

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida pelo
aluno José Tadeu de Souza Paes e aprovada pela comissão
julgadora

Assinatura 14/02/86

APLICAÇÃO DO MODELO DE CHOU-YANG
AO ESPALHAMENTO ELÁSTICO π^-p

José Tadeu de Souza Paes

Dissertação apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" para a obtenção do título de MESTRE

Orientador: Prof. Dr. José Bellandi Filho

DEPARTAMENTO DE RAIOS CÔSMICOS, CRONOLOGIA,

ALFREDO GUERREIRO E LOPES - UNICAMP

CAMPINAS - 1985

À

minha MÃE, Eliete,
minha ESPOSA, Rosa, e
a meus FILHOS, Marcos
e Maraísa, esse tra-
balho pertence.

AGRADECIMENTOS

Esta tese representa o meu primeiro trabalho em Física, o qual tornou-se possível devido à colaboração de vários professores, colegas e amigos que me ajudaram. Sinceramente, registro aqui os meus melhores agradecimentos.

- Ao Prof.Dr. José Bellandi Filho por sua paciente orientação durante o desenvolvimento deste trabalho,
- Ao Prof.Dr. Bruto M.E.Pimentel, do I.F.T., pela amizade, apoio e por sua assistência na redação final deste trabalho,
- Ao Prof.Dr. Ammiraju Pemmaraju por sua colaboração e constante estímulo,
- Aos colegas Roberto J.M.Covolán e Antonio Braz de Pádua pela amizade, incentivo e pelas discussões esclarecedoras,
- Aos colegas Sergio Querino Brunetto, Anderson C.Fauth, Edmilson J.T.Manganote e Herminio Simões Gomes pela amizade e boa vontade que demonstraram com relação ao desenvolvimento de alguns programas computacionais,
- Aos Profs. José Mário Martinez e Petrônio Pulino, do Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação, por cederem gentilmente o programa de ajuste utilizado neste trabalho,
- A todos os amigos e colegas paraenses que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho e pela solidariedade e camaradagem de todas as horas,
- Aos colegas Marcio J.Menon, Maria de Lourdes Menon, José Carlos, Sergio Monsanto, Luiz Carlos, pela amizade e apoio demonstrado no decorrer destes anos,

- Aos demais Professores, Funcionários e Colegas do Departamento de Raios Côsmicos, assim como a outros colegas do Instituto de Física, pelo clima de companheirismo e simpatia com que fui sem pre acolhido durante estes anos,
- A Marilena A.Borelli pelo seu competente e paciente, trabalho prestado no serviço de datilografia durante a preparação desta Tese,
- Aos Colegas do Departamento de Física da UFPA pelo incentivo e pela confiança em mim depositada para elaboração deste trabalho,
- A Universidade Federal do Pará e CAPES pelo apoio financeiro,
- A minha Mãe, Raimunda Eliete de Souza Paes, e a meu saudoso Pai, José Maria de Souza Paes, pelo carinho, e incentivo que sempre me transmitiram,
- Por último, mas com maior desvelo e carinho, à minha ESPOSA, Rosa Maria Borges Paes, pelo seu incentivo e encorajamento constante durante todos estes anos.

ÍNDICE

Lista de Ilustrações.....	i
Lista de Tabelas	iii
Resumo e Abstract	iv
Introdução	1
 Capítulo I - CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DOS DADOS EXPERIMENTAIS.....	5
1.1 - Seção de Choque Total	5
1.2 - Seção de Choque Diferencial	6
1.3 - Seção de Choque Elástica Total	13
 Capítulo II - FORMALISMO DE ONDAS PARCIAIS.....	16
2.1 - Amplitude de Espalhamento por um potencial real.....	16
2.2 - Amplitude de Espalhamento por um potencial complexo	19
2.3 - Amplitude de Espalhamento na representação do parâmetro de impacto	20
 Capítulo III - MODELO DE CHOU-YANG	22
3.1 - Considerações Fundamentais do Modelo.....	22
3.2 - Derivação da Amplitude de Espalhamento....	23
3.3 - A opacidade em Função dos Fatores de Forma	25
3.4 - Algumas restrições do modelo.....	28
 Capítulo IV - APLICAÇÃO DO MODELO	30
4.1 - Dados experimentais utilizados no ajuste..	30
4.2 - Aplicação do Método de Ajuste.....	30
4.3 - Constante de Absorção, Fator de Forma e Raio Quadrático médio	33

Capítulo V	- RESULTADOS : ANÁLISE	46
5.1	- Constante de Absorção.....	46
5.2	- Fator de Forma do Pion Negativo	46
5.3	- O raio quadrático médio do Pion Negativo..	48
5.4	- Fator de Forma do Pion Negativo: monopolo/ dipolo..... τ	52
5.5	- Análise de consistência	56
Capítulo VI	- CONCLUSÕES	67
Apêndice	- Método de Ben Israel	69
Referências Bibliográficas		72

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	- Comportamento esperado em Altas Energias.....	2
Figura 2	- Seção de Choque Elástica e Total de π^-p , na região de ressonância.....	5
Figura 3	- Seções de Choque Totais	6
Figura 4	- A razão ρ	8
Figura 5	- Queda exponencial de $d\sigma/dt$ x $-t$,	8
Figura 6	- Ponto de "cross-over"	10
Figura 7	- $d\sigma/dt$ versus $-t$ para $P_{lab} = 5$ GeV/c	11
Figura 8	- $d\sigma/dt$ versus $-t$ para $P_{lab} = 13,8$ GeV/c	11
Figura 9	- $d\sigma/dt$ versus $-t$ para $P_{lab} = 50$ e 200 GeV/c	12
Figura 10	- Seções de Choque Elásticas.....	14
Figura 11	- Razão σ_{el}/σ_{tot}	14
Figura 12	- Colisão Hadrônica	22
Figura 13	- Fator de Forma do Próton	29
Figura 14	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 14,15$ GeV/c.....	38
Figura 15	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 25$ GeV/c	39
Figura 16	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 40$ GeV/c	40
Figura 17	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 50$ GeV/c	41
Figura 18	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 70$ GeV/c	42
Figura 19	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 100$ GeV/c	43
Figura 20	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 140$ GeV/c	44
Figura 21	- Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 200$ GeV/c	45
Figura 22	- Curvas do Fator de Forma	47

Figura 23 - Curvas do Fator de Forma	48
Figura 24 - Fator de Forma do π^- para $q^2 < 0,5 \text{ GeV}/c$ comparado com ajuste tipo monopolo e dipolo.....	53
Figura 25 - Fator de Forma do π^- para $q^2 < 8 \text{ GeV}/c$ comparado com ajuste tipo monopolo e dipolo.....	54
Figura 26 - Fator de Forma do π^- comparado com o do modelo de Dominância Vetorial e Modelo a Quark.....	55
Figura 27 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 25 \text{ GeV}/c$...	59
Figura 28 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 40 \text{ GeV}/c$...	60
Figura 29 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 50 \text{ GeV}/c$...	61
Figura 30 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 70 \text{ GeV}/c$...	62
Figura 31 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 100 \text{ GeV}/c$..	63
Figura 32 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 140 \text{ GeV}/c$..	64
Figura 33 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{lab} = 200 \text{ GeV}/c$..	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Valores σ_{el}/σ_{tot} para diferentes colisões.....	15
Tabela 2	- Seção de Choque Diferencial	31
Tabela 3	= Seção de Choque Total	32
Tabela 4	- Parâmetros de Ajuste	32
Tabela 5	- Constante de Absorção	46
Tabela 6	- Raios quadráticos médios e raio r.m.s. do π^-	49
Tabela 7	- Dados Experimentais de $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}$ e $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{1/2}$	50
Tabela 8	- Valores teóricos de $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}$ e $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{1/2}$	51
Tabela 9	- Constante de Absorção	58
Tabela 10	- Constante de Absorção	58

RESUMO

Faz-se um estudo do espalhamento elástico π^-p no intervalo de energia $5,15 \leq \sqrt{s} \leq 19,37$ GeV. Através de um ajuste dos dados experimentais da seção de choque elástica calcula-se, aplicando o modelo de Chou-Yang, o fator de forma e o raio quadrático médio do π^- comparando-os com os dados experimentais.

ABSTRACT

π^-p elastic differential scattering data, in the interval $5.15 \leq \sqrt{s} \leq 19.3$ GeV, have been analysed using the model of Chou-Yang. From the adjusted experimental data to the calculated curve of the model, values of the form factor and average square radius of the negative pion have been obtained.

INTRODUÇÃO

A partir da descoberta dos píons em 1947 por C.M.G.Lattes, G. P.S.Occhialini e C.F.Powell [38,40] na radiação cósmica e posteriormente em aceleradores por C.M.G.Lattes e E.Gardner [41], a física de partículas tomou um grande impulso para uma melhor compreensão das interações fortes.

Por volta de 1950 E.Fermi e colaboradores mostraram que a interação píon-núcleon era de fundamental importância para a compreensão das interações fortes. A não existência de um formalismo matemático bem fundamentado para o estudo de tais interações deu nascimento a modelos fenomenológicos para a análise destes processos.

Na década de 60 surgiram vários modelos fenomenológicos com a finalidade de interpretar os dados experimentais e dar melhores esclarecimentos das interações fortes.

Com o surgimento dos aceleradores de grande porte como o de Serpukhov: 1969-1972, CERN-ISR: 1973 e o do Fermilab; nos anos 70 houve consideráveis alterações nas expectativas dos dados experimentais da década anterior, tais como:

- i) Nos aceleradores de Serpukhov e do CERN verificaram que algumas seções de choque totais cresciam com o aumento da energia como previsto por alguns trabalhos teóricos [36].
- ii) Através de medidas feitas no CERN constataram que a razão entre a parte real e imaginária da amplitude de espalhamento para frente, p , crescia para valores maiores que zero até um máximo e depois decrescia até próximo de zero.
- iii) A seção de choque diferencial elástica para algumas reações, tais como pp , apresentaram uma mudança de inclinação em $t = 0,13$ $(\text{GeV}/c)^2$, um mínimo em torno de $|t| = 1,5$ $(\text{GeV}/c)^2$ e um encolhi

mento do pico de difração com o aumento da energia.

As alterações acima mencionadas apresentam-se na fig.1 .

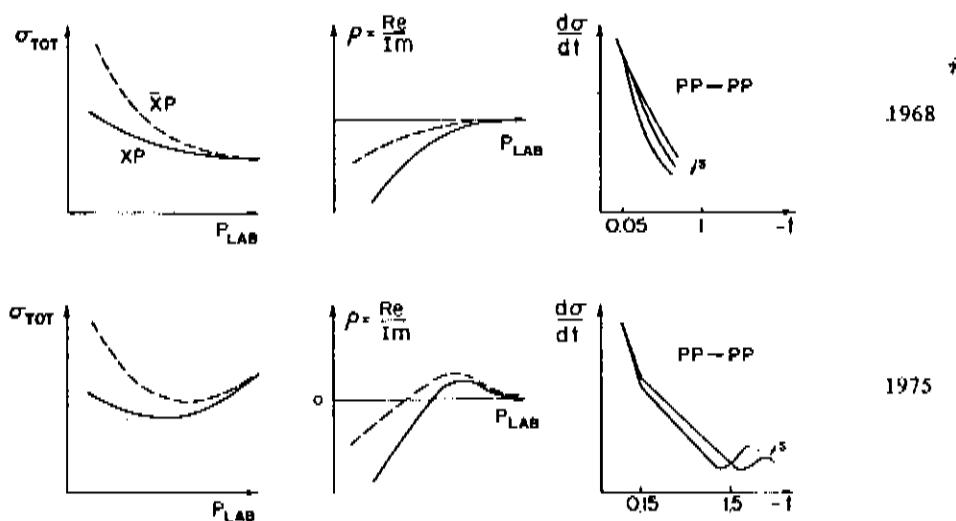


Figura 1 - Comportamento esperado em Altas Energias [2]

No mesmo período, T.T.Chou e C.N.Yang [16,18] desenvolveram um modelo fenomenológico tipo eiconal para estudar espalhamento e-lástico a altas energias, tal que a função opacidade é determinada pelos fatores de formas das partículas envolvidas no processo. Este modelo, hoje cognominado modelo de Chou-Yang, foi bem sucedido na descrição da seção de choque diferencial e da colisão pp, tal como:

- excelente concordância na região $|t| < 1,2 \text{ (GeV/c)}^2$
- previsão da existência de um mínimo e de um segundo máximo
- previsão da troca de posição do primeiro mínimo e um aumento do segundo máximo com o aumento da energia.

Apesar do sucesso das verificações de algumas das previsões mencionadas, este modelo também prevê o surgimento de mínimos secundários na seção de choque que até o momento não tem sido observados, além do mais não apresenta uma dependência explícita com relação à energia.

Não obstante as dificuldades apresentadas, o modelo de Chou-Yang foi e continua sendo utilizado no estudo do espalhamento elástico hádron-hádron a altas energias tendo em vista sua simplicidade e mais do que tudo por apresentar bons resultados, principalmente na região de $|t|$ pequeno.

O presente trabalho centra-se no estudo do espalhamento elástico π^-p , fazendo uso do modelo de Chou-Yang, no intervalo de energia $5,15 \leq \sqrt{s} \leq 19,37$ GeV.

Através da amplitude de espalhamento ajustada numericamente a partir dos dados experimentais da seção de choque diferencial, usa-se o modelo de Chou-Yang para calcular a constante de absorção, o fator de forma do π^- e o raio quadrático médio.

O comportamento do fator de forma foi parametrizado de duas maneiras: tipo monopolo e tipo dipolo, sendo este último mais concordante com os dados experimentais. Também é feita uma comparação entre os fatores de forma parametrizados e aqueles propostos pelo modelo de Dominância Vetorial e o Modelo a Quarks, tendo em vista que estes últimos possuem uma boa concordância experimental na região de $|t|$ pequeno.

Usando-se o fator de forma tipo dipolo do píon no modelo de Chou-Yang determina-se a seção de choque diferencial que apresenta um comportamento condicente com os dados experimentais.

No Capítulo I, faz-se um resumo de certas características experimentais que são essenciais na teoria do espalhamento elástico π^-p . No Capítulo 2, com o propósito de motivação para a derivação do modelo teórico de Chou-Yang, é feito um estudo sucinto do formalismo de ondas parciais. No Capítulo III apresenta-se a deri

vação do Modelo de Chou-Yang, além de considerações de validade do mesmo. No Capítulo IV descreve-se a aplicação do método de ajuste aos dados experimentais de π^-p e à adequação do modelo às aplicações a serem feitas. Os resultados destas aplicações são apresentados no Capítulo V. Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões e comentários finais.

CAPÍTULO I

CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DOS DADOS EXPERIMENTAIS

1.1. Seção de Choque total (σ_t).

A seção de choque total, na colisão de duas partículas, é função de uma única variável: momentum da partícula incidente no referencial de laboratório, P_{lab} , ou do quadrado da energia total no sistema de centro de massa, s ; e possui as seguintes peculiaridades:

- i) Em energias onde $P_{lab} \leq 5 \text{ GeV/c}$, a seção de choque total para π^-p , apresenta variações muito rápidas em função da energia e os picos apresentados são usualmente associados à formação de partículas altamente instáveis, denominadas ressonâncias. Por esta razão, a região de $P_{lab} \leq 5 \text{ GeV/c}$ da seção de choque total é rotulada de região de ressonância [Fig.2] [1]

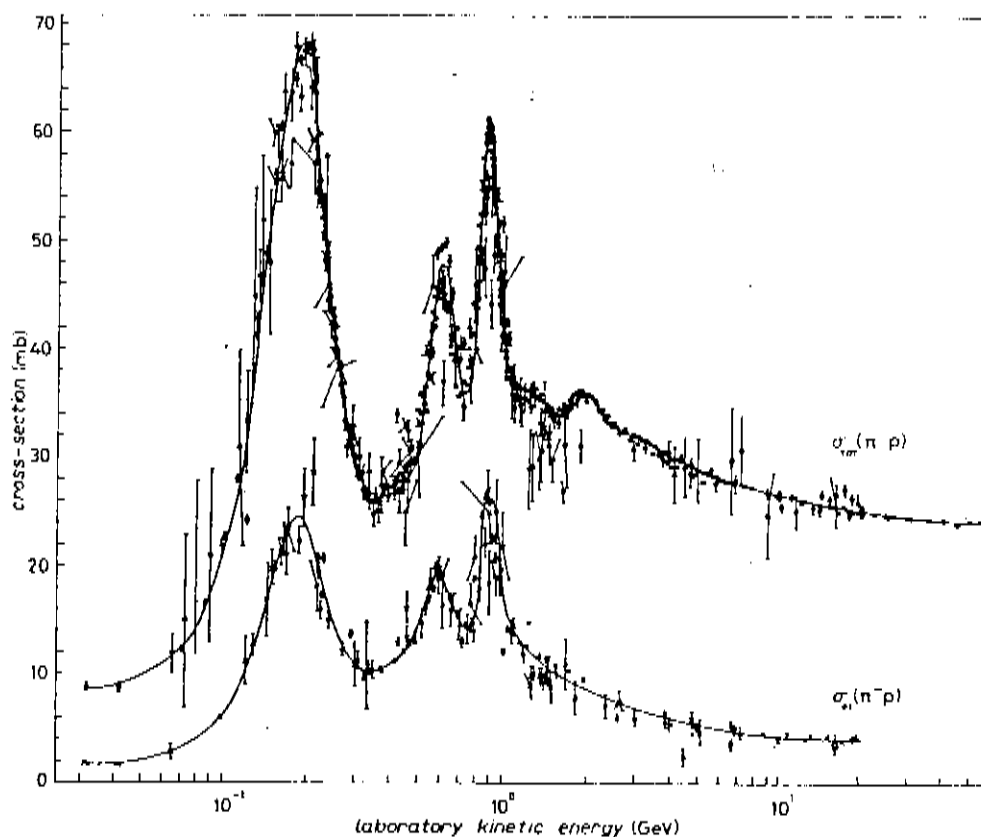


Figura 2 - Seção de Choque Elástica e Total de π^-p [1]

ii) Em energias onde $P_{lab} > 5 \text{ GeV/c}$, a seção de choque total para a colisão hádron-próton tem um comportamento bem regular em função da energia [Fig.3]. Para $\pi^- p$, a seção de choque total diminui suavemente com energia atingindo um patamar entre 50 - 80 GeV/c e após começa a crescer com o aumento da energia [Fig.3] [2].

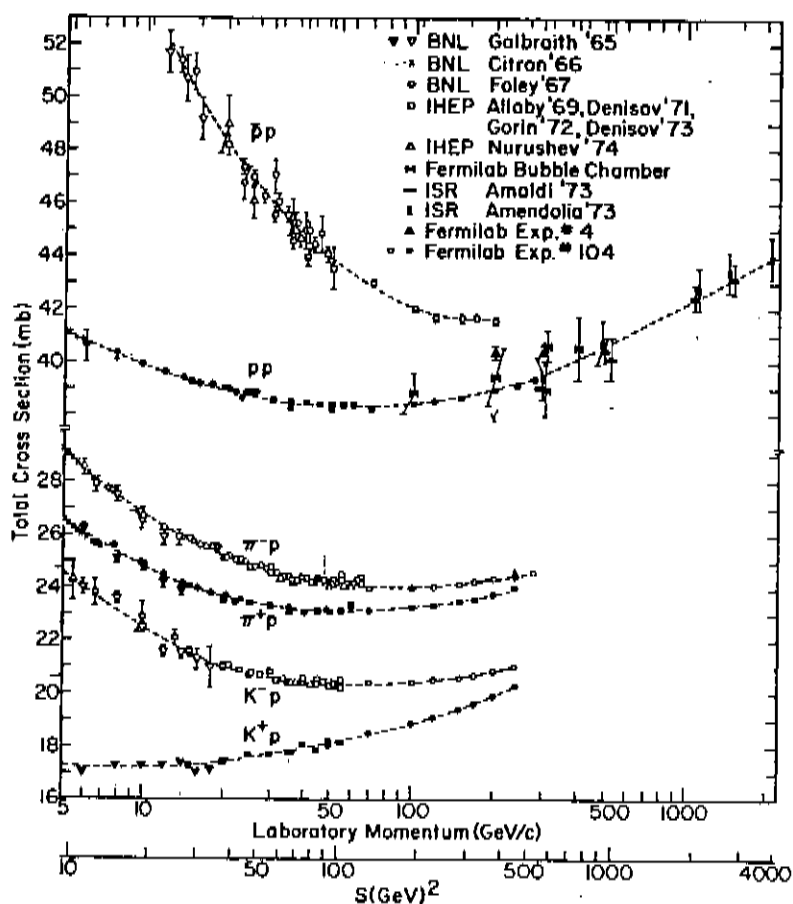


Figura 3 - Seções de Choque Totais [2]

1.2. Seção de Choque Diferencial Elástica ($d\sigma/dt$).

Numa colisão de duas partículas, a seção de choque diferencial elástica é função de duas variáveis independentes: a energia, s , e o ângulo de espalhamento. Esta última variável é geralmente substituída pelo quadrimomento transferido, t .

Para melhor descrever a seção de choque diferencial a altas

energias, esta é dividida em quatro regiões, as quais possuem características bem definidas:

i) Região de interferência Coulomb-nuclear:

Esta região é definida pelo intervalo $0,001 \lesssim |t| \lesssim 0,01$ $(\text{GeV}/c)^2$ e é conhecida como região de $|t|$ muito pequeno. A importância desta região estriba-se em que medidas da seção de choque diferencial pode-nos dar informação sobre a razão, ρ , da parte real e da parte imaginária da amplitude de espalhamento para frente.

Uma maneira de calcular a razão ρ é utilizando um ajuste em base aos dados experimentais e o fato de que a parte imaginária da amplitude de espalhamento diminui exponencialmente em função de t , nesta região. Os valores de ρ assim determinados são diferentes de zero e o seu comportamento em função da energia ou do momento de laboratório varia conforme o tipo de reação.

Para $\pi^{\pm}p$ ρ tem valores negativos acima de $P_{\text{lab}} \sim 1 \text{ GeV}/c$ e atinge o valor zero entre $70 - 100 \text{ GeV}/c$ e depois caminha para valores positivos acima de $100 \text{ GeV}/c$. [Fig.4]

ii) Região de $|t|$ pequeno:

Esta é caracterizada pelo intervalo $0,01 \lesssim |t| \lesssim 5 (\text{GeV}/c)^2$, e pode ser subdividida em duas outras regiões: a região do pico de difração, $0,01 \lesssim |t| \lesssim 0,5 (\text{GeV}/c)^2$, e a região além do pico de difração, $0,5 \lesssim |t| \lesssim 5 (\text{GeV}/c)^2$.

ii.1) Região do Pico de Difração:

Esta região é caracterizada por uma diminuição muito rápida da seção de choque diferencial a partir de $|t| = 0$, para quase todas as reações elásticas. Esta queda brusca da seção de choque diferencial comporta-se como uma linha reta, fig.5 [3], no gráfico $\ln(d\sigma/dt)$ versus $-t$ até $-t \approx 1 (\text{GeV}/c)^2$.

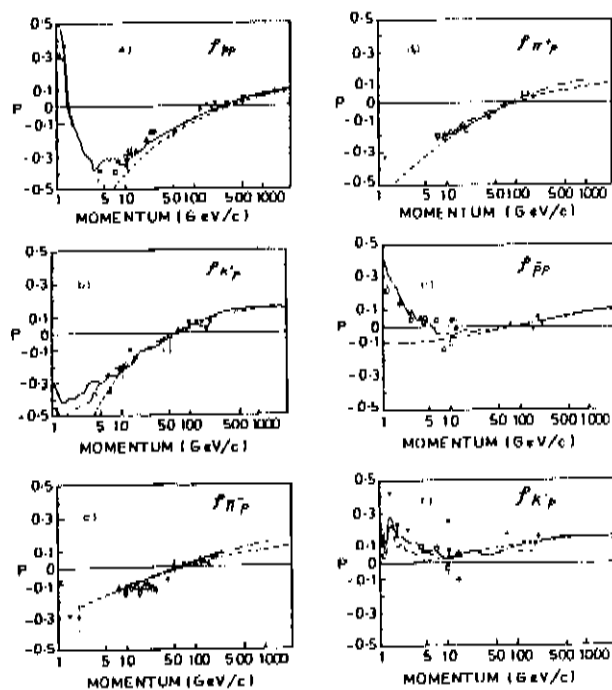


Figura 4 - A razão ρ [3]

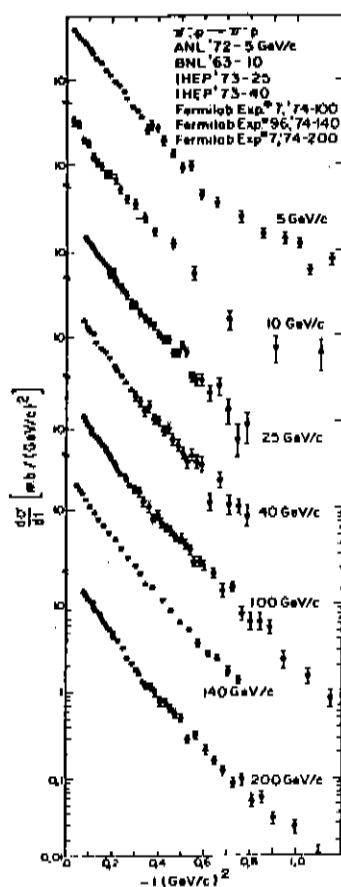


Figura 5 - Queda exponencial de $d\sigma/dt$ x $-t$ [3]

Nesta região a grandeza de maior importância é a inclinação da reta, B, que é obtida através de um ajuste de $d\sigma/dt$ por

$$\frac{d\sigma}{dt} = A e^{Bt}$$

Desta expressão, B é definida como

$$B \equiv \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) \right].$$

O valor de B depende da colisão específica, da energia e do intervalo de $-t$ no qual se efetua o ajuste, mas não é o objetivo de nosso trabalho entrar em detalhes sobre tais fatores de dependência [3].

Além da queda brusca da seção de choque diferencial, um outro efeito aparece também nesta região conhecida como "cross-over", o qual é o cruzamento das curvas de seção de choque diferencial entre x_p e $\bar{x}_p$. Para π^+p o ponto de cruzamento ou "cross-over" pode ser muito bem definido a baixas energias, pois as medidas realizadas da seção de choque diferencial são bem precisas, enquanto que a altas energias, os erros são muito grandes ficando assim difícil determinar o ponto de "cross-over" [Fig.6] [3].

Uma forma de determinar o ponto de 'cross-over' é utilizar a relação empírica de Giacomelli [2].

$$-t_{co} = \left[\frac{\ln \{ (\sigma_T^2(\pi^+p)) (1+\rho^2(\pi^+p)) \}}{\sigma_T^2(\pi^-p) (1+\rho^2(\pi^-p))} \right] \left[B(\pi^+p) - B(\pi^-p) \right].$$

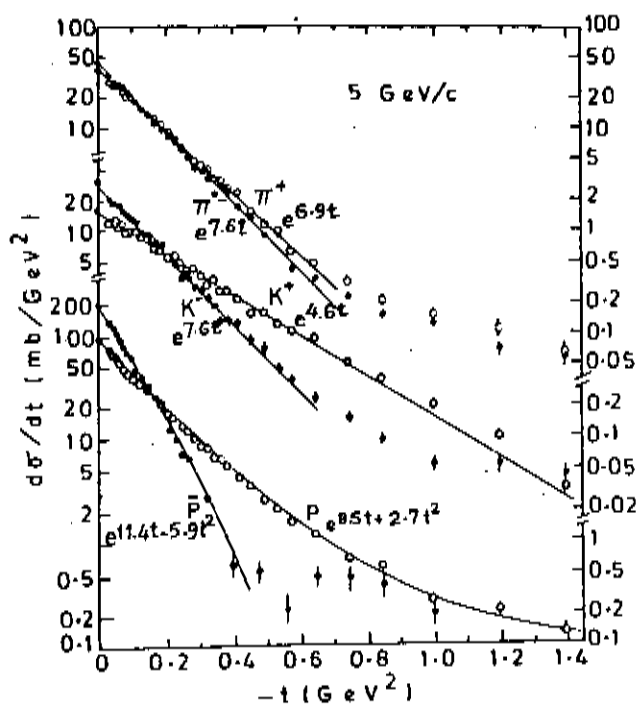


Figura 6 - Ponto de "cross-over" [3]

ii.2) Região além do Pico de Difração.

Nesta região a seção de choque diferencial, para quase todas as reações hádron-hádron, é caracterizada pela presença de picos e depressões que na literatura corrente são estruturas de "dip-bump".

Para o espalhamento elástico π^-p , a seção de choque diferencial tem "dips" em torno de $-t \sim 0,8; 2,88$ e 4 (GeV/c)^2 os quais são claramente observados em determinados valores de P_{lab} , enquanto que para outros valores os "dips" tornam-se "shoulders" dando uma indicação de que com o aumento de energia as estruturas, "dip-bump", diminuem.

Em experiências realizadas com energias, ou melhor, com momentos em torno de 5 GeV/c , observa-se o aparecimento do primeiro "dip" na reação π^-p ao redor de $-t \approx 0,6 \text{ (GeV/c)}^2$, seguido de

um "bump" em $-t \approx 1,5 \text{ (GeV/c)}^2$; mas esta estrutura de "dip-bump" contudo desaparece gradualmente [4] para $-t \approx 1,5 \text{ (GeV/c)}^2$ [Fig.7]

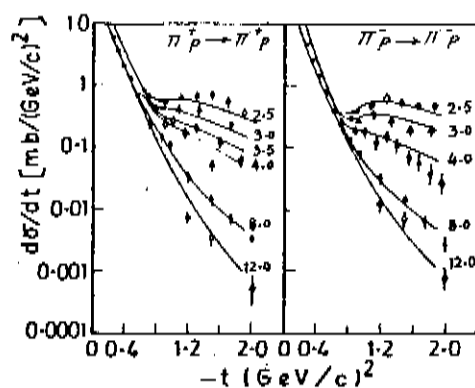


Figura 7 - $d\sigma/dt$ versus $-t$ para $P_{\text{lab}} = 5 \text{ GeV/c}$ [3]

Um segundo "dip" a baixas energias ocorre próximo de $-t \approx 2,8 \text{ (GeV/c)}^2$ [5], mas este "dip" também desaparece lentamente a altas energias. Para momentos da ordem de $13,8 \text{ GeV/c}$ [6], este "dip" novamente aparece na reação π^-p [Fig.8]

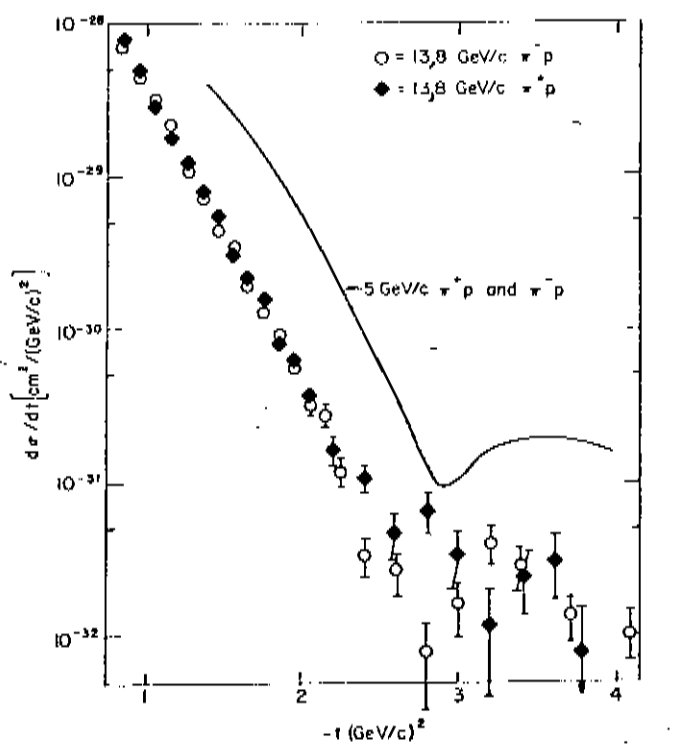


Figura 8 - $d\sigma/dt$ versus $-t$ para $P_{\text{lab}} = 13,8 \text{ GeV/c}$ [6]

Medidas feitas a 50 GeV/c [7] mostram somente uma troca na inclinação em $-t \sim 3 \text{ (GeV/c)}^2$, Fig.9 ; enquanto que para 200 GeV/c [8] aparece claramente o "dip" nas proximidades de $-t \sim 4 \text{ (GeV/c)}^2$, [Fig. 9]

Da análise apresentada acima se evidencia que, com base nas experiências realizadas [4 - 9], o dip que aparece no espalhamento $\pi^- p$ desaparece gradualmente em energias baixas próximas de $-t \approx 2,8 \text{ (GeV/c)}^2$ e a altas energias o mesmo torna a aparecer em torno de $-t \approx 4 \text{ (GeV/c)}^2$. Resulta claro que essa região de $-t$ e do momento de laboratório entre 10 GeV/c e 200 GeV/c serviria para analisar a dependência da seção de choque diferencial com a energia.

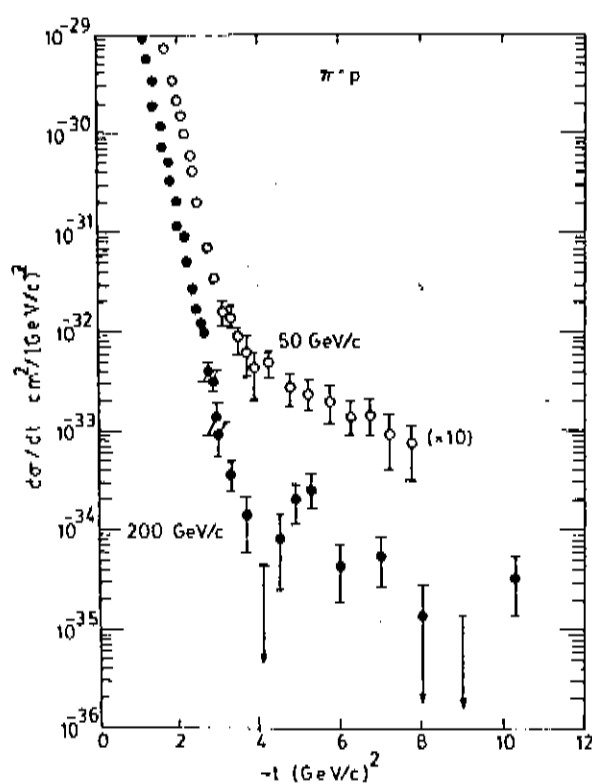


Figura 9 - $d\sigma/dt$ versus $-t$ para $P_{\text{lab}} = 50$ e 200 GeV/c [3]

iii) Região de $-t$ grande

Esta é também chamada de região de ângulos grandes e é afetada fortemente pelos constituintes dos hádrons colidentes.

iv) Região de Espalhamento para trás

Com exceção ao espalhamento pp, esta região corresponde a processos próximos de $\theta \approx 180^\circ$, além de que as seções de choque são muito pequenas e geralmente apresentam uma elevação próximo de $u = 0$. Por esta última peculiaridade esta região é conhecida também de Região de $|u|$ pequeno.

1.4. Seção de Choque Elástica Total (σ_{el})

Para uma determinada colisão elástica, a seção de choque elástica total é comumente obtida pela integração da seção de choque diferencial sobre os ângulos $d\Omega$, ou dt . Em geral não é sempre possível se obter todos os valores da seção de choque diferencial para algumas regiões de $-t$ e para tal é feito uma extrapolação da mesma acarretando assim erros no resultado de σ_{el} . Estes resultados podem ser vistos na Fig. 10 [3] para as seções pp, K^+p e π^+p .

Observa-se também da Fig.10, que todas as seções de choque elástica decrescem com o aumento do momento do laboratório até a região entre 20 e 30 GeV/c, mas a partir destes valores presume-se que σ_{el} deva aumentar de forma gradual com a energia para as reações K^+p e π^+p como acontece com a reação pp.

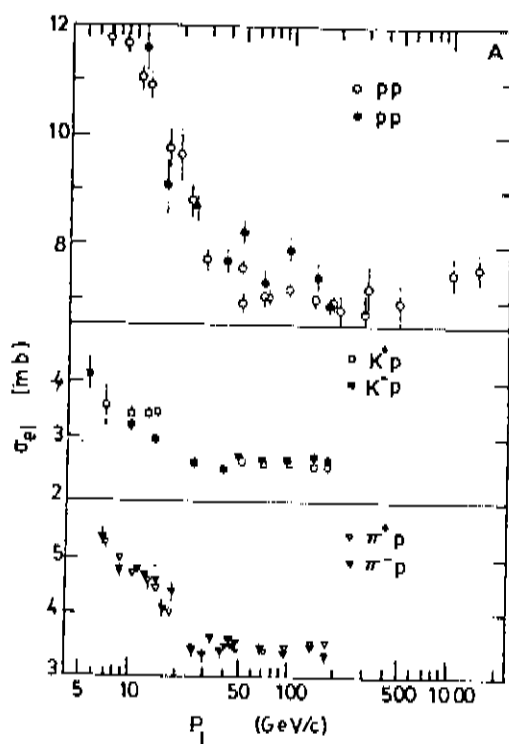


Figura 10 - Seções de Choque Elástica [3]

Um comportamento análogo a σ_{el} é exibido pela razão σ_{el}/σ_{tot} , Fig.11 [3]. Da tabela 1 [3] observa-se que esta razão tem diferentes valores para as colisões hádron-próton o que mostra ser uma forte indicação de que a opacidade do próton difere para as várias partículas [$K^\pm$ e $\pi^\pm$].

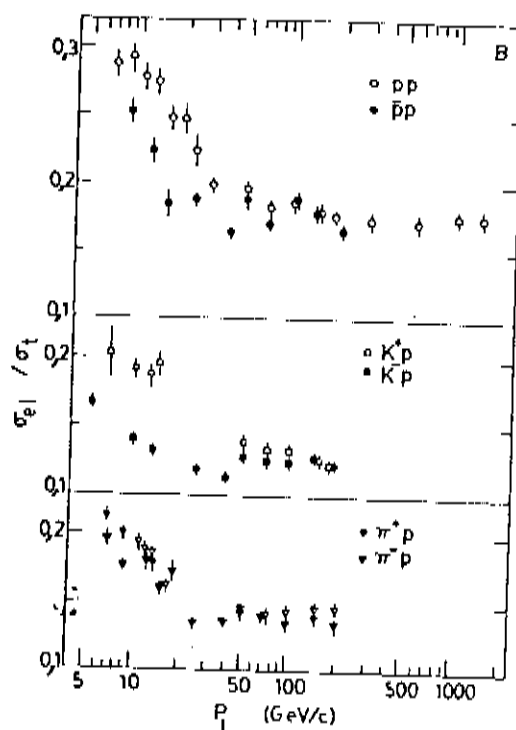


Figura 11 - Razão σ_{el}/σ_{tot} [3]

$\sqrt{s_{NN}}$ (GeV/c)	π^+	π^-	K^+	K^-	p	p	References
50	$0,144 \pm 0,012$	$0,142 \pm 0,012$	$0,130 \pm 0,012$	$0,135 \pm 0,012$	$0,203 \pm 0,015$	$0,207 \pm 0,015$	Akerlof et al. (1976)
50	$0,142 \pm 0,005$	$0,145 \pm 0,005$	$0,126 \pm 0,005$	$0,125 \pm 0,006$	$0,199 \pm 0,008$	$0,187 \pm 0,007$	Ayres et al. (1977)
70	$0,145 \pm 0,005$	$0,141 \pm 0,006$	$0,125 \pm 0,005$	$0,125 \pm 0,006$	$0,194 \pm 0,008$	$0,170 \pm 0,011$	Ayres et al. (1977)
100	$0,135 \pm 0,012$	$0,135 \pm 0,012$	$0,123 \pm 0,012$	$0,125 \pm 0,012$	$0,188 \pm 0,015$	$0,188 \pm 0,015$	Akerlof et al. (1976)
100	$0,142 \pm 0,007$	$0,137 \pm 0,005$	$0,131 \pm 0,006$	$0,123 \pm 0,006$	$0,184 \pm 0,009$	$0,185 \pm 0,014$	Ayres et al. (1977)
140	$0,145 \pm 0,005$	$0,140 \pm 0,005$	$0,128 \pm 0,005$	$0,123 \pm 0,006$	$0,182 \pm 0,007$	$0,180 \pm 0,014$	Ayres et al. (1977)
175	$0,143 \pm 0,004$	$0,140 \pm 0,005$	$0,128 \pm 0,004$	$0,125 \pm 0,006$	$0,182 \pm 0,007$	$0,171 \pm 0,013$	Ayres et al. (1977)
200	$0,130 \pm 0,012$	$0,129 \pm 0,012$	$0,129 \pm 0,012$	$0,126 \pm 0,012$	$0,177 \pm 0,015$	$0,193 \pm 0,015$	Akerlof et al. (1976)
290					$0,174 \pm 0,007$		Amaldi et al. (1973)
500					$0,173 \pm 0,0145$		Amaldi et al. (1973)
1070					$0,176 \pm 0,009$		Amaldi et al. (1973)
155271						$0,20 \pm 0,02$ and $0,209 \pm 0,018$ $\pm 0,008$	UA1 Bozzo et al. (1983a) UA4 Arnison et al. (1983a)

Tabela 1 - Valores σ_{el}/σ_{tot} para diferentes colisões [3]

CAPÍTULO II

FORMALISMO DE ONDAS PARCIAIS

O formalismo de ondas parciais [9-11] é um método exato para descrever a interação entre duas partículas em qualquer faixa de energia, tendo essencialmente sua utilidade prática na descrição do espalhamento a baixas energias.

Neste capítulo se desenvolverá, de forma sucinta, os fundamentos deste formalismo com o objetivo de dar argumento para a derivação do modelo fenomenológico a altas energias para o estudo do espalhamento elástico de π^-p .

2.1. Amplitude de espalhamento por um potencial real.

Por simplicidade considera-se a partícula incidente se movimentando na direção z e que tanto a partícula incidente quanto a partícula alvo sejam desprovidas de spin. Com estas suposições pode-se "olhar" o espalhamento como sendo uma onda plana associada à partícula incidente interagindo com a partícula alvo e dela emergindo uma onda esférica.

Uma função de onda que descreve bem este processo é:

$$\psi(r, \theta) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.1)$$

na região assintótica, isto é, $r \rightarrow \infty$. O primeiro termo desta expressão representa uma onda plana na direção z e o segundo termo uma onda esférica espalhada, onde a dependência angular é dada por $f(\theta)$ onde θ é o ângulo de espalhamento em relação a partícula alvo.

A função $f(\theta)$ é denominada amplitude de espalhamento e está relacionada à seção de choque diferencial por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\theta) \right|^2 \quad (2.2)$$

ou

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \left| f(\theta) \right|^2 \quad (2.3)$$

de onde se conclui que a análise da seção de choque diferencial se reduz ao estudo da amplitude de espalhamento.

A onda plana relacionada a partícula incidente é uma solução da equação de Schrödinger independente do tempo, para o caso em que o potencial de interação é identicamente nulo. Resulta assim, que uma solução particular para a equação de Schrödinger neste caso é:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (2.4),$$

onde os a_l são coeficientes arbitrários que se determinam usando a condição de ortogonalidade dos Polimônios de Legendre, $P_l(\cos \theta)$, :

$$a_l = (2l + 1) i^l \quad (2.5)$$

Substituindo estes coeficientes na eq. (2.4), resulta:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (2.6)$$

Esta expressão representa a decomposição de uma onda plana, associada a partícula incidente com momento linear $\hbar k$, em um conjunto de ondas parciais cada uma de momento angular $\sqrt{l(l+1)} \hbar$.

De maneira análoga, uma solução particular da equação de Schrödinger, em que o potencial de interação é diferente de zero, é:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} R_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (2.7)$$

A diferença existente em $R_{\ell}(kr)$ e $j_{\ell}(kr)$ é essencialmente para valores de r , tais que $V(r) = 0$; mas na região assintótica o comportamento de ambas deve ser o mesmo, isto é

$$R_{\ell}(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{=} 1/kr \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta_{\ell}) \quad (2.8),$$

onde δ_{ℓ} é a defasagem e depende da energia do processo de interação.

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.1) e comparando-a com a equação (2.7) na região assintótica, resulta:

$$f(\theta) = 1/2k \sum_{\ell} (2\ell + 1) [1 - e^{2i\delta_{\ell}}] P_{\ell}(\cos \theta) \quad (2.9)$$

Deste resultado pode-se concluir que toda informação desejada é dada, essencialmente, pela defasagem. A expressão $\exp(2i\delta_{\ell})$ é conhecida como matriz-S,

$$S_{\ell}(k) = \exp [2i\delta_{\ell}(k)] \quad (2.10)$$

e pela conservação de fluxo $|S_{\ell}(k)| = 1$.

2.2. Amplitude de Espalhamento por um potencial complexo.

Em muitas experiências de espalhamento ocorre absorção do fluxo incidente pelo alvo. Este fenômeno pode ser descrito de maneira análoga ao da seção anterior utilizando-se agora de um potencial já não real, mas complexo. A justificativa de introduzir um potencial complexo para descrever a absorção do fluxo incidente no processo de espalhamento é justificado através da analogia com a ótica [11, 12, 14].

Da descrição da seção anterior, concluiu-se que toda a informação sobre o processo de interação é dado pela matriz-S ou melhor pela defasagem, δ_ℓ . Agora a defasagem para o processo absorvedor é complexo:

$$\eta_\ell(k) = \delta_\ell(k) + i\Omega_\ell(k) \quad (2.11),$$

onde $\delta_\ell(k)$ e $\Omega_\ell(k)$ são reais.

Se $\eta_\ell(k)$ for somente real o processo descrito é de colisões puramente elásticas, mas se for puramente imaginário existe a possibilidade de continuar descrevendo tanto processos elásticos quanto inelásticos. O processo elástico neste caso é geralmente atribuído a situações onde a partícula incidente interage com a partícula alvo em regiões periféricas; este meio de interação é denominado Espalhamento Elástico Difractivo. Um exemplo esclarecedor é dado pelo estudo de espalhamento por um disco negro [9].

Substituindo a defasagem puramente imaginária na eq. (2.9), resulta:

$$f(\theta) = i/2k \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) [1 - e^{-\Omega_\ell}] P_\ell(\cos \theta) \quad (2.12),$$

onde Ω_ℓ é real e denomina-se intensidade de absorção ou opacidade do processo de interação. Esta equação é nada menos que a amplitude de espalhamento elástico para colisões puramente difrativas. Convém observar que ela é uma função imaginária.

2.3. Amplitude de espalhamento na representação do parâmetro de impacto.

De modo geral o método de ondas parciais fornece um procedimento exato para resolver o problema de espalhamento para todas as energias. Entretanto, a aplicação deste método a altas energias é em geral extremamente trabalhoso, pois o número de ondas parciais para um determinado momento angular é muito grande, de maneira que o cálculo de $f(\theta)$ ou de $d\sigma/d\Omega$ seria difícil pois existiriam contribuições de muitos termos.

Desta análise resulta que para processos a altas energias pode-se escrever a eq. (2.9) numa integral em ℓ :

$$f(\theta) = 1/2k \int_0^\infty d\ell [(2\ell + 1)(1 - S(\ell)) P_\ell(\cos \theta)] \quad (2.13),$$

onde $S(\ell)$ é uma função contínua de ℓ .

Pode-se mostrar que para ℓ suficientemente grande comparado com 1 e θ pequeno, pode aproximar $P_\ell(\cos \theta)$, através da fórmula de Hilb [15], por uma função de Bessel de ordem zero.

$$P_\ell(\cos \theta) \approx J_0 [(\ell + 1/2)\theta] \quad (2.14).$$

Substituindo esta expressão na eq.(2.13), resulta:

$$f(\theta) = i/2k \int_0^{\infty} d\ell \left[(2\ell + 1) (1 - S(\ell)) J_0((\ell + 1/2)\theta) \right] \quad (2.15).$$

Até aqui as mudanças para obter uma representação integral para $f(\theta)$ foram de natureza puramente matemática. Agora se farão mudanças físicas; classicamente o momento angular de uma partícula em torno do centro espalhado é bp , onde b é o parâmetro de impacto. Semiclassicamente tem-se que o momento angular L é:

$$L = (\ell + 1/2) \hbar = b p = b \hbar k \quad (2.16),$$

daqui o parâmetro de impacto é dado por

$$b = 1/k (\ell + 1/2) \quad (2.17),$$

e a matriz $S(\ell)$ será uma função somente de b : $S(b)$.

Usando a eq.(2.17), a eq.(2.15) pode ser expressa como:

$$f(\theta) = ik \int_0^{\infty} b db [1 - S(b)] J_0(b k \theta) \quad (2.18),$$

e em termos do momento transferido, t , a pequenos ângulos é

$$f(\theta) = ik \int_0^{\infty} b db [1 - S(b)] J_0(b \sqrt{-t}) \quad (2.19).$$

Esta equação (2.19) é nada menos que a amplitude de espalhamento na representação do parâmetro de impacto, sendo de grande importância para processos de espalhamentos difrativos a altas energias e vital para o presente trabalho.

CAPÍTULO III

MODELO DE CHOU-YANG

3.1. Considerações Fundamentais do Modelo.

Neste modelo, [16, 18] as duas partículas colidentes, ou melhor os hádrons colidentes são supostos como objetos com uma determinada extensão espacial finita; de modo que ao colidirem se atravessam de forma que seus constituintes interagem, resultando na produção e emissão de partículas secundárias, Fig. 12 [19] .

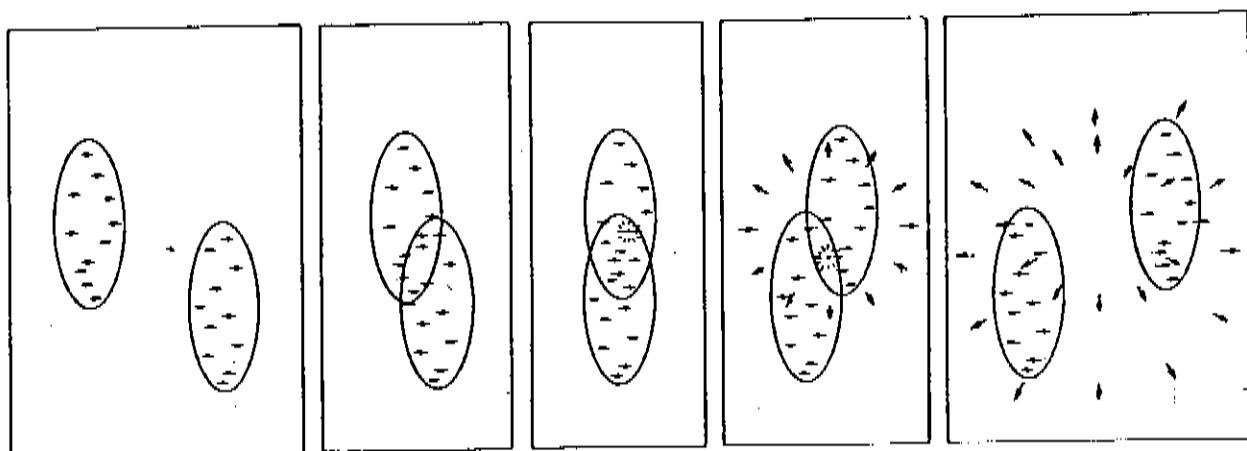


Figura 12 - Colisão Hadrônica [19]

O processo acima descrito supõem que o canal elástico esteja diretamente relacionado com reações puramente absorvedoras, isto é, com colisões elásticas difrativas. Nesta situação o coeficiente de transmissão é real e a amplitude de espalhamento é puramente imaginária.

Com base na idéia de que tanto o próton quanto o píon, em particular, são partículas com uma determinada extensão espacial finita; supõe-se que a função opacidade, definida pela eq.(3.1), , é propor

cional a soma total das interpenetrações da matéria hadrônica. Resulta assim que a opacidade pode ser expressa no espaço do parâmetro de impacto como:

$$\Omega(b) = \mu(s) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 b' D_{\pi}(b - b_1) D_P(b_1) \quad (3.1),$$

e o coeficiente de transmissão será dado por

$$S(b) = e^{-\Omega(b)} \quad (3.2).$$

3.2. Derivação da Amplitude de Espalhamento

Cada seção de choque diferencial elástica é dada pela expressão, (2.3),:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} |f(s,t)|^2,$$

onde $f(s,t)$ é a amplitude de espalhamento na representação do parâmetro de impacto, (2.19), a qual foi derivada a partir do formalismo de ondas parciais; isto é:

$$f(s,t) = ik \int_0^{\infty} b db [1 - S(b)] J_0(b \sqrt{-t})$$

Substituindo esta expressão na seção de choque diferencial elástica resulta:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |\tilde{f}(s,t)|^2 \quad (3.3)$$

onde agora $\tilde{f}(s,t)$ é a amplitude de espalhamento normalizada dada por:

$$\tilde{f}(s,t) = i \int_0^{\infty} b \, db \, [1 - S(b)] J_0(b \sqrt{-t}) \quad (3.4)$$

Em vista de que $\tilde{f}(s,t)$ é uma função puramente imaginária, as duas últimas equações podem ser reescritas como:

$$a(s,t) = \text{Im } \tilde{f}(s,t) \quad (3.5)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi [a(s,t)]^2 \quad (3.6)$$

$$a(s,t) = \int_0^{\infty} b \, db \, [1 - e^{-\Omega(b)}] J_0(b \sqrt{-t}) \quad (3.7),$$

onde esta última equação é uma forma de expressar a amplitude de espalhamento do Modelo de Chou-Yang e representa a transformada de Hankel de $[1 - e^{-\Omega(b)}]$ e que pode também ser expressa como a transformada de Fourier bidimensional.

Substituindo-se a representação integral para J_0 ,

$$J_0(b \sqrt{-t}) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} e^{ib\sqrt{-t} \cos \phi} \cos \phi \, d\phi \quad b \, db \quad (3.8)$$

em (3.7), temos:

$$a(s,t) = 1/2\pi \int_0^{\infty} [1 - e^{-\Omega(b)}] \int_0^{2\pi} e^{ib\sqrt{-t} \cos \phi} \cos \phi \, d\phi \quad (3.9),$$

e utilizando-se da aproximação de pequenos ângulos (Eq.2.19), a equação 3.9 pode ser descrita como uma transformada de Fourier bidimensional

$$a(s,t) = 1/2\pi \int [1 - e^{-\Omega(b)}] e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{lb}} d^2 \mathbf{lb} \quad (3.10),$$

onde ϕ é o ângulo entre o momento transferido bidimensional, $\mathbf{k}$, e o parâmetro de impacto, $\mathbf{lb}$, no plano perpendicular ao feixe incidente.

Representando a transformada de Fourier bidimensional de uma função $X(\mathbf{lb})$ como

$$\langle X \rangle \equiv 1/2\pi \int X(\mathbf{lb}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{lb}} d^2 \mathbf{lb} \quad (3.11),$$

então a equação (3.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a(s,t) = \langle 1 - e^{-\Omega(b)} \rangle \quad (3.12).$$

De tudo isto verifica-se que o cálculo da amplitude de espalhamento está diretamente relacionada à transformada de Fourier bidimensional de uma função que depende exclusivamente da opacidade. Daqui conclui-se que para descrever o modelo de Chou-Yang a partir da equação (3.7) ou (3.10) se faz necessário expressar a opacidade em termos de quantidades observáveis.

3.3. A Opacidade em Função dos Fatores de Forma.

Da descrição do processo de interação entre dois hádrons colidentes é suposição do modelo que os mesmos possuam uma determinada estrutura espacial finita. Sendo assim, pode-se relacionar a cada uma das partículas uma densidade de matéria hadrônica, $\rho(x,y,z)$, sen

do ρ esfericamente simétrico.

Sob estas condições pode-se imaginar que a colisão a altas energias entre dois hádrons pode ser considerada como a interação entre duas esferas absorvedoras passando uma através da outra; de modo que para cada ponto de uma das esferas a outra aparece efetivamente como um disco, devido à contração de Lorentz, de densidade de matéria dada por:

$$D(x,y) = \int \rho(x,y,z) dz \quad (3.13)$$

Dessa forma, pode-se interpretar a expressão (3.1) como a integral de convolução entre as densidades de matéria entre dois discos colidentes cujos centros estão separados por uma distância b . Da expressão (3.1), temos:

$$\Omega(b) = 2\pi \mu_{\pi p}(s) (D_{\pi} \otimes D_p) \quad (3.14),$$

e tornando a Transformada de Fourier, do espaço dos b para o espaço dos k ; de ambos os lados, obtemos:

$$\langle \Omega(b) \rangle = 2\pi \mu_{\pi p}(s) \langle D_{\pi} \otimes D_p \rangle \quad (3.15),$$

Aplicando-se o Teorema da Convolução a equação última pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Omega(b) = 2\pi \mu_{\pi p}(s) \int_0^{\infty} \sqrt{-t} d(\sqrt{-t}) J_0(b\sqrt{-t}) \langle D_{\pi} \rangle \langle D_p \rangle \quad (3.16).$$

Por outro lado é possível relacionar a transformada de Fourier bidimensional $\langle D \rangle$ com os Fatores de Forma dos hádrons correspondentes.

Na aproximação de pequenos ângulos de espalhamento e supondo que a densidade de matéria hadrônica é a própria distribuição de carga, temos

$$F(k^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r$$

$$F(k^2) = \int dx dy e^{i(k_x x + k_y y)} \int \rho(x, y, z) dz \quad (3.17)$$

Das equações (3.11) e (3.13), vê-se que:

$$F(k^2) = \langle D(x, y) \rangle \quad (3.18),$$

onde por substituição direta dessa equação em (3.16) obtem-se a expressão final da opacidade definida em (3.1)

$$\Omega(s, b) = \mu_{\pi p}(s) \int_0^\infty q dq J_0(bq) F_\pi(q^2) F_p(q^2) \quad (3.19)$$

onde $q = \sqrt{-t}$ e em $\mu_{\pi p}(s)$ absorveu-se o fator 2π .

As expressões dadas pelas eqs. (3.7) e (3.19) representam a contribuição fundamental do Modelo de Chou-Yang dentro do processo de espalhamento elástico de hádrons a altas energias, e onde $\mu_{\pi p}$ (constante de absorção) é o único parâmetro livre a ser determinado através da seção de choque total via teorema ótico.

$$\sigma_T = 4\pi a(s, 0) \quad (3.20)$$

A equação (3.7) e principalmente a eq. (3.19) são os resultados mais importantes do modelo de Chou-Yang; e o parâmetro livre do modelo, $\mu_{\pi p}(s)$, pode ser fixado por intermédio da eq. (3.20).

3.4. Algumas restrições do modelo.

Na derivação da fórmula funcional da opacidade foi suposto que os fatores de forma dos hádrons estavam diretamente relacionados à distribuição de carga das partículas colidentes; entretanto esta su posição pode ocasionar uma incerteza nos cálculos pois a expressão da opacidade é fortemente dependente da escolha destes fatores de forma.

Contudo, na maioria dos trabalhos sobre colisões hadrônicas elásticas que envolvem o próton, é geralmente escolhido para este o fator de forma de dipolo (3.21), pois dá uma boa descrição dos dados experimentais até $q^2 < 1 \text{ (GeV/c)}^2$ (Fig. 13).

$$F_p(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/\mu^2)^2}, \text{ com } \mu^2 = 0,71 \text{ (GeV/c)}^2, \quad (3.21)$$

Além disso, o modelo Chou-Yang em sua versão original [16-18] não prevê a dependência explícita com a energia, como é observado nos dados experimentais. Tentativas têm sido feitas nesse sentido pelos próprios criadores do modelo em estudo [30], como por outros autores [31-34].

Uma outra restrição é que o modelo é limitado a valores pequenos de $-t$.

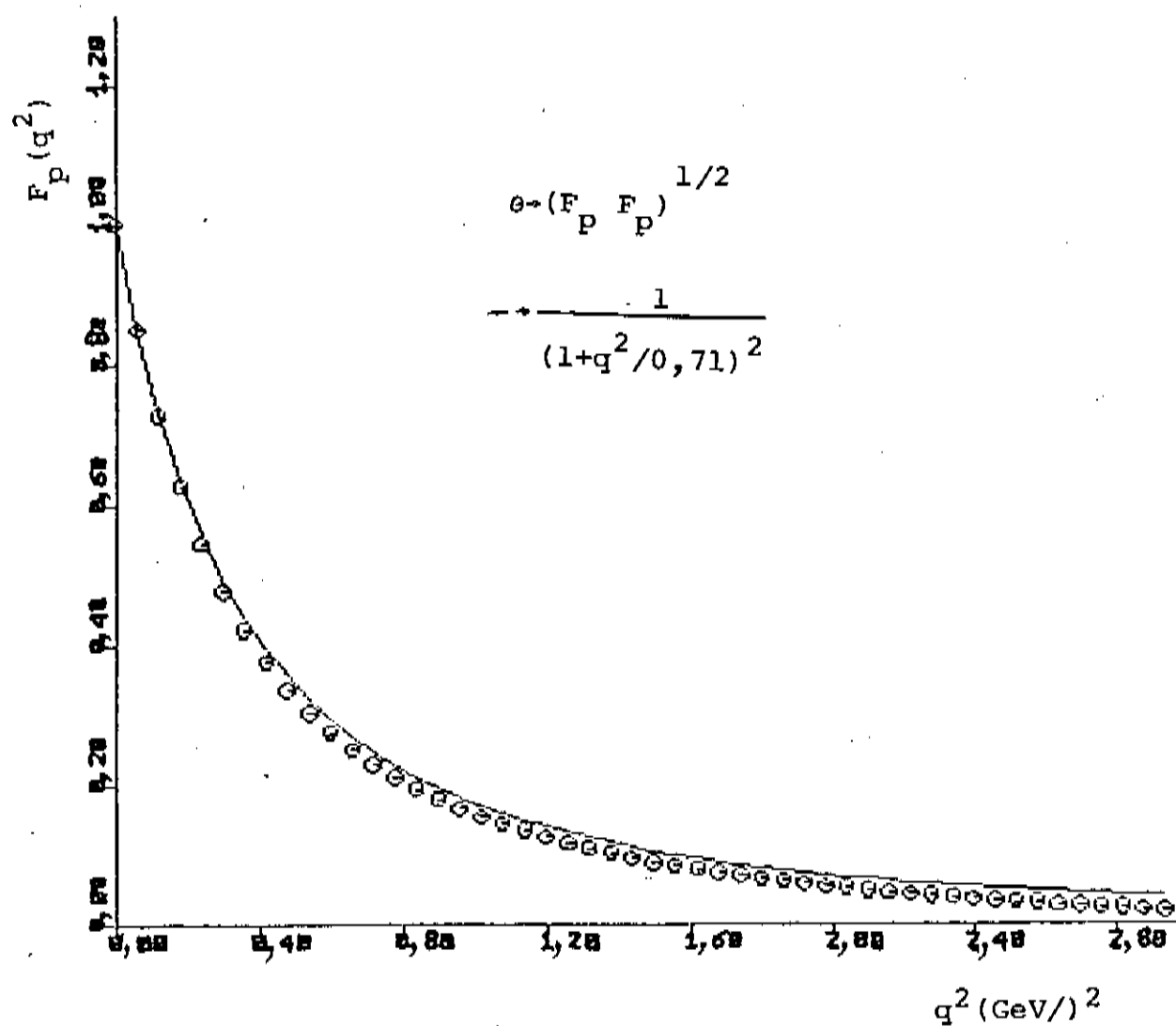


Figura 13 - Fator de Forma do Próton [37]

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DO MODELO

Neste capítulo são apresentados os dados experimentais das colisões π^-p e a expressão com a qual estes foram ajustados. Além disso foram derivadas expressões para o cálculo da constante de absorção, fator de forma e o raio quadrático médio do pión.

4.1. Dados experimentais utilizados no ajuste.

As únicas informações do espalhamento elástico π^-p utilizados para realizar o presente trabalho foram a seção de choque diferencial e a seção de choque total.

A tabela 2 diz respeito aos dados experimentais referentes à seção de choque diferencial. Nesta tabela apresentam-se as faixas de energia analisadas, as referências de onde foram extraídos os dados e os intervalos de $-t$ nos quais eles se situam e o número de observações experimentais.

Na tabela 3 apresentam-se simplesmente os dados de seção de choque total e as referências de onde foram coletados.

4.2. Aplicação do Método de Ajuste.

De posse dos dados experimentais da seção de choque diferencial de π^-p , estes são introduzidos no modelo através de um ajuste da amplitude de espalhamento dada pela expressão (3.6)

$$a(s,t) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{dt}} \quad (4.1)$$

$P_{lab} (GeV/c)$	Referências	$\sqrt{s}$ GeV	$-t$ (GeV/c) ²	Nº de Observações
14,15	A.R.Szierba et al (1973) Ref.20	5,15	0,015+0,765	41
25	Y.M.Antipov et al (1974) Ref.21	6,85	0,075+0,780	39
40	Y.M.Antipov et al (1974) Ref.21	8,66	0,075+0,780	39
50	Z.Asa'd et al (1982) Ref.7	9,69	0,725 +7,75	46
	C.W.Akerlof et al (1976) Ref.22		0,075 +1,60	64
	D.S.Ayres et al (1977) Ref.23		0,0375+0,75	18
70	D.S.Ayres et al (1977) Ref.23	11,46	0,0375+0,5	13
100	R.Rubinstein et al (1984) Ref.8	13,7	0,55 +2,45	20
	C.W.Akerlof et al (1976) Ref.22		0,075+1,825	60
	D.S.Ayres et al (1977) Ref.23		0,0375+0,8	19
140	D.S.Ayres et al (1977) Ref.23	16,21	0,0375+0,80	18
200	R.Rubinstein et al (1984) Ref.8	19,37	0,95+10,25	31
	C.W.Akerlof et al (1976) Ref.22		0,075+ 1,45	55
	A.Schiz et al (1981) Ref.24		0,0206+0,6625	134

Tabela 2 - Seção de Choque Diferencial

$P_{lab} \text{ (GeV/c)}$	$\sigma_{Tot} \text{ (mb)}$	Referências
14,13	$25,915 \pm 0,081$	K.J.Foley et al.(1967) Ref.25
25	$24,79 \pm 0,07$	S.P.Denisov et al. (1971) Ref.26
40	$24,36 \pm 0,07$	S.P.Denisov et al.(1971) Ref.26
50	$24,01 \pm 0,12$	D.S.Ayres et al. (1977) Ref.23
70	$24,0 \pm 0,12$	D.S.Ayres et al. (1977) Ref.23
100	$23,96 \pm 0,12$	D.S.Ayres et al. (1977) Ref.23
140	$24,00 \pm 0,12$	D.S.Ayres et al. (1977) Ref.23
200	$24,33 \pm 0,04$	A.S.Carrol et al. (1976) Ref.27

Tabela 3 = Seção de Choque Total

O ajuste dos dados da amplitude de espalhamento foi realizado pela seguinte parametrização [28]:

$$a(s,t) = a(s,0) \sum_i \alpha_i \exp(\beta_i t) \quad (4.2)$$

Pode-se verificar que essa expressão é uma função de duas variáveis e n-parâmetros de ajuste, porém o programa computacional utilizado para fazer os ajustes dos dados experimentais foi restrito a 1 variável e n-parâmetros. Para contornar esta incompatibilidade foi introduzido o valor da seção de choque diferencial em $t=0$ via teorema ótico:

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{t=0} [\text{mb}/(\text{GeV/c})^2] = 5,109 \times 10^{-2} \sigma_t^2 (\text{mb}^2) \quad (4.3)$$

podendo assim calcular $a(s,0)$ para cada energia.

De posse destes valores a amplitude de espalhamento é normalizada a:

$$a_N(s,t) = \frac{a(s,t)}{a(s,0)} = \sum \alpha_i \exp(\beta_i t) \quad (4.4);$$

tornando assim possível a utilização do programa computacional de ajuste. Resumindo, os valores de $a(s,0)$ foram calculados a partir do Teorema Ótico, enquanto que os n -parâmetros, α_i e β_i , foram determinados através do método de quadrados mínimos de Ben Israel [28].

Na tabela 4 apresentam-se os valores obtidos de $a(s,0)$, os parâmetros de ajuste para cada energia, bem como a soma dos quadrados dos resíduos. Para tornar mais transparente os resultados dos ajustes mostra-se nas figs. 14 a 21 da/dt , em termos dos ajustes versus $-t$.

4.3. Constante de Absorção, Fator de Forma e Raio Quadrático Médio.

A amplitude de espalhamento $\tilde{a}$, segundo a expressão (3.7),

$$a(s,t) = \int_0^{\infty} \tilde{a}(s,b) J_0(b \sqrt{-t}) b \, db \quad (4.5)$$

onde definimos $\tilde{a}(s,b)$ como:

$$\tilde{a}(s,b) = 1 - e^{-\Omega(s,b)} \quad (4.6)$$

Como existe uma relação direta entre a opacidade, $\Omega(s,b)$, e as quantidades de interesse da expressão (4.5), tomando a transformada inversa de Hankel, resulta:

$$\tilde{a}(s,b) = \int_0^{\infty} a(s,t) J_0(b\sqrt{-t}) \sqrt{-t} d(\sqrt{-t}) \quad (4.7)$$

Substituindo a expressão de ajuste proposta na seção anterior, para a amplitude de espalhamento isto é:

$$a(s,t) = a(s,0) \sum_i \alpha_i \exp(\beta_i t) ,$$

na equação (4.7), resulta após a integração [29]

$$\tilde{a}(s,b) = a(s,0) \sum_i \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \exp[-b^2/4\beta_i] \quad (4.8)$$

Por outro lado, das expressões (4.6) e (4.8) obtém-se a relação tão desejada:

$$\Omega(s,b) = -\ell_\eta \left[1 - a(s,0) \sum_i \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \exp(-b^2/4\beta_i) \right] \quad (4.9)$$

isto é, a opacidade em função dos parâmetros de ajuste.

Do modelo de Chou-Yang, sabe-se que a opacidade é proporcional à constante de absorção e uma função dos fatores de formas das partículas colidentes, isto é,

$$\Omega(s,b) = \mu_{\pi p}(s) \int F_\pi(q^2) F_p(q^2) J_0(bq) q dq \quad (3.19)$$

onde $q^2 = -t$.

Substituindo a expressão (4.9) na equação acima, e tomando a transformada inversa de Hankel, resulta:

$$\mu_{\pi p}(s) F_\pi(q^2) F_p(q^2) = \int_0^\infty \left[-\ell_\eta (1 - a(s,0) \sum_i \frac{\alpha_i}{2\beta_i} e^{-b^2/4\beta_i}) \right] J_0(bq) b db \quad (4.10)$$

Esta equação é muito importante porque a partir dela é possível obter a constante de absorção e o fator de forma do π^- é deste último o raio quadrático médio; isto tudo em função dos parâmetros de ajuste. Expandindo a função logaritmo na equação acima e integrando-a obtem-se:

$$\begin{aligned} \mu_{\pi p}(s) F_{\pi}(q^2) F_p(q^2) = a(s,0) \sum_i \alpha_i e^{-\beta_i q^2} + \frac{a^2(s,0)}{4} \sum_{ij} \frac{\alpha_i \alpha_j}{Y_{ij}} \times \\ \exp\left(-\frac{\beta_i \beta_j}{Y_{ij}} q^2\right) + \frac{a^3(s,0)}{12} \sum_{ijk} \frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}{Y_{ijk}} \exp\left(-\frac{\beta_i \beta_j \beta_k}{Y_{ijk}} q^2\right) + \dots \end{aligned} \quad (4.11),$$

onde

$$Y_{ij} = \beta_i + \beta_j$$

$$Y_{ijk} = Y_{ij} \beta_k + \beta_i \beta_j$$

A constante de absorção é obtida através da equação acima fazendo uso da normalização dos fatores de forma, $F_{\pi}(0) = F_p(0) = 1$, resultando assim

$$\mu_{\pi p}(s) = a(s,0) + \frac{a^2(s,0)}{4} \sum_{ij} \frac{\alpha_i \alpha_j}{Y_{ij}} + \frac{a^3(s,0)}{12} \sum_{ijk} \frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}{Y_{ijk}} + \dots \quad (4.12)$$

Representando o lado direito da eq.(4.11) por $G(s, q^2)$, o fator de Forma do π^- é:

$$F_{\pi}(q^2) = \frac{1}{\mu_{\pi p}(s) F_p(q^2)} G(s, q^2) \quad (4.13),$$

onde $\mu_{\pi p}(s)$ é dado pela expressão (4.12) e $F_p(q^2)$ é o fator de forma na aproximação de dipolo dado pela equação (3.21):

De posse do fator de forma, $F_\pi(q^2)$, o raio quadrático médio do π^- é obtido pela relação

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left[\frac{d F_\pi(q^2)}{dq^2} \right]_{q^2=0} \quad (4.14)$$

$P_{lab} \text{ (GeV/c)}$	14.15	25	40	50	70	100	140	200
$a(s,0)$	5,2942781	5,0644479	4,9766016	4,9050984	4,9030557	4,8948841	4,9030557	4,9704742
α_1	0,06999969	0,2891313	0,4729093	0,6060932	0,2362945	0,5741355	0,5002543	0,6669865
α_2	0,9300031	0,7108687	0,5270907	0,3938266	0,7637055	0,4210145	0,4997557	0,3334553
α_3	-	-	-	$8,02 \cdot 10^5$	-	0,0048510	-	-0,0004118
β_1	-26,99252	-9,635151	-7,155794	-5,986312	-8,922175	-6,084830	-6,484937	-6,00445
β_2	-3,842964	-3,372766	-3,040058	-2,559155	-3,440090	-2,848999	-3,010078	-2,400754
β_3	-	-	-	0,004778	-	-0,8625269	-	-0,4308328
SOMA DOS QUADRADOS DOS RESI- DUOS	(41) 0,29104	(39) 0,47939	(39) 0,54098	(129) 1,56857	(14) 0,03577	(100) 1,07589	(19) 0,10359	(221) 2,86770

Tabela 4 - Parâmetros de Ajuste

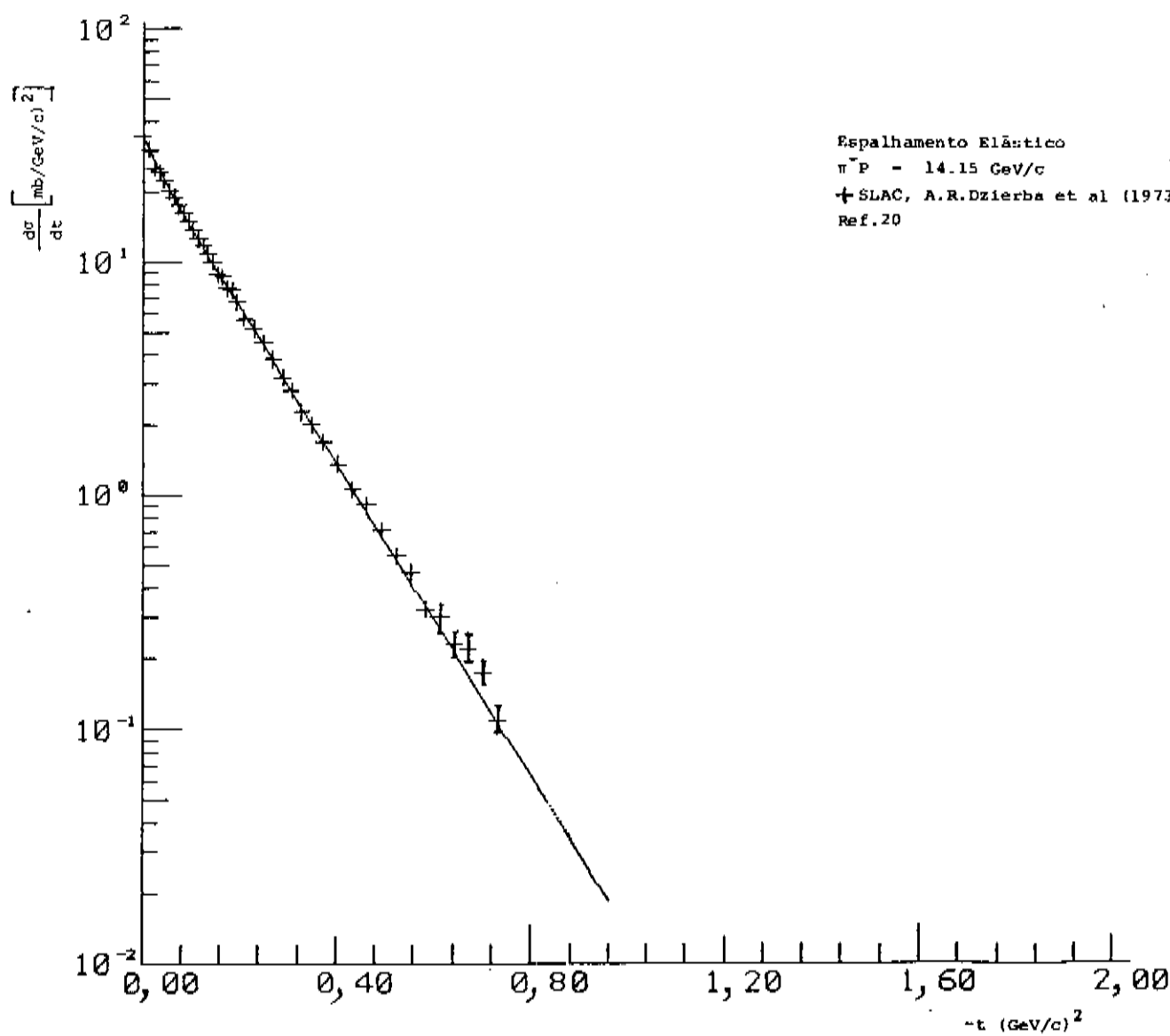


Figura 14 - Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 14,15 \text{ GeV/c}$

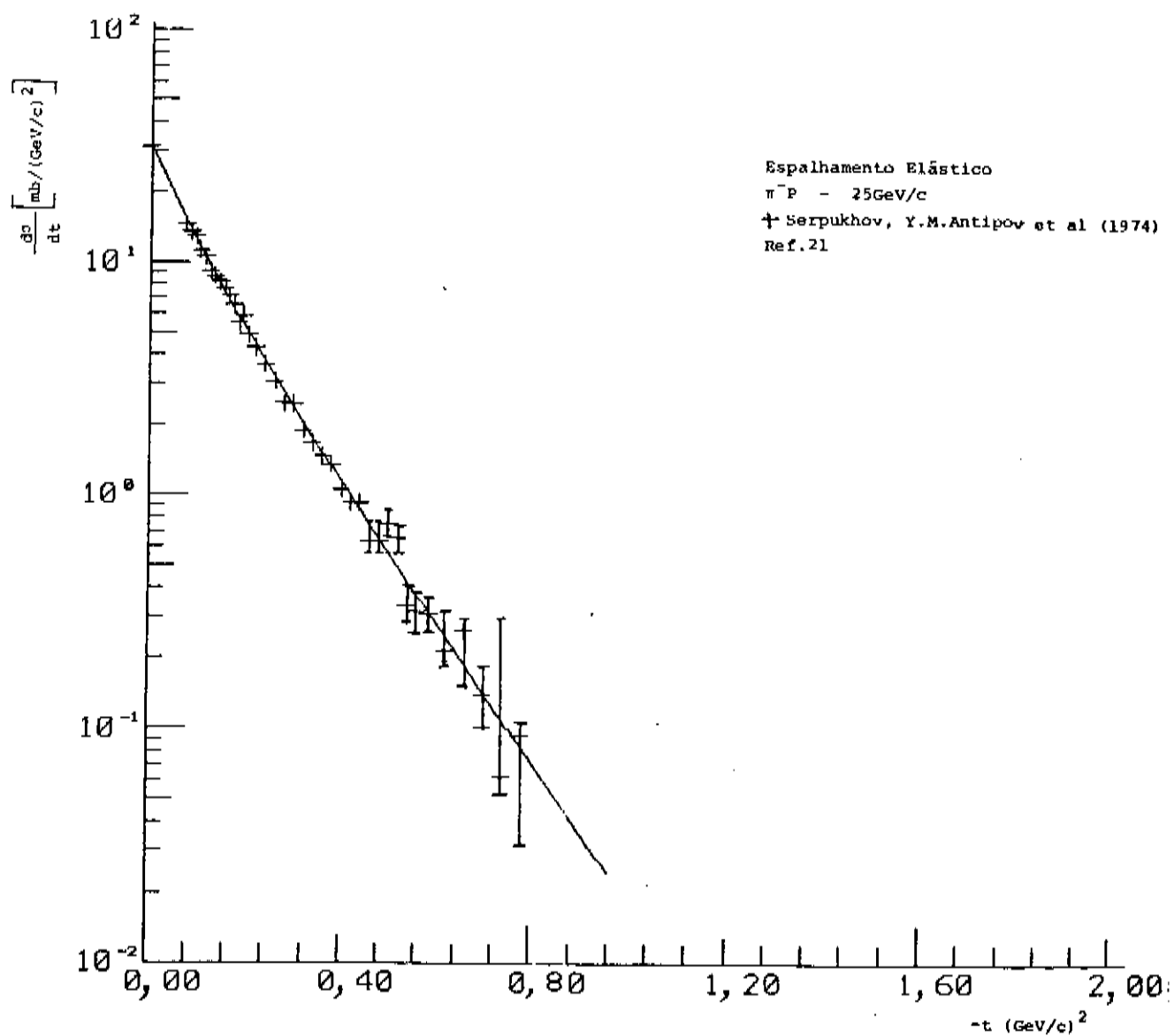


Figura 15 - Gráfico de ajuste para $P_{\text{lab}} = 25 \text{ GeV/c}$

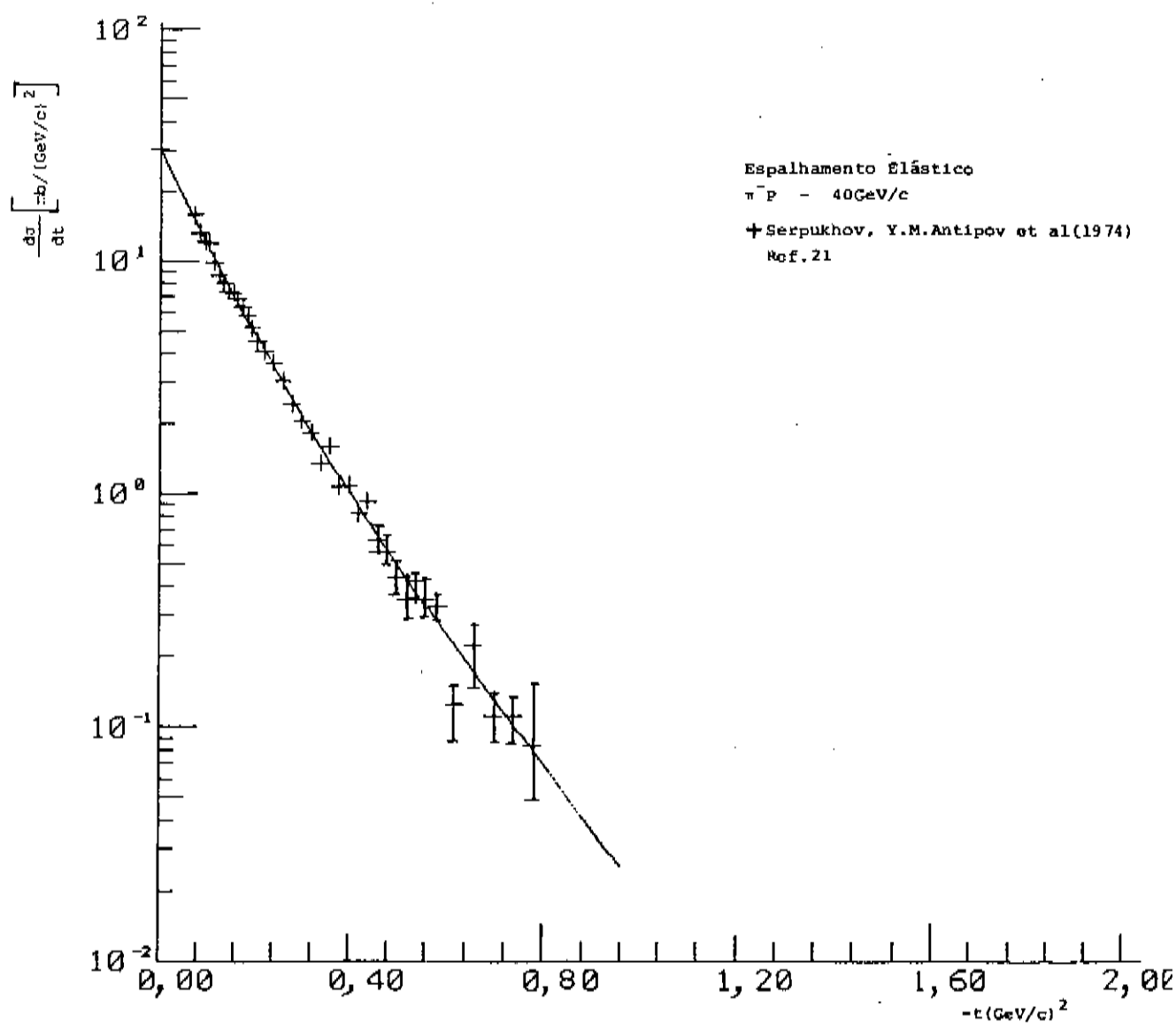


Figura 16 - Gráfico de ajuste para $P_{\text{lab}} = 40 \text{ GeV/c}$

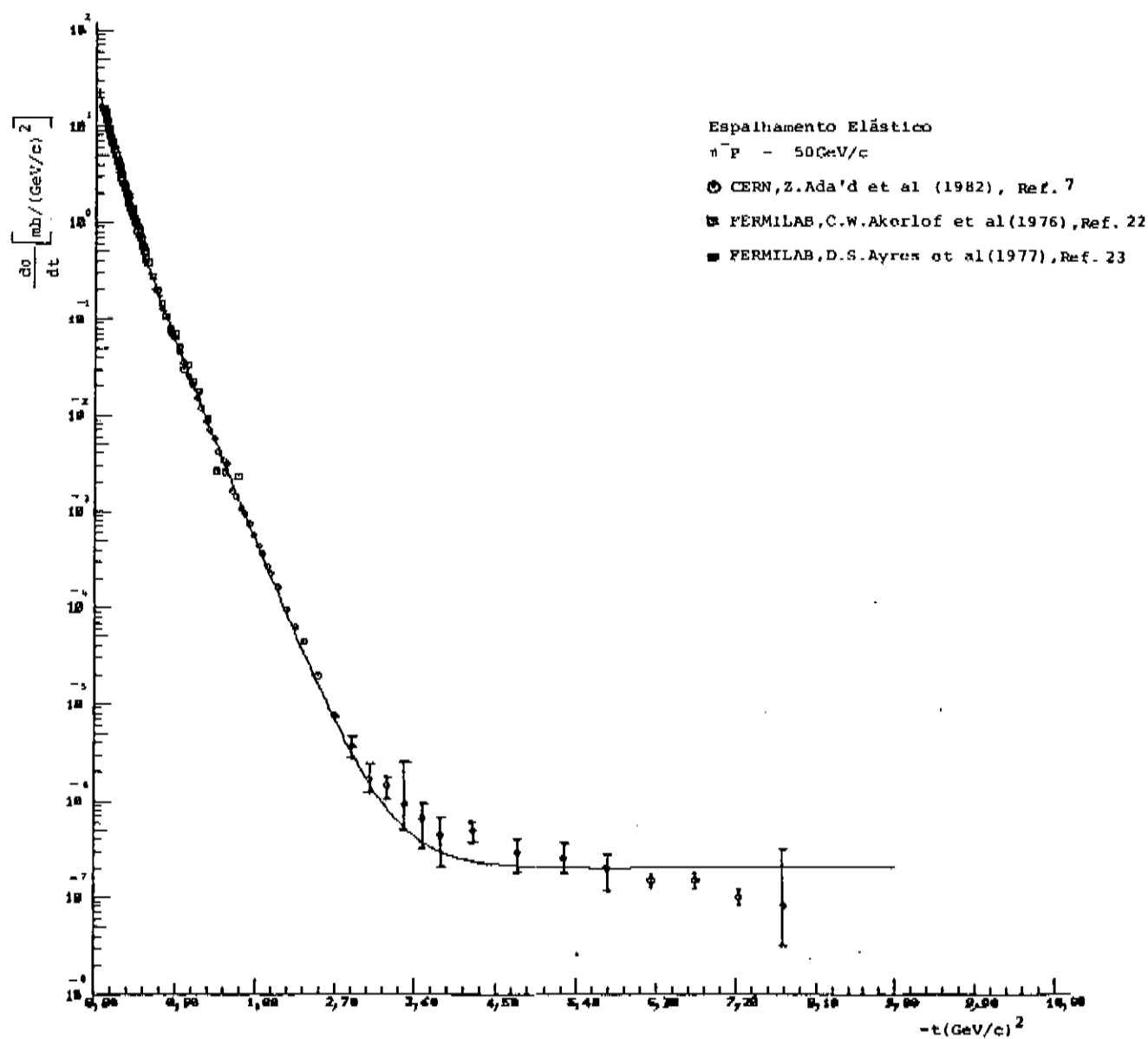


Figura 17 - Gráfico de ajuste para $P_{\text{lab}} = 50 \text{ GeV}/c$

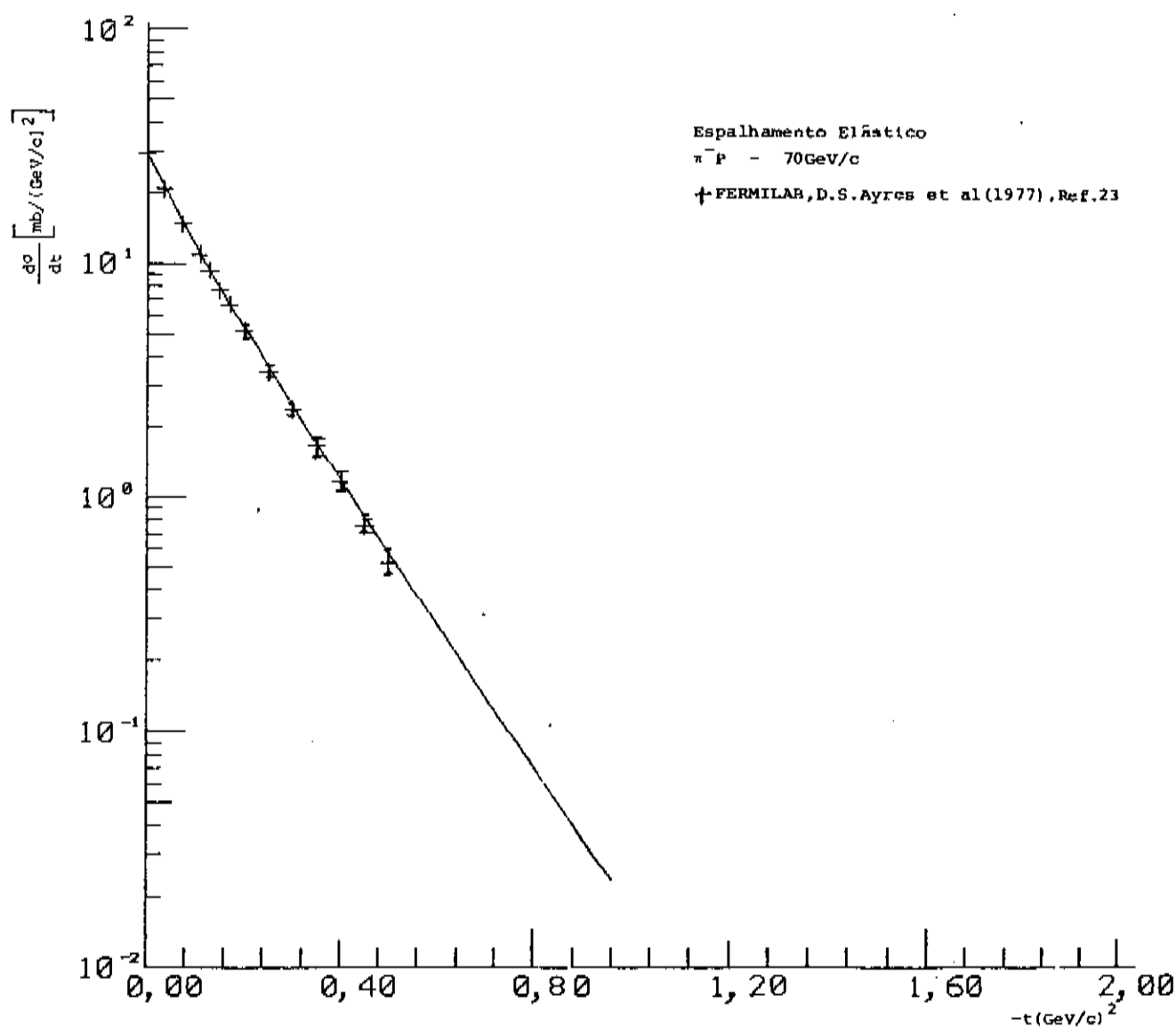


Figura 18 - Gráfico de ajuste para $P_{lab} = 70$ GeV/c

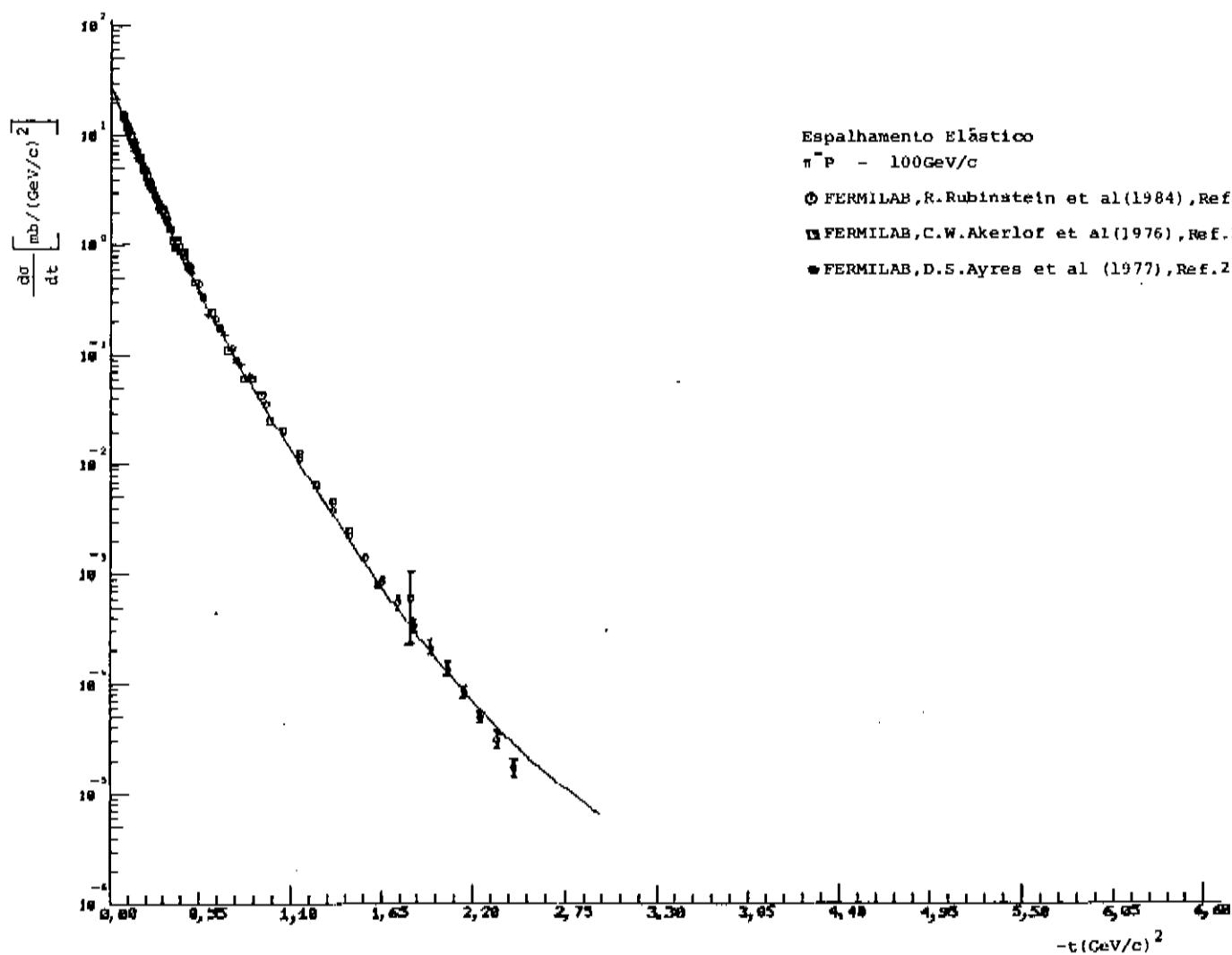


Figura 19 - Gráfico de ajuste para $P_{\text{lab}} = 100 \text{ GeV/c}$

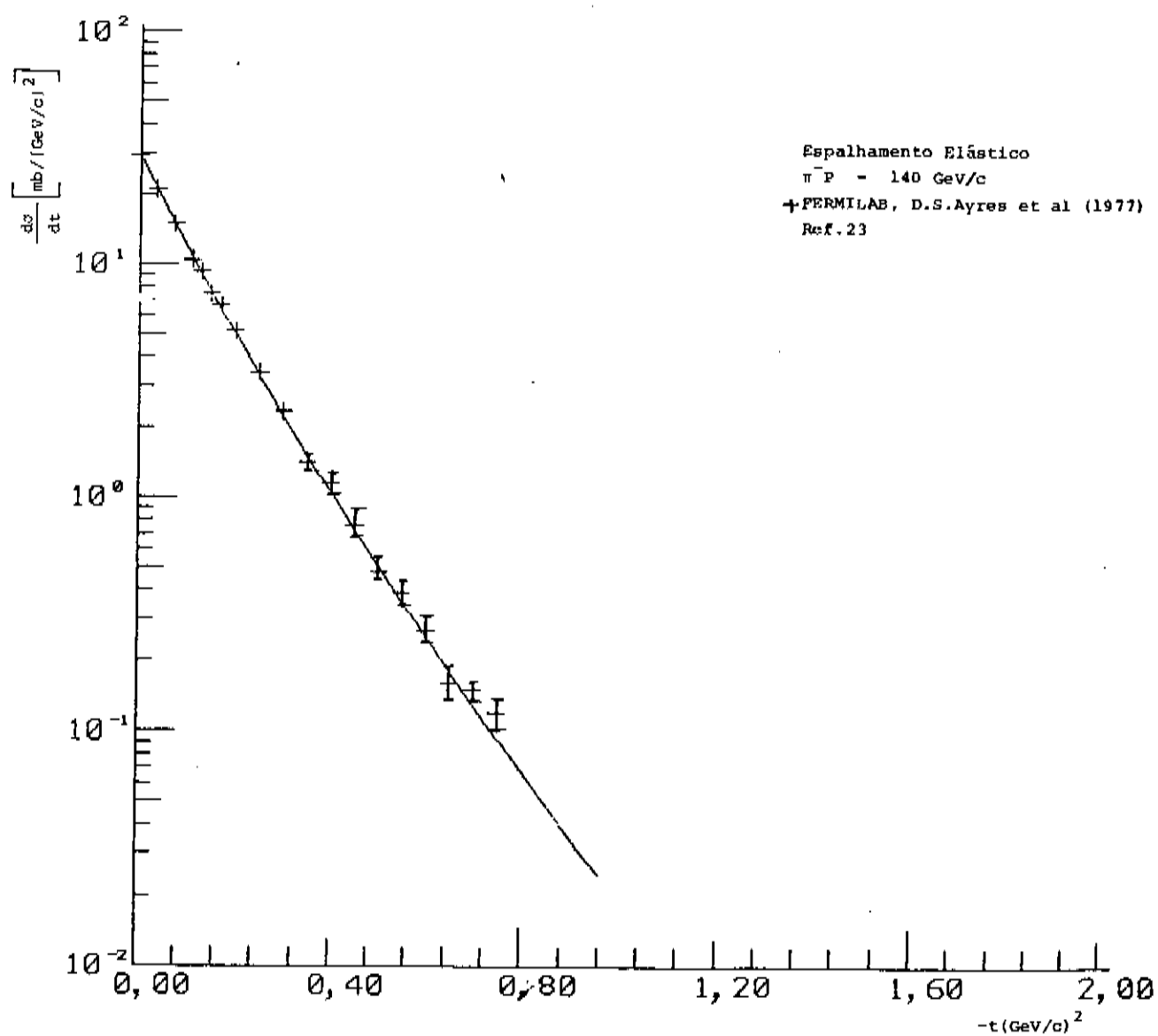


Figura 20 - Gráfico de ajuste para $P_{\text{lab}} = 140 \text{ GeV/c}$

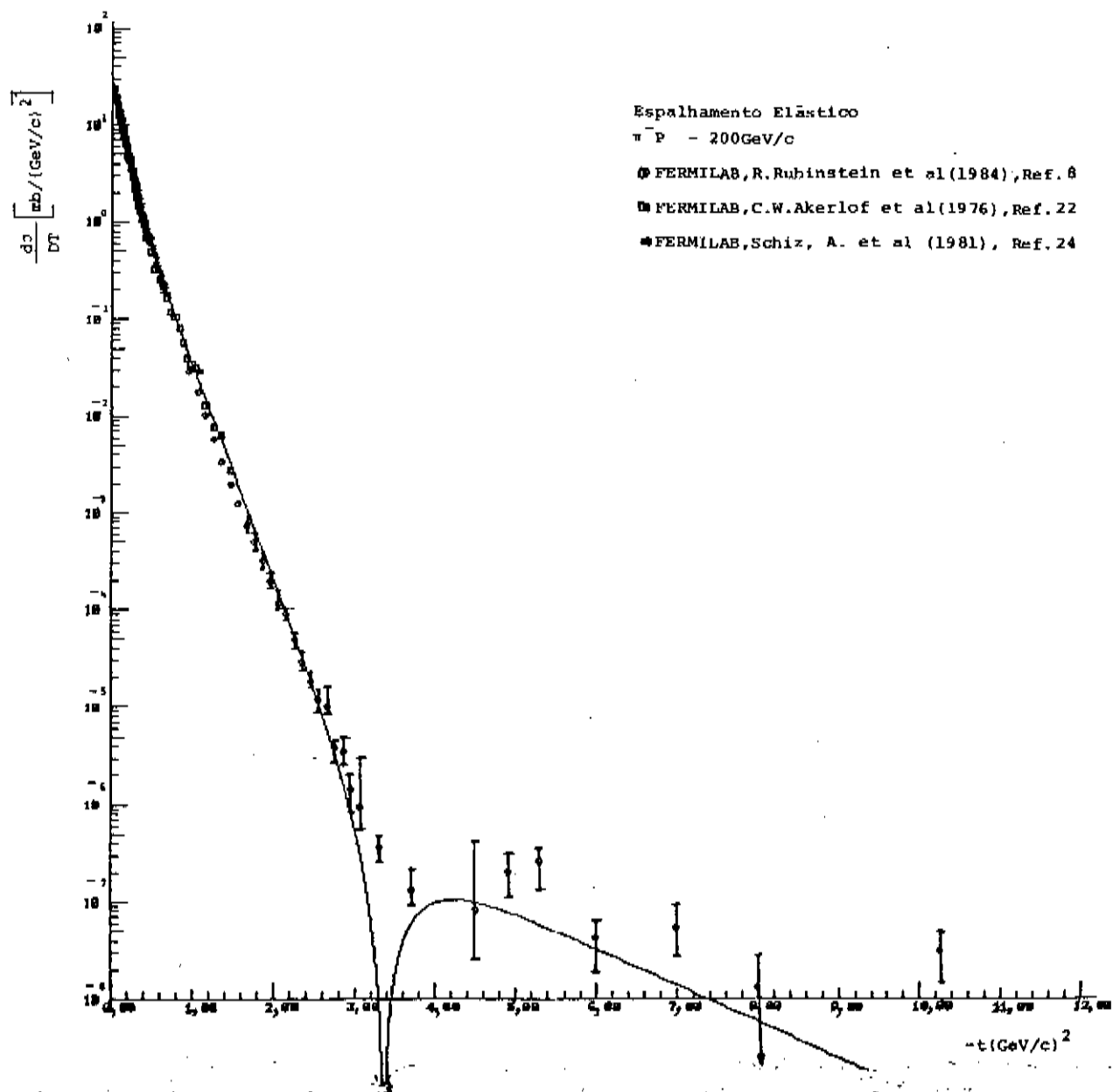


Figura 21 - Gráfico de ajuste para $P_{\text{lab}} = 200 \text{ GeV/c}$

CAPÍTULO V

RESULTADOS : ANÁLISE

5.1. Constante de Absorção

Nesta seção são apresentados na tabela 5 os valores obtidos para a constante de absorção, calculada através da equação (4.12), usando-se os parâmetros de ajuste da tabela 4.

P_{lab} (GeV/c)	14,15	25	40	50	70	100	140	200
$\mu_{\pi p}$ (GeV/c) ⁻²	6,484	6,064	5,925	5,902	5,894	5,851	5,852	5,952

Tabela 5 - Constante de Absorção

Na última seção deste capítulo, calcula-se a constante de absorção, para os vários valores de P_{lab} dados na tabela acima, via teorema ótico com a finalidade de verificar a consistência dos resultados obtidos pelos parâmetros de ajuste.

5.2. Fator de Forma do Pion Negativo.

Agora se exibirá as curvas representativas do fator de forma do π^- , obtidas a partir da expressão (4.13) com 6 termos na expansão e os parâmetros de ajuste da tabela 4. Vê-se da figura 22 que todas as curvas possuem um comportamento bem semelhante, exceto por pequenas discrepâncias que aparecem sobretudo nas curvas de 50, 100 e 200 GeV/c.

A razão principal para tais discrepâncias é atribuído em parte ao Modelo de Chou-Yang, pois ele tem em seus fundamentos a limitação de ser válido, para processos a pequenos momentos transferidos; mas uma razão talvez mais concludente é de que estas discre

pâncias devam-se ao problema de ajuste dos parâmetros na região de grandes momentos transferidos.

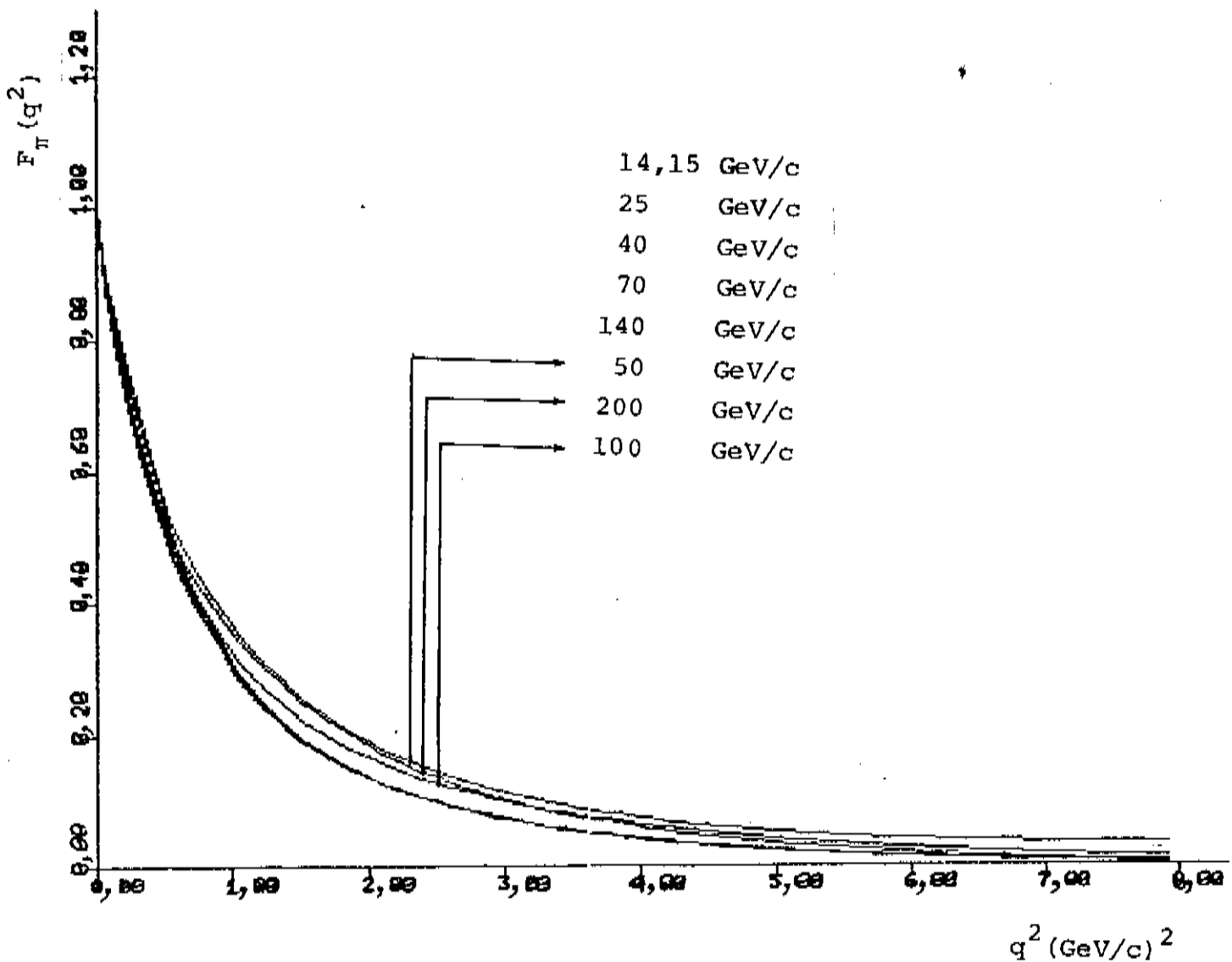


Figura 22 - Curvas do Fator de Forma

Na fig. 23 apresentam-se novamente as curvas do fator de forma de π^- excluindo as de momento de 50, 100 e 200 GeV/c com a finalidade de ver de forma transparente que as discrepâncias acima mencionadas desaparecem quase por completo.

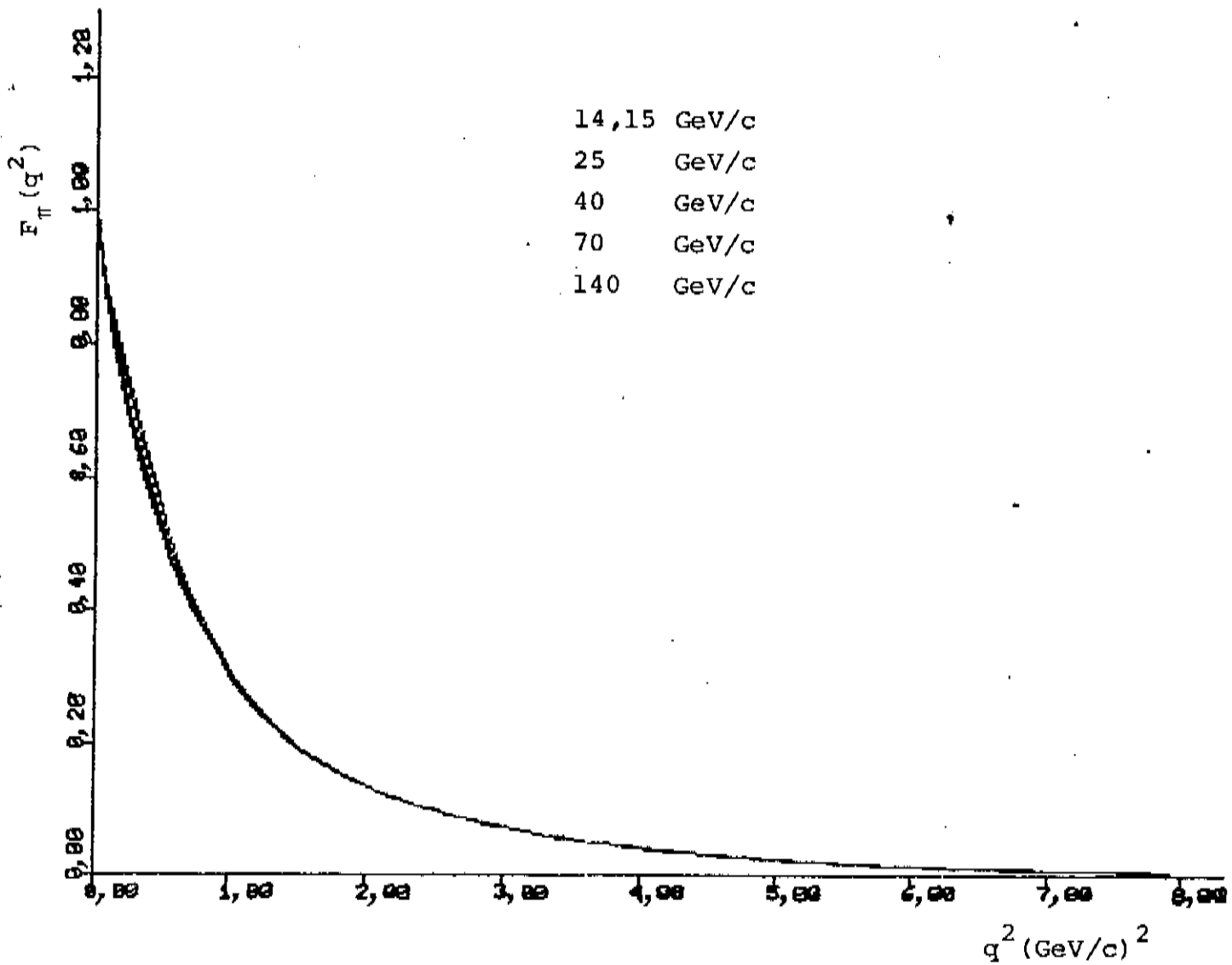


Figura 23 - Curvas do Fator de Forma

5.3. O raio quadrático médio do píon negativo

O cálculo do raio quadrático médio teve por fim atestar a validade dos modelos no estudo dos hádrons. Em geral é medido experimentalmente em processos elásticos de elétrons-hádrons, pois os elétrons são partículas sem estrutura como atestam até agora os dados experimentais a altas energias; ainda que existam hoje em dia especulações sobre esta questão.

Os valores do raio quadrático médio obtido pela eq. 4.14 para todos os momentos analisados neste trabalho são apresentados na tabela 6. Faz-se necessário mencionar que para o cálculo destes valores foi usado o fator de forma do próton, na aproximação de dipolo, o qual aparece explicitamente no fator de forma do pión dado pela expressão 4.13 .

P_{lab}	$\langle r^2 \rangle_{\pi^-} F_m^2$	$\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{-1/2} F_m$
14,15	0,456	0,675
25	0,420	0,648
40	0,387	0,623
50	0,308	0,555
70	0,329	0,574
100	0,326	0,572
140	0,338	0,582
200	0,346	0,588

Tabela 6 - Raios quadráticos médio e raio r.m.s. do π^-

Efetuada-se a média dos valores do raio quadrático médio a diferentes momentos de laboratório dados na tabela 6, obteve-se os seguintes resultados

$$\langle r^2 \rangle_{\pi^-} = 0,36 \pm 0,05 F_m^2 \quad (5.1)$$

e

$$\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{-1/2} = 0,60 \pm 0,04 F_m, \quad (5.2)$$

onde o erro atribuído a $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}$ foi calculado pelo desvio quadrático médio.

Como pode ser observado da tabela 7 os resultados do raio quadrático médio e do raio r.m.s obtidos acima são concordantes, dentro do limite de erro, com quase todas as experiências salvo a de eletro-produção e a primeira medida feita através do espalhamento elástico π^- e, realizada por G.T. Adyloy et al. Por outro lado, são concordantes com todos os resultados teóricos obtidos com Modelos diferentes ao presente trabalho, Tabela 8.

Experiência	$\langle r^2 \rangle_{\pi^-}$ (Fm ²)	$\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{1/2}$ (Fm)	Referências
ELETROPRODUÇÃO DE PION	0,49±0,025	0,704±0,025	Phy.Rev.D13,25 (1976) C.J.Bebek et al
	0,51±0,018	0,711±0,018	Phy.Rev.D17,1693(1978) C.J.Bebek et al
ELETROPRODUÇÃO INVERSA	0,36±0,11	0,60±0,11	Sov.J.Nucl.Phys.26,290(1977) S.F.Berezhnev et al
	0,38±0,12	0,62±0,12	S.F.Berezhnev et al Preprint, JINR,Dubna(1976)
FEIXE COLIDENTE ELETRON-POSITRON	0,37±0,039	0,605±0,039	I.B.Vassermaw et al Preprint 80-169,Institute of Nuclear Physics,Siberian Division,USSR (1980)
ESPALHAMENTO ELASTICO π^-	0,61±0,10	0,78±0,10	G.T.Adyloy et al Nucl.Phys.B128,461(1977)
	0,31±0,04	0,56±0,04	E.H.Dally et al Phys.Rev. D24,1718(1981)
	0,43±0,03	0,66±0,03	E.H.Dally et al Phys.Rev.Lett. 48,375(1982)

Tabela 7 - Dados Experimentais de $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}$ e $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{1/2}$

Modelo Teórico	$\langle r^2 \rangle_{\pi} \text{ (Fm}^2\text{)}$	$\langle r^2 \rangle_{\pi}^{1/2} \text{ Fm}$	Referências
Dominância Vetorial	$0,34 \pm 0,48$	$0,58 \pm 0,69$	Lett.N.Cimen.,2,7 (1971) C.F.Cho and J.J.Sakurai
Teoria Quântica de Campo Local	$0,06 \pm 0,61$	$0,24 \pm 0,78$	Nucl.Phys.B97,269 (1975) G.Bonneau e F.Martin
Formulação Geométrica do Fator de Forma eletromagnético do Pion	$0,46^{+0,06}_{-0,08}$	$0,68^{+0,06}_{-0,08}$	Nucl.Phys.B94,67 (1975) H.D.Kiehlmann and W.Schmiot
Modelo Ótico de Chou-Yang	$0,37 \pm 0,03$	$0,61 \pm 0,03$	Phys.Rev.D19,3327 (1970) T.T.Chou
Modelo Ótico de Chou-Yang	$0,38 \pm 0,02$	$0,62 \pm 0,02$	Phys.Rev.D11,3145 (1975) T.T.Chou
Modelo Ótico de Chou-Yang	$0,36^{+0,06}_{-0,08}$	$0,60^{+0,06}_{-0,08}$	J.Phys.G3,L5 (1977) R.J.Lombard e C.Wilkin

Tabela 8 - Valores teóricos de $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}$ e $\langle r^2 \rangle_{\pi^-}^{1/2}$

5.4. Fator de Forma do Píon Negativo: monopolo/dipolo

O fator de forma do píon negativo tem sido medido nos últimos anos somente na região de $0 < q^2 < 1,2 \text{ (GeV/c)}^2$ [35] ; mas é possível se inferir um fator de forma para regiões maiores ao limite experimental.

A forma usada neste trabalho para realizar tal inferência é dada por intermédio da parametrização dos dados gerados pela equação 4.13 , mostrada na fig. 22 onde os valores de $F_\pi(q^2)$ foram extrapolados para o intervalo: $0 < q^2 < 8 \text{ (GeV/c)}^2$ através das funções do tipo monopolo e dipolo respectivamente.

Com o resultado do raio quadrático médio calculado na seção 5.3 estas duas são dadas por:

a) Fórmula de monopolo

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/\mu^2)} \quad (5.3),$$

onde $\mu^2 = \frac{6}{\langle r^2 \rangle} = 16,67 \text{ fm}^{-2} = 0,649 \text{ (GeV/c)}^2$

b) Fórmula de dipolo

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/\mu^2)^2} \quad (5.4),$$

onde $\mu^2 = \frac{12}{\langle r^2 \rangle} = 33,33 \text{ fm}^{-2} = 1,298 \text{ (GeV/c)}^2$

Verifica-se que os dois fatores de forma, tipo monopolo ou tipo dipolo, são concordantes na região onde q^2 é pequeno, fig.24, mas o do tipo dipolo é o que melhor se ajusta para todo o feixe de q^2 como pode ser observado da fig. 25.

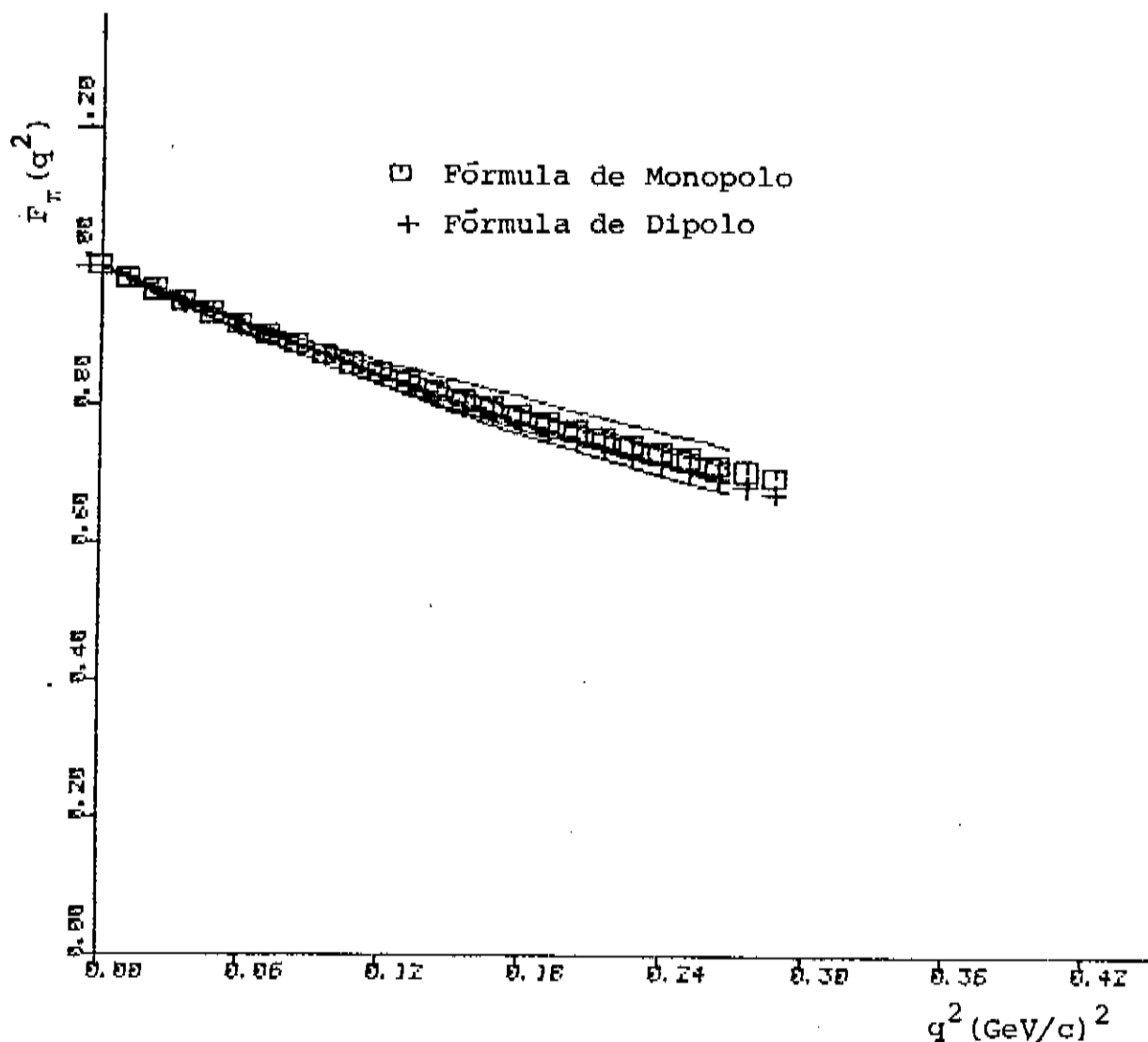


Figura 24 - Fator de Forma do π^- para $q^2 < 0.5 \text{ GeV}/c$ comparado com ajuste tipo monopolo e dipolo

Por outro lado, compara-se também os fatores de forma do tipo monopolo e tipo dipolo, fig. 26 com o fator de forma eletromag

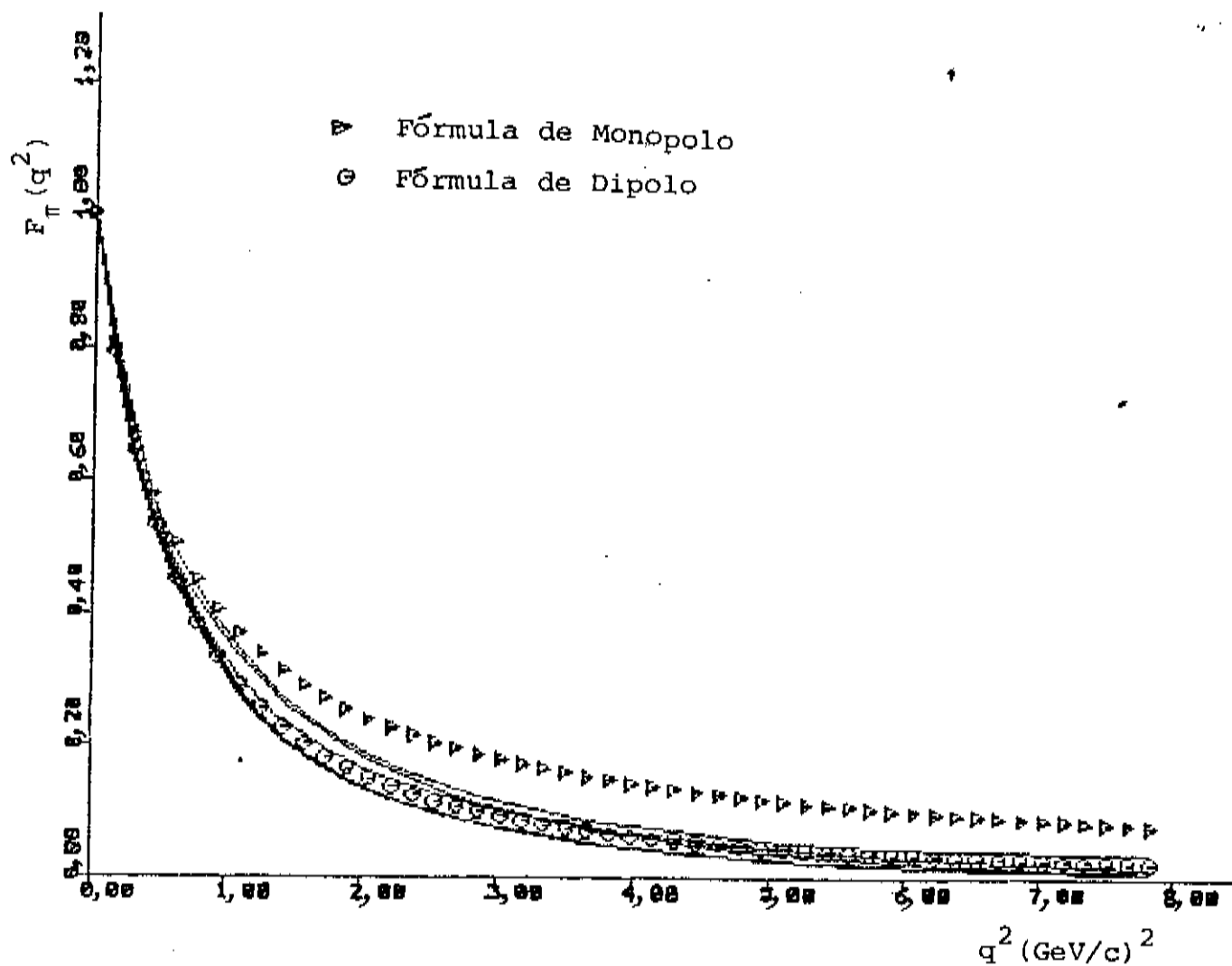
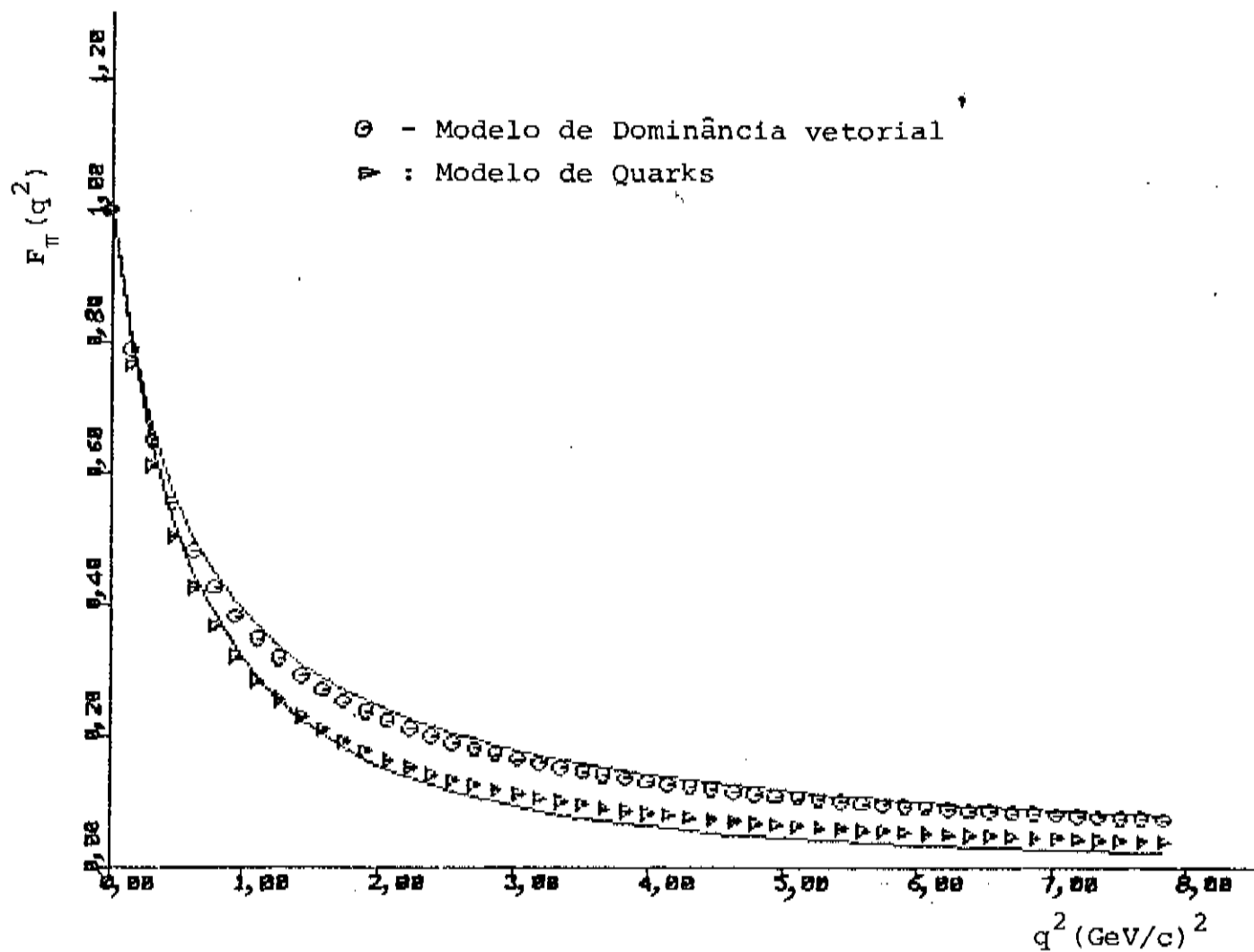


Figura 25 - Fator de Forma do π^- para $q^2 < 8 \text{ GeV}/c$ comparado com ajuste tipo monopolo e dipolo



linha contínua superior, Fórmula de Monopolo

linha contínua inferior, Fórmula de Dipolo

Figura 26 - Fator de Forma do π^- comparado com o do modelo de Dominância Vetorial e Modelo a Quark

nético do pión sendo este concordante com os dados experimentais na região $q^2 < 1.2$, o qual é derivado por meio do modelo de dominância vetorial

$$F_{\pi}(q^2) = \frac{1}{[1 + q^2/m_{\rho}^2]} \quad (5.5),$$

onde m_{ρ} é a massa do meson ρ : $m_{\rho}^2 = 0.5914 \text{ (GeV/c)}^2$ e do modelo a quarks [35]

$$F_{\pi}(q^2) = [F_{\rho}(q^2)]^{2/3} = \left[\frac{1}{1 + q^2/\mu^2} \right]^{4/3},$$

$$\mu^2 = 0,71 \text{ (GeV/c)}^2, \quad (5.6)$$

Com bases nos resultados observados nas figs.24,25,26, pode-se concluir que a função que melhor descreve o comportamento do fator de forma do pión negativo em todo o intervalo q^2 é a do tipo dipolo [5.4] .

5.5. Análise de Consistência

Uma forma de verificar a consistência dos resultados até agora obtidos é calcular a constante de absorção e a seção de choque diferencial para todos os momentos analisados neste trabalho a partir dos fatores de forma do pión e do próton dados por

$$F_{\pi}(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/\lambda^2)^2}$$

$$F_{\rho}(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2/\mu^2)^2}$$

com $\lambda^2 = 1,298 \text{ (GeV/c)}^2$ e $\mu^2 = 0,71 \text{ (GeV/c)}^2$; e comparando a seção de choque diferencial com os dados experimentais e a constante de absorção com os dados obtidos na seção 5.1.

Substituindo as expressões acima na função de opacidade do modelo de Chou-Yang:

$$\Omega(s,b) = \mu_{\pi p}(s) \int_0^{\infty} q \, dq \, F_{\pi}(q^2) F_p(q^2) J_0(bq)$$

$$\Omega(s,b) = \mu_{\pi p}(s) \mu^4 \lambda^4 \int_0^{\infty} \frac{J_0(bq) q \, dq}{(\mu^2 + q^2)^2 (\lambda^2 + q^2)^2}, \quad (5.7)$$

resulta após integração:

$$\Omega(s,b) = \mu_{\pi p}(s) \frac{\mu^4 \lambda^4}{(\lambda^2 - \mu^2)^2} \left\{ \frac{b}{2} \left[\frac{K_1(\mu b)}{\mu} + \frac{K_1(\lambda b)}{\lambda} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(\lambda^2 - \mu^2)} \left[K_0(\lambda b) - K_0(\mu b) \right] \right\} \quad (5.8)$$

onde os $K_n(x)$ são funções modificadas de Bessel de segunda espécie.

De posse da função opacidade calcula-se a constante de absorção através do teorema ótico

$$\sigma_T = 4\pi a(s,0) = 4\pi \int_0^{\infty} (1 - e^{-\Omega(s,b)}) b \, db; \quad (5.9)$$

cujos valores para os diferentes P_{lab} são dados na tabela 9.

P_{lab}	14,15	25	40	50	70	100	140	200
$\mu_{\pi p}$	6,420	6,090	5,960	5,860	5,855	5,845	5,855	5,955

Tabela 9 - Constante de Absorção

Verifica-se, tabela 10, que os valores calculados na seção 5.1 através dos parâmetros de ajuste diferem muito pouco dos valores obtidos acima; mostrando por um lado uma grande consistência e por outro uma eficiência do modelo de Chou-Yang.

P_{lab} (GeV/c)	14.15	25	40	50	70	100	140	200
$\mu_{\pi p}$ AJUSTE	6,484	6,064	5,925	5,902	5,894	5,851	5,852	5,952
$\mu_{\pi p}$ T.ÔTICO	6,420	6,090	5,960	5,860	5,855	5,845	5,855	5,955

Tabela 10 - Constante de Absorção

Substituindo a eq. 5.8 na eq. 3.7, após integração numérica obteve-se a amplitude de espalhamento utilizando os valores para a constante de absorção os dados da tabela 9. A partir dessa amplitude de espalhamento calculou-se a seção de choque diferencial para todos os momentos analisados neste trabalho (Fig. 27 a 33).

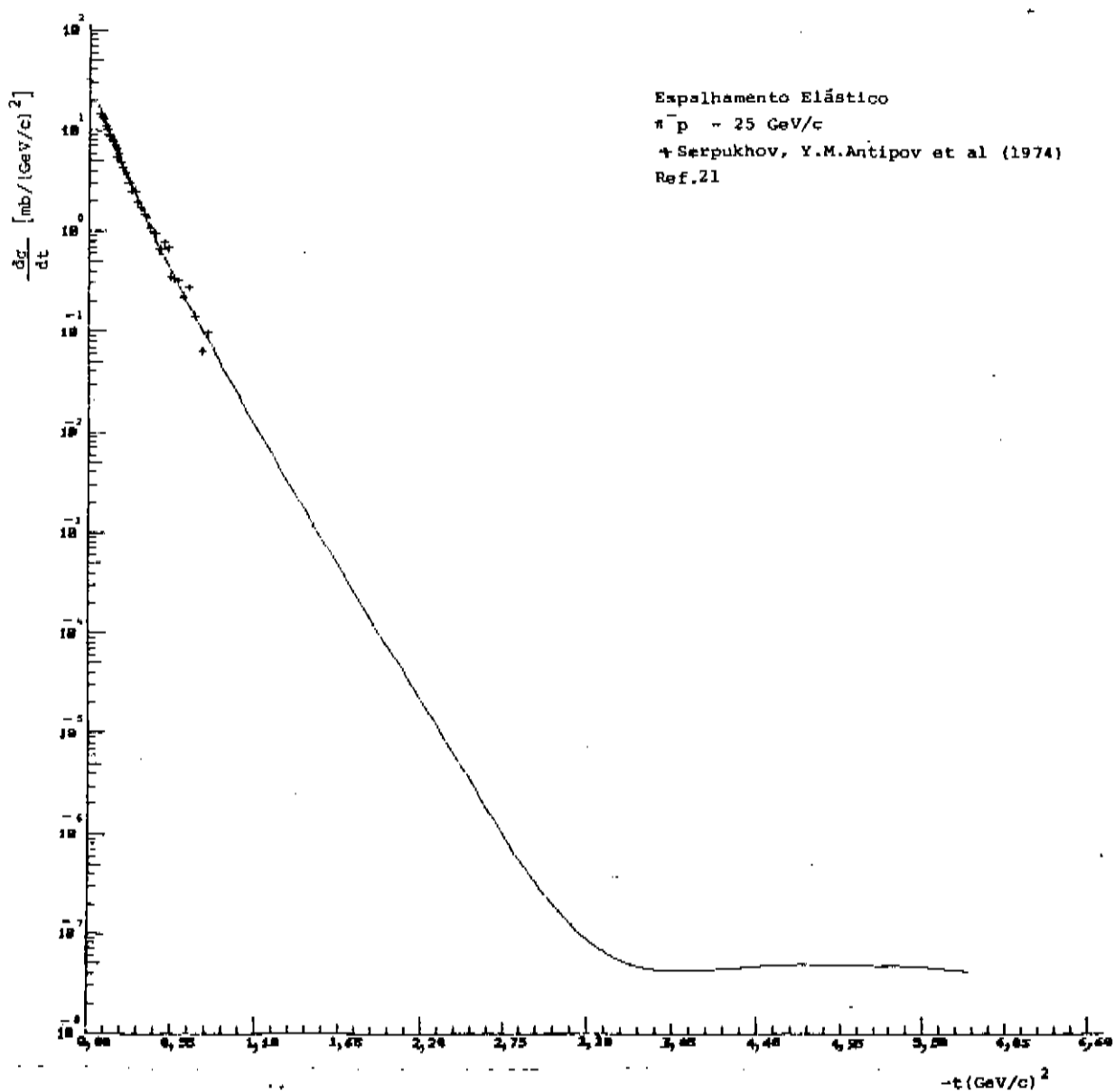


Figura 27 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 25 \text{ GeV/c}$.

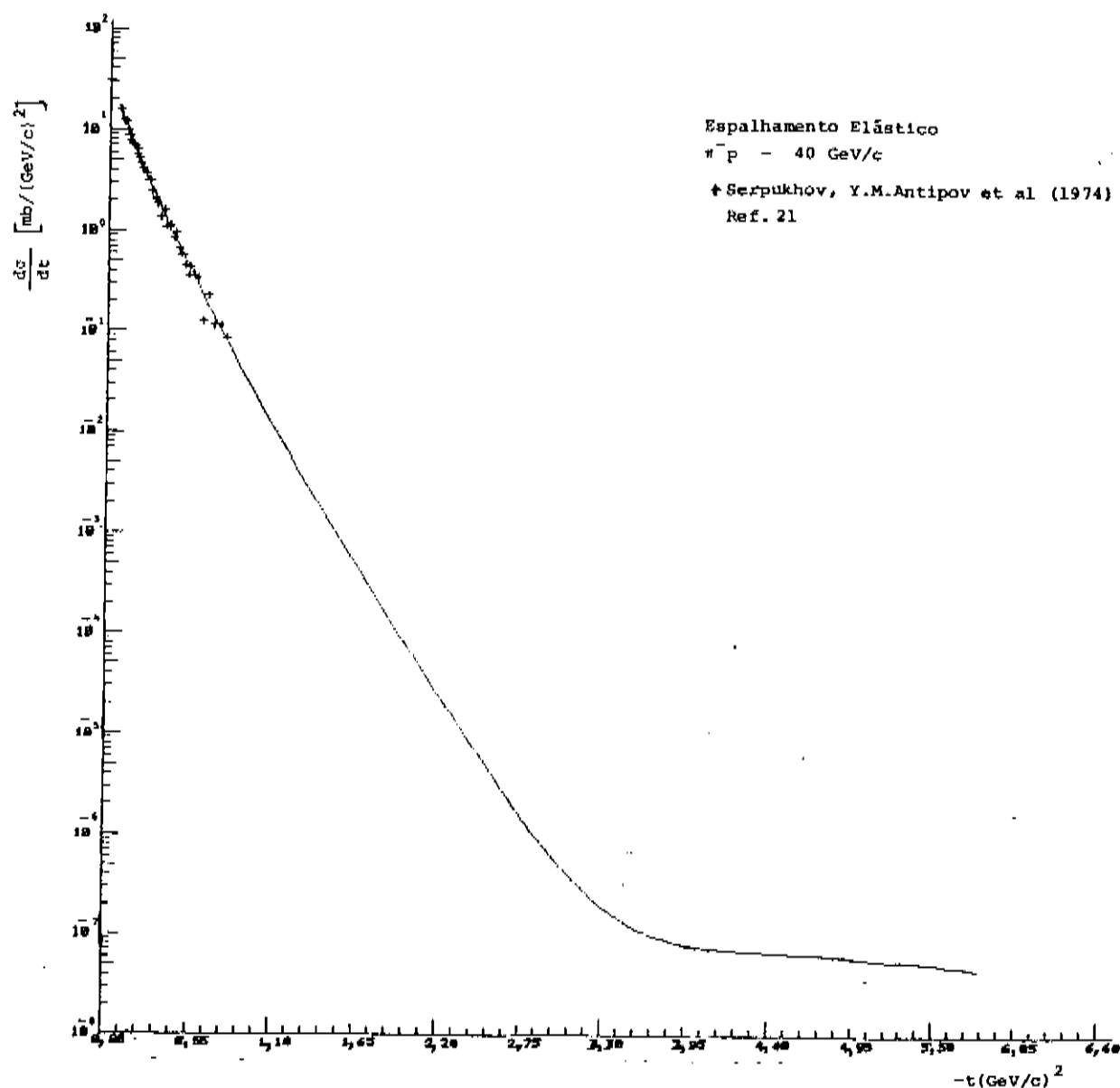


Figura 28 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 40 \text{ GeV/c}$

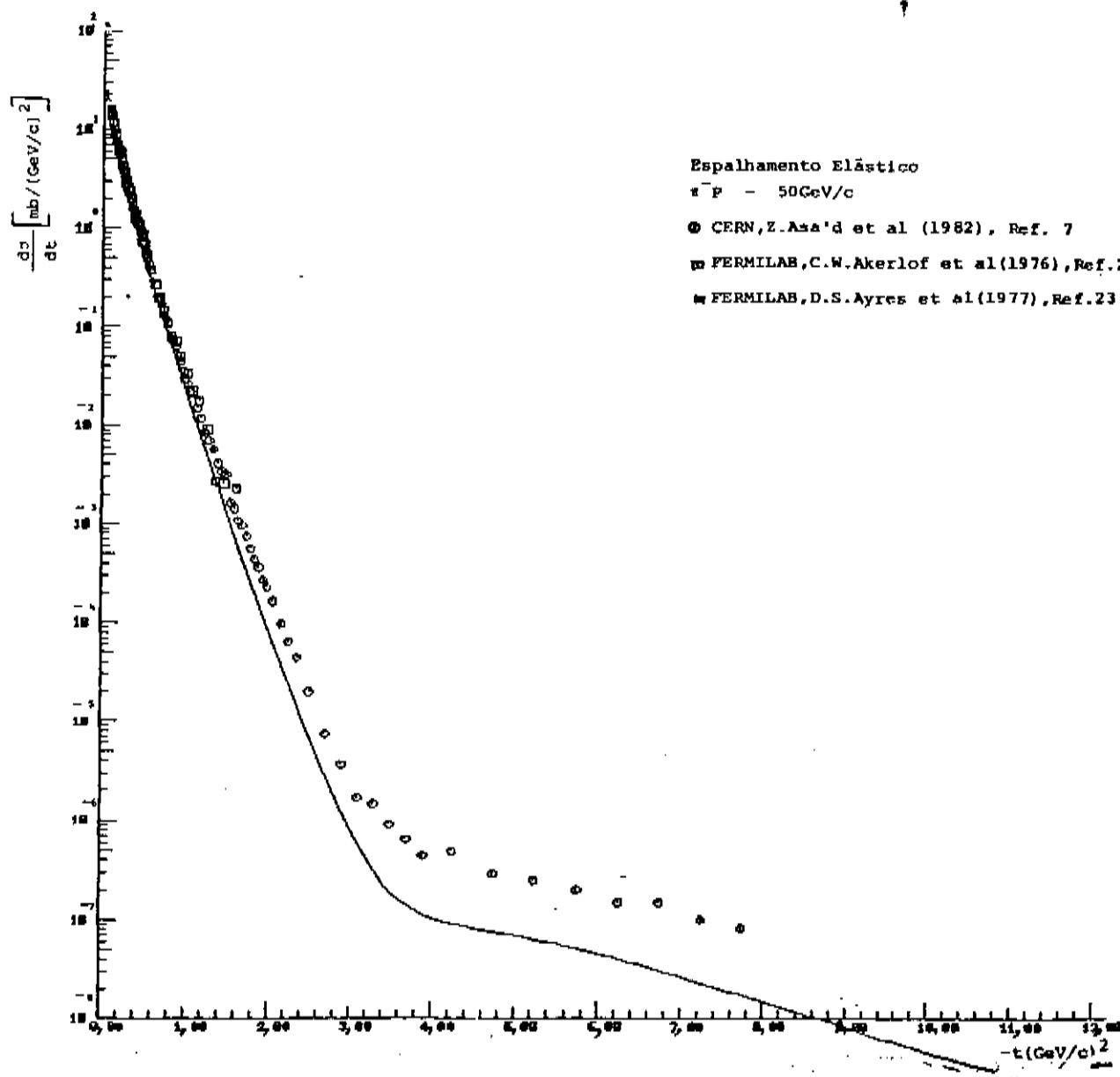


Figura 29 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 50 \text{ GeV/c}$

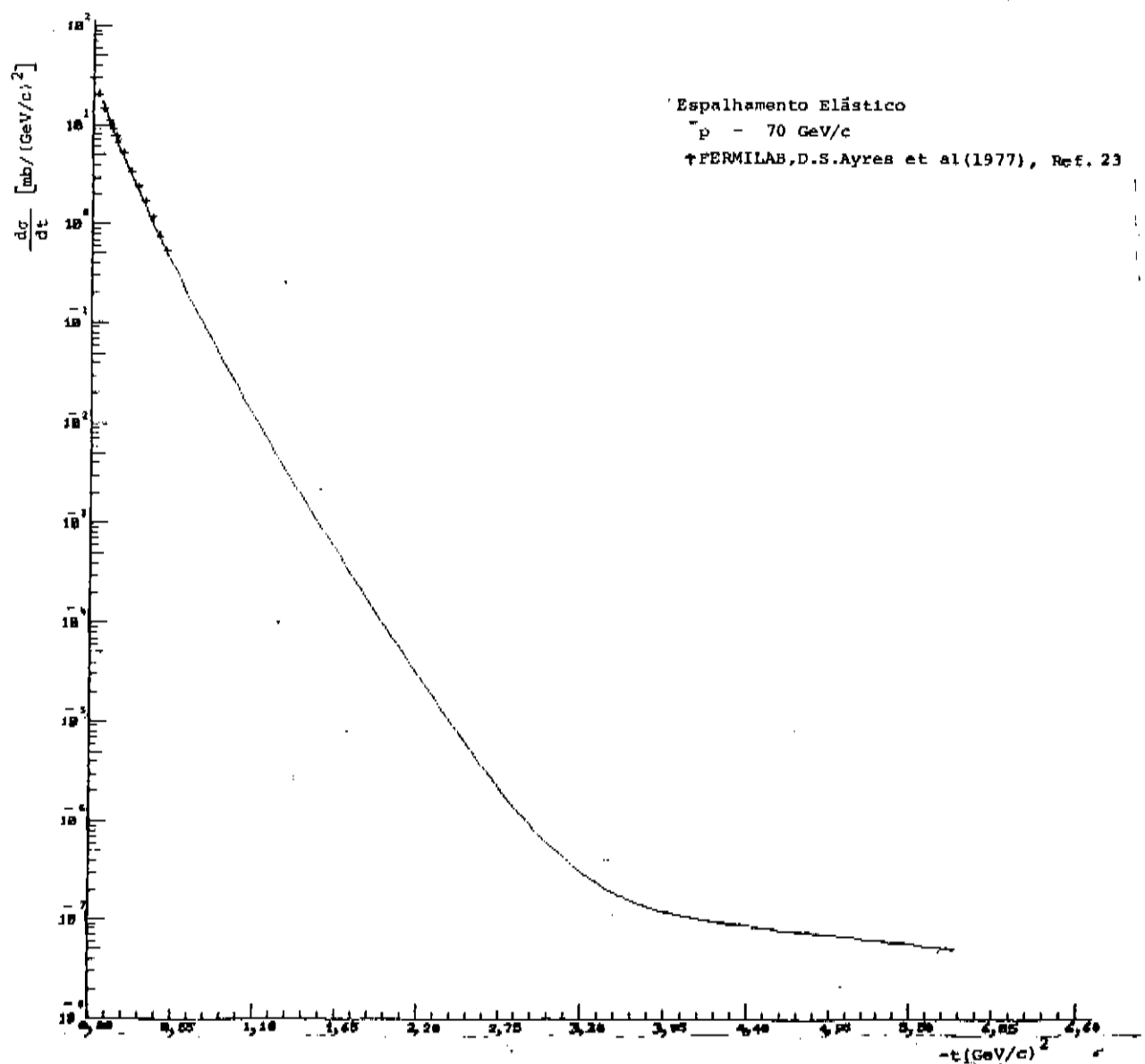


Figura 30 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 70 \text{ GeV/c}$

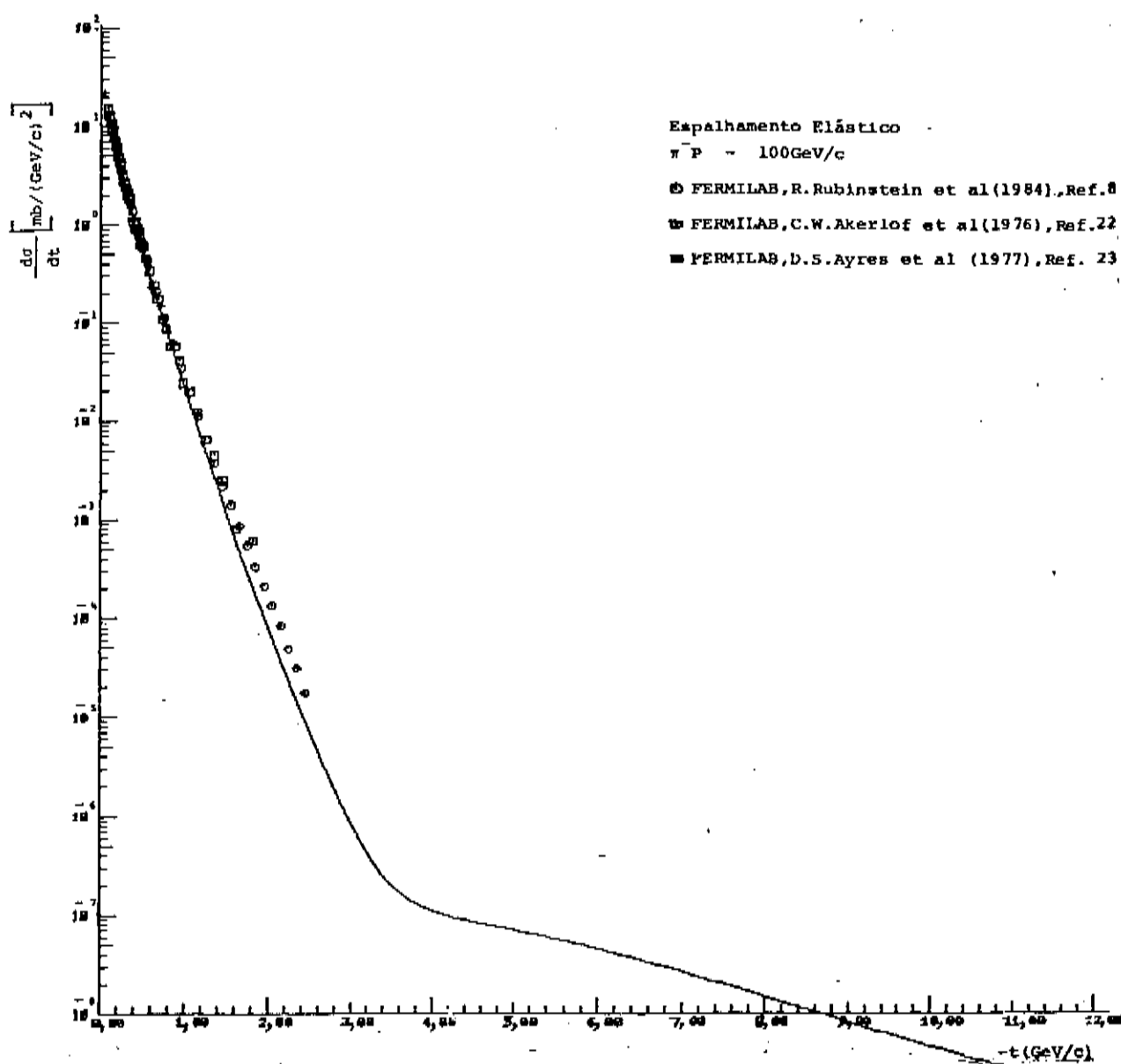


Figura 31 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 100 \text{ GeV/c}$

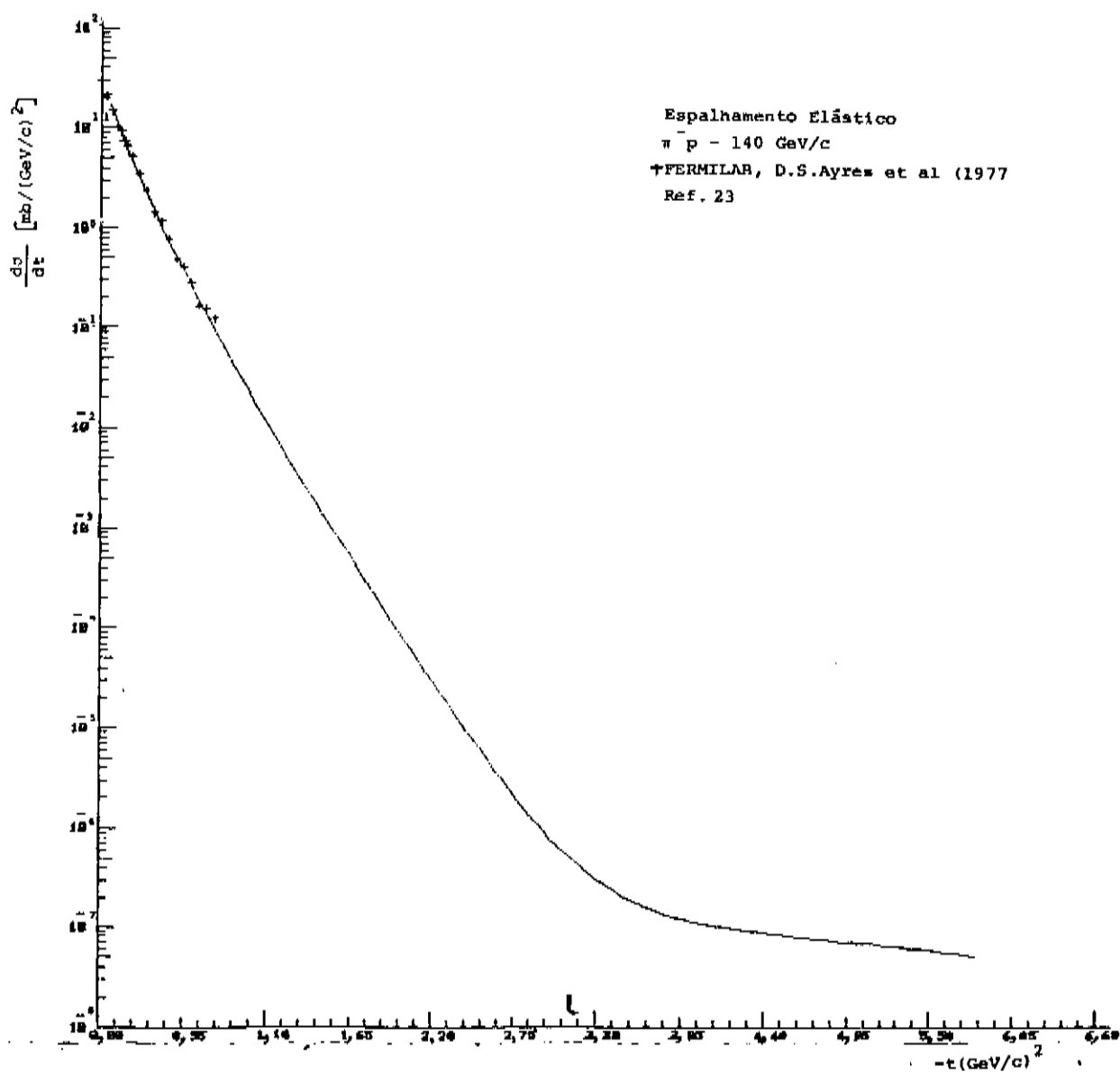


Figura 32 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 140 \text{ GeV/c}$.

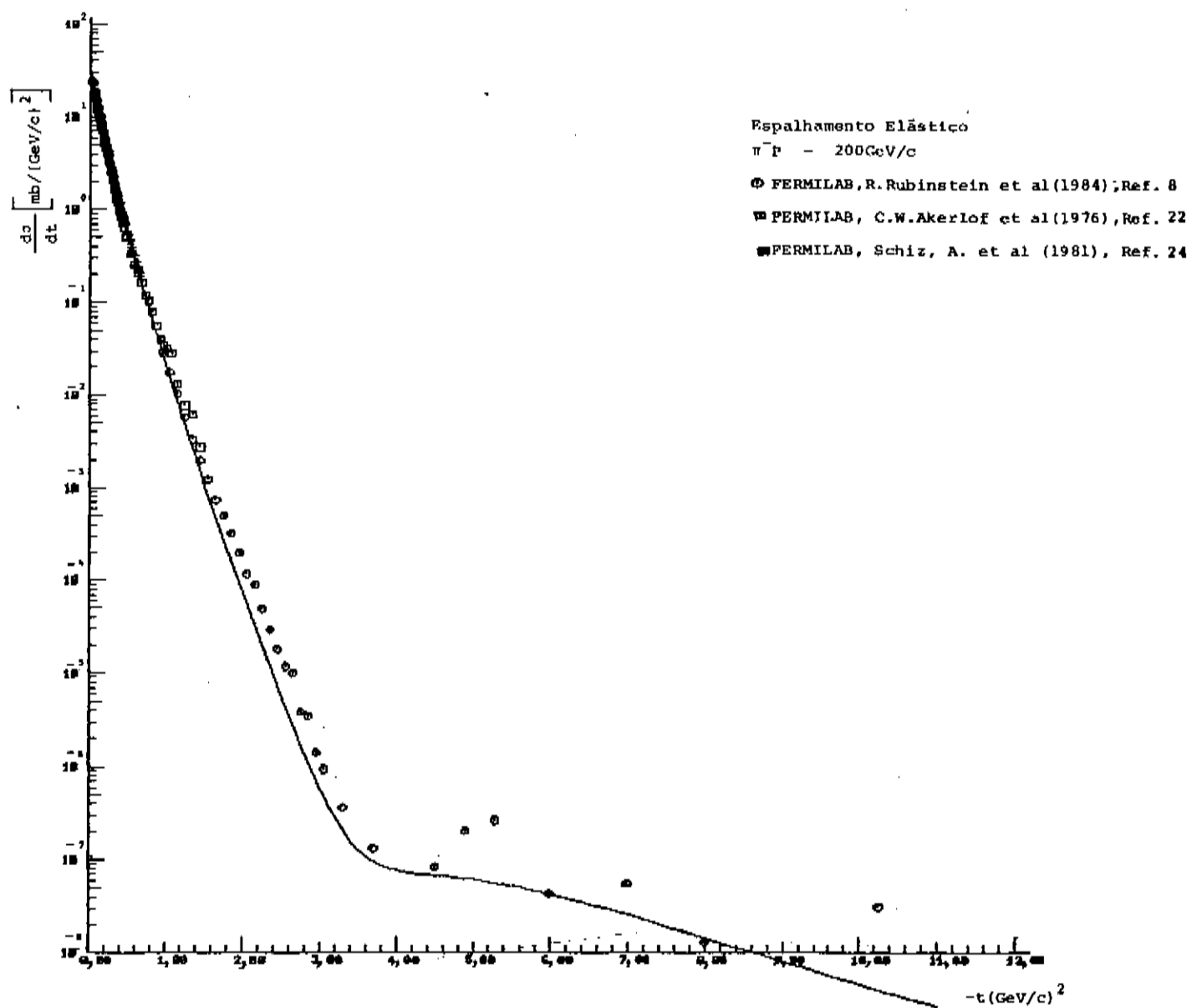


Figura 33 - Curva de $d\sigma/dt$ versus $-t$, para $P_{\text{lab}} = 200 \text{ GeV/c}$

Observa-se uma boa concordância entre as curvas da seção de choque diferencial, dadas pelas fig. 27 a 33, e os dados experimentais, principalmente no intervalo $0 < -t \lesssim 1$. Para $-t \gtrsim 1$, as curvas da seção de choque diferencial a diferentes P_{lab} tem comportamento semelhante aos dados experimentais, contudo não apresentam uma boa concordância com os mesmos. Esta discrepância pode ser atribuída aos motivos citados na seção 5.2 e provavelmente aos erros que são introduzidos pelas aproximações dos métodos numéricos.

O cálculo das integrais 5.9 e 3.7 foi realizado através de integração numérica utilizando-se as sub-rotinas DOLAMF, S17AEF, S18ACF e S18ADF da NAG-Fortran [42]. A DOLAMF foi utilizada para resolver a integral, enquanto que as demais sub-rotinas para calcular as funções de Bessel envolvidas na integração.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho com a aplicação do modelo de Chou-Yang no espalhamento elástico π^-p , a partir de um ajuste numérico da amplitude de espalhamento com base nos dados experimentais, apresentaram boa concordância em relação a constante de absorção do modelo, fator de forma e raio quadrático médio.

Em relação a constante de absorção do modelo constatou-se uma ótima consistência entre o cálculo feito através dos parâmetros de ajuste e o cálculo pelo teorema ótico [Tabela 10].

O valor encontrado para o raio quadrático médio é concordante com os dados experimentais, dentro do limite de erro e também com alguns valores teóricos encontrados usando-se outros modelos.

Quanto ao fator de forma verificou-se um comportamento tipo dipolo, e através do mesmo proporcionou somente resultados razoáveis no cálculo da seção de choque diferencial já que não foi possível reproduzir o dip apresentado pelos dados experimentais [Fig. 27 a 33].

Apesar desses bons resultados obtidos com a aplicação do modelo de Chou-Yang no espalhamento π^-p , este apresenta certas dificuldades que não foram abordadas neste trabalho tal como a dependência explícita com a energia que é introduzida "ad hoc" na opacidade e de forma geral através de uma constante de absorção.

Um estudo teórico dessa dependência se faz necessário dentro de um contexto mais geral. Contudo, esse estudo requer uma análise fenomenológica mais aprofundada dos dados experimentais, o que implica analisar também o espalhamento elástico π^+p . Assim sendo o estudo dessa reação é uma consequência natural que provavel

mente apontará aspectos importantes a serem analisados na interação píon-próton, o qual será uma continuidade das pesquisas iniciadas neste trabalho.

APÊNDICE

O MÉTODO DE AJUSTE

Os parâmetros de ajuste, α_1 e β_1 , que aparecem na amplitude parametrizada foram determinados pelo método de mínimos quadrados de Ben Israel [28].

Neste apêndice apresenta-se uma breve descrição do mesmo.

Seja $f(x)$ uma função real obtida através de m dados experimentais:

x	x_1	x_2		x_m
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_m)$

Tabela 11

Querendo ajustar estes dados experimentais por uma função analítica conhecida $f(x, \lambda)$ sendo $\lambda \in R^n$, isto é a função depende de n parâmetros a serem determinados. Pode-se resolver este problema conseguindo um conjunto de parâmetros de forma que:

$$\min \sum_{i=1}^m \{ \tilde{f}(x_i, \lambda) - f(x_i) \}^2 = || \tilde{f}(x, \lambda) - f(x) ||^2 \quad (a.1)$$

sendo, $F_i(\lambda) = \tilde{f}(x_i, \lambda) - f(x_i)$, a função resíduo que é um critério de medida para a minimização do processo de ajuste e sendo o símbolo $|| \cdot ||$ a norma euclidiana.

De maneira geral pode-se escrever que se tem o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\lambda \in R^n} \{ || \vec{F}(\lambda) || \} \quad (a.2)$$

onde, $\vec{F}(\lambda) = [F_1(\lambda), F_2(\lambda), \dots, F_m(\lambda)]^T$

O MÉTODO DE BEN-ISRAEL

O método de Ben-Israel [28] consiste em resolver a cada interação um problema de quadrados mínimos lineares, utilizando para isto uma linearização da função $\vec{F}(\lambda)$ que é obtida através de uma expansão em uma série de Taylor em torno de uma aproximação inicial $\lambda^0 \in R^n$ até o termo de primeira ordem.

Expandindo-se $\vec{F}$ em série de Taylor como,

$$\vec{F}(\lambda) \equiv \vec{F}(\lambda^0) + (\partial F / \partial \lambda^1)_{\lambda^0} (\lambda - \lambda^0) + \dots + (\partial F / \partial \lambda^n)_{\lambda^0} (\lambda^n - \lambda_n^0)$$

e truncando a série no termo de primeira ordem tem-se

$$\vec{F}(\lambda) = \vec{F}(\lambda^0) + F'(\lambda^0) (\lambda^1 - \lambda^0) \quad (a.3)$$

onde, $F'(\lambda^0)$ é a Matriz Jacobiana, $(\partial F_i / \partial \lambda^j)_{mxn}$, de $\vec{F}(\lambda)$ e λ é o vetor, $\lambda = [\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n]^T$, dos parâmetros.

Após a linearização da função $\vec{F}(\lambda)$, substitui-se (a.3) em (a.2) de maneira que o problema resume-se na seguinte minimização.

$$\min_{\lambda \in R^n} \{ || \vec{F}(\lambda^0) + F'(\lambda^0) (\lambda - \lambda^0) ||^2 \} \quad (a.4)$$

Desta forma verifica-se que a solução de (a.1) é dada pela resolução do sistema (a.4) o qual consiste em encontrar um conjunto de parâmetros para $f(x_1,)$ de modo que a distância entre esta e o vetor de observação, $f(x_1)$, seja a menor possível.

Desta maneira a solução de (a.4) é equivalente a resolver o seguinte sistema.

$$F'(\lambda^0) (\lambda - \lambda^0) = - \overset{+}{F}(\lambda^0) \quad (a.5)$$

Dado λ^0 neste sistema obtem-se λ^1 e fazendo $\lambda^0 = \lambda^1$ tem-se um novo sistema cuja solução será λ^2 e repetindo isto pode-se obter novas estimativas para a solução deste sistema. Des-
te modo é possível descrever o seguinte processo iterativo para este método.

$F'(\lambda^K) \Delta\lambda^K = - \overset{+}{F}(\lambda^K), K = 0, 1, 2, \dots$ sendo $\Delta\lambda^K = \lambda^{K+1} - \lambda^K$
e λ^0 uma aproximação inicial conveniente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. G.GIACOMELLI, Rev.Del. Nuovo Cim.VII,N 3 (1970)
2. G.GIACOMELLI, Phys.Reports 23,123 (1976)
3. M.KAMRAN, Phys. Reports 108,275 (1984)
4. K.J.FOLEY ET AL, Phys.Rev. Lett.11,425-503 (1963)
D.HARTING ET AL, Il Nuov.Cim.38, 60 (1965)
S.BRANDT ET AL, Phys.Rev.Lett. 10,413 (1963)
5. C.BAGLIN ET AL, Phys.Lett.47B,85(1973)
V.CHAUBAUD ET AL, Phys.Lett.38B,441 (1972)
A.EIDE ET AL, Phys.Lett.38B, 441 (1970)
D.P.OWEN ET AL, Phys.Rev. 181,1794 (1969)
6. R.RUBINSTEIN ET AL, Phys.Rev.Lett.30,1010 (1973)
7. Z.ASA'D ET AL, Nucl.Phys., B255,273 (1985)
8. R.RUBINSTEIN ET AL, Phys.Rev.D30,1413 (1984)
9. S.GASIOROWICZ, "Física Quântica" (Guanabara Dois) (1979)
10. R.M.EISBERG, "Fundamentos da Física Moderna"(Guanabara Dois)(1979)
11. M.L.PERL, "High Energy Hadron Physics" (J.WILEY & S.,N.Y.,1974)
12. R.J.M.COVOLAN, Tese de Mestrado, IFGW-UNICAMP (1985)
13. S.FERNANBACH ET AL, ET AL, Phys.Rev.75,1352(1949)
14. U.AMALDI ET AL, AM.Rev.Phys. 26,385 (1976)
15. G.SZEGÖ, "Ortogonal Polynomials" (American Mathematical Society- Providence, R.Hode Island, 1975, p.195)
16. T.T.CHOU AND C.N.YANG, Phys.Rev. 170, 1591 (1968)
17. T.T.CHOU AND C.N.YANG, Phys.Rev.Lett.20,1213 (1968)
18. T.T.CHOU AND C.N.YANG, In "High Energy Physics and Nuclear Structure", (G.ALEXANDER, p.348-359, 1967)

19. H.B.NIELSEN e P.OLESEN, Phys.Lett. B43,37 (1973)
20. A.R.DZIERBA ET AL, Phys.Rev.D7,725 (1973)
21. Y.M.ANTIPOV ET AL, Sov.J.Nucl.Phys.V18,N 2 (1974)
22. C.W.AKERLLOF ET AL, Phys.Rev.D14,2854 (1976)
23. D.S.AYRES ET AL, Phys.Rev.D15, 3105 (1977)
24. A.SCHIZ ET AL, Phys. Rev. D24,26 (1981)
25. K.J.FOLEY ET AL, Phys. Rev.Lett.19,332 (1967)
26. S.P.DENISON ET AL, Phys.Lett 36B,528 (1971)
27. A.S.CARROL ET AL, Phys.Lett. 61B, 303 (1976)
28. A.B.ISRAEL, J.Math.Anal. Appl. 15,243 (1966)
29. I.S.GRADS HTEYN e I.M.RYZHIZ, "Table of Integrals, Series and Products" (Academic Press, Inc, 1980)
30. T.T.CHOU e C.N.YANG, Phys.Lett 128B,457 (1983)
31. E.LEADET ET AL, Phys.Rev.D14, 755 (1976)
32. F.HAYOT e O.P.SUKHATME, Phys.Rev.D10,2138 (1974)
33. C.BOURRELY ET AL, J.Phys. G3,295 (1977)
34. H.M.FRANÇA e Y.HAMA, Phys.Rev.D19,3261 (1979)
35. S.C.CHAN ET AL, Phys.Rev.D17,802 (1978)
36. H.CHENG e T.T.WU, Phys.Rev. Lett. 24, 1456 (1970)
37. A.B.PADUA, Tese de Mestrado, IFGW-UNICAMP (em andamento)
38. C.M.G.LATTES ET AL, NATURE 159,694 (1947)
39. C.M.G.LATTES ET AL, Nature 160,453-486 (1947)
40. C.M.G.LATTES ET AL, Phys.Soc.London 61,173-183 (1948)
41. E.GARDNER e C.M.G.LATTES, Science 107, 270-271 (1948)
42. NAG.FORTRAN LIBRARY MANUAL, The Numerical Algorithms Group(USA) Inc., Downets Grove Ill, 1978