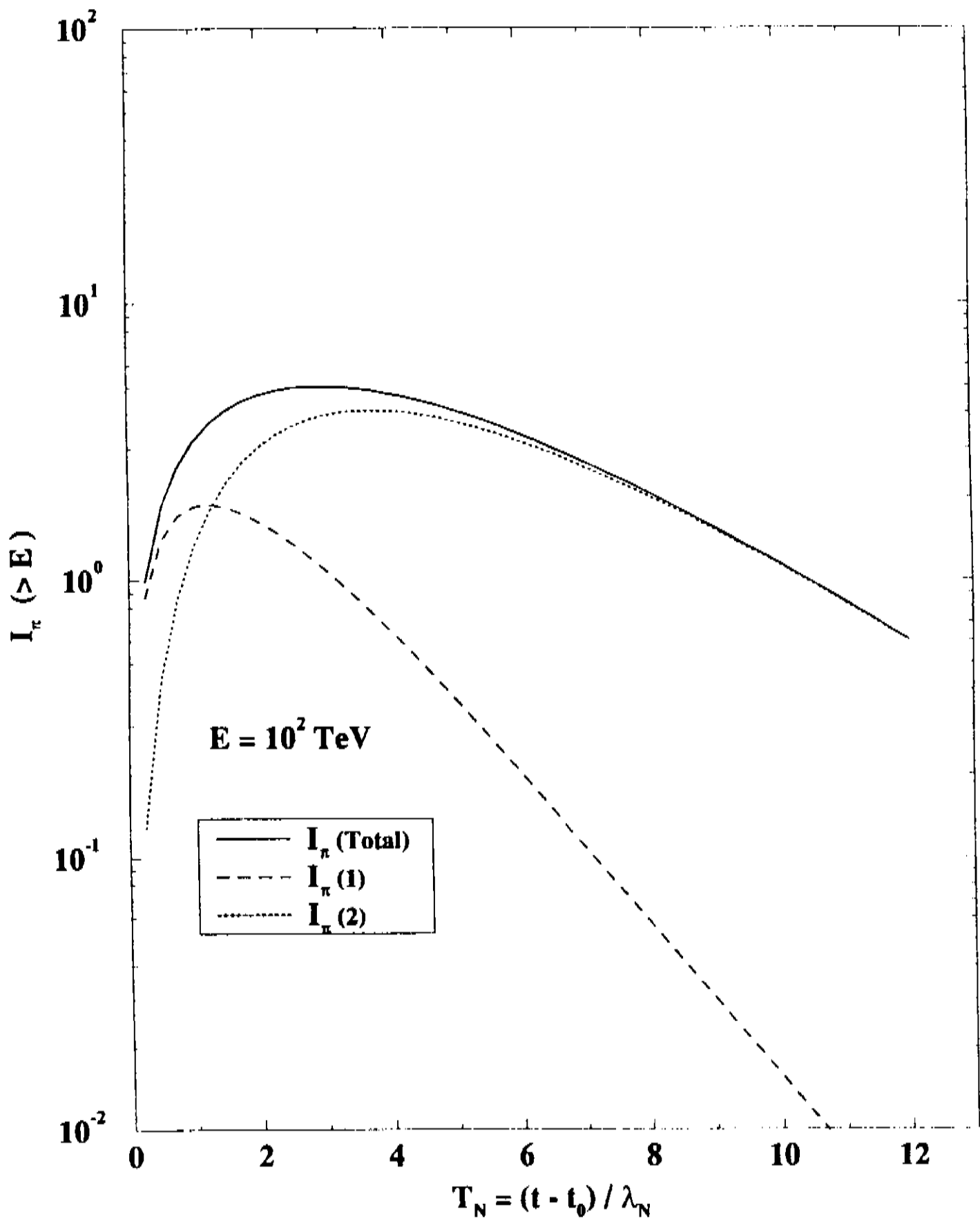


Figura 2.3: Curvas de Transição do fluxo integral piônico  $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$ , para a energia  $E = 10^2$  TeV.

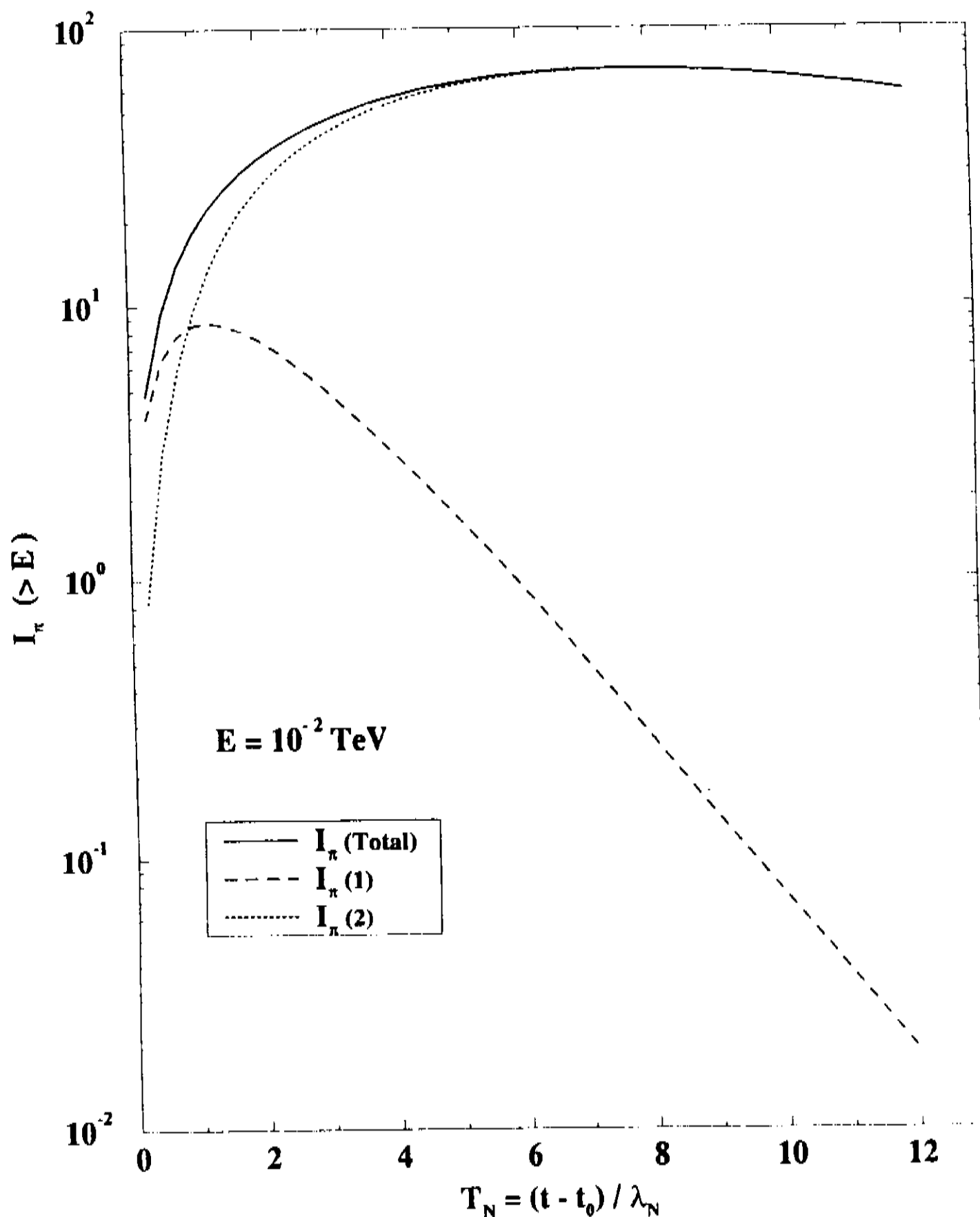


Figura 2.4: Curvas de Transição do fluxo integral piônico  $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$ , para a energia  $E = 10^{-2} \text{ TeV}$ .

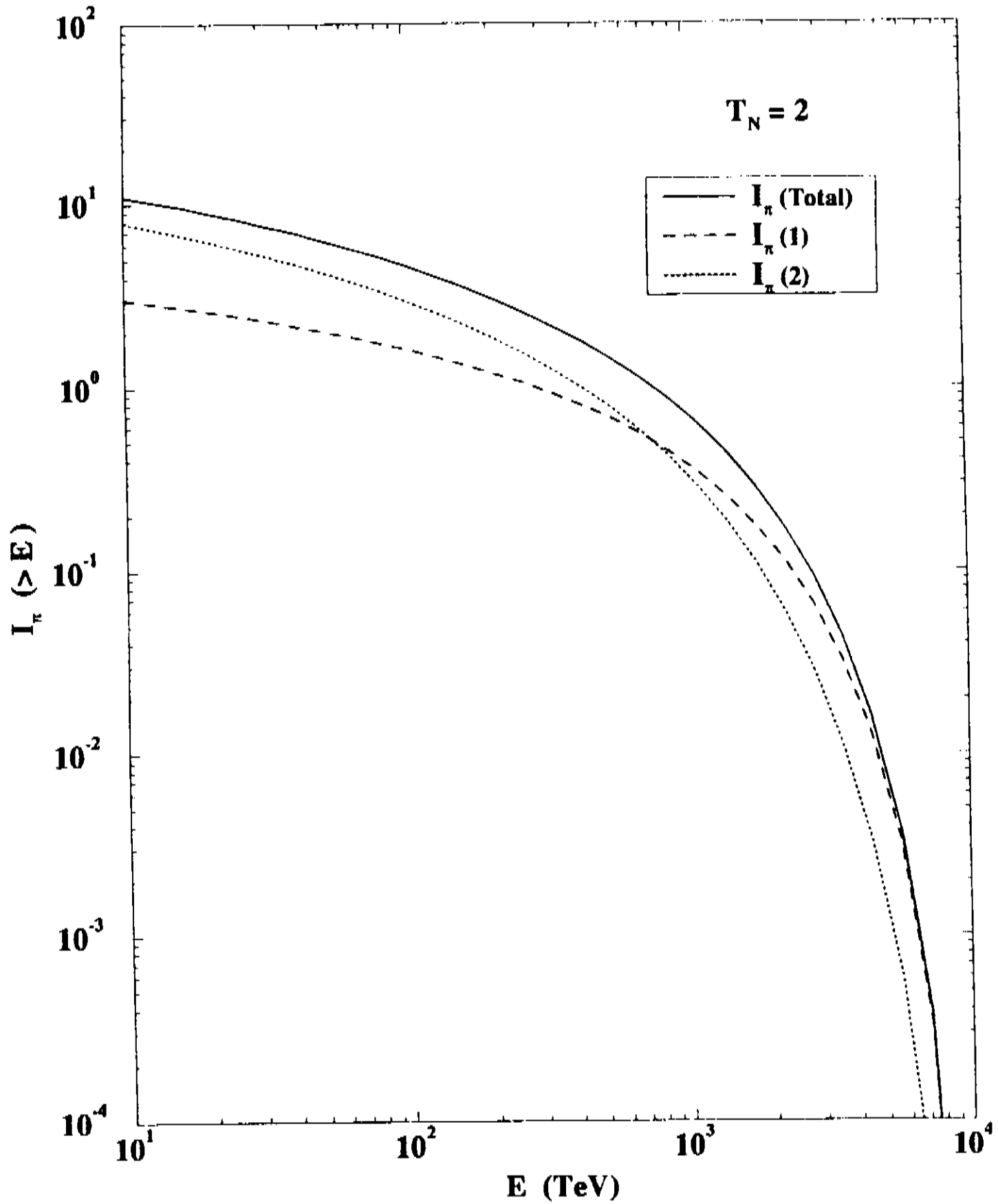


Figura 2.5: Espectro de Energia do fluxo integral piônico  $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$ , para a profundidade  $T_N = 2$ .

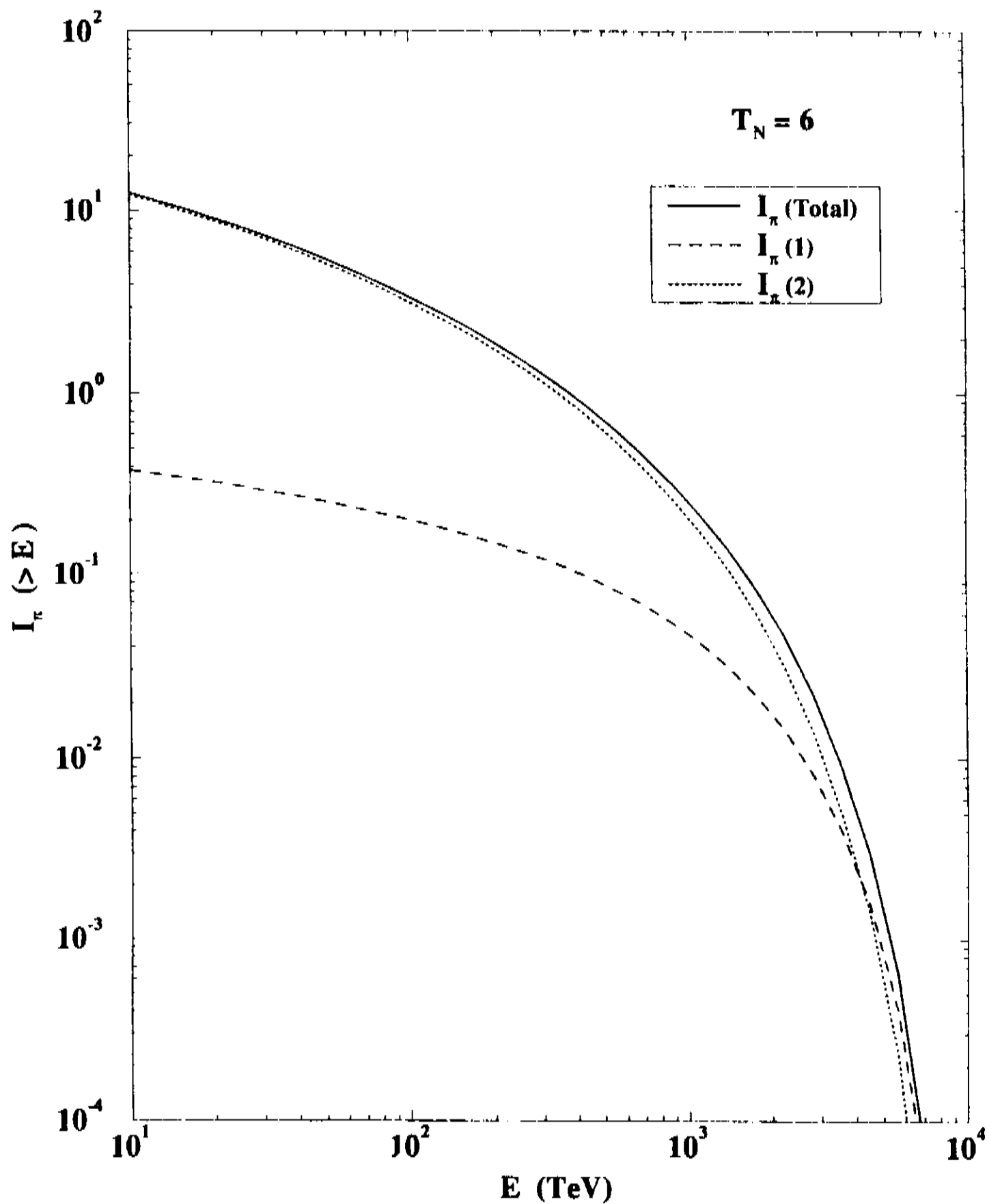


Figura 2.6: Espectro de Energia do fluxo integral piônico  $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$ , para a profundidade  $T_N = 6$ .

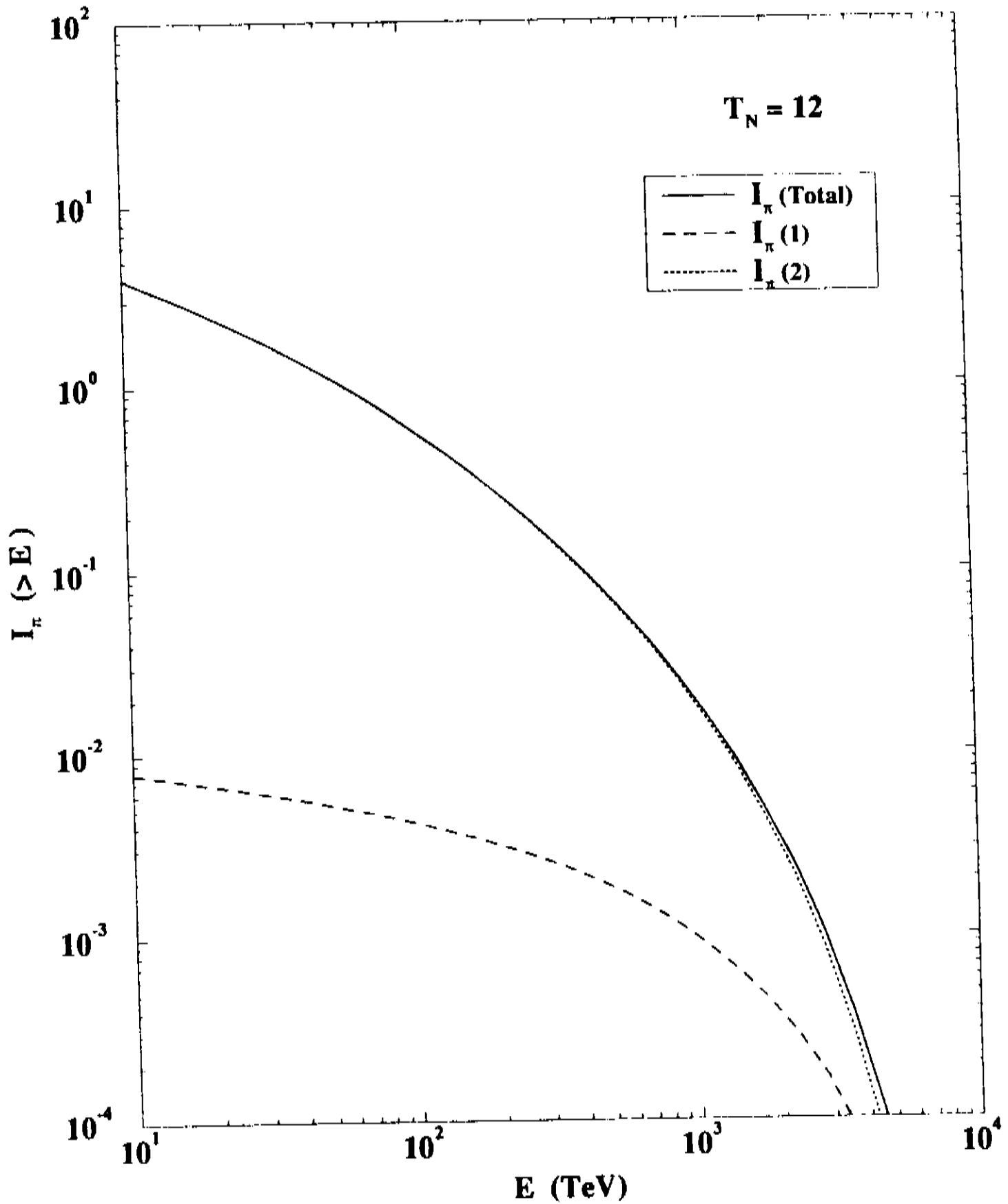


Figura 2.7: Espectro de Energia do fluxo integral piônico  $I_\pi(> E)$ , com suas parcelas  $I_\pi^{(1)}$  e  $I_\pi^{(2)}$ , para a profundidade  $T_N = 12$ .

máximo e decresce, pois a energia está sendo distribuída para partículas menos energéticas. Também a probabilidade de encontrar um nucleon nestas condições vai diminuindo, sensivelmente.

A supremacia do fluxo piônico sobre o nucleônico também fica evidente na análise do espectro de energia, Figuras 2.10 e 2.11, exceto para energias  $E$  bem próximas de  $E_0$ , quando então as curvas se cruzam. Com o aumento da profundidade percorrida  $T_N$ , diminui muito a chance de encontrar nucleons energéticos e, portanto, as curvas se cruzam a partir de energias de limiar cada vez maiores.

A coerência destes resultados, para o comportamento do fluxo integral, nos faz crer que as soluções para o desenvolvimento da cascata hadrônica induzida por um único nucleon na atmosfera, dadas pelas eqs. (2.42) e (2.56), são expressões razoáveis e encontram-se dentro do que seria esperado.

Com efeito, as curvas de transição nucleônicas e piônicas, bem como o espectro de energia hadrônico estão em acordo *qualitativo* com os resultados de Ohsawa e Yamashita [13] e os cálculos são efetuados pelo método do ponto de sela, cujas soluções são expressas na forma de Transformadas de Mellin.

Entretanto, como veremos no capítulo seguinte, é preciso comparar *quantitativamente* a solução analítica com os dados experimentais de superfamílias, detectadas em câmaras de emulsão.

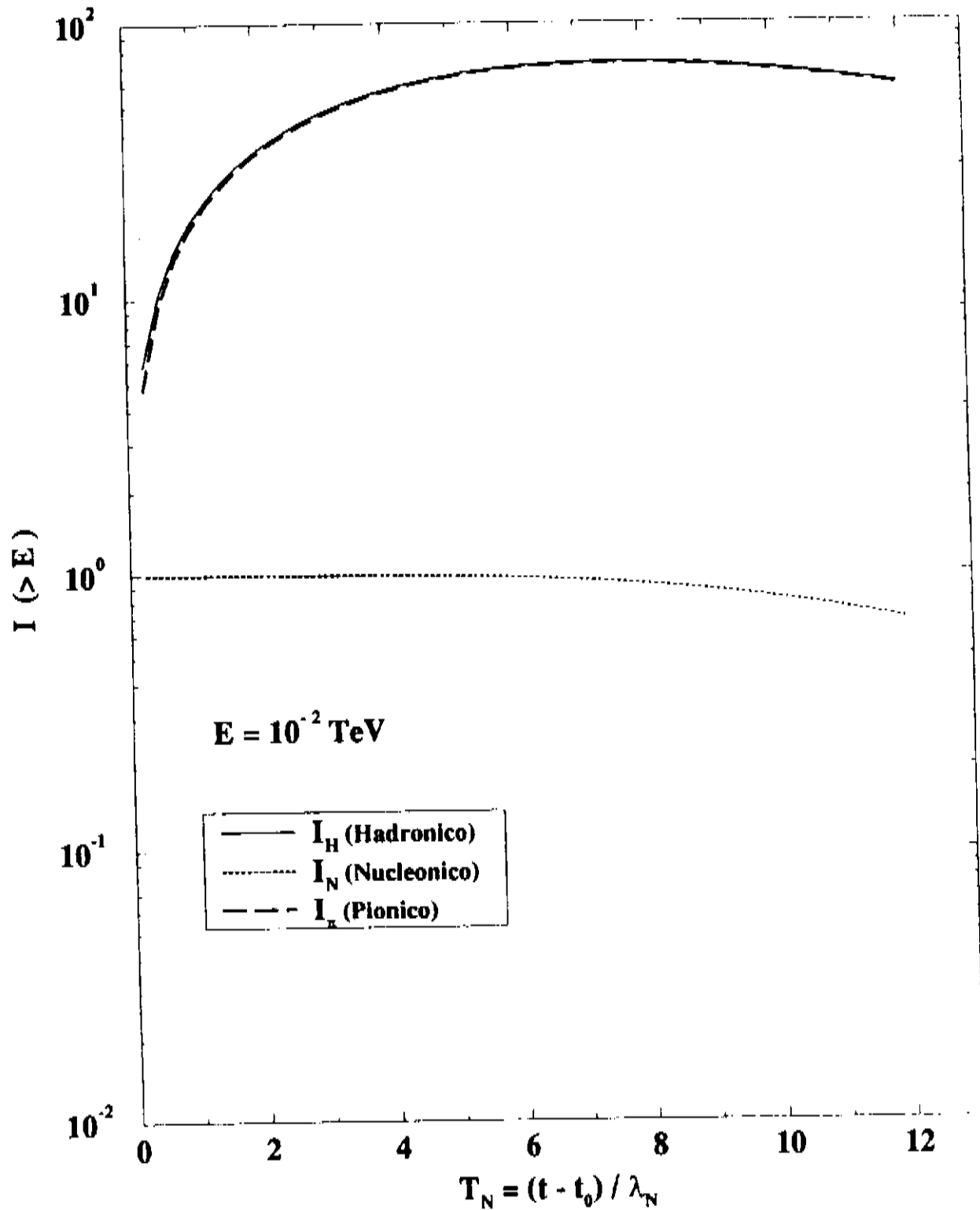


Figura 2.8: Curvas de Transição do fluxo integral hadrônico  $I_H(> E)$ , com suas parcelas  $I_N$  e  $I_\pi$ , para a energia  $E = 10^{-2} \text{ TeV}$ .

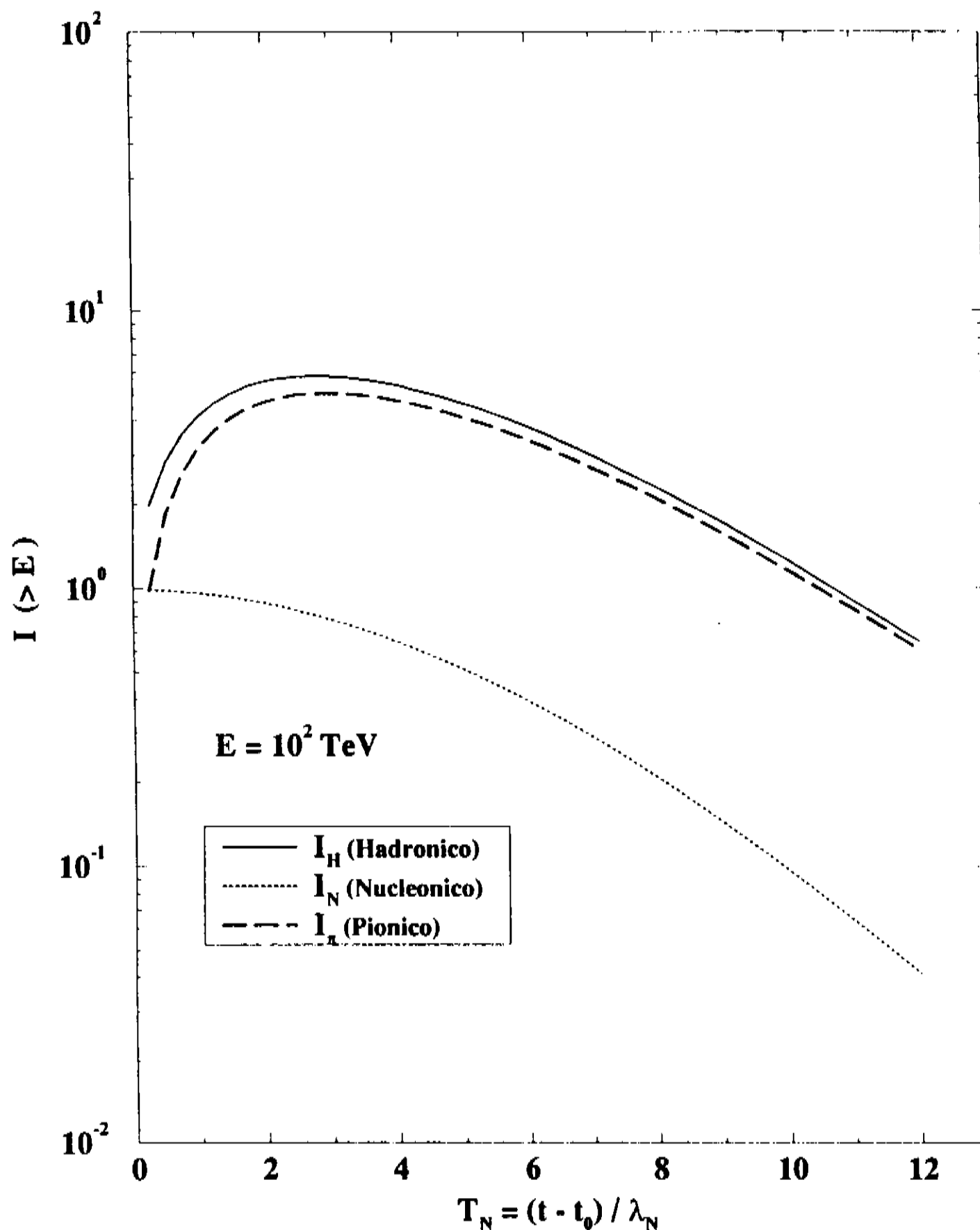


Figura 2.9: Curvas de Transição do fluxo integral hadrônico  $I_H(> E)$ , com suas parcelas  $I_N$  e  $I_\pi$ , para a energia  $E = 10^2$  TeV.



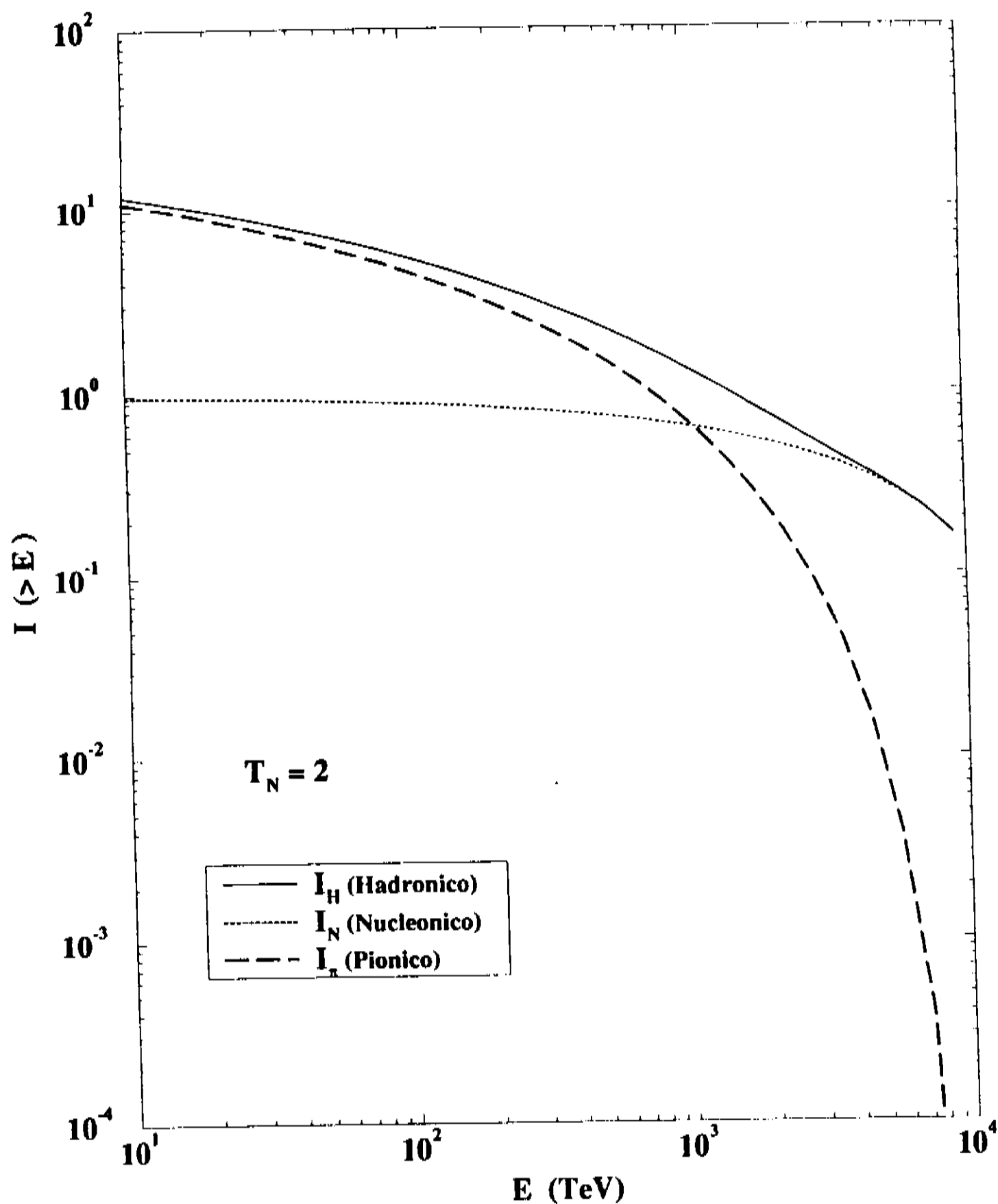


Figura 2.10: Espectro de Energia do fluxo integral hadrônico  $I_H(> E)$ , com suas parcelas  $I_N$  e  $I_\pi$ , para a profundidade  $T_N = 2$ .

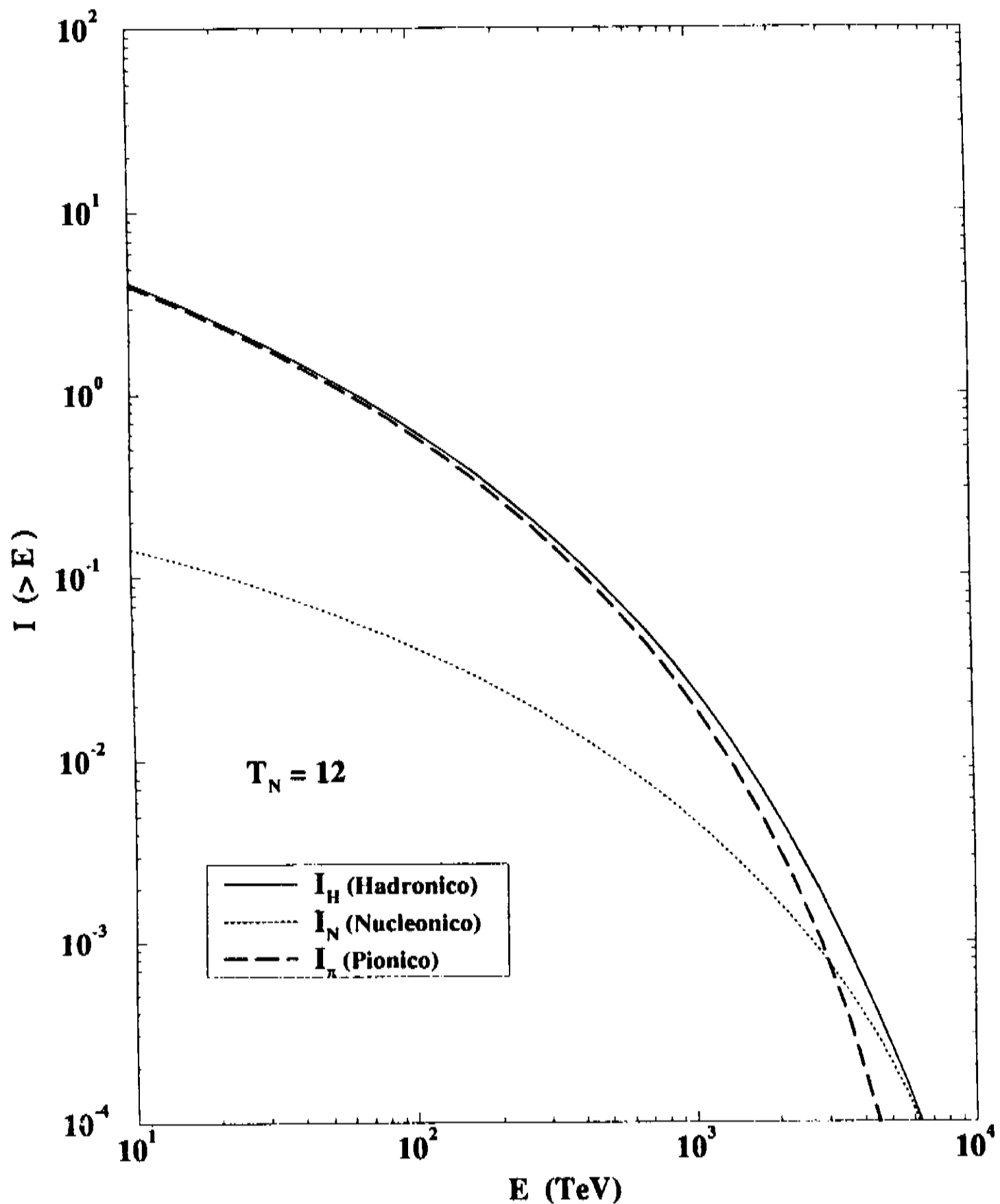


Figura 2.11: Espectro de Energia do fluxo integral hadrônico  $I_H(> E)$ , com suas parcelas  $I_N$  e  $I_\pi$ , para a profundidade  $T_N = 12$ .



# Capítulo 3

## Das Superfamílias Hadrônicas

### 3.1 Dos Experimentos em Câmaras de Emulsão

Uma “família” da radiação cósmica surge quando uma única partícula primária (nucleon ou núcleo) penetra na atmosfera e interage com nucleons do ar, produzindo hádrons secundários, na sua grande maioria píons. Estes hádrons, por sua vez, continuam atravessando a atmosfera, sofrendo novas interações e produzindo mais partículas. Os píons neutros produzidos, decaindo em partículas gama, dão lugar à componente eletromagnética da cascata. Os nucleon e mésons sobreviventes correspondem à componente hadrônica da cascata. A esse conjunto de partículas, todos descendendo da mesma partícula primária, é que se dá o nome de família de radiação cósmica [25]. Em câmaras de emulsão ela aparece na forma de um feixe de chuviros praticamente paralelos. Muitas vezes é possível aplicar métodos de triangulação [26] para determinar aproximadamente o ângulo zenital de incidência na câmara e a posição, acima da câmara, onde teve início o desenvolvimento da cascata.

Na realidade, a câmara de emulsão nuclear registra apenas chuviros eletromagnéticos. Contudo, um hádron pode ser detectado indiretamente, uma vez que a produção de píons carregados é sempre acompanhada de  $\pi^0$ , que decaem formando um novo chuviro eletromagnético, passível de ser medido. Existem métodos objetivos que permitem distinguir, numa emulsão nuclear ou placa de Raio-X, um chuviro de gamas produzidos diretamente pelo decaimento de  $\pi^0$  de outro chuviro, proveniente da componente puramente eletromagnética da cascata. Dependendo dos critérios adotados, a identificação entre hádrons e gamas atinge de 90 a 95% de confiabilidade [27].

A fração da energia hadrônica em forma de raios gama  $E_h^{(\gamma)}$  é chamada propriamente de energia hadrônica visível e está relacionada à energia original  $E_h$  através da expressão

$$E_h^\gamma = \langle k_\gamma \rangle E_h \quad ,$$

onde  $\langle k_\gamma \rangle$  é a inelasticidade média de gamas. Esse parâmetro não está ainda bem definido [28] e sua variação está limitada ao intervalo  $0,2 \leq \langle k_\gamma \rangle \leq 0,4$ . Em nosso estudo adotaremos o valor bastante utilizado, de  $\langle k_\gamma \rangle = 0,25$ .

A energia total visível  $\sum E_{vis}$  é definida como a soma da energia total da componente eletromagnética  $\sum E_\gamma$  com a energia total hadrônica visível,

$$\sum E_{vis} = \sum E_\gamma + \sum E_h^{(\gamma)}$$

Quando  $\sum E_{vis}$  de uma medida em câmaras de emulsão se encontra na faixa de  $10^3 - 10^4$  TeV, este evento é conhecido como “superfamília” e vem geralmente acompanhado por um “halo”, ou seja, um escurecimento quase uniforme no filme de Raio-X, ao redor e sobre o feixe central. Na seção seguinte apresentamos as principais características de algumas destas famílias e incluímos também dois importantes eventos conhecidos como Centauros.

## 3.2 De Superfamílias da Radiação Cósmica

Dos diversos eventos detectados em câmaras de emulsão a altitudes de montanha, com  $\sum E_{vis} > 10^{15}$  eV, apenas alguns possuem informações suficientes a respeito da componente hadrônica. Selecionamos algumas destas superfamílias com energia total visível maior do que 1000 TeV: duas provenientes da Colaboração Pamir, denominadas “C141C4836” e “P3’-C1-B90”, e mais duas da Colaboração Brasil Japão, denominadas “Ursa Major” e “Mini-Andromeda III”. Apresentamos a seguir a descrição destes eventos em ordem crescente de energia visível hadrônica. Em seguida descrevemos também os eventos Centauro I e Centauro VII, respectivamente o primeiro e o último dos eventos ditos exóticos observados no Monte Chacaltaya pela Colaboração Brasil-Japão.

**P3’-C1-B90** - Detectado na câmara P3’ (“Joint Chamber”) em Pamir, no período 1983-1985, e analisado no Japão [29]. Esse evento espetacular possui o mais intenso halo detectado em Pamir, cuja energia total visível chega a 19000 TeV, cobrindo um raio de até 3cm na chapa de Raio-X. Como efetuamos a análise unidimensional das equações de difusão, a parte que mais nos interessa é a componente hadrônica da parte central (“off-halo”), cuja energia hadrônica total visível equivale apenas a  $\sum E_h^{(\gamma)} = 229$  TeV.

**C141G4836** - Detectado na câmara de carbono C141 do experimento Pamir [30] no período 1985-1986, com um ângulo zenital incidente estimado em  $\sim 35^\circ$ . Apesar de muito energético, com  $\sum E_{vis} \sim 2290$  TeV (20% dos quais na componente hadrônica) essa superfamília se distingue por *não* apresentar um halo significativo.

**Ursa Maior** - Detectado na câmara N<sup>o</sup> 15 do Monte Chacaltaya, após 300 dias de exposição no período 1969-1970 [26], com ângulo zenital incidente  $\sim 25^\circ$ . A energia hadrônica visível é de 830 TeV. Sua componente hadrônica é considerada excepcionalmente rica pois corresponde a 38% da energia total visível, fração que na maioria das famílias não excede 30%, a menos que se trate de eventos Centauros.

**Mini-Andrômeda III** - Detectado na câmara N<sup>o</sup> 19 em Chacaltaya, após 680 dias de exposição [27], com ângulo zenital incidente  $\sim 53^\circ$ . Apresenta um halo apreciável, com raio médio de 2cm (no ponto em que a densidade de traços eletrônicos é de  $10^6/cm^2$ ) e possui energia total  $\sum E_{vis}^{(halo)} \sim 5100$  TeV. A Fig.3.1 mostra uma reprodução fotográfica da parte central de Mini-Andromeda III no filme de Raio-X, numa profundidade da câmara onde o número total de elétrons do halo atinge o máximo (cerca de  $2,5 \times 10^7/cm^2$ ). Limitando-se à parte central ("Shower Spots"), a energia total visível é de  $\sim 4520$  TeV, dos quais nada menos do que 44% encontram-se na componente hadrônica ( $\sum E_h^{(\gamma)} = 1986$  TeV).

**Eventos Centauros** - Certas famílias de radiação cósmica apresentam significativo desequilíbrio na relação entre as componentes hadrônicas e eletromagnéticas. Os eventos são ditos exóticos pois parecem indicar que um particular tipo de interação nuclear é responsável pela produção de bárions em excesso sem que haja uma emissão significativa de mésons. Se a multiplicidade é considerável, o evento recebe o nome de Centauro. Para efeito de comparação selecionamos os eventos chamados de Centauro I [25] e de Centauro VII [31], ambos detectados no Monte Chacaltaya. Centauro I, observado na câmara N<sup>o</sup> 15 em 1972, com incidência quase vertical, não representa um evento muito energético ( $\sum E_{vis} = 330$  TeV  $\ll 1000$  TeV), entretanto foi o primeiro evento exótico a ser observado e possui um desequilíbrio extraordinário: 97% da energia visível encontra-se na componente hadrônica ( $\sum E_h^{(\gamma)} = 321$  TeV). Estima-se que a interação primária teria ocorrido a 50 – 65m acima da câmara. Centauro VII, observado na câmara N<sup>o</sup> 21, é um evento mais espetacular no que diz respeito às energias:  $\sum E_{vis} = 4507$  TeV; dos quais 52% estão na componente hadrônica. A interação primária foi estimada como tendo ocorrido de 2 a 3 Km acima da câmara. É interessante notar que esse evento apresenta um tênue halo, com energia da ordem de 10% da energia total visível [32].

A Tabela 3.1 contém algumas informações adicionais a respeito destas famílias, como o número de hádrons e gamas detectados ( $N_h$  e  $N_\gamma$ ), a energia total hadrônica (visível) e eletromagnética, a energia total visível (da parte central), que é a soma das outras duas, e ainda a fração de energia visível correspondente à componente hadrônica,

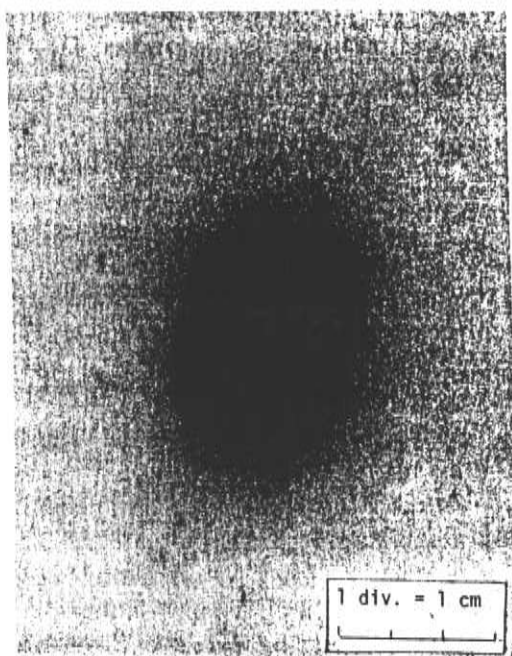


Figura 3.1: Fotografia da parte central de Mini-Andromeda III observada no filme de Raio-X, no ponto em que o halo atinge densidade eletrônica máxima (Ref.[27]) .

$$Q_h = \frac{\sum E_h^{(\gamma)}}{\sum E_{vis}}$$

Tabela 3.1: Super-Famílias da Radiação Cósmica

| EVENTO       | $N_h$              | $N_\gamma$         | $\sum E_h^\gamma$<br>(TeV) | $\sum E_\gamma$<br>(TeV) | $\sum E_{vis}$<br>(TeV) | $Q_h$ |
|--------------|--------------------|--------------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-------|
| P3'-C1-B90   | 17 <sup>(1)</sup>  | 87 <sup>(1)</sup>  | 229                        | 813                      | 1042                    | 22%   |
| C141G4836    | 50 <sup>(2)</sup>  | 346 <sup>(2)</sup> | 482                        | 1807                     | 2289                    | 21%   |
| Ursa Maior   | 84 <sup>(3)</sup>  | 430 <sup>(3)</sup> | 830                        | 1344                     | 2174                    | 38%   |
| Mini And.III | 195 <sup>(3)</sup> | 537 <sup>(3)</sup> | 1986                       | 2531                     | 4517                    | 44%   |
| Centauro I   | 71 <sup>(4)</sup>  | 1 <sup>(4)</sup>   | 321                        | 9                        | 330                     | 97%   |
| Centauro VII | 73 <sup>(1)</sup>  | 284 <sup>(1)</sup> | 2328                       | 2179                     | 4507                    | 52%   |

(1) Com  $E_\gamma$  e  $E_h^\gamma > 4\text{TeV}$ (2) Com  $E_\gamma$  e  $E_h^\gamma > 2\text{TeV}$ (3) Com  $E_\gamma$  e  $E_h^\gamma > 1\text{TeV}$ 

(4) Estimado no topo da câmara

A Figura 3.2 apresenta o espectro de energia hadrônica para as famílias “P3'-C1-B90” e “C141G4836”, de Pamir, que fica a uma profundidade atmosférica  $t_f = 596\text{g/cm}^2$  (ou  $t_f/\lambda_N = 7,45$  em unidades de livre caminho médio nucleônico).

A Figura 3.3 reúne as famílias “Ursa Maior” e “Mini-Andromeda III” detectadas no Monte Chacaltaya, à profundidade  $t_f = 540\text{g/cm}^2$  (ou  $t_f/\lambda_N = 6,75$ ). Em ambos os casos representamos o espectro do fluxo integral na forma fracionária, isto é, em termos da razão  $f_h$  dada por

$$f_h = \frac{E_h^{(\gamma)}}{\sum E_h^{(\gamma)}}$$

A Figura 3.4 apresenta o espectro integral, na forma fracionária, para os eventos Centauro I e VII.



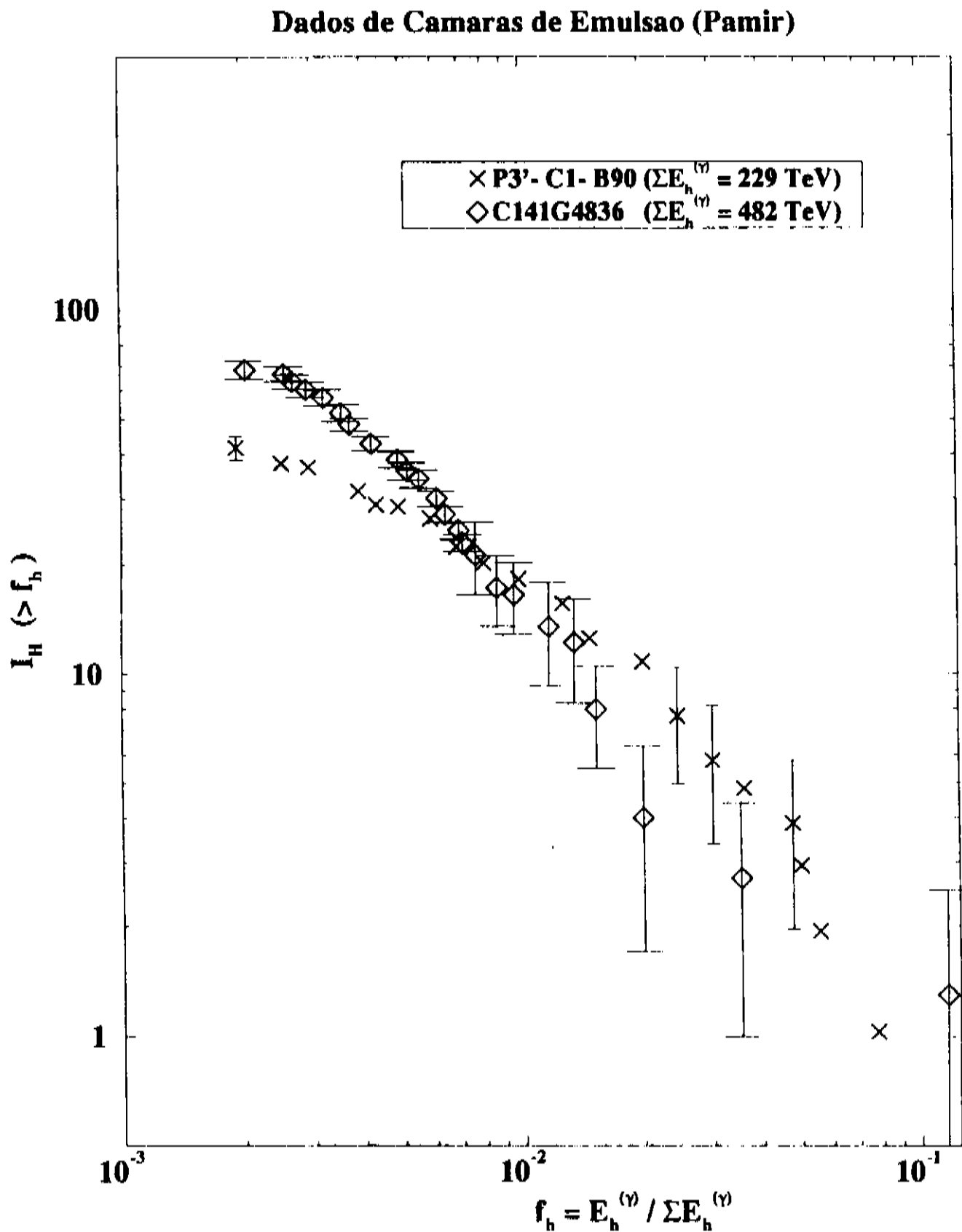


Figura 3.2: Espectro Integral de Energia Hadrônica das superfamílias “P3'-C1-B90” e “C141G4836”, detectadas em câmaras de emulsão, pela Colaboração Pamir (Refs. [29,30]).

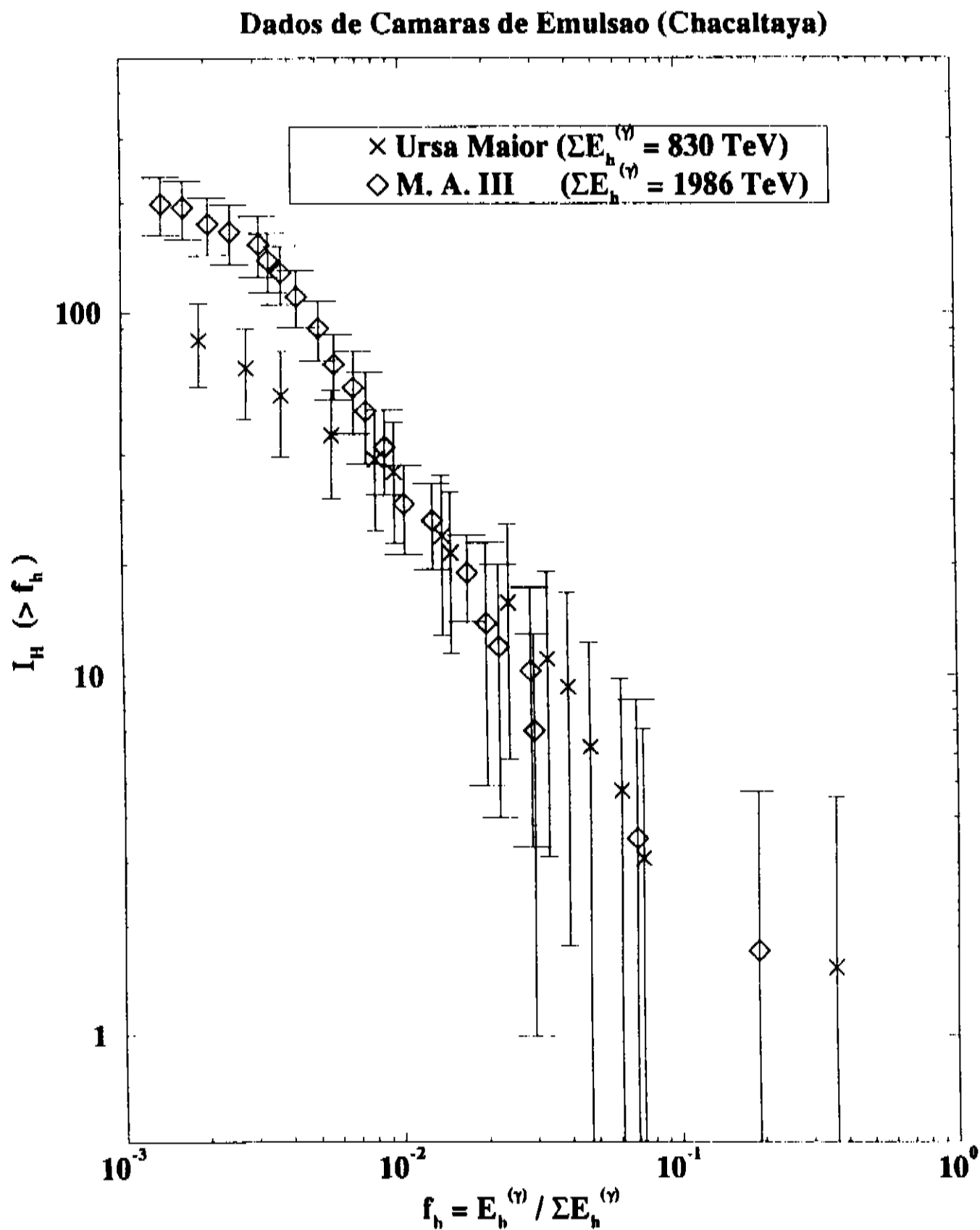


Figura 3.3: Espectro Integral de Energia Hadrônica das superfamílias “Ursa Maior” e “Mini-Andromeda III”, detectadas em câmaras de emulsão, pela Colaboração Brasil-Japão, no Mt. Chacaltaya (Ref.[27]).

## Dados de Camaras de Emulsao (Chacaltaya)

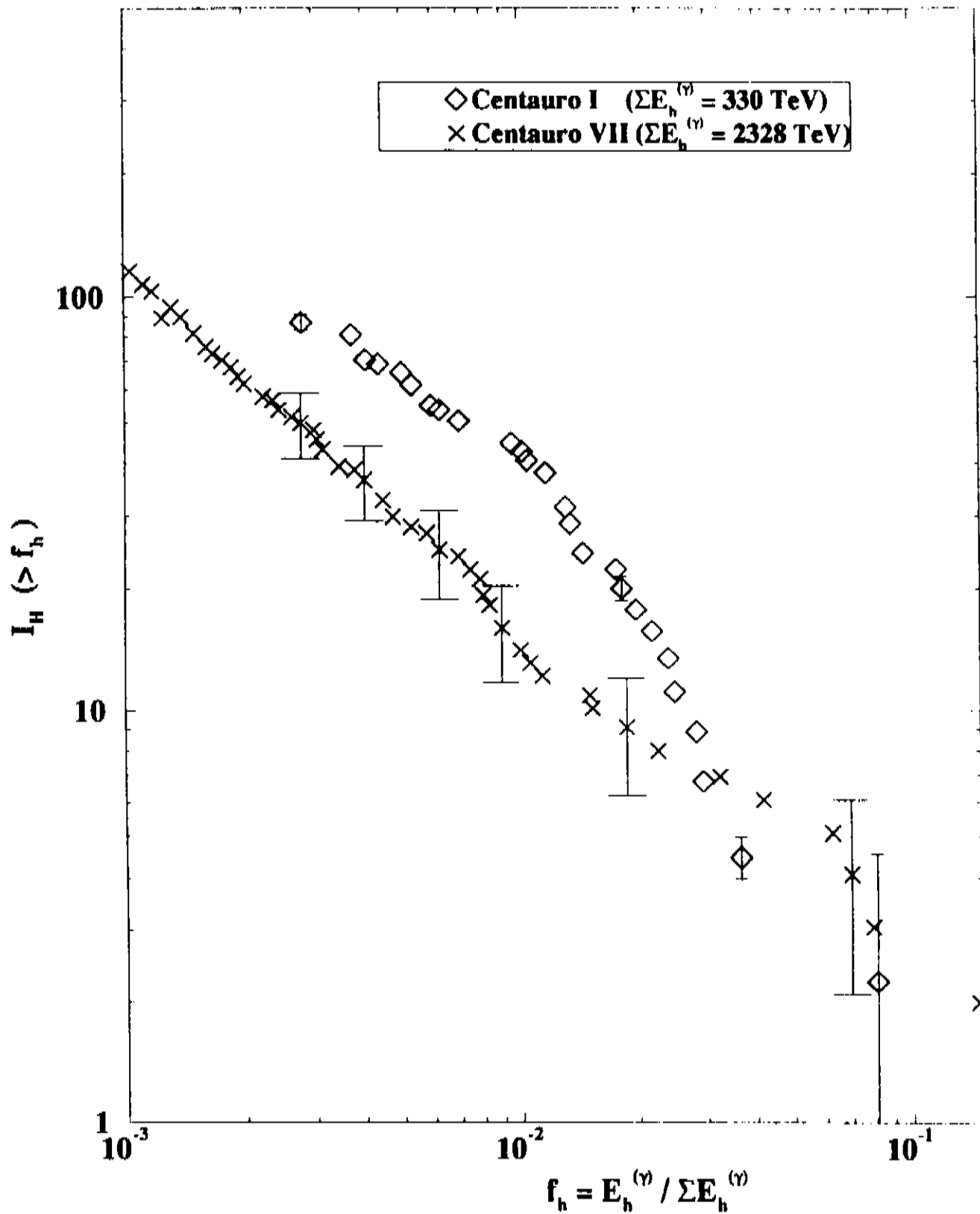


Figura 3.4: Espectro Integral de Energia Hadrônica dos eventos “Centauro I” e “Centauro VII”, detectados em câmaras de emulsão, pela Colaboração Brasil-Japão, no Mt. Chacaltaya (Refs. [25,31]).

### 3.3 Do Ajuste com “Scaling” de Feynman

Vamos agora analisar os dados experimentais de câmaras de emulsão para as famílias hadrônicas por meio das expressões (2.58)-(2.61), obtidas no Capítulo 2, para o fluxo integral nucleônico e piônico.

Procedemos à análise dos espectros de energia, exemplificados na seção anterior, ajustando valores para a energia visível do nucleon primário  $E_0^{(\gamma)}$  e para a profundidade atmosférica de interação primária  $t_0$ . Na prática, em lugar de  $t_0$  ajustamos  $T_N = (t - t_0)/\lambda_N$ , que determina a altura relativa acima da câmara em que teve início a cascata (em unidades de  $\lambda_N$ ) uma vez que a profundidade de detecção  $t$  é conhecida.

Para realizar o ajuste destes parâmetros, utilizamos a rotina de minimização chamada D506-MINUIT, da biblioteca GENLIB do CERN.

Como exemplo apresentamos apenas um caso de Pamir e um de Chacaltaya, respectivamente “C141G4836” (Fig.3.5) e “Ursa Maior” (Fig.3.6), os demais tendo demonstrado um comportamento análogo.

Notamos em primeiro lugar, que não há uma boa concordância entre as curvas teóricas e os dados experimentais. Em segundo lugar, as energias ajustadas para o primário são exageradamente elevadas,  $E_0^{(\gamma)} = 105000$  TeV para o evento “C141G4836” e 84200 TeV para “Ursa Maior”, ou seja entre 100 e 200 vezes a energia total hadrônica visível! Por fim, os valores ajustados para a profundidade de interação correspondem, nos dois casos, a toda a atmosfera.

Para compreender essa inadequação, é preciso rever as premissas utilizadas no cálculo da solução analítica final. Supondo-se que as hipóteses de trabalho descritas no Capítulo 2 sejam mantidas, por serem as mais simples na descrição do fenômeno em pauta, devemos concentrar nossa atenção nos elementos introduzidos posteriormente. O mais importante é sem dúvida a expressão de  $g(E, E_0)$ , equação (2.64), que descreve a produção múltipla de partículas dentro do cenário do “scaling” de Feynman. De fato, a hipótese de “scaling” foi confirmada por experimentos de aceleradores na região de “baixas” energias ( $\sqrt{s} \leq 5$  GeV). Contudo, medidas posteriores nas regiões do Collider, com energias no sistema do centro de massa  $\sqrt{s} \sim 200 - 900$  GeV, apontam claramente para uma quebra de “scaling” [33]. Mesmo nas regiões do Fermilab ( $\sqrt{s} \sim 20$  GeV) ou do ISR ( $\sqrt{s} \sim 20 - 60$  GeV), já apareciam evidências de quebra de “scaling” [34], não só na região “central” ( $x \simeq E/E_0 < 0.05$ ) como na região de “fragmentação” ( $x > 0.05$ ).

No Capítulo 4 apresentamos algumas sugestões para introduzir a quebra de “scaling” na produção múltipla de partículas carregadas, de forma a atender satisfatoriamente aos dados de distribuição de densidade em pseudo-rapidez, medidos em aceleradores. Como veremos, a mudança na função  $g(E, E_0)$  forçará que se procurem alternativas para a distribuição de elasticidade  $f(\sigma)$ , até aqui adotada como sendo uniforme.

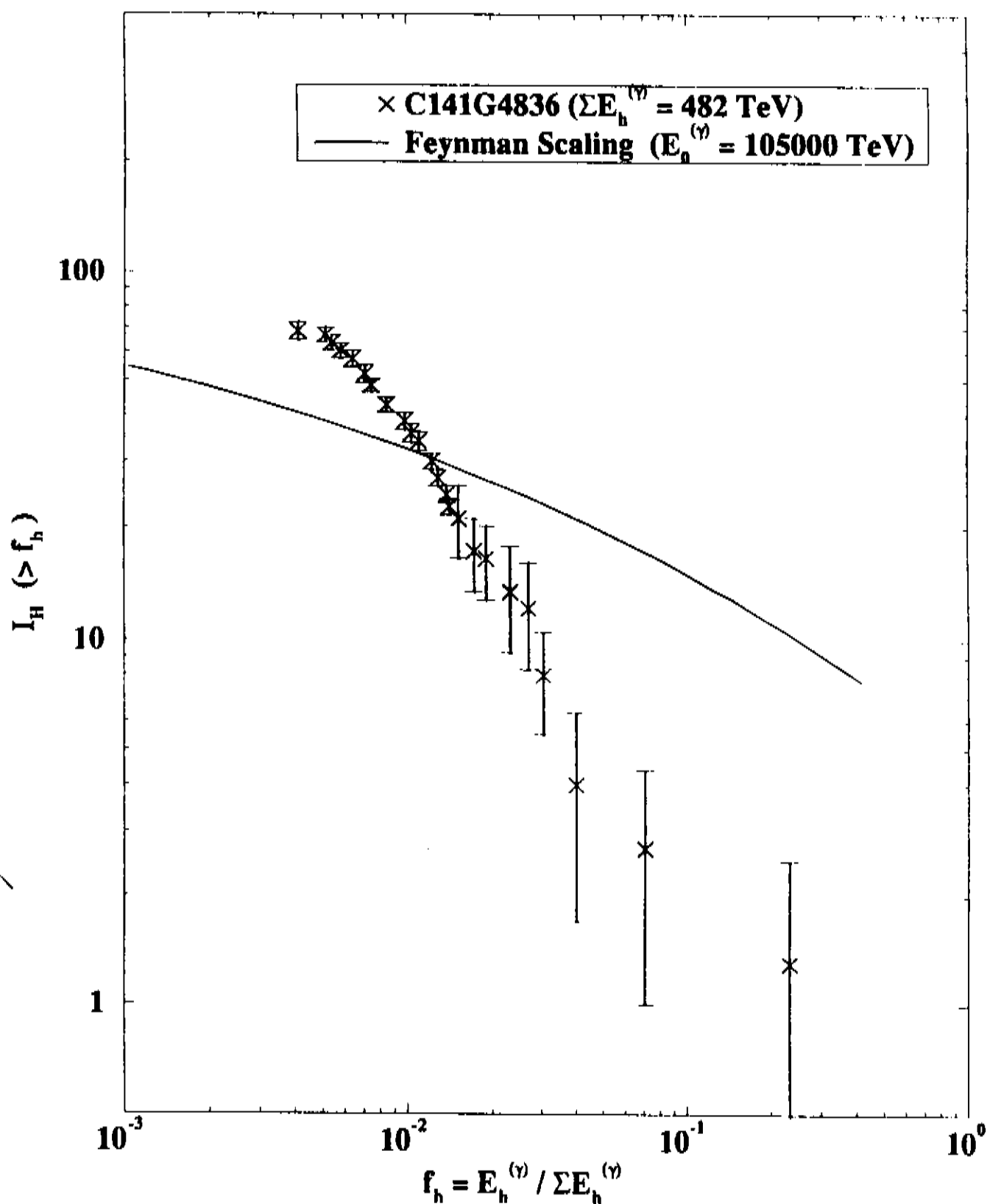


Figura 3.5: Tentativa de ajuste do Espectro Integral de Energia Hadrônica de “C141G4836” (Pamir), com “scaling” de Feynman na produção múltipla de partículas.

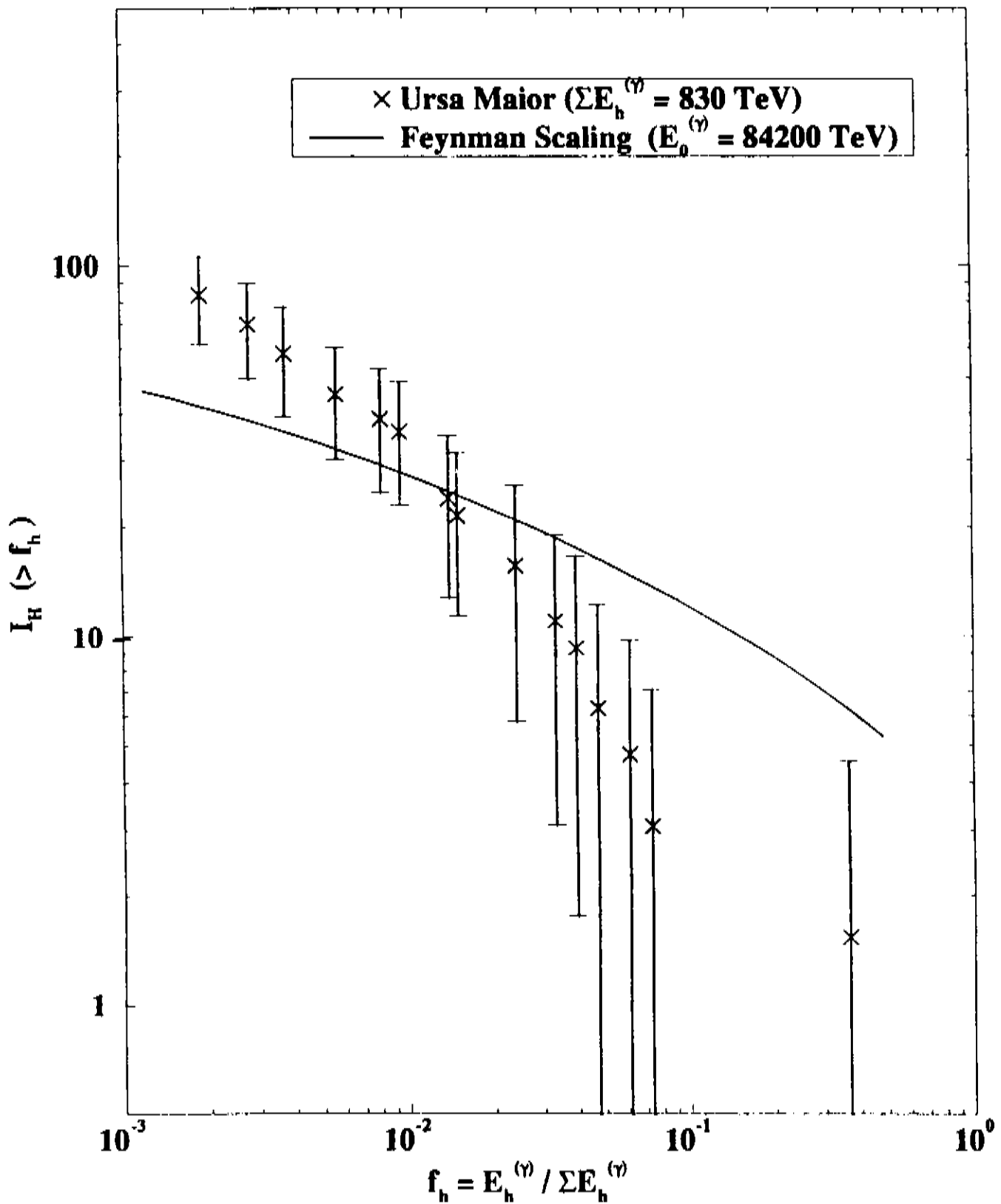


Figura 3.6: Tentativa de ajuste do Espectro Integral de Energia Hadrônica de "Ursa Maior" (Chacaltaya), com "scaling" de Feynman na produção múltipla de partículas.



# Capítulo 4

## Da Produção Múltipla de Píons

### 4.1 Da Distribuição de Densidade em Pseudo-Rapidez

A densidade  $dN/d\eta^*$  de partículas produzidas por intervalo de pseudo-rapidez, doravante abreviada por “densidade de rapidez”, está definida no Apêndice C, juntamente com várias expressões importantes concernentes à pseudo-rapidez, produção múltipla e inelasticidade. Destacamos a relação existente entre a pseudo-rapidez e a função de produção múltipla  $g(E, E_0)$  que aparece nos cálculos de fluxo integral, e que é dada pela eq. (C.14),

$$g(E, E_0)dE = \left[ \frac{dN}{d\eta^*} \right] \frac{dE}{E} \quad , \quad (4.1)$$

onde a pseudo-rapidez está ligada à variável  $x$  de “scaling” de Feynman através da eq. (C.7) do Apêndice C,

$$x = \frac{E}{E_0} = \frac{p_T}{\sqrt{s}} e^{\eta^*} \quad . \quad (4.2)$$

Por exemplo, nos cálculos de fluxo integral efetuado até agora, utilizamos o espectro de produção múltipla obedecendo ao “scaling” de Feynman, eq. (2.64). A distribuição de densidade de rapidez com “scaling” obedece a

$$\frac{dN}{d\eta^*} = \frac{5}{3} (1 - x)^4 \quad , \quad (4.3)$$

que, como já foi ressaltado (seção 3.3), descreve dados de “baixa” energia, mas falha na descrição de dados obtidos na região do ISR e Collider.

Para se ter uma medida dessa discrepância, apresentamos na Figura 4.1 dados de aceleradores [33] da distribuição de densidade de rapidez na produção de partículas carregadas para feixes incidentes com energias (no



referencial do centro de massa)  $\sqrt{s} = 53$  GeV (ISR), 200, 546 e 900 GeV (Collider/UA5 Collaboration).

As curvas na Figura 4.1 [35] representam as respectivas distribuições, dadas pela eq. (4.3), adotando  $p_T = \langle p_T \rangle = 0,4$  GeV/c.

Não é pois de se admirar que a hipótese de “scaling” tenha se mostrado imprópria para descrever os dados de raios cósmicos a altíssimas energias, no Capítulo 3. É preciso novas hipóteses de produção múltipla, que passamos a examinar a seguir.

## 4.2 Dos Modelos com Violação de “Scaling”

Das muitas hipóteses existentes para introduzir quebra no “scaling” da produção múltipla, selecionamos dois modelos distintos; cada qual dividido, por sua vez, em duas alternativas, candidatas a descreverem dados de aceleradores e posteriormente dados de raios cósmicos.

### 4.2.1 Modelo de JBF et al.

Adotamos um modelo de produção múltipla de partículas carregadas, descrito pela parametrização de Bellandi (JBF) et al. [4],

$$\frac{dN}{d\eta^*} = \frac{5}{3} \left( \frac{s}{s_0} \right)^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{s}{s'_0} \right)^{\alpha'} x \right]^4, \quad (4.4)$$

baseado na violação do “scaling” de Feynman, nos moldes propostos por *Wdowczyk and Wolfendale* [34, 36, 37]. Em termos de espectro de produção, escrevemos

$$g(E, E_0)dE = \frac{5}{3} \left( \frac{E_0}{E_s} \right)^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{E_0}{E'_s} \right)^{\alpha'} \frac{E}{E_0} \right]^4 \frac{dE}{E}, \quad (4.5)$$

onde a relação entre os parâmetros é simplesmente

$$\begin{aligned} s_0 &= 2m_p E_s & ; \\ s'_0 &= 2m_p E'_s \end{aligned}$$

A escolha dos valores dos parâmetros pode ser feita independente dos dados de raios cósmicos, baseando-se apenas em dados de aceleradores. Apresentamos a seguir duas alternativas, presentes na literatura, a que denominamos de *Modelos 1(a) e 1(b)*.

**Modelo 1(a): “JBF UA5”** Tomando o conjunto de dados experimentais de distribuição de densidade de rapidez medido em aceleradores, com  $\sqrt{s} = 53, 200, 546, 900$  GeV (os últimos 3 dados fornecidos pela Colaboração UA5 do CERN), temos a parametrização [4]

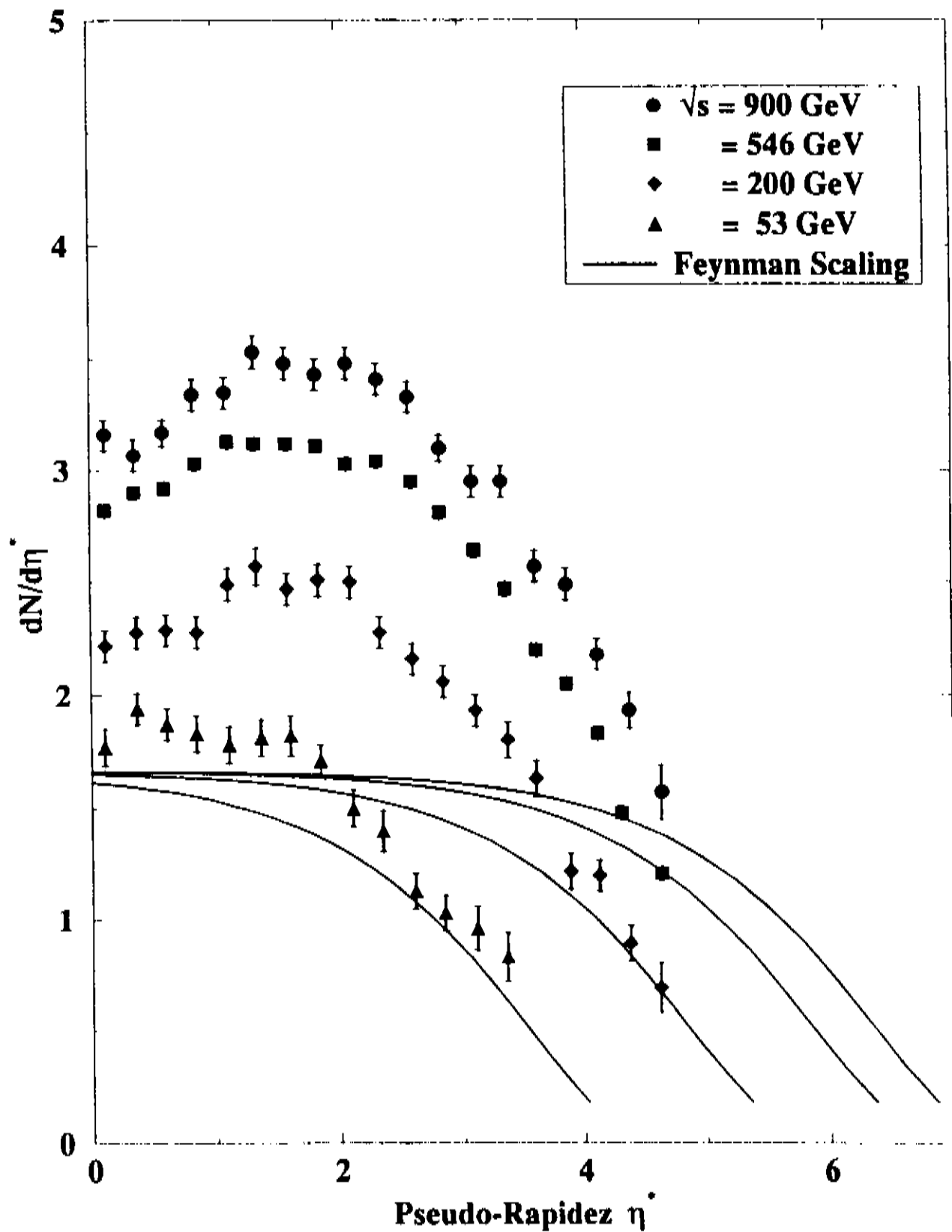


Figura 4.1: Distribuição de Densidade de Rapidez para energias de aceleradores. A curva contínua é o ajuste calculado com “scaling” de Feynman.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,11, & s_0 &= 6,3 \times 10^2 \text{GeV}^2, & (E_s &= 3,13 \times 10^2 \text{GeV}); \\ \alpha' &= 0,26, & s'_0 &= 3,4 \times 10^3 \text{GeV}^2, & (E_s &= 1,68 \times 10^3 \text{GeV}); \end{aligned}$$

que passamos a chamar simplifadamente de ajuste “JBF UA5”.

**Modelo 1(b): “JBF UA5+7”** Recentemente, *Ohsawa e Sawayanagi* [5] propuseram uma mudança neste conjunto de valores, a fim de incorporar os resultados da Colaboração UA7 do CERN [38]. Introduzindo dados com energia  $\sqrt{s} = 630 \text{ GeV}$ , válida para intervalos de rapidez  $\eta \geq 5$  (“região para frente”), efetuaram novo ajuste, alterando apenas os valores de  $\alpha'$  e  $s'_0$  (ou  $E'_s$ ), uma vez que  $\alpha$  e  $s_0$  (ou  $E_s$ ) descrevem o comportamento de  $dN/d\eta$  na região central. O resultado obtido é

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,11, & s_0 &= 6,3 \times 10^2 \text{GeV}^2, & (E_s &= 3,13 \times 10^2 \text{GeV}); \\ \alpha' &= 0,17, & s'_0 &= 1,8 \times 10^3 \text{GeV}^2, & (E_s &= 9,6 \times 10^2 \text{GeV}); \end{aligned}$$

que passamos a chamar simplifadamente de ajuste “JBF UA5+7”.

O resultado do ajuste dos Modelos 1(a) e 1(b) aos dados experimentais de distribuição de densidade de rapidez encontram-se na Figura 4.2.

### 4.2.2 Modelo de Capdevielle

Outro modelo de produção múltipla de partículas carregadas é apresentado por Capdevielle [6]. Trata-se de um modelo semi-empírico, baseado no “Dual Parton Model” [39] e originariamente utilizado em simulação de Monte Carlo. A distribuição de densidade de rapidez é dada por

$$\frac{dN}{d\eta^*} = A_0 \left[ \exp \left\{ -\frac{(\eta^* - \eta_0^*)^2}{2\sigma_0^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\eta^* + \eta_0^*)^2}{2\sigma_0^2} \right\} \right], \quad (4.6)$$

onde

$$\eta_0^* = a_1 \ln(E_0/\text{GeV}) + b_1, \quad (4.7)$$

$$\sigma_0 = a_2 \ln(E_0/\text{GeV}) + b_2. \quad (4.8)$$

Nas simulações de Capdevielle, o fator de escala  $A_0$  é determinado indiretamente, por meio do gerador Monte Carlo, mas para o estudo analítico a que nos propomos é preciso definir uma parametrização adequada. Assim como no caso da seção anterior, apresentamos duas alternativas por nós propostas e que passamos a analisar a seguir.

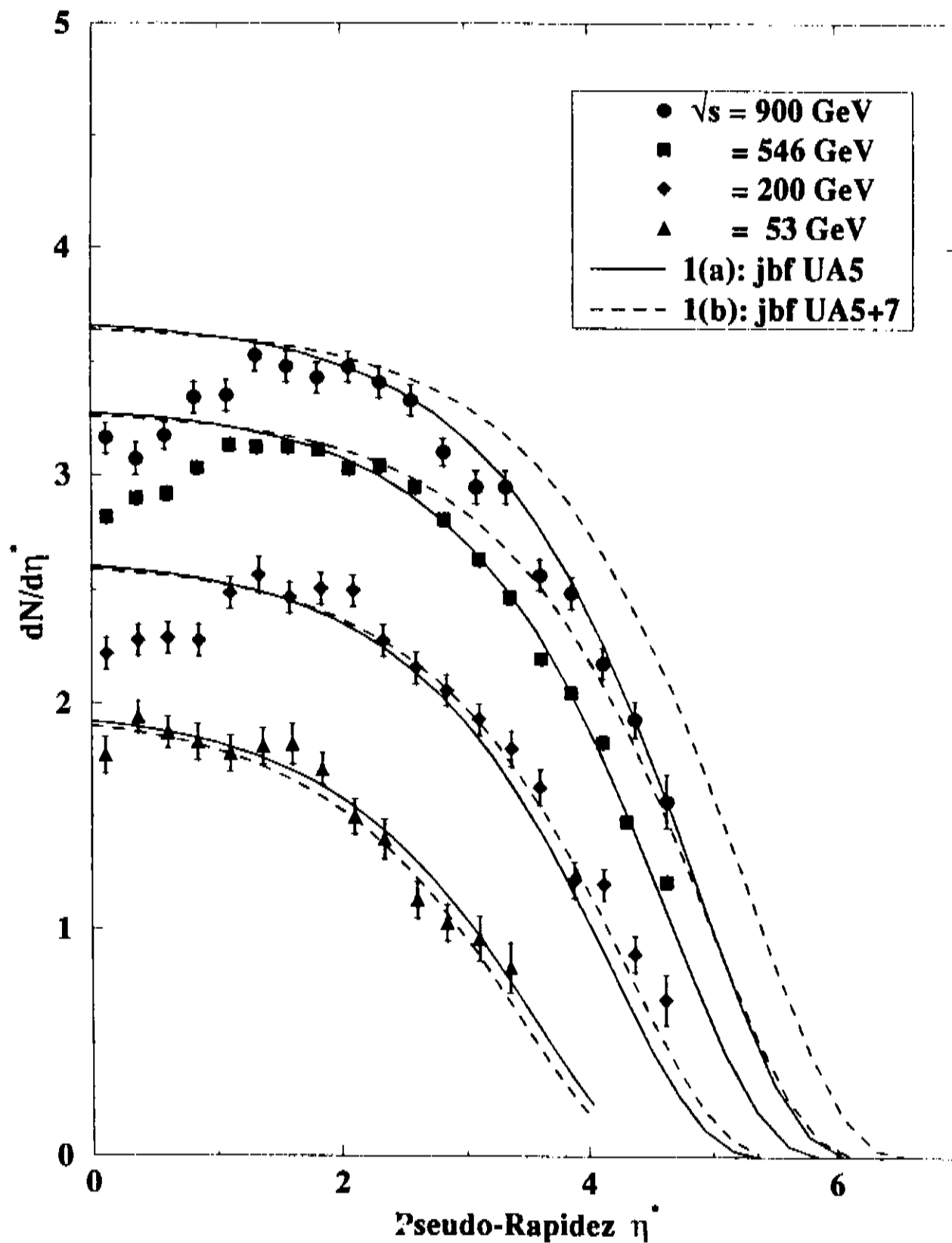


Figura 4.2: Distribuição de Densidade de Rapidez para energias de aceleradores. A curva tracejada é o ajuste calculado com o Modelo 1(a): JBF UA5 e a curva contínua com o Modelo 1(b): JBF UA5+7.

**Alternativa (a): “Capdevielle  $\ln s$ ”**

Seguindo uma tendência da física de aceleradores, propõe-se usar uma dependência logarítmica do tipo “ $\ln s$ ” para o fator  $A_0$ , como adotado para os parâmetros  $\eta_0^*$  e  $\sigma_0$ ; ou seja,

$$A_0 = a_3 \ln(E_0/GeV) + b_3 \quad . \quad (4.9)$$

**Alternativa (b): “Capdevielle  $Z_{eff}$ ”**

Por normalização da expressão (4.6), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN}{d\eta^*} d\eta^* = A_0 (2\sqrt{2}\pi\sigma_0) \equiv n \quad (4.10)$$

ou seja, a integração de  $dN/d\eta^*$  sobre todos os intervalos de rapidez fornece o número  $n$  de partículas produzidas, que por sua vez está relacionada à multiplicidade média  $\langle n \rangle$  por

$$n \equiv Z \langle n \rangle \quad , \quad (4.11)$$

onde  $Z$  faz o papel de variável de “KNO-Scaling”[40]. Identificando a eq. (4.10) com (4.11) obtemos a parametrização de  $A_0$ ,

$$A_0 = \frac{Z_{eff} \langle n \rangle}{2\sqrt{2}\pi\sigma_0} \quad , \quad (4.12)$$

onde escrevemos  $Z_{eff}$  para denotar o parâmetro de ajuste, interpretado fisicamente como o *valor efetivo* assumido pela variável de “KNO-Scaling” ao descrever a densidade de rapidez por intermédio do Modelo de Capdevielle.

Para a multiplicidade média de partículas carregadas seguimos Capdevielle, assumindo

$$\begin{aligned} \langle n_{ch} \rangle &= 2,96 - 0,112 \ln s + 0,173 \ln^2 s \quad (\sqrt{s} \leq 200 \text{ GeV}), \\ &= -6,55 + 6,89 s^{0,131} \quad (\sqrt{s} \geq 200 \text{ GeV}). \end{aligned}$$

O resultado do Modelo de Capdevielle, dado pela eq. (4.6) e ajustado sobre os dados de  $dN/d\eta^*$  medidos em aceleradores com  $\sqrt{s} = 53, 200, 546$  e  $900$  GeV, segundo as alternativas (a) e (b), são mostrados na Figura 4.3.

Para a alternativa (a) os parâmetros ajustados são

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,128 \quad , \quad a_2 = 0,091 \quad , \quad a_3 = 0,280 \quad , \\ b_1 &= 0,683 \quad , \quad b_2 = 0,778 \quad , \quad b_3 = -0,448 \quad ; \end{aligned}$$

e para a alternativa (b),

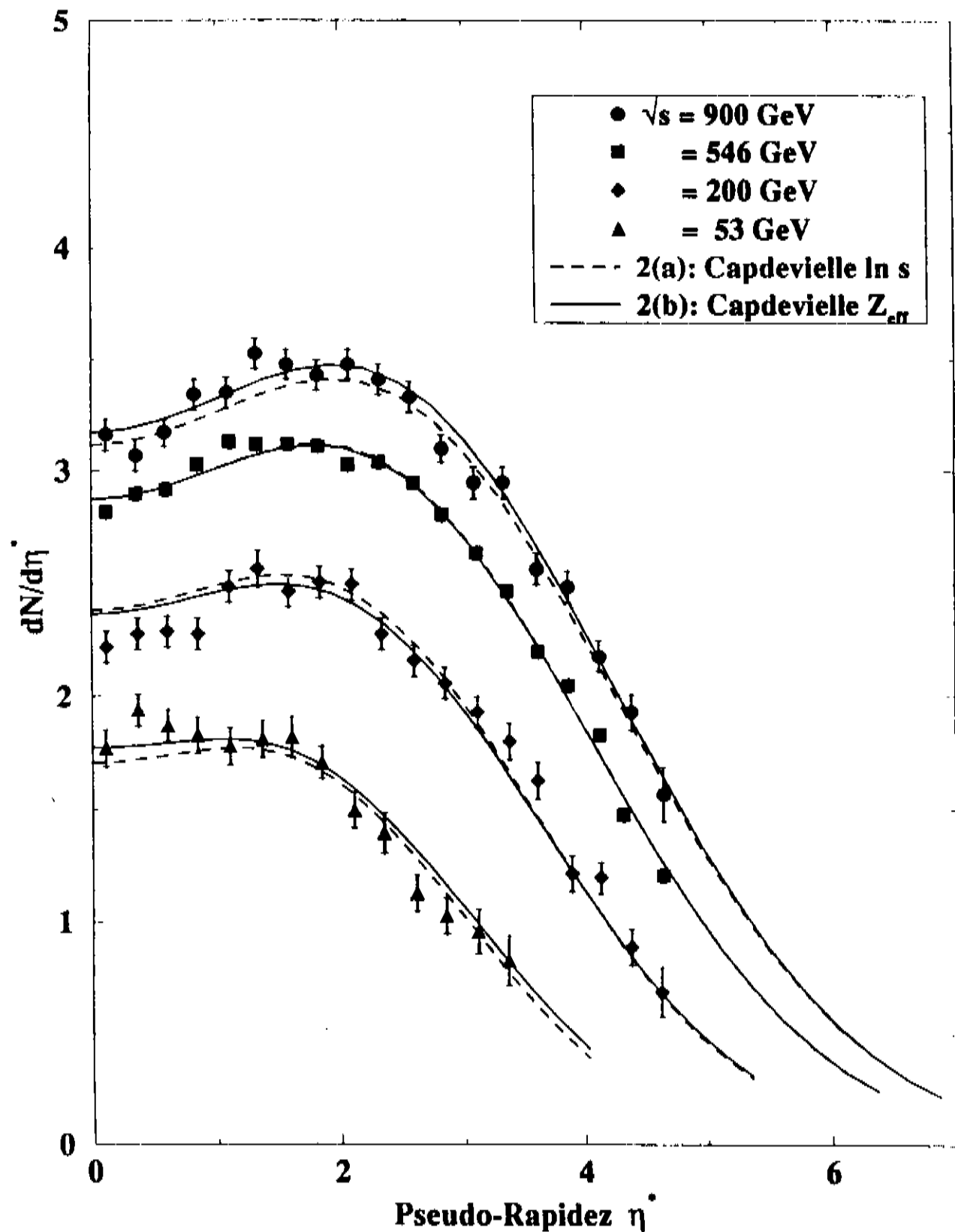


Figura 4.3: Distribuição de Densidade de Rapidez para energias de aceleradores. A curva tracejada é o ajuste calculado com a Alternativa (a): “ $\ln s$ ” e a curva contínua com a Alternativa (b): “ $Z_{eff}$ ”; ambas segundo o Modelo de Capdevielle.

$$a_1 = 0,126 \quad , \quad a_2 = 0,082 \quad , \quad Z_{eff} = 0,926 \quad , \\ b_1 = 0,706 \quad , \quad b_2 = 0,890 \quad .$$

O que se observa da Figura 4.3 é que a alternativa (b) oferece um melhor ajuste aos dados experimentais com menos parâmetros livres. Por essa razão abandonamos a alternativa (a) e elegemos a alternativa (b) para representar o Modelo de Capdevielle, passando a chamá-la de Modelo 2: “Capdevielle  $Z_{eff}$ ”.

As implicações físicas por trás do resultado deste ajuste também são muito interessantes. Para partículas carregadas temos que [41],

$$\int_0^\infty \Psi(Z) dZ = \int_0^\infty Z \Psi(Z) dZ = 2 \quad ,$$

onde  $\Psi(Z)$  é a função de distribuição de multiplicidade de “KNO-Scaling” [40],

$$\Psi(Z) = \langle n \rangle \frac{\sigma}{\sigma_{inel}} \quad .$$

Isto significa que, segundo a hipótese do “Scaling” da variável  $Z$ , o seu valor mais provável é

$$\langle Z \rangle = \frac{\int_0^\infty Z \Psi(Z) dZ}{\int_0^\infty \Psi(Z) dZ} = 1 \quad .$$

O fato do ajuste do Modelo ter conduzido ao valor efetivo  $Z_{eff} = 0,926$ , menor do que o valor mais provável  $\langle Z \rangle = 1$ , está intimamente relacionado com as evidências recentes de uma violação do “KNO-Scaling” para energias a partir da região do Collider [42].

### 4.3 Da Inelasticidade em Função da Energia

Da expressão para a densidade de rapidez calcula-se facilmente a inelasticidade média, como descrito no Apêndice C, eq. (C.20),

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \frac{P_T}{\sqrt{s}} \int_0^{\eta_{KIN}^*} e^{\eta^*} \left( \frac{dN}{d\eta^*} \right) d\eta^* \quad , \quad (4.13)$$

com  $\eta_{KIN}^* = \ln(\sqrt{s}/m_p)$ .

Cada um dos modelos descritos anteriormente fornece um comportamento para a inelasticidade média em função da energia (no referencial do centro de massa)  $\sqrt{s}$ , como ilustra a Figura 4.4 . Na figura também incluímos os pontos de  $\sqrt{s} = 53, 200, 630, 900$  GeV usados nos ajustes dos modelos, representando-os arbitrariamente na reta  $\langle K \rangle = 1/2$  (“Feynman Scaling”), apenas para efeito de comparação.

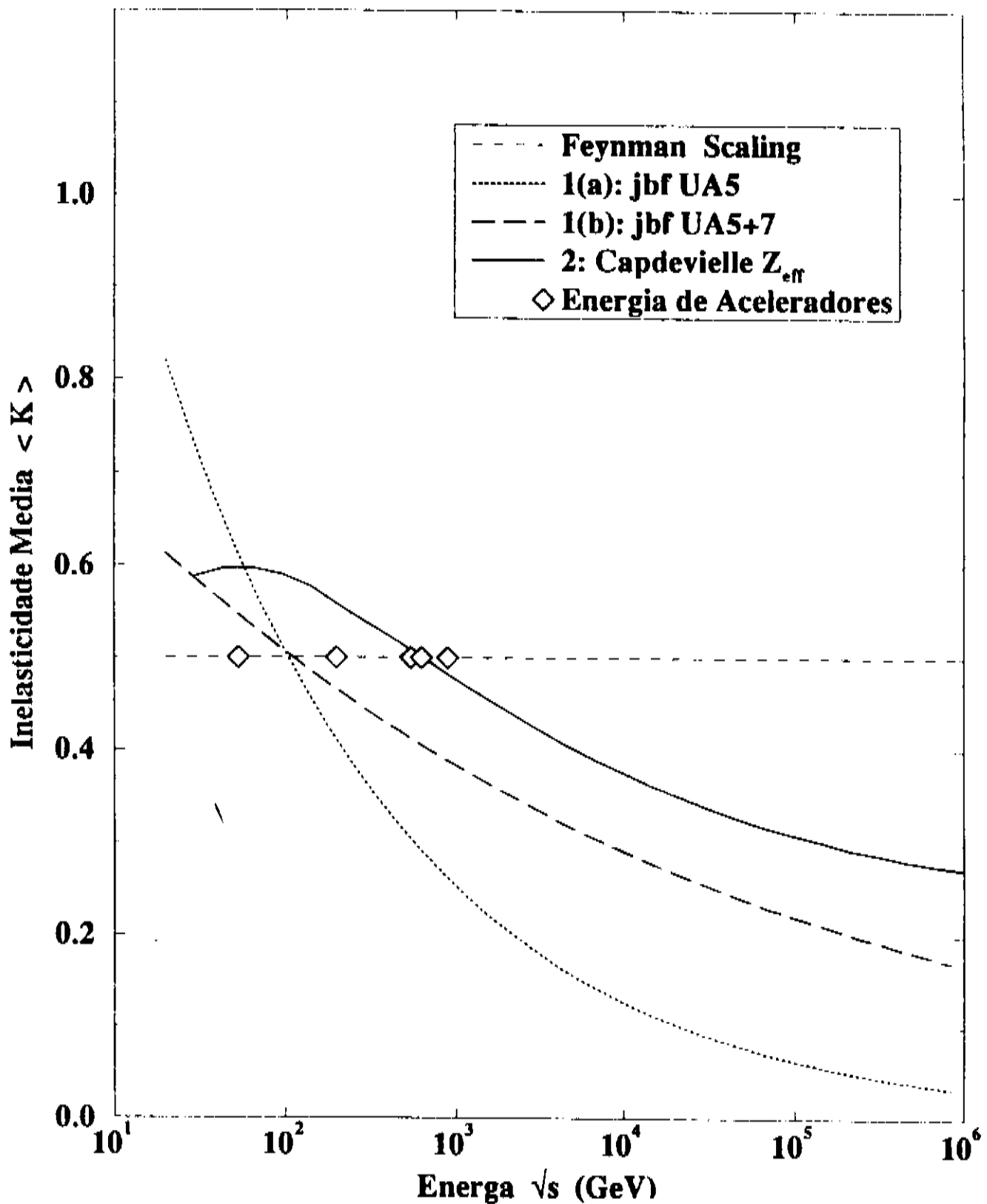


Figura 4.4: Dependência energética da inelasticidade média  $\langle K \rangle$ , calculada a partir de diferentes modelos de produção múltipla de partículas: Modelo 1(a): JBF UA5 (linha pontilhada), Modelo 1(b): JBF UA5+7 (linha tracejada) e Modelo 2: Capdevielle  $Z_{eff}$  (linha contínua). Também estão indicados o “scaling” de Feynman e as energias dos aceleradores, usadas no ajuste dos parâmetros dos modelos.



Vemos que em todos os casos a inelasticidade média é uma função decrescente com a energia. *Bellandi e Colaboradores* [43] mostraram recentemente que a partir dos dados de chuvciros extensos da radiação cósmica ainda não é possível chegar a uma conclusão definida a respeito do comportamento de  $\langle K \rangle$  com a energia. Algumas suposições [44], baseadas em dados do fluxo diferencial nucleônico a várias profundidades atmosféricas, sugerem a constância ou o fraco crescimento da inelasticidade *total*.

Outro cálculo [45] usando a alternativa 1(a): “Capdevielle  $\ln s$ ” separadamente para cada espécie gerada no processo de reação inclusiva  $pp \rightarrow cX$  (com  $c = \pi^\pm, K^\pm, p^\pm$  e  $X =$  qualquer coisa) aponta para uma inelasticidade total que é crescente com a energia.

*Ohsawa* [5, 46] baseando-se no modelo 1 obtém uma inelasticidade média decrescente (cf. Apêndice C), mas argumenta que esse resultado é incompatível com certos dados de câmaras de emulsão, cuja intensidade total é constante, e propõe que a inelasticidade total seja calculada por

$$K_{TOT} = (1 - p)K_{CH} + pK_{EX}$$

onde inclui uma porcentagem  $p$  de inelasticidade devido a um canal de produção múltipla de eventos exóticos, responsável pelo termo  $K_{EX}$ , acima. Posto isso, é sempre possível conseguir uma maneira de que  $K_{TOT}$  seja igual a  $1/2$  e independente da energia!

Qualquer que seja a explicação, entretanto, podemos crer que a inelasticidade  $\langle K \rangle$  calculada pela eq. (4.13) dá conta da fração de energia transmitida às partículas produzidas carregadas e que, por conservação de energia, deve ser complementar à elasticidade média da componente nucleônica líder, ou seja,

$$\langle K \rangle + \langle \sigma \rangle = 1 \quad . \quad (4.14)$$

Essa relação é trivialmente satisfeita no caso do “scaling” de Feynman, usado nos capítulos anteriores, pois para a distribuição de elasticidade uniforme, temos  $\langle \sigma \rangle = 1/2$  e, também, como descrito no Apêndice C, eq. (C.19),  $\langle K \rangle = 1/2$ .

Entretanto a eq. (4.14) não é mais necessariamente obedecida, se mantermos a distribuição  $f(\sigma)$  uniforme em conjunto com os Modelos 1 e 2, se descartamos, em princípio, a manifestação de eventos exóticos.

Por essa razão, iniciamos o Capítulo 5 atentando para uma hipótese consistente para a função de distribuição de elasticidade  $f(\sigma)$ , para somente em seguida proceder à análise dos dados de fluxo integral da superfamílias da radiação cósmica, incluindo os modelos de produção múltipla com violação do “scaling” de Feynman.

# Capítulo 5

## Do Espectro de Energia

### 5.1 Da Distribuição de Elasticidade Auto Consistente

Foi visto como obter parametrizações para o espectro de produção múltipla de partículas  $g(E, E_0)$  exclusivamente a partir de dados de aceleradores. Contudo, buscamos uma consistência entre a inelasticidade média  $\langle K \rangle$  e a elasticidade média  $\langle \sigma \rangle$ . Para tanto, adotamos uma distribuição de elasticidade normalizada, nucleônica e piônica, na forma

$$f(\sigma_i) = (1 + \beta_i) \sigma_i^{\beta_i} \quad (i = N, \pi) \quad , \quad (5.1)$$

tal que a elasticidade média é dada por

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \rangle &= \int_0^1 \sigma_i f(\sigma_i) d\sigma_i \\ &= \frac{1 + \beta_i}{2 + \beta_i} \quad (i = N, \pi) \quad . \end{aligned} \quad (5.2)$$

No caso particular em que  $\beta_N = 0$  a distribuição de elasticidade volta a ser uniforme e portanto a elasticidade média vale  $\langle \sigma \rangle = 1/2$ .

Mas a situação que ora nos interessa é aquela em que impomos uma *auto consistência* do tipo

$$\langle \sigma_i \rangle + \langle K(E_0) \rangle = 1 \quad , \quad (5.3)$$

onde  $\langle K(E_0) \rangle$  representa a inelasticidade média, calculada pela eq. (C.20) (Apêndice C), a partir da distribuição de rapidez, localizada na energia de interação primária  $E = E_0$ . Para dado valor de  $E_0$ , o parâmetro  $\beta_i$  não está livre, pois fica determinado por (5.3) com (5.2),

$$\beta_i = \frac{1}{\langle K(E_0) \rangle} - 2 \quad , \quad (5.4)$$

a qual passamos a denominar de “auto consistência local”.

No estudo que se segue, para efeito de comparação, tomamos 3 alternativas para o ajuste do fluxo integral, dependendo das condições impostas à distribuição de elasticidade nucleônica e piônica.

Sejam,

**Caso 1: "UNIFORME"** - no qual admitimos, como anteriormente, que

$$\beta_N = \beta_\pi = 0 \quad ;$$

tal que

$$\langle \sigma_N \rangle = \langle \sigma_\pi \rangle = \frac{1}{2} \quad .$$

**Caso 2: "ASSIMÉTRICO"** - no qual impomos auto consistência local sobre a componente nucleônica, mas por falta de informações precisas a respeito da elasticidade média piônica, mantemos a distribuição de elasticidade uniforme para esta componente; ou seja,

$$\begin{aligned} \beta_N &= \frac{1}{\langle K(E_0) \rangle} - 2 \quad , \\ \beta_\pi &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_N \rangle &= 1 - \langle K(E_0) \rangle \quad , \\ \langle \sigma_\pi \rangle &= \frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

**Caso 3: "SIMÉTRICO"** - no qual seguimos a tendência a utilizar expressões iguais para a inelasticidade nucleônica e piônica, impondo auto consistência local a ambas as componentes,

$$\beta_N = \beta_\pi = \frac{1}{\langle K(E_0) \rangle} - 2 \quad ;$$

tal que

$$\langle \sigma_N \rangle = \langle \sigma_\pi \rangle = 1 - \langle K(E_0) \rangle \quad .$$

Essas modificações nos obrigam a recalcular o fluxo diferencial (e o integral) hadrônico, de forma a incorporar a expressão mais geral da distribuição de  $f(\sigma)$ , eq. (5.1). É o que veremos a seguir.

## 5.2 Da Solução Hadrônica Autoconsistente

Tendo em vista o Caso 2: Assimétrico, tratado anteriormente, é preciso admitir, em princípio, que  $\beta_N \neq \beta_\pi$ . Contudo, apresentamos aqui as modificações aplicadas ao cálculo do Capítulo 2 para o fluxo hadrônico, no Caso 3: Simétrico, por ser mais simples, uma vez que  $\beta_N = \beta_\pi$ , ou simplesmente  $\beta$ . Deixamos delineadas, no Apêndice D, as principais passagens que conduzem à solução no Caso Assimétrico.

Retornemos, pois, à solução nucleônica dada pela eq. (2.30),

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \frac{1}{2\pi i} \oint \exp [T_N \hat{\sigma}_N] \frac{1}{E} \left( \frac{E_0}{E} \right)^s ds. \quad (5.5)$$

onde vimos que

$$\exp [T_N \hat{\sigma}_N] \frac{1}{E} \left( \frac{E_0}{E} \right)^s = E_0^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [T_N^n \hat{\sigma}_N^n] E^{-(s+1)}. \quad (5.6)$$

Como da definição do operador  $\hat{\sigma}_N$  tínhamos

$$\hat{\sigma}_N E^{-(s+1)} = E^{-(s+1)} \langle \sigma_N^s \rangle$$

então o problema se resume em calcular o “momento- $s$ ” de  $\sigma_N$ ,

$$\langle \sigma_N^s \rangle = \int_0^1 \sigma_N^s f(\sigma_N) d\sigma_N$$

Ora, usando a distribuição  $f(\sigma_N)$  geral, eq. (5.1), obtemos,

$$\langle \sigma_i^s \rangle = \frac{1 + \beta_i}{s + 1 + \beta_i}, \quad (5.7)$$

que, obviamente, recai no caso do Capítulo 2, eq. (2.35), quando tomamos  $\beta_N = 0$ .

Aplicando o momento (5.7)  $n$  vezes sobre a energia e voltando a (5.5), ficamos com

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T_N^n \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1 + \beta_N)^n}{(s + 1 + \beta_N)^n} \frac{1}{E} \left( \frac{E_0}{E} \right)^s ds \right]. \quad (5.8)$$

A Transformada Inversa de Mellin do termo entre colchetes ao lado direito da eq. (5.8) está calculada no Apêndice A, eq. (A.18), de modo que o somatório antes dos colchetes define uma série conhecida [10, 21]. Com isto obtemos finalmente, e sem aproximações,

$$F_N(E, E_0, t, t_0) = e^{-T_N} \left[ \delta(E - E_0) + \frac{1}{E} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{1+\beta_N} (1 + \beta_N) T_N \frac{2 I_1(u_{\beta N})}{u_{\beta N}} \right], \quad (5.9)$$

com

$$u_{\beta N} = 2 \sqrt{(1 + \beta_N) T_N \ln(E_0/E)} \quad . \quad (5.10)$$

Comparando a eq. (5.9) com a solução (2.42) do Capítulo 2, notamos que a única mudança formal corresponde à introdução de termos  $(1 + \beta)$ , o que naturalmente faz com que as duas soluções se igualem para  $\beta_N = \beta = 0$ .

Em completa analogia ao que foi feito no caso nucleônico, não é difícil demonstrar que a solução para o fluxo piônico se escreve

$$F_\pi(E, E_0, t, t_0) = \frac{\lambda_\pi}{\lambda_\pi - \lambda_N} g(E, E_0) \left[ e^{-T_\pi} - e^{-T_N} \right] + \\ + \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} (1 + \beta) T(z) e^{-T(z)} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E} \left( \frac{E}{E'} \right)^{(1+\beta)} \frac{2}{u_{\beta Z}} I_1(u_{\beta Z}) g(E', E_0), \quad (5.11)$$

$$u_{\beta Z} = 2 \sqrt{(1 + \beta) T(z) \ln(E'/E)} \quad . \quad (5.12)$$

As soluções (5.9) e (5.11) reunidas formam o resultado para o fluxo diferencial hadrônico, que pode ser usado com qualquer dos modelos de produção múltipla do Capítulo anterior, bem como sob os casos de distribuição de elasticidade Uniforme e Simétrico, descritos na seção anterior. A solução nucleônica (5.9) também se aplica ao caso Assimétrico, mas a solução para o fluxo piônico assimétrico sofre alterações e se encontra deduzida no Apêndice D.

O fluxo integral é calculado a partir de (5.9) e (5.11) por integração em energia, como definido no Capítulo 2.

## 5.3 Da Descrição do Espectro de Energia

Para proceder à análise completa do fluxo integral hadrônico, dentro dos 3 casos de distribuição de elasticidade e com os 3 diferentes modelos de produção múltipla, escolhemos primeiramente o evento “Ursa Maior”, cuja energia hadrônica visível é da ordem de 1000 TeV. Os outros eventos serão discutidos em seções posteriores.

### 5.3.1 Do Evento “Ursa Maior”

O espectro integral de energia de hádrons do evento “Ursa Maior”, ajustado pelo Modelo 1(a): “JBF UA5” e pelo Modelo 1(b): “JBF UA5+7” encontra-se representado nas Figuras 5.1 e 5.2, respectivamente. Na Figura 5.3 apresentamos ajuste semelhante para o Modelo 2: “Capdevielle  $Z_{eff}$ ”. Cada uma dessas figuras mostra o resultado dos ajustes segundo os três diferentes casos de distribuição de elasticidade Uniforme, Assimétrico e Simétrico.

Modelo 1(a): jbf UA5

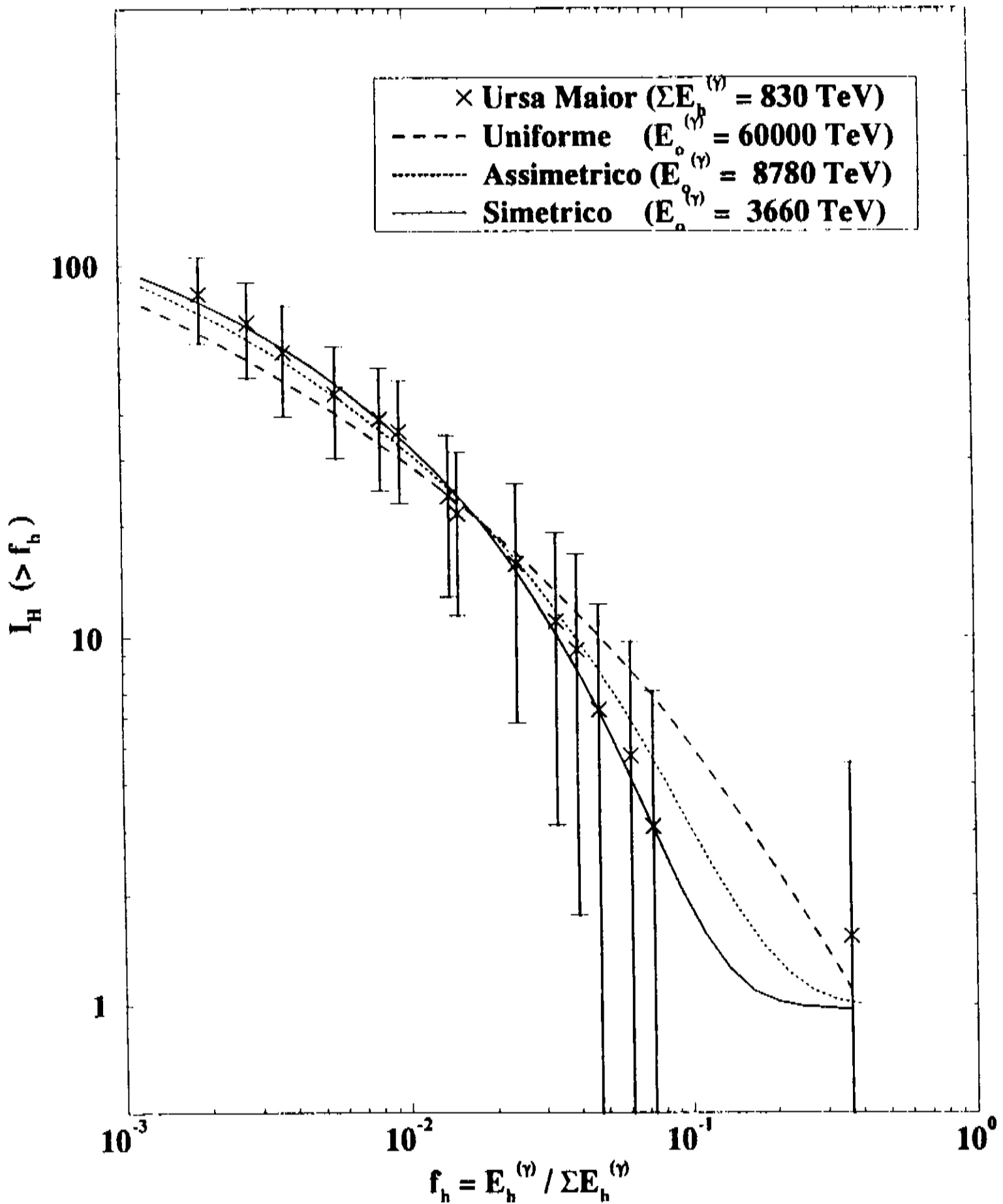


Figura 5.1: Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Ursa Maior”, ajustado com o modelo de produção múltipla 1(a): JBF UA5. As curvas tracejada, pontilhada e contínua correspondem aos três casos de distribuição de elasticidade, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.

Modelo 1(b): jbf UA5+7

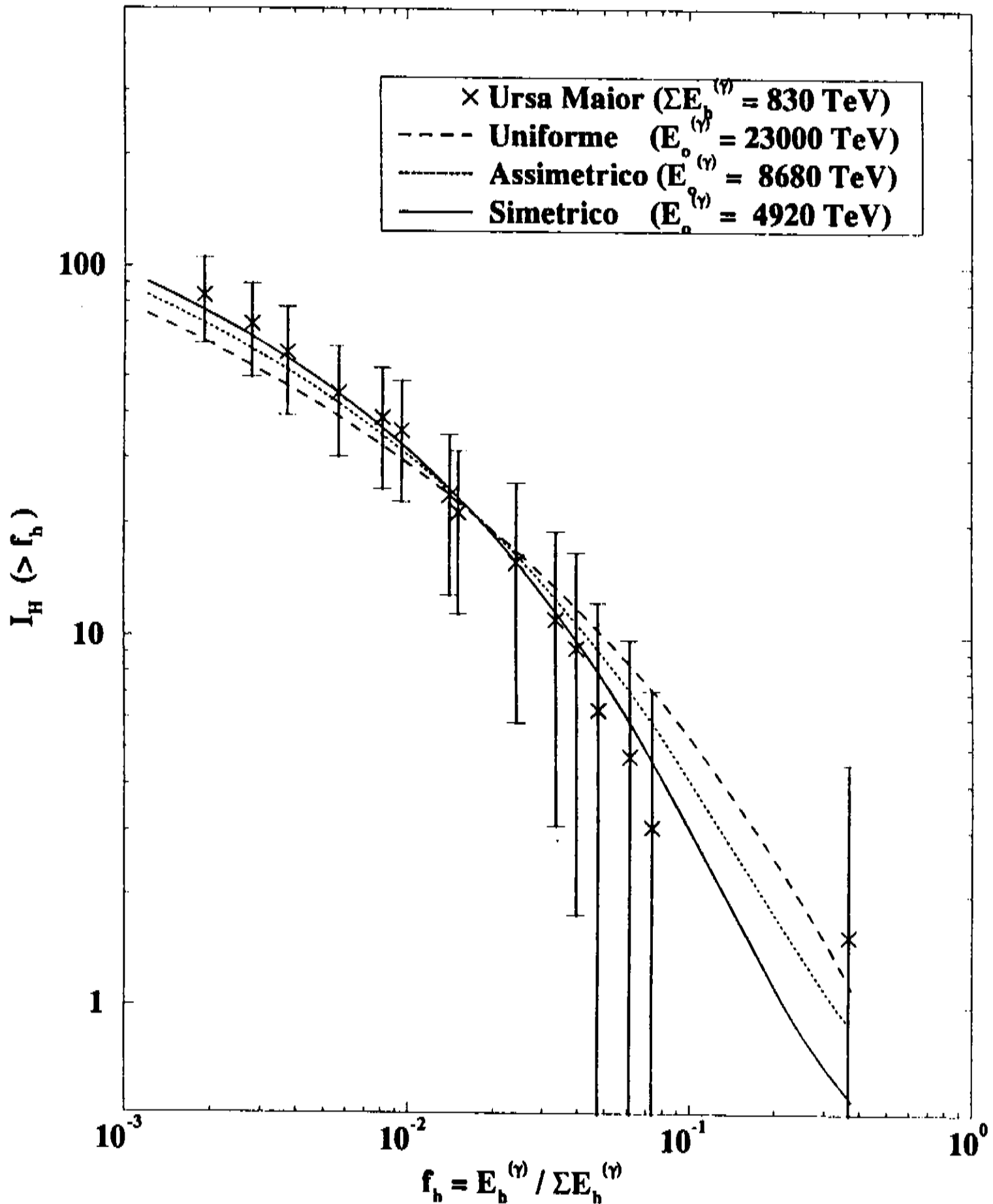


Figura 5.2: Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Ursa Maior”, ajustado com o modelo de produção múltipla 1(b): JBF UA5+7. As curvas traçada, pontilhada e contínua correspondem aos três casos de distribuição de elasticidade, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.

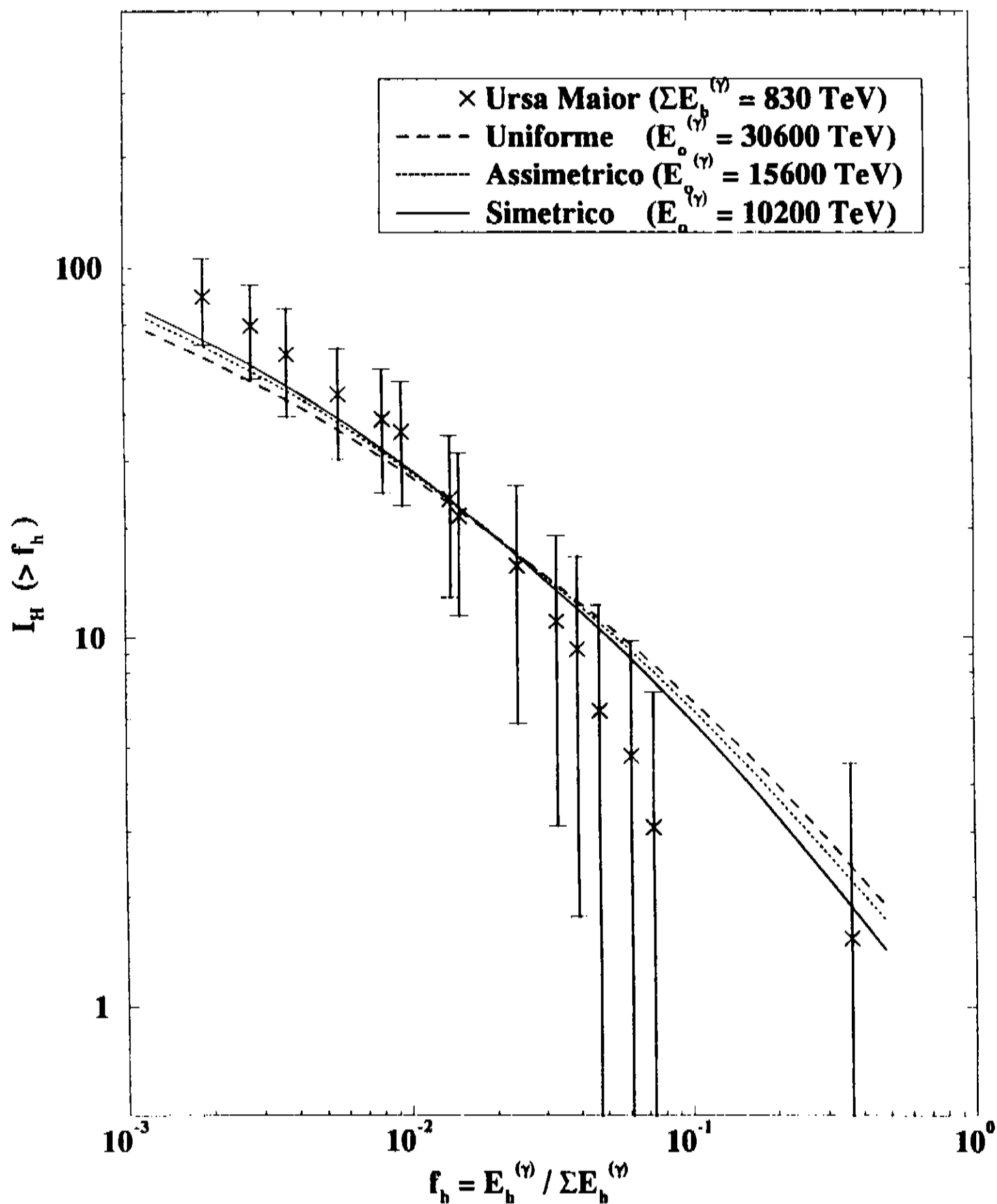
Modelo 2: Capdevielle  $Z_{\text{eff}}$ 

Figura 5.3: Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Ursa Maior”, ajustado com o modelo de produção múltipla 2: Capdevielle. As curvas tracejada, pontilhada e contínua correspondem aos três casos de distribuição de elasticidade, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.



Mais uma vez, e em todas as curvas, os únicos parâmetros livres no ajuste são a energia  $E_0^{(\gamma)}$  do nucleon primário e a profundidade atmosférica desenvolvida pela cascata,  $T_N = (t_f - t_0)/\lambda_N$ , do ponto de interação primário  $t_0$  ao ponto de detecção  $t_f$ , em unidades de livre caminho médio nucleônico. Em cada figura encontramos o resultado obtido para o valor de  $E_0^{(\gamma)}$  nos três casos de  $f(\sigma)$  considerados. A Tabela 5.1 reúne as principais informações obtidas com os ajustes. Uma rápida inspeção à tabela e às figuras nos faz concluir que a escolha da distribuição  $f(\sigma)$  que melhor reproduz os resultados experimentais é o caso Simétrico, qualquer que seja o modelo de produção múltipla adotado. Percebe-se que, na medida em que se impõe a auto consistência local, primeiro só na componente nucleônica (caso Assimétrico) e depois em ambas as componentes hadrônicas (caso Simétrico), as curvas tendem cada vez mais a se ajustar aos pontos experimentais (valores de  $\chi^2$  mais baixos), oferecendo também energias  $E_0^\gamma$  cada vez menores.

Tabela 5.1: Fluxo Hadrônico Integral - Ursa Maior (Chacaltaya)

$$(\sum E_h^\gamma = 830 \text{ TeV}, t_f/\lambda_N = 6,75)$$

| MODELO            | $f(\sigma)$ | $E_0^\gamma$ (TeV) | $T_N$ | $\langle K \rangle$ | $\beta_N$ | $\beta_\pi$ | $\chi^2$ |
|-------------------|-------------|--------------------|-------|---------------------|-----------|-------------|----------|
| 1(a)<br>JBF UA5   | uniforme    | 60000              | 6,75  | 0,50                | 0         | 0           | 3,9      |
|                   | assimetrico | 8780               | 6,75  | 0,14                | 5,39      | 0           | 0,81     |
|                   | simetrico   | 3660               | 5,85  | 0,15                | 4,48      | 4,48        | 0,25     |
| 1(b)<br>JBF UA5+7 | uniforme    | 23000              | 6,75  | 0,50                | 0         | 0           | 4,8      |
|                   | assimetrico | 8680               | 6,75  | 0,30                | 1,35      | 0           | 2,0      |
|                   | simetrico   | 4920               | 6,75  | 0,31                | 1,23      | 1,23        | 0,62     |
| 2<br>Capdevielle  | uniforme    | 30600              | 6,75  | 0,50                | 0         | 0           | 7,9      |
|                   | assimetrico | 15600              | 6,75  | 0,37                | 0,68      | 0           | 6,1      |
|                   | simetrico   | 10200              | 6,75  | 0,38                | 0,63      | 0,63        | 5,0      |

Além disso, apesar dos três modelos de produção múltipla (no caso Simétrico) descreverem adequadamente os dados de Ursa Maior, o confronto das figuras entre si nos mostra que a situação mais favorável é obtida

no contexto do Modelo 1(a): “JBF UA5”. Isso sugere que nos detenhamos em algumas observações relevantes.

- i) A curva ajustada com esse modelo passa praticamente sobre os pontos experimentais, a despeito do tamanho das barras de erro.
- ii) O último ponto experimental no gráfico deve representar a partícula líder e vemos que o ajuste teórico da curva do fluxo integral aponta *exatamente* para  $I_H = 1$  (vide Figura 5.1).
- iii) A energia total da componente eletromagnética ( $\Sigma E_\gamma = 1334$  TeV), conforme a Tabela 5.1, é cerca de *um terço* da energia visível do primário,  $E_0^\gamma = 3660$  TeV.
- iv) A investigação da Tabela IV.1 revela que este é o único ajuste no qual o valor de  $T_N$  *não é igual* à profundidade de detecção em Chacaltaya,  $t_f/\lambda_N = 6,75$ , figurando  $T_N = 5,85$ .
- v) A princípio, é de surpreender que o melhor ajuste tenha ocorrido assumindo um valor tão baixo para a inelasticidade média,  $\langle K \rangle = 0,15$ . Na seção seguinte retomamos este ponto, com novas considerações.

À parte desses comentários, a Figura 5.2 deixa patente que o Modelo 1(b): “JBF UA5+7” também oferece uma descrição bastante satisfatória do evento Ursa Maior [47].

De uma forma geral, fica demonstrado que sob certas condições, é possível descrever o espectro integral hadrônico de uma superfamília da radiação cósmica. Resta saber se esse formalismo também se aplica na descrição de outros eventos de superfamílias, o que veremos a seguir.

### 5.3.2 De Outras Superfamílias

Partindo do conhecimento adquirido na seção anterior, com o estudo de “Ursa Maior”, procedemos à análise dos outros eventos de superfamílias selecionados previamente (Capítulo 3), limitando-nos ao caso de auto consistência simétrica (caso 3); ou seja,  $f(\sigma_N) = f(\sigma_\pi) = f(\sigma)$  com

$$f(\sigma) = (1 + \beta) \sigma^\beta \quad .$$

As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os ajustes ao espectro de energia das superfamílias “P3’-C1-B90”, “C141G4836” e “Mini Andromeda III”, respectivamente. Em cada figura vemos reunidos os resultados do ajuste com os diferentes modelos de produção múltipla, “JBF UA5”, “JBF UA5+7” e “Capdevielle:  $Z_{eff}$ ”. A Tabela 5.2 reúne as informações mais importantes sobre os ajustes.

Comparando as Figuras 5.4 e 5.6, constatamos novamente que o Modelo 1(a): “JBF UA5” apresenta a melhor descrição dos dados experimentais.

## P3'- C1- B90 (Pamir)

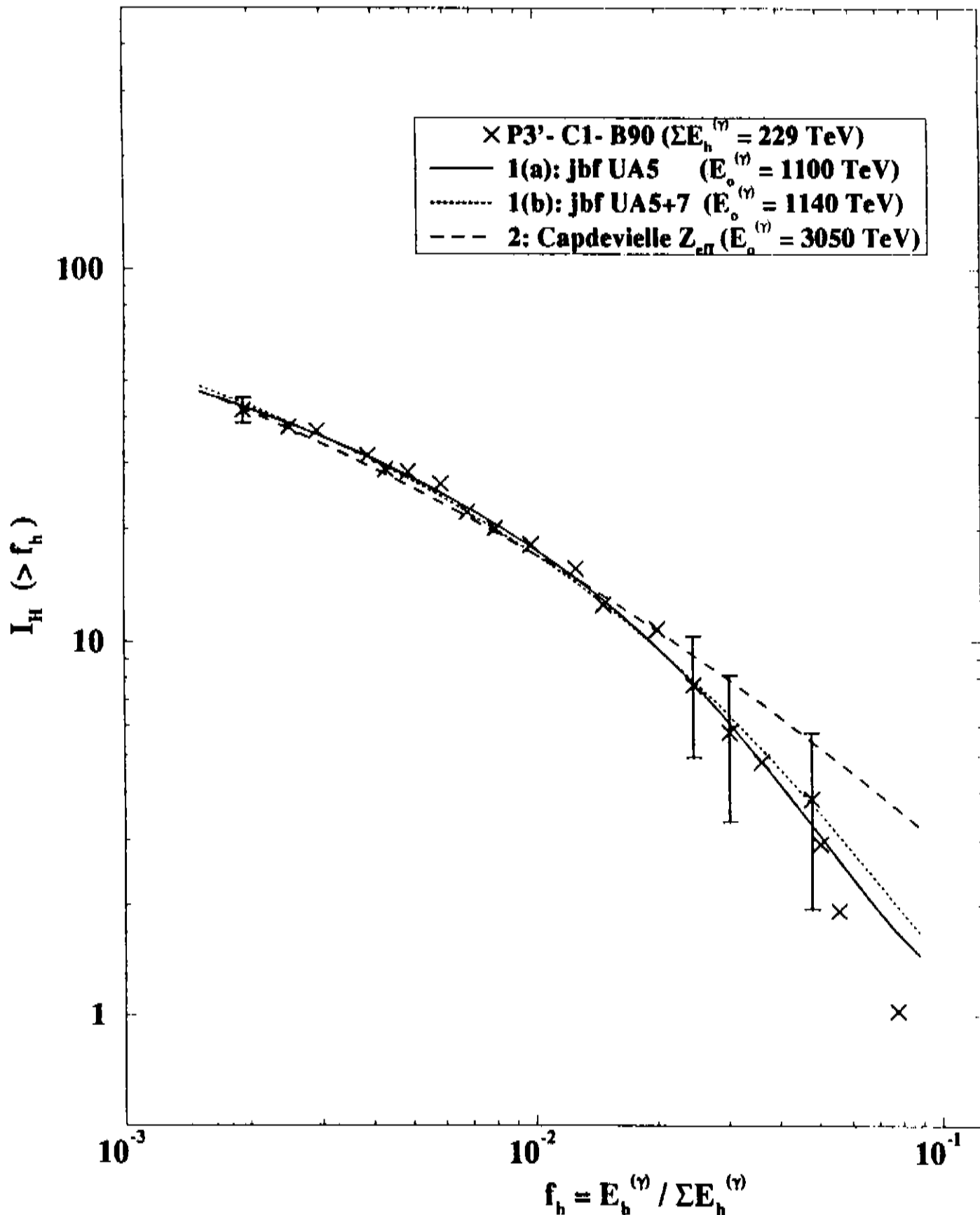


Figura 5.4: Espectro Integral de Energia Hadrônica de “P3'-C1-B90”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3). As curvas contínua, pontilhada e tracejada correspondem aos três modelos de produção múltipla, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.

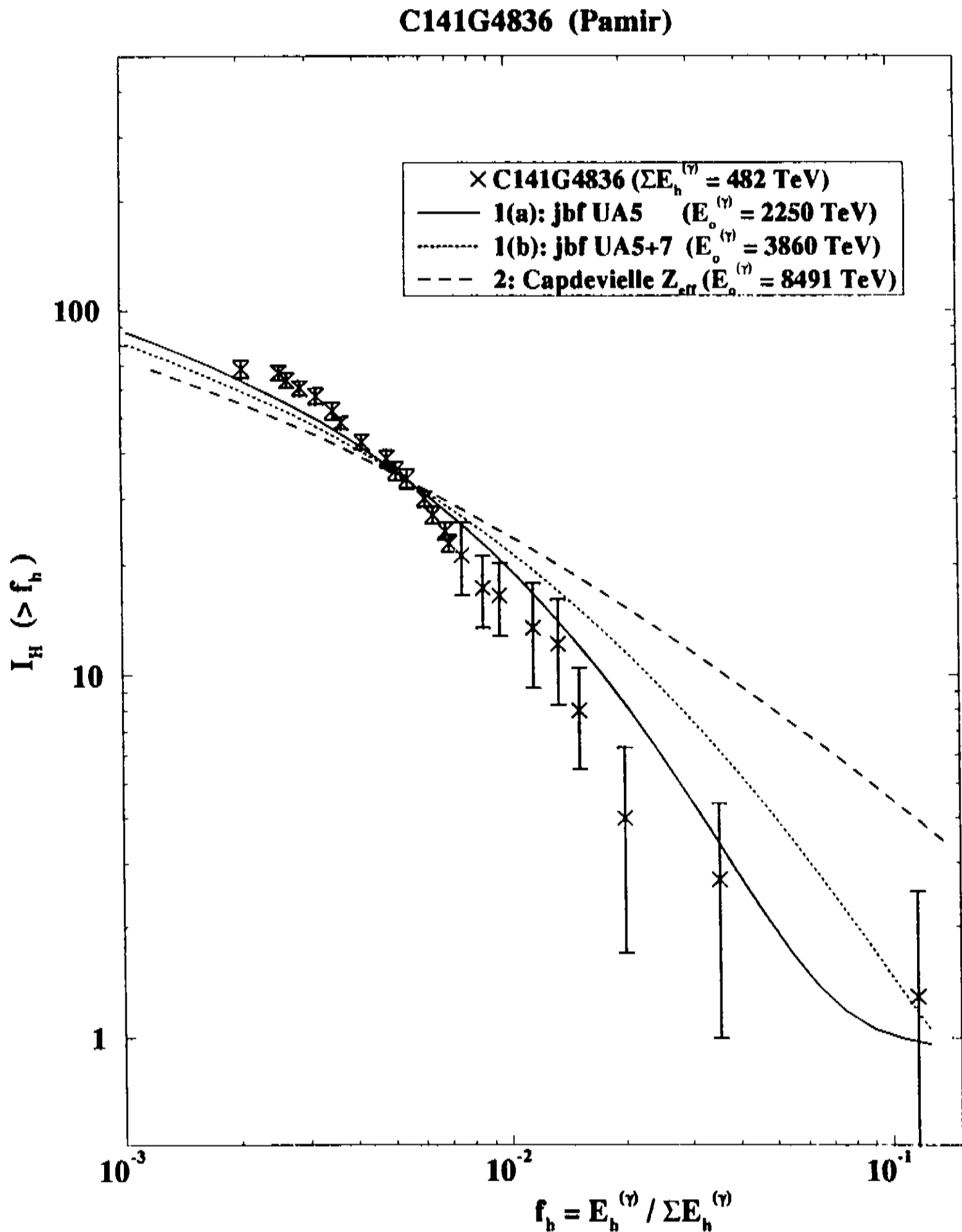


Figura 5.5: Espectro Integral de Energia Hadrônica de “C141G4836”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3). As curvas contínua, pontilhada e tracejada correspondem aos três modelos de produção múltipla, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.

## Mini-Andromeda III (Chacaltaya)

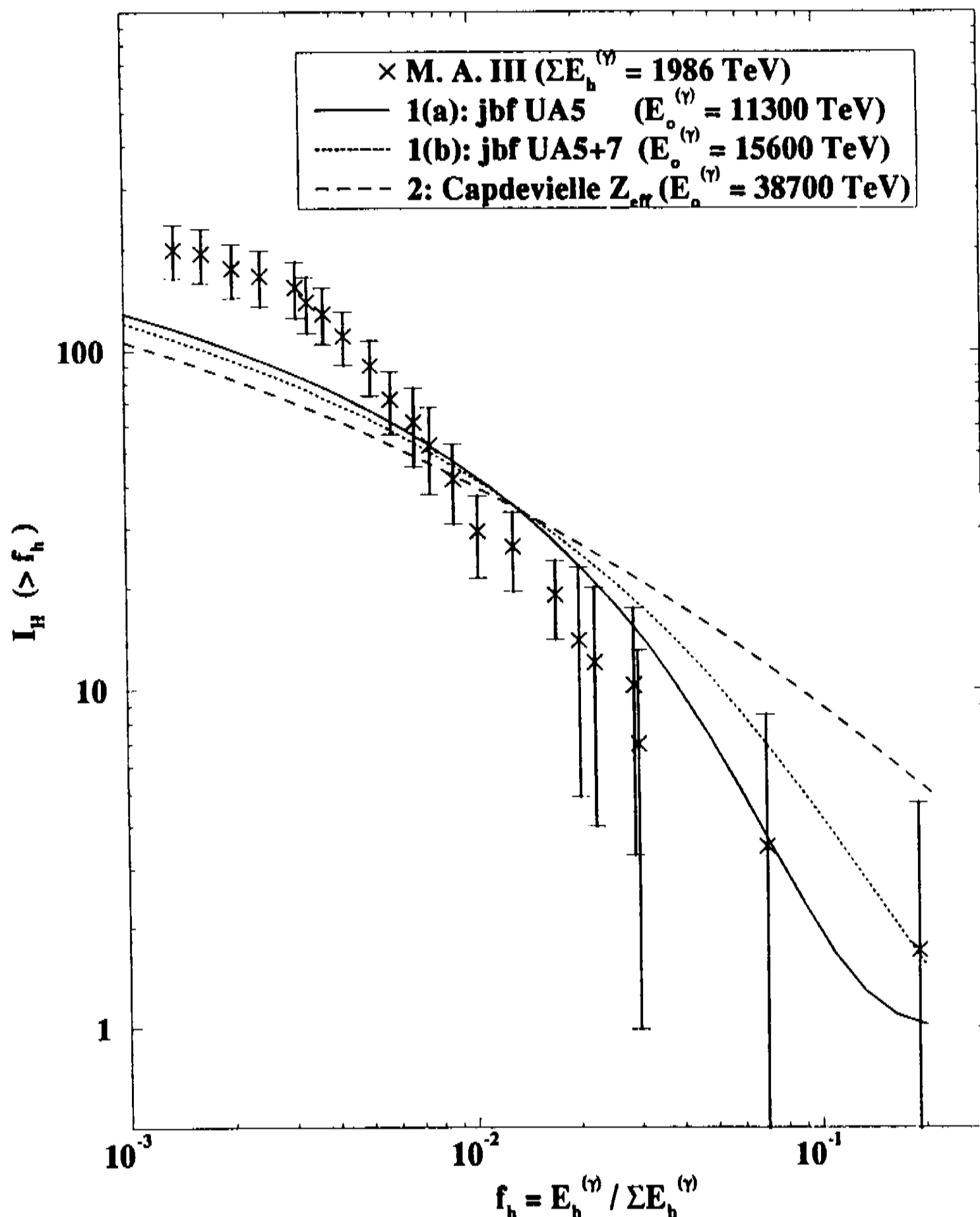


Figura 5.6: Espectro Integral de Energia Hadrônica de “Mini Andromeda III”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3). As curvas contínua, pontilhada e tracejada correspondem aos três modelos de produção múltipla, discutidos no texto.  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.

É preciso ressaltar que os eventos de Pamir, cujas energias hadrônicas visíveis são menores do que a de Ursa Maior, mostram um ajuste satisfatório, ao passo que em Mini-Andromeda III o ajuste é apenas parcial. Neste último evento, os primeiros pontos experimentais não são descritos com nenhum dos três modelos de produção múltipla. Quanto a essa discrepância pode-se observar 3 aspectos:

- i) A energia hadrônica total visível chega a quase  $E_0^\gamma = 2000$  TeV, o que corresponde, no referencial do centro de massa, a  $\sqrt{s} \sim 4$  TeV, ou seja, já bastante afastado do domínio dentro do qual foram efetuadas as parametrizações usadas nos diversos modelos ( $\sqrt{s} \sim 1$  TeV).
- ii) A observação atenta do espectro integral representado na Figura 5.6 sugere que esse evento tem algumas características de uma superfamília constituída, não por um mas sim, por dois nucleons “líderes”, com energias diferentes. A concavidade acentuada no início do gráfico torna o espectro compatível com a superposição de duas curvas. Além disso o último ponto experimental está em torno de  $I_H = 2$  e não 1, indicando a possibilidade da câmara ter sido atravessada por duas partículas “líderes”, cada uma proveniente de uma cascata, superposta à outra.
- iii) Esse mesmo comportamento é o que se observa na análise do espectro de energia do evento conhecido por “Andromeda”<sup>1</sup>, que não foi descrito aqui por não acrescentar nenhuma informação a mais do que se obtém com “Mini-Andrômeda III”.

Feita essa ressalva, constatamos estar diante de um critério, indicando que é possível descrever analiticamente certos eventos de superfamílias hadrônicas da radiação cósmica na atmosfera, com energia hadrônica total visível da ordem de até pelo menos 1000 TeV. Para tanto é suficiente admitir as hipóteses, bastante simples, apresentadas no Capítulo 2, desde que se adote a violação do “scaling” de Feynman no processo de produção múltipla de partículas e se imponha auto consistência entre a elasticidade e a inelasticidade médias (caso Simétrico).

A nossa escolha particular de parametrização da função de distribuição de elasticidade  $f(\sigma)$ , dada pela eq. (5.1), que permite alcançar os ajustes aos dados de raios cósmicos, merecem uma análise mais detida. Tomando os valores de  $\beta_N = \beta_\pi = \beta$  para o caso simétrico da Tabela 5.1 e os da Tabela 5.2 podemos construir a Tabela 5.3 reunindo os valores médios do  $\beta$ , para cada modelo de produção múltipla. A cada valor de  $\langle \beta \rangle$  corresponde também um valor de  $\langle K \rangle$  calculado a partir da condição de auto consistência local, eq. (5.4).

<sup>1</sup>O evento “Andromeda”, detectado em 1969 pela Colaboração Brasil-Japão em Chacaltaya, marcou a descoberta do primeiro evento com halo, no caso um halo gigante com  $\Sigma E_{vis}^{halo} \sim 21000$  TeV [27].

Para efeito de comparação incluímos na Tabela 5.3 os valores efetivos assumidos por  $\langle K \rangle$  nos ajustes de “Ursa Maior”. É interessante notar que os resultados médios dos vários eventos concorrem para o resultado obtido com “Ursa Maior”, que é sem dúvida onde os melhores ajustes foram alcançados. Traçamos as curvas de distribuição de elasticidade usando esses valores médios  $\langle \beta \rangle$ , como mostra a Figura 5.7. Percebemos que em todas as situações a distribuição é crescente, sendo obviamente a do Modelo 1(a): “JBF UA5” a mais acentuada.

O fato de que em todos os casos a distribuição é maior em  $\sigma \sim 1$  significa que a partícula líder é extremamente privilegiada nas colisões. Ora, isso é o que se verifica experimentalmente, por exemplo, no evento “P3'-C1-B90”, como ilustra a Figura 5.8, extraída da Ref.[29].

A figura representa curvas isodensitométricas, que correspondem às distribuições de densidade fotométricas, registradas nos filmes de Raio-X. É impressionante que, ao lado da vasta dispersão lateral, a configuração principal do evento persiste atravessando até a placa mais profunda, nas câmaras superior e inferior, sem mudança apreciável. Esse fato caracteriza o aspecto extremamente penetrativo da componente hadrônica deste evento, e justifica o uso de uma distribuição  $f(\sigma)$  tão acentuada como a que aparece na Figura 5.7.

### 5.3.3 De Eventos Centauros

Feita a análise de superfamílias, cabe a curiosidade com respeito aos eventos Centauros, dos quais dois foram relacionados no Capítulo 3. Apresentamos na Figura 5.9 a tentativa de ajuste do evento Centauro I, por meio dos Modelos 1(b): “JBF UA5+7” e 2: “Capdevielle  $Z_{eff}$ ”. Apesar da energia hadrônica total viável estar bem abaixo de 1000 TeV o ajuste não é adequado. Com o Modelo 1(a): “JBF UA5” tentamos o ajuste de Centauro VII, como ilustra a Figura 5.10. A descrição do evento também não é satisfatória.

Com a rápida inspeção das Figuras 5.9 e 5.10, conclui-se que as hipóteses utilizadas no contexto dessa pesquisa são *insuficientes* para explicar eventos de natureza tão complexa, justificando-lhes a denominação de exóticos.

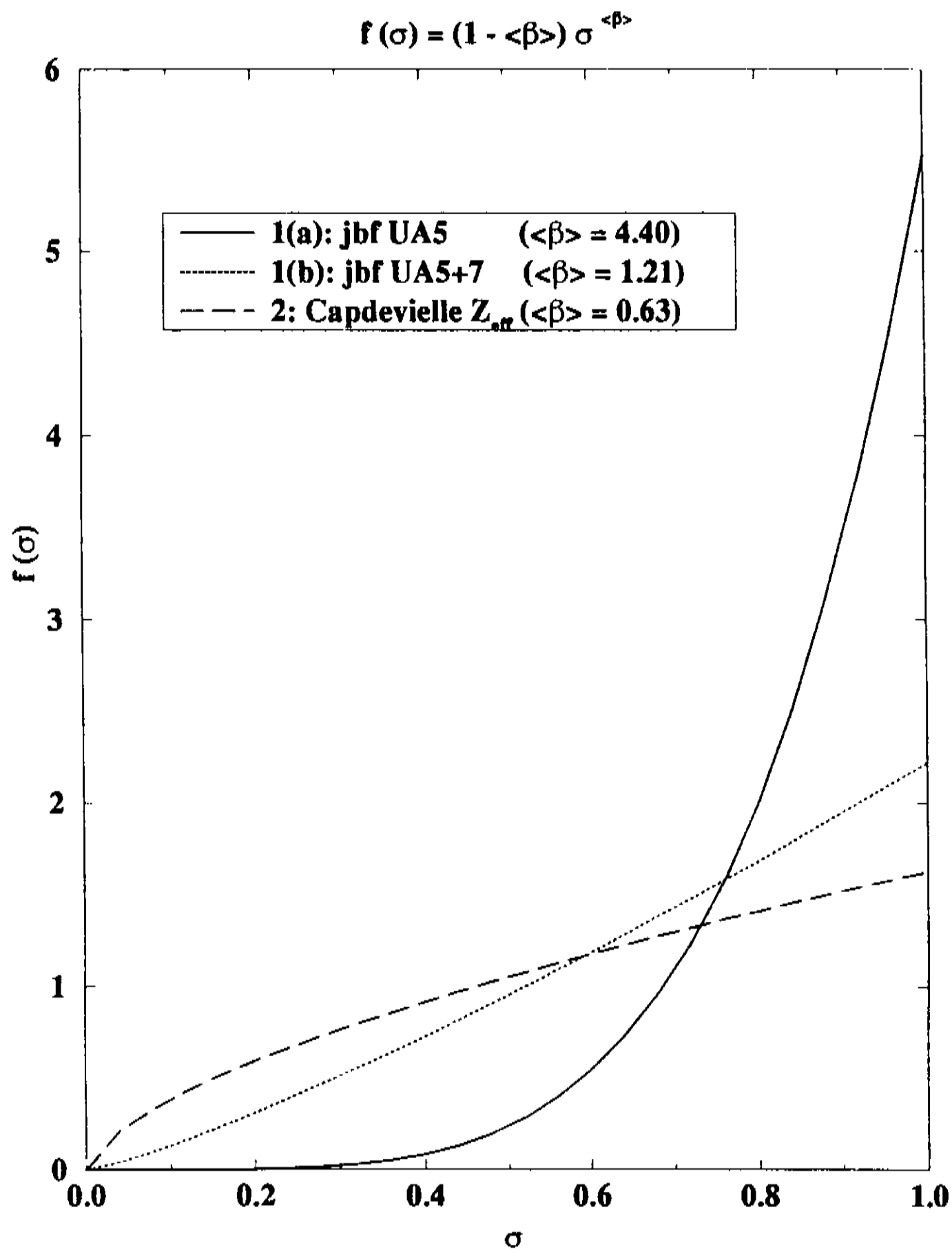


Figura 5.7: Distribuição de Elasticidade  $f(\sigma) = (1 + \beta)^\beta$  usando o valor médio  $\langle \beta \rangle$ , obtido com cada modelo de produção múltipla nos ajustes de fluxo integral (veja Tabela 5.3) .



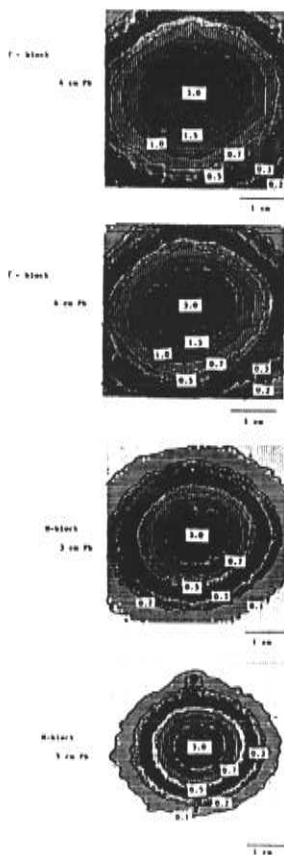


Figura 5.8: Mapa isodensitométrico do evento "P3'-C1-B90" em 4 profundidades diferentes nas placas de chumbo, atravessando tanto a câmara superior ("Γ-block") como a inferior ("H-block"). Extraído da Ref.[29].

## Centauro I (Chacaltaya)

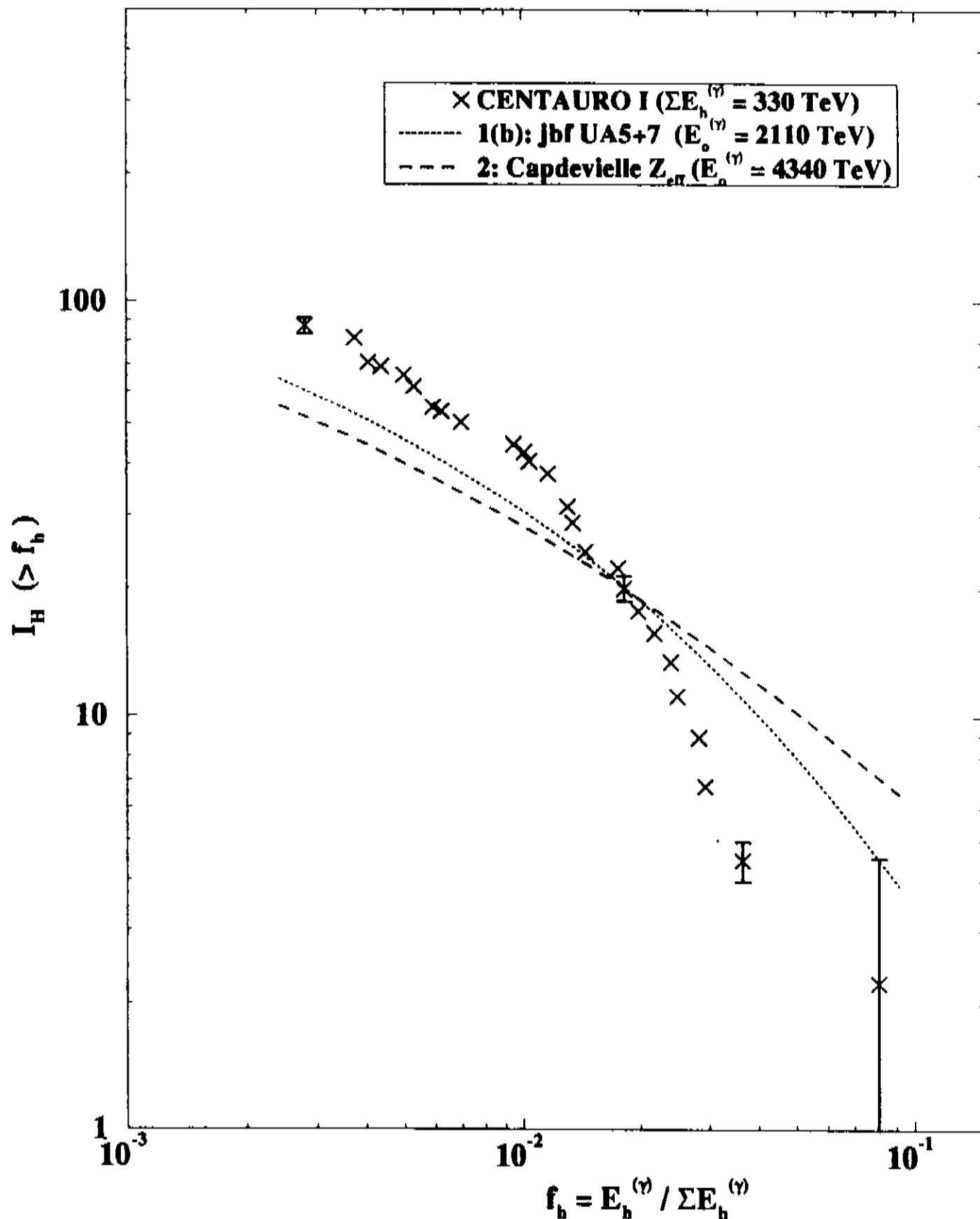


Figura 5.9: Espectro Integral de Energia Hadrônica do evento “Centauro I”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3), segundo os modelos de produção múltipla 1(b): JBF UA5+7 (curva contínua) e 2: Capdevielle (curva tracejada).  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido por cada ajuste.

## Centauro VII (Chacaltaya)

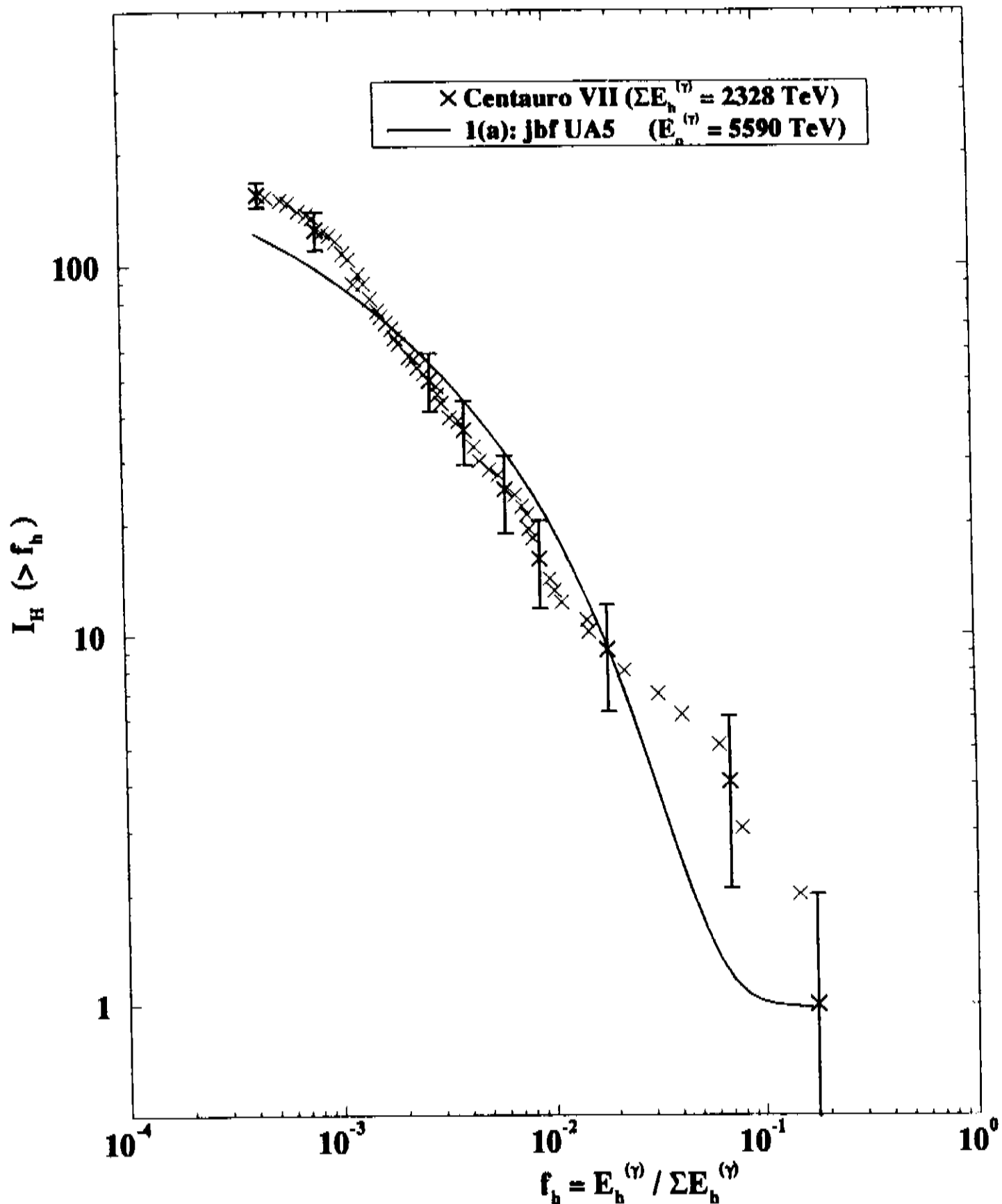


Figura 5.10: Espectro Integral de Energia Hadrônica do evento “Centauro VII”, ajustado com distribuição de elasticidade auto consistente simétrica (caso 3), segundo o modelo de produção múltipla 1(a): JBF UA5 (curva contínua).  $E_0^{(\gamma)}$  indica o valor da energia hadrônica visível do nucleon primário, obtido no ajuste.

Tabela 5.2: Fluxo Hadrônico Integral - Local Simétrico

$$f(\sigma_N) = f(\sigma_\pi) \text{ com } f(\sigma_i) = (1 + \beta) \sigma_i^\beta$$

| EVENTO                                  | MODELOS     | $E_0^\gamma$ (TeV) | $T_N$ | $\langle K \rangle$ | $\beta$ | $\chi^2$ |
|---|-------------|--------------------|-------|---------------------|---------|----------|
| P3'-C1-B90<br><br>(Pamir)<br>229 TeV    | JBF UA5     | 1100               | 3,71  | 0,18                | 3,42    | 1,7      |
|   | JBF UA5+7   | 1140               | 5,02  | 0,34                | 0,96    | 3,4      |
|   | Capdevielle | 3050               | 7,45  | 0,40                | 0,47    | 16,8     |
| C141G4836<br><br>(Pamir)<br>482 TeV     | JBF UA5     | 2250               | 7,45  | 0,17                | 4,03    | 20,8     |
|   | JBF UA5+7   | 3863               | 7,45  | 0,31                | 1,19    | 40,0     |
|   | Capdevielle | 8491               | 7,45  | 0,38                | 0,60    | 280,     |
| M. A. III<br><br>(Chacalt.)<br>1986 TeV | JBF UA5     | 11300              | 6,75  | 0,13                | 5,68    | 13,9     |
|   | JBF UA5+7   | 15600              | 6,75  | 0,29                | 1,46    | 17,5     |
|   | Capdevielle | 38700              | 6,75  | 0,36                | 0,80    | 95,5     |

Tabela 5.3: Distribuição Auto Consistente com  $\langle \beta \rangle$ 

$$f(\sigma) = (1 + \langle \beta \rangle) \sigma^{\langle \beta \rangle}$$

$$\langle K \rangle = 1 / (2 + \langle \beta \rangle)$$

| MODELO            | $\langle \beta \rangle$ | $\langle K \rangle$ | $\langle K_{ursa} \rangle$ |
|-------------------|-------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1(a)<br>JBF UA5   | 4,40                    | 0,16                | 0,15                       |
| 1(b)<br>JBF UA5+7 | 1,21                    | 0,31                | 0,31                       |
| 2<br>Capdevielle  | 0,63                    | 0,38                | 0,38                       |



# Capítulo 6

## Conclusão

Mostramos nesta pesquisa, como se obter analiticamente as soluções exatas das equações de difusão para a componente hadrônica de uma cascata da radiação cósmica induzida por um único nucleon, a uma determinada profundidade atmosférica, . As soluções são escritas no plano real, através de funções analíticas ou de simples integrais de convolução.

Adotamos o modelo da partícula líder, e tomamos o livre caminho médio de interação nucleon-ar e pión-ar constantes. Desprezamos o decaimento dos píons em muons, a produção de píons por píons e a produção múltipla de mésons mais pesados. Descrevemos a produção múltipla de píons segundo a violação da Lei de “scaling” de Feynman. Utilizamos uma escolha particular para a distribuição normalizada de elasticidade, impondo a chamada auto consistência local simétrica.

Com essas hipóteses simples, conseguimos obter uma concordância muito boa entre os resultados analíticos e as medidas de espectro de energia hadrônica para superfamílias da radiação cósmica, com energia hadrônica total visível da ordem de  $\sim 1000$  TeV, detectadas em câmaras de emulsão nuclear, em altitudes de montanha.

Chamamos a atenção para o fato de que, apesar do comportamento do fluxo hadrônico com “scaling” de Feynman ser bastante razoável, é impossível descrever os dados de espectro de energia de superfamílias sem introduzir a violação do “scaling”. Dos modelos de produção múltipla analisados, JBF e Capdevielle, parametrizados exclusivamente a partir de dados de aceleradores, o primeiro conduziu aos melhores ajustes das soluções, eqs.(5.9) e (5.11), aos dados de raios cósmicos.

Por exemplo, a energia do primário, ajustada pelo modelo JBF “UA5”, para a família “P3’-C1-B90” é  $E_0^{(\gamma)} = 1100$  TeV, que corresponde no sistema do centro de massa a  $\sqrt{s} = 2,9$  TeV; com a interação primária ocorrendo a 3,7 l.c.m. nucleônicos acima da câmara ( $\sim 4,8$  km). Para “Ursa Maior”, obtem-se  $E_0^{(\gamma)} = 3660$  TeV, ou seja  $\sqrt{s} = 6,0$  TeV; com a interação primária a 5,9 l.c.m. nucleônicos acima da câmara ( $\sim 14$  km).

As energias obtidas nestes ajustes são razoáveis, estando mesmo próximas da região do Tevatron ( $\sqrt{s} = 1,8$  TeV). Verifica-se, assim, a vali-

dade da extrapolação dos resultados de aceleradores, a partir de dados de distribuição de densidade de rapidez, para a região de altas energias, dos experimentos em câmaras de emulsão.

Observamos que a análise satisfatória dos eventos, nesta faixa de energia, dispensa a introdução de mecanismos especiais de hadronização (como os eventos exóticos) ou a presença de primários pesados (como hélio ou ferro).

Contudo, a descrição de eventos com energia hadrônica total visível muito acima de 1000 TeV só é parcialmente atingida, sugerindo a necessidade de admitir, por exemplo, a superposição de duas cascatas, originadas por nucleons com energias diferentes.

Além disso, atesta-se a inadequação dos modelos simples aqui assumidos na tentativa de descrever os eventos Centauros, justificando que sejam chamados de eventos “exóticos”.

Em nossa análise utilizamos o livre caminho médio de interação constante, mas é possível introduzir a dependência energética  $\lambda(E)$ , nos moldes do que tem sido feito no caso da cascata iniciada no topo da atmosfera por um fluxo primário na forma de espectro de potência [48]. Também se pode generalizar a autoconsistência entre a elasticidade e a inelasticidade médias, introduzindo a inelasticidade  $\langle K(E) \rangle$  dependente da energia [49].

Embora tenhamos nos limitado à produção múltipla de píons por nucleons, os cálculos podem ser estendidos para incluir a produção de píons por píons, ou a produção de mésons mais pesados. Quanto à produção de píons por píons, resultados preliminares obtidos com simulação de Monte Carlo mostram que a contribuição deste termo não afetará muito o resultado final. A introdução de mésons pesados segue o procedimento usado com os píons.

A extensão do cálculo para o caso tridimensional [50] permite descrever grandezas associadas ao desenvolvimento lateral da cascata hadrônica, como por exemplo a distribuição lateral quadrática média.

Outras ampliações seriam a aplicação do formalismo para descrever eventos induzidos por dois nucleons na atmosfera, com energias primárias diferentes (tendo em vista eventos do tipo “Mini-Andromeda III”), e a aplicação do fluxo piônico para estimar o fluxo relativo à componente eletromagnética das superfamílias da radiação cósmica na atmosfera.

Algumas dessas modificações ou extensões já se encontram atualmente em andamento, cujos resultados serão oportunamente publicados.

# Apêndice A

## Transformada de Mellin

### A.1 Definição

Seja a função  $f(x)$  definida no plano real, com  $x \in \mathfrak{R}$  e  $G(s)$  definida no plano complexo, com  $s$  complexo. Denomina-se, então,

$$G(s) = \mathcal{M} \{f(x)\} \equiv \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad , \quad (\text{A.1})$$

a *Transformada de Mellin* de  $f(x)$ , desde que a integral seja convergente na região do plano complexo determinada pela parte real de  $s$ .

A função  $f(x)$  é chamada de *Transformada Inversa de Mellin* de  $G(s)$ . Dentro de certas condições, a Transformada Inversa pode ser representada por uma integral no plano complexo,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s) x^{-s} ds. \quad (\text{A.2})$$

Outra forma equivalente de definir a Transformada de Mellin é fazendo-se a mudança  $s \rightarrow s + 1$ , de modo que,

$$F(s) = \mathcal{M} \{f(x)\} \equiv \int_0^{\infty} f(x) x^s dx. \quad (\text{A.3})$$

Neste caso, a Transformada Inversa de Mellin se escreve,

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-(s+1)} ds \quad . \quad (\text{A.4})$$

Por conveniência, passamos a usar as definições das eqs. (A.3) e (A.4), para a Transformada de Mellin e sua inversa, ao longo deste texto. Para um estudo mais completo deste assunto, recomenda-se a consulta ao livro de *Sneddon* [51].



## A.2 Representação da função delta

Seja  $f(x) = \delta(x - x_0)$ , com  $0 < x_0 < \infty$ . Neste caso,

$$F(s) = \mathcal{M} \{ \delta(x - x_0) \} = \int_0^{\infty} \delta(x - x_0) x^s dx \quad , \quad (\text{A.5})$$

ou,

$$F(s) = x_0^s \quad . \quad (\text{A.6})$$

A Transformada Inversa se escreve, portanto,

$$\mathcal{M}^{-1} \{ F(s) \} = \mathcal{M}^{-1} \{ x_0^s \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x_0^s x^{-(s+1)} ds \quad , \quad (\text{A.7})$$

de modo que,

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{x} \left( \frac{x_0}{x} \right)^s ds \quad , \quad (\text{A.8})$$

é a *Representação de Mellin* para a função delta.

## A.3 Transformada inversa de $x_0^s (s + a)^{-n}$

Seja  $R^{(n)}(x)$  a Transformada Inversa de Mellin de  $x_0^s (s + a)^{-n}$ .

Para  $n = 0$ ,

$$R^0(x) = \mathcal{M}^{-1} \{ x_0^s \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{x} \left( \frac{x_0}{x} \right)^s ds \quad , \quad (\text{A.9})$$

que pela eq. (A.8) é a própria função delta,

$$R^0(x) = \delta(x - x_0) \quad . \quad (\text{A.10})$$

Para  $n \geq 1$ ,

$$R^n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{(s + a)^n} \frac{1}{x} \left( \frac{x_0}{x} \right)^s ds \quad . \quad (\text{A.11})$$

Pelo *Teorema Integral de Cauchy* [10],

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s)}{(s + \alpha)^n} ds \Big|_{\alpha = -\alpha_0} = \frac{1}{(n - 1)!} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} f(\alpha) \Big|_{\alpha = -\alpha_0} \quad . \quad (\text{A.12})$$

No caso,

$$f(\alpha) = \frac{1}{x} \left( \frac{x_0}{x} \right)^\alpha = \frac{1}{x} e^{\alpha \ln(x_0/x)} \quad ; \quad (\text{A.13})$$

Logo,

$$\frac{d}{d\alpha} f(\alpha) = \frac{1}{x} [\ln(x_0/x)] e^{\alpha \ln(x_0/x)} \quad . \quad (\text{A.14})$$

Aplicando eq. (A.14)  $(n - 1)$  vezes,

$$\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} f(\alpha) = \frac{1}{x} [\ln(x_0/x)]^{n-1} e^{\alpha \ln(x_0/x)} \quad . \quad (\text{A.15})$$

Portanto, com a eq. (A.15) em (A.12) , calculamos  $R^{(n)}(x)$ ,

$$\begin{aligned} R^{(n)}(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{x} [\ln(x_0/x)]^{n-1} e^{-a \ln(x_0/x)} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} [\ln(x_0/x)]^{n-1} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x_0}\right)^a \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

No caso em que  $a = 1$ :

$$\begin{aligned} R^{(n)}(x) &= \mathcal{M}^{-1} \left\{ \frac{x_0^s}{(s+1)^n} \right\} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} [\ln(x_0/x)]^{n-1} \frac{1}{x_0} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

No caso em que  $a = 1 + \beta$ :

$$\begin{aligned} R^{(n)}(x) &= \mathcal{M}^{-1} \left\{ \frac{x_0^s}{(s+1+\beta)^n} \right\} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} [\ln(x_0/x)]^{n-1} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1+\beta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$



# Apêndice B

## Operadores Expansionais

Apresentamos a definição e os elementos básicos do Cálculo de Ordenação de Operadores Exponenciais de Feynman [14], também conhecido por Cálculo de *Operadores Expansionais* [15].

### B.1 Definição

Seja  $\hat{T}$  o operador de transformação, gerado pelo operador funcional  $\hat{H}(\lambda)$  e definido por

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right] = \\ &= \hat{I} + \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) + \int_{\sigma}^{\tau} d\mu \hat{H}(\mu) \int_{\sigma}^{\mu} d\lambda \hat{H}(\lambda) + \dots\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

onde  $\hat{I}$  representa o operador identidade,  $\lambda$  é um parâmetro real definido no intervalo  $\sigma < \lambda < \tau$  e o símbolo “Exp” é denominado de Expansional.

O operador  $\hat{T}$  corresponde ao produto infinito de transformações infinitesimais  $\hat{I} + d\lambda \hat{H}(\lambda)$ , arrançados em ordem posicional da direita para a esquerda e correspondendo à sucessão do parâmetro de ordenação  $\lambda$  (de  $\sigma$  até  $\tau$ ).

Outra forma de representar o Expansional é através da série infinita,

$$\hat{T} = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}^{(n)} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right], \quad (\text{B.2})$$

onde os termos da série obedecem à lei de recorrência,

$$\text{Exp}^{(n+1)} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right] = \int_{\sigma}^{\tau} d\mu \hat{H}(\mu) \text{Exp}^{(n)} \left[ \int_{\sigma}^{\mu} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right], \quad (\text{B.3})$$

com o primeiro termo dado por

$$\text{Exp}^{(1)} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right] = \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \quad . \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Propriedades

Mostra-se que a derivação do Expansional, com respeito ao parâmetro  $\tau$  obedece a

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right] = \hat{H}(\tau) \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right] \quad . \quad (\text{B.5})$$

Essa propriedade fornece um procedimento para resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem, envolvendo operadores,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau) = \hat{H}(\tau) F(\tau) \quad , \quad (\text{B.6})$$

bastando escrever

$$F(\tau) = \alpha_0 \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \hat{H}(\lambda) \right] \quad . \quad (\text{B.7})$$

A constante  $\alpha_0$  é determinada pela condição inicial,

$$F(\tau = \sigma) = \alpha_0 \hat{I} = \alpha_0 \quad . \quad (\text{B.8})$$

Muitas outras propriedades importantes podem ser deduzidas (cf. Refs. [14, 15]), mas destacamos ainda uma última situação. Seja  $\hat{H}$  um operador independente do parâmetro  $\lambda$ ,

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H} \quad .$$

Neste caso, e apenas neste caso,

$$\text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} \hat{H} d\lambda \right] = \exp \left\{ \hat{H} (\tau - \sigma) \right\} \quad , \quad (\text{B.9})$$

onde aqui “exp” representa a exponencial, que atuando sobre um operador deve ser entendida no sentido de uma série de potências de  $\hat{A} = \hat{H} (\tau - \sigma)$ ,

$$\exp \hat{A} = \hat{I} + \hat{A} + \frac{1}{2} \hat{A} \hat{A} + \dots \quad (\text{B.10})$$

# Apêndice C

## Produção Múltipla, $dN/d\eta^*$ e $\langle K \rangle$

### C.1 Variável de Feynman e pseudo-rapidez

A variável  $x$  de “scaling” de Feynman [24] é definida por

$$x \equiv \frac{p_L}{E_0} \quad , \quad (\text{C.1})$$

onde  $p_L$  é o *momento longitudinal* (da partícula produzida) e  $E_0$  é a energia total inicial. No caso de partículas detectadas em altíssimas energias ( $E > 10^{12}$  eV), o momento longitudinal é muito maior do que a sua *massa de repouso*  $m_0$ , ou do que o seu *momento transversal*  $p_T$  - ou, resumindo,  $p_L$  é muito maior do que a sua *massa transversal*,

$$m_T = \sqrt{p_T^2 + m_0^2} \quad . \quad (\text{C.2})$$

Desse modo,

$$E = \sqrt{p_L^2 + m_T^2} \approx p_L \quad ,$$

ou seja,

$$x \approx \frac{E}{E_0} \quad . \quad (\text{C.3})$$

Da cinemática relativística das colisões a altas energias [52], define-se a *rapidez*  $y$ ,

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{E + p_L}{E - p_L} \right] \quad , \quad (\text{C.4})$$

e a *pseudo-rapidez*,

$$\eta \equiv \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{p_L^2 + p_T^2} + p_L}{\sqrt{p_L^2 + p_T^2} - p_L} \right] \quad . \quad (\text{C.5})$$

Mais uma vez, no limite de altas energias,

$$P_L \approx E \gg P_T \Rightarrow y \approx \eta \quad , \quad (C.6)$$

relação também válida no *referencial do centro de massa* (r.c.m.):

$$y^* \approx \eta^* \quad .$$

Dentro dessas aproximações, pode-se mostrar que a variável de Feynman está relacionada à pseudo-rapidez através da expressão

$$x \simeq \frac{p_T}{\sqrt{s}} e^{\eta^*} \quad , \quad (C.7)$$

onde  $s$  é a variável de Mandelstan, de modo que  $\sqrt{s}$  representa a energia total no r.c.m., relacionada com a energia total no laboratório por

$$s = 2 m_p E_0 \quad , \quad (C.8)$$

tal que  $m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$  é a massa do proton.

## C.2 Espectro de produção múltipla

Define-se *densidade de partículas produzidas por intervalo de pseudo rapidez*  $dN/d\eta^*$ , como sendo

$$\frac{dN}{d\eta^*} \equiv \frac{1}{\sigma_{inel}} \frac{d\sigma}{d\eta^*} \quad , \quad (C.9)$$

onde  $\sigma_{inel}$  é a seção de choque total inelástica e  $d\sigma$  é a seção de choque diferencial na produção de determinada partícula.

Tomamos a liberdade de chamar  $dN/d\eta^*$  simplesmente de “*densidade de rapidez*”, por brevidade.

Recorrendo à eq. (C.7) da variável de Feynman em função da pseudo-rapidez, temos que

$$\frac{dx}{d\eta^*} = x \quad , \quad (C.10)$$

de modo que podemos escrever,

$$\frac{1}{\sigma_{inel}} \frac{d\sigma}{d\eta^*} = \frac{1}{\sigma_{inel}} \frac{d\sigma}{dx} x \quad , \quad (C.11)$$

ou ainda,

$$\frac{dN}{d\eta^*} = \frac{dN}{dx} x \quad , \quad (C.12)$$

onde definimos  $dN/dx$ , a *densidade de partículas produzidas por unidade de  $x$* , em analogia com a eq. (C.9).

Do mesmo modo, é fácil verificar que, em termos da energia de laboratório,

$$\frac{dN}{d\eta^*} = \frac{dN}{dE} E \quad . \quad (C.13)$$

A densidade  $dN/dE$  de partículas produzidas por intervalo de energia  $E$  é o que chamamos também de *espectro de produção múltipla*,  $g(E, E_0)$ . Desse modo, podemos escrever,

$$g(E, E_0) dE = \left[ \frac{dN}{d\eta^*} \right] \frac{dE}{E} \quad . \quad (C.14)$$

Assim é que através de modelos para a densidade de rapidez  $dN/d\eta^*$  ajustados para descrever dados de aceleradores, podemos escrever o espectro de produção múltipla  $g(E, E_0)$ , usando-o para ajustar dados de raios cósmicos detectados em câmaras de emulsão.

Por exemplo, no caso do “scaling” de Feynman,

$$\frac{dN}{d\eta^*} = A \left( 1 - \frac{p_T}{\sqrt{s}} e^{\eta^*} \right)^4 = A(1 - x)^4 \quad , \quad (C.15)$$

e, portanto,

$$\frac{dN}{dx} = A \frac{(1 - x)^4}{x} \quad , \quad (C.16)$$

ou ainda,

$$g(E, E_0) dE = A \left( 1 - \frac{E}{E_0} \right)^4 \frac{dE}{E} \quad , \quad (C.17)$$

que é insensível a mudanças de escala na energia, pois depende tão somente da razão  $E/E_0$ .

### C.3 Cálculo de elasticidade média

Na produção múltipla de píons, supomos iguais probabilidades de gerar  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  e  $\pi^0$ . Assim, a fração de energia levada pelo  $\pi^0$  é igual a do  $\pi^+$  ou do  $\pi^-$ , cada um dos quais carregando, por sua vez, a metade da energia gasta na produção de partículas carregadas. Se  $\langle x \rangle$  denota a fração de energia gasta com partículas carregadas, então a *inelasticidade total* é

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \langle x \rangle \quad ,$$

ou, explicitamente,

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \int_0^1 x \left( \frac{dN}{dx} \right) dx \quad . \quad (C.18)$$



Por exemplo, a constante que aparece no espectro de produção com “scaling” de Feynman foi escolhido como sendo  $A = 5/3$ , de tal modo que

$$\langle K \rangle_{FS} = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{5}{3} (1-x)^4 dx = \frac{1}{2} \quad , \quad (C.19)$$

para ficar em acordo com os dados de aceleradores, a “baixas” energias.

De um modo geral, em termos da densidade de rapidez,

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \frac{p_T}{\sqrt{s}} \int_0^{\eta_{kin}^*} e^{\eta^*} \left( \frac{dN}{d\eta^*} \right) d\eta^* \quad , \quad (C.20)$$

onde o limite inferior na integral foi aproximado a zero e o superior é dado pela cinemática relativística das colisões, e vale

$$\eta_{kin}^* = \ln \left[ \frac{\sqrt{s}}{m_p} \right] \quad . \quad (C.21)$$

## C.4 O “Corte” de Ohsawa

No caso do espectro de produção múltipla de Bellandi *et al.* [4],

$$\frac{dN}{dx} = A \left( \frac{s}{s_0} \right)^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{s}{s'_0} \right)^{\alpha'} x \right]^4 \frac{1}{x} \quad . \quad (C.22)$$

Pode-se observar que para uma dada energia  $\sqrt{s}$  no r.c.m., a eq. (C.22) se anula, quando

$$x_{corte} = \left( \frac{s}{s'_0} \right)^{-\alpha'} \quad , \quad (C.23)$$

o que corresponde em pseudo-rapidez a

$$\eta_{corte}^* = \ln \left[ \frac{\sqrt{s}}{p_T} \left( \frac{s}{s'_0} \right)^{-\alpha'} \right] \quad , \quad (C.24)$$

e em energia de laboratório a

$$E_{corte} = E_0 \left( \frac{E_0}{E'_s} \right)^{-\alpha'} \quad , \quad (C.25)$$

com  $E'_s = s'_0/2m_p$ .

Como foi observado por A.Ohsawa, quando  $x$  é maior do que  $x_{corte}$  a função dada pela eq. (C.22) cresce muito rápido, ao contrário do que se verifica experimentalmente. A fim de dar um sentido físico a essa expressão, deve-se efetuar um corte em  $x = x_{corte}$  (ou  $E = E_{corte}$ ). Feito isso, não é difícil de se mostrar que a inelasticidade média, eq. (C.18), com a produção múltipla dada por (C.22), pode ser calculada explicitamente, obtendo-se

$$\langle K \rangle_{JBF} = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{s_0} \right)^\alpha \left( \frac{s}{s'_0} \right)^{-\alpha'} . \quad (C.26)$$

Nos cálculos do fluxo integral hadrônico, utilizando este modelo de produção múltipla, as integrais em energia também devem ser limitadas por  $E = E_{\text{corte}}$ , quando este valor é menor do que  $E_0$ .



# Apêndice D

## Fluxo Piônico Assimétrico

No Capítulo 5 definimos o Caso 2: Assimétrico para as distribuições de elasticidade, tal que

$$f(\sigma_i) = (1 + \beta_i) \sigma_i^{\beta_i} \quad (i = N, \pi) \quad ,$$

com

$$\beta_N = \frac{1}{\langle K(E_0) \rangle} - 2 \Rightarrow \langle \sigma_N \rangle = 1 - \langle K(E_0) \rangle \quad ;$$
$$\beta_\pi = 0 \Rightarrow \langle \sigma_\pi \rangle = 1/2 \quad .$$

A solução para o fluxo nucleônico só depende de  $\beta = \beta_N$  e portanto é dada simplesmente pela eq. (5.9) do Capítulo 5,

$$F_N(E, E_0, t, t_0) =$$
$$e^{-T_N} \left[ \delta(E - E_0) + \frac{1}{E} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{1+\beta_N} (1 + \beta_N) T_N \frac{2 I_1(u_{\beta N})}{u_{\beta N}} \right], \quad (D.1)$$

com

$$u_{\beta N} = 2 \sqrt{(1 + \beta_N) T_N \ln(E_0/E)} \quad . \quad (D.2)$$

Mas com o fluxo piônico a questão é diferente. No Capítulo 2 o fluxo piônico foi calculado com  $f(\sigma_N) = f(\sigma_\pi) = 1$ , portanto não é difícil escrever a extensão do caso uniforme para o simétrico, em que  $f(\sigma_N)$  continua igual a  $f(\sigma_\pi)$ : basta introduzir termos  $(1 + \beta)$  em “posições estratégicas”. Mas quando, a priori,  $f(\sigma_N) \neq f(\sigma_\pi)$  então o cálculo precisa ser refeito desde o início. Vejamos os passos principais deste cálculo.

Reescrevemos novamente a solução formal da componente piônica, eq. (2.26) do Capítulo 2, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
F_\pi(E, E_0, t, t_0) = & \\
& \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \int_E^{E_0} dE'' \left[ \exp \left\{ -\frac{(t-z)}{\lambda_\pi} (1 - \hat{\sigma}_\pi) \right\} \delta(E - E'') \right] \\
& \times \int_{E''}^{E_0} dE' \hat{\Sigma}_N \delta(E'' - E') F_N(E', E_0, z, t_0) \quad . \quad (D.3)
\end{aligned}$$

A solução nucleônica  $F_N(E', E_0, z, t_0)$  é conhecida, bastando usar

$$E \rightarrow E'$$

$$t \rightarrow z$$

na eq. (D.1). Sabemos também que

$$\hat{\Sigma}_N \delta(E'' - E') = g(E'' - E') \quad .$$

Basta finalmente identificar o termo entre colchetes, no lado direito da eq. (D.3), como tendo a mesma dependência funcional que a solução formal nucleônica dada pela eq. (2.28), de modo que também pode ser escrita em analogia com a eq. (D.1), fazendo as modificações

$$E_0 \rightarrow E''$$

$$T_N \rightarrow \frac{(t-z)}{\lambda_\pi}$$

$$\beta_N \rightarrow \beta_\pi$$

É assim que, “sem fazer” conta alguma, podemos escrever o resultado:

$$\begin{aligned}
F_\pi(E, E_0, t, t_0) = & \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \int_E^{E_0} dE'' \int_{E''}^{E_0} dE' g(E'', E') \times \\
& \times e^{-\frac{t-z}{\lambda_\pi}} \left\{ \delta(E - E'') + \frac{1}{E} \left( \frac{E}{E''} \right)^{1+\beta_\pi} (1 + \beta_\pi) \frac{t-z}{\lambda_\pi} \frac{2 I_1(u_A)}{u_A} \right\} \times \\
& \times e^{-\frac{z-t_0}{\lambda_N}} \left\{ \delta(E' - E_0) + \frac{1}{E'} \left( \frac{E'}{E_0} \right)^{1+\beta_N} (1 + \beta_N) \frac{z-t_0}{\lambda_N} \frac{2 I_1(u_B)}{u_B} \right\}, \quad (D.4)
\end{aligned}$$

onde  $u_A$  e  $u_B$  são funções do tipo da eq. (D.2). Podemos eliminar as funções deltas na expressão (D.4) efetuando os produtos cruzados e integrações em energia, ficando finalmente com a solução da componente piônica no Caso Assimétrico:

$$F_\pi(E, E_0, t, t_0) = \frac{\lambda_\pi}{\lambda_\pi - \lambda_N} g(E, E_0) \left[ e^{-T_\pi} - e^{-T_N} \right] +$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{dz}{\lambda_N} \epsilon^{-T(z)} g(E', E_0) \{ F_\pi^\pi + F_\pi^N + F_\pi^{N\pi} \} \quad (\text{D.5})$$

onde

$$\begin{aligned} F_\pi^\pi &= \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E} \left( \frac{E}{E'} \right)^{1+\beta_\pi} (1 + \beta_\pi) \frac{t - z}{\lambda_\pi} \frac{2 I_1(u_{1\pi})}{u_{1\pi}} g(E', E_0); \\ F_\pi^N &= \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E} \left( \frac{E}{E'} \right)^{1+\beta_N} (1 + \beta_N) \frac{z - t_0}{\lambda_N} \frac{2 I_1(u_{1N})}{u_{1N}} g(E', E_0); \\ F_\pi^{N\pi} &= \int_E^{E_0} \frac{dE''}{E''} \int_{E''}^{E_0} \frac{dE'}{E} \left( \frac{E}{E''} \right)^{1+\beta_\pi} \left( \frac{E''}{E'} \right)^{1+\beta_N} g(E', E_0) \times \\ &\quad \times (1 + \beta_\pi)(1 + \beta_N) \frac{t - z}{\lambda_\pi} \frac{z - t_0}{\lambda_N} \frac{2 I_1(u_{2\pi})}{u_{2\pi}} \frac{2 I_1(u_{2N})}{u_{2N}}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} u_{1N} &= 2 \left[ (1 + \beta_N) \frac{(z - t_0)}{\lambda_N} \ln(E'/E) \right]^{1/2}, \\ u_{2N} &= 2 \left[ (1 + \beta_N) \frac{(z - t_0)}{\lambda_N} \ln(E'/E'') \right]^{1/2}, \\ u_{1\pi} &= 2 \left[ (1 + \beta_\pi) \frac{(t - z)}{\lambda_\pi} \ln(E'/E) \right]^{1/2}, \\ u_{2\pi} &= 2 \left[ (1 + \beta_\pi) \frac{(t - z)}{\lambda_\pi} \ln(E''/E) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

e as outras grandezas estão definidas no Capítulo 2.



# Bibliografia

- [1] C.M.G. Lattes, G.S.P. Occhialini and C.F. Powell, *Nature*, **160**, 486 e 543 (1947).
- [2] E. Gardner and C.M.G. Lattes, *Science*, **107**, 270 (1948).
- [3] S.G. Bayburina *et al.* [Pamir Collaboration, Mt. Fuji Collaboration and Chacaltaya Collaboration], "Nuclear interactions of super high energy cosmic-rays observed in mountains emulsion chambers," *Nucl. Phys.* **B191**, 1-25 (1981).
- [4] J. Bellandi F<sup>o</sup>, S.Q. Brunetto, J.A. Chinellato, C. Dobrigkeit, A. Ohsawa, K. Sawayanagi and E.H. Shibuya, "Nuclear interactions in super high energy region," *Prog. Theor. Phys.* **83**, 58-76 (1990).
- [5] A. Ohsawa and K. Sawayanagi, "Breakdown of Feynman scaling law and cosmic-ray exotic events," *Phys. Rev.* **D45**, 3128-3133 (1992).
- [6] J.N. Capdevielle, "A Monte Carlo generator for cosmic-ray collisions," *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **15**, 909-924 (1989).
- [7] A. Liland, "Analytic evaluation of pion, kaon and muon distributions in the atmosphere," *Fortschritte der Physik*, **23**, 571-606 (1975).
- [8] B. Rossi and K. Greisen, "Cosmic-ray theory," *Rev. Mod. Phys.* **13**, 240-309 (1941).
- [9] J. Nishimura, *Theory of cascade showers*, in *Handbuch der Physik*, Vol. XLVI/2, pp. 1-114, Springer-Verlag, Berlin (1967).
- [10] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Third Ed., Academic Press, San Diego (1985).  
Ponto-de-sela, pp. 428-431; Equações Diferenciais Lineares de 1<sup>a</sup> Ordem, pp.442-443; Bessel Modificada, p. 611; Teorema de Cauchy, pp. 371-373.
- [11] H. Messel and H.S. Green, "The angular and lateral distribution functions for the nucleon component of the cosmic radiation," *Phys. Rev.* **87**, 738-747 (1952); e referências lá contidas.



- [12] H. Messel and H.S. Green, "The general three-dimensional theory of cascade process," Proc. Phys. Soc. (London) **A66**, 1009-1018 (1953); e referências já contidas.
- [13] A. Ohsawa and S. Yamashita, "Behaviour of cosmic rays in the atmosphere at super high energy region," Prog. Theor. Phys. **77**, 1411-1433 (1987).
- [14] R. P. Feynman, "An operator calculus having applications in quantum electrodynamics," Phys. Rev. **84**, 108-128 (1951).
- [15] I. Fujiwara, "Operator calculus of quantized operator," Prog. Theor. Phys. **7**, 433-448 (1952).
- [16] J. Bellandi F<sup>o</sup>, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, C.G.S. Costa and L.M. Mundim F<sup>o</sup>, "Electromagnetic cascades: an alternative solution," J.Phys. A: Math. Gen. **25**, 877-883 (1992).
- [17] J. Bellandi F<sup>o</sup>, S.Q. Brunetto, J.A. Chinellato, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit and M.A. Alves, "Solution of the one dimensional diffusion equation for the hadronic cosmic-ray component in the atmosphere," Nuovo Cim. **14C**, 15-24 (1991).
- [18] J. Bellandi F<sup>o</sup>, S.Q. Brunetto, J.A. Chinellato, R.J.M. Covolan and C. Dobrigkeit, "Solution of the three-dimensional hadronic diffusion equation in the atmosphere," Hadronic Journal **13**, 493-52 (1990).
- [19] L.M. Mundim Filho, "Espectro vertical de muons induzidos por uma cascata hadrônica na atmosfera," Tese de Mestrado (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1990).
- [20] J. Bellandi, C. G. S. Costa, R. J. M. Covolan, C. Dobrigkeit, L.M. Mundim and C.A.B. Salles da Costa, "The energy spectra of the charged hadronic and muonic cascades in the atmosphere," Preprint DRC-IFGW-TH: 04/93, submetido para publicação em J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. (1993).
- [21] J. Bellandi Filho, *Funções Especiais*, Papyrus, Campinas (1985). Função Delta, p. 50; Bessel Modificada, p. 141.
- [22] J. Bellandi F<sup>o</sup>, S.Q. Brunetto, L.M. Mundim F<sup>o</sup>, M.A. Alves, R.J.M. Covolan, A.B. Pádua, J.A. Chinellato and C. Dobrigkeit, "Nucleonic cascade in the atmosphere induced by one single nucleon," Hadronic Journal **13**, 165-181 (1990).
- [23] J. Bellandi, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, C.G.S. Costa and L.M. Mundim, "Three-dimensional nucleonic cascade induced by one single nucleon in the atmosphere," J.Phys G: Nucl. Part. Phys. **18**, 1559-1570 (1992).

- [24] R.P. Feynman, "Very high-energy collisions of hadrons," *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415-1417 (1969).
- [25] C.G.M. Lattes, Y. Fujimoto and S. Hasegawa, "Hadronic interactions of high energy cosmic-ray observed by emulsion chambers," *Phys. Rep.* **65**, 151-229 (1980).
- [26] J.A. Chinellato, "Características principais e análise de um evento ('Ursa Maior') de energia observada da ordem de  $10^{15}$  eV, detectada pela câmara de emulsões nucleares, filmes de raio-X e chumbo Nº 15, da colaboração Brasil-Japão," Tese de Doutorado (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1981).
- [27] S. Yamashita, "The highest energy events observed by Chacaltaya emulsion chambers," *J. Phys. Soc. Jap.* **54**, 529-543 (1985).
- [28] A. Ohsawa and K. Sawayanagi, "Note on  $k_\gamma$  in emulsion chamber experiment," Preprint ICRR-Report-250-91-19 (University of Tokyo).
- [29] L.T. Baradzei *et al.* [Chacaltaya and Pamir Collaboration], "Observation of very high energy cosmic-ray families in emulsion chambers at high mountain altitudes," *Nucl. Phys.* **B370**, 365-431 (1992).
- [30] H. Bielawska, A. Kryś, I. Maciaszczyk, J. Malinowski, M. Tamada and A. Tomaszewski, "Observations of high-energy hadron-gamma families with extremely large lateral spreads," *Nuovo Cim.* **12C**, 763-779 (1989).
- [31] J.A. Chinellato *et al.* [Brazil-Japan Collaboration], "Ultra-high energy cosmic-ray families of Centauro characteristics," XXI ICRC, Adelaide (1990), Vol. **8**, 259-262, HE 2.3-11.
- [32] J.A. Chinellato *et al.* [Brazil-Japan Collaboration], "Two examples of Centauro observed in two different energy domains," XXI ICRC, Adelaide (1990), Vol. **8**, 263-266, HE 2.3-12.
- [33] G.J. Alner *et al.* [UA5 Collaboration], "Scaling of pseudorapidity distributions at c.m. energies up to 0.9 TeV," *Z.Phys.* **C33**, 1-6 (1986).
- [34] J. Wdowczyk and A. Wolfendale, "Inclusive spectra of pions produced in high-energy interaction," *Nuovo Cim.* **54A**, 433-450 (1979).
- [35] J. Bellandi, C.G.S. Costa, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, M.M. Guzzo and L.M. Mundim, "Analysis of the hadronic energy spectrum in high-energy cosmic-ray families detected by emulsion chambers," VII International Symposium on Very High-Energy Cosmic-Ray Interactions, Ann Harbor, Michigan (E.U.A.), 21 a 27 de Junho de 1992.

- [36] J. Wdowczyk and A. Wolfendale, "Properties of hadron interactions at extremely high energies," *J.Phys. G: Nucl. Phys.* **10**, 257-272 (1984).
- [37] J. Wdowczyk and A. Wolfendale, "Breakdown of scaling in high-energy accelerator and cosmic-ray interactions," *J.Phys. G: Nucl. Phys.* **13**, 411-422 (1987).
- [38] E.Pare *et al.* [UA7 Collaboration], "Inclusive production of  $\pi^0$ 's in the fragmentation region at the  $S\bar{p}pS$  Collider," *Phys. Lett.* **B242**, 531-535 (1990).
- [39] A. Capella and J. Tran Thanh Van, "A new parton model description of soft hadron-nucleus collisions," *Phys. Lett.* **B93**, 146-150 (1980).
- [40] Z. Koba, H.B. Nielsen and P. Olesen, "Scaling of multiplicity distributions in high energy hadron collisions," *Nucl. Phys.* **B40**, 317-334 (1972).
- [41] P. Slattery, "Evidence for the onset of semi-inclusive scaling in proton-proton collision in the 50-300 GeV/c momentum range," *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1624-1627 (1972).
- [42] B.S. Acharya and J.N. Capdevielle, "Multi-muon events deep underground and ultra-high-energy collisions," *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **11**, 1387-1399 (1985).
- [43] J. Bellandi F<sup>o</sup>, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, C.G.S. Costa, L.M. Mundim F<sup>o</sup> and J. Dias de Deus, "On the question of the energy dependence of inelasticity," *Phys. Lett.* **279B**, 149-152 (1992).
- [44] J. Bellandi F<sup>o</sup>, R.J.M. Covolan, C. Dobrigkeit, C.G.S. Costa, L.M. Mundim F<sup>o</sup> and J. Dias de Deus, "On the behaviour of inelasticity at very high energy," *Phys. Lett.* **262B**, 102-104 (1991).
- [45] J. Bellandi, R.J.M. Covolan, C.G.S. Costa, J. Montanha and L.M. Mundim, "Partial and total inelasticities obtained from inclusive reaction data," Preprint DRC-IFGW-TH: 06/93, submetido para publicação em *Phys. Rev. Lett.* (1993).
- [46] A. Ohsawa, "Violation of the Feynman scaling law in the forward region," in *Proceedings of the Second Gleb Wataghin School on High Energy Phenomenology*, editado por C. Dobrigkeit Chinellato, J. Bellandi Filho e R. Camargo Rigitano, Unicamp, Campinas (1993).
- [47] J. Bellandi, C. G. S. Costa, R. J. M. Covolan, C. Dobrigkeit, L.M. Mundim and C.A.B. Salles da Costa, "Analytical description of the charged hadronic component of cosmic-ray super-families detected by emulsion chambers," Preprint DRC-IFGW-TH: 03/93, submetido para publicação em *Phys. Lett. B* (1993).

- [48] L. M. Mundim Filho, "Estudo analítico das cascatas hadrônica e muônica na atmosfera e o problema da inelasticidade". Tese de doutorado no IFGW/UNICAMP, em andamento.
- [49] J. Bellandi, L.M.Mundim, J. Dias de Deus and R.J.M. Covolan, "The energy dependence of the inelasticity and the nucleonic cascade", J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **18**, 579-585 (1992).
- [50] C.A.B. Salles da Costa, "Estudo da distribuição lateral da cascata hadrônica induzida por um único nucleon na atmosfera". Tese de doutorado no IFGW/UNICAMP, em andamento.
- [51] I.N. Sneddon, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, New York (1972).
- [52] T. Kanki, K. Kinoshita, H. Sumiyoshi and F. Takagi, "Multiparticle production in particle and nuclear collisions - I," Prog. Theor. Phys. Suppl. **97A**, 1-213 (1989).