



Vanessa Pacheco de Freitas

Discos Relativísticos Auto-Gravitantes: Aspectos de Estabilidade

Campinas,
2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA *Gleb Wataghin*

Vanessa Pacheco de Freitas

Discos Relativísticos Auto-Gravitantes: Aspectos de Estabilidade

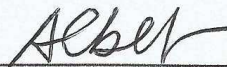
Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física *Gleb Wataghin* da UNICAMP para obtenção do título de Mestra em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação de mestrado defendida pela aluna Vanessa Pacheco de Freitas e orientada pelo Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa.



Alberto Vazquez Saa

Campinas,
5 de Abril de 2013

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

F884d Freitas, Vanessa Pacheco de, 1989-
Discos relativísticos auto-gravitantes : aspectos de
estabilidade / Vanessa Pacheco de Freitas. -- Campinas, SP :
[s.n.], 2013.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Discos auto-gravitantes. 2. Dipolos magnéticos.
3. Gutsunaev-Manko, Solução de (Física). 4. Relatividade
geral (Física). I. Saa, Alberto Vazquez, 1966-
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
"Gleb Wataghin". III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Self-gravitating relativistic disks : aspects of stability

Palavras-chave em inglês:

Self-gravitating disks

Magnetic dipoles

Gutsunaev-Manko, Solution (Physics)

General relativity (Physics)

Área de Concentração: Física

Titulação: Mestre em Física

Banca Examinadora:

Alberto Vazquez Saa [Orientador]

Javier Fernando Ramos Caro

Márcio José Menon

Data da Defesa: 05-04-2013

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **VANESSA PACHECO FREITAS – RA 072569** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 05 / 04 / 2013.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa - Orientador da Candidata
DMA/IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro – CCET/DF/UFSCar

Prof. Dr. Marcio José Menon – DRCC/IFGW/UNICAMP

Dedico este trabalho ao professor
Patricio Anibal Letelier Sotomayor.

Agradecimentos

Ao professor Alberto Saa pela orientação neste trabalho, por todo o apoio nos assuntos pertinentes à minha trajetória acadêmica e pela paciência nos meus momentos de insegurança.

Ao professor Patricio Letelier, que mesmo no pouco tempo de convívio, teve um papel importante no meu amadurecimento como Física.

À minha família, em especial aos meus pais Wantuil e Fátima por todos os bons exemplos transmitidos e ao meu irmão Cássio por lidar com minhas alterações de humor. Aos meus tios Hélio e Domingos pela preocupação e apoio desde o início.

Aos meus amigos Paulo Victor e Silvia por todas as prévias, sugestões e sessões terapêuticas, sem vocês esse trabalho nunca chegaria ao fim, Isabella e Tiago pelos momentos consumistas e fofocas, Ronaldo por todas as discussões sobre discos finos, Vinícius que sempre esteve disponível desde antes da graduação e demais amigos que contribuíram de alguma forma com esse trabalho ou que simplesmente estavam presentes.

Por fim agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Podemos utilizar o conhecido método “Deslocar, cortar e refletir” para construir soluções exatas das Equações de Einstein correspondentes à espaços-tempo com distribuições discoidais de matéria. Esse método consiste na introdução de uma descontinuidade na primeira derivada do tensor métrico. O resultado é uma solução com uma singularidade do tipo delta de Dirac na hipersuperfície $z = 0$. Nosso estudo se restringiu à discos finos estáticos utilizando as soluções de Schwarzschild e Gutsunaev-Manko, sendo esta a representação de um objeto massivo com configuração de campo magnético com simetria dipolar. Incluiu-se também o estudo da estabilidade da órbita de partículas-teste no disco, generalizando os critérios de estabilidade de Rayleigh e uma segunda análise para testar a estabilidade do disco através de uma perturbação no tensor energia-momento.

Abstract

We can use the well known “Displace, cut and reflect” method to construct exact solutions of Einstein Equations that correspond to space-times with disklike distribution of matter. This method consists on the introduction of a discontinuity in the first-order derivative of the metric tensor. The result is a solution with a singularity of the Dirac delta type in the hypersurface $z = 0$. Our study was restricted to static thin disks using Schwarzschild and Gutsunaev-Manko solutions, being the last the representation of a massive object with magnetic field configuration with dipolar symmetry. We include also the stability study of test-particles orbits at the disk, generalizing the Rayleigh criteria of stability and a second analysis to test the stability of the disk through a perturbation in the energy-momentum tensor.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos em Relatividade Geral	5
2.1	Equações Geodésicas	5
2.2	Método das Tétradas	6
2.3	Tensor Energia-Momento	7
2.4	Equações de Einstein	8
3	Solução de Schwarzschild e Gutsunaev-Manko	9
3.1	Solução de Schwarzschild	9
3.2	Solução de Gutsunaev-Manko	14
3.2.1	Equações de Einstein-Maxwell para o Dipolo Magnético	14
3.2.2	Solução das equações de Einstein-Maxwell para o caso do Dipolo Magnético	17
3.2.3	Estudo da Solução de Gutsunaev-Manko	21
3.2.4	Solução de Bonnor	23
4	O Método “Deslocar, Cortar e Refletir”	25
4.1	Gravidade Newtoniana	25
4.2	O Método das Imagens	27
4.3	Campos Tensoriais como Distribuições	28
4.4	O Método “Deslocar, Cortar e Refletir”	31

5	Análise da Estabilidade	38
5.1	Crítério de Rayleigh	38
5.1.1	Caso Newtoniano	38
5.1.2	Caso Relativístico	40
5.2	Estabilidade do Disco	41
5.2.1	Caso Geral	41
5.2.2	Disco Fino	44
5.3	Discos Finos com Pressões Radial e Azimutal	46
5.3.1	Caso 1: $P_r = P_\varphi$	46
5.3.2	Caso 2: $P_r \neq P_\varphi$	47
5.4	Discos Finos sem Pressão Radial	48
6	Aplicações do Método DCR	50
6.1	Métrica de Schwarzschild em Coordenadas Isotrópicas	50
6.2	Métrica de Schwarzschild em Coordenadas de Weyl	61
6.3	Métrica de Gutsunaev-Manko	65
6.3.1	Discos de Gutsunaev-Manko com $m = 0.5$ e $z_0 = 1.8$	65
6.3.2	Discos de Gutsunaev-Manko com $m = 0.5$ e $\alpha = 0.3$	70
6.3.3	Distribuição Superficial de Monopolos	73
6.3.4	Análise da Estabilidade	76
6.4	Métrica de Bonnor	80
6.4.1	Discos de Bonnor com $m = 0.5$ e $z_0 = 1.2$	80
6.4.2	Discos de Bonnor com $m = 0.5$ e $b = 0$	83
7	Conclusão	86
	Referências Bibliográficas	88

CAPÍTULO 1

Introdução

Grande parte das estrelas no universo se localizam em discos galáticos. Discos são em geral finos e planos, mas galáxias reais podem se afastar de seu plano principal em partes externas. Discos de galáxias geralmente manifestam padrões espirais, ou seja, contêm braços espirais, filamentos nos quais as estrelas estão sendo continuamente formadas. Mais da metade dos discos apresenta barras, que correspondem à uma faixa de estrelas que se estende para cada lado do núcleo, unindo-se ao braço espiral. A maioria das galáxias apresenta um bojo central e em certos casos um disco estelar grosso e geralmente uma pequena fração das estrelas se localizam em um halo estelar quase esférico [1]. O material da maioria dos discos orbita em um sentido único apesar de ter sido encontrado em uma fração das galáxias um número significativo de componentes contra-girantes. Acredita-se que discos estelares são formados pelos gases acumulados ao longo do tempo.

Soluções que representam o campo gravitacional de um corpo com simetria axial possuem papel importante tanto na teoria da gravitação de Newton como na teoria da gravitação de Einstein, já que a forma natural de um fluido isolado auto-gravitante, devido à conservação do momento angular, tem simetria axial. Os modelos relativísticos de discos, em particular, possuem um papel importante na astrofísica, pois podem servir para modelar galáxias ou disco de acreção [2, 3, 4, 5, 6]. Os campos gravitacionais de discos galáticos podem ser modelados através da teoria Newtoniana do potencial [7, 8], mas em situações nas quais a gravidade é suficientemente forte ou as velocidades envolvidas são suficientemente altas, faz-se necessário o

uso da teoria da Relatividade Geral. Discos podem ser usados também para modelar estruturas laminares e o seu estudo pode contribuir à compreensão das inomogeneidades de grande escala presentes no universo [9, 10, 11, 12].

Campos magnéticos possuem um papel importante no estudo de objetos astrofísicos como estrelas de nêutrons, anãs brancas, buracos negros, pulsares e formação de galáxias [13]-[15]. Um exemplo seria a presença de fortes campos magnéticos em núcleos ativos de galáxias. Esses núcleos produzem mais radiação que o resto da galáxia e afetam diretamente sua estrutura e evolução. Há, portanto, interesse astrofísico real em incorporar campo magnético em nossos estudos. Em particular a construção de discos finos estáticos a partir da solução de Gutsunaev-Manko, que representa um objeto massivo dotado de momento de dipolo magnético, será abordada. Essa solução pode ser comparada com a de Bonnor, também associada à um dipolo magnético, mas com o detalhe particularmente interessante de possuir como limite de dipolo nulo a solução de Schwarzschild.

Soluções axialmente simétricas das equações de Einstein correspondentes à configurações discoidais de matéria têm sido extensamente estudadas ao longo do anos. Tais soluções podem ser estáticas ou estacionárias, com ou sem pressão radial. Soluções que representam discos sem pressão radial foram estudadas inicialmente por Bonnor e Sackfield [16] e Morgan e Morgan [17, 18]. Diferentes autores têm apresentado soluções das equações de Einstein que representam discos finos com ou sem pressão radial [19]-[26]. Discos finos que podem ser considerados como fonte da métrica de Kerr foram apresentados em [27], e discos com rotação e fluxo de calor foram estudados em [28]. Também discos com tensão radial [29], campos magnéticos [30, 31] e campos magnéticos e elétricos foram considerados em [32]. Superposições não-lineares de um disco com um buraco negro foram inicialmente obtidas por Lemos e Letelier [22]. Discos de fluido perfeito com halos [33], disco de fluido perfeito carregado [34] e discos com halos na presença de campos magnéticos [35] também têm sido estudados. A referência [36] apresenta uma revisão sobre discos finos.

O estudo da estabilidade é vital para a aplicabilidade e para a validação dos diferentes

modelos de discos citados. Se aplicarmos à estruturas estelares diferentes tipos de perturbação, teremos informação sobre a formação de barras, anéis ou outros padrões, estáveis ou não. A criação de barras é o resultado de uma onda de densidade radiando do centro da galáxia alterando a órbita das estrelas internas. O efeito se transmite para estrelas em órbitas mais afastadas criando a estrutura similar a uma barra. Barras são consideradas fenômenos temporários na vida de uma galáxia espiral. A massa acumulada na barra compromete a estabilidade da estrutura, o que pode levar ao desacoplamento de uma segunda barra. Essa estrutura é a instabilidade predominante nos discos e a presença de um halo massivo auxilia na manutenção da estabilidade. Já a formação de anéis é um fenômeno de ressonância, devido à rotação da barra ou de perturbações não simétricas no movimento do gás do disco.

Em Relatividade Geral, a análise da estabilidade geralmente é feita estudando o movimento da partícula ao longo de geodésicas e isso pode ser feito generalizando o critério de estabilidade de Rayleigh [37] para o contexto de Relatividade Geral, (ver [38] para aplicações deste). Esse critério é válido apenas para partículas isoladas no disco e, portanto, é muito restrito. Podemos realizar uma análise mais extensa fazendo uma perturbação geral em primeira ordem nas componentes temporal, radial e azimutal do tensor energia-momento do fluido, observando o comportamento das equações de conservação perturbadas. A perturbação considerada não modifica a métrica de fundo obtida da solução das equações de Einstein, ou seja, são tratadas como “matéria teste”. A análise do movimento de partículas-teste eletricamente carregadas pode ser encontrada em [39].

Esta dissertação possui como principal foco o estudo de soluções do tipo disco e suas estabilidade, e está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos uma revisão dos conceitos em Relatividade Geral utilizados nos demais capítulos. No capítulo 3 apresentamos duas soluções exatas das equações de Einstein que constituem a base dos discos estudados nesse trabalho. No capítulo 4 discutimos o formalismo de campos tensoriais como distribuições, o que permite o cálculo das propriedades da matéria que constitui o disco a partir do tensor métrico. Estudamos também a geração de discos finos na teoria Newtoniana e detalhamos o método

para gerar discos finos a partir de uma determinada métrica. No capítulo 5 fazemos análises analíticas e numéricas da estabilidade de soluções de discos finos. No capítulo 6 apresentamos os resultados obtidos e fazemos alguns comentários sobre esses resultados. Finalmente, no capítulo 7 resumimos os pontos importantes do trabalho e fazemos as discussões finais.

CAPÍTULO 2

Conceitos Básicos em Relatividade Geral

A Relatividade Geral é formulada em um espaço de Riemann quadridimensional com o sistema de coordenadas descrito por x^μ , de modo que índices gregos assumem os valores 0,1,2,3 e índices repetidos são somados sobre esses valores [40]. Neste capítulo serão expostos alguns conceitos úteis em Relatividade Geral que utilizaremos nos tópicos subsequentes. Será utilizado o sistema de unidades naturais, nas quais $c = G = 1$.

2.1 Equações Geodésicas

Para descrever uma certa geometria em um espaço-tempo quadridimensional temos o elemento de linha geral:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

de modo que a trajetória seguida por uma partícula na ausência de forças atuando sobre ela é a geodésica e pode ser escrita generalizando a Segunda Lei de Newton para o caso em que não há nenhuma força externa ($d^2\vec{x}/dt^2 = \vec{0}$). A equação da geodésica é:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (2.2)$$

onde τ é o tempo próprio e $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ é o símbolo de Christoffel e pode ser representado por:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}), \quad (2.3)$$

e a vírgula denota a derivada parcial em relação à variável correspondente.

2.2 Método das Tétradas

Em cálculo tensorial muitas vezes é vantajoso utilizar uma base ortonormal, o que não é satisfeito pela base coordenada $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ na maioria dos casos. Introduzimos então uma base de tétradas de quatro quadrivetores linearmente independentes $e_{(a)}^\mu$. Para uma análise mais detalhada desse formalismo, veja [41, 42].

Definimos em cada ponto do espaço-tempo uma base de quatro vetores contravariantes,

$$e_{(a)}^\mu \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad (2.4)$$

onde a denota os índices da tétrada e μ os índices do tensor. Associados aos vetores contravariantes temos os vetores covariantes

$$e_{(a)\mu} = g_{\mu\nu} e_{(a)}^\nu. \quad (2.5)$$

Definimos a inversa $e^{(b)}_\mu$ da matriz $[e_{(a)}^\mu]$ (a numera as linhas e μ as colunas) de modo que:

$$e_{(a)}^\mu e^{(b)}_\mu = \delta^{(b)}_{(a)} \quad \text{e} \quad e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu}^\mu = \delta^\mu_\nu. \quad (2.6)$$

A base deve satisfazer ainda

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)}, \quad (2.7)$$

onde $\eta_{(a)(b)}$ é a matriz simétrica constante cujos elementos da diagonal são $(1, -1, -1, -1)$. A inversa de $\eta_{(a)(b)}$ é $\eta^{(a)(b)}$, de modo que

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(a)(c)} = \delta^{(b)}_{(c)}, \quad (2.8)$$

e com isso, podemos escrever

$$\eta_{(a)(b)} e_{(a)}^\mu = e_{(b)\mu}, \quad \eta^{(a)(b)} e_{(a)\mu} = e_{(b)\mu}^{(b)} \quad \text{e} \quad e_{(a)\mu} e_{(b)\nu}^\mu = g_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

A projeção de um vetor ou tensor na base de tétradas é dada por

$$\begin{aligned} A_{(a)} &= e_{(a)\mu} A^\mu = e_{(a)}^\mu A_\mu \\ A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)} A_{(b)} = e_{(b)\mu}^{(a)} A^\mu = e^{(a)\mu} A_\mu, \end{aligned} \quad (2.10)$$

ou de maneira mais geral,

$$T_{(a)(b)} = e_{(a)\mu} e_{(b)\nu} T^{\mu\nu} = e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu T_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

2.3 Tensor Energia-Momento

Distribuições contínuas de matéria em Relatividade Geral são descritas pelo tensor simétrico $T_{\mu\nu}$, o chamado tensor energia-momento. A componente temporal T^{00} corresponde à densidade de energia do fluido, as componentes T^{i0} à densidade de momento na direção x^i e T^{0i} ao fluxo de energia através da superfície x^i . Como $T^{\mu\nu}$ é simétrico, o fluxo de energia será igual à densidade de momento. Por fim, as componentes espaciais T^{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$) correspondem à i -ésima componente da força por unidade de área exercida através da superfície cuja normal está na direção x^j , ou seja, é a pressão. Para um fluido perfeito (um fluido sem viscosidade e sem condução de calor), o tensor energia-momento tem a forma

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}.$$

Diagonalizando, temos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \rho e_{(1)}^{\mu} e_{(1)}^{\nu} + P e_{(2)}^{\mu} e_{(2)}^{\nu} + P e_{(3)}^{\mu} e_{(3)}^{\nu} + P e_{(4)}^{\mu} e_{(4)}^{\nu} \\ &= (\rho + P) U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu} P, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde foi considerado $e_{(1)}^{\mu} = (U^{\mu}, 0, 0, 0)$.

Podemos utilizar o tensor energia-momento de um fluido perfeito para modelar matéria em diversas situações, dentro de estrelas de nêutrons, gás de galáxias e radiação cósmica de fundo, por exemplo [43]. O tensor energia-momento deve satisfazer ainda a relação

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (2.13)$$

chamada de conservação local do tensor energia-momento.

2.4 Equações de Einstein

As equações de Einstein, que relacionam curvatura com distribuição de matéria, podem ser escritas como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da fonte geradora do campo gravitacional, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que escrito em termo dos símbolos de Christoffel é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \quad (2.15)$$

e por fim, $\mathcal{R}$ é a contração do tensor de Ricci, também chamado de escalar de Ricci

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Note que $R_{\mu\nu}$ depende da derivada até segunda ordem de $g_{\mu\nu}$, dessa forma, as equações de Einstein são equivalentes à um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem não-lineares para as componentes da métrica. Para $T_{\mu\nu} = 0$, ou seja, em uma região sem fontes de campo gravitacional, temos as equações de Einstein no vácuo (ou soluções exteriores)

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

CAPÍTULO 3

Solução de Schwarzschild e Gutsunaev-Manko

Este capítulo será destinado à obtenção de duas soluções das Equações de Einstein, a solução de Schwarzschild nas coordenadas de Weyl, fundamental para objetos astrofísicos compactos e que será o limite assintótico da segunda solução de interesse: a solução de Gutsunaev-Manko, com a inclusão de campo magnético. Comentaremos também sobre a solução de Bonnor que representa um objeto dotado de dipolo magnético de modo a fazer uma comparação entre as soluções com campo magnético.

3.1 Solução de Schwarzschild

A maioria dos métodos para gerar soluções axialmente simétricas são aplicados usando as coordenadas canônicas de Weyl devido à sua propriedade de linearização parcial das equações de Einstein. Usando as coordenadas de Weyl (t, r, z, φ) , a métrica axialmente simétrica pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{1}{f} [e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2], \quad (3.1)$$

onde $f = f(r, z)$ e $\gamma = \gamma(r, z)$. As equações de Einstein no vácuo podem ser escritas de acordo com a Eq. (2.17).

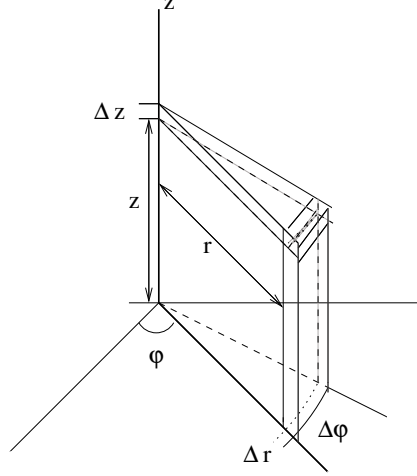


Figura 3.1: Coordenadas de Weyl

Usando a métrica (3.1), vemos que as equações de Einstein podem ser escritas como o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\gamma_{,r} = \frac{r}{4f^2}(f_{,r}^2 - f_{,z}^2), \quad (3.2)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{r}{2f^2}f_{,r}f_{,z}, \quad (3.3)$$

$$\gamma_{,rr} + \gamma_{,zz} = -\frac{1}{4f^2}(f_{,r}^2 + f_{,z}^2), \quad (3.4)$$

$$0 = \frac{f_{,r}}{rf} + \frac{(f_{,rr} + f_{,zz})}{f} - \frac{(f_{,r}^2 + f_{,z}^2)}{f^2}. \quad (3.5)$$

Pela condição de integrabilidade $\gamma_{,rz} = \gamma_{,zr}$ ou substituindo diretamente as equações (3.2-3.3) na equação (3.4), obtemos a relação:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{f} \vec{\nabla} f \right] = 0. \quad (3.6)$$

Lembrando que estamos utilizando coordenadas cilíndricas, logo $\vec{\nabla} \equiv \hat{r}\partial_r + \hat{z}\partial_z$. Vemos que apesar da não-linearidade das equações de Einstein, chegamos na equação (3.6), que pode ser

considerada linear se fizermos a mudança $f = e^U$. Com essa condição, a equação (3.6) assume a forma

$$\vec{\nabla}^2 U = 0. \quad (3.7)$$

Podemos ver que esta última relação corresponde à equação de Laplace. Uma vez conhecida a função métrica $f(r, z)$, a função $\gamma(r, z)$ é calculada por integração direta das equações (3.2) e (3.3).

A solução de Schwarzschild pode ser obtida resolvendo o sistema de equações, mas aqui faremos apenas a apresentação da solução de Schwarzschild por comparação entre a métrica de Weyl (3.1) e a métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas isotrópicas [44]. Para tal cálculo, primeiro transformamos a métrica de Weyl a coordenadas esferoidais prolatas e as esferoidais prolatas em esféricas. Esse procedimento é útil para simplificar a passagem de coordenadas axialmente simétricas para esféricas.

As coordenadas esferoidais prolatas x e y são definidas segundo a transformação [45]

$$\begin{aligned} r &= k\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - y^2} \\ z &= kxy, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde k = constante e (r, z) são as coordenadas de Weyl. A coordenada y se encontra no intervalo de $[-1, 1]$ e a coordenada x no intervalo $[1, \infty)$. As curvas para x constante são elipses e para y constante são hipérbolas no plano $r - z$, como mostrado na Fig. 3.2. Considere um ponto qualquer nesse plano, e d_1, d_2 são as distâncias do ponto até os focos F_1 e F_2 , respectivamente. A soma das duas distâncias é $d_1 + d_2 = 2kx$ e a diferença é $d_1 - d_2 = 2ky$, com os focos F_1 e F_2 localizados em $z = -k$ e $z = k$. Observe ainda que para valores muito grandes de x , $r \rightarrow x$, de modo que x pode ser aproximado pela coordenada radial.

Com isso, podemos reescrever a métrica de Weyl na forma

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{k^2}{f} e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left[\frac{dx^2}{(x^2 - 1)} + \frac{dy^2}{(1 - y^2)} \right] - \frac{k^2}{f} (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2. \quad (3.9)$$

Fazendo agora uma transformação de coordenadas do tipo esferoidais prolatas a esféricas, podemos comparar as componentes dessa métrica com as correspondentes da métrica de

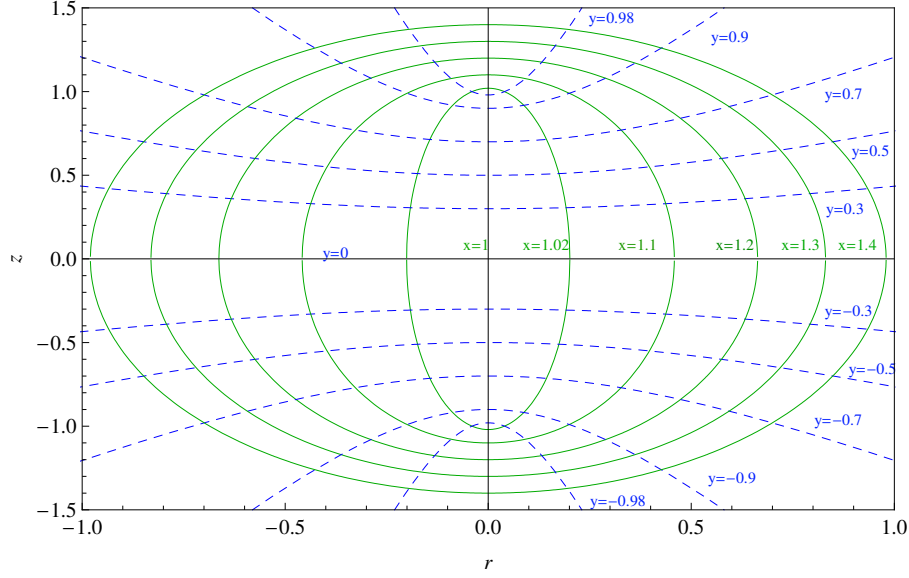


Figura 3.2: Coordenadas esferoidais prolatas para $k = 1$.

Schwarzschild. Para uma transformação da forma

$$x = u(R), \quad y = \cos \theta, \quad (3.10)$$

onde $u(R)$ deve ser determinado. A métrica de Weyl em coordenadas esféricas pode ser escrita utilizando essa transformação como:

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{k^2}{f} e^{2\gamma} (u^2 - \cos^2 \theta) \left[\frac{u_R^2 dR^2}{u^2 - 1} + d\theta^2 \right] - \frac{k^2}{f} (u^2 - 1) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.11)$$

Comparando agora as componentes dessa métrica com as componentes da métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.12)$$

obtemos que as seguintes relações devem ser satisfeitas

$$f = 1 - \frac{2m}{R} \quad (3.13)$$

$$\frac{k^2(u^2 - 1)}{f} = R^2 \quad (3.14)$$

$$\frac{k^2 e^{2\gamma}(u^2 - \cos^2 \theta)}{f} = R^2 \quad (3.15)$$

$$\frac{k^2 e^{2\gamma}(u^2 - \cos^2 \theta)}{(u^2 - 1)f} u_{,R}^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{-1}. \quad (3.16)$$

E isso nos permite transformar a métrica de Weyl na métrica de Schwarzschild se supormos que

$$x = \frac{1}{k}(R - m), \quad y = \cos \theta, \quad k = m. \quad (3.17)$$

Usando essa transformação, vemos que a solução de Schwarzschild escrita em coordenadas de Weyl é

$$f = \frac{x - 1}{x + 1} \quad (3.18)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}, \quad (3.19)$$

com $x \geq 1$ e $-1 < y < 1$.

Fazendo a transformação para coordenadas esferoidais prolatas, vemos que essas duas equações satisfazem as Eqs. (3.2)-(3.5). De fato, em coordenadas esferoidais prolatas a Eq. (3.6) pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{1}{f}(x^2 - 1)f_{,x}\right)_{,x} + \left(\frac{1}{f}(1 - y^2)f_{,y}\right)_{,y} = 0, \quad (3.20)$$

cujas soluções podem ser escritas via polinômios de Legendre de primeira e segunda espécie (P_n e Q_n) para o caso assintoticamente plano como

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(x) P_n(y). \quad (3.21)$$

Uma solução particular dessa equação é

$$f = (x - 1)^\lambda (x + 1)^{-\lambda}, \quad (3.22)$$

cujos caso $\lambda = 1$ corresponde à solução de Schwarzschild fora do horizonte, como mostrado por [46] e [47].

Da condição $x \geq 1$ temos que

$$x = \frac{R}{m} - 1 \geq 1 \rightarrow R \geq 2m, \quad (3.23)$$

mostrando que a solução é válida fora do horizonte de eventos.

A função $\gamma(x, y)$ pode ser calculada com as equações

$$\gamma_{,x} = \frac{1}{4f^2(x^2 - y^2)} [(x^2 - 1)(1 - y^2)(xf_{,x} - 2yf_{,y})f_{,x} - xf_{,y}^2(1 - y^2)^2], \quad (3.24)$$

$$\gamma_{,y} = \frac{1}{4f^2(x^2 - y^2)} [(x^2 - 1)(1 - y^2)(2xf_{,x} - yf_{,y})f_{,y} + yf_{,x}^2(x^2 - 1)^2]. \quad (3.25)$$

Assim chegamos a uma métrica com simetria esférica que representa a solução externa a um buraco negro estático e neutro. As coordenadas usuais são recuperadas quando feitas as transformações (3.17).

3.2 Solução de Gutsunaev-Manko

Nesta seção iremos derivar a solução de Gutsunaev-Manko, que representa um objeto massivo com dipolo magnético, a partir da solução de Weyl.

3.2.1 Equações de Einstein-Maxwell para o Dipolo Magnético

Problemas do tipo eletro-vácuo no contexto de Relatividade Geral são resolvidos por meio das equações de Einstein-Maxwell

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}^{(EM)}, \quad (3.26)$$

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = -4\pi J^\alpha = 0, \quad (3.27)$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é o tensor de Einstein, $T_{\alpha\beta}^{(EM)}$ é o tensor energia-momento eletromagnético associado ao sistema, $F^{\alpha\beta}$ é o tensor de Maxwell e J^α é a quadri-corrente. Igualamos a segunda equação à zero pois queremos estudar apenas o caso estático e no vácuo. Devido à anti-simetria do tensor de Maxwell, a Eq. (3.27) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0, \quad (3.28)$$

onde g é o determinante da métrica de Weyl

$$\sqrt{-g} = \frac{re^{2\gamma}}{f}. \quad (3.29)$$

Podemos calcular o tensor eletromagnético utilizando o quadri-potencial do campo eletromagnético, escolhido de acordo com o nosso interesse, que nesse caso é a manifestação de apenas características magnéticas, em particular do tipo dipolo magnético. Para esse caso é possível notar a existência de um eixo preferencial, o eixo do dipolo. Por isso utilizamos uma métrica com simetria axial como a (3.1).

De modo geral, para uma dada métrica $g_{\alpha\beta}$, o tensor energia-momento eletromagnético é dado por [40]:

$$T_{\alpha\beta}^{(EM)} = -\frac{1}{4\pi} \left[F_{\alpha\tau} F_{\beta}{}^{\tau} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right], \quad (3.30)$$

onde o tensor de Maxwell, $F_{\alpha\beta}$, é definido como

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}, \quad (3.31)$$

onde A_μ é o quadripotencial do campo eletromagnético. Para definir esse quadripotencial de forma a representar um dipolo magnético, consideramos que ele possui apenas componente angular [48]. Dessa forma, podemos escrever o quadripotencial como:

$$A_\mu = [0, 0, A_\varphi, 0], \quad (3.32)$$

com $A_\varphi = A_\varphi(r, z)$.

Com isso, o tensor de Maxwell pode ser escrito como:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{\varphi,r} & 0 \\ 0 & A_{\varphi,r} & 0 & A_{\varphi,z} \\ 0 & 0 & -A_{\varphi,z} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Utilizando as equações de Einstein-Maxwell (3.26), e sabendo que as componentes não-nulas do tensor de Einstein são

$$G_{tt} = -\frac{1}{4re^{2\gamma}}[5r(f_{,r}^2 + f_{,z}^2) - 4rf(f_{,rr} + f_{,zz}) + 4rf^2(\gamma_{,rr} + \gamma_{,zz}) - 4ff_{,r}], \quad (3.34)$$

$$G_{rr} = -G_{zz} = \frac{1}{4rf^2}[4f^2\gamma_{,r} + r(f_{,z}^2 - f_{,r}^2)], \quad (3.35)$$

$$G_{rz} = G_{zr} = \frac{1}{2rf^2}(2f^2\gamma_{,z} - rf_{,z}f_{,r}), \quad (3.36)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \frac{r^2}{4f^2e^{2\gamma}}[(f_{,r}^2 + f_{,z}^2) + 4f^2(\gamma_{,rr} + \gamma_{,zz})], \quad (3.37)$$

podemos obter as equações diferenciais para o caso do dipolo magnético no contexto de Relatividade Geral:

$$\gamma_{,r} = \frac{r}{4} \frac{(f_{,r}^2 - f_{,z}^2)}{f^2} + \frac{f}{r}(A_{\varphi,r}^2 - A_{\varphi,z}^2), \quad (3.38)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{r}{2} \frac{f_{,r}f_{,z}}{f^2} + \frac{2f}{r}A_{\varphi,r}A_{\varphi,z}, \quad (3.39)$$

$$\gamma_{,rr} + \gamma_{,zz} = -\frac{1}{4} \frac{(f_{,r}^2 + f_{,z}^2)}{f^2} + \frac{f}{r^2}(A_{\varphi,r}^2 + A_{\varphi,z}^2), \quad (3.40)$$

$$0 = \frac{f_{,rr} + f_{,zz}}{f} - \frac{(f_{,r}^2 + f_{,z}^2)}{f^2} + \frac{f_{,r}}{rf} - \frac{2f}{r^2}(A_{\varphi,r}^2 + A_{\varphi,z}^2). \quad (3.41)$$

Utilizando a condição de integrabilidade $\gamma_{,rz} = \gamma_{,zr}$, bem como substituindo as equações (3.38-3.39) na equação (3.40) e utilizando a equação (3.41), podemos obter o sistema de equações

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{f}{r^2} \vec{\nabla} A_{\varphi} \right) = 0, \quad (3.42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{f} \vec{\nabla} f - \frac{2f}{r^2} A_{\varphi} \vec{\nabla} A_{\varphi} \right) = 0, \quad (3.43)$$

e essas equações podem ser escritas também na forma

$$\left(\frac{f}{r}A_{\varphi,r}\right)_{,r} + \left(\frac{f}{r}A_{\varphi,z}\right)_{,z} = 0, \quad (3.44)$$

$$\left(\frac{r}{f}f_{,r} - \frac{2f}{r}A_{\varphi}A_{\varphi,r}\right)_{,r} + \left(\frac{r}{f}f_{,z} - \frac{2f}{r}A_{\varphi}A_{\varphi,z}\right)_{,z} = 0. \quad (3.45)$$

Calculando as componentes da quadri-corrente, vemos que $J^t = J^r = J^z = 0$ e para que todas as componentes sejam nulas, a componente J^φ deve satisfazer

$$\left(\frac{f}{r}A_{\varphi,r}\right)_{,r} + \left(\frac{f}{r}A_{\varphi,z}\right)_{,z} = 0. \quad (3.46)$$

Note que essa condição é justamente a Eq. (3.44), o que confirma que todas as componentes da quadri-corrente são nulas.

3.2.2 Solução das equações de Einstein-Maxwell para o caso do Dipolo Magnético

Para resolver o sistema de equações (3.42-3.43) (ou (3.44-3.45)), utilizamos as coordenadas esferoidais prolatas

$$r = k\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - y^2}, \quad z = kxy, \quad (3.47)$$

com [49]

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{k\sqrt{x^2 - y^2}} \left[\hat{x}\sqrt{x^2 - 1}\partial_x + \hat{y}\sqrt{1 - y^2}\partial_y \right] \quad (3.48)$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{k^2(x^2 - y^2)} \{ \partial_x [(x^2 - 1)\partial_x] + \partial_y [(1 - y^2)\partial_y] \}, \quad (3.49)$$

de modo que as equações (3.42-3.43) podem ser reescritas como

$$\left(\frac{f}{1 - y^2}A_{\varphi,x}\right)_{,x} + \left(\frac{f}{x^2 - 1}A_{\varphi,y}\right)_{,y} = 0, \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{(x^2 - 1)}{f}f_{,x} - \frac{2A_{\varphi}f}{k^2(1 - y^2)}A_{\varphi,x}\right)_{,x} + \left(\frac{(1 - y^2)}{f}f_{,y} - \frac{2A_{\varphi}f}{k^2(x^2 - 1)}A_{\varphi,y}\right)_{,y} = 0 \quad (3.51)$$

Para a substituição

$$\epsilon_1 = \sqrt{f} + \mathcal{A}_\varphi \quad \epsilon_2 = \sqrt{f} - \mathcal{A}_\varphi, \quad (3.52)$$

onde $\mathcal{A}_\varphi$ é relacionado ao potencial eletromagnético de modo que este satisfaça as equações de Maxwell automaticamente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\varphi,x} &= \frac{f A_{\varphi,y}}{k(x^2 - 1)}, \\ \mathcal{A}_{\varphi,y} &= -\frac{f A_{\varphi,x}}{k(1 - y^2)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Com a mudança para ϵ_1 e ϵ_2 , podemos reescrever as Eqs. (3.50) e (3.51) como

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2) \vec{\nabla}^2 \epsilon_1 = 2(\vec{\nabla} \epsilon_1)^2, \quad (3.54)$$

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2) \vec{\nabla}^2 \epsilon_2 = 2(\vec{\nabla} \epsilon_2)^2 \quad (3.55)$$

Se ϵ_1^0 e ϵ_2^0 são soluções das Eqs. (3.54) e (3.55), então essas equações também são satisfeitas por ϵ_1 e ϵ_2 dados por

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^0 - \frac{(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0)(1 - a)(1 - b)}{x(1 - ab) + y(b - a) + (1 - a)(1 - b)}, \quad (3.56)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^0 - \frac{(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0)(1 + a)(1 + b)}{x(1 - ab) + y(a - b) + (1 + a)(1 + b)}, \quad (3.57)$$

onde as funções a e b são definidas pelos seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} 2(x - y)(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0)a_{,x} &= 2aN_1^{(-)}(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0) + [(1 + a^2)N_1^{(-)} - (x - y)(1 - a^2)\partial_x](\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0), \\ 2(x - y)(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0)a_{,y} &= 2aN_2^{(-)}(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0) + [(1 + a^2)N_2^{(-)} - (x - y)(1 - a^2)\partial_y](\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0), \\ -2(x + y)(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0)b_{,x} &= 2bN_1^{(+)}(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0) + [(1 + b^2)N_1^{(+)} + (x + y)(1 - b^2)\partial_x](\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0), \\ -2(x + y)(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0)b_{,y} &= 2bN_2^{(+)}(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0) + [(1 + b^2)N_2^{(+)} + (x + y)(1 - b^2)\partial_y](\epsilon_1^0 - \epsilon_2^0), \end{aligned}$$

onde $N_1^\mp$ e $N_2^\mp$ são os operadores

$$N_1^\mp \equiv (xy \mp 1)\partial_x + (1 - y^2)\partial_y, \quad (3.58)$$

$$N_2^\mp \equiv -(x^2 - 1)\partial_x + (xy \mp 1)\partial_y. \quad (3.59)$$

Para a situação na qual $\mathcal{A}_\varphi = 0$, temos

$$\epsilon_1^0 = \epsilon_2^0 = \sqrt{f} = \exp(\psi), \quad (3.60)$$

onde ψ é qualquer solução da equação de Laplace. Podemos escolher ψ como

$$\psi = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \alpha(\alpha_n L_n) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.61)$$

onde L_n é o operador dado por

$$L_n = \left\{ \frac{y(x^2 - 1)\partial_x + x(1 - y^2)\partial_y}{(x^2 - y^2)} \right\}^n. \quad (3.62)$$

Assim, encontramos uma família de soluções das equações de Einstein-Maxwell

$$f = e^{2\psi} \left\{ 1 - \frac{2[x(1 - \alpha^4 a^2 b^2) + \alpha^2 y(b^2 - a^2) - \alpha^2(a - b)^2 + (1 - \alpha^2 ab)^2]}{[x(1 + \alpha^2 ab) + 1 - \alpha^2 ab]^2 - \alpha^2[y(a + b) + (a - b)]^2} \right\}^2 \quad (3.63)$$

$$\mathcal{A}_\varphi = \frac{2\alpha e^\psi [x(a - b)(1 + \alpha^2 ab) - y(a + b)(1 - \alpha^2 ab)]}{[x(1 + \alpha^2 ab) + 1 - \alpha^2 ab]^2 - \alpha^2[y(a + b) + (a - b)]^2}. \quad (3.64)$$

E o sistema de equações diferenciais para a e b pode ser reescrito como

$$a_{,x} = a \frac{(xy - 1)\psi_{,x} + (1 - y^2)\psi_{,y}}{x - y}, \quad (3.65)$$

$$a_{,y} = a \frac{-(x^2 - 1)\psi_{,x} + (xy - 1)\psi_{,y}}{x - y}, \quad (3.66)$$

$$b_{,x} = -b \frac{(xy + 1)\psi_{,x} + (1 - y^2)\psi_{,y}}{x + y}, \quad (3.67)$$

$$b_{,y} = -b \frac{-(x^2 - 1)\psi_{,x} + (xy + 1)\psi_{,y}}{x + y}. \quad (3.68)$$

Supondo que $\alpha_n = 0$, obtemos

$$a = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - y}, \quad (3.69)$$

$$b = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + y}, \quad (3.70)$$

e assim, ϵ_1 e ϵ_2 são

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \left[\frac{x^2 - y^2 + \alpha^2(x+1)^2 - 2\alpha y\sqrt{x^2-1}}{x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2 - 2\alpha y\sqrt{x^2-1}} \right], \quad (3.71)$$

$$\epsilon_2 = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \left[\frac{x^2 - y^2 + \alpha^2(x+1)^2 + 2\alpha y\sqrt{x^2-1}}{x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2 + 2\alpha y\sqrt{x^2-1}} \right]. \quad (3.72)$$

Assim,

$$\mathcal{A}_\varphi = \frac{8\alpha^2 xy(x-1)}{(x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2 - 4\alpha^2 y^2(x^2 - 1))} \quad (3.73)$$

$$f = \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \left[\frac{(x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1))^2 + 4\alpha^2 x^2(1 - y^2)}{(x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2 - 4\alpha^2 y^2(x^2 - 1))} \right] \quad (3.74)$$

e da Eq. (3.73) podemos escrever o potencial eletromagnético

$$A_\varphi = \frac{4k\alpha^3(1 - y^2)[2(1 + \alpha^2)x^3 + (1 - 3\alpha^2)x^2 + y^2 + \alpha^2]}{(1 + \alpha^2)[(x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1))^2 + 4\alpha^2 x^2(1 - y^2)]}. \quad (3.75)$$

Podemos escrever ainda a função métrica γ em termos de ϵ_1 e ϵ_2

$$\gamma_{,x} = 4(1 - y^2) \frac{[x(x^2 - 1)\epsilon_{1,x}\epsilon_{2,x} - x(1 - y^2)\epsilon_{1,y}\epsilon_{2,y} - y(x^2 - 1)(\epsilon_{1,x}\epsilon_{2,y} + \epsilon_{1,y}\epsilon_{2,x})]}{(x^2 - y^2)(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad (3.76)$$

$$\gamma_{,y} = 4(x^2 - 1) \frac{[y(x^2 - 1)\epsilon_{1,x}\epsilon_{2,x} - y(1 - y^2)\epsilon_{1,y}\epsilon_{2,y} + x(1 - y^2)(\epsilon_{1,x}\epsilon_{2,y} + \epsilon_{1,y}\epsilon_{2,x})]}{(x^2 - y^2)(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad (3.77)$$

Finalmente,

$$e^{2\gamma} = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right) \frac{[(x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1))^2 + 4\alpha^2 x^2(1 - y^2)]^4}{(1 + \alpha^2)^8(x^2 - y^2)^8}. \quad (3.78)$$

3.2.3 Estudo da Solução de Gutsunaev-Manko

De acordo com a Eq. (3.9) podemos escrever a métrica de Gutsunaev-Manko em coordenadas esferoidais prolatas

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{k^2}{f} e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left[\frac{dx^2}{(x^2 - 1)} + \frac{dy^2}{(1 - y^2)} \right] - \frac{k^2}{f} (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2. \quad (3.79)$$

Fazendo a transformação de coordenadas

$$x = \frac{1}{k}(R - m), \quad y = \cos \theta, \quad (3.80)$$

podemos verificar o comportamento assintótico de f , e γ para grandes distâncias ($R \rightarrow \infty$), e para tal análise é conveniente fazer uma expansão em séries de potências de R^{-1} . Dessa forma:

$$f = 1 - \frac{2(1 - 3\alpha^2)k}{(1 + \alpha^2)R} + \mathcal{O}(R^{-2}), \quad (3.81)$$

$$e^{2\gamma} = 1 - \frac{k^2 \sin^2 \theta (1 - 3\alpha^2)^2}{(1 + \alpha^2)R^2} + \mathcal{O}(R^{-3}), \quad (3.82)$$

Podemos ver das equações acima, que para Schwarzschild ser nosso limite assintótico,

$$k = \frac{m(1 + \alpha^2)}{(1 - 3\alpha^2)} \quad (3.83)$$

E para grandes distâncias temos que

$$f = 1 - \frac{2m}{R} + \mathcal{O}(R^{-3}), \quad (3.84)$$

$$e^{2\gamma} = 1 + \mathcal{O}(R^{-2}). \quad (3.85)$$

Fazendo o mesmo para o potencial eletromagnético

$$A_\varphi = \frac{8m^2 \alpha^3 \sin^2 \theta}{(1 - 3\alpha^2)^2 R} + \frac{12m^3 \alpha^3 \sin^2 \theta}{(1 - 3\alpha^2)^2 R^2} + \mathcal{O}(R^{-3}). \quad (3.86)$$

Podemos ver que a forma assintótica para o potencial eletromagnético é do tipo dipolar magnético, de modo que podemos definir o momento magnético (μ) como

$$\mu = \frac{8m^2\alpha^3}{(1-3\alpha^2)^2}, \quad (3.87)$$

e assim,

$$A_\varphi = \frac{\mu \sin^2 \theta}{R} + \mathcal{O}(R^{-2}). \quad (3.88)$$

Note que para $\alpha = 0$ recuperamos a solução de Schwarzschild.

Para que a solução de Gutsunaev-Manko possua um horizonte de eventos, assim como a solução de Schwarzschild, precisamos que x satisfaça

$$x = \frac{1}{k}(R - m) \geq 1 \rightarrow R \geq k + m. \quad (3.89)$$

Substituindo k

$$R \geq \frac{2m(1 - \alpha^2)}{(1 - 3\alpha^2)}. \quad (3.90)$$

Para $\alpha = 0$ retomamos o raio de Schwarzschild. Note ainda, que para garantir que a solução seja válida fora do horizonte, o parâmetro α deve satisfazer:

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.91)$$

E finalmente, podemos escrever o elemento de linha que descreve o campo gravitacional exterior de uma massa dotada de momento de dipolo magnético na forma

$$\begin{aligned} d^2 = & f dt^2 - \frac{1}{f} \left\{ e^{2\gamma} \left[(R - m)^2 - \frac{m^2(1 + \alpha^2)^2}{(1 - 3\alpha^2)^2} \cos^2 \theta \right] \left[\left((R - m)^2 - \frac{m^2(1 + \alpha^2)^2}{(1 - 3\alpha^2)^2} \right)^{-1} dR^2 + d\theta^2 \right] \right. \\ & \left. - \left((R - m)^2 - \frac{m^2(1 + \alpha^2)^2}{(1 - 3\alpha^2)^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

com

$$f = \left(1 - \frac{2m(1 + \alpha^2)}{(1 - 3\alpha^2)R + 4m\alpha^2} \right) \frac{M^2}{N^2}, \quad (3.93)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{[(1 - 3\alpha^2)^2(R - m)^2 - m^2(1 + \alpha^2)^2]M^4}{[(1 - 3\alpha^2)^2(R - m)^2 - m^2(1 + \alpha^2)^2 \cos^2 \theta]^9}. \quad (3.94)$$

E o potencial nessas novas coordenadas

$$A_\varphi = \frac{4m^2\alpha^3 P \sin^2 \theta}{(1 - 3\alpha^2)M}, \quad (3.95)$$

onde

$$\begin{aligned} M &= [(1 - 3\alpha^2)^2(R - m)^2 - m^2(1 + \alpha^2)(\alpha^2 + \cos^2 \theta)]^2 \\ &\quad + 4m^2\alpha^2(1 - 3\alpha^2)^2(R - m)^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} N &= [(1 - 3\alpha^2)(R - m) - m\alpha^2]^2 + m^2[\alpha^2 - (1 + \alpha^2) \cos^2 \theta]^2 \\ &\quad - 4m^2\alpha^2[(1 - 3\alpha^2)^2(R - m)^2 - m^2(1 + \alpha^2)^2] \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$P = (1 - 3\alpha^2)^3(2R - m)(R - m)^2 + m^3(1 + \alpha^2)^2(\alpha^2 + \cos^2 \theta). \quad (3.98)$$

Observe que o resultado obtido na Eq. (3.93) difere de um sinal no denominador do resultado apresentado por Gutsunaev e Manko no trabalho [50], onde foi constatado um pequeno erro na transformação para as coordenadas (R, θ) .

3.2.4 Solução de Bonnor

Bonnor derivou uma solução especial das equações de Einstein-Maxwell partindo da solução estacionária de Kerr, de modo a obter uma fonte massiva estática dotada de momento de dipolo magnético [51]. A solução obtida por Bonnor foi:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{P}{Y}\right)^2 dt^2 - \frac{Y^2 P^2}{Q^3 Z} (dR^2 + Z d\theta^2) - \frac{ZY^2}{P^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ A &= (0, 0, 0, A_\varphi) = \left(0, 0, 0, \frac{2mbR \sin^2 \theta}{P}\right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde

$$P = R^2 - 2mR - b^2 \cos^2 \theta, \quad (3.100)$$

$$Q = (R - m)^2 - (b^2 + m^2) \cos^2 \theta,$$

$$Y = R^2 - b^2 \cos^2 \theta,$$

$$Z = R^2 - 2mR - b^2.$$

A solução é assintoticamente plana e para $m = 0$ a solução é plana. Essa solução é caracterizada por duas constantes arbitrárias, m e b relacionadas à massa da fonte $M = 2m$ e ao momento de dipolo magnético $\mu = 2mb$, obtidos a partir do comportamento assintótico de g^{tt} e A , respectivamente. A solução de Bonnor pode ser interpretada como dois polos magnéticos de força $-m$ e m situados no eixo de simetria e separados pela distância $2b$.

Para $b = 0$, ou seja, eliminando o momento de dipolo magnético, a métrica se torna

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{R}\right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{R^2}\right)^{-3} [dR^2 + (R - 2mR)d\theta^2] \\ & - R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{-1} d\varphi^2. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Mesmo representado a solução para um dipolo magnético, a solução de Bonnor se diferencia da solução de Gutsunaev-Manko uma vez que, ao se anular o momento de dipolo magnético, esta se reduz à solução de Schwarzschild, enquanto a primeira se refere a um monopolo de massa $2m$ adicionado de termos de multipolos com massas maiores. Ainda assim a solução de Bonnor tem sido amplamente estudada, como pode ser visto por exemplo em [52] e mesmo sendo de utilidade puramente teórica, essa solução pode ser útil para inserir a análise do movimento de partículas sujeitas ao dipolo magnético de Bonnor e do aparecimento de caos em Relatividade Geral [53].

CAPÍTULO 4

O Método “Deslocar, Cortar e Refletir”

Neste capítulo será feito um resumo da teoria da gravitação Newtoniana, em especial a geração de soluções exatas da equação de Poisson que representam discos finos. Uma revisão do método das imagens da eletrostática e uma breve apresentação do formalismo de Lichnerowicz para o tratamento de campos tensoriais como distribuições serão apresentadas. Após essas revisões introduziremos o método “deslocar, cortar e refletir” para construção de discos finos em Relatividade Geral.

4.1 Gravidade Newtoniana

Na teoria da gravitação de Newton, podemos escrever a equação para uma partícula que interage com outras através da equação de Poisson para o potencial $\Phi(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi\rho, \quad (4.1)$$

onde $\rho(x, y, z)$ é a distribuição de massa das partículas e a equação de movimento é

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad \text{com } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \quad (4.2)$$

Para $\rho = 0$, ou seja, quando a partícula se encontra em uma região sem outras massas, a equação de Poisson se reduz à equação de Laplace

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 0. \quad (4.3)$$

Soluções da equação de Poisson que representam discos finos podem ser construídas à partir de soluções da equação de Laplace usando uma variação do método das imagens [54], como mostrado na Figura (4.3).

Como exemplo, tomemos o potencial associado a uma partícula pontual:

$$\Phi = -\frac{m}{R}. \quad (4.4)$$

Primeiro desloque a partícula para a posição $z = -z_0$. Então o plano $z = 0$ divide o espaço tridimensional em duas partes: a inferior, que contém a massa pontual e a superior, sem a massa. Façamos uma reflexão no plano $z = 0$ da parte sem a massa.

Esse procedimento é equivalente a fazer a transformação [55]

$$z \rightarrow z_0 + |z|. \quad (4.5)$$

O potencial do disco resultante é

$$\Phi = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + (z_0 + |z|)^2}}. \quad (4.6)$$

A densidade superficial adotada pode ser calculada com a equação de Poisson, lembrando que $|z|_{,z} = 2\theta(z) - 1$ e $|z|_{,zz} = 2\delta(z)$, onde $\theta(z)$ é a função de Heaviside e $\delta(z)$ é a função delta de Dirac:

$$\sigma(r) = \frac{mz_0}{2\pi(r^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (4.7)$$

O gráfico de σ/m da Figura 4.1 indica que o disco possui uma concentração de massa central que decai rapidamente com a distância. Quanto menor z_0 , maior é o máximo da densidade.

Outras soluções da equação de Laplace podem ser obtidas usando o princípio da superposição. Devido à linearidade da equação de Laplace uma soma de soluções desta equação também é solução. A superposição dos potenciais associados a um disco e uma massa pontual pode ser escrita como:

$$\Phi = -\frac{M}{R} - \frac{m}{\sqrt{r^2 + (z_0 + |z|)^2}} \quad (4.8)$$

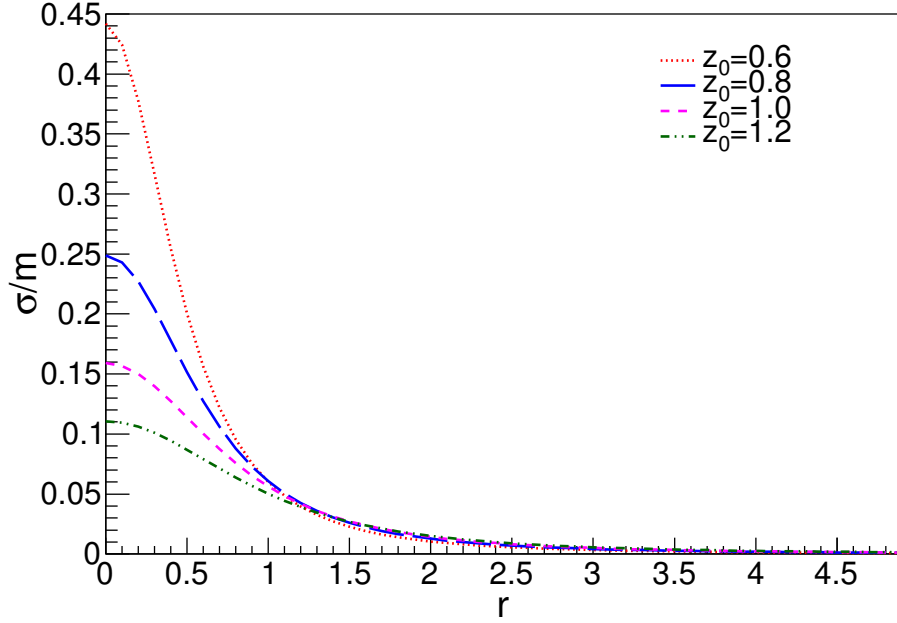


Figura 4.1: Gráfico de σ/m para o disco Newtoniano com parâmetros $z_0 = 0.6$ (máximo superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (máximo inferior)

e pode ser usada para representar a gravidade de um núcleo atrativo de massa M localizado no centro de um disco fino de massa m . Em outras palavras, um modelo simples de galáxia com um objeto central.

4.2 O Método das Imagens

O método das imagens na eletrostática é aplicado para cargas pontuais na presença de condutores aterrados ou em um potencial fixo [56]. Considere que uma carga pontual q é mantida à uma distância d sobre um plano condutor infinito aterrado (Fig. 4.2a). Queremos saber qual é o potencial na região acima do plano. Para resolver esse problema, considere a configuração em que uma carga imagem $-q$ é colocada diametralmente oposta à q , de modo que qualquer indução de cargas no plano por q será cancelada pelas cargas induzidas por $-q$ (Fig. 4.2b).

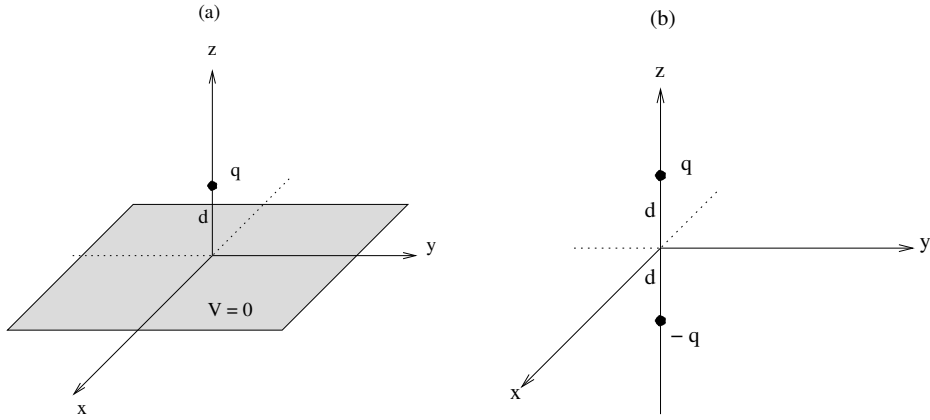


Figura 4.2: Ilustração do método das imagens. (a) Carga puntual na presença de um condutor aterrado. (b) Carga puntual e carga imagem, à mesma distância d do plano $z = 0$

Nessa nova configuração não temos mais a intervenção do plano infinito.

Dessa forma o potencial pode ser escrito como [57]

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right], \quad (4.9)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo.

Temos ainda que

$$\begin{cases} V = 0, & \text{se } z = 0 \\ V \rightarrow 0, & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.10)$$

4.3 Campos Tensoriais como Distribuições

Vamos seguir aqui o desenvolvimento feito em [58]. Se T, U são dois campos tensoriais definidos sobre o espaço-tempo Ω , denotaremos como (T, U) seu produto escalar no ponto $x \in \Omega$. Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço de campos tensoriais com suporte compacto e uma classe de diferenciabilidade determinada. Uma distribuição tensorial T é um funcional linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ definido como [59]:

$$\langle T, U \rangle = \int_{\Omega} (T, U) \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.11)$$

com $U \in \mathcal{D}(\Omega)$ e T é um campo tensorial localmente somável.

Seja Σ uma hipersuperfície em Ω descrita pela equação

$$\phi(x^a) = z = 0, \quad (4.12)$$

onde ϕ é uma função suave das coordenadas x^a , e pelo vetor normal

$$n_a = \phi_{,a} = \delta_a^z \quad (4.13)$$

e a última igualdade é válida para o caso de discos finos.

A hipersuperfície Σ divide o espaço tempo em duas partes, $\Omega^+ = x^a : z > 0$ e $\Omega^- = x^a : z < 0$, de tal forma que se pode introduzir a função de Heaviside $\theta(z)$, definida como

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z > 0 \\ 1/2, & \text{se } z = 0. \\ 0, & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Além disso, podemos escrever a primeira derivada da função de Heaviside como $\theta_{,a} = \delta_a^z \delta(z)$, onde $\delta(z)$ é a função delta de Dirac com suporte sobre a hipersuperfície Σ .

Assim, para toda função F

$$\int_{\Omega} F \delta(z) \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Sigma} F dV \quad (4.15)$$

onde dV é o elemento de volume invariante induzido sobre a hipersuperfície Σ .

Segue então, da definição de θ , que para todo campo tensorial $U(x)$ definido sobre Ω [60, 61]

$$\begin{aligned} \langle \theta(1 - \theta), U(x) \rangle &= \int_{\Omega} U(x) \theta(1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{\Omega^+} U(x) (1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
\langle \theta^2, U(x) \rangle &= \int_{\Omega} U(x) \theta^2 \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= \int_{\Omega^+} U(x) \theta \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= \int_{\Omega^+} U(x) \sqrt{-g} \, d^4x.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\langle (1 - \theta)^2, U(x) \rangle &= \int_{\Omega} U(x) (1 - \theta)^2 \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= \int_{\Omega^+} U(x) (1 - \theta) \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= \int_{\Omega^-} U(x) \sqrt{-g} \, d^4x.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\langle \theta \delta(z), U(x) \rangle &= \int_{\Omega} U(x) \theta \delta(z) \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= U(x) \theta|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2} U(x)|_{\Sigma}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\langle (1 - \theta) \delta(z), U(x) \rangle &= \int_{\Omega} U(x) (1 - \theta) \delta(z) \sqrt{-g} \, d^4x \\
&= U(x) (1 - \theta)|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2} U(x)|_{\Sigma},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

o que prova, no sentido de distribuições, as identidades

$$\begin{aligned}
\theta(1 - \theta) &= 0 \\
\theta^2 &= \theta \\
(1 - \theta)^2 &= (1 - \theta) \\
(1 - \theta) \delta(z) &= \theta \delta(z) = \frac{1}{2} \delta(z).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Se um campo tensorial definido em Ω tal que T e suas derivadas possuem descontinuidades finitas através de Σ , podem ser definidas distribuições em termos de T na forma

$$(T)^D = T^+ \theta + T^- (1 - \theta) \quad (4.22)$$

e em termos da derivada de T , ou seja $(T_{,a})$

$$(T_{,a})^D = T_{,a}^+ \theta + T_{,a}^- (1 - \theta), \quad (4.23)$$

de modo que

$$T = \begin{cases} T^+, & \text{em } \Omega^+ \\ T_\Sigma = \frac{1}{2}(T^+ + T^-), & \text{em } \Sigma. \\ T^-, & \text{em } \Omega^- \end{cases} \quad (4.24)$$

Usando as identidades demonstradas acima, podemos provar que

$$(T)^D_{,a} = (T_{,a})^D + [T] \delta_a^z \delta(z), \quad (4.25)$$

$$(TU)^D = (T)^D (U)^D, \quad (4.26)$$

$$[TU] = U_\Sigma [T] + [U] T_\Sigma, \quad (4.27)$$

onde $[T]$ é o salto de T através de Σ , definido como:

$$[T] = T^+|_\Sigma - T^-|_\Sigma. \quad (4.28)$$

4.4 O Método “Deslocar, Cortar e Refletir”

O método “deslocar, cortar e refletir” (DCR) pode ser aplicado para a construção de discos finos à partir de dadas soluções das equações de Einstein. Podemos separar o método de acordo com os seguintes passos. Primeiramente escolhemos uma superfície que divide o espaço contendo uma fonte gravitacional compacta em dois. No nosso caso tomaremos o plano $z = 0$, de modo que uma parte contém a singularidade e a outra não.

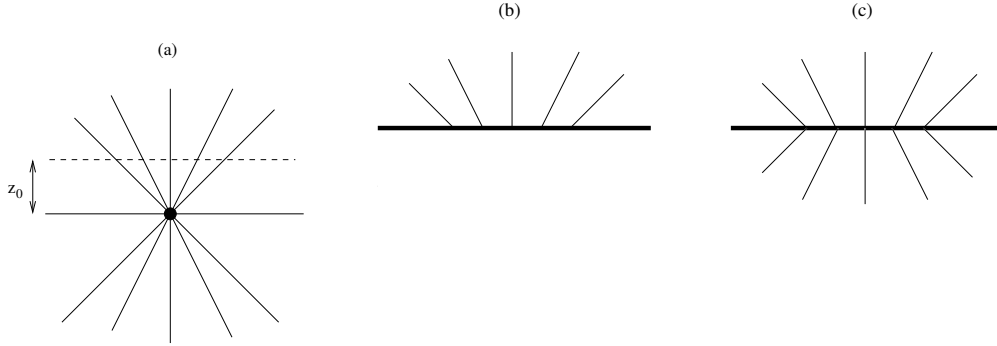


Figura 4.3: Representação do método “deslocar, cortar e refletir”. (a) Superfície divide o espaço em duas partes (linha tracejada). (b) Elimina-se a parte com a singularidade. (c) Reflete-se o campo da região sem a singularidade no plano.

Em segundo lugar, descartamos a parte do espaço com a fonte e por fim utilizamos o plano para fazer a inversão da parte não-singular [62]. Na (Fig. 4.3) temos esse procedimento esquematizado para o campo gravitacional de uma massa puntual.

O resultado desse método será o espaço com uma singularidade que é uma função delta com suporte na superfície $z = 0$ [63]. Esse procedimento equivale a fazer a transformação matemática $z \rightarrow |z| + z_0$ a um potencial gravitacional, onde z_0 é uma constante positiva.

Nosso disco, que está localizado em $z = 0$, divide a região Ω do espaço-tempo em duas partes, Ω^+ e Ω^- onde $z > 0$ e $z < 0$, respectivamente.

Assume-se que o tensor métrico é contínuo através de $z = 0$, ou seja,

$$[g_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu} |_{z=0^+} - g_{\mu\nu} |_{z=0^-} = 0. \quad (4.29)$$

Nas vizinhanças de $z = 0$ podemos expandir $g_{\mu\nu}$ como:

$$g_{\mu\nu}^{\pm} = g_{\mu\nu}^0 + z g_{\mu\nu,z}^{\pm} + \frac{1}{2} z^2 g_{\mu\nu,zz}^{\pm} + \dots, \quad (4.30)$$

onde os sinais $\pm$ referem-se à expansão acima e abaixo do disco, respectivamente e $g_{\mu\nu}^0$ corresponde ao valor de $g_{\mu\nu}$ em $z = 0$.

As discontinuidades na derivada primeira do tensor métrico podem ser caracterizadas pelo tensor $b_{\mu\nu}$, como:

$$b_{\mu\nu} \equiv [g_{\mu\nu,z}] = g_{\mu\nu,z}^+|_{z=0} - g_{\mu\nu,z}^-|_{z=0}. \quad (4.31)$$

O tensor métrico é construído de forma a possuir simetria de reflexão em relação ao plano $z = 0$, ou seja,

$$g_{\mu\nu}^-(r, z) = g_{\mu\nu}^+(r, -z). \quad (4.32)$$

Isso implica que, para $z \neq 0$, $g_{\mu\nu,z}^-(r, z) = -g_{\mu\nu,z}^+(r, -z)$ e da Eq. (4.31) temos no limite de $z \rightarrow 0$

$$b_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu,z}|_{z=0}, \quad (4.33)$$

onde definimos $g_{\mu\nu,z}|_{z=0} = g_{\mu\nu,z}^+|_{z=0}$.

Podemos introduzir a agora a função de Heaviside (Eq. (4.14)) e, no sentido de distribuições, podemos expressar os símbolos de Christoffel como:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)^D = \theta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu+} + (1 - \theta)\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu-}. \quad (4.34)$$

Derivando a Eq. (4.34) temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda,\alpha}^\mu &= (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)^D + (\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu+} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu-})\theta_{,\alpha} \\ &= (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu)^D + (\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu+} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu-})\delta_\alpha^z\delta(z) \\ &= (\Gamma_{\nu\lambda,\alpha}^\mu)^D + [\Gamma_{\nu\lambda}^\mu]\delta_\alpha^z\delta(z), \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $\delta(z)$ é a distribuição de Dirac com suporte em $z=0$ e a discontinuidade dos símbolos de Christoffel em $z = 0$ pode ser escrita como:

$$[\Gamma_{\nu\lambda}^\mu] \equiv \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu+} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu-} = \frac{1}{2}(\delta_\nu^z b_\lambda^\mu + \delta_\lambda^z b_\nu^\mu - g^{z\mu} b_{\nu\lambda}). \quad (4.36)$$

Podemos definir agora as distribuições em função do tensor de Riemann

$$R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} = (R^\sigma_{\alpha\gamma\beta})^D + H^\sigma_{\alpha\gamma\beta}\delta(z), \quad (4.37)$$

onde $(R^\sigma_{\alpha\gamma\beta})^D = \theta R^{\sigma+}_{\alpha\gamma\beta} - (1 - \theta) R^{\sigma-}_{\alpha\gamma\beta}$ e

$$\begin{aligned} H^\sigma_{\alpha\gamma\beta} &= [\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}]\delta^\gamma_z - [\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}]\delta^\beta_z \\ &= (\Gamma^{\sigma+}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma-}_{\alpha\beta})\delta^\gamma_z - (\Gamma^{\sigma+}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\sigma-}_{\alpha\gamma})\delta^\beta_z \\ &= \frac{1}{2}(\delta^\gamma_z \delta^\beta_z b^\sigma_\beta + \delta^\beta_z \delta^\gamma_z b^\sigma_\alpha - g^{z\sigma} \delta^\gamma_z b_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_z \delta^\beta_z b^\sigma_\gamma - \delta^\beta_z \delta^\gamma_z b^\sigma_\alpha + g^{z\sigma} \delta^\beta_z b_{\alpha\gamma}) \\ &= \frac{1}{2}(\delta^\gamma_z \delta^\beta_z b^\sigma_\beta - g^{z\sigma} \delta^\gamma_z b_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_z \delta^\beta_z b^\sigma_\gamma + g^{z\sigma} \delta^\beta_z b_{\alpha\gamma}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Escreve-se ainda o tensor energia-momento com a forma

$$T_{\alpha\beta} = (T_{\alpha\beta})^D + Q_{\alpha\beta}\delta(z) \quad (4.39)$$

e as Equações de Einstein ficam:

$$R^\pm_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R^\pm = 8\pi T^\pm_{\alpha\beta}, \quad (4.40)$$

$$H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}H = 8\pi Q_{\alpha\beta}, \quad (4.41)$$

com $H_{\alpha\beta} = H^\sigma_{\alpha\sigma\beta}$ e $H = H^\gamma_\gamma$.

Se a solução das Eq. (4.40) forem conhecidas fora do disco, pode-se utilizar (4.41) para calcular as componentes do tensor energia-momento da matéria do disco. Da Eq. (4.38), obtemos:

$$Q^\alpha_\beta = \frac{1}{16\pi} [b^{z\alpha} \delta^\alpha_\beta - b^{zz} \delta^\alpha_\beta + g^{z\alpha} b^\alpha_\beta - g^{zz} b^\alpha_\beta + b^\sigma_\sigma (g^{zz} \delta^\alpha_\beta - g^{z\alpha} \delta^\alpha_\beta)] \quad (4.42)$$

Seguimos agora o raciocínio apresentado por [64]. Considere uma métrica estática geral da forma:

$$ds^2 = g_{tt}(r, z)dt^2 + g_{rr}(r, z)dr^2 + g_{\varphi\varphi}(r, z)d\varphi^2 + g_{zz}(r, z)dz^2. \quad (4.43)$$

Vemos que nesse caso o tensor energia-momento Q^α_β será diagonal. Definindo a base ortonormal de tétradas:

$$\begin{aligned} e_{(t)}^\alpha &= \left(\frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}, 0, 0, 0 \right), & e_{(r)}^\alpha &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{-g_{rr}}}, 0, 0 \right), \\ e_{(\varphi)}^\alpha &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{-g_{\varphi\varphi}}}, 0 \right), & e_{(z)}^\alpha &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{-g_{zz}}} \right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

de forma que o tensor energia-momento pode ser expresso em função da densidade superficial de energia e das pressões nas dire  es radial, z e azimutal, que são, respectivamente:

$$\sigma = Q^t_t, \quad P_r = -Q^r_r, \quad P_\varphi = -Q^\varphi_\varphi \quad e \quad P_z = -Q^z_z. \quad (4.45)$$

Assim,

$$Q^{\alpha\beta} = \sigma e_{(t)}^\alpha e_{(t)}^\beta + P_r e_{(r)}^\alpha e_{(r)}^\beta + P_\varphi e_{(\varphi)}^\alpha e_{(\varphi)}^\beta + P_z e_{(z)}^\alpha e_{(z)}^\beta. \quad (4.46)$$

Devido ao termo $\sqrt{-g_{zz}}$ que divide a distribui  o de Dirac, devemos multiplicar as expressões da Eq. (4.45) por $\sqrt{-g_{zz}}$ para obter as grandezas físicas $\tilde{\sigma}, \tilde{P}_r, \tilde{P}_z$ e $\tilde{P}_\varphi$.

Da Eq. (4.42), temos

$$Q^z_z = 0, \quad (4.47)$$

$$Q^t_t = \frac{1}{8\pi} g^{zz} [g^{rr} g_{rr,z} + g^{\varphi\varphi} g_{\varphi\varphi,z}], \quad (4.48)$$

$$Q^r_r = \frac{1}{8\pi} g^{zz} [g^{tt} g_{tt,z} + g^{\varphi\varphi} g_{\varphi\varphi,z}], \quad (4.49)$$

$$Q^\varphi_\varphi = \frac{1}{8\pi} g^{zz} [g^{tt} g_{tt,z} + g^{rr} g_{rr,z}]. \quad (4.50)$$

Para a métrica de Weyl (Eq. (3.1)) e usando as rela  es acima podemos escrever a densidade de energia e as pressões como:

$$\tilde{\sigma} = \left(\frac{e^{2\gamma}}{f} \right)^{-1/2} \frac{(f_{,z}/f - \gamma_{,z})}{4\pi}, \quad (4.51)$$

$$\tilde{P}_\varphi = \left(\frac{e^{2\gamma}}{f} \right)^{-1/2} \frac{\gamma_{,z}}{4\pi}, \quad (4.52)$$

$$\tilde{P}_z = \tilde{P}_r = 0. \quad (4.53)$$

Outra quantidade física importante associada a discos estáticos é a velocidade de contrarrotação. Supõe-se que o disco é formado pelo mesmo número de partículas movendo em círculos em uma direção que na direção oposta. Para o caso com pressão radial nula, a estabilidade dos discos gerados pode ser explicada usando a hipótese da contrarrotação. Podemos escrever essa velocidade como [65] :

$$V_i^2 = \frac{P_i}{\sigma} \quad i = r, \varphi. \quad (4.54)$$

As componentes do tensor energia-momento devem satisfazer certas desigualdades [66]. A condição fraca de energia é satisfeita se $\sigma \geq 0$, a condição dominante de energia impõe que $\sigma \geq |P_i|, i = r, z, \varphi$ e a condição forte de energia é satisfeita se $\sigma + P_r + P_z + P_\varphi \geq 0$.

Para a métrica de Weyl, essa velocidade é:

$$V^2 = \frac{1}{f_{,z}/f\gamma_{,z} - 1}. \quad (4.55)$$

Com a presença de pressão radial não é necessário assumir um fluxo de matéria girante e contragirante. Porém a velocidade tangencial (perfil de rotação) pode ser calculada assumindo que uma partícula teste se move em uma geodésica circular no disco. Assumimos que a partícula interage gravitacionalmente apenas com o fluido. E isso é válido para o caso de uma partícula movendo em um gás muito diluído tal como o gás feito de estrelas que modelam o disco galático [67].

A equação geodésica para a coordenada r obtida da métrica é:

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}g^{rr}g_{tt,r}\dot{t}^2 + \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}g^{rr}g_{zz,r}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}g^{rr}g_{\varphi\varphi,r}\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (4.56)$$

Para o movimento circular no plano $z = 0$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ e $\dot{z} = 0$. Assim:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2} = \frac{-g_{tt,r}}{g_{\varphi\varphi,r}}. \quad (4.57)$$

E a velocidade tangencial medida por um observador local é

$$V_c^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}} \frac{g_{tt,r}}{g_{\varphi\varphi,r}}. \quad (4.58)$$

CAPÍTULO 5

Análise da Estabilidade

O objetivo deste capítulo é fazer um estudo da estabilidade do disco. Uma maneira de estudar o campo gravitacional de uma dada distribuição de massa é analisar o movimento de partículas-teste próximas desse objeto e isso pode ser feito através das equações geodésicas, generalizando o critério de estabilidade de Rayleigh [37] para o contexto de relatividade geral.

Para estudar a estabilidade do disco pode-se realizar uma perturbação geral em primeira ordem nas componentes temporal, radial e azimutal do tensor energia-momento do fluido e analisar a conservação das equações de movimento perturbadas correspondentes. Dessa forma, serão apresentadas inicialmente, as equações de conservação perturbadas para o caso geral onde o tensor energia-momento possui densidade de energia e três pressões não-nulas. Em seguida consideraremos a situação na qual temos o tensor energia-momento com suporte em $z = 0$, ou seja, o caso de discos finos.

5.1 Critério de Rayleigh

Na primeira parte deste capítulo iremos focar no estudo da estabilidade de órbitas circulares de partículas-teste no disco.

5.1.1 Caso Newtoniano

Considere inicialmente o caso Newtoniano, para o qual um pequeno corpo de massa m move em uma órbita circular de raio R_0 ao redor de um centro fixo de atração gravitacional de massa

M [38]. Na situação de equilíbrio, a força gravitacional F_G se iguala à força centrífuga F_C , dessa forma,

$$F_G \hat{R} = F_C \hat{R} \rightarrow \frac{GmM}{R_0^2} = \frac{L(R_0)^2}{mR_0^3}, \quad (5.1)$$

onde $L(R_0)$ é o momento angular da partícula teste e tomamos a constante gravitacional como $G = 1$.

Se a partícula é movida para uma órbita exterior $R > R_0$, mantendo o mesmo momento angular para retornar à posição de equilíbrio, a força gravitacional em R deve ser maior que a força centrífuga na nova posição ($F_C(R)$) de modo a puxar a partícula para a órbita R_0 .

$$F_G(R) > F_C(R), \quad (5.2)$$

mas $F_G(R) = L^2(R)/mR^3$. Dessa forma,

$$L^2(r) > L^2(R_0). \quad (5.3)$$

Expandindo $L^2(R)$ em série de Taylor ao redor de $R = R_0$ temos:

$$L^2(R) = L^2(R_0) + \frac{d(L^2)}{dR}(R - R_0) + \dots, \quad (5.4)$$

e da Eq. (5.3) obtemos que a derivada primeira de L^2 deve ser positiva para ser possível uma configuração com órbitas circulares estáveis.

$$\frac{dL^2}{dR} > 0. \quad (5.5)$$

Logo, para uma órbita circular concluímos que

$$L \frac{dL}{dR} > 0. \quad (5.6)$$

5.1.2 Caso Relativístico

Vamos considerar agora uma métrica estática geral com simetria axial em coordenadas cilíndricas (t, r, z, φ) como na Eq. (4.43), onde as funções métricas dependem apenas de r e z . As equações geodésicas no plano $z = 0$ nos fornecem a equação de movimento

$$g_{tt,r} \dot{t}^2 + g_{\varphi\varphi,r} \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (5.7)$$

e o ponto sobre a variável denota derivada em relação ao tempo próprio.

As constantes de movimento para esse sistema são

$$1 = g_{tt} \dot{t}^2 + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \quad (5.8)$$

$$E = g_{tt} \dot{t} \quad \text{Energia relativística}$$

$$h = g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \quad \text{Momento angular}$$

Das equações e constantes de movimento podemos escrever:

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{g_{tt,r} \dot{t}^2}{g_{\varphi\varphi,r}} \quad (5.9)$$

$$1 = g_{tt} \dot{t}^2 - \frac{g_{\varphi\varphi} g_{tt,r} \dot{t}^2}{g_{\varphi\varphi,r}} \rightarrow \dot{t}^2 = \frac{g_{\varphi\varphi,r}}{g_{tt} g_{\varphi\varphi,r} - g_{\varphi\varphi} g_{tt,r}}. \quad (5.10)$$

Substituindo $\dot{\varphi}^2$ e $\dot{t}^2$ na equação do momento angular obtemos

$$h^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}^2 g_{tt,r}}{g_{tt} g_{\varphi\varphi,r} - g_{\varphi\varphi} g_{tt,r}}. \quad (5.11)$$

De modo equivalente ao caso Newtoniano temos equilíbrio entre a “força gravitacional” e a “força centrífuga”. Assumindo então que a métrica representa a gravitação de um corpo central teremos estabilidade da órbita circular no plano $z = 0$, quando

$$h h_{,r} > 0 \quad (5.12)$$

5.2 Estabilidade do Disco

Nesta seção iremos realizar uma perturbação em primeira ordem nas componentes do tensor energia-momento do disco e faremos o estudo das equações de conservação para o caso geral e para discos finos com e sem pressão radial.

5.2.1 Caso Geral

Vamos considerar inicialmente uma métrica estática geral, axialmente simétrica, como a Eq. (4.43):

$$ds^2 = g_{tt}(r, z)dt^2 + g_{rr}(r, z)dr^2 + g_{\varphi\varphi}(r, z)d\varphi^2 + g_{zz}(r, z)dz^2. \quad (5.13)$$

Definindo a base ortonormal de tétradas de acordo com a Eq. (4.44)

$$e_{(a)}^\alpha = (U^\alpha, X^\alpha, Y^\alpha, Z^\alpha), \quad (5.14)$$

onde a denota os índices da tétrada e α os índices do tensor e lembrando que a base deve satisfazer a Eq. (2.7), temos [68]

$$U^\alpha U_\alpha = -X^\alpha X_\alpha = -Y^\alpha Y_\alpha = -Z^\alpha Z_\alpha = 1 \quad (5.15)$$

$$U^\alpha X_\alpha = U^\alpha Y_\alpha = U^\alpha Z_\alpha = 0$$

$$X^\alpha Y_\alpha = X^\alpha Z_\alpha = Y^\alpha Z_\alpha = 0.$$

Nesse sistema U^α é a quadrivelocidade do fluido do tipo-tempo e $X^\alpha, Y^\alpha, Z^\alpha$ são as direções principais do tipo-espaco do fluido.

O tensor energia-momento, $T^{\alpha\beta}$, do fluido é diagonal com componentes $(\rho, -P_r, -P_\varphi, -P_z)$, onde ρ é a densidade de energia e (P_r, P_φ, P_z) são as pressões nas direções radial, azimutal e axial, respectivamente. Esse tensor energia-momento pode então ser escrito como:

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta + P_r X^\alpha X^\beta + P_\varphi Y^\alpha Y^\beta + P_z Z^\alpha Z^\beta. \quad (5.16)$$

Como todas as quantidades envolvidas no tensor energia-momento são funções das coordenadas (r, z) , o mesmo será válido para os coeficientes das equações perturbadas.

Podemos construir agora uma perturbação, $T_P^{\alpha\beta}$, no nosso tensor energia-momento da forma

$$T_P^{\alpha\beta}(t, r, \varphi, z) = T^{\alpha\beta}(r, z) + \delta T^{\alpha\beta}(t, r, \varphi, z), \quad (5.17)$$

onde $T^{\alpha\beta}(r, z)$ é a quantidade não perturbada e $\delta T^{\alpha\beta}(t, r, \varphi, z)$ é a perturbação.

Vamos assumir que o tensor energia-momento perturbado não modifica a métrica de fundo obtida ao se resolver as equações de campo de Einstein, $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$, ou seja, a perturbação $\delta T^{\alpha\beta}$ atua como um fluido teste. Feitas essas considerações, as equações para o tensor energia-momento perturbado podem ser escritas como

$$(\delta T^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0. \quad (5.18)$$

Escrevendo explicitamente a Eq. (5.18) e descartando os termos de ordem maior ou igual a $\vartheta(\delta^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} (\delta T^{\alpha\beta})_{;\beta} = & (\rho U^\alpha \delta U^\beta + \rho \delta U^\alpha U^\beta + \delta \rho U^\alpha U^\beta + \\ & + P_r X^\alpha \delta X^\beta + P_r \delta X^\alpha X^\beta + \delta P_r X^\alpha X^\beta + \\ & + P_\varphi Y^\alpha \delta Y^\beta + P_\varphi \delta Y^\alpha Y^\beta + \delta P_\varphi Y^\alpha Y^\beta + \\ & + P_z Z^\alpha \delta Z^\beta + P_z \delta Z^\alpha Z^\beta + \delta P_z Z^\alpha Z^\beta)_{;\beta} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

e as equações de conservação perturbadas para o sistema podem ser escritas como

$$\alpha = t$$

$$\begin{aligned} & \delta U_{,t}^t(\rho U^t) + \delta U_{,\lambda}^\lambda(\rho U^t) + \delta X_{,r}^t(P_r X^r) + \delta Y_{,\varphi}^t(P_\varphi Y^\varphi) + \delta Z_{,z}^t(P_z Z^z) + \delta \rho_{,t}(U^t U^t) + \\ & + \delta U^r F(t, r, \rho U^t) + \delta U^z F(t, z, \rho U^t) + \delta X^t F(t, r, P_r X^r) + \delta Z^t F(t, z, P_z Z^z) = 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\alpha = r$$

$$\begin{aligned} & \delta U_{,t}^r(\rho U^t) + \delta X_{,r}^r(P_r X^r) + \delta X_{,\lambda}^\lambda(P_r X^r) + \delta Y_{,\varphi}^r(P_\varphi Y^\varphi) + \delta Z_{,z}^r(P_z Z^z) + \\ & + \delta P_{r,r}(X^r X^r) + 2\delta U^t(\rho U^t \Gamma_{tt}^r) + 2\delta X^r G(r, r, P_r X^r) + \delta X^z F(r, z, P_r X^r) + \\ & + 2\delta Y^\varphi(P_\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r) + \delta Z^r F(r, z, P_z Z^z) + 2\delta Z^z(P_z Z^z \Gamma_{zz}^r) + \delta \rho(U^t U^t \Gamma_{tt}^r) + \\ & + \delta P_r G(r, r, X^r X^r) + \delta P_\varphi(Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r) + \delta P_z(Z^z Z^z \Gamma_{zz}^r) = 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\alpha = \varphi$$

$$\begin{aligned} & \delta U_{,t}^\varphi(\rho U^t) + \delta X_{,r}^\varphi(P_r X^r) + \delta Y_{,\varphi}^\varphi(P_\varphi Y^\varphi) + \delta Y_{,\lambda}^\lambda(P_\varphi Y^\varphi) + \delta Z_{,z}^\varphi(P_z Z^z) + \\ & + \delta P_{\varphi,\varphi}(Y^\varphi Y^\varphi) + \delta X^\varphi F(\varphi, r, P_r X^r) + \delta Y^r F(\varphi, r, P_\varphi Y^\varphi) + \\ & + \delta Z^\varphi F(\varphi, z, P_z Z^z) + \delta Y^z F(\varphi, z, P_z Z^z) = 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\alpha = z$$

$$\begin{aligned} & \delta U_{,t}^z(\rho U^t) + \delta X_{,r}^z(P_r X^r) + \delta Y_{,\varphi}^z P_\varphi Y^\varphi + \delta Z_{,z}^z(P_z Z^z) + \delta Z_{,\lambda}^\lambda(P_z Z^z) + \\ & + \delta P_{z,z}(Z^z Z^z) + 2\delta U^t(\rho U^t \Gamma_{tt}^z) + 2\delta X^r(P_r X^r \Gamma_{rr}^z) + \delta X^z F(z, r, P_r X^r) + \\ & + 2\delta Y^\varphi(P_\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^z) + \delta Z^r F(z, r, P_z Z^z) + 2\delta Z^z G(z, z, P_z Z^z) + \\ & + \delta \rho(U^t U^t \Gamma_{tt}^z) + \delta P_r(X^r X^r \Gamma_{rr}^z) + \delta P_\varphi(Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^z) + \delta P_z G(z, z, Z^z Z^z) = 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde

$$F(I, J, K) = K_{,J} + K(2\Gamma_{IJ}^I + \Gamma_{\lambda J}^\lambda), \quad (5.24)$$

$$G(I, J, K) = K_{,J} + K(\Gamma_{IJ}^I + \Gamma_{\lambda J}^\lambda) \quad (5.25)$$

e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são os símbolos de Christoffel.

Para que a tétrada perturbada permaneça ortonormal, e através das Eqs. (2.5) e (2.10), obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \delta U^t &= \delta X^r = \delta Y^\varphi = \delta Z^z = 0 \\ \delta X^t &= \xi_1 \delta U^r, \quad \xi_1 = -X_r/U_t, \\ \delta Y^t &= \xi_2 \delta U^\varphi, \quad \xi_2 = -Y_\varphi/U_t, \\ \delta Z^t &= \xi_3 \delta U^z, \quad \xi_3 = -Z_z/U_t, \\ \delta X^\varphi &= \xi_4 \delta Y^r, \quad \xi_4 = -X_r/Y_\varphi, \\ \delta X^z &= \xi_5 \delta Z^r, \quad \xi_5 = -X_r/Z_z, \\ \delta Y^z &= \xi_6 \delta Z^\varphi, \quad \xi_6 = -Y_\varphi/Z_z. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Estamos interessados em perturbações nas componentes de velocidade e por isso a componente t da tétrada deve ser perturbada.

5.2.2 Disco Fino

Considerando agora a situação para discos finos, o tensor energia-momento, $Q^{\alpha\beta}$, do disco é caracterizado por uma função delta com suporte no plano $z = 0$. Para esse caso a pressão P_z é igual a zero e podemos escrever o tensor energia-momento como

$$Q^{\alpha\beta} = (\sigma U^\alpha U^\beta + P_r X^\alpha X^\beta + P_\varphi Y^\alpha Y^\beta) \delta(z), \quad (5.27)$$

onde σ é a densidade de energia superficial do disco.

Das equações de conservação perturbadas (5.18) e do tensor energia-momento do disco, temos que

$$(\delta Q^{\alpha\beta})_{;\beta} \delta(z) + \delta Q^{\alpha\beta} (\delta(z))_{;\beta} = 0. \quad (5.28)$$

Lembrando que a derivada do valor absoluto de z em $z = 0$ é

$$|z|_{,z} = 2\theta(z=0) - 1 = 0. \quad (5.29)$$

Integrando a Eq. (5.28) em z

$$\int \sqrt{g_{zz}} (\delta Q^{\alpha\beta})_{;\beta} \delta(z) dz + \int \sqrt{g_{zz}} \delta Q^{\alpha\beta} (\delta(z))_{;\beta} dz = 0, \quad (5.30)$$

obtemos que o segundo termo é igual a zero e as equações de conservação perturbadas para discos finos podem ser escritas como

$$(\delta Q^{\alpha\beta})_{;\beta}|_{z=0} = 0. \quad (5.31)$$

Como as perturbações nas tétradas são independentes das perturbações nas grandezas do fluido, e com isso não alteram a equação de estado do fluido, podemos realizar algumas considerações: é possível definir perturbações no vetor Z^α como zero, uma vez que nossos interesses são as perturbações da quadri-velocidade do disco. Além disso, a perturbação δX^φ não está

relacionada às perturbações nas velocidades radial ou azimutal e por isso pode ser considerada como zero. Assim,

$$\delta Z^t = \delta Z^r = \delta Z^\varphi = \delta X^\varphi = 0, \quad (5.32)$$

e utilizando a Eq. (5.26)

$$\delta U^z = \delta X^z = \delta Y^z = \delta Y^r = 0. \quad (5.33)$$

Devido à forma da equação para o tensor energia-momento do disco, os coeficientes de conexão são funções apenas da coordenada radial. Com isso, os coeficientes da Eq. (5.31) dependem apenas de r e podemos construir uma perturbação da forma

$$\delta Q^{\alpha\beta}(t, r, \varphi) = \delta Q^{\alpha\beta}(r) e^{i(k_\varphi \varphi - \omega t)}. \quad (5.34)$$

De acordo com essa equação em adição às condições (5.26) e (5.32) podemos escrever explicitamente as equações de conservação perturbadas

$$\alpha = t$$

$$\begin{aligned} & \delta U_{,r}^r (\sigma U^t + \xi_1 P_r X^r) + \delta U^r [F(t, r, \sigma U^t) + \xi_{1,r} P_r X^r + \xi_1 F(t, r, P_r X^r)] + \\ & + \delta U^\varphi [ik_\varphi (\sigma U^t + \xi_2 P_\varphi Y^\varphi)] + \delta \sigma (-i\omega U^t U^t) = 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\alpha = r$$

$$\begin{aligned} & \delta P_{r,r} (X^r X^r) + \delta U^r [-i\omega (\sigma U^t + \xi_1 P_r X^r)] + \delta \sigma (U^t U^t \Gamma_{tt}^r) + \\ & + \delta P_r G(r, r, X^r X^r) + \delta P_\varphi Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\alpha = \varphi$$

$$\delta U^\varphi [-\omega (\sigma U^t + \xi_2 P_\varphi Y^\varphi)] + \delta P_\varphi (k_\varphi Y^\varphi Y^\varphi) = 0. \quad (5.37)$$

Essas últimas equações são as equações básicas para estabilidade em discos finos.

5.3 Discos Finos com Pressões Radial e Azimutal

Podemos considerar agora três situações distintas, a primeira com pressão radial igual à pressão azimutal, a segunda com as duas pressões diferentes e a terceira apenas com pressão azimutal.

5.3.1 Caso 1: $P_r = P_\varphi$

Podemos reescrever os coeficientes das Eqs. (5.35, 5.36 e 5.37) como:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sigma U^t + \xi_1 P_r X^r & B_1 &= X^r X^r & (5.38) \\
 A_2 &= F(t, r, \sigma U^t) + \xi_{1,r} P_r X^r + \xi_1 F(t, r, P_r X^r) & B_2 &= -i\omega(\sigma U^t + \xi_1 P_r X^r) \\
 A_3 &= ik_\varphi(\sigma U^t + \xi_2 P_\varphi Y^\varphi) & B_3 &= U^t U^t \Gamma_{tt}^r \\
 A_4 &= -i\omega U^t U^t & B_4 &= G(r, r, X^r X^r) \\
 & & B_5 &= Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r \\
 C_1 &= -\omega(\sigma U^t + \xi_2 P_\varphi Y^\varphi) \\
 C_2 &= k_\varphi Y^\varphi Y^\varphi.
 \end{aligned}$$

Temos que $P = P_r = P_\varphi$ e queremos nossas perturbações em acordo com a equação de estado do fluido, ou seja, $P = P(r)$ e $\sigma = \sigma(r)$. Assim, δP e $\delta\sigma$ satisfazem:

$$\begin{aligned}
 \delta P &= \delta P_r = \delta P_\varphi = P_{,r} dr, \\
 \delta\sigma &= \sigma_{,r} dr,
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

de onde encontramos a relação

$$\delta P = \left(\frac{P_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta\sigma = f \delta\sigma, \tag{5.40}$$

com $f = P_{,r}/\sigma_{,r}$.

Podemos reescrever as Eqs. (5.36 e 5.37) como:

$$\begin{aligned}\delta U^\varphi &= -\frac{C_2}{C_1}\delta P_\varphi \\ \delta U^r &= -\frac{B_1\delta P_{r,r} + B_3\delta\sigma + B_4\delta P_r + B_5\delta P_\varphi}{B_2}.\end{aligned}\tag{5.41}$$

Substituindo U^φ e U^r na Eq. (5.35) e utilizando as relações (5.39 e 5.40) temos:

$$A_S\delta\sigma_{,rr} + B_S\delta\sigma_{,r} + C_S\delta\sigma = 0,\tag{5.42}$$

onde

$$A_S = A_1\alpha_2\tag{5.43}$$

$$B_S = A_1(\alpha_{2,r} + \alpha_1) + A_2\alpha_2$$

$$C_S = A_1\alpha_{1,r} + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_3 + A_4$$

e α_1, α_2 e α_3 são

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{B_1f_{,r} + f(B_4 + B_5) + B_3}{B_2} \\ \alpha_2 &= -\frac{fB_1}{B_2} \\ \alpha_3 &= -\frac{fC_2}{C_1}.\end{aligned}\tag{5.44}$$

5.3.2 Caso 2: $P_r \neq P_\varphi$

Podemos reescrever os coeficientes das Eqs. (5.35, 5.36 e 5.37) de acordo com a Eq. (5.38). Nossas perturbações, $\delta P_r, \delta P_\varphi$ e $\delta\sigma$, satisfazem as seguintes relações:

$$\delta P_r = P_{r,r}dr,\tag{5.45}$$

$$\delta P_\varphi = P_{\varphi,r}dr,$$

$$\delta\sigma = \sigma_{,r}dr,$$

de onde encontramos as relações

$$\begin{aligned}\delta P_r &= \left(\frac{P_{r,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta \sigma = f \delta \sigma, \\ \delta P_\varphi &= \left(\frac{P_{\varphi,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta \sigma = g \delta \sigma\end{aligned}\tag{5.46}$$

com $f = P_{r,r}/\sigma_{,r}$ e $g = P_{\varphi,r}/\sigma_{,r}$.

Substituindo U^φ e U^r na Eq. (5.35) e utilizando as relações (5.45 e 5.46) temos novamente as Eqs. (5.42 e 5.43), mas com α_1, α_2 e α_3 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{B_1 f_{,r} + f B_4 + g B_5 + B_3}{B_2} \\ \alpha_2 &= -\frac{f B_1}{B_2} \\ \alpha_3 &= -\frac{g C_2}{C_1}.\end{aligned}\tag{5.47}$$

5.4 Discos Finos sem Pressão Radial

Vamos considerar agora a situação para discos finos que possuem apenas pressão azimutal. Como a pressão radial é zero temos $P_r = \delta P_r = 0$ nas equações perturbadas. Substituindo U^φ e U^r na Eq. (5.35) e utilizando a relação $\delta P_\varphi = (P_{\varphi,r}/\sigma_{,r})\delta\sigma$, similar à Eq. (5.40), obtemos uma equação diferencial de primeira ordem em r para a perturbação $\delta\sigma$ da forma:

$$A\delta\sigma_{,r} + B\delta\sigma = 0,\tag{5.48}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= \sigma U^t \alpha_1 \\ B &= \sigma U^t \alpha_{1,r} + F(t, r, \sigma U^t) \alpha_1 - k_\varphi (\sigma U^t + \xi_2 P_\varphi Y^\varphi) \alpha_2 \frac{P_{\varphi,r}}{\sigma_{,r}} + \omega U^t U^t,\end{aligned}\tag{5.49}$$

com

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{U^t U^t \Gamma_{tt}^r + Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r (P_{\varphi,r} / \sigma_{,r})}{\omega \sigma U^t} \\
\alpha_2 &= \frac{k_\varphi Y^\varphi Y^\varphi}{\omega (\sigma U^t + \xi_2 P_\varphi Y^\varphi)}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

A Eq. (5.48) tem como solução

$$\delta\sigma = e^{\int (-B/A) dr}. \tag{5.51}$$

CAPÍTULO 6

Aplicações do Método DCR

Neste capítulo, aplicaremos o método “Deslocar, Cortar e Refletir” (DCR) para a métrica de Schwarzschild e para a métrica de Gutsunaev-Manko, que na situação para a qual o campo magnético é nulo, resume-se ao primeiro caso. Para essas duas situações aplicaremos também o critério de Rayleigh estendido para o contexto de Relatividade Geral de modo a estudar a estabilidade de órbitas circulares de partículas do disco.

Nós iremos analisar ainda as equações de conservação perturbadas para estudar a estabilidade do disco fino isotrópico de Schwarzschild que contém pressões radial e azimutal iguais e posteriormente estudaremos a estabilidade do disco de Gutsunaev-Manko, com pressões radial e azimutal diferentes.

Na situação com campo magnético, é importante citar que devido à descontinuidade do campo magnético teremos uma densidade superficial de carga magnética no nosso disco, o que torna o resultado inviável do ponto de vista físico.

6.1 Métrica de Schwarzschild em Coordenadas Isotrópicas

Podemos aplicar o método DCR para gerar discos para a métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas (t, R, θ, φ) ,

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2R}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2R}\right)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2R}\right)^4 [dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (6.1)$$

Transformando para coordenadas cilíndricas e fazendo a mudança $z \rightarrow |z| + z_0$ nas componentes do tensor métrico, temos o disco de Schwarzschild

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\sqrt{r^2+z_0^2}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\sqrt{r^2+z_0^2}}\right)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2\sqrt{r^2+z_0^2}}\right)^4 [dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2]. \quad (6.2)$$

Usando as Eqs. (4.45, 4.47, 4.48, 4.49, 4.50, 5.11) podemos obter a densidade de energia σ , as pressões azimutal e radial P e o momento angular h ,

$$\tilde{\sigma} = \frac{4mz_0}{\pi(m + 2\sqrt{r^2+z_0^2})^3}, \quad (6.3)$$

$$\tilde{P} = \tilde{P}_r = \tilde{P}_\varphi = -\frac{2m^2z_0}{\pi(m + 2\sqrt{r^2+z_0^2})^3(m - 2\sqrt{r^2+z_0^2})}, \quad (6.4)$$

$$h^2 = \frac{4mr^4 \left(1 + \frac{m}{2\sqrt{r^2+z_0^2}}\right)^4 \sqrt{r^2+z_0^2}}{4(r^2+z_0^2)^2 - 8mr^2\sqrt{r^2+z_0^2} + m^2(r^2-z_0^2)}. \quad (6.5)$$

Nas Figs. 6.1 (a)-(b) e 6.2 (a)-(b) mostramos $\tilde{\sigma}$, $\tilde{P}$, V^2 e h^2 correspondentes à densidade de energia, pressão, velocidade de contrarotação e momento angular do disco, respectivamente. Note que à medida que o parâmetro z_0 dos disco aumenta os máximos de $\tilde{\sigma}$, $\tilde{P}$ e V^2 diminuem e essas quantidades decrescem rapidamente com o raio do disco. Esse disco possui uma concentração de massa central que diminui rapidamente. Se esse disco for infinito, podemos definir um raio de corte onde a maior parte da massa está concentrada e considerar o disco finito. Observe ainda que ao aumentar o parâmetro z_0 do disco, é possível obter configurações com órbitas circulares estáveis de partículas do disco.

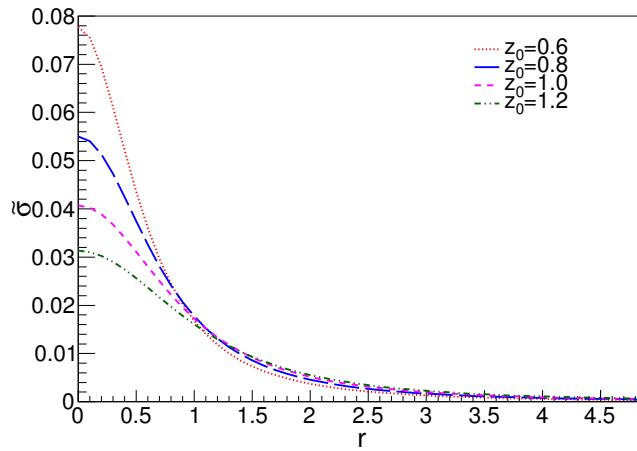
Para o disco de Schwarzschild, a velocidade tangencial é:

$$V_c^2 = \frac{mr^2}{\left(1 - \frac{m}{2\sqrt{r^2+z_0^2}}\right) \left((r^2+z_0^2)^{(3/2)} + \frac{m}{2}(z_0^2-r^2)\right)}. \quad (6.6)$$

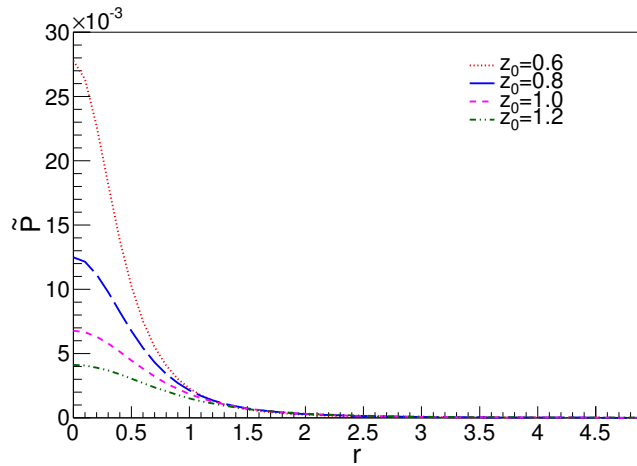
Para $r \gg z_0$ temos

$$V_c = \sqrt{\frac{m}{R}}, \quad (6.7)$$

que é a velocidade circular Newtoniana.

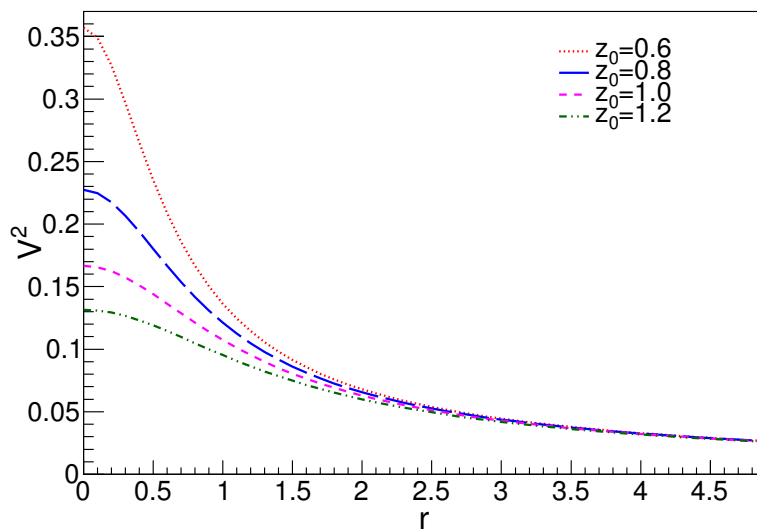


(a)

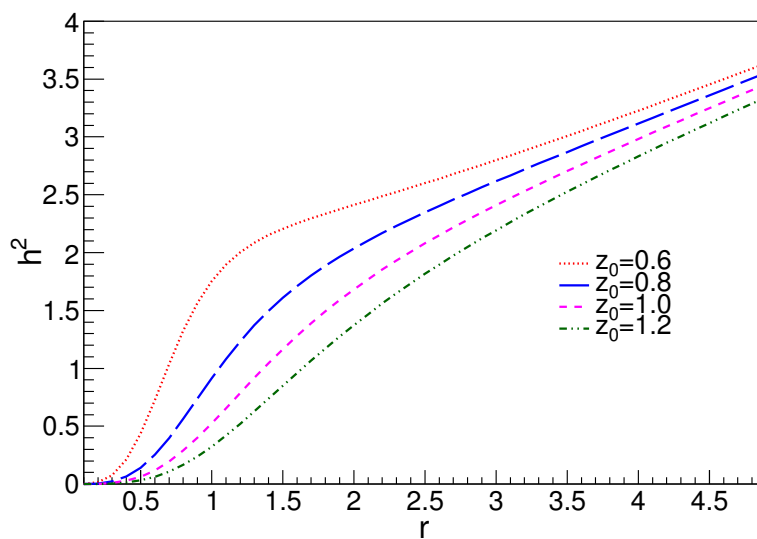


(b)

Figura 6.1: (a) Densidade de energia (b) Pressão em função de r , para $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$



(a)



(b)

Figura 6.2: (a) Velocidade de contrarotação (b) h^2 em função de r , para $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

Na Fig. 6.3 temos a velocidade tangencial V_c (perfil ou curva de rotação) para $m = 0.5$. A velocidade tangencial inicialmente aumenta com o raio até atingir um máximo e para maiores valores de z_0 esse máximo se afasta do centro do disco. Note ainda que ao aumentar o parâmetro z_0 , a curva se torna menos relativística, como esperado.

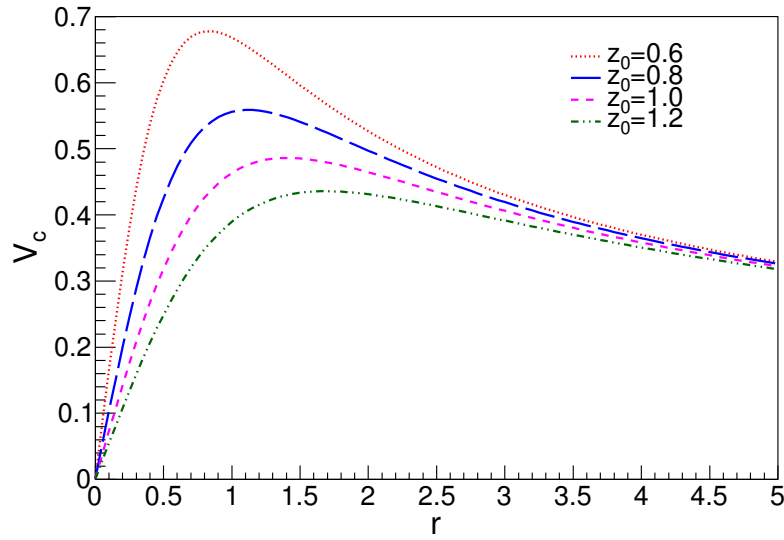


Figura 6.3: Velocidade tangencial V_c em função de r , para $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

Os discos considerados são radialmente infinitos, mas ao observar a densidade de energia temos que a maior concentração de matéria se encontra próxima ao centro do disco e devido a isso podemos fazer um corte na coordenada radial de modo a possuir um disco finito. Um possível critério para determinar qual será o raio de corte, R_C , do disco é considerar que a matéria dentro do disco formado pelo raio de corte é mais de 90% da densidade de energia total do disco. E os 10% restantes são distribuídos ao longo do plano $z = 0$, da parte externa do disco até o infinito. Isso nos permite tratar os 10% da densidade de energia do disco como uma perturbação da condição de contorno externa.

A equação de segunda ordem (5.42) pode ser resolvida com duas condições de contorno, uma em $r \approx 0$ e outra no raio de corte. Para a primeira condição definimos a perturbação como $\approx 10\%$ do valor não perturbado da densidade de energia e na extremidade do disco, $\delta\sigma|_{r=R_C} = 0$, pois queremos que a perturbação desapareça quando r tender ao raio externo.

Considerando então, para o disco de Schwarzschild, com parâmetros ($z_0 = 0.5$ e $m = 0.4$), o raio de corte é definido em $r = 4$, de modo que mais de 90% da densidade de energia esteja dentro do disco. Na Fig. 6.4 mostramos os perfis da perturbação da energia ($\delta\tilde{\sigma} = \sqrt{g_{zz}}\delta\sigma$) para diferentes modos de perturbação. Vemos na Fig. 6.4, que os perfis de perturbação da densidade são estáveis e possuem caráter oscilatório, como era esperado de acordo com a Eq.(5.34). Ao aumentar o parâmetro ω o número de oscilações aumenta dentro do disco, e quando o número de onda k é aumentado, a amplitude da oscilação decresce, como fica evidenciado no gráfico com $k = 2$.

Na Fig. 6.5 apresentamos os perfis das perturbações da pressão ($\delta\tilde{P} = \sqrt{g_{zz}}\delta P$) para os primeiros três modos ω com $k_\varphi = 0, 1$, e 2 , respectivamente. Vemos na Fig. 6.5 que a perturbação da pressão tem os mesmos aspectos qualitativos que a perturbação da densidade de energia.

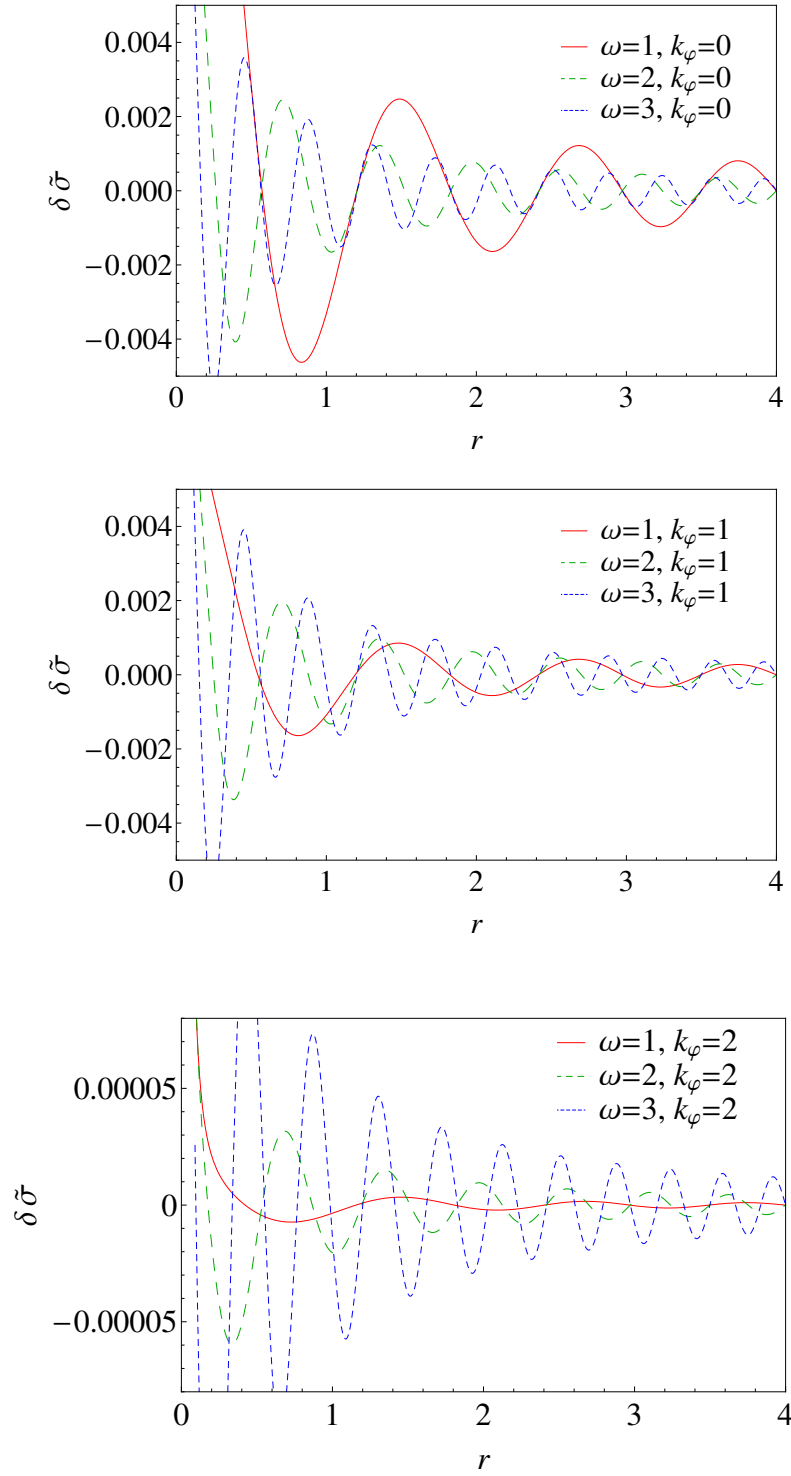


Figura 6.4: Perfis da perturbação da densidade de energia para um disco de Schwarzschild com parâmetros $z_0 = 0.5$ e $m = 0.4$.

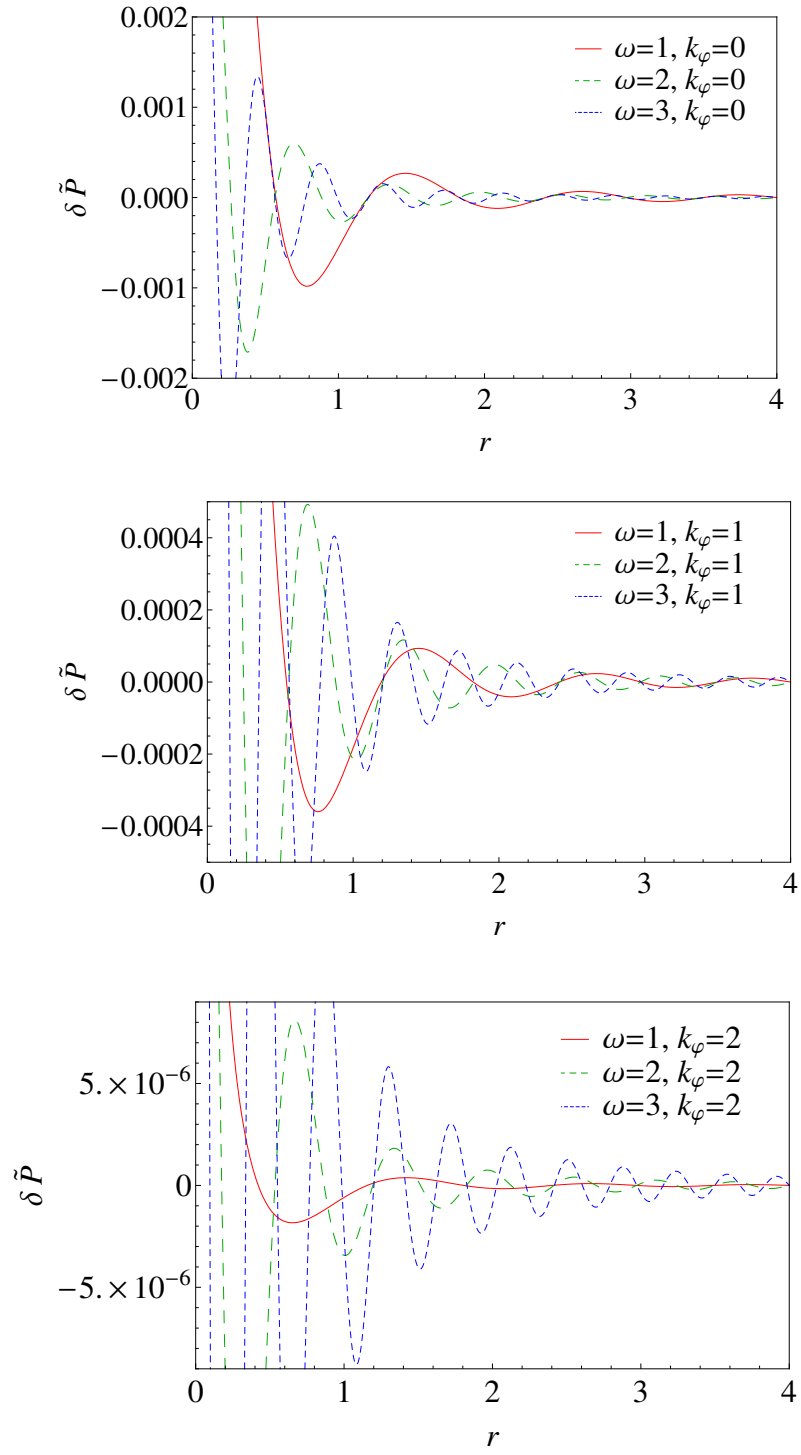


Figura 6.5: Perfis da perturbação da pressão para um disco de Schwarzschild com parâmetros $z_0 = 0.5$ e $m = 0.4$.

Na Fig. 6.5 apresentamos os perfis das perturbações da velocidade radial física ($\delta\tilde{U}^r = \sqrt{g_{rr}}\delta U^r$) para os três modos ω com $k_\varphi = 0, 1$ e 2 , respectivamente. Vemos que a amplitude da perturbação da velocidade radial aumenta quando nos aproximamos da borda do disco. Nessa situação devemos comparar esses valores de velocidade com a velocidade de escape para fazer a perturbação consistente com o modelo.

Para obter a velocidade de escape v_e de um corpo, podemos usar a 2ª Lei de Newton

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} = m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt}, \quad (6.8)$$

$$v dv = -\frac{GM}{r^2} dr \quad (6.9)$$

Integrando,

$$\int_{v_e}^{v(t)} v dv = - \int_{R_C}^{r(t)} \frac{GM}{r^2} dr \rightarrow v^2(t) - v_e^2 = 2GM \left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{R_C} \right). \quad (6.10)$$

Como queremos a velocidade de escape, para um tempo muito longo, $r \rightarrow \infty$ e $v(t) \rightarrow 0$. Assim,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_C}} = \sqrt{2|\Phi|}, \quad (6.11)$$

onde Φ é o potencial gravitacional e R_C é o raio externo do disco.

No limite Newtoniano da Relatividade Geral, temos a relação $g_{00} = \eta_{00} + 2\Phi$, de modo que a velocidade de escape para os parâmetros ($z_0 = 0.5, m = 0.4$ e $r = 4$) pode ser escrita como:

$$v_e = \left(\left| \left(1 - \frac{m}{2\sqrt{r^2 + z_0^2}} \right)^2 \left(1 + \frac{m}{2\sqrt{r^2 + z_0^2}} \right)^{-2} - 1 \right| \right)^{1/2} = 0.42. \quad (6.12)$$

Vemos na Fig. 6.6 que as partículas dentro do disco não escapam. Se o valor de algum dos modos ultrapassasse essa velocidade de escape, nosso modelo descreveria um disco com um determinado raio de corte com nenhuma partícula dentro.

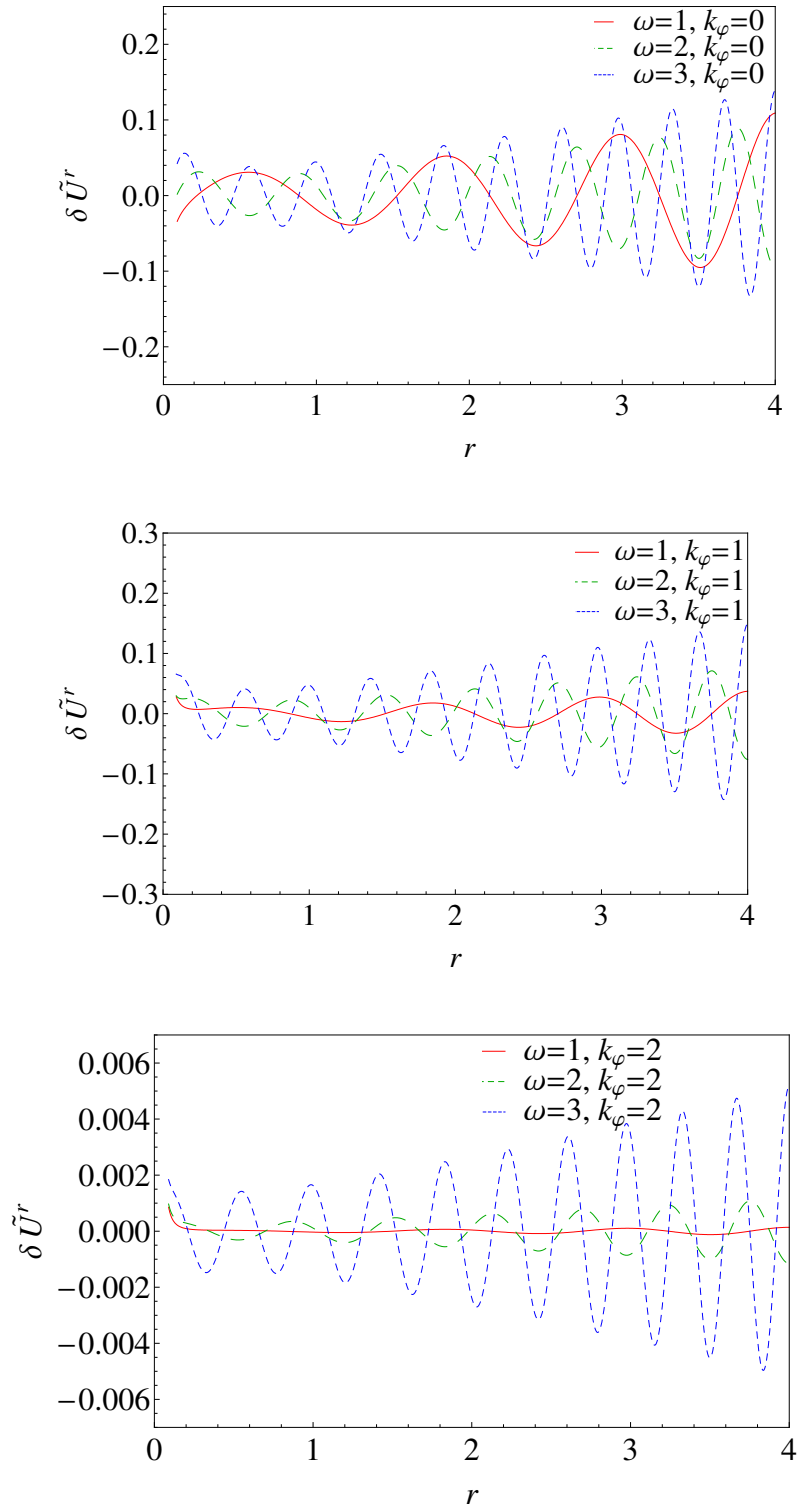


Figura 6.6: Perfis da perturbação da velocidade radial física para um disco de Schwarzschild com parâmetros $z_0 = 0.5$ e $m = 0.4$.

Na Fig. 6.7 apresentamos os perfis das perturbações da velocidade azimutal física ($\delta\tilde{U}^\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\delta U^\varphi$) para os modos ω com $k_\varphi = 1$ e 2, respectivamente. Os modos da perturbação da velocidade azimutal com $k_\varphi = 0$ são iguais a zero. As amplitudes da perturbação na velocidade azimutal apresentam um comportamento oscilatório mas a diferença entre elas e a perturbação na velocidade radial é que após as primeiras oscilações o valor máximo da amplitude permanece constante ao se aproximar da borda externa do disco.

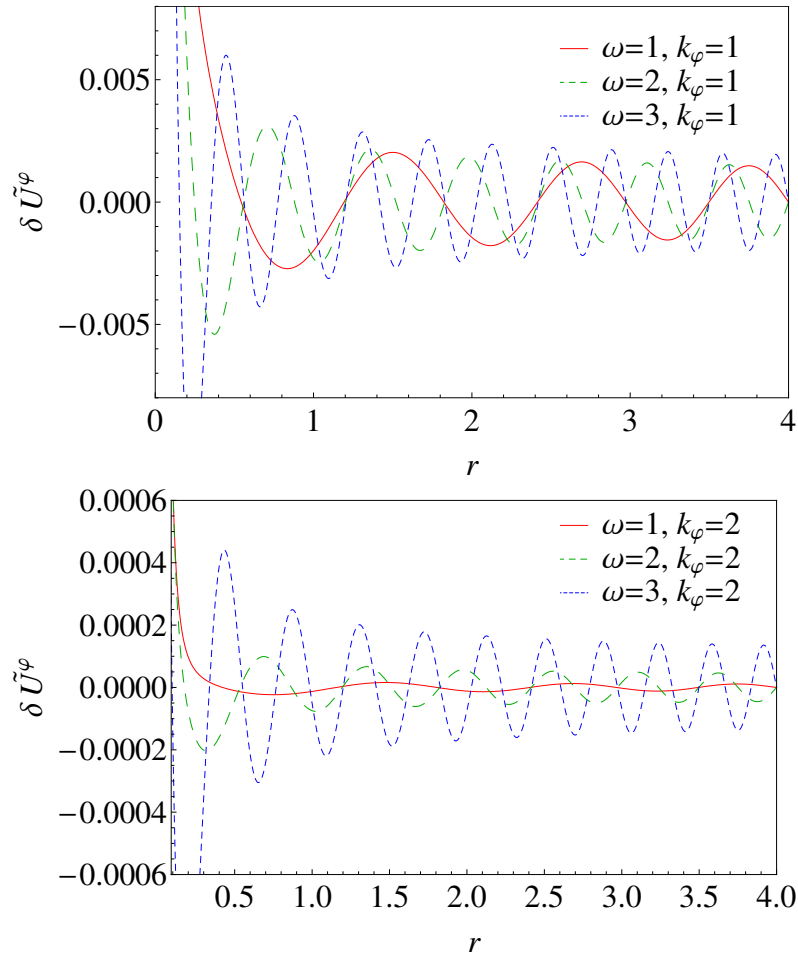


Figura 6.7: Perfis da perturbação da velocidade azimutal física para um disco de Schwarzschild com parâmetros $z_0 = 0.5$ e $m = 0.4$.

6.2 Métrica de Schwarzschild em Coordenadas de Weyl

Vamos obter os parâmetros associados ao disco de Schwarzschild de modo similar ao feito na seção anterior, mas em coordenadas de Weyl, para fins de comparação com a solução de Gutsunaev-Manko que será apresentada na próxima seção.

A solução de Schwarzschild em coordenadas de Weyl, como vista no Capítulo 3 é

$$f = \frac{x-1}{x+1} \quad (6.13)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{x^2-1}{x^2-y^2}. \quad (6.14)$$

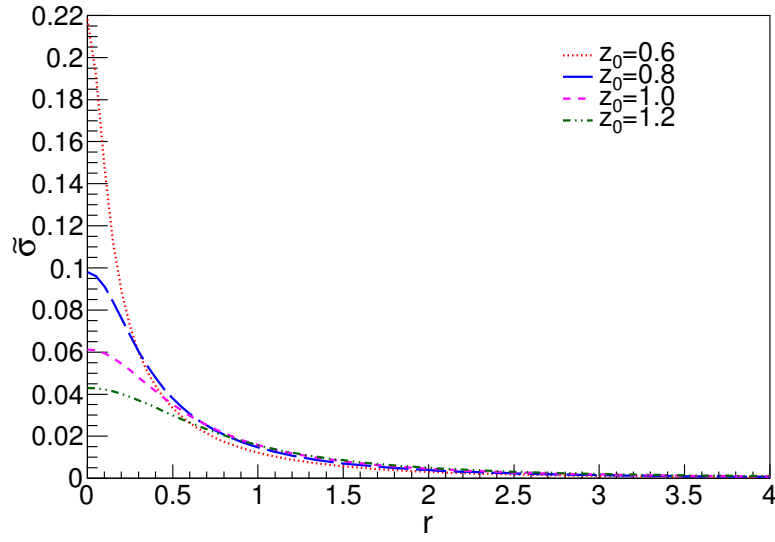
Podemos fazer a transformação de coordenadas esferoidais prolatas para as coordenadas (r, z) de acordo com as relações

$$x = \frac{1}{2k} \left[\sqrt{r^2 + (z+k)^2} + \sqrt{r^2 + (z-k)^2} \right] \quad (6.15)$$

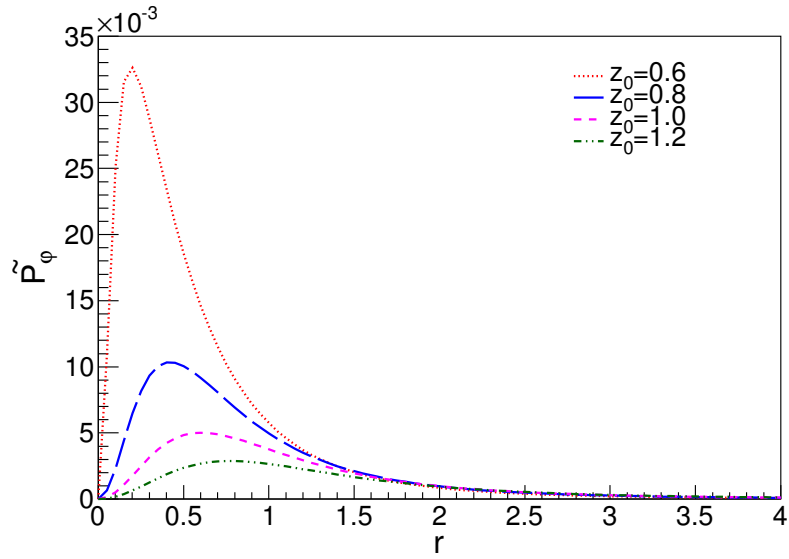
$$y = \frac{1}{2k} \left[\sqrt{r^2 + (z+k)^2} - \sqrt{r^2 + (z-k)^2} \right], \quad (6.16)$$

com $k = m$.

Nas Figs. 6.8 (a)-(b) e 6.9 (a)-(b) mostramos $\tilde{\sigma}$, $\tilde{P}$, V^2 e h^2 correspondentes à densidade de energia, pressão, velocidade de contrarotação e momento angular do disco, respectivamente. Note que à medida que o parâmetro z_0 do disco aumenta os máximos de $\tilde{\sigma}$, $\tilde{P}$ e V^2 diminuem. Esse disco possui uma concentração de massa central que diminui rapidamente. A pressão e a velocidade de contrarotação das partículas cresce até um máximo e esse valor se desloca para fora do disco ao aumentar z_0 , o que não acontecia para a solução de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas. Isso se deve ao fato de que a solução em coordenadas de Weyl engloba as regiões dentro e fora do horizonte de eventos, enquanto a solução em coordenadas isotrópicas inclui apenas a região externa ao horizonte. Essa justificativa será válida ao observar também que a solução em coordenadas de Weyl não será estável como a anterior. Observe ainda que para esses parâmetros z_0 do disco, é possível obter configurações com órbitas circulares estáveis de partículas do disco.

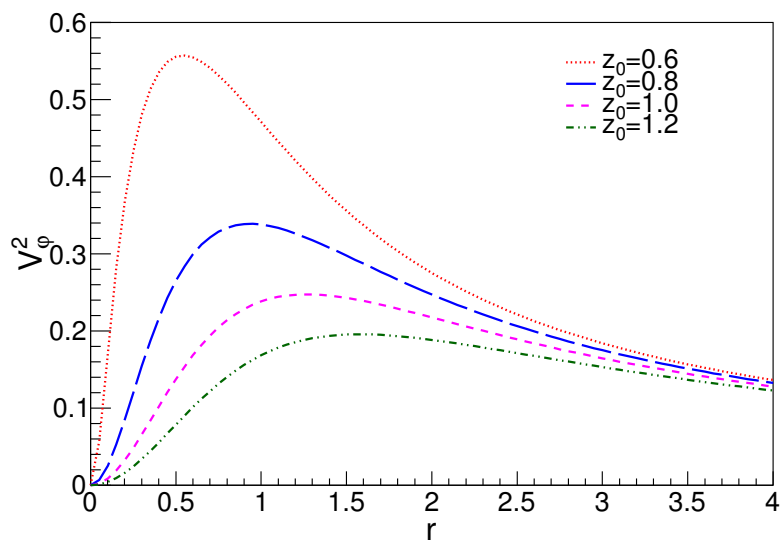


(a)

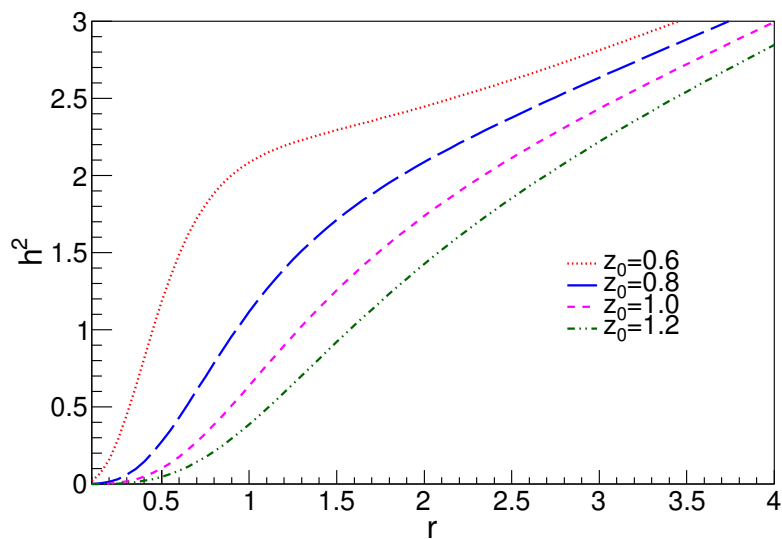


(b)

Figura 6.8: (a) Densidade de energia (b) Pressão em função de r , para $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$



(a)



(b)

Figura 6.9: (a) Velocidade de contrarotação (b) h^2 em função de r , para $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

Na Fig. 6.10 temos a velocidade tangencial V_c (perfil ou curva de rotação) para $m = 0.5$. A velocidade tangencial inicialmente aumenta com o raio até atingir um máximo e para maiores valores de z_0 esse máximo se afasta do centro do disco. E ao aumentar o parâmetro z_0 , a curva se torna menos relativística.

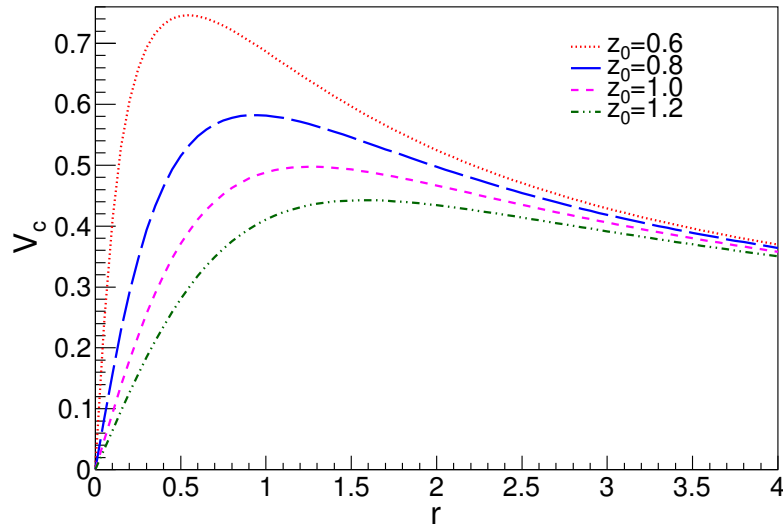


Figura 6.10: Velocidade tangencial V_c em função de r , para $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

6.3 Métrica de Gutsunaev-Manko

Como visto no Capítulo 3, a solução de Gutsunaev-Manko em coordenadas esferoidais prolatas é

$$f = \frac{x-1}{x+1} \left[\frac{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2(1 - y^2)}{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2]^2 - 4\alpha^2 y^2(x^2 - 1)} \right]^2, \quad (6.17)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \frac{[[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2(1 - y^2)]^4}{(1 + \alpha^2)^8 (x^2 - y^2)^8}. \quad (6.18)$$

E recuperamos as coordenadas de Weyl com a transformação das Eqs. (6.15)-(6.16) e com

$$k = \frac{m(1 + \alpha^2)}{(1 - 3\alpha^2)}. \quad (6.19)$$

6.3.1 Discos de Gutsunaev-Manko com $m = 0.5$ e $z_0 = 1.8$

A curva com $\alpha = 0$ na Fig. 6.11 representa a densidade de energia de um disco sem campo magnético. Ao incluir o campo magnético é possível notar que a densidade, para os valores mostrados de α , diminui. Ao aumentar o campo magnético podemos notar ainda que a pressão azimutal e a velocidade de propagação associada a essa pressão (Fig. 6.12(a), 6.12(b)) diminuem e ambas crescem até um valor máximo, que afasta do centro do disco ao aumentar o campo magnético.

A dependência do momento angular está apresentada na Fig. 6.13 e, nessa situação, temos órbitas circulares estáveis de partículas do disco para os parâmetros utilizados. Na Fig. 6.14 temos a velocidade tangencial V_c (perfil ou curva de rotação) para $m = 0.5$. A velocidade tangencial inicialmente aumenta com o raio até atingir um máximo e para maiores valores de z_0 esse máximo se afasta do centro do disco. E ao aumentar o parâmetro z_0 , a curva se torna menos relativística. Na Fig. 6.15 (a) e (b), mostramos que após um determinado raio a posição das curvas da velocidade de contrarrotação e da velocidade tangencial se invertem.

Para a situação com $\alpha = 0$, recuperamos a solução de Schwarzschild em coordenadas de Weyl e os resultados são iguais aos das Figs. 6.8 (a)-(b), 6.9 (a)-(b) e 6.10.

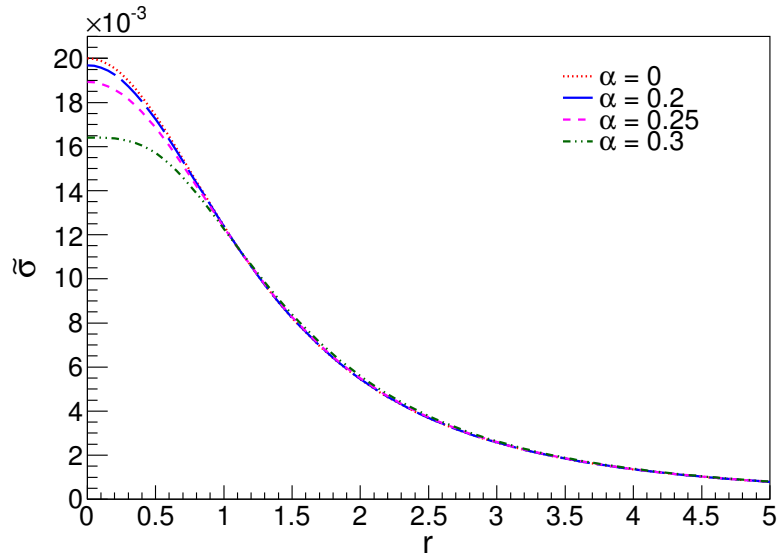
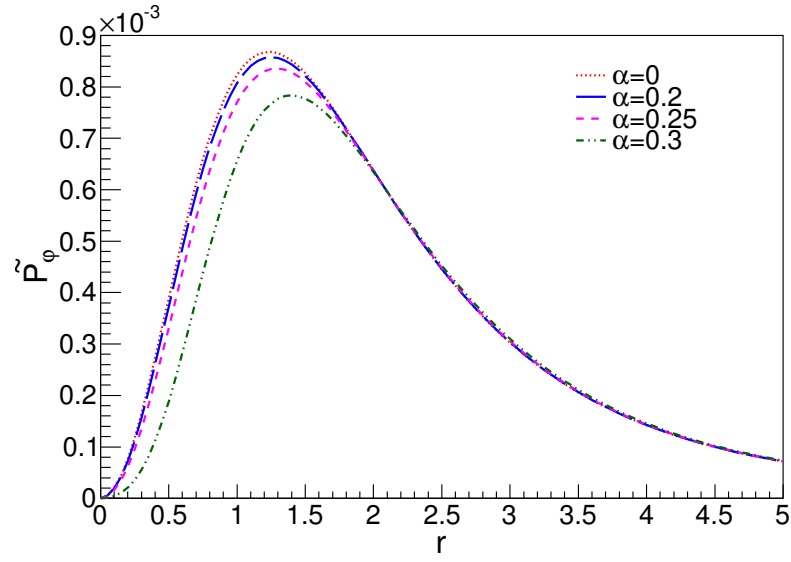
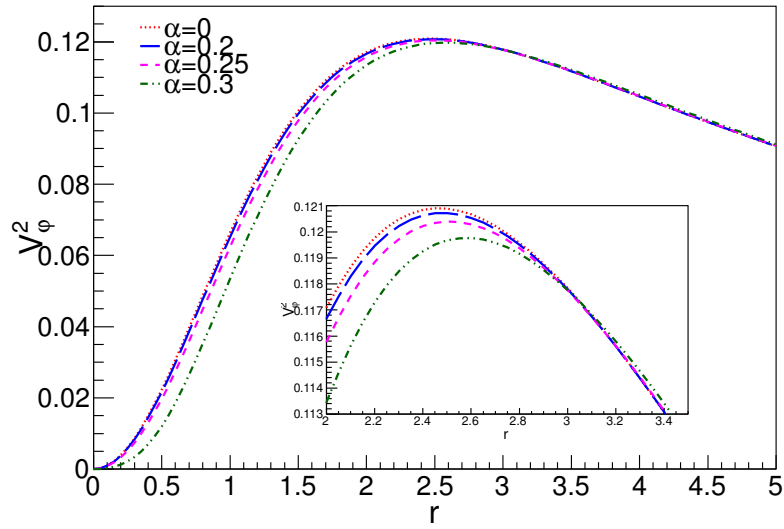


Figura 6.11: Densidade de energia superficial σ em função de r , para $z_0 = 0.8$ e $\alpha = 0$ (máximo superior), 0.10, 0.15 e 0.20 (máximo inferior) com $m = 0.5$



(a)



(b)

Figura 6.12: (a) Pressão Azimutal P_ϕ e (b) Velocidade de contrarrotação associada à pressão azimutal V_ϕ^2 em função de r , para $z_0 = 1.8$ e $\alpha = 0$ (máximo superior), 0.20, 0.25 e 0.30 (máximo inferior) com $m = 0.5$

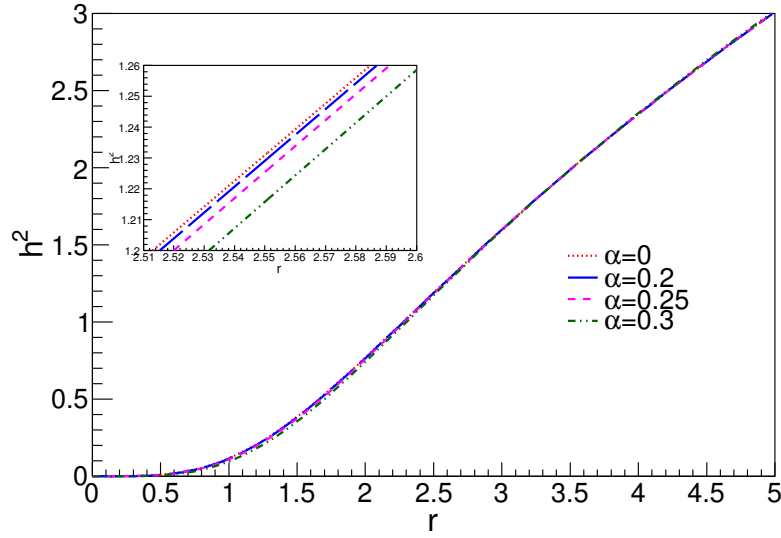


Figura 6.13: Momento angular ao quadrado h^2 em função de r , para $z_0 = 1.8$ e $\alpha = 0$ (curva superior), 0.20, 0.25 e 0.30 (curva inferior) com $m = 0.5$

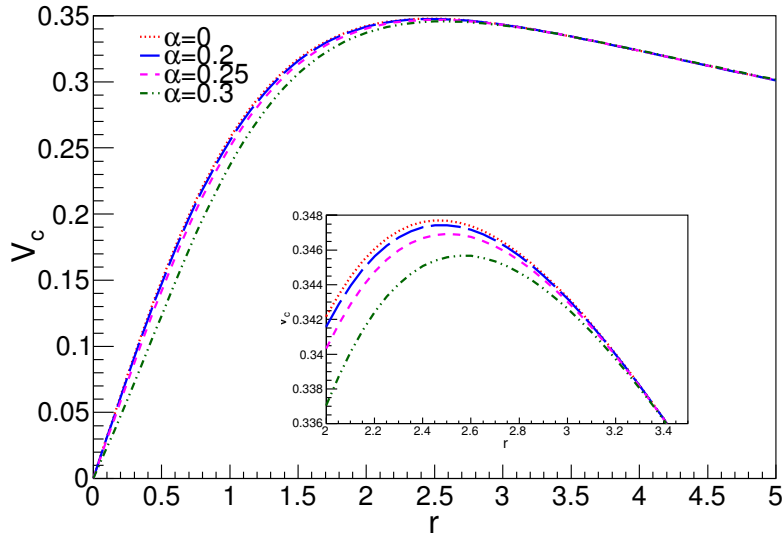
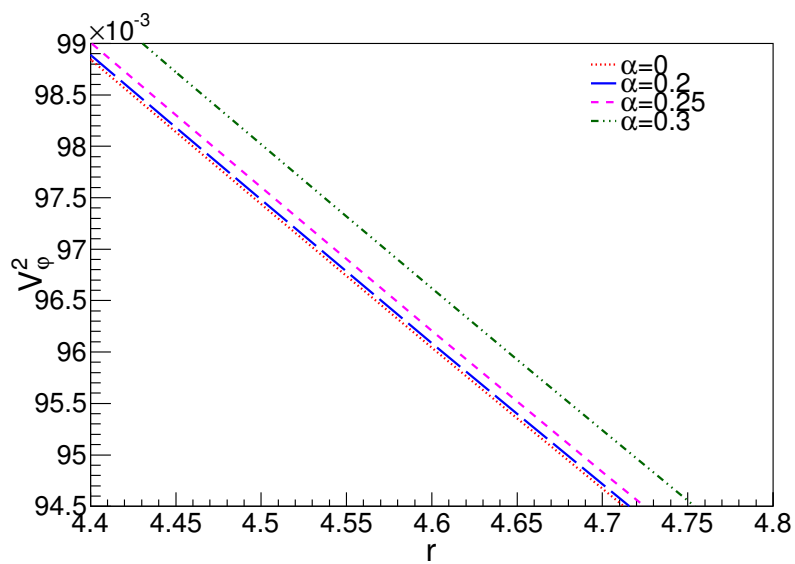
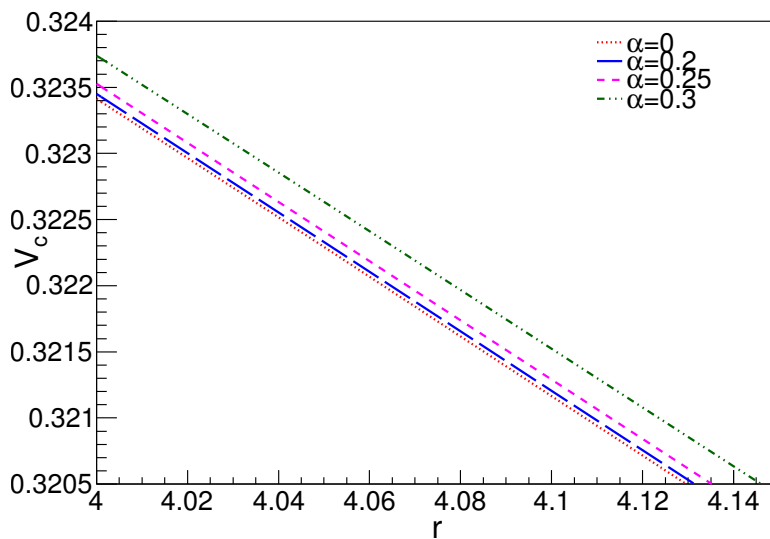


Figura 6.14: Velocidade tangencial V_c em função de r , para $z_0 = 1.8$ e $\alpha = 0$ (curva superior), 0.20, 0.25 e 0.30 (curva inferior) com $m = 0.5$



(a)



(b)

Figura 6.15: (a) Zoom da Velocidade de Contrarotação V_φ^2 e (b) Zoom da Velocidade tangencial V_c em função de r , para $z_0 = 1.8$ e $\alpha = 0$ (máximo superior), 0.20, 0.25 e 0.30 (máximo inferior) com $m = 0.5$

6.3.2 Discos de Gutsunaev-Manko com $m = 0.5$ e $\alpha = 0.3$

Podemos ainda fixar um valor para α diferente de zero e analisar a dependência radial das nossas quantidades para diferentes valores de z_0 . Dessa forma, vamos observar o comportamento de $\tilde{\sigma}$, $\tilde{P}_\varphi$, V_φ^2 , h^2 e V_c para $\alpha = 0.3$ e $m = 0.5$. Nas Figs. 6.16, 6.17 (a)-(b) podemos notar que o comportamento é o mesmo, ao aumentar o valor de z_0 , os máximos das curvas diminuem. Na Fig. 6.18 notamos que para esses conjuntos de parâmetros temos órbitas circulares estáveis de partículas teste no disco.

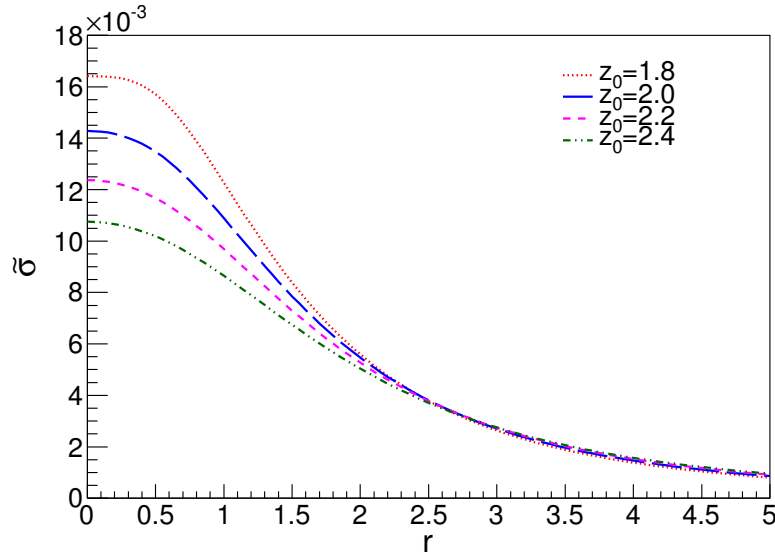
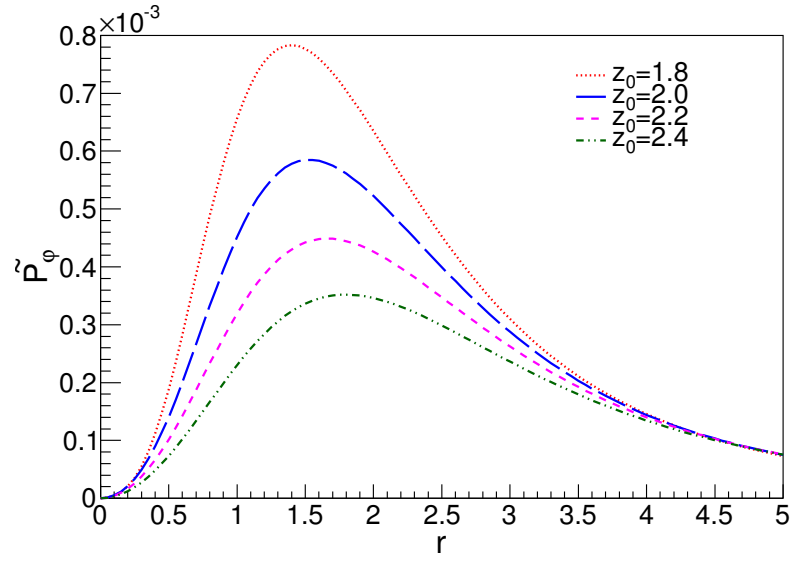
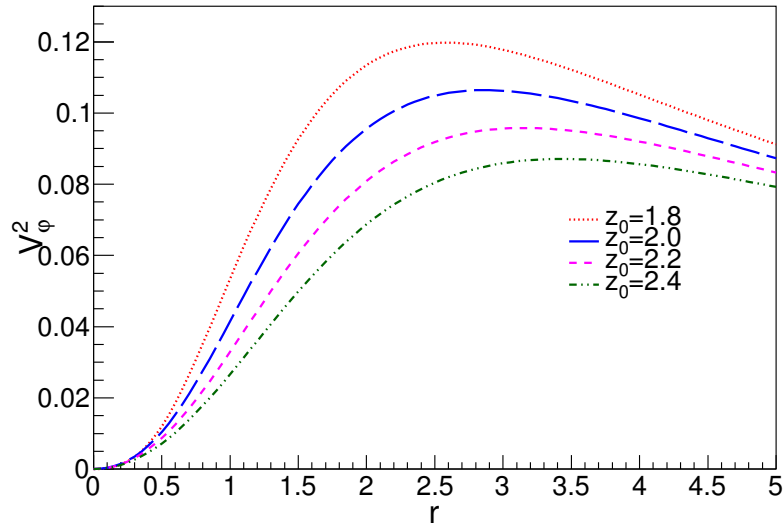


Figura 6.16: Densidade de energia superficial σ em função de r , para $\alpha = 0.3$ e $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$



(a)



(b)

Figura 6.17: (a) Pressão Azimutal P_ϕ e (b) Velocidade de contrarrotação associada à pressão azimutal V_ϕ^2 em função de r , para $\alpha = 0.3$ e $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

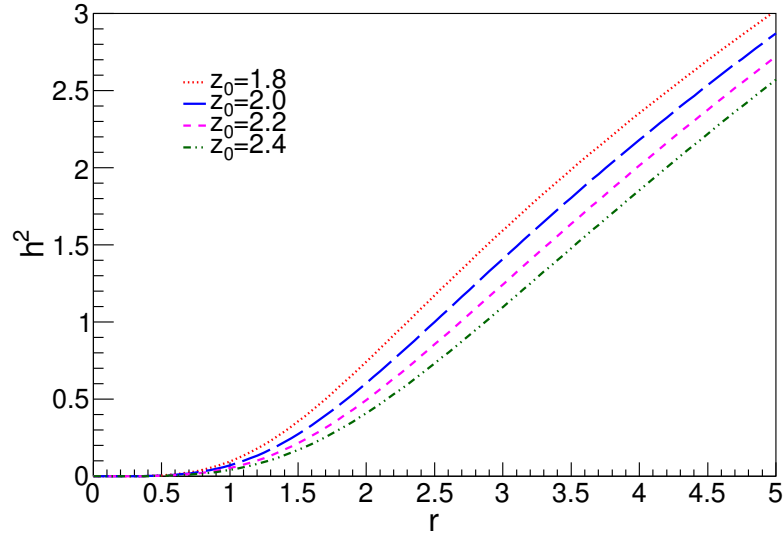


Figura 6.18: Momento angular ao quadrado h^2 em função de r , para $\alpha = 0.3$ e $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

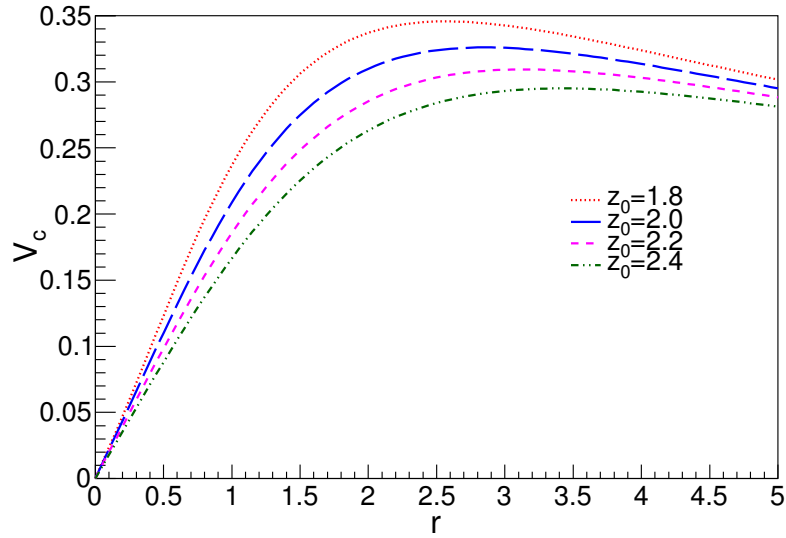


Figura 6.19: Velocidade tangencial V_c em função de r , para $\alpha = 0.3$ e $z_0 = 0.6$ (curva superior), 0.8, 1.0 e 1.2 (curva inferior) com $m = 0.5$

6.3.3 Distribuição Superficial de Monopolos

O potencial eletromagnético é contínuo em $z = 0$

$$[A_\varphi] = A_\varphi|_{z=0^+} - A_\varphi|_{z=0^-} = A_\varphi^+ - A_\varphi^- = 0 \quad (6.20)$$

e possui simetria de reflexão com relação a esse plano. Aplicando o mesmo procedimento utilizado no tensor métrico, podemos escrever o potencial como uma distribuição

$$A_\varphi = \theta A_\varphi^+ + (1 - \theta) A_\varphi^-. \quad (6.21)$$

Dado o potencial eletromagnético, podemos escrever o campo magnético (tridimensional) como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (6.22)$$

e esse campo terá uma descontinuidade na superfície $z = 0$.

Pelo Teorema do Divergente (ou de Gauss)

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da, \quad (6.23)$$

onde a primeira integração é feita sobre um volume V e a segunda sobre uma superfície S que contorna o volume V . Assumindo S^+ e S^- as superfícies acima e abaixo da caixa de volume V que contorna o plano $z = 0$ conforme mostrado na Fig. 6.20, temos

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = B_\perp^+ \text{Área}(S^+) - B_\perp^- \text{Área}(S^-) = (B_\perp^+ - B_\perp^-)S, \quad (6.24)$$

uma vez que podemos tomar as duas áreas como iguais.

Dessa forma, nosso resultado será

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = (B_\perp^+ - B_\perp^-)S = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV \cong \rho_m V = \rho_m 2\varepsilon S. \quad (6.25)$$

Como $V \rightarrow 0$, $\rho_m 2\varepsilon \cong \sigma_m$, nossa densidade magnética superficial. Finalmente,

$$\sigma_m = B_z^+ - B_z^- = 2B_z^+, \quad (6.26)$$

e com isso, nosso disco possui uma densidade superficial de monopolo, o que nos impossibilita de considerar esse disco como uma solução física viável para descrever estruturas astrofísicas reais.

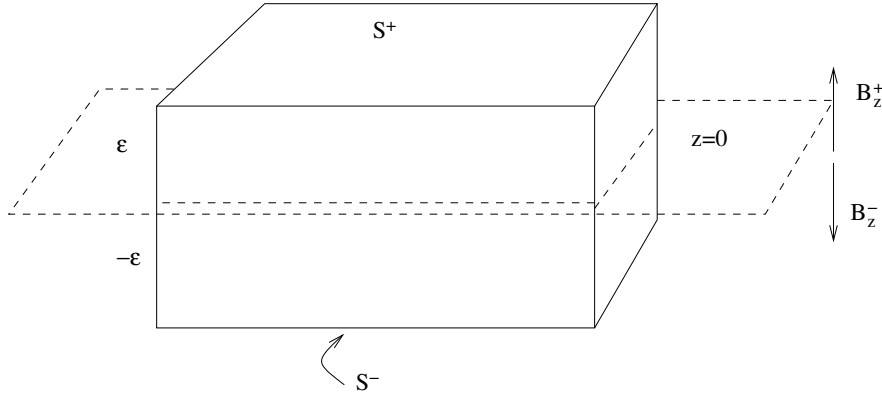


Figura 6.20: Ilustração das superfícies de integração

Nas Figs. 6.21 e 6.22 podemos observar que a densidade superficial de carga é diretamente proporcional a α e inversamente proporcional a z_0 , o que é esperado, uma vez que para o disco mais próximo da fonte do campo magnético, temos campo mais intenso e consequentemente maior valor de σ_m e ao aumentar a intensidade do campo mantendo a posição do disco fixa, também aumenta-se a densidade superficial magnética.

Note ainda que essa densidade diminui com o raio do disco, de modo que para r grande, essa densidade é nula e nós retomamos o campo do dipolo.

Na Fig. 6.12 (b) para a velocidade de contrarrotação, é possível observar que o valor máximo das curvas diminui ao aumentar α . Isso pode ser explicado considerando que ao introduzir o campo magnético, temos uma força que se deve à presença de cargas magnéticas, somada a força centrífuga que equilibra a força gravitacional e ao aumentar o campo, aumenta-se essa terceira força, de modo que para manter o disco em equilíbrio é necessário um valor menor de

força centrífuga, e consequentemente, de velocidade.

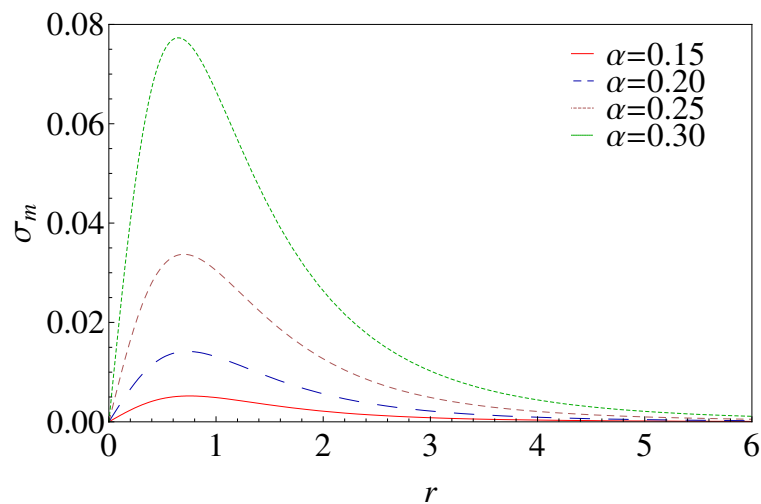


Figura 6.21: Gráfico da densidade superficial de carga em função de r para $z_0 = 1.8$ e $\alpha = 0.15, 0.20, 0.25$ e 0.3

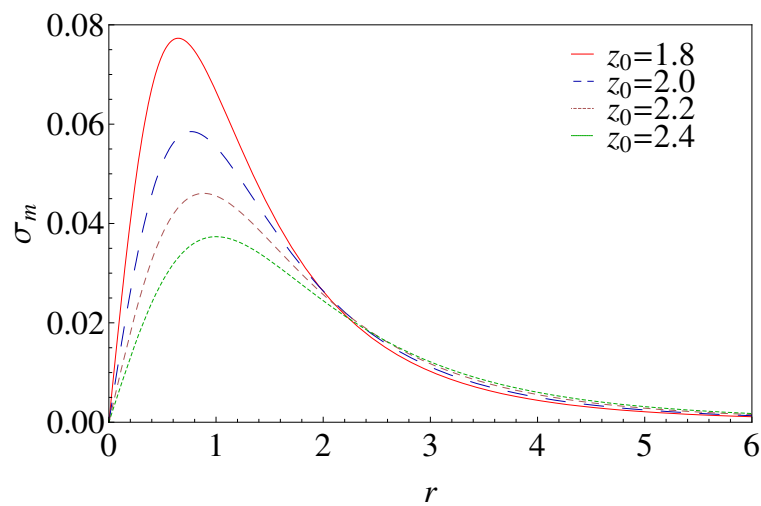


Figura 6.22: Gráfico da densidade superficial de carga em função de r para $\alpha = 0.3$ e $z_0 = 1.8, 2.0, 2.2$ e 2.4

6.3.4 Análise da Estabilidade

Para a solução de Gutsunaev-Manko temos somente pressão azimutal e para fazer a análise da estabilidade devemos recorrer ao estudo feito na Seção (5.4). Apresentamos na Fig. 6.23 o perfil do argumento $(-B/A)$ presente na solução (5.51) para diferentes valores do parâmetro α e considerando um valor fixo de z_0 . Na Fig. 6.24 (a), o perfil para um valor fixo de α e z_0 variável. Nas duas situações temos $m = 1, k = 0$ e $\omega = 1$. De acordo com os testes realizados não foi possível encontrar modos estáveis para o disco de Gutsunaev-Manko. Note ainda, nas Figs. 6.24 (b) e 6.25 (a) que os pontos singulares não dependem dos parâmetros k_φ e ω , mas somente de α e z_0 .

Na Fig. 6.25(b) apresentamos o perfil de $(-B/A)$ presente na solução da perturbação na densidade de energia com campo magnético nulo para diferentes valores de z_0 e nas Figs. 6.26 (a) e (b) temos novamente que o resultado independe de k_φ e ω . Observe que esse resultado sem o campo magnético é equivalente ao caso de Schwarzschild em coordenadas de Weyl.

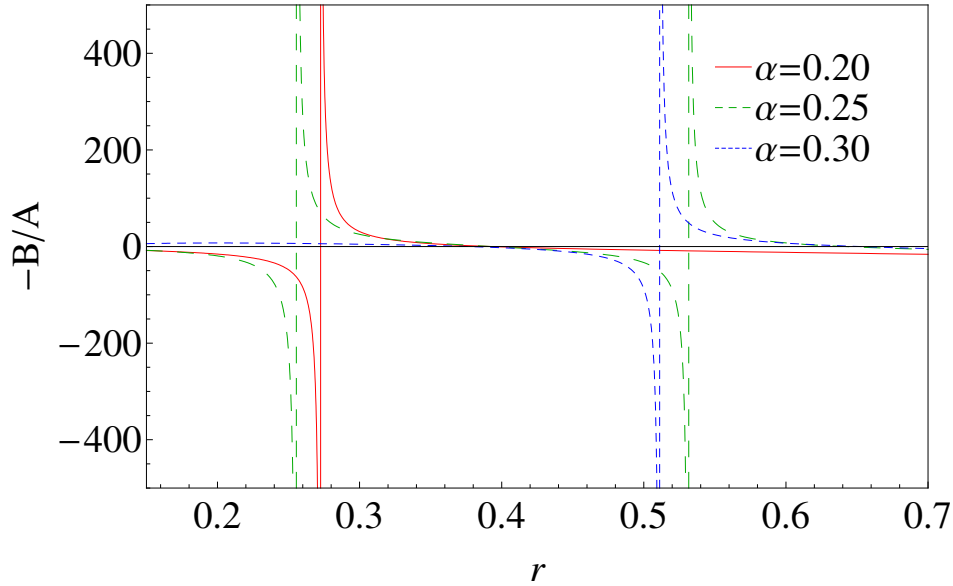
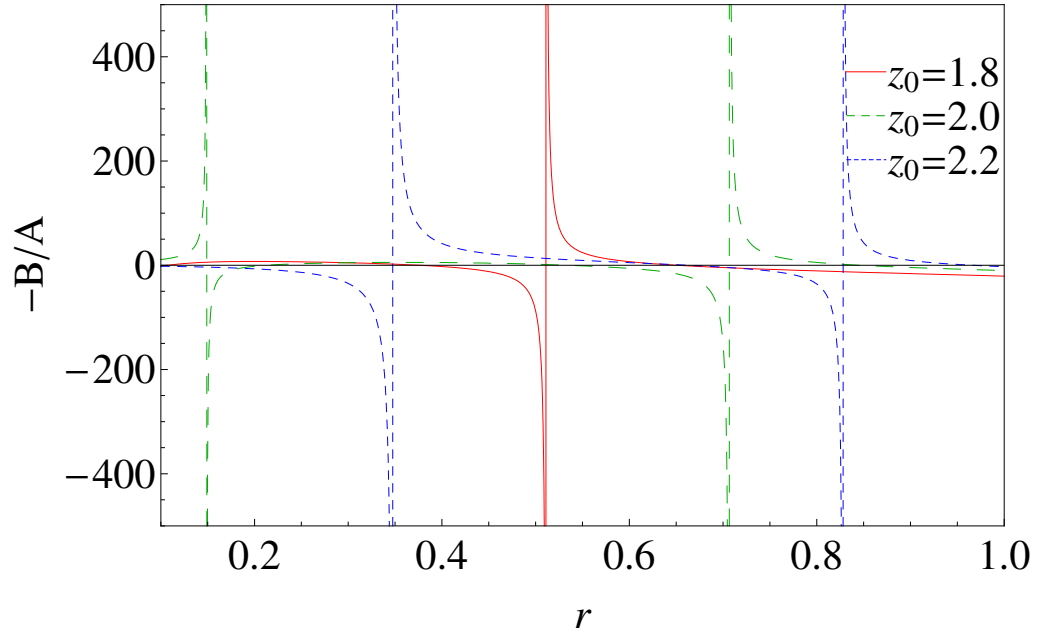
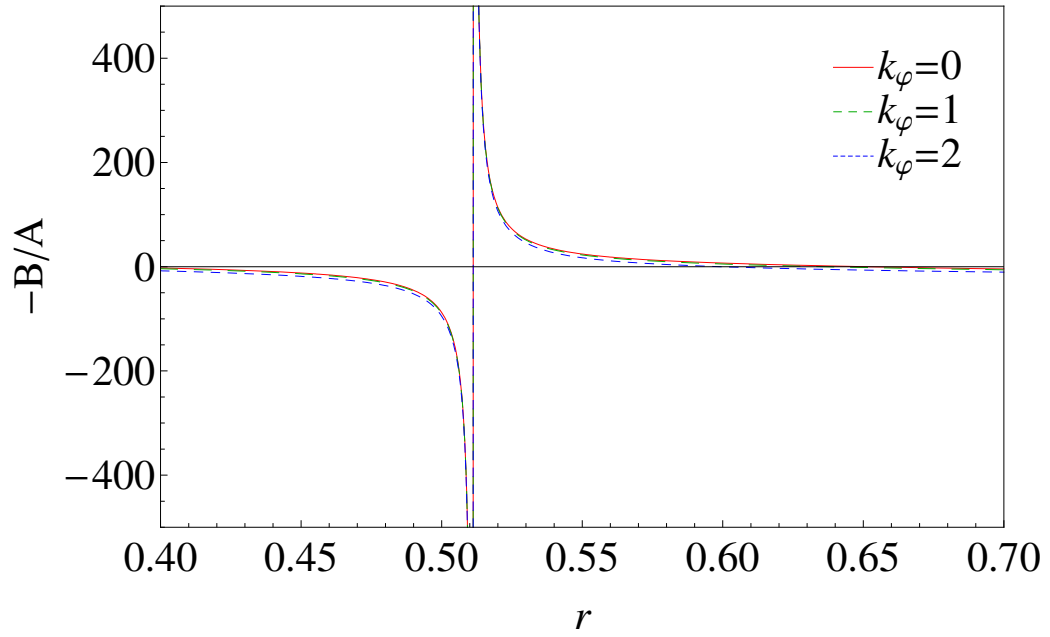


Figura 6.23: Perfil de $(-B/A)$ presente na solução da perturbação na densidade de energia com $z_0 = 1.8$ e $\alpha = 0.2, 0.25$ e 0.3 para $m = 1, k_\varphi = 0, \omega = 1$.

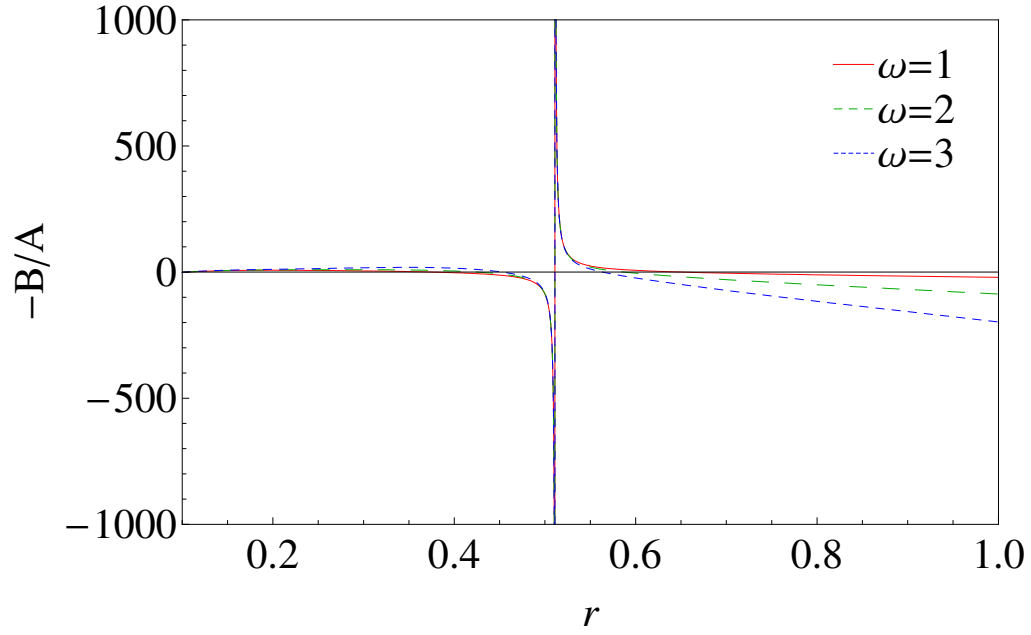


(a)

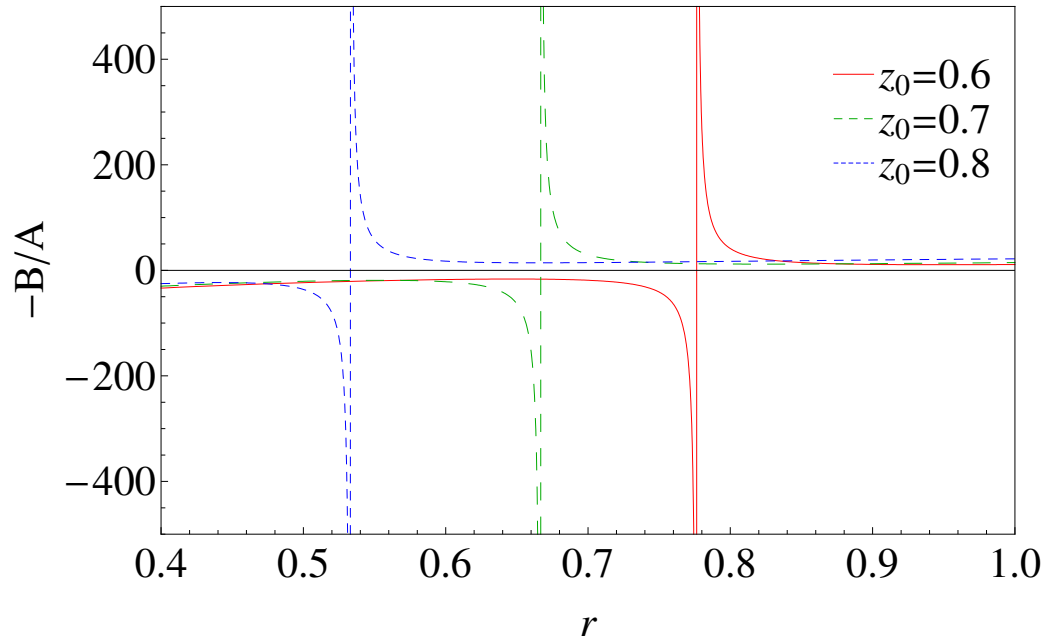


(b)

Figura 6.24: Perfil de $(-B/A)$ presente na solução da perturbação na densidade de energia com (a) $\alpha = 0.3$ e $z_0 = 1.8, 2.0$ e 2.2 para $m = 1, k_\phi = 0, \omega = 1$. e com (b) $k_\phi = 0, 1$ e 2 para $m = 1, z_0 = 1.8, \alpha = 0.3$.

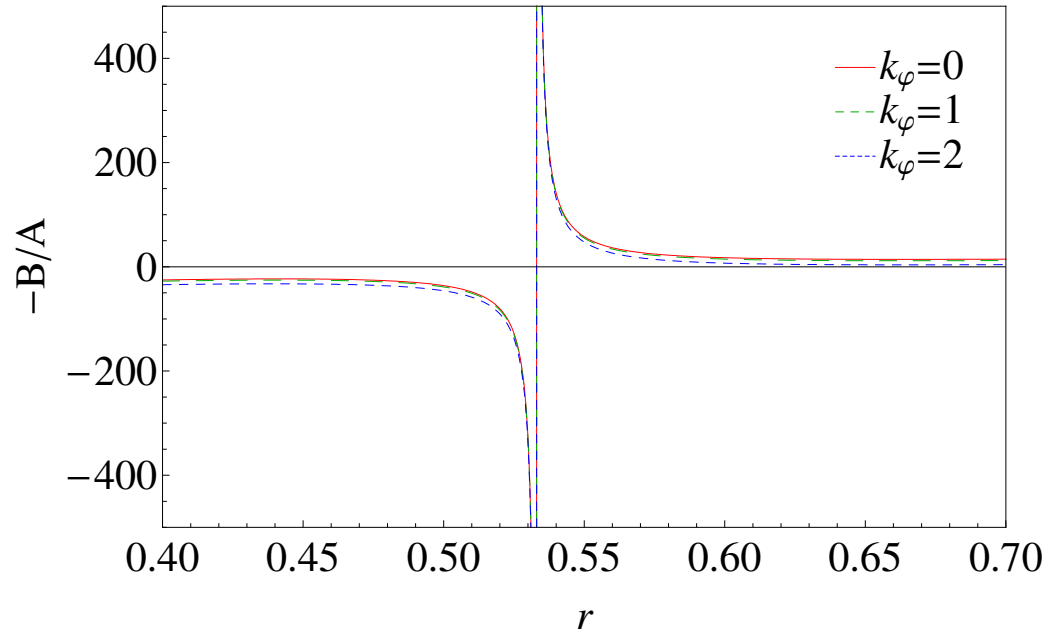


(a)

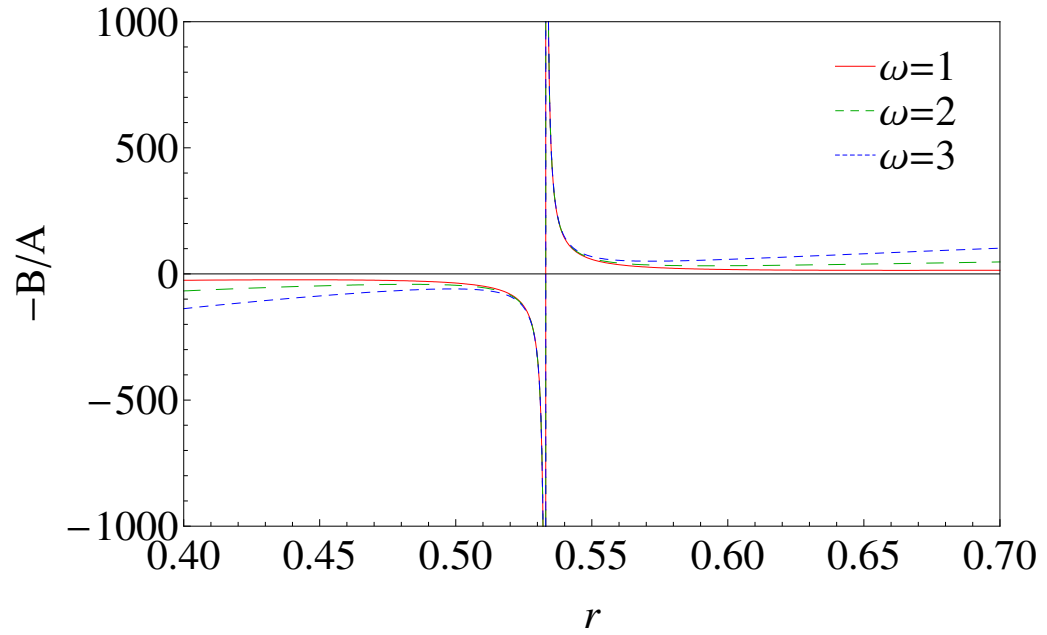


(b)

Figura 6.25: Perfil de $(-B/A)$ presente na solução da perturbação na densidade de energia com (a) $\omega = 1, 2$ e 3 para $m = 1, z_0 = 1.8, \alpha = 0.3$ e com (b) $\alpha = 0$ e $z_0 = 0.6, 0.7$ e 0.8 para $m = 1, k_\varphi = 0, \omega = 1$.



(a)



(b)

Figura 6.26: Perfil de $(-B/A)$ presente na solução da perturbação na densidade de energia com (a) $k_\varphi = 0, 1$ e 2 e com (b) $\omega = 1, 2$ e 3 com $m = 1, z_0 = 0.8, \alpha = 0$.

6.4 Métrica de Bonnor

De modo análogo ao feito para a solução de Schwarzschild, podemos escrever a solução de Bonnor em coordenadas esferoidais prolatas

$$f = \left(\frac{k^2 x^2 - m^2 - b^2 y^2}{(kx + m)^2 - b^2 y^2} \right)^2, \quad (6.27)$$

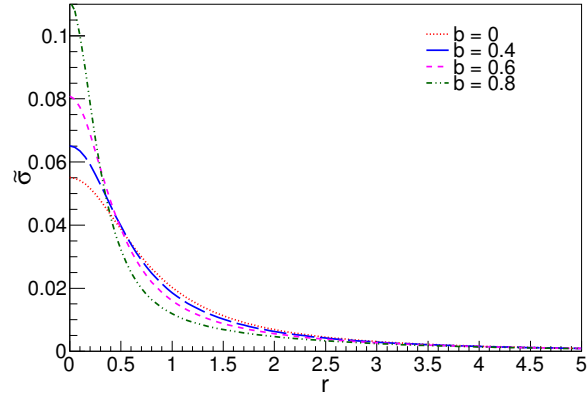
$$e^{2\gamma} = \left(\frac{k^2 x^2 - m^2 - b^2 y^2}{k^2 (x^2 - y^2)} \right)^4. \quad (6.28)$$

E novamente recuperamos as coordenadas de Weyl com a transformação das Eqs. (6.15)-(6.16) e com

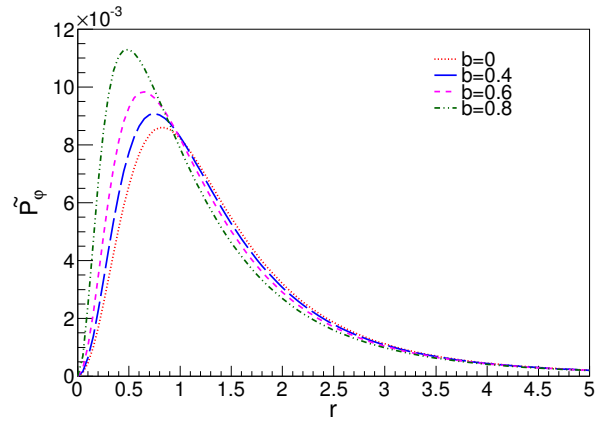
$$k^2 = b^2 + m^2. \quad (6.29)$$

6.4.1 Discos de Bonnor com $m = 0.5$ e $z_0 = 1.2$

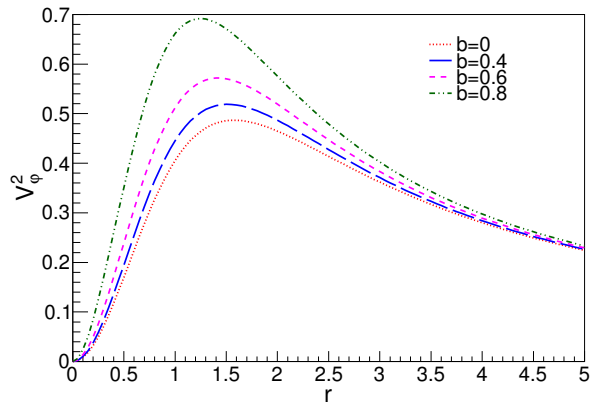
Na Fig. 6.27 (a) podemos ver que ao incluir o campo magnético o máximo central da densidade de energia aumenta para os valores considerados de b . Na Fig. 6.27 (b)-(c) observamos também que a pressão azimutal e a velocidade de contrarotação aumentam ao intensificar o campo magnético e os máximos se aproximam do centro do disco. A dependência do momento angular está apresentada na Fig. 6.28 e nessa situação temos órbitas circulares estáveis de partículas do disco para menores valores de b . Por fim, apresentamos na Fig. 6.29 o perfil de rotação para $m = 0.5$. A velocidade tangencial inicialmente aumenta com o raio até atingir um máximo e para maiores valores de b esse máximo se aproxima do centro do disco.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.27: (a) Densidade de energia superficial σ , (b) Pressão Azimutal P_ϕ e (c) Velocidade de contrarrotação associada à pressão azimutal V_ϕ^2 em função de r , para $z_0 = 1.2$ e $b = 0$ (máximo inferior), 0.4, 0.6 e 0.8 (máximo superior) com $m = 0.5$

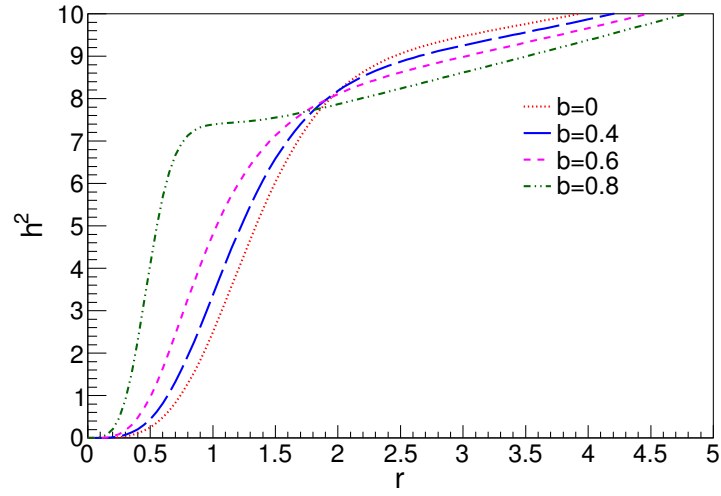


Figura 6.28: Momento angular ao quadrado h^2 em função de r , para $z_0 = 1.2$ e $b = 0, 0.4, 0.6$ e 0.8 com $m = 0.5$

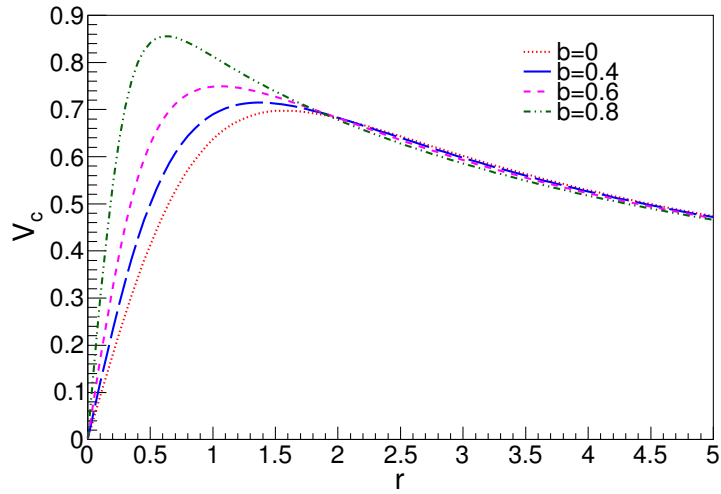


Figura 6.29: Velocidade tangencial V_c em função de r , para $z_0 = 1.2$ e $\alpha = 0$ (curva inferior), $0.4, 0.6$ e 0.8 (curva superior) com $m = 0.5$

6.4.2 Discos de Bonnor com $m = 0.5$ e $b = 0$

Nesta situação eliminamos o momento de dipolo magnético da solução de Bonnor. Observe que como mencionado anteriormente, essa solução não se torna análoga à de Schwarzschild mesmo apresentando um comportamento semelhante à mesma. Na Fig. 6.30 é possível ver que ao aumentar o valor de z_0 o valor do máximo central diminui e o mesmo acontece para a pressão azimutal, velocidade de contrarrotação associada à essa pressão e velocidade tangencial. Nas Fig. 6.31 e 6.33 vemos ainda que o máximo das curvas se afasta do centro do disco ao aumentar o valor de z_0 . Já para o comportamento do momento angular (Fig. 6.32), nota-se que ao construir o disco muito próximo da fonte do campo gravitacional temos região de instabilidade das órbitas circulares e a estabilidade é alcançada ao aumentar z_0 .

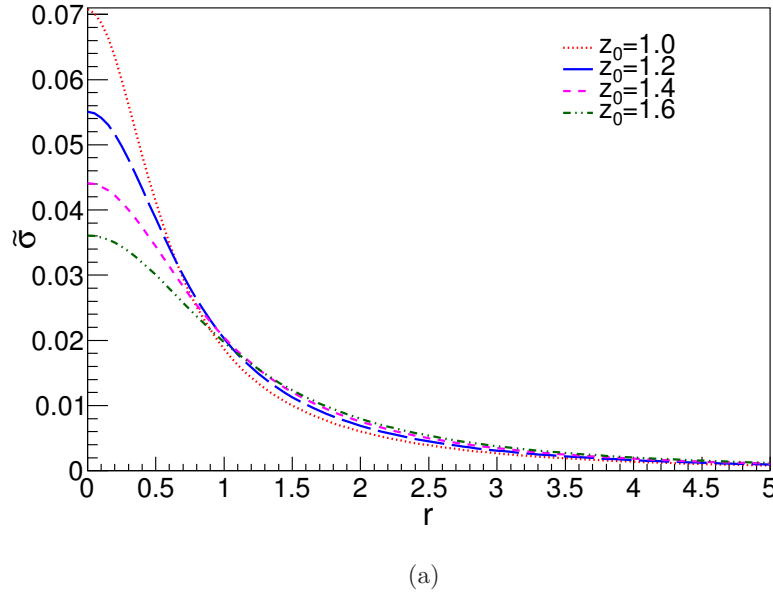
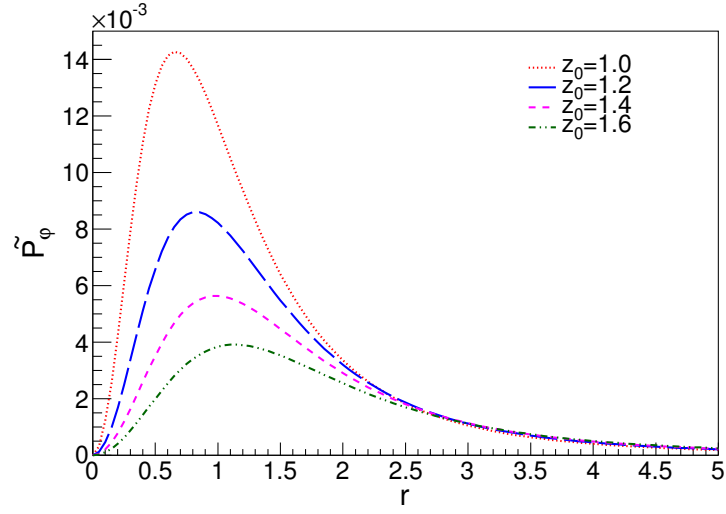
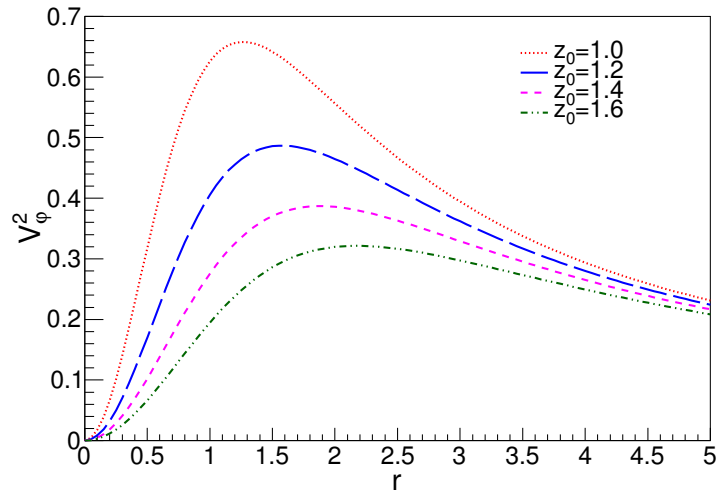


Figura 6.30: Densidade de energia superficial σ em função de r , para $b = 0$ e $z_0 = 1.0$ (máximo superior), 1.2, 1.4 e 1.6 (máximo inferior) com $m = 0.5$



(a)



(b)

Figura 6.31: (a) Pressão Azimutal P_ϕ e (b) Velocidade de contrarrotação associada à pressão azimutal V_ϕ^2 em função de r , para $b = 0$ e $z_0 = 1.0$ (máximo superior), 1.2, 1.4 e 1.6 (máximo inferior) com $m = 0.5$

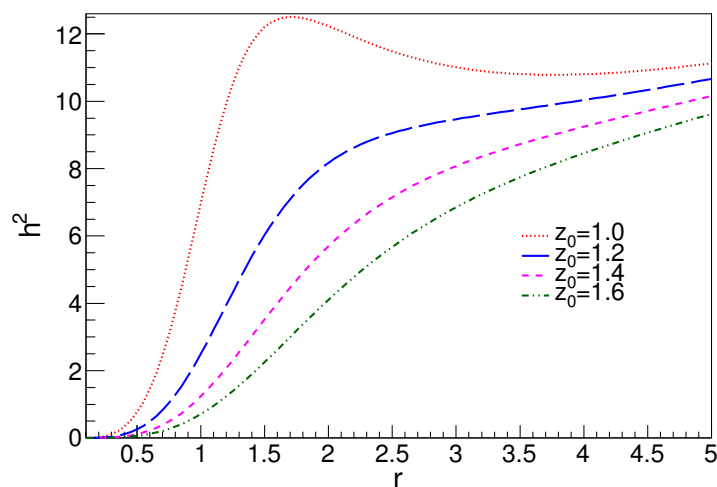


Figura 6.32: Momento angular ao quadrado h^2 em função de r , para $b = 0$ e $z_0 = 1.0$ (curva superior), 1.2, 1.4 e 1.6 (curva inferior) com $m = 0.5$

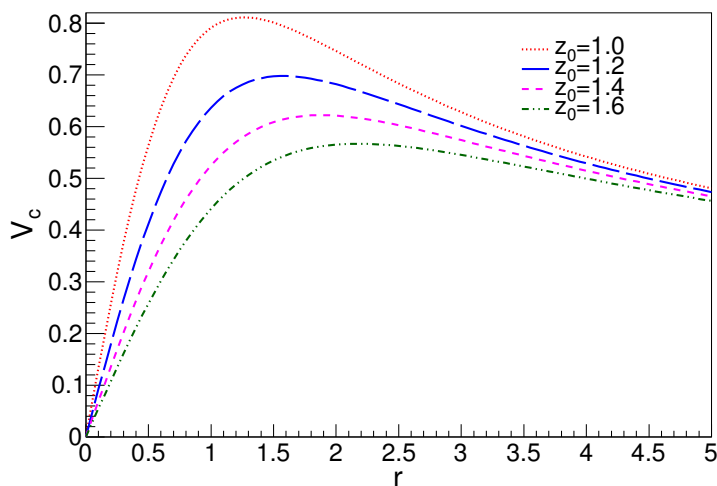


Figura 6.33: Velocidade tangencial V_c em função de r , para $b = 0$ e $z_0 = 1.0$ (máximo superior), 1.2, 1.4 e 1.6 (máximo inferior) com $m = 0.5$

CAPÍTULO 7

Conclusão

Nessa dissertação, utilizamos o método “Deslocar, cortar e refletir” para construir soluções exatas das Equações de Einstein que são representações de espaços-tempo com distribuições discoidais de matéria. A primeira solução foi a construção de discos finos estáticos em coordenadas isotrópicas (métrica de Schwarzschild) e observou-se a presença de órbitas circulares estáveis de partículas-teste no disco e ao perturbar o tensor energia-momento do disco notamos que o disco é radialmente consistente. Estudamos também uma outra versão da métrica de Schwarzschild, em coordenadas de Weyl de forma que o disco possui apenas pressão azimutal. Apesar de possuir órbitas estáveis de partículas, o disco como um todo não é estável, como foi possível observar ao estudar as equações de conservação.

Outra solução estudada foi a de Gutsunaev-Manko após correção de um erro observado em uma das funções métricas na literatura. Essa solução representa um objeto massivo com momento de dipolo magnético e utilizou-se aqui as coordenadas de Weyl, de forma a verificar que para campo magnético nulo retomamos a solução de Schwarzschild. Para campos magnéticos mais intensos o disco possui menor concentração central de massa. Novamente foi possível obter órbitas estáveis de partículas isoladas mas o disco não foi consistente ao perturbar o tensor energia-momento. Devido à descontinuidade do campo magnético, observamos uma densidade superficial de carga magnética, que torna nosso disco uma representação irrealista de um objeto astrofísico. E essa densidade de monopolos aparece em qualquer situação com campo magnético utilizando o método DCR, indicando uma limitação do método.

A última solução estudada foi a solução de Bonnor, que também representa um dipolo magnético, mas ao contrário da solução de Gutsunaev-Manko, não possui Schwarzschild como limite ao eliminar o momento de dipolo magnético.

Uma possível extensão dos trabalhos desenvolvidos seria a introdução de elementos físicos adicionais aos discos, como rotação, e, além disso, estudar como rotação ou mesmo campos magnéticos alteram as propriedades de discos grossos. Mesmo sendo um problema não-trivial, poderia-se estudar a estabilidade desses sistemas por meio de perturbações no tensor energia-momento. Outra possibilidade seria o estudo da estabilidade vertical em discos finos, feito em [70] para o caso Newtoniano no contexto de Relatividade Geral. Pode-se ainda fazer a superposição dos discos (ou outras estruturas como halos, anéis e jatos) com buracos negros.

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Sellwood, *Dynamics of Disks and Warps*, Chapter for Planets, Stars and Stellar Systems v5, arXiv:1006.4855v3[astro-ph.GA].
- [2] J. Bičák, T. Ledvinka, *Relativistic Disks as Sources of the Kerr Metric*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1669 (1993).
- [3] J. Bičák, D. Lynden-Bell, J. Katz, *Relativistic Disks as Sources of Static Vacuum Space-times*, Phys. Rev. **D47**, 4334 (1993).
- [4] J. Bičák, D. Lynden-Bell, C. Pichon, *Relativistic Disks and Flat Galaxy Models*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **265**, 126 (1993).
- [5] T. Ledvinka, M. Zofka, J. Bičák, *Relativistic Disks as Sources of the Kerr-Newman Fields*, Proc. of the MGM8 Meeting Jerusalem (1997).
- [6] C. Pichon, D. Lynden-Bell, *New Sources of Kerr and other Metrics: Rotating Relativistic Disks with Pressure Support*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **280**, 1007 (1996).
- [7] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, 1987).
- [8] A. Friedman, V. L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems* (Springer Verlag, 1984).
- [9] A. Feinstein, J. Ibáñez, R. Lazkoz, *Disks in Expanding FRW Universes*, Astrophys. J. **495**, 131 (1998).

-
- [10] J. P. S. Lemos, O. Ventura, *Planar and Axisymmetric Walls in General Relativity*, J. Math. Phys. **35**, 3604 (1994).
- [11] P. S. Letelier, *Space-time Defects: Open and Closed Shells*, J. Math. Phys. **36**, 3043 (1995).
- [12] P. S. Letelier, A. Wang, *Space-time Defects*, J. Math. Phys. **36**, 3023 (1995).
- [13] A. P. Lobanov, *Ultracompact jets in AGN*, A& A **330**, 79 (1998).
- [14] F. A. Aharonian, *Proton-synchrotron radiation of large-scale jets in active galactic nuclei*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **332**, 215 (2002).
- [15] A. F. Zakharov, N. S. Kardashev, V. N. Lukash, S. V. Repin, *Magnetic fields in active galactic nuclei and microquasars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **342**, 1325 (2003).
- [16] W. A. Bonnor, A. Sackfield, *The Interpretation of Some Spheroidal Metrics*, Comm. Math. Phys. **8**, 338 (1968).
- [17] L. Morgan, T. Morgan, *The Gravitational Field of a Disk*, Phys. Rev. **183**, 1097 (1969).
- [18] L. Morgan, T. Morgan, *Gravitational Field of Shells and Disks in General Relativity*, Phys. Rev D **2**, 2756 (1970).
- [19] D. Lynden-Bell, S. Pineault, Mon. Not. R. Astron. Soc. **185**, 679 (1978).
- [20] P. S. Letelier, S. R. Oliveira, *Exact Self-gravitating Disks and Rings: A Solitonic Approach*, J. Math. Phys. **28**, 165 (1987).
- [21] J. P. S. Lemos, *Self-similar Relativistic Discs with Pressure*, Class. Quantum Grav. **6**, 1219 (1989).
- [22] J. P. S. Lemos, P. S. Letelier, *Superposition of Morgan and Morgan Discs with a Schwarzschild Black Hole*, Class. Quantum Grav. **10**, L75 (1993).

-
- [23] J. P. S. Lemos, P. S. Letelier, *Exact General Relativistic Thin Disks Around Black Holes*, Phys. Rev. D **49**, 5135 (1994).
- [24] J.P.S. Lemos, P.S. Letelier, Int. J. Mod. Phys. D **5**, 53 (1996).
- [25] G. González, O.A. Espitia, *Relativistic Static Thin Disks: The Counterrotating Model*, Phys. Rev. D **68**, 104028 (2003).
- [26] G. García-Reyes, G. González, *Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks*, Phys. Rev. D **69**, 124002 (2004).
- [27] J. Bičák, T. Ledvinka, Phys. Rev. Lett. **71**, 1669 (1993).
- [28] G. González, P.S. Letelier, *Rotating Relativistic Thin Disks*, Phys. Rev. D **62**, 064025 (2000).
- [29] G. González, P.S. Letelier, *Relativistic Static Thin Discs With Radial Stress Support*, Class. Quantum Grav. **16**, 479 (1999).
- [30] P.S. Letelier, Phys. Rev. D **60**, 104042 (1999).
- [31] G. García-Reyes, G. A. González, *Rotating and Counterrotating Relativistic Thin Disks as Sources of Stationary Electrovacuum Spacetimes*, Brazilian Journal of Physics **37**, 1094 (2007).
- [32] J. Katz, J. Bičák, D. Lynden-Bell, Class. Quantum Grav. **16**, 4023 (1999).
- [33] D. Vogt, P.S. Letelier, Phys. Rev. D **68**, 08410 (2003).
- [34] D. Vogt, P.S. Letelier, Phys. Rev. D **70**, 064003 (2004).
- [35] A. C. Gutiérrez-Piñeres, G. A. González, H. Quevedo, *Conformastic disk-halos in Einstein-Maxwell gravity*, arXiv: 1211.4941[gr-qc] - To be published in Physical Review D (2013).
- [36] V. Karas, J.M. Huré, O. Semerák, Class. Quantum Grav. **21**, R1 (2004).

-
- [37] Lord Rayleigh, *On the dynamics of revolving fluids*, Proc. R. Soc. London **A93**, 148 (1916).
- [38] P.S. Letelier *Stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures*, Phys. Rev. D **68**, 104002(2003).
- [39] C. H. García-Duque, G. García-Reyes, *General magnetized Weyl solutions: disks and motion of charged particles*, Gen. Rel. Grav. **43**, 3001 (2011).
- [40] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge Univ. Press, 2009).
- [41] R.M. Wald, *General Relativity* (The Univ. of Chicago Press, 1984).
- [42] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford Univ. Press, 1998).
- [43] J. B. Hartle, *Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison Wesley, 2003).
- [44] J. D. Polanco, *Soluções analíticas para o acoplamento de um fluido e um dipolo magnético massivo em Relatividade Geral* Tese de Doutorado IFGW/UNICAMP (2008), disponível eletronicamente em: <http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/index.php>
- [45] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part I.*, (New York: McGraw-Hill, p. 661, 1953).
- [46] D.M. Zipoy, *Topology of Some Spheroidal Metrics*, J. Math. Phys. **7**, 1137 (1996).
- [47] B.H. Voorhees, *Static Axially Symmetric Gravitational Fields*, Phys. Rev. D **2**, 2119 (1970).
- [48] Ts. I. Gutsunaev, V. S. Manko, *New Static Solutions of the Einstein-Maxwell Equation*, Phys. Lett. A **132**, 85 (1988).
- [49] Ts. I. Gutsunaev, V. S. Manko, *On a family of Solutions of the Einstein-Maxwell Equations*, General Relativity and Gravitation **20** 327 (1988).

- [50] Ts.I. Gutsunaev, V.S. Manko, *On the Gravitational Field of a Mass Possessing a Magnetic Dipole Moment*, Phys. Lett. A **123**, 215 (1987).
- [51] W. B. Bonnor, *An Exact Solution of the Einstein-Maxwell Equations Referring to a Magnetic Dipole*, Z. Phys. **190**, 444 (1966).
- [52] J. P. Ward, *An Analysis of Bonnor's Dipole Solution*, International Journal of Theoretical Physics, **12**, 273 (1975).
- [53] J. Kovář, O. Kopáček, V. Karas, Y. Kojima, *Regular and chaotic orbits near a massive magnetic dipole*, Class. Quantum. Grav. **30**, 025010 (2013).
- [54] P.S. Letelier, *Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial*, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 121 (2005).
- [55] G.G. Kuzmin, *Model of Steady Galaxy Allowing of the Triaxial Distribution of Velocities*, Astron. Zh. **33**, 27 (1956).
- [56] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley (1998).
- [57] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall (1981)
- [58] G.A. González, *Camadas finas e discos em relatividade geral*, Revista INTEGRACIÓN **18**, 19 (2000).
- [59] A.H. Taub, *Space-times with Distribution Valued Curvature Tensors*, J. Math. Phys. **21**, 1423 (1980).
- [60] A.Wang, *Plane Walls Interacting with Gravitational Waves and Matter Fields*, J. Math. Phys. **32**, 2863 (1991).
- [61] A. Wang, *Dynamics of Plane Symmetric Thin Walls in General Relativity*, Phys. Rev. D**45**, 3534 (1992).

-
- [62] D. Vogt, P.S. Letelier, *Exact general relativistic perfect fluid disks with halos*, Phys. Rev. D **68**, 084010 (2003).
- [63] P.S. Letelier, *Exact general relativistic disks with magnetic fields*, Phys. Rev. D **60**, 104042 (1999).
- [64] D. Vogt, *Modelos de discos e outras estruturas auto-gravitantes em Relatividade Geral*, Tese de Doutorado IFGW/UNICAMP (2006), disponível eletronicamente em: <http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/index.php>
- [65] J. P. S. Lemos, *Self-similar Relativistic Discs with Pressure*, Class. Quantum Grav. **6**, 1219 (1989).
- [66] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [67] D. Vogt, P.S. Letelier, *Exact General Relativistic Perfect Fluid With Halos*, Phys. Rev. D **68**, 084010 (2003).
- [68] M. Ujevic e P.S. Letelier, *Stability of general relativistic geometric thin disks*, Phys. Rev. D **70**, 084015 (2004).
- [69] M. Ujevic e P.S. Letelier, *Stability of general relativistic static thick disks: the isotropic Schwarzschild thick disk*, Gen. Rel. Grav. **39**, 1345 (2007).
- [70] R. S. S. Vieira, J. Ramos-Caro, *On the stability criteria for equatorial circular orbits in Galactic Dynamics: I. Newtonian Thin Disks*, arXiv:1206.6501[astro-ph.CO] (2012).