

*Este exemplar não pode ser vendido fora  
da sua circulação, isto é, não pode ser vendido  
expressamente pelo comércio livre.*

*Universidade Estadual de Campinas, 16 de Junho de 1990*

*J. Bellandi Filho*

# Espectro Vertical de Múons Induzidos por uma Cascata Hadrônica na Atmosfera

Luiz Martins Mundim Filho

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin  
para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. José Bellandi Filho

Orientador

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia

IFGW - UNICAMP

Campinas - 1990

Dedico este trabalho a todos aqueles que estiveram ao meu lado durante esta caminhada, à minha família e principalmente àqueles a quem tudo devo: meus pais

*Luiz e  
Senhorinha.*

# Agradecimentos

Ao Prof. José Bellandi Filho, pela dedicação e zelo profissional ao abrir meus horizontes, não apenas em relação à pesquisa científica, mas também em relação à vida.

Ao Prof. Antônio Braz de Pádua, pelo incentivo e encaminhamento, sem os quais este trabalho não seria possível.

Ao amigo Helio, que há vários anos me acompanha nessa caminhada, ao Alexandre, Paulo, Claudemir, Jenai e a tantos outros amigos pelo apoio que sempre me dispensaram.

Ao Querino, Marco e aos outros colegas do Grupo Teórico, pela inestimável colaboração e companheirismo.

Aos funcionários do Departamento de Raios Cômicos, em especial Marilena e Sandra. Aos professores e alunos, pelo agradável ambiente de amizade e colaboração, tão importantes no desenvolvimento deste trabalho. Ao Prof. Reinaldo, pela valiosa ajuda na edição desta tese.

À Vera e Marlene, pelas agradáveis recepções nas reuniões do Grupo Teórico.

Ao Instituto de Física Gleb Wataghin por proporcionar as condições

necessárias ao desenvolvimento deste trabalho.

À FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Dados Experimentais</b>	<b>5</b>
<b>2 Operador Expansional</b>	<b>13</b>
2.1 O Método de Ordenação de Operadores . . . . .	14
<b>3 Fluxo de Núcleons</b>	<b>21</b>
3.1 Equação de Difusão . . . . .	22
3.2 Análise Numérica . . . . .	24
<b>4 Fluxo de Píons</b>	<b>29</b>
4.1 Equação de Difusão . . . . .	29
<b>5 Fluxo de Múons</b>	<b>38</b>
5.1 Cinemática do decaimento $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ . . . . .	38

5.2	Equação de Difusão . . . . .	41
5.3	Análise Numérica . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Relação Profundidade-Altitude de Interação</b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

1.1	Dados experimentais de fluxo diferencial primário medido no topo da atmosfera [5]. . . . .	9
1.2	Dados experimentais de fluxo integral de prótons e partículas $\alpha$ obtidas pela colaboração JACEE [4]. . . . .	10
1.3	Dados experimentais de fluxo nucleônico ao nível do mar. * - fluxo de prótons [6]; $\triangleright$ - fluxo de nêutrons [7,8]. . . . .	11
1.4	dados experimentais de fluxo vertical de múons ao nível do mar.* - Ref. [9]; $\triangleright$ - Ref. [10]. . . . .	12
3.1	Fluxo nucleônico dado pela Eq. 3.9 em comparação com dados experimentais ao nível do mar [6,7], calculado com elasticidade média 0.5 ( $\beta_N = 0.0$ ) e 0.33 ( $\beta_N = 1.0$ ). . . . .	27
3.2	Fluxo nucleônico, dado pela Eq. 3.9, em comparação com dados experimentais ao nível do mar [6,7], calculado com elasticidade média 0.43 ( $\beta_N = 0.3$ ). . . . .	28
5.1	Cinemática do decaimento $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ . . . . .	47
5.2	Fluxo muônico, dado pela Eq. 5.22 em comparação com dados experimentais ao nível do mar [9,10]. . . . .	48

5.3	Fluxo muônico calculado usando o modelo de fragmentação [17]. . . . .	49
5.4	Fração de múons produzidos por káons em relação ao fluxo muônico total [14]. . . . .	50
5.5	Evolução do fluxo muônico em função da profundidade (em unidades de $t/\lambda_N$ ) para as energias a) 10 GeV; b) 100 GeV e c) 1000 GeV. . . . .	51
5.6	Fluxo de píons, dado pela Eq. 4.32, com a) $B_\pi = 0$ e b) $B_\pi = 115$ GeV. . . . .	52
5.7	Evolução do fluxo de píons em função da profundidade (em unidades de $t/\lambda_N$ ): linha cheia - $B_\pi = 115$ GeV, linha tracejada - $B_\pi = 0$ , para a) 10 GeV, b) 100 GeV e c) 1000 GeV. . . . .	53
5.8	Comparação entre os fluxos de píons (linha tracejada) e múons (linha cheia) em função da profundidade (em unidades de $t/\lambda_N$ ) e $B_\pi = 115$ GeV. . . . .	54
5.9	Razão entre os fluxos de píons e de múons para $T \leq 0.5$ . . . . .	55

# Resumo

Estuda-se neste trabalho o comportamento vertical das componentes da radiação cósmica na atmosfera na região de altas energias, com livre caminho médio de interação constante, resolvendo-se as equações de difusão no contexto do modelo de partícula líder.

Introduz-se o método de ordenação de operadores exponenciais de Feynman no parâmetro de profundidade, como uma nova sistemática para se resolver as equações de difusão.

Compara-se, então, as soluções obtidas com dados experimentais de raios cósmicos ao nível do mar.

# Abstract

We analyse the vertical behavior of the cosmic-rays components in the atmosphere at the high energy region. Assuming constant the interaction mean free path, we solve diffusion equations with the leading particle model.

In order to solve diffusion equations we use a Feynman-like procedure of ordered exponential operators.

Our solutions are compared with cosmic-rays experimental data at sea level.

# Introdução

Um problema importante para o estudo do comportamento das componentes da radiação cósmica na atmosfera é o da obtenção de soluções analíticas para as equações de difusão das partículas que interagem com os núcleons do ar.

O objetivo deste trabalho é o de dar uma contribuição a esse estudo, apresentando como é possível se resolver o problema de obtenção de soluções analíticas de equações de difusão utilizando-se do método de ordenação de operadores exponenciais de Feynman [1,11].

Esse método, originariamente conhecido como método de ordenação temporal de operadores exponenciais, pode ser perfeitamente adaptado para descrever interações sucessivas na atmosfera, ordenando-se operadores exponenciais no parâmetro de profundidade.

Do ponto de vista matemático, esse método permite simplificar enormemente os cálculos que, tradicionalmente, em teoria da radiação cósmica, são realizados pelo método das aproximações sucessivas[2], e ainda mais, permite estudar cascatas que são induzidas pela interação de uma simples partícula com a atmosfera numa dada profundidade [3].

Apresentamos neste trabalho a discussão do espectro energético dife-

rencial de múons induzidos por uma cascata hadrônica na atmosfera.

Assume-se aqui que a cascata hadrônica é composta somente por núcleons e píons carregados e que a radiação primária no topo da atmosfera é composta de prótons com a distribuição energética obtida pela colaboração JACEE [4].

Para obter o espectro diferencial energético dos múons assume-se que estes são produzidos pelo decaimento de píons em vôo, desprezando-se sua perda de energia ao atravessar a atmosfera, bem como seu decaimento.

Este trabalho apresenta-se dividido da seguinte forma: no Cap. 1 apresentamos uma revisão dos dados experimentais utilizados neste trabalho; no Cap. 2 apresentamos o método de ordenação de operadores exponenciais segundo a profundidade; no Cap. 3 resolvemos a equação de difusão para a componente nucleônica e a comparação do fluxo obtido com dados experimentais ao nível do mar; no Cap. 4 resolvemos a equação de difusão para os píons carregados; no Cap. 5 discute-se o espectro vertical de múons, comparando-o com dados experimentais ao nível do mar e por último, no Cap. 6, apresentamos as conclusões finais.

# Capítulo 1

## Dados Experimentais

Apresentamos neste capítulo os dados experimentais usados neste trabalho para comparar com as soluções das equações de difusão obtidas para as componentes da radiação cósmica.

Duas técnicas de medida são usadas no estudo da radiação: medidas diretas e indiretas. As medidas diretas são realizadas no topo da atmosfera terrestre utilizando, por exemplo, balões estratosféricos ou satélites equipados com câmaras de emulsões. Nessas medidas pode-se obter informações sobre a natureza e a energia da radiação primária.

As medidas indiretas permitem estudar as propriedades dos raios cósmicos por meio de partículas secundárias produzidas nas interações com a atmosfera. O processo indireto de medida tem, no fundo, interesse em se obter informações sobre a radiação primária a partir das medidas da radiação secundária, isto é, das partículas que são produzidas nas interações dos primários.

Os experimentos de medidas indiretas são basicamente aqueles experi-

mentos montados em montanhas, ao nível do mar e subterrâneos.

Nos experimentos de montanha ou ao nível do mar se determinam as características de uma ou mais componentes da radiação secundária, usando-se a atmosfera como meio de interação. Nos subterrâneos, usa-se rocha como filtro e se estudam múons de alta energia.

Neste trabalho usamos dados experimentais obtidos tanto por medidas diretas como por medidas indiretas.

Para estudarmos o comportamento na atmosfera das componentes da radiação cósmica por meio de equações de difusão, necessitamos estabelecer quais são as condições de contorno para calcular as soluções dessas equações, que definem o fluxo diferencial de partículas numa profundidade definida num certo intervalo de energia.

As condições de contorno são estabelecidas pelo fluxo primário da radiação cósmica medido no topo da atmosfera terrestre, logo, obtidas por medidas diretas.

Os traços registrados nas emulsões permitem obter informações sobre a natureza das partículas que compoem a radiação primária e suas respectivas energias, bem como sobre a interação com os núcleos das emulsões.

Na Fig. 1.1 mostramos os dados de fluxo diferencial das partículas primárias, medidos no topo da atmosfera [5]. Pode-se ver que a partir de 10 GeV/núcleon, os espectros seguem uma lei de potência na energia.

Na Fig. 1.2 mostramos as medidas do fluxo integral de prótons e partículas  $\alpha$  obtidas pela colaboração JACFE [4].

Para definir a condição de contorno para a equação de difusão da componente nucleônica adotaremos, como espectro energético da radiação pri-

mária no topo da atmosfera, o espectro protônico obtido pela colaboração JACEE [4], uma vez que os prótons são as partículas predominantes na radiação primária. Teremos, assim, para o fluxo diferencial primário no topo da atmosfera a seguinte distribuição de energia:

$$F_N(E, 0) = N_0 E^{-(\gamma+1)},$$

com  $N_0 = 3.3644 \text{ (cm}^2 \text{ s sr GeV)}^{-1}$  e  $\gamma = 1.81$ , para  $E$  expressa em GeV.

Os dados experimentais de fluxo nucleônico ao nível do mar usados neste trabalho são aqueles de Brooke e Wolfendale e de Ashton et al e são apresentados na Fig. 1.3.

Os dados de Brooke e Wolfendale [6] são medidas de fluxo de prótons no intervalo de energia  $1 < E < 20$  GeV, enquanto que os de Ashton et al [7,8] são de fluxo de nêutrons medidos no intervalo de  $20 < E < 4000$  GeV.

Os dados experimentais apresentam uma diminuição acentuada do fluxo com a energia, mostrando também uma mudança contínua de inclinação.

A queda acentuada do fluxo com a energia é consequência direta do espectro primário, que diminui com o aumento de energia na forma de um espectro de potência. A quebra contínua da inclinação dos dados pode ser consequência do fato de que a seção de choque inelástica núcleo-ar varie com a energia na forma logarítmica quadrática [13].

Como estaremos analisando também o fluxo vertical de partículas secundárias, píons e múons, as condições de contorno para as equações de difusão para essas partículas serão:

$$F_\pi(E, 0) = 0 \qquad F_\mu(E, 0) = 0.$$

Infelizmente não há dados experimentais para a componente piônica carregada. Existem dados somente para hádrons (núcleons + píons) desacompanhados medidos tanto em altitudes de montanha como ao nível do mar [26]. Esses dados não serão analisados neste trabalho.

De forma indireta, analisamos o fluxo de píons por meio dos dados experimentais de múons ao nível do mar. Calculamos o fluxo de múons produzidos por píons fixando o parâmetro livre que aparece na solução da componente piônica, fazendo ajuste numérico da componente muônica calculada com os dados experimentais.

Os dados experimentais para o fluxo vertical de múons ao nível do mar estão na Fig. 1.4, que foram obtidos por Allkofer et al [9] e C. A. Ayre et al [10].

A superposição desses dados apresenta uma boa concordância entre os resultados dos dois experimentos. O fluxo vertical de múons apresenta também um acentuado decréscimo com a energia e uma suave e contínua variação de inclinação.

Mostraremos neste trabalho que, ao contrário do fluxo nucleônico, essa quebra contínua de inclinação pode ser reproduzida, mesmo usando livre caminho médio de interação constante.

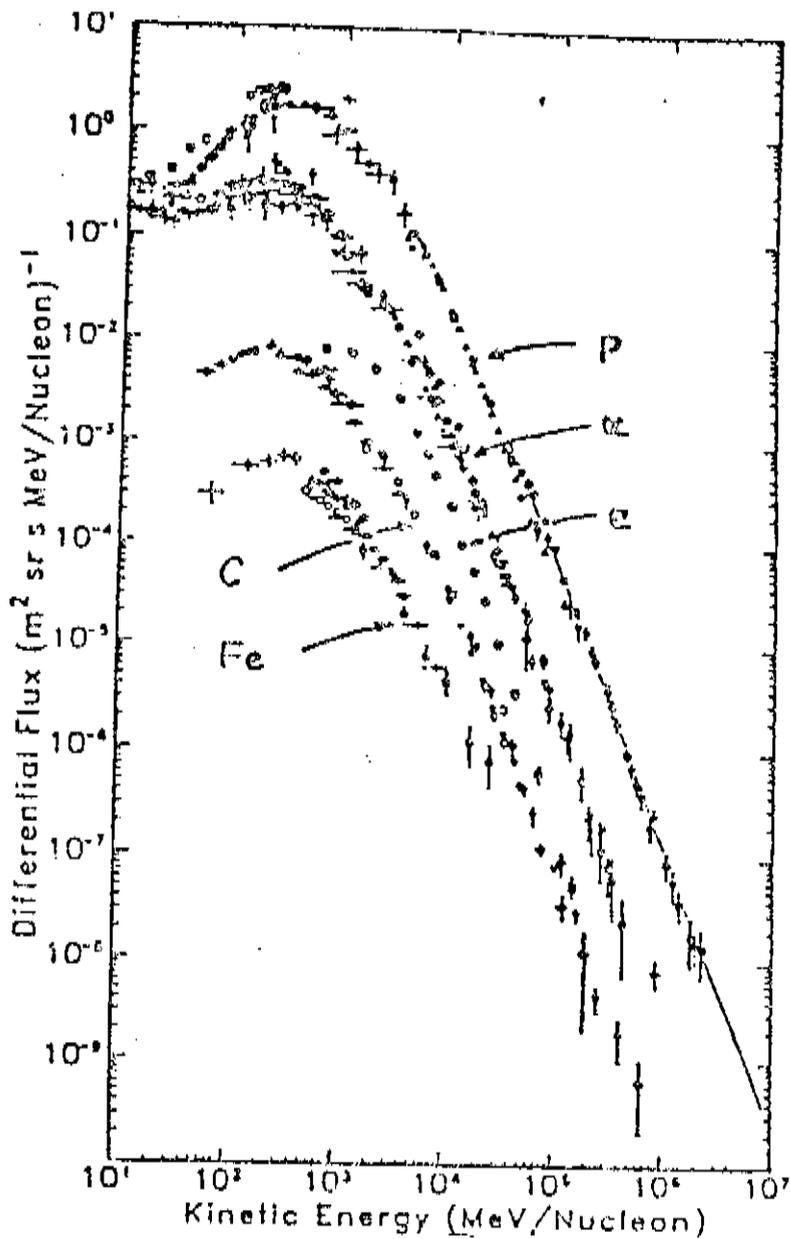


Figura 1.1: Dados experimentais de fluxo diferencial primário medido no topo da atmosfera [5].

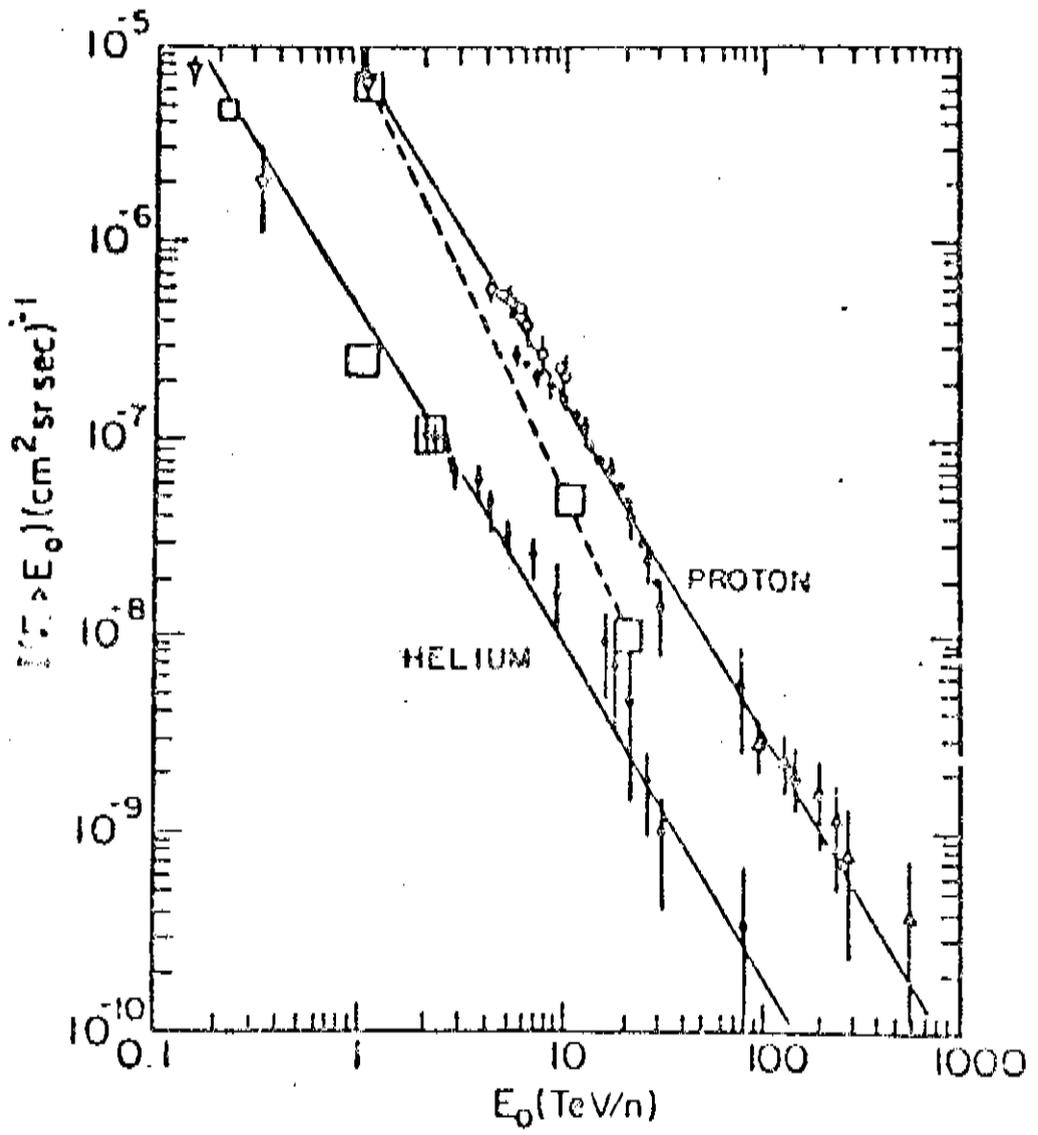


Figura 1.2: Dados experimentais de fluxo integral de prótons e partículas  $\alpha$  obtidas pela colaboração JACEE [4].

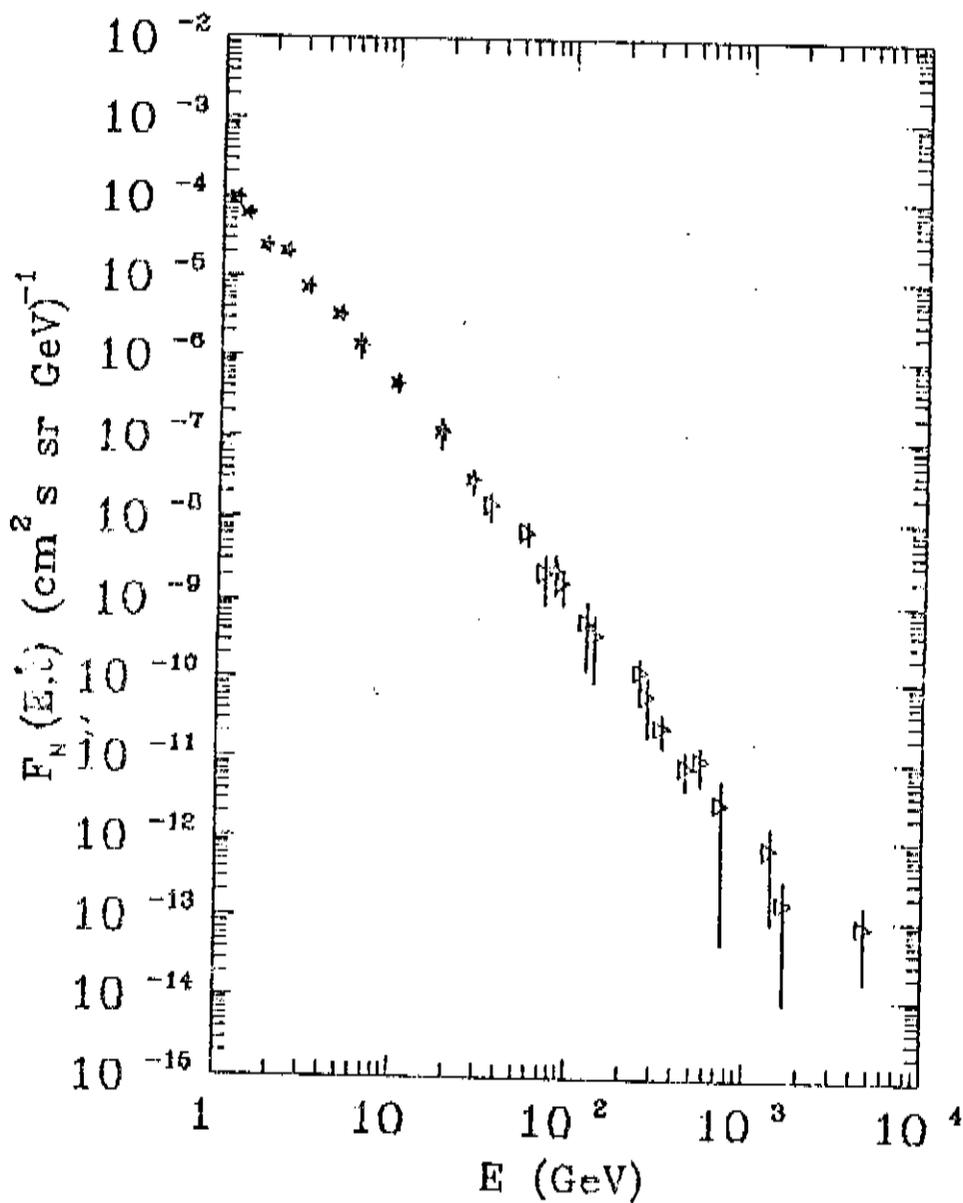


Figura 1.3: Dados experimentais de fluxo nucleônico ao nível do mar. \* - fluxo de prótons [6];  $\triangleright$  - fluxo de nêutrons [7,8].

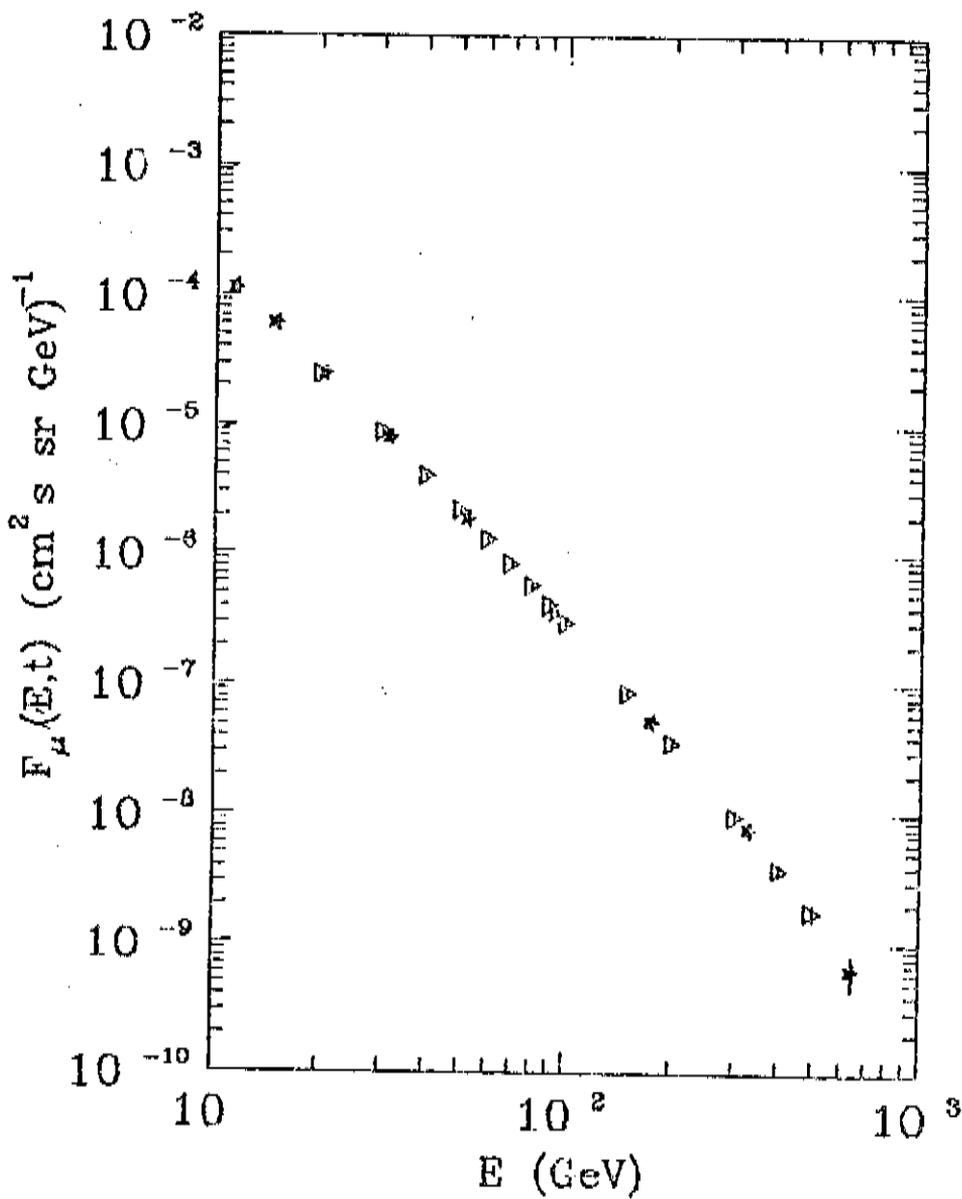


Figura 1.4: dados experimentais de fluxo vertical de múons ao nível do mar. \* - Ref. [9];  $\triangleright$  - Ref. [10].

## Capítulo 2

# Operador Expansional

A obtenção de soluções analíticas para as equações de difusão das componentes da radiação cósmica na atmosfera apresenta como principal dificuldade matemática levar-se em conta a perda de energia pelas partículas nas suas sucessivas interações com a atmosfera nas diversas profundidades.

O método das aproximações sucessivas é largamente usado em teoria da radiação cósmica e apresenta sempre o problema de calcular integrais múltiplas ordenadas conforme o parâmetro de profundidade e a conseqüente soma de uma série infinita de termos.

Do ponto de vista matemático, esses problemas podem ser contornados de uma forma bastante simples se introduzirmos operadores que definem a forma como a perda de energia se dá em cada interação e resolvermos as equações de difusão numa forma de equações de operadores, adaptando o método de ordenação temporal de operadores de Feynman [11] para ordenação no parâmetro de profundidade.

Apresentamos neste capítulo a discussão dos operadores expansionais e

suas propriedades mais importantes que serão utilizadas na obtenção das soluções das equações de difusão apresentadas nos próximos capítulos.

## 2.1 O Método de Ordenação de Operadores

Seja  $H(\lambda)$  um operador que envolva qualquer número de operadores e  $\lambda$  real; seja também o operador de transformação infinitesimal definido por  $I + d\lambda H(\lambda)$ , onde  $I$  é o operador unitário, posicionados da direita para a esquerda de acordo com o parâmetro de ordenação  $\lambda$ , de uma configuração inicial  $\lambda = \sigma$  a uma final  $\lambda = \tau$ . Este operador deve reproduzir o mesmo estado inicial do sistema quando  $\sigma = \tau$ , pois assim,  $d\lambda = 0$  e obtemos o operador unitário. Efetivamente, a transformação de  $\sigma$  a  $\tau$  é o resultado de infinitas aplicações do operador acima. Definindo  $T$  como a transformação resultante total temos:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} [I + \delta\lambda_n H(\lambda_n)]^n, \quad (2.1)$$

onde o subíndice  $n$  é para reforçar o aspecto de ordenação no parâmetro  $\lambda$  do operador  $H(\lambda)$  [11], já que, a título de generalização, trataremos da situação em que  $[H(\lambda), H(\lambda')] \neq 0$  para  $\lambda \neq \lambda'$ . Sem perda de generalidade podemos escrever:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ I + \frac{d\lambda}{n} H(\lambda) \right]^n. \quad (2.2)$$

A Eq. 2.1 define a exponencial ordinária quando os parâmetros envolvidos são variáveis algébricas, porém  $H(\lambda)$  não segue as mesmas regras que aquelas, portanto, para distinguir as duas situações fazemos:

$$T = \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right], \quad (2.3)$$

onde a integral é uma soma sobre todos os valores de  $\lambda_n$  (sobre todas as transformações infinitesimais) e a letra maiúscula  $E$  cumpre a função de distinguir este do operador exponencial. Devido ao conceito de ordenação, deve-se tomar cuidado ao expandir em série o expansional, o qual é escrito como:

$$Exp \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] = 1 + \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) + \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \int_{\sigma}^{\lambda} d\lambda' H(\lambda') + \dots \quad (2.4)$$

ou ainda, o  $(n + 1)$ -ésimo termo da expansão pode ser escrito como:

$$Exp^{(n+1)} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] = \int_{\sigma}^{\tau} d\mu H(\mu) Exp^{(n)} \left[ \int_{\sigma}^{\mu} d\lambda H(\lambda) \right] \quad n \geq 1. \quad (2.5)$$

Não especificamos o sentido da transformação com relação à variável  $\lambda$ , pois não há nenhuma restrição se  $\sigma \leq \tau$  ou  $\sigma \geq \tau$ , e como antes mencionado, se  $\sigma = \tau$  a expansional se reduz ao operador unitário.

Após estabelecermos o operador de transformação e mostrar que ele satisfaz a uma das propriedades fundamentais desses operadores (a transformação unitária) é necessário deduzirmos como fazer a transformação inversa. Para isso, consideremos dois expansionais sucessivos, um levando o sistema de  $\sigma$  a  $\mu$  e outro de  $\mu$  a  $\tau$  (novamente não fazemos nenhuma restrição quanto a estes parâmetros), escritos como:

$$T = Exp \left[ \int_{\mu}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] Exp \left[ \int_{\sigma}^{\mu} d\lambda H(\lambda) \right]. \quad (2.6)$$

Diferenciando  $T$  em relação a  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mu} = & - Exp \left[ \int_{\mu}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] H(\mu) Exp \left[ \int_{\sigma}^{\mu} d\lambda H(\lambda) \right] \\ & + Exp \left[ \int_{\mu}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] H(\mu) Exp \left[ \int_{\sigma}^{\mu} d\lambda H(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = 0, \quad (2.7)$$

portanto, o resultado dessa combinação é independente da especificação de  $\mu$ . Seja, por exemplo  $\mu = \sigma$ , então a Eq. 2.6 fica na seguinte forma:

$$T = \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right], \quad (2.8)$$

mas, se além disso  $\sigma = \tau$ , então:

$$T = I; \quad (2.9)$$

como para um operador  $\hat{O}$  qualquer, se existir  $\hat{O}^{-1}$ , tal que

$$\hat{O}\hat{O}^{-1} = I, \quad (2.10)$$

podemos concluir que

$$\left\{ \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] \right\}^{-1} = \text{Exp} \left[ \int_{\tau}^{\sigma} d\lambda H(\lambda) \right]. \quad (2.11)$$

Para completarmos a álgebra dos expansionais, vejamos as regras de composição e decomposição obedecidas por eles.

Seja  $H(\lambda)$  dado como a soma de dois operadores  $F(\lambda) + G(\lambda)$ , tal que  $[F(\lambda), G(\lambda)] \neq 0$ . Vamos analisar como pode-se decompor o expansional nessa situação. Vamos supor que o expansional pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda [F(\lambda) + G(\lambda)] \right] = \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda F(\lambda) \right] \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \bar{G}(\lambda) \right] \quad (2.12)$$

ou

$$\text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda [F(\lambda) + G(\lambda)] \right] = \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \bar{F}(\lambda) \right] \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda G(\lambda) \right], \quad (2.13)$$

onde os operadores  $\bar{F}(\lambda)$  e  $\bar{G}(\lambda)$  são dois operadores desconhecidos que queremos determiná-los em função de  $F(\lambda)$  ou  $G(\lambda)$ .

Diferenciando a Eq. 2.12 em relação a  $\tau$ , trocando  $\tau$  por  $\lambda$  e aplicando as transformações inversas adequadas obtemos:

$$\bar{G}(\lambda) = \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\sigma} d\mu F(\mu) \right] G(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\lambda} d\mu F(\mu) \right]. \quad (2.14)$$

Analogamente, da Eq. 2.13 obtemos:

$$\bar{F}(\lambda) = \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\sigma} d\mu G(\mu) \right] F(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\lambda} d\mu G(\mu) \right]. \quad (2.15)$$

Desta forma, as Eqs. 2.12 e 2.13 tornam-se

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \{F(\lambda) + G(\lambda)\} \right] &= \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda F(\lambda) \right] \\ &\cdot \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\sigma} d\mu F(\mu) \right] G(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\lambda} d\mu F(\mu) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

ou

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \{F(\lambda) + G(\lambda)\} \right] &= \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\sigma} d\mu G(\mu) \right] \right. \\ &\cdot \left. F(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\sigma} d\mu G(\mu) \right] \right] \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda G(\lambda) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

respectivamente. Obtemos assim a regra de decomposição (desembrulhamento, conforme Feynman).

Trocando, na Eq. 2.12,  $\bar{G}(\lambda)$  por  $G(\lambda)$  e vice-versa, e invertendo a Eq. 2.14; ou permutando  $\bar{F}(\lambda)$  e  $F(\lambda)$  na Eq. 2.13 e invertendo a Eq. 2.15, obtemos as duas formas da regra de composição dos expansionais

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda F(\lambda) \right] \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda G(\lambda) \right] &= \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \{F(\lambda) \right. \\ &\left. + \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\lambda} d\mu F(\mu) \right] G(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\sigma} d\mu F(\mu) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ou

$$\begin{aligned} & \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda F(\lambda) \right] \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda G(\lambda) \right] = \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda \{ G(\lambda) \right. \\ & \left. \text{Exp} \left[ \int_{\tau}^{\lambda} d\mu G(\mu) \right] F(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_{\lambda}^{\tau} d\mu G(\mu) \right] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Completamos assim, uma álgebra suficiente e necessária para os expansionais em sua forma geral, ou seja, quando  $[H(\lambda), H(\lambda')] \neq 0$  para  $\lambda \neq \lambda'$ .

Como foi mencionado antes, o operador exponencial é um caso particular do operador expansional em que  $[H(\lambda), H(\lambda')] = 0$ . De fato isso acontece, pois na Eq. 2.4, se chamarmos

$$H(\lambda')d\lambda' = dy, \quad H(\lambda)d\lambda = dx \quad (2.20)$$

e fazendo as mudanças necessárias, temos

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] &= 1 + \int_{g(\sigma)}^{g(\tau)} dx + \int_{g(\sigma)}^{g(\tau)} dx \int_{g(\sigma)}^x dy \\ &+ \int_{g(\sigma)}^{g(\tau)} dx \int_{g(\sigma)}^x dy \int_{g(\sigma)}^y dz + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$g(\tau) = \int H(\lambda) d\lambda \Big|_{\lambda=\tau}; \quad (2.22)$$

resolvendo a Eq. 2.21 obtemos, finalmente

$$\text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] = e^{\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda)}. \quad (2.23)$$

Temos também, conforme a Eq. 2.22 que a transformação inversa agora é dada por:

$$\left\{ \text{Exp} \left[ \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] \right\}^{-1} = e^{-\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda)}. \quad (2.24)$$

Particularmente, quando  $H(\lambda)$  é um operador constante, temos

$$e^{\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda)} = e^{H(\tau-\sigma)}; \quad (2.25)$$

Assumindo, por exemplo que  $\sigma = 0$  e  $\tau = 1$ :

$$\text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda H \right] = e^H. \quad (2.26)$$

Agora podemos escrever as regras de composição e decomposição para o operador exponencial particularizando as regras para os expansionais. Das Eq. 2.16 e 2.17, temos

$$e^{F+G} = e^F \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda e^{-\lambda F} G e^{\lambda F} \right] \quad (2.27)$$

$$= \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda \left\{ e^{(1-\lambda)G} F e^{-(1-\lambda)G} \right\} \right] e^G. \quad (2.28)$$

Analogamente, das Eqs. 2.18 e 2.19, temos

$$e^F e^G = \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda \left\{ F + e^{\lambda F} G e^{-\lambda F} \right\} \right] \quad (2.29)$$

$$= \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda \left\{ G + e^{-(1-\lambda)G} F e^{(1-\lambda)G} \right\} \right], \quad (2.30)$$

onde a notação do expansional foi mantida porque apesar de  $H$  comutar com ele mesmo,  $F$  e  $G$  não são necessariamente comutativos.

Concluindo este capítulo, apresentamos sem demonstração, a seguinte propriedade:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{B}_n, \quad (2.31)$$

onde

$$\hat{B}_0 = \hat{B}; \quad \hat{B}_N = \frac{1}{n!} \left[ \hat{B}_{n-1}, \hat{A} \right], \quad (2.32)$$

que é importante para simplificação de expansionais.

Para a obtenção das soluções das equações de difusão que analizaremos neste trabalho, as propriedades dos expansionais expressas pelas Eqs. 2.16 e 2.17 são as mais importantes, pois permite decompor expansionais de uma soma de operadores não comutativos em produtos de expansionais.

No caso particular da componente nucleônica, os operadores não dependem explicitamente da profundidade e a decomposição do expansional é simplesmente dada por um produto de operadores exponenciais ordenados.

Para as componentes piônicas e muônicas, um dos operadores depende explicitamente da profundidade, mas a decomposição do expansional em produto de simples operadores exponenciais pode ser também realizada, levando-se em conta as propriedades dada pela Eq. 2.31. Como um dos operadores é inversamente proporcional à energia, na região de altas energias é possível usar-se teoria de perturbação e decompor-se totalmente o operador expansional em produtos ordenados de operadores exponenciais.

## Capítulo 3

# Fluxo de Núcleons

Neste capítulo apresentamos o cálculo do fluxo nucleônico diferencial, resolvendo a equação de difusão usando o modelo de partícula líder.

Para resolver a equação de difusão assumimos as seguintes hipóteses:

- a) as partículas primárias da radiação cósmica são prótons cuja distribuição energética é dada na forma de potência na energia, conforme os dados experimentais da colaboração JACEE [4].
- b) a seção de choque inelástica próton-ar é constante com relação à energia, o que significa assumir um livre caminho médio de interação dos núcleons na atmosfera constante.
- c) o núcleon que incide na atmosfera, após a colisão com os núcleos do ar, carrega consigo uma fração significativa de sua energia: *modelo de partícula líder*.

### 3.1 Equação de Difusão

Seja  $F_N(E, t)dE$  a distribuição diferencial de núcleons à profundidade  $t$  com energia entre  $E$  e  $E + dE$ .

Ao interagir com os núcleos do ar, há dois processos que podem ser caracterizados de maneira distinta, apesar de estarem relacionados pela energia. Estes processos se devem às colisões inelásticas núcleon-ar que, se de um lado retiram núcleons com energia  $E$  do fluxo, de outro, aumentam o fluxo de núcleons com energia  $E' = E\sigma_N$ , onde  $\sigma_N$  é a elasticidade. Desta forma, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t} F_N(E, t) = -\frac{1}{\lambda_N} F_N(E, t) + \frac{1}{\lambda_N} \int_0^1 f(\sigma_N) d\sigma_N \cdot \int_E^\infty \delta(E - \sigma_N E_0) F_N(E_0, t) dE_0. \quad (3.1)$$

O primeiro termo da equação refere-se à perda natural de partículas com energia  $E$ . O segundo termo descreve o aumento de partículas pela interação nucleon-ar na atmosfera. A função  $\delta(E - \sigma_N E_0)$  nos garante que a partícula líder incidente com energia  $E_0$  carrega uma fração energética  $\sigma_N$  após a colisão, liberando uma fração energética  $1 - \sigma_N$  para produção de secundários. Assumimos que a fração energética  $\sigma_N$  (elasticidade) seja distribuída segundo  $f(\sigma_N)$  em cada interação e calculamos a média. Estamos assumindo aqui que  $\lambda_N$ , livre caminho médio de interação dos núcleons no ar é constante, isto é, a probabilidade por unidade de profundidade para que ocorra uma interação é constante.

A condição de contorno para a Eq. 3.3 é de que o fluxo no topo da atmosfera ( $t = 0$ ), é dado pela distribuição de prótons da colaboração

$$\begin{aligned}
 F_N(E, 0) &= N_0 E^{-(\gamma+1)}, \\
 N_0 &= 3.3644 (\text{cm}^2 \text{ s sr GeV})^{-1}, \\
 \gamma &= 1.81.
 \end{aligned}$$

A melhor maneira de se resolver a equação é transformá-la numa equação de operadores, introduzindo um operador  $\hat{\sigma}_N$  definido por

$$\hat{\sigma}_N F_N(E, t) = \int_0^1 f(\sigma_N) F_N(E/\sigma_N, t) \frac{d\sigma_N}{\sigma_N}. \quad (3.2)$$

Podemos escrever a Eq. 3.1 como:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_N(E, t) = \frac{1}{\lambda_N} (-1 + \hat{\sigma}_N) F_N(E, t). \quad (3.3)$$

Portanto,

$$F_N(E, t) = \text{Exp} \left[ \int_0^t dz \hat{\mu}_N \right] F_N(E, 0), \quad (3.4)$$

ou simplesmente (veja o Cap. 2),

$$F_N(E, t) = e^{t\hat{\mu}_N} F_N(E, 0), \quad (3.5)$$

onde

$$\hat{\mu}_N = \frac{-1}{\lambda_N} (1 - \hat{\sigma}_N). \quad (3.6)$$

Expandindo em série de potências a Eq. 3.5, temos

$$F_N(E, t) = \left[ 1 - \frac{t}{\lambda_N} (1 - \hat{\sigma}_N) + \frac{t^2}{2\lambda_N^2} (1 - \hat{\sigma}_N)(1 - \hat{\sigma}_N) + \dots \right] F_N(E, 0). \quad (3.7)$$

Assim,

$$(1 - \hat{\sigma}_N) N_0 E^{-(\gamma+1)} = N_0 E^{-(\gamma+1)} \left[ 1 - \int_0^1 f(\sigma_N) \sigma_N^\gamma d\sigma_N \right],$$

ou seja

$$(1 - \hat{\sigma}_N) F_N(E, 0) = (1 - \langle \sigma_N^\gamma \rangle) F_N(E, 0) \quad (3.8)$$

logo

$$F_N(E, t) = N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{t\mu_N(\gamma)}, \quad (3.9)$$

onde

$$\mu_N(\gamma) = \frac{-1}{\lambda_N} (1 - \langle \sigma_N^\gamma \rangle) \quad (3.10)$$

e

$$\langle \sigma_N^\gamma \rangle = \int_0^1 f(\sigma_N) \sigma_N^\gamma d\sigma_N. \quad (3.11)$$

### 3.2. Análise Numérica

Utilizando-nos da Eq. 3.9, procederemos a uma análise do fluxo diferencial nucleônico, comparando nossa solução com dados experimentais ao nível do mar [6,7].

Conforme a Eq. 3.11, a distribuição de elasticidade está intimamente ligada à correta descrição dos dados experimentais de fluxo nucleônico. Para se proceder a tal descrição, é fundamental o conhecimento da distribuição de elasticidade, que na realidade exprime a distribuição de partícula líder após a colisão.

Em raios cósmicos, comumente, usa-se uma distribuição uniforme de elasticidade, o que resulta em uma elasticidade média  $\langle \sigma_N \rangle = 0.5$ . Do ponto de vista de aceleradores, uma distribuição de partícula líder tal que a elasticidade média é 0.5 descreve dados experimentais na faixa de energia do ISR, para colisões do tipo pp ou pp [18].

Uma análise acurada de Jones [12] mostra, no entanto, que para colisões núcleon-ar, uma elasticidade da ordem de 0.33 descreve melhor dados de reações inclusivas.

Assumindo-se uma distribuição de elasticidade uniforme, portanto  $\langle \sigma_N \rangle = 0.5$ , podemos verificar se a solução dada pela Eq. 3.9, permite descrever os dados experimentais de fluxo nucleônico ao nível do mar. Na Fig. 3.1 mostramos essa comparação, podendo-se ver que não há concordância.

Vamos assumir aqui uma distribuição normalizada do seguinte tipo

$$f(\sigma_N) = (\beta_N + 1)(1 - \sigma_N)^{\beta_N}, \quad (3.12)$$

utilizada por Bellandi et al [13] na análise de fluxo das componentes da radiação cósmica, e determinar  $\beta_N$ , tal que a solução dada pela Eq. 3.9 reproduza os resultados experimentais.

Na Fig. 3.2 mostramos o fluxo nucleônico calculado com  $\beta_N = 0.3$  em comparação com os dados experimentais ao nível do mar. Temos assim, com  $\beta_N = 0.3$ , uma boa concordância. Neste caso a elasticidade média é  $\langle \sigma_N \rangle \simeq 0.43$ .

A obtenção de uma elasticidade média da ordem da obtida por Jones [12] implica em que  $\beta_N = 1.0$ , mas conforme mostramos na Fig. 3.1, não há concordância entre o fluxo calculado e os dados experimentais.

Conseqüentemente, a elasticidade média que melhor descreve os dados de raios cósmicos deve ser da ordem de 0.4, quando  $\lambda_N$  é constante. Infelizmente não há dados de acelerador em faixas mais altas de energia além da do ISR, o que nos impossibilita de estabelecermos comparação.

Conforme podemos ver na Fig. 3.2, este modelo simples, no entanto, não explica a variação contínua e suave da inclinação dos dados experimentais devido à solução ser fatorável, pois ela é escrita como o produto de duas funções independentes da profundidade  $t$  e energia  $E$ , respectivamente.

Uma possível reprodução da quebra contínua da inclinação dos dados experimentais pode ser obtida assumindo uma dependência de  $\lambda_N$  com a energia na forma de  $\ln^2 E$ , conforme mostram Bellandi et al [13]. Nessas condições é possível também se obter elasticidade média da ordem da obtida por Jones, com  $\beta_N = 0.7$ .

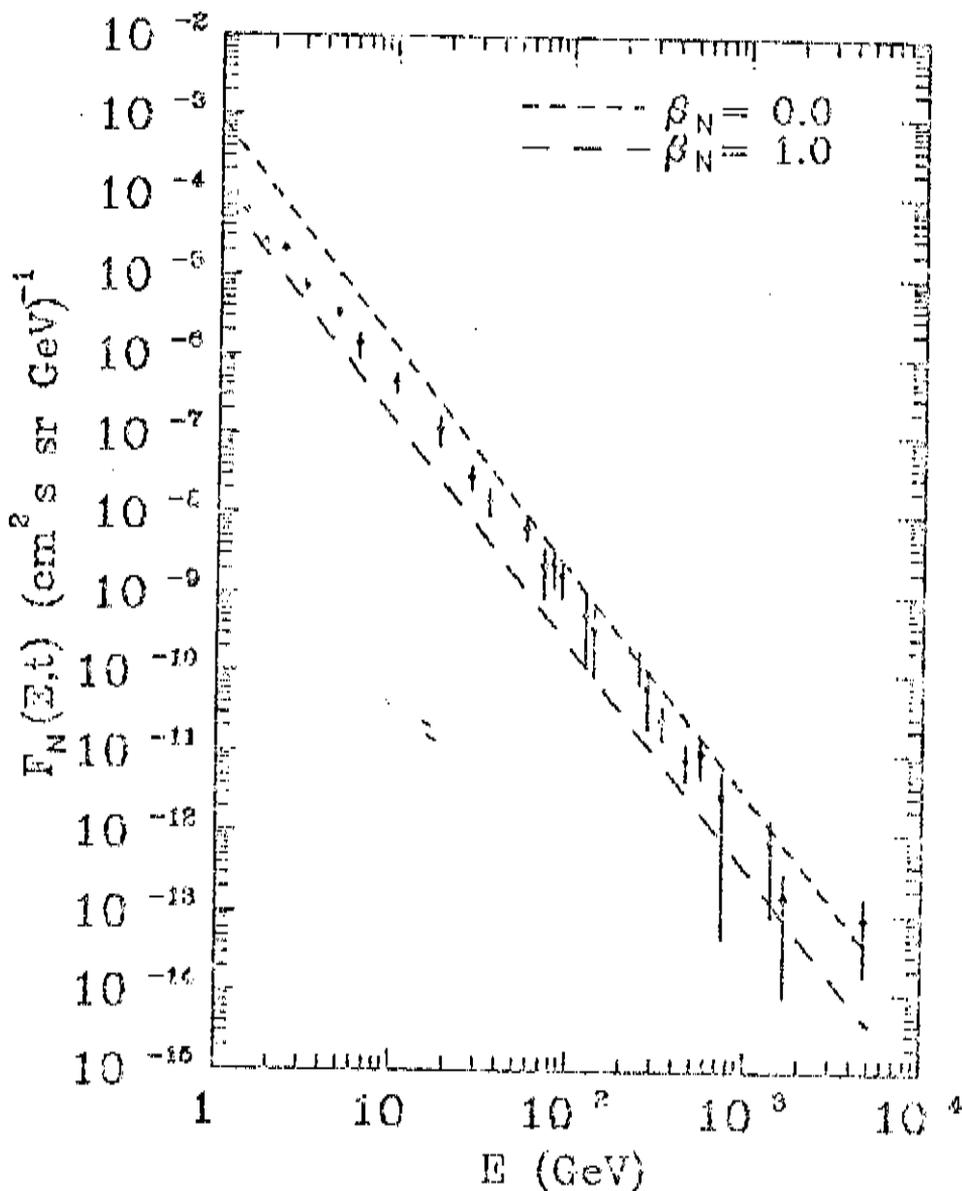


Figura 3.1: Fluxo nucleônico dado pela Eq. 3.9 em comparação com dados experimentais ao nível do mar [6,7], calculado com elasticidade média 0.5 ( $\beta_N = 0.0$ ) e 0.33 ( $\beta_N = 1.0$ ).

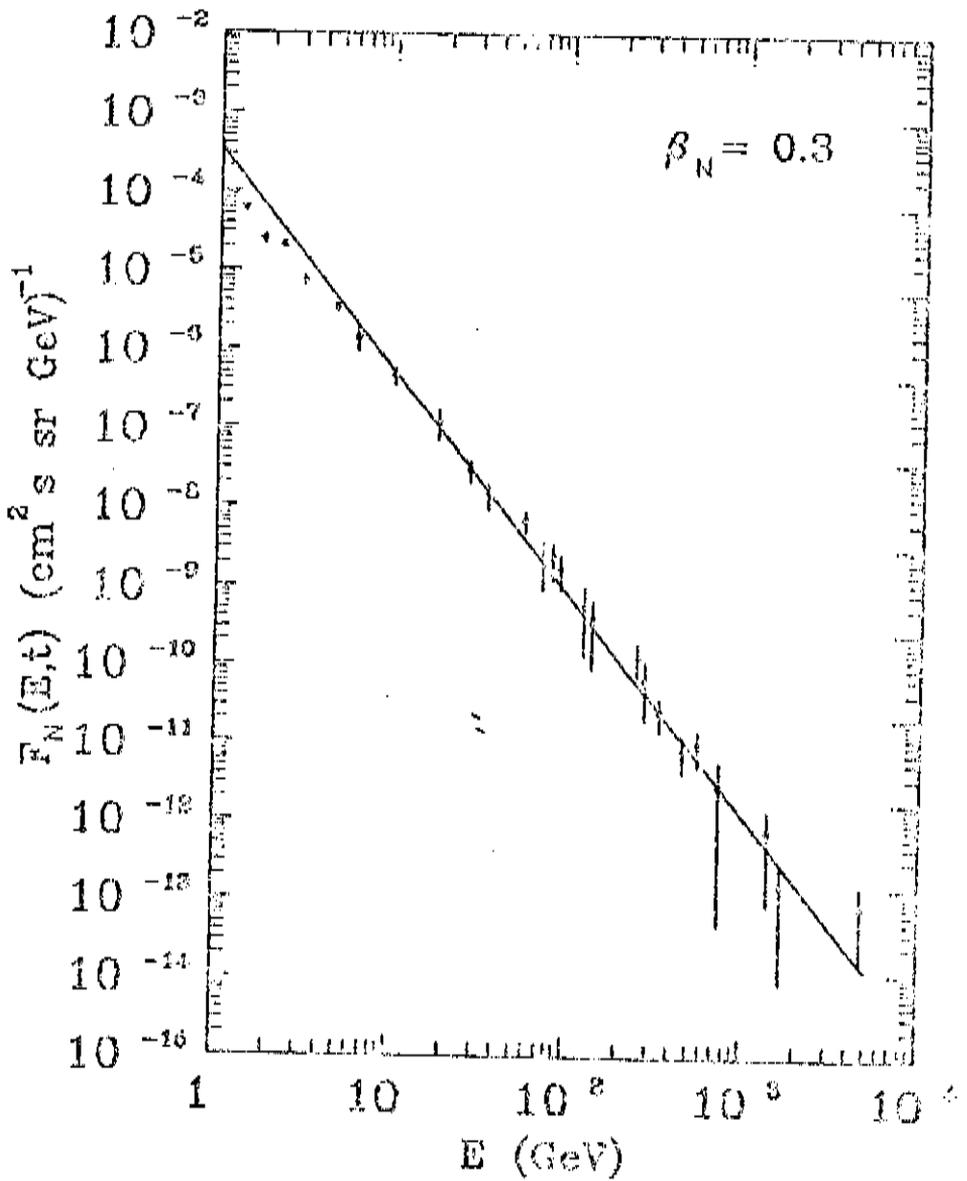


Figura 3.2: Fluxo nucleônico, dado pela Eq. 3.9, em comparação com dados experimentais ao nível do mar [6,7], calculado com elasticidade média 0.43 ( $\beta_N = 0.3$ ).

## Capítulo 4

### Fluxo de Píons

Neste capítulo vamos determinar o fluxo diferencial piônico gerado pela componente nucleônica na atmosfera. Para escrevermos a equação de difusão devemos considerar os píons produzidos pela interação de núcleons e também aqueles produzidos pelas interações sucessivas dos próprios píons com a atmosfera.

Como estamos interessados também em analisar o fluxo de múons na atmosfera induzidos pela cascata hadrônica, vamos incluir na equação de difusão piônica a perda de píons por decaimento em múons.

#### 4.1 Equação de Difusão

Tendo em vista as considerações básicas feitas anteriormente, descreveremos agora o fluxo de píons na atmosfera. Aqui, além dos dois processos descritos no capítulo anterior, devemos incluir o termo de produção de píons por núcleons e píons mais energéticos e o termo que descreve o decaimento

de píons em múons.

Se definirmos o caminho médio de decaimento (em cm) por  $\lambda_d$  e o fluxo diferencial de píons à profundidade  $t$  e energia entre  $E$  e  $E + dE$  por  $F_\pi(E, t)dE$ , o decréscimo por caminho médio de decaimento é escrito como

$$\frac{dF_\pi(E, t)}{d\lambda_d} = -\frac{1}{\lambda_d} F_\pi(E, t) - \frac{\tau m}{\gamma E} F_\pi(E, t), \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a massa dos píons e  $\tau$  sua meia vida [14]. Na equação acima adotamos a velocidade da luz  $c = 1$  e o momento  $P = E$ , já que na faixa de energia em que estamos interessados (GeV) a massa do píon é desprezível.

A fim de manter a uniformidade na notação, devemos escrever a Eq. 4.1 com o decréscimo do fluxo piônico por unidade de profundidade ( $g/cm^2$ ). Para isso, fazemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_\pi(E, t))_d = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\lambda_d} F_\pi(E, t), \quad (4.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade atmosférica à profundidade  $t$  (veja Ap. A). Nessa forma, para o termo de decaimento temos

$$\frac{\partial}{\partial t} F_\pi(E, t) = -\frac{B_\pi}{Et} F_\pi(E, t), \quad (4.3)$$

onde

$$B_\pi = \frac{mc\beta}{\tau} \approx 115 \text{ GeV}, \quad (4.4)$$

é a constante de decaimento dos píons e  $c$  é a velocidade da luz.

A equação de difusão completa é escrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} F_{\pi}(E, t) = & \frac{-1}{\lambda_{\pi}} F_{\pi}(E, t) - \frac{B_{\pi}}{Ei} F_{\pi}(E, t) \\
& + \frac{1}{\lambda_{\pi}} \int_0^1 f(\sigma_{\pi}) d\sigma_{\pi} \int_E^{\infty} \delta(E - \sigma_{\pi} E_0) F_{\pi}(E_0, t) dE_0 \\
& + \frac{1}{\lambda_N} \int_E^{\infty} \phi_N(E, E') F_N(E', t) dE' \\
& + \frac{1}{\lambda_{\pi}} \int_E^{\infty} \phi_{\pi}(E, E') F_{\pi}(E', t) dE', \tag{4.5}
\end{aligned}$$

onde

$\lambda_{\pi}$  é o livre caminho médio de interação dos píons na atmosfera (120 g/cm<sup>2</sup>);

$\sigma_{\pi}$  é a elasticidade e

$\phi_i(E, E')$  ( $i = N, \pi$ ) é a função de produção de píons por núcleons ou píons.

O primeiro e o terceiro termo da equação representam os mesmos processos que no fluxo nucleônico e o segundo, o decréscimo do número de píons por decaimento em múons. O quarto e o quinto termo representam a produção de píons pela energia liberada nas colisões de núcleons e píons com energia  $E'$  ( $E' > E$ ), respectivamente. Para as funções de produção de píons pela colisão das partículas  $i$  ( $i = N, \pi$ ) com núcleos do ar, assumimos a mesma forma das funções para colisões pp em aceleradores [25], com a normalização de Ohsawa e Yamashita [15], com a hipótese de "scale" na energia:

$$\phi_i(E, E') dE' = \phi_i(E/E') \frac{dE'}{E'}, \tag{4.6}$$

com

$$\phi_i(x) = \frac{10}{3} [1 - \langle \sigma_i \rangle] \frac{(1-x)^4}{x}, \tag{4.7}$$

onde  $x = E/E'$  e  $\langle \sigma_i \rangle$  é a elasticidade média da partícula  $i$  ( $i = N, \pi$ ).

Para simplificar a equação de difusão definimos os operadores

$$\hat{\sigma}_i F(E, t) = \int_0^1 f(\sigma_i) F(E/\sigma_i, t) \frac{d\sigma_i}{\sigma_i}, \quad (4.8)$$

$$\hat{\Sigma}_i F(E, t) = \int_0^1 \phi_i(x) F(E/x, t) \frac{dx}{x}. \quad (4.9)$$

Desta forma a Eq. 4.5 pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} F_\pi(E, t) = \frac{1}{\lambda_\pi} \left( j - \hat{\sigma}_\pi - \hat{\Sigma}_\pi \right) F_\pi(E, t) - \frac{B_\pi}{Et} F_\pi(E, t) + \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, t), \quad (4.10)$$

com a condição de contorno dada por

$$F_\pi(E, 0) = 0. \quad (4.11)$$

A solução da Eq. 4.10 é dada por [17]

$$F_\pi(E, t) = \int_0^t \text{Exp} \left[ \int_x^t \left[ \hat{\mu}_\pi + \hat{B}_\pi \right] dz' \right] \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, z) dz, \quad (4.12)$$

onde

$$\hat{\mu}_\pi = \frac{1}{\lambda_\pi} \left( j + \hat{\sigma}_\pi + \hat{\Sigma}_\pi \right), \quad (4.13)$$

e

$$\hat{B}_\pi(z') = \frac{-B_\pi}{Ez'}. \quad (4.14)$$

A expressão

$$\text{Exp} \left[ \int_x^t \left[ \hat{\mu}_\pi + \hat{B}_\pi \right] dz' \right]$$

é um operador expansional, definido conforme o Cap. 2. Como os operadores  $\hat{\mu}_\pi$  e  $\hat{B}_\pi$  não são operadores comutativos, podemos decompor o

expansional da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t [\hat{\mu}_\pi + \hat{B}_\pi] dz' \right] &= \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \text{Exp} \left[ \int_{z'}^t \hat{\mu}_\pi dz'' \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \hat{B}_\pi(z') \text{Exp} \left[ \int_t^{z'} \hat{\mu}_\pi dz'' \right] \right] \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{\mu}_\pi dz' \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como o operador  $\hat{\mu}_\pi$  é independente da profundidade, temos:

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{\mu}_\pi dz' \right] &= e^{(t-z)\hat{\mu}_\pi} \\ &= \hat{O}(t, z), \end{aligned} \quad (4.16)$$

então

$$\text{Exp} \left[ \int_z^t [\hat{\mu}_\pi + \hat{B}_\pi] dz' \right] = \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') dz' \right] \hat{O}_\pi(t, z). \quad (4.17)$$

Usando a solução para o fluxo nucleônico dada pela Eq. 3.9, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, z) &= \frac{e^{z\mu_N(\gamma)}}{\lambda_N} N_0 \int_0^1 \phi_N(x) \left( \frac{E}{x} \right)^{-(\gamma+1)} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{g_N(\gamma)}{\lambda_N} F_N(E, z), \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde

$$g_N(\gamma) = \int_0^1 \phi_N(x) x^\gamma dx. \quad (4.19)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t [\hat{\mu}_\pi + \hat{B}_\pi] dz' \right] \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, z) &= \\ \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') dz' \right] \hat{O}_\pi(t, z) \frac{g_N(\gamma)}{\lambda_N} F_N(E, z) \end{aligned} \quad (4.20)$$

que, de acordo com a Eq. 4.16, resulta em:

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t [\hat{\mu}_\pi + \hat{B}_\pi] dz' \right] \frac{1}{\lambda_N} \hat{\Sigma}_N F_N(E, z) &= \frac{g_N(\gamma)}{\lambda_N} e^{(t-z)\mu_\pi(\gamma)} e^{z\mu_N(\gamma)} \\ &\quad \cdot \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') dz' \right] N_0 E^{-(\gamma+1)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\mu_{\pi}(\gamma) = \frac{1}{\lambda_{\pi}} [-1 + \langle \sigma_{\pi}^{\gamma} \rangle + g_{\pi}(\gamma)] \quad (4.22)$$

e, generalizando,

$$g_i(\gamma) = \int_0^1 \phi_i(x) x^{\gamma} dx \quad (i = N, n). \quad (4.23)$$

Como o operador  $\hat{B}_{\pi}(z')$  depende também da energia, recorrendo à Eq. 2.31 e 2.32 (Cap. 2), temos

$$Exp \left[ \int_2^t \hat{O}_{\pi}(t, z') \hat{B}_{\pi}(z') \hat{O}_{\pi}^{-1}(t, z') dz' \right] = Exp \left[ \int_2^t dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{B}_N \right]. \quad (4.24)$$

Ao desenvolvermos a somatória acima, levando em consideração a atuação da expansão na função de energia dada pela Eq. 4.21, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{B}_N = \hat{B}_{\pi}(z') e^{(t-z')(i_{\pi} - \hat{\mu}_{\pi})}, \quad (4.25)$$

onde  $\hat{\mu}_{\pi}^1$  é um operador com autovalor  $\mu_{\pi}(\gamma + 1)$ .

Entretanto, ao escrever o operador expansional na forma de uma série de potências, teremos termos do tipo:

$$\begin{aligned} Exp^{(m)} \left[ \int_2^t dz' \hat{B}_{\pi}(z') e^{(t-z')(i_{\pi} - \hat{\mu}_{\pi})} \right] E^{-(\gamma+1)} = E^{-(\gamma+1)} \int_2^t dz^{(m)}. \\ \int_2^{z^{(m)}} dz^{(m-1)} \dots \frac{B_{\pi}(z^{(m)})}{E_{\pi}^{(m)}} e^{(t-z^{(m)})[\mu_{\pi}(\gamma+m) - \mu_{\pi}(\gamma+m-1)]} \\ \frac{B_{\pi}(z^{(m-1)})}{E_{\pi}^{(m-1)}} e^{(z^{(m)} - z^{(m-1)})[\mu_{\pi}(\gamma+m-1) - \mu_{\pi}(\gamma+m-2)]} \dots \\ \frac{B_{\pi}(z^{(2)})}{E_{\pi}^{(2)}} e^{(z^{(2)} - z^{(1)})[\mu_{\pi}(\gamma+1) - \mu_{\pi}(\gamma)]}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde o sobreíndice é a referência à variável de integração e  $m$  diz respeito ao  $m$ -ésimo termo da expansão em série do operador expansional. Tem-se ainda que:

$$[\mu_{\pi}(\gamma+2) - \mu_{\pi}(\gamma+1)] \ll [\mu_{\pi}(\gamma+1) - \mu_{\pi}(\gamma)] \ll 1. \quad (4.27)$$

Portanto, cortando a série em  $\mu_\pi(\gamma + 1) - \mu_\pi(\gamma)$  e aproximando a Eq. 4.25 em primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') dz' \right] E^{-(\gamma+1)} \approx \\ \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \left( \hat{B}_\pi(z') + (t - z') \hat{B}_\pi(z') [\hat{\mu}_\pi^1 - \hat{\mu}_\pi] \right) \right] E^{-(\gamma+1)}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') \right] E^{-(\gamma+1)} = \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \hat{B}_\pi(z') \right] \cdot \\ \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \text{Exp} \left[ \int_{z'}^z dz'' \hat{B}_\pi(z'') \right] (t - z') \hat{B}_\pi(z') [\hat{\mu}_\pi^1 - \hat{\mu}_\pi] \cdot \right. \\ \left. \cdot \text{Exp} \left[ \int_z^{z'} dz'' \hat{B}_\pi(z'') \right] \right] E^{-(\gamma+1)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Novamente temos uma composição de operadores do tipo:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}},$$

que resultará em termos de ordem superior em

$$\mu_\pi(\gamma + 1) - \mu_\pi(\gamma).$$

Conseqüentemente, aproximando em primeira ordem:

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') \right] E^{-(\gamma+1)} \approx e^{\frac{\mu_\pi}{E} \ln t/z}, \\ \cdot \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' (t - z') \hat{B}_\pi(z') [\hat{\mu}_\pi^1 - \hat{\mu}_\pi] \right] E^{-(\gamma+1)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

logo,

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[ \int_z^t dz' \hat{O}_\pi(t, z') \hat{B}_\pi(z') \hat{O}_\pi^{-1}(t, z') \right] E^{-(\gamma+1)} \approx E^{-(\gamma+1)} e^{\frac{\mu_\pi}{E} \ln t/z} \cdot \\ \cdot \left\{ 1 - \frac{\mu_\pi}{E} \int_z^t \frac{dz'}{z'} \left( e^{(t-z')[\mu_\pi(\gamma+1) - \mu_\pi(\gamma)]} - 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde o termo  $-1$  na integral surge ao restaurarmos a exponencial.

Finalmente, tendo em vista os resultados obtidos com as Eqs. 4.12, 4.21 e 4.31, chegamos à solução da equação de difusão de píons

$$F_{\pi}(E, t) = g_N(\gamma) \frac{N_0}{\lambda_N} E^{-(\gamma+1)} \left\{ F_{\pi}^0(E, t) + F_{\pi}^1(E, t) \right\}, \quad (4.32)$$

onde

$$F_{\pi}^0(E, t) = \int_0^t dz e^{z\mu_N(\gamma) + (t-z)\mu_{\pi}(\gamma)} \frac{E_x^{\gamma}}{E} \ln t/z \quad (4.33)$$

e

$$F_{\pi}^1(E, t) = - \frac{E_x}{E} \int_0^t dz e^{z\mu_N(\gamma) + (t-z)\mu_{\pi}(\gamma)} \frac{E_x^{\gamma}}{E} \ln t/z \\ \int_x^t \frac{dz'}{z'} \left\{ e^{(t-z')(\mu_{\pi}(\gamma+1) - \mu_{\pi}(\gamma))} - 1 \right\}. \quad (4.34)$$

A Eq. 4.32 define o fluxo diferencial de píons carregados na atmosfera. Essa solução contém o cálculo de médias que envolvem a distribuição de elasticidade dos píons,  $f(\sigma_{\pi})$ . Como não há dados experimentais de fluxo de píons na atmosfera, a distribuição de elasticidade será analisada de forma indireta, calculando o fluxo diferencial de múons e comparando com dados experimentais medidos ao nível do mar, na faixa de energia que estamos considerando neste trabalho.

Assumiremos para a distribuição de elasticidade dos píons a mesma forma da distribuição para os núcleons

$$f(\sigma_{\pi}) = (\beta_{\pi} + 1)(1 - \sigma_{\pi})^{\beta_{\pi}}$$

e determinaremos  $\beta_{\pi}$  de forma a obtermos uma melhor concordância do fluxo diferencial de múons calculado com os dados experimentais ao nível do mar. Essa discussão será apresentada no próximo capítulo, quando também

faremos a discussão da dependência com a energia e com a profundidade do fluxo de píons carregados na atmosfera.

# Capítulo 5

## Fluxo de Múons

No capítulo anterior determinamos o fluxo diferencial de píons na atmosfera levando em conta o decaimento de píons em vôo em múons. Determinaremos neste capítulo o fluxo diferencial vertical de múons na atmosfera.

Analisamos primeiramente os aspectos cinemáticos do decaimento dos píons necessários para se determinar a equação de difusão para os múons.

### 5.1 Cinemática do decaimento $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ .

Praticamente 100% dos píons decaem em múons e anti-neutrinos. Vejamos este decaimento no sistema de referência do pión. Nesse sistema, os momentos dos píons, múons e anti-neutrinos são, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_\pi &\equiv (m_\pi, 0), \\ P_\mu &\equiv (E_\mu^{CM}, \vec{j}_\mu^{CM}), \\ P_{\bar{\nu}} &\equiv (E_{\bar{\nu}}^{CM}, \vec{j}_{\bar{\nu}}^{CM}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da conservação de momento, temos

$$P_{\bar{\nu}}^2 = (P_{\pi} - P_{\mu})^2, \quad (5.2)$$

ou

$$m_{\pi}^2 + m_{\mu}^2 - 2P_{\pi} \cdot P_{\mu} = 0, \quad (5.3)$$

pois, para todos os efeitos, consideramos a massa do anti-neutrino nula.

Assim ,

$$E_{\mu}^{CM} = \frac{m_{\mu}}{2} \left( \frac{m_{\mu}}{m_{\pi}} + \frac{m_{\pi}}{m_{\mu}} \right) \quad (5.4)$$

e da fórmula relativística da energia temos

$$P_{\mu}^{CM} = \frac{m_{\mu}}{2} \left( \frac{m_{\pi}}{m_{\mu}} - \frac{m_{\mu}}{m_{\pi}} \right) \quad (5.5)$$

Suponhamos agora que o pión tenha energia  $E_{\pi}$  e momento  $P_{\pi}$  no sistema de referência de laboratório (Fig. 5.1). Para determinar a energia dos múons no sistema de laboratório podemos aplicar o seguinte boost

$$L(P_{\pi}) = \begin{pmatrix} E_{\pi}^{LAB} & P_{\pi 1}^{LAB} & P_{\pi 2}^{LAB} & P_{\pi 3}^{LAB} \\ P_{\pi 1}^{LAB} & m_{\pi} + \frac{P_{\pi 1}^{LAB} \cdot P_{\pi 1}^{LAB}}{m_{\pi} + E_{\pi}} & 0 & 0 \\ P_{\pi 2}^{LAB} & 0 & m_{\pi} + \frac{P_{\pi 2}^{LAB} \cdot P_{\pi 2}^{LAB}}{m_{\pi} + E_{\pi}} & 0 \\ P_{\pi 3}^{LAB} & 0 & 0 & m_{\pi} + \frac{P_{\pi 3}^{LAB} \cdot P_{\pi 3}^{LAB}}{m_{\pi} + E_{\pi}} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

no momento dos múons dado pela Eq. 5.4 e 5.5, temos

$$P_{\mu}^{LAB} = L(P_{\pi}) \cdot \begin{pmatrix} E_{\mu}^{CM} \\ P_{\mu 1}^{CM} \\ P_{\mu 2}^{CM} \\ P_{\mu 3}^{CM} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

o que nos fornece, para a energia dos múons no sistema de laboratório

$$E_{\mu}^{LAB} = \frac{1}{m_{\pi}} \left( E_{\mu}^{CM} E_{\pi}^{LAB} + \vec{P}_{\mu}^{CM} \cdot \vec{P}_{\pi}^{LAB} \right). \quad (5.8)$$

Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{P}_{\mu}^{CM}$  e  $\vec{P}_{\pi}^{LAB}$ , então

$$E_{\mu} = \frac{1}{m_{\pi}} \left( E_{\mu}^{CM} E_{\pi}^{LAB} + P_{\mu}^{CM} \cdot P_{\pi}^{LAB} \cos \theta \right), 0 < \theta \leq \pi. \quad (5.9)$$

Devido à isotropia espacial do decaimento dos píons no sistema em que estão em repouso ( $CM$ ), não há nenhum valor de  $\theta$  especialmente favorecido, conseqüentemente existem dois valores limites para a energia do múon no sistema de laboratório. No limite de altas energias podemos aproximar

$$P_{\pi}^{LAB} \simeq E_{\pi}^{LAB} = E_{\pi}, \quad (5.10)$$

obtendo

$$E_{\mu} = \frac{E_{\pi}}{m_{\pi}} \left( E_{\mu}^{CM} + P_{\mu}^{CM} \cos \theta \right), \quad (5.11)$$

assim

$$E_{\mu}^{max} = \frac{E_{\pi}}{m_{\pi}} \left( E_{\mu}^{CM} + P_{\mu}^{CM} \right) \quad (5.12)$$

e

$$E_{\mu}^{min} = \frac{E_{\pi}}{m_{\pi}} \left( E_{\mu}^{CM} - P_{\mu}^{CM} \right). \quad (5.13)$$

Substituindo as Eqs. 5.4 e 5.5 nas Eqs. 5.12 e 5.13, obtemos, simplesmente

$$E_{\mu}^{max} = E_{\pi} \quad (5.14)$$

e

$$E_{\mu}^{min} = \left[ \frac{m_{\mu}}{m_{\pi}} \right]^2 E_{\pi}. \quad (5.15)$$

Qualquer energia entre  $E_\mu^{min}$  e  $E_\mu^{max}$  é igualmente provável, logo a probabilidade por unidade de energia de que um múon com energia entre estes limites seja detectado é constante e igual a

$$P(E_\mu) = \frac{1}{\Delta E_\mu} = \frac{1}{1 - \left[\frac{m_\mu}{m_\pi}\right]^2} \frac{1}{E_\pi} \quad (5.16)$$

## 5.2 Equação de Difusão

No capítulo anterior determinamos a probabilidade para que um pión de energia  $E_\pi$  decaia em um múon, num intervalo de profundidade entre  $t$  e  $t + dt$ , dada pela Eq. 4.4. Na Eq. 5.16 determinamos a probabilidade de que o múon produzido no decaimento tenha energia  $E_\mu$ , no intervalo  $E_\mu^{min} \leq E_\mu \leq E_\mu^{max}$ . Conseqüentemente a probabilidade de produção de múons com energia  $E_\mu$  pelo decaimento de pions com energia  $E_\pi$  à profundidade entre  $t$  e  $t + dt$  é:

$$P(E_\pi \rightarrow E_\mu) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{B_\pi}{E_\pi^2 t}, \quad (5.17)$$

onde

$$\alpha = \left[ \frac{m_\pi}{m_\mu} \right]^2. \quad (5.18)$$

Consideremos uma cascata piônica se desenvolvendo na atmosfera com uma distribuição energética dada por  $F_\pi(E_\pi, t)$ , conforme o capítulo anterior. Vejamos seu decaimento radioativo do ponto de vista dos múons produzidos com energia entre  $E_\mu$  e  $E_\mu + dE_\mu$ , profundidade  $t$  e  $t + dt$ , com distribuição energética  $F_\mu(E_\mu, t)$  (espectro diferencial de múons).

De acordo com a Eq. 5.17, a probabilidade de decaimento de píons em múons é dada por

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{B_\pi}{E_\pi^2 t} F_\pi(E_\pi, t), \quad (5.19)$$

mas, pelas Eqs. 5.14 e 5.15, existe uma região de energia dos píons produzindo múons com a mesma energia  $E_\mu$  cujos limites são

$$E_\mu \leq E_\pi \leq \alpha E_\mu. \quad (5.20)$$

Portanto, integrando a expressão 5.19, obtemos a equação diferencial que descreve o espectro de múons entre  $t$  e  $t + dt$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_\mu(E_\mu, t) = \frac{B_\pi}{t} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{E_\mu}^{\alpha E_\mu} \frac{dE_\pi}{j_\pi^2} F_\pi(E_\pi, t), \quad (5.21)$$

cujas \* solução é simplesmente:

$$F_\mu(E_\mu, t) = B_\pi \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_0^t \frac{dz}{z} \int_{E_\mu}^{\alpha E_\mu} \frac{dE_\pi}{E_\pi^2} F_\pi(E_\pi, z), \quad (5.22)$$

onde

$$B_\pi = 115 \text{ GeV}, \alpha = 1.745$$

e  $F_\pi(E_\pi, z)$  é dado pelas Eqs. 4.32, 4.33 e 4.34.

### 5.3 Análise Numérica

Obtemos assim, uma solução analítica para o fluxo de múons. Porém, conforme mostra a Eq. 5.22, é necessário conhecermos o fluxo de píons para a correta descrição dos dados experimentais de fluxo muônico [9,10].

Como foi dito anteriormente, não há dados experimentais de fluxo piônico na faixa de energia em que estamos trabalhando ( $1 \leq E \leq 5 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ ).

Por isso calculamos o fluxo de múons para vários valores de  $\beta_\pi$ , na distribuição de elasticidade de píons, afim de obter a melhor concordância com os dados experimentais de fluxo muônico ao nível do mar.

Na Fig. 5.2 mostramos a comparação do fluxo muônico calculado com  $\beta_\pi = 0.6$  com dados experimentais ao nível do mar. Este valor de  $\beta_\pi$  corresponde a uma elasticidade média de 0.38 para os píons.

Com este resultado conseguimos uma boa concordância com os dados experimentais de múons para energias acima de 50 GeV. De forma geral, a solução obtida por nós tende a fornecer melhores resultados na faixa de energias mais altas, superestimando o fluxo de múons na faixa de energia mais baixas.

Os problemas podem ser considerados para explicar a não concordância com os dados de baixa energia. Um é o da aproximação usada na obtenção da solução da equação de difusão. A influência da aproximação usada pode ser entendida se compararmos este resultado com o obtido por Bellandi e Navarra [16] que, usando uma aproximação para altas energias, reproduzem os dados experimentais para  $E \geq 200$  GeV. Não usando a energia como parâmetro de expansão, neste trabalho reproduzimos os dados para  $E \geq 50$  GeV. Assintoticamente nossa solução reproduz a de Bellandi e Navarra. Conseqüentemente, usando-se mais termos em nossa expansão na solução dos píons, haveria uma melhor concordância com dados de mais baixa energia.

O segundo problema é que não consideramos a perda de energia e o decaimento dos múons, fatores que se tornam importantes quando vamos para a região de baixas energias. Como a perda de energia por interações

e por decaimento são pequenas, sua importância será muito maior para faixas muito baixas de energia, de forma que a não reprodução dos dados experimentais entre 1 e 50 GeV deve-se muito mais a um problema de aproximação usada na obtenção da solução.

Os dados de baixa energia são melhores descritos usando-se o modelo de fragmentação [17], com as parametrizações do Liland [14] para o espectro de produção de partículas secundárias obtidas através de reações inclusivas de baixa energia, conforme mostrado na Fig. 5.3. É importante lembrar que os dois modelos conseguem reproduzir a mudança contínua da inclinação dos dados experimentais.

Em nossos cálculos desconsideramos alguns termos de produção de partículas por serem pouco importantes na região de energia em que estamos trabalhando, entre eles, o termo de produção devido aos káons. No entanto, a contribuição dos káons torna-se significativa à energias muito altas. Esta contribuição se deve basicamente ao decaimento radioativo dos káons, e não por colisões inelásticas destes com a atmosfera, pois a meia vida do káon é muito pequena.

Na Fig. 5.4 mostramos um estudo da contribuição dos káons feita por Liland [14], usando o modelo de fragmentação. Essa contribuição varia de 5 a 24%, aproximadamente, porém sua maior contribuição só se dá no final da faixa de energia em que estamos trabalhando.

Como nossa solução reproduz bem os dados experimentais de fluxo de múons ao nível do mar, a Eq. 5.22 permite acompanhar a evolução da cascata de múons em função da profundidade. Essa análise é mostrada na Fig. 5.5, onde calculamos o fluxo em função de  $T = t/\lambda_N$  ( $\lambda_N = 80 \text{ g/cm}^2$ ),

para as energias: a)  $E = 10$  GeV; b)  $E = 100$  GeV e c)  $E = 1000$  GeV.

Apesar de não ser possível compararmos a solução piônica frente a fluxos medidos, podemos tirar outras informações importantes da Eq. 4.32. Fizemos uma comparação com o objetivo de verificar a influência do termo de decaimento no fluxo em relação ao aumento da energia das partículas. Esta comparação é mostrada na Fig. 5.6, onde fica explícito que, a partir de 1000 GeV o decréscimo do fluxo por decaimento é praticamente inexistente devido ao crescimento do fator de Lorentz.

Também analisamos a variação do fluxo de píons em função da profundidade parametrizada por  $T = t/\lambda_N$ . Na Fig. 5.7 mostramos essa análise incluindo uma comparação da dependência do decaimento dos píons com a profundidade para três valores de energia: a)  $E = 10$  GeV; b)  $E = 100$  GeV e c)  $E = 1000$  GeV.

Comparando a Fig. 5.7 com a Fig. 5.5, verificamos que nosso modelo prevê um fluxo máximo de píons, para as energias citadas, em torno de  $120 \text{ g/cm}^2$  ( $T = 1.5$ ), ou seja, um livre caminho médio de interação do pión, enquanto que o fluxo de múons cresce muito lentamente, praticamente se estabilizando a grandes profundidades para as três energias consideradas. Esse comportamento do fluxo de múons é esperado, uma vez que a taxa de perda de energia dos múons na atmosfera é desprezível.

Na Fig. 5.8 mostramos a evolução das cascatas piônica e muônica em função da profundidade. Pode-se observar que o fluxo de múons tem seu maior crescimento justamente na região em que há maior produção de píons.

Devido ao grande livre caminho médio de interação dos múons na atmosfera, o fluxo muônico cresce rapidamente à medida em que há abundância

de píons para produzi-los. A partir do momento em que o fluxo de píons começa a decrescer, o fluxo de múons praticamente se estabiliza, já que o termo de produção de múons a uma dada energia é muito maior do que a diminuição do fluxo, desde que haja píons suficientes.

Devemos esperar que em profundidades próximas de zero, o fluxo de píons seja maior do que o fluxo de múons. Na Fig. 5.9 mostramos a razão fluxo de píons/fluxo de múons para as mesmas energias a) 10 GeV, b) 100 GeV e c) 1000 GeV, e para  $0 \leq T \leq 0.5 (t \leq 40 \text{ g/cm}^2)$ .

Podemos verificar que a Eq. 5.22 descreve o comportamento esperado para as energias 100 e 1000 GeV. Porém, para 10 GeV ocorre uma discrepância, pois a solução muônica fornece um fluxo maior do que o de píons.

Este comportamento da solução pode ser explicado levando-se em consideração que nessa região (baixa energia e profundidade) a probabilidade de decaimento dos píons se torna muito grande e as aproximações feitas na obtenção da solução faz com que esta seja pouco sensível à pequenas variações da profundidade quando estamos no topo da atmosfera ( $t \leq 40 \text{ g/cm}^2$ ).

No entanto, de maneira geral, o comportamento global de fluxo muônico mantém-se coerente, conforme as três curvas mostradas. No limite assintótico de  $t \rightarrow 0$ , o fluxo de múons tende a zero mais rapidamente do que o de píons.

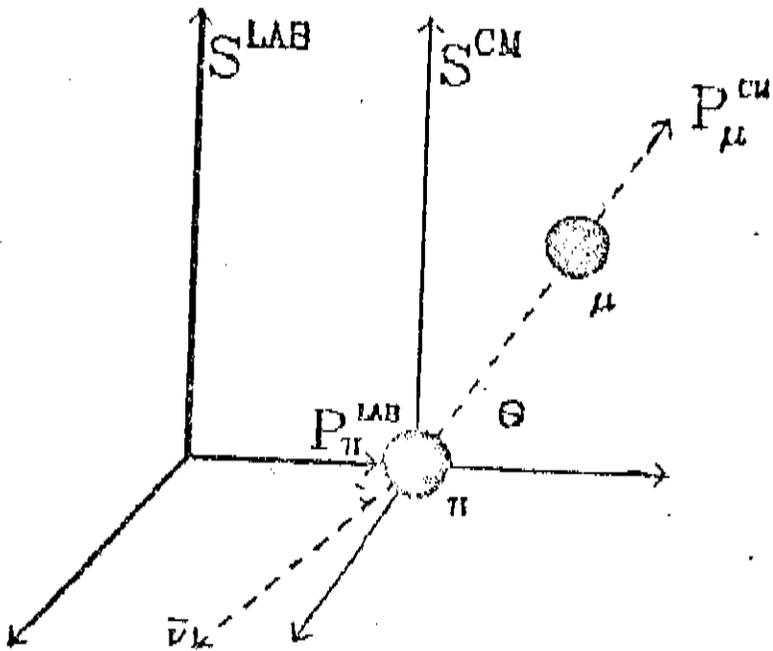


Figura 5.1: Cinemática do decaimento  $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ .

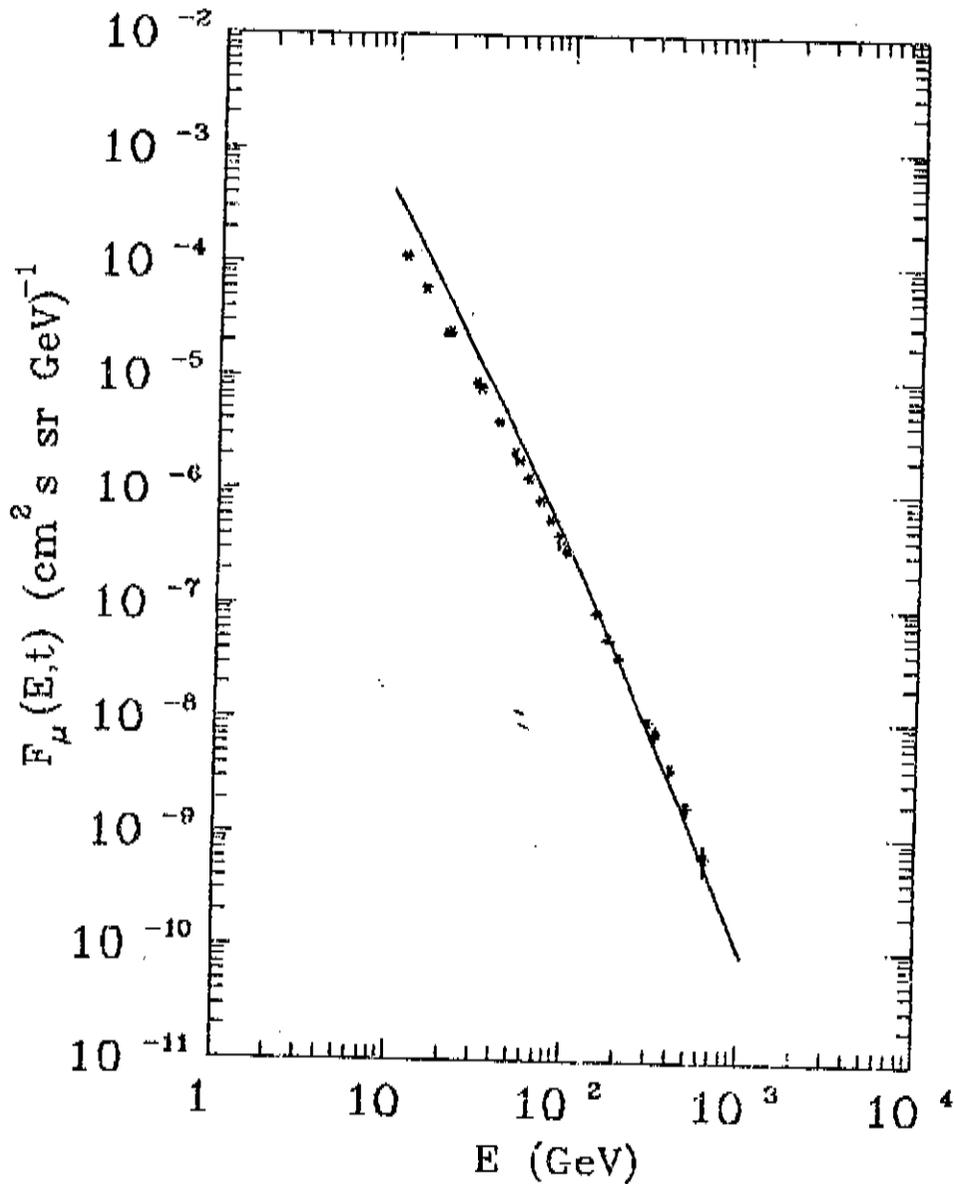


Figura 5.2: Fluxo muônico, dado pela Eq. 5.22 em comparação com dados experimentais ao nível do mar [9,10].

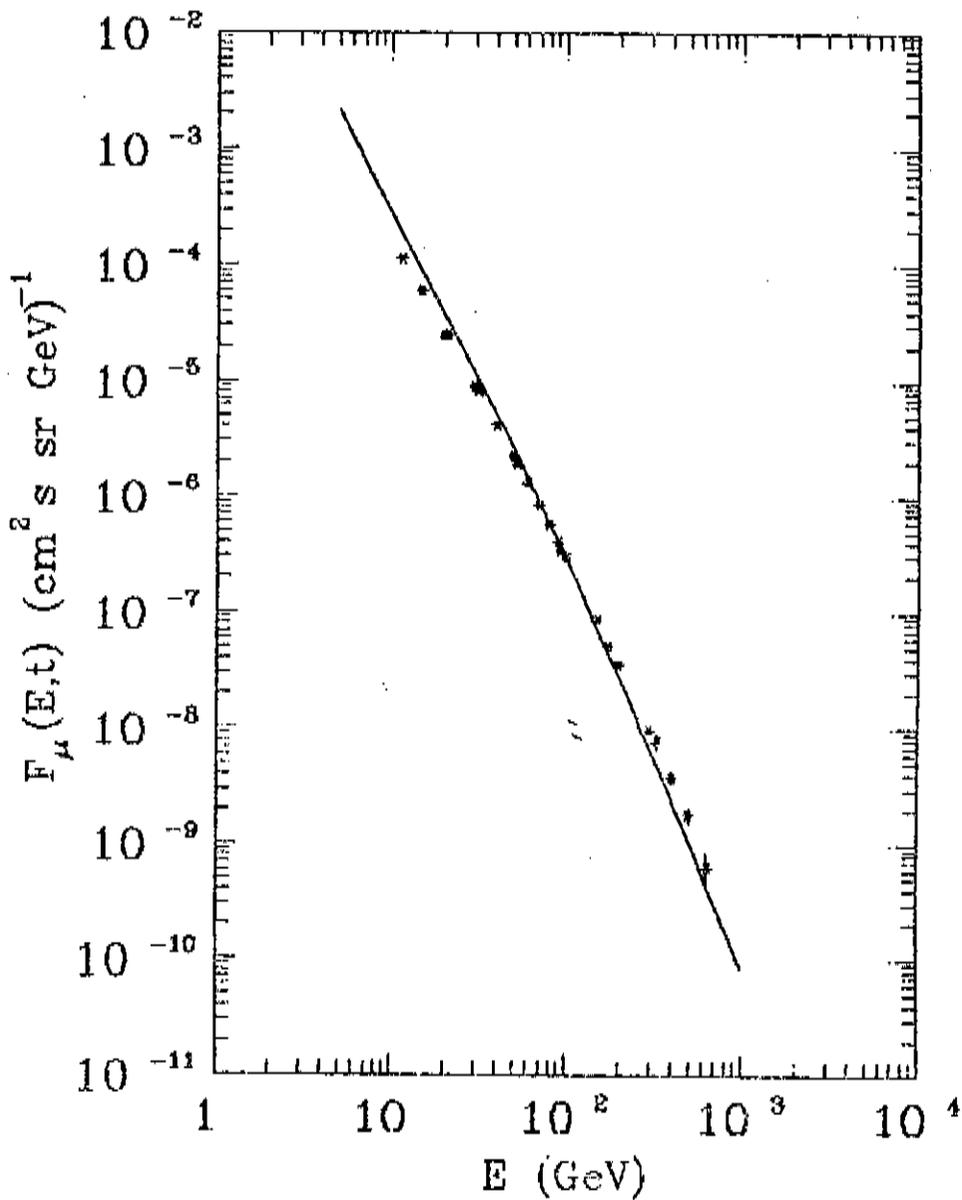


Figura 5.3: Fluxo muônico calculado usando o modelo de fragmentação [17].

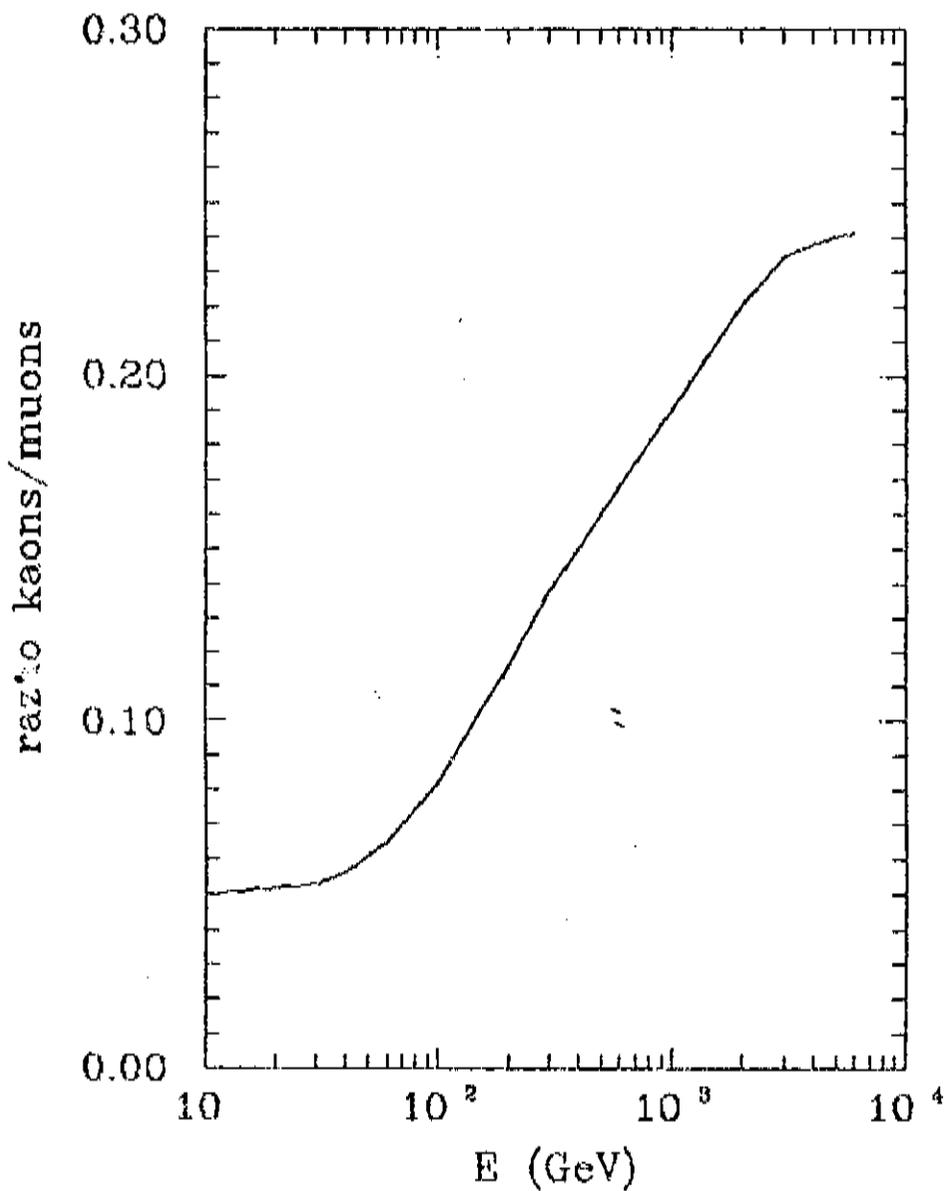


Figura 5.4: Fração de múons produzidos por mésons em relação ao fluxo múônico total [14].

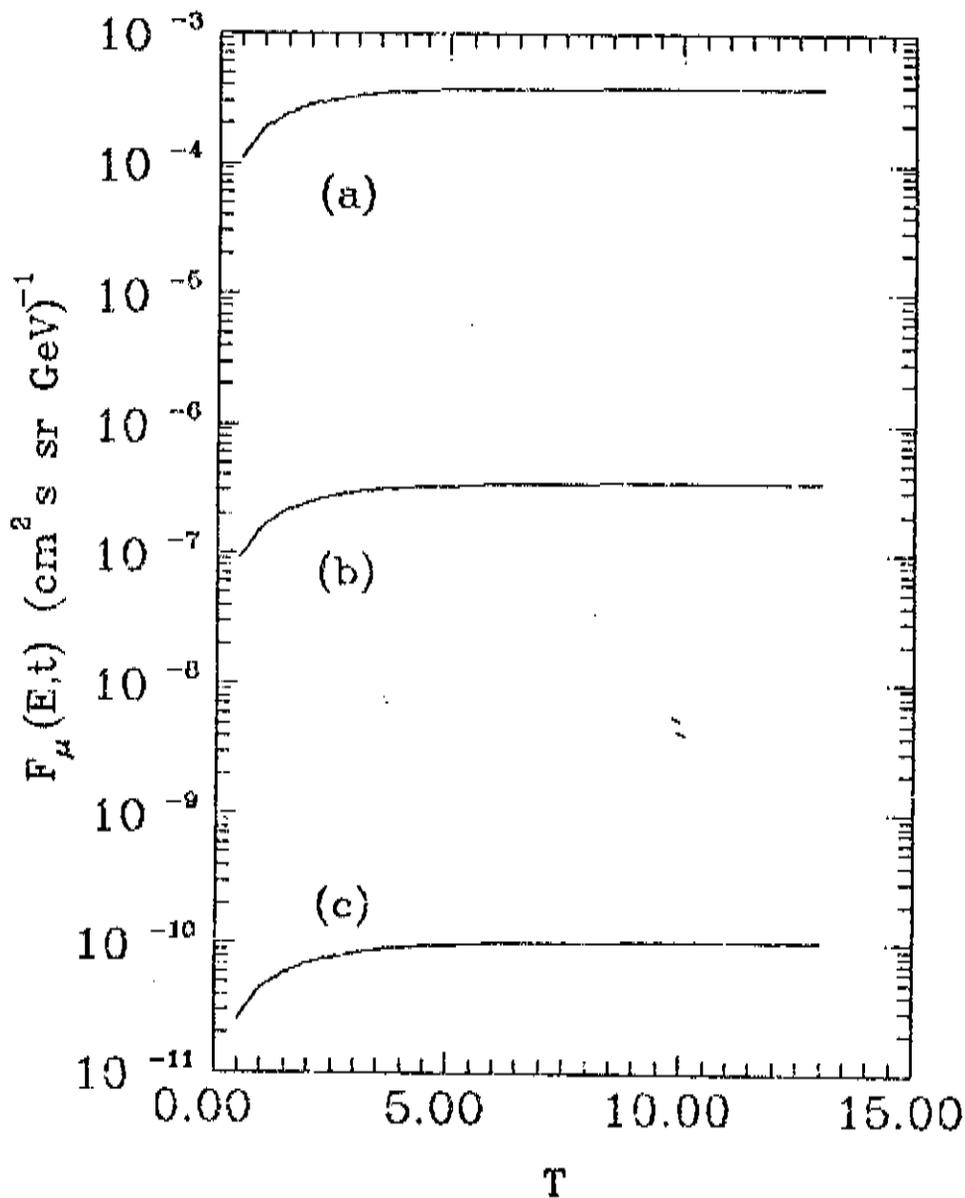


Figura 5.5: Evolução do fluxo muônico em função da profundidade (em unidades de  $t/\lambda_N$ ) para as energias a) 10 GeV; b) 100 GeV e c) 1000 GeV.

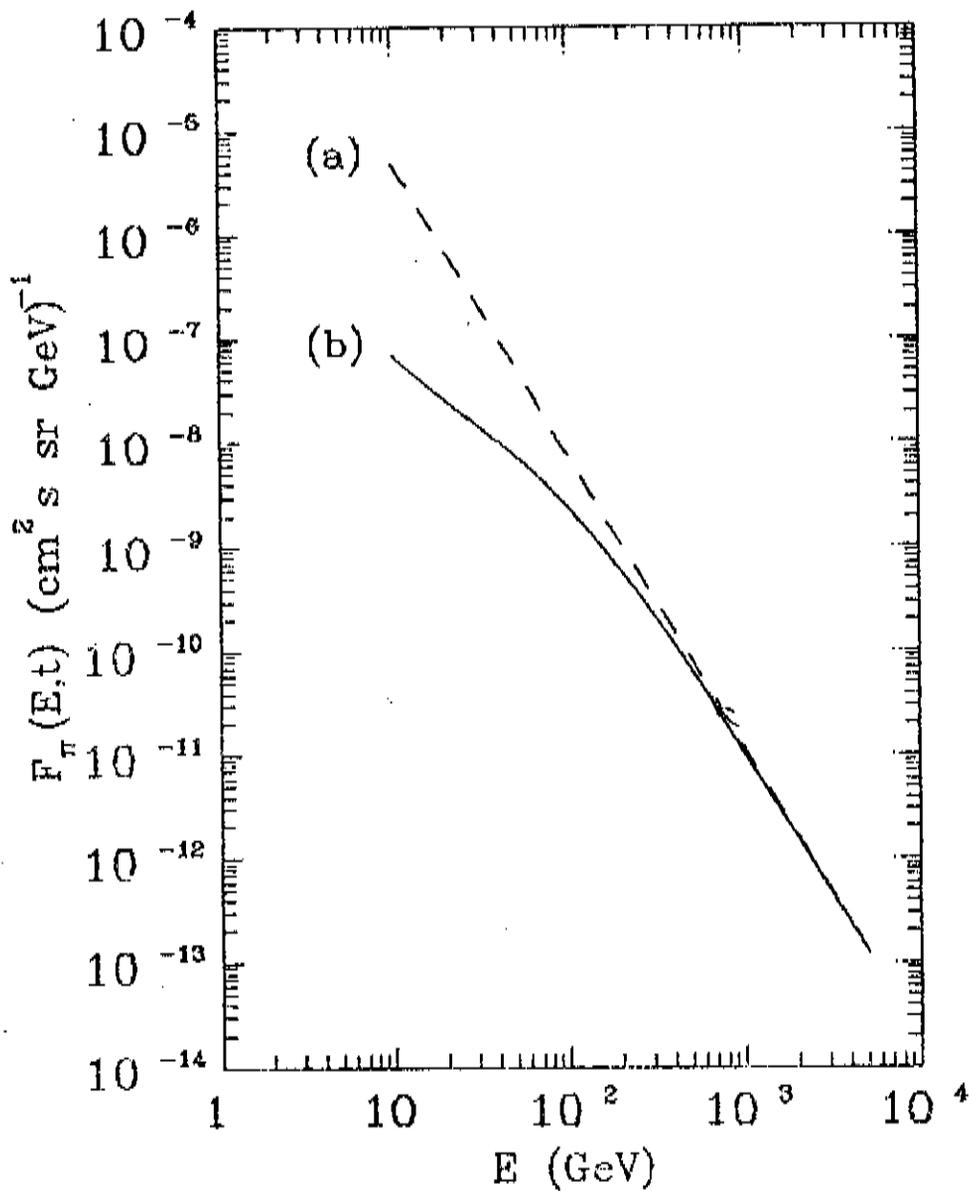


Figura 5.6: Fluxo de píons, dado pela Eq. 4.32, com a)  $B_\pi = 0$  e b)  $B_\pi = 115$  GeV.

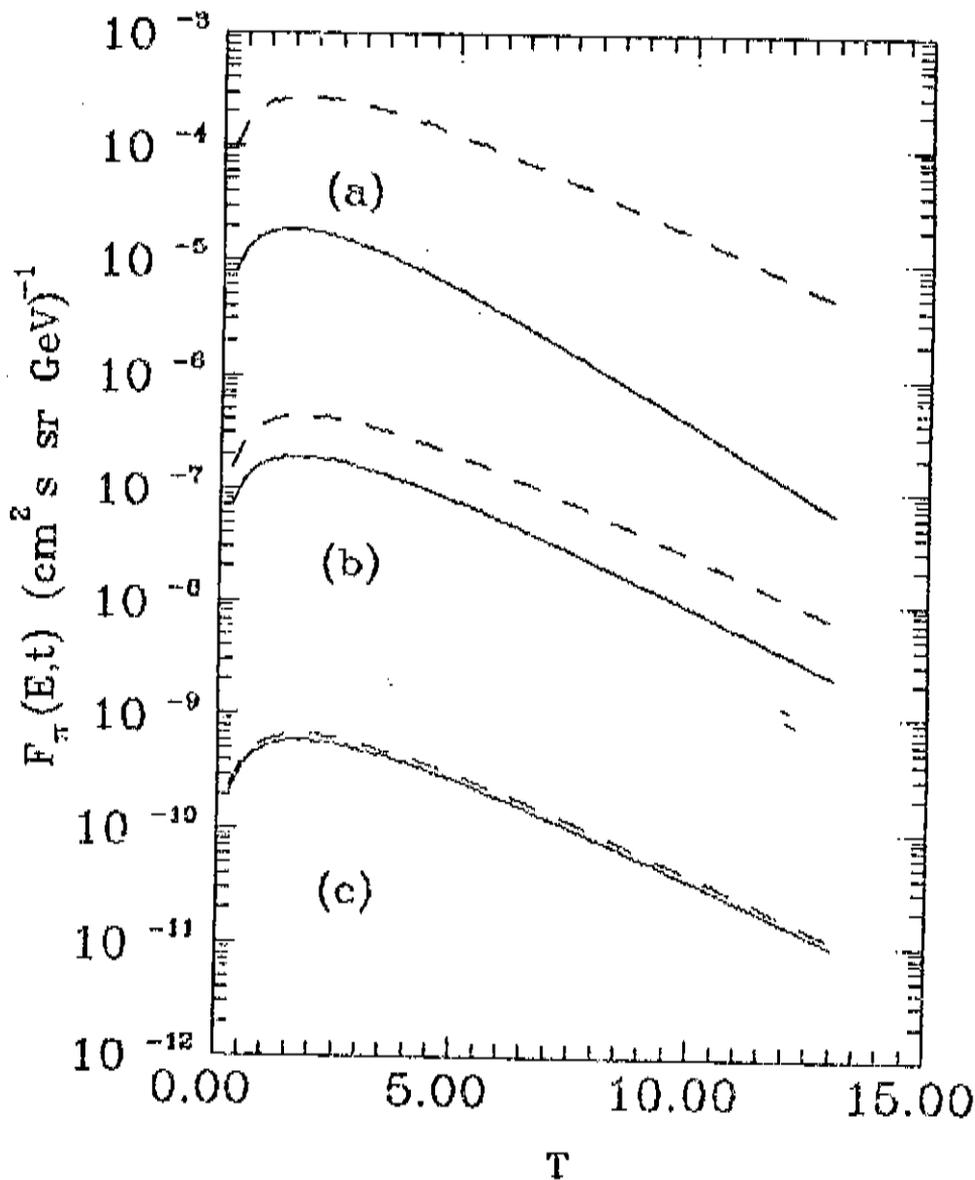


Figura 5.7: Evolução do fluxo de píons em função da profundidade (em unidades de  $t/\lambda_N$ ): linha cheia -  $B_\pi = 115 \text{ GeV}$ , linha tracejada -  $B_\pi = 0$ , para a) 10 GeV, b) 100 GeV e c) 1000 GeV.

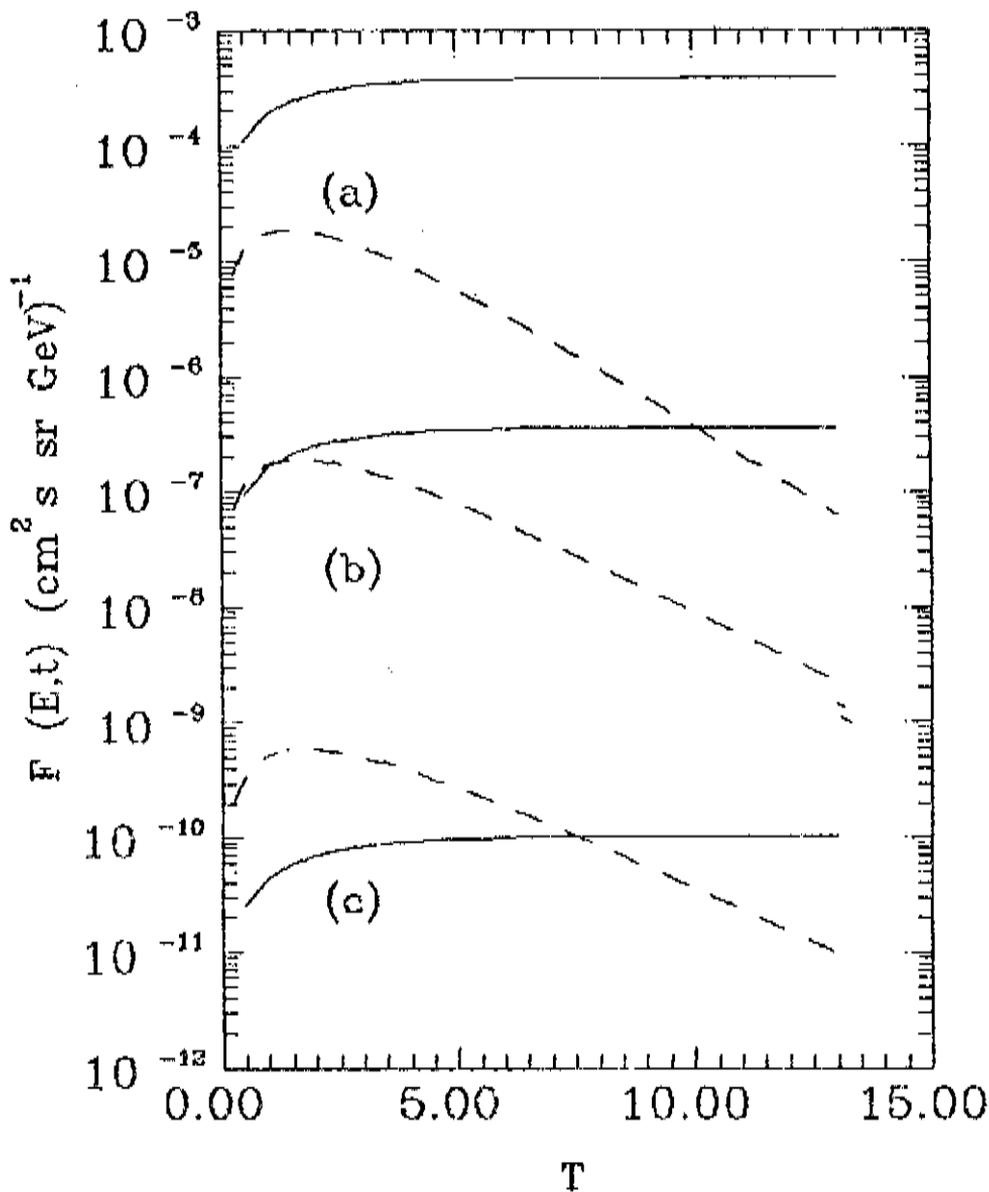


Figura 5.8: Comparação entre os fluxos de píons (linha tracejada) e múons (linha cheia) em função da profundidade (em unidades de  $t/\lambda_N$ ) e  $B_\pi = 115$  GeV.

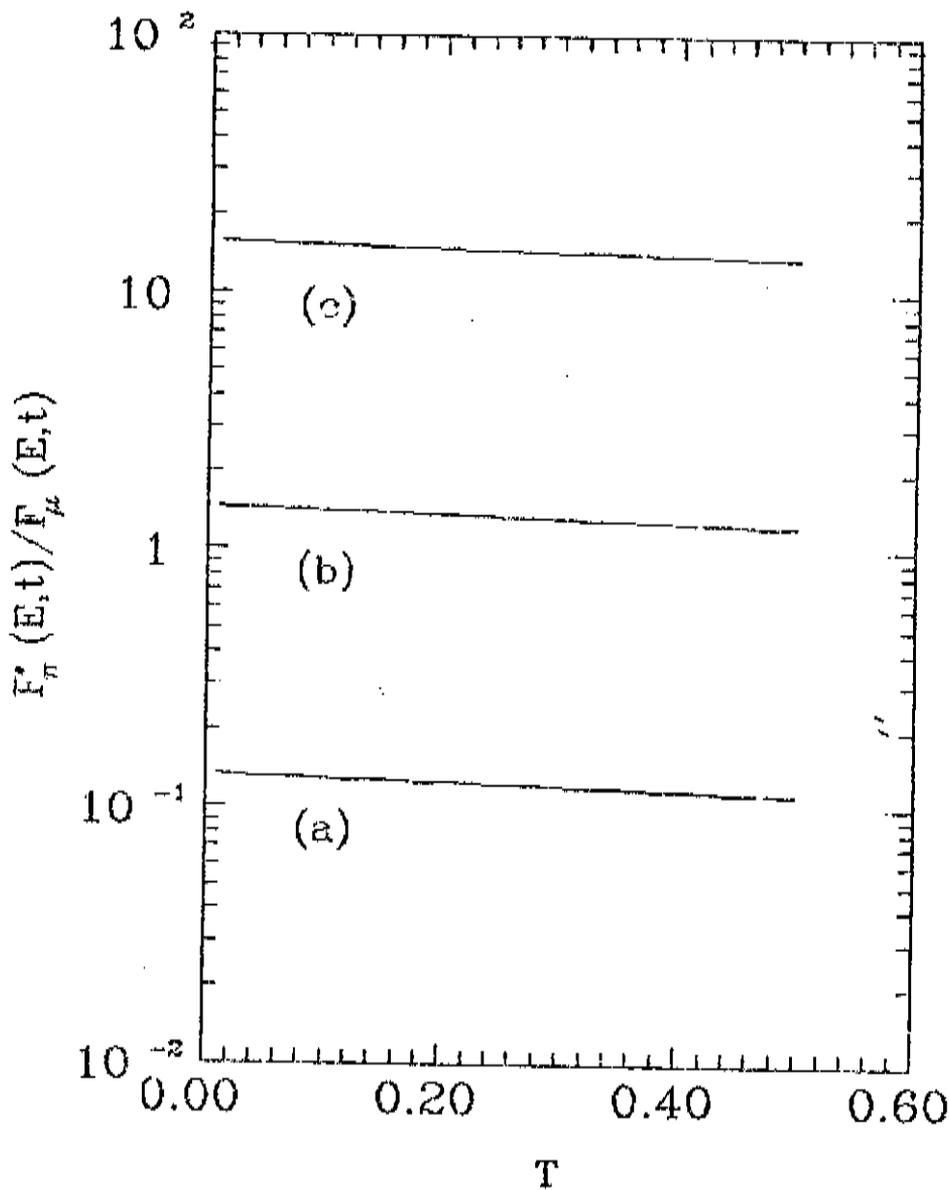


Figura 5.9: Razão entre os fluxos de píons e de múons para  $T \leq 0.5$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Apresentamos neste trabalho o estudo do fluxo vertical de múons induzidos por uma cascata hadrônica na atmosfera, solucionando as equações de difusão, assumindo o modelo de partícula líder.

Resolveu-se primeiramente a equação de difusão para núcleons interagindo com a atmosfera, comparando-se a solução analítica com dados experimentais de fluxo nucleônico ao nível do mar.

O problema com esta solução é que ela é função da distribuição para a partícula líder assumida para determinar o espectro, e que apresenta um parâmetro livre, necessitando de um ajuste numérico para comparação com dados experimentais.

O ajuste com os dados experimentais mostra que a elasticidade média, fração de energia carregada pela partícula líder após a colisão, não é  $1/2$  como usualmente aceito em radiação cósmica, mas sim  $< 1/2$ , em acordo com a análise de Jones [12] para dados de reações inclusivas em aceleradores.

Com uma elasticidade média igual a 0.43, obteve-se uma boa con-

cordância entre o fluxo nucleônico calculado e os dados experimentais ao nível do mar, como pode-se ver na Fig. 3.2.

A função de distribuição de partícula líder aqui introduzida, de uma certa forma arbitrária, revela características bem definidas quando relacionada com as funções de overlap no parâmetro de impacto. Na Ref. [23], mostramos como a função de distribuição de partícula líder pode se relacionar com a função de overlap inelástica.

Calculamos a função de overlap inelástica usando a distribuição aqui adotada, que apesar de não ser totalmente realística, revela uma interpolação entre uma Gaussiana e o limite do disco preto.

Para calcular o fluxo de píons na atmosfera, usou-se ainda o modelo de partícula líder, com uma distribuição do mesmo tipo da do núcleon, introduzindo-se também o decaimento de píons em múons. Na região de energia que estamos considerando não há dados experimentais de fluxo de píons carregados, de forma que a decisão a respeito da elasticidade dos píons só pode ser tomada analisando o fluxo de múons a partir de dados experimentais medidos ao nível do mar.

Com uma elasticidade média para os píons igual a 0.38, pode-se determinar o fluxo de múons com uma boa concordância com os dados experimentais, conforme Fig. 5.1.

A sistemática de cálculo das soluções de equações de difusão usada neste trabalho permite determinar teoricamente o fluxo de partículas na atmosfera para qualquer ângulo zenital. No caso de fluxo de múons, é de particular interesse para experimentos subterrâneos o fluxo para ângulo zenital igual a  $\pi/2$ . Resultados preliminares mostram que, com essa sistemática de

solução de equações de difusão, pode-se obter uma boa concordância com dados experimentais, pelo menos para  $E > 1$  TeV.

Apesar dos bons resultados obtidos neste trabalho, pelo menos do ponto de vista quantitativo, há certos aspectos que merecem um melhor entendimento qualitativo.

O mais crucial é o problema da distribuição de partícula líder e, conseqüentemente, o da inelasticidade. Apesar de ser possível determinar experimentalmente em aceleradores a função de distribuição de partícula líder, isso só foi feito na energia de  $\sqrt{s} = 53$  GeV no ISR [18], que apresenta praticamente uma distribuição uniforme, com pico na região  $x \approx 1$ , com inelasticidade média igual a  $\approx 1/2$ .

Comparativamente a esses dados experimentais, a distribuição  $f(x)$  adotada neste trabalho apresenta um problema a ser resolvido, que é o da supressão do pico de difração, região de  $x \approx 1$ , que aparece nos dados experimentais da Ref. [18].

A região de energia do ISR, é no entanto uma região atípica de espalhamento. Numa faixa relativamente longa de energia, a seção de choque inelástica é praticamente constante, portanto não é de se estranhar uma distribuição *flat* para a partícula líder. Além do ISR, no entanto as seções de choque crescem com a energia, podendo assim, também revelar uma dependência energética na distribuição de partícula líder, ou seja uma quebra de "scale".

A dependência energética do parâmetro de inelasticidade é um problema controverso e que tem levado à divulgação de resultados contraditórios. Em alguns trabalhos [19,20,21] os autores mostram uma inelasticidade que di-

minui com a energia, enquanto que em outros [22], ela cresce. Um argumento contra a diminuição da inelasticidade com a energia é o simples fato de que, na região de raios cósmicos, ocorre sempre uma formação copiosa de partículas, particularmente píons. Uma diminuição da fração energética liberada para produção de partículas, implica na supressão de píons na região de altas energias.

Assumir uma inelasticidade decrescente com a energia, implica em não reproduzir dados experimentais de raios cósmicos [24]. Recentemente [23] mostramos, no entanto, que com inelasticidade crescente com a energia, é possível reproduzir dados experimentais de fluxo nucleônico ao nível do mar.

O estudo da dependência energética da distribuição de partícula líder, e conseqüentemente da inelasticidade, é fundamental para uma análise correta de dados experimentais na região de altas energias e será objeto de estudos em trabalhos que se pretende desenvolver, como continuação natural desta Tese.

# Apêndice A

## Relação Profundidade-Altitude de Interação

Ao considerarmos as interações das partículas da radiação cósmica na atmosfera, é imprescindível que se tenha em mente que é necessário se levar em consideração a quantidade de matéria atravessada pelas partículas incidentes.

A variação da densidade atmosférica impõe que a contribuição para o fluxo total de uma dada partícula depende não apenas da distância por ela percorrida, mas também da altura em que cada interação ocorre.

Faz-se necessário então, recorrermos a outro parâmetro que descreva, além da altitude em que ocorreram cada interação (em unidades de comprimento), a dependência na quantidade de ar que a partícula incidente atravessou.

Precisamos, portanto, conhecer como se comporta a densidade atmos-

férica em relação à variação da altitude. Entretanto, por ser um meio tão complexo, não existe um modelo exato que descreva a atmosfera. Baseando-nos no fato de existirem grandes deslocamentos de ar, com correntes ascendentes e descendentes que contribuem para minimizar as variações de temperatura, adotaremos o modelo isotérmico.

Da equação dos gases ideais temos

$$p = \rho \frac{RT}{M}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  a densidade,  $R$  a constante dos gases,  $T$  a temperatura e  $M$  a massa molecular do ar. Assim,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (\text{A.2})$$

A variação da pressão do nível do mar até a altitude  $l$  é:

$$p = p_0 e^{-cl}, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$c = g \frac{\rho_0}{p_0} = \frac{Mg}{RT} = 1.162 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

$g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho_0$  e  $p_0$  são a densidade ( $\approx 1.20 \text{ kg/m}^3$ ) e a pressão ( $\approx 1.013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ) atmosféricas ao nível do mar, respectivamente.

Como estamos estudando o fluxo vertical de partículas, imaginemos um cilindro na atmosfera com base de área unitária. A quantidade de ar em unidades de massa por área unitária existente acima da base é:

$$t = \frac{p}{g}, \quad (\text{A.5})$$

Suponhamos que uma partícula interage com um núcleo de ar à altitude  $a$  (em metros) sendo detectada à altitude  $b$ . A relação entre a quantidade de ar que a partícula atravessa e a altitude da interação medida a partir do detector é:

$$a = -H \ln t_a/t_b, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$H = \frac{1}{c} = 8.608 \cdot 10^3 \text{ m}. \quad (\text{A.7})$$

A grandeza  $t$ , que reproduz facilmente a altitude em que ocorreu a interação e a quantidade de ar que a partícula atravessou, é comumente chamada de *profundidade* e adotada como o parâmetro de variação nas equações de difusão.

# Bibliografia

- [1] I. Fujiwara, Prog. Theor. Phys. ,7,5,433(1952).
- [2] O. Castro, An. Acad. Bras. Ciên. ,51,65(1979).
- [3] J. Bellandi F° et al. , Hadronic Journal,13 (1990).
- [4] JACEE Collaboration, Nucl. Instrum. Meth. ,A251, 583(1986).
- [5] M. A. Faessler, Prep. CERN EP/84-165.
- [6] G. Brooke and A. W. Wolfendale, Proc. Phys. Soc. ,83,843(1964).
- [7] F. Ashton et al. , Acta Phys. Academiae Scient. Hung. , 29,Sup. 3.25(1970).
- [8] F. Ashton and R.B. Coats, J. Phys. A ser 2,1, 169(1968).
- [9] O. C. Allkofer et al. , Phys. Lett. ,36B,425(1971).
- [10] C. A. Ayre et al. , J. Phys. ,G1,584(1975).
- [11] R. P. Feynman, Phys. Rev. ,84,108(1951).

- [12] L. W. Jones, Workshops on Cosmic Ray Interactions and High Energy Results - La Paz/Rio de Janeiro - July 1982.
- [13] J. Bellandi F<sup>o</sup>, J. Dias de Deus et al. , Prep. DRC-TII 02/88.
- [14] A. Liland, Forts. der Phys. ,23,571(1975).
- [15] A. Ohsawa and S. Yamashita, Prog. Theor. Phys. ,77 ,1411(1987).
- [16] J. Bellandi F<sup>o</sup> and R. Navarra, Contribution to XX ICRC - Adelaide - Australia - 1990.
- [17] J. Bellandi F<sup>o</sup>, S. Q. Brunetto, L. M. Mundim F<sup>o</sup>, M. A. Alves, R. J. M. Covelan and A. B. Pádua, X Brazilian National Meeting in Elementary Particle and Fields - Itatiaia - Rio de Janeiro - 1989.
- [18] M. Basile et al. , Nuovo Cimento,73A,329(1983).
- [19] E. M. Friedländer et al. , Phys. Rev. ,D28, 2903(1983).
- [20] Alner et al. , Prep. CERN EP/86-213.
- [21] G. M. Fowler, Phys. Rev. ,D35,870(1987).
- [22] S. Barshay et al. , Phys. Lett. ,167B,449(1986).
- [23] J. Bellandi F<sup>o</sup>, J. Dias de Deus, S. Q. Brunetto, L. M. Mundim F<sup>o</sup> and M. A. Alves - Prep. DRC-IFGW-TII:01/90.
- [24] J. Bellandi F<sup>o</sup> et al. , Prog. Theor. Phys. ,83,58(1990).
- [25] J. R. Johnson et al. , Phys. Rev. ,D17,1242(1978).

[26] F. Ashton and A. J. Saleh, *Nature*, 256, 387 (1975).