

110000216 DOCL

"Estudo Estatístico da Fratura Frágil".

Aluno: Gilberto Mariano Camilo.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Enrique Medrano.

Campinas, 21 de Março de 1985.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Mestrado defendida pelo aluno Gilberto Mariano Camilo e aprovado pela Comissão Julgadora.



Prof. Dr. Ricardo Enrique Medrano.

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), para obtenção do grau de Mestre em Física.
Fevereiro de 1985.

Aos meus pais.

À minha esposa.

Agradecimentos -

Ao Prof. Ricardo Enrique Medrano por sua atenção, interesse e amizade ao me orientar durante os trabalhos.

Especialmente a meu amigo Pablo Kittl pelo incentivo e apoio material que me possibilitaram o ingresso na pesquisa. Espero com meu esforço e dedicação retribuir à sua confiança e interesse.

Ao meu colega de trabalho e amigo de todas as horas Max Ramos Lucas, que ao longo destes dois anos me incentivou e apoiou.

Aos Professores José Mário Martinez e Petrônio Pulino pela amizade e paciência ao colaborarem no desenvolvimento de programas computacionais.

Aos Professores Luis Hota e José A. Cordeiro por suas relevantes observações na parte estatística.

Ao pessoal técnico do Instituto de Física Gleb-Wataghin, em especial a Juscelino M. Yamamoto por sua presteza e dedicação.

A Simone M. F. da Silva Telles e Enilson A. Felipe do Projeto Fibras Ópticas, pelo auxílio burocrático e de secretaria.

À FAPESP pelo suporte financeiro por meio da bolsa de mestrado concedida.

Ao Instituto de Física Gleb-Wataghin e à Telebrás por fornecerem outros subsídios para a realização e divulgação deste trabalho.

O objetivo do trabalho é determinar-se o mecanismo de fratura seguido pelos materiais frágeis, quando submetidos a variados ensaios mecânicos.

Com este fim, empregou-se diferentes métodos estatísticos de estimativa de parâmetros (Máxima Verossimilhança, Métodos de Momentos e Quadrados Mínimos), sobre algumas das funções de distribuição de probabilidade normalmente empregadas (Weibull, Normal, Lognormal dois Parâmetros e Lognormal três Parâmetros). Com os métodos de ajustamento do Qui-quadrado e de Kolmogorov-Smirnov, mediu-se a qualidade de cada uma das curvas estimadas.

Como ilustração do trabalho teórico realizou-se ensaios de resistência mecânica, compressão e flexão em três pontos, sobre bastões de vidro comum.

Índice

Apresentação	i
Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	v
I - Introdução Geral	1
II - Métodos Estatísticos	3
II.1 - Função de Distribuição de Probab. de Weibull	3
II.1.1 - Função de Weibull para Materiais Frágeis na compressão e na tração	7
a) Estimativa de Parâmetros pelo Método de Máxima Verossim.	9
b) Cálculo da Variância e da Covariância dos Parâmetros Estimados por Máx. Veros.	12
c) Estimativa de Parâmetros pelo Método de Momentos	17
d) Estimativa de Parâmetros pelo Método de Quadrados Mínimos não Lineares	22
II.1.2 - Função de Weibull para Materiais Frágeis na Flexão	24
a) Estimativa dos Parâmetros por Quadrados Mínimos Lineares	25
b) Estimativa dos Parâmetros por Máxima Verossimilhança	27

c) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Momentos	28
d) Estimativa dos Parâmetros por Quadrados Mínimos não Lineares	29
II.2 - Função "Normal" de Distribuição de Probabilidades	30
a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Máxima Verossim.	30
II.3 - Função Lognormal dois Parâmetros de Distribuição de Probabilidades	32
a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Máx. Verossimilhança	32
II.4 - Função Lognormal três Parâmetros de Distribuição de Probabilidades	32
a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Momentos	33
II.5 - Testes de Ajuste de Curvas	35
a) Teste do Qui-quadrado	35
b) Teste de Kolmogorov-Smirnov	36
III - Arranjos Experimentais e Obtenção de Dados	37
III.1 - Introdução	37
III.2 - Testes de Flexão em três Pontos e Dados Obtidos	38
III.3 - Testes de Compressão e Dados Obtidos ...	40
IV - Resultados das Aplicações dos Métodos Estatísticos Sobre os Dados Obtidos	41
V - Discussão dos Resultados	42
VI - Conclusões	47
VII - Figuras	48
VIII - Tabelas	51
IX - Referências	61

I - Introdução Geral:

Os vários modelos estatísticos utilizados em teoria de fratura frágil, tiveram suas origens no trabalho de Griffith [1] , que afirma ser a ruptura do material determinada pela existência de falhas no interior do mesmo. Então há uma distribuição de resistências quando submetemos vários corpos similares constituídos de um mesmo material, a uma mesma força \bar{P} , significando que diferentes intensidades de força são necessárias para a fratura.

Se considerarmos que as falhas estão distribuídas de maneira aleatória, com uma certa densidade por volume, então a formulação estatística do problema se torna mais evidente. A resistência poderá ser determinada ou pela falha mais crítica (o anel mais fraco), ou pelo encadeamento de um grupo de falhas.

O modelo que mais tem obtido sucesso, seguindo os princípios acima, é o modelo do "anel mais fraco", do qual se origina a distribuição de Weibull [2]. Mas, o modelo do encadeamento de falhas, representado pela distribuição de Gauss [3] também fornece resultados muito bons em alguns casos.

Pelas considerações de Griffith se o volume do material aumenta, o número de falhas também aumenta, fornecendo uma relação importante entre o volume e a resistência do material.

Uma outra questão que surge é aquela relacionada com os variados esforços a que pode ser submetido o material. Como se observa, a resistência na compressão possui características diferentes daquela em tração, ou daquela em flexão. Portanto, o mecanismo de fratura deve ser diferente em cada

tipo de ensaio. Por exemplo, nos materiais frágeis a população de falhas presente é constituída de trincas com vários tamanhos e orientações. Na tração a ruptura se origina de uma única trinca, enquanto na compressão isto seguramente não ocorre. Jayatilaka e Trustrum [4,5] sugeriram um modelo baseado nestes fatos para explicar a compressão em materiais frágeis. Assim, concluíram que o volume não se relacionaria com a resistência do material e o modelo seria o de encadeamento de falhas.

Dentro da teoria estatística temos recursos que nos possibilitam conhecer bem os parâmetros de uma determinada função de distribuição de probabilidade, partindo do conhecimento de um conjunto de dados, obtido aleatoriamente, que seja descritível por tal função de distribuição. Estes recursos estão contidos na "teoria de estimativa de parâmetros".

Dentre os vários métodos de estimativa podemos citar três importantes: o de Máxima Verossimilhança, o de Momentos e o de Quadrados Mínimos. As qualidades destes métodos variam, sendo o de Máxima Verossimilhança o que se apresenta melhor segundo alguns autores [6].

O objetivo de nosso trabalho será obter informações sobre os mecanismos de fratura que seguem os materiais frágeis nos variados tipos de ensaios mecânicos (tração, compressão e flexão). Os métodos de estimativa servirão para determinar os parâmetros das funções de distribuição de probabilidades sugeridas (Weibull, Normal, Lognormal dois Parâmetros e Lognormal três Parâmetros). Para medirmos a eficiência de cada uma das funções ao descreverem os diversos grupos de dados, utilizaremos o Teste de Ajustamento do Qui-quadrado e o de Kolmogorov-Smirnov.

II - Métodos Estatísticos -

II.1 - Função de Distribuição de Probabilidades de Weibull.

Esta função de distribuição tem sua origem baseada no modelo do anel mais fraco, ou seja, o fenômeno final, no nosso caso a ruptura do material, é consequência de um primeiro evento. Para nós este evento será o crescimento ilimitado de uma trinca no corpo de prova.

A função de Weibull pode ser deduzida da seguinte forma, tendo como base o modelo citado:

- Se efetuamos um grande número de ensaios em corpos similarmente fabricados, sob os quais seja aplicado um sistema de forças \vec{P} , aumentando-se \vec{P} de zero até a ruptura do corpo, obtêm-se um sistema $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$ de tensões. Estas tensões são as máximas suportadas por cada um dos n corpos de prova, e elas permitem a obtenção (experimentalmente) da probabilidade de ruptura de uma peça similar submetida a uma tensão máxima σ . Esta probabilidade é:

$$F(\sigma) = \frac{n}{N} . \tag{1}$$

n - número de peças que se romperam a uma tensão menor ou igual a σ .

N - número total de peças ensaiadas.

F(σ) - probabilidade acumulativa de ruptura.

Como é óbvio,

$$F(\infty) = 1 \text{ e } F(0) = 0,$$

ou seja, nenhuma peça se rompe a uma tensão nula e todas

acabam por se romper a uma tensão suficientemente alta ; deixamos de lado em nossas discussões a fadiga estática que indica haver sempre um tempo ao final do qual a peça se rompe.

Se todos os corpos foram similarmente construídos, além disso, se o material tem as mesmas propriedades em qualquer ponto (isotrópico), deve então verificar-se:

$$\begin{aligned} \bar{F}(V_1 \cup V_2) &= \bar{F}(V_1) \cdot \bar{F}(V_2), \\ (V_1 \cap V_2) &= \emptyset, \quad (V_1 \cup V_2) = V. \end{aligned} \quad (3)$$

\bar{F} é a probabilidade de que não se rompa (não F), V_1 e V_2 são decomposições quaisquer de V.

As expressões em (3) definem uma função com a seguinte propriedade:

$$\bar{F}(0) = 1 - F(0) = 1, \quad (4)$$

visto que

$$\bar{F}(V+0) = \bar{F}(V) = \bar{F}(V) \cdot \bar{F}(0) .$$

Para um pequeno incremento de volume obtemos:

$$\bar{F}(V+\Delta V) = \bar{F}(V) + \bar{F}'(V) \cdot \Delta V = \bar{F}(V) \cdot \bar{F}(\Delta V) . \quad (5)$$

Mas, $\bar{F}(V)$ em torno da origem fornece:

$$\bar{F}(\Delta V) = \bar{F}(0+\Delta V) = \bar{F}(0) + \bar{F}'(0) \cdot \Delta V = 1 + \bar{F}'(0) \cdot \Delta V. \quad (6)$$

Então, substituindo (6) em (5)

$$\begin{aligned} \bar{F}(V) + \bar{F}'(V) \cdot \Delta V &= \bar{F}(V) \cdot [1 + \bar{F}'(0) \cdot \Delta V] = \\ &= \bar{F}(V) + \bar{F}'(V) \cdot \bar{F}'(0) \cdot \Delta V. \end{aligned} \quad (7)$$

Deduzindo finalmente

$$\frac{\bar{F}'(V)}{\bar{F}(V)} = \frac{\bar{F}'(0)}{1} = \frac{\bar{F}'(0)}{\bar{F}(0)}. \quad (8)$$

Significa que para σ constante a quantidade de peças que não se rompem ao aumentar-se o volume é constante. Mas, esta constante deve ser uma função de σ e negativa, pois quanto maior uma peça mais fácil ela se rompe, mais provável que possua uma trinca que ao se propagar leve à ruptura. Logo, podemos escrever:

$$\frac{\bar{F}'(V)}{\bar{F}(V)} = \frac{-\phi(\sigma)}{V_0}. \quad (9)$$

V_0 é a unidade de volume, portanto, $\phi(\sigma)/V_0$ é a esperança de sobrevivência a um nível σ de tensão, por unidade de volume.

Integrando (9) obtemos:

$$\ln \bar{F}(V) = - \phi(\sigma) \left(\frac{V}{V_0} \right). \quad (10)$$

Portanto,

$$\bar{F}(V) = \exp \left[- \phi(\sigma) \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]. \quad (11)$$

$$F(V) = 1 - \exp \left[- \phi(\sigma) \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]. \quad (12)$$

Em seu trabalho de 1939 [2] Weibull supôs a seguinte função $\Phi(\sigma)$:

$$\Phi(\sigma) \begin{cases} \left(\frac{\sigma - \sigma_l}{\sigma_o} \right)^m, & \sigma > \sigma_l \\ 0, & \sigma < \sigma_l \end{cases} \quad (13)$$

σ_l é a tensão abaixo da qual não se constata ruptura, m é uma medida da dispersão de σ e σ_o uma constante de adaptação escalar.

Portanto,

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_l}{\sigma_o} \right)^m \left(\frac{V}{V_o} \right) \right] \quad (14)$$

Kies [7] propôs outra expressão com o objetivo de eliminar um defeito na expressão de Weibull, que admite a existência de peças que sô se rompem a uma tensão infinita:

$$\Phi(\sigma) \begin{cases} \left(\frac{\sigma - \sigma_l}{\sigma_s - \sigma} \right)^m, & \sigma_l < \sigma < \sigma_s \\ 0, & -\infty < \sigma < \sigma_l \\ \infty, & \sigma_s < \sigma < +\infty \end{cases} \quad (15)$$

σ_s é a tensão máxima suportável pelos corpos de prova.

Logo,

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{V}{V_o} \right) \left(\frac{\sigma - \sigma_l}{\sigma_s - \sigma} \right)^m \right] \quad (16)$$

Uma outra equação que tem maior difusão é quando consideramos $\sigma_l = 0$ e $\sigma_s = \infty$. Com estas suposições a função $\Phi(\sigma)$ fica reduzida a:

$$\Phi(\sigma) \begin{cases} (\sigma/\sigma_0)^m, & \geq 0. \\ 0, & < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Onde as constantes já foram definidas anteriormente. A probabilidade integrada de fratura fica assim definida:

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[-(\sigma/\sigma_0)^m (V/V_0) \right]. \quad (18)$$

A vantagem maior desta equação é que se a representarmos em um gráfico bi-logarítmico, podemos estimar por quadrados mínimos lineares os seus parâmetros, gráfico conhecido como "Diagrama de Weibull". Veremos este procedimento com detalhes no item referente a "Função de Weibull para materiais frágeis em flexão".

II.1.1 - Função de Weibull para Materiais Frágeis na Compressão e na Tração.

Como vimos no item anterior, temos três equações do tipo da equação de Weibull, com duas delas envolvendo tensões limites.

Aulich et.al. [8] ensaiaram fibras de quartzo fundido (ópticas), com uma variação muito grande de comprimento (o diâmetro foi mantido constante). A partir dos re-

sultados foi possível obter um intervalo de probabilidades de fratura muito grande, e mostraram que a equação (16) estaria de acordo com estes resultados. Representando esta equação em um diagrama de Weibull, teremos a curva indicada na figura 1.

Na primeira região desta curva, vemos um comportamento assintótico em relação a σ_{ℓ} . Na segunda região percebemos um comportamento quase linear, daí a equação (18) ser largamente empregada, estimando-se os parâmetros por regressão linear. Na terceira região, novamente surge um comportamento assintótico, agora em relação a σ_s .

A conclusão que podemos tirar é a de que a localização dentro do diagrama da figura 1, depende da qualidade do material ensaiado e das condições em que se encontram as amostras por ocasião do ensaio. Se o material for de alta qualidade as tensões provavelmente se localizarão na parte direita da curva, havendo possibilidade de se estimar σ_s . Por outro lado, se o material for ruim, apresentar degradação devido a algum fator qualquer (por exemplo, fibras ópticas em contato com água), haverá maior probabilidade das tensões se localizarem no lado esquerdo do referido diagrama, favorecendo uma estimativa de σ_{ℓ} .

Na maioria dos materiais cerâmicos e vidros, se obtêm valores de tensões próximas ao limite inferior. Como vamos investigar inicialmente vidro comum (borossilicatos), com as amostras obtidas de bastões comprados no mercado, sem uma preocupação maior com sua qualidade, podemos utilizar a equação (14), que é uma boa aproximação para este caso.

Passemos a aplicar os diferentes métodos estatísticos de estimativa de parâmetros sobre a equação (14). Vamos aplicar os seguintes métodos:

- Máxima Verossimilhança.
- Método de Momentos.
- Quadrados Mínimos não Lineares.

a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Máxima Verossimilhança.

A função de máxima verossimilhança é :

$$L(m, \sigma_\ell, \sigma_0) = \prod_{i=1}^n f(\sigma_i; m, \sigma_\ell, \sigma_0) , \quad (19)$$

onde $f(\sigma)$ é a função densidade de probabilidade.

Sabemos que:

$$f(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} F(\sigma) . \quad (20)$$

Substituindo (14) em (18), temos:

$$f(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right] \right\} .$$

Logo,

$$f(\sigma_i) = \frac{V_m}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \cdot \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right]. \quad (21)$$

Substituindo (19) em (17):

$$L(m, \sigma_\ell, \sigma_0) = \prod_{i=1}^n \frac{V_m}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \cdot \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right]. \quad (22)$$

Desenvolvendo, fica:

$$L(m, \sigma_\ell, \sigma_0) = \left(\frac{V_m}{V_0 \sigma_0} \right)^n \cdot \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \dots \left(\frac{\sigma_n - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \cdot \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right] \dots \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_n - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right].$$

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros m, σ_ℓ e σ_0 são variáveis aleatórias determinadas a partir da amostragem $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, e por meio das funções decisão:

$$\hat{m} = d_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

$$\hat{\sigma}_\ell = d_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

$$\hat{\sigma}_0 = d_3(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Estes estimadores são tais que maximizam a função de máxima verossimilhança. Portanto, estes pontos são aquelas soluções para o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial L}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma_\ell} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma_0} = 0. \quad (23)$$

Onde, $L \equiv L(m, \sigma_\ell, \sigma_0)$.

Como $L(m, \sigma_\ell, \sigma_0)$ possui pontos singulares nos mesmos pontos que $\ln [L(m, \sigma_\ell, \sigma_0)]$, pois a função L é contínua e crescente na região de interesse, fica muito mais fácil trabalhar com a função logarítmica. Portanto, investigaremos:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_\ell} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_0} = 0. \quad (24)$$

Onde, $L \equiv L(m, \sigma_\ell, \sigma_0)$.

Avaliando o logaritmo natural da equação (21),

$$\begin{aligned} \ln L(m, \sigma_\ell, \sigma_0) = & n \ln \left(\frac{Vm}{V_0 \sigma_0} \right) + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right)^{m-1} - \\ & - \frac{V}{V_0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right)^m. \end{aligned} \quad (25)$$

E substituindo (25) em (24), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{n}{m} + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right) - \frac{V}{V_0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right)^m \ln \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right) = 0. \quad (26)$$

$$- (m-1) \sum_{i=1}^n (\sigma_i^{-\sigma_\ell})^{-1} + \frac{mV}{V_0 \sigma_0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right)^{m-1} = 0. \quad (27)$$

$$\frac{m}{\sigma_0} \left[-n + \frac{V}{V_0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^{-\sigma_\ell}}{\sigma_0} \right)^m \right] = 0. \quad (28)$$

Este sistema de equações foi resolvido por meio de modificações no Método de Newton, implementando [9] e [10].

b) Cálculo da Variância e da Covariância dos Parâmetros Estimados por Máxima Verossimilhança.

Uma das peculiaridades deste método é a possibilidade de se obter informações sobre a variância e a covariância dos parâmetros estimados. O procedimento consiste em se lançar mão da matriz de informação de Fisher. Os elementos desta matriz (r_{ij}) são constituídos por valores esperados (com sinal negativo) das derivadas de segunda ordem do logaritmo da função de verossimilhança. Ou seja,

$$r_{ij} = - E \left[\frac{\partial^2 \ln L(\sigma_i; \theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] . \quad (29)$$

Onde, $\theta_1 = m$, $\theta_2 = \sigma_\ell$ e $\theta_3 = \sigma_o$. i e j variam de 1 a 3.

A variância e a covariância dos estimadores são obtidos de $\frac{1}{nR}$, R a matriz de informação.

A localização da variância (v) e da covariância (cv) de cada um dos parâmetros na matriz obtida a partir da matriz de informação, é:

$$\frac{1}{nR} = \begin{pmatrix} v(\hat{m}) & cv(\hat{m}, \hat{\sigma}_\ell) & cv(\hat{m}, \hat{\sigma}_o) \\ cv(\hat{m}, \hat{\sigma}_\ell) & v(\hat{\sigma}_\ell) & cv(\hat{\sigma}_\ell, \hat{\sigma}_o) \\ cv(\hat{m}, \hat{\sigma}_o) & cv(\hat{\sigma}_\ell, \hat{\sigma}_o) & v(\hat{\sigma}_o) \end{pmatrix} \quad (30)$$

Observa-se que esta matriz é simétrica pois $cv(\hat{m}, \hat{\sigma}_\ell) = cv(\hat{\sigma}_\ell, \hat{m})$, por exemplo.

A matriz R , de acordo com (29), é:

$$R = \begin{pmatrix} - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} \right) & - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \partial \sigma_\ell} \right) & - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \partial \sigma_0} \right) \\ - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\ell \partial m} \right) & - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\ell^2} \right) & - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\ell \partial \sigma_0} \right) \\ - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_0 \partial m} \right) & - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_0 \partial \sigma_\ell} \right) & - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_0^2} \right) \end{pmatrix} . \quad (31)$$

Portanto, após avaliarmos cada uma das esperanças exigidas, inverteremos a matriz de informação e multiplicaremos cada um de seus elementos por $1/n$, fazendo a comparação final com (30).

Como indicado na equação (31), para o cálculo das esperanças, vamos necessitar das seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = - \frac{1}{m^2} - \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln^2 \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) . \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \partial \sigma_0} = - \frac{1}{\sigma_0} + \frac{Vm}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) + \frac{V}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m . \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \partial \sigma_\ell} &= \frac{-1}{\sigma - \sigma_\ell} + \frac{Vm}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) + \\ &+ \frac{V}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} . \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_0^2} = - \frac{m}{\sigma_0^2} - \frac{Vm(m+1)}{V_0 \sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m . \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_0 \partial \sigma_\ell} = \frac{-V m^2}{V_0 \sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} . \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\ell^2} = - \frac{m-1}{\sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{-2} - \frac{Vm(m-1)}{V_0 \sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-2}. \quad (37)$$

Lembrando que,

$$E(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma f(\sigma) d\sigma, \quad (38)$$

onde $f(\sigma)$ é a função densidade de probabilidade, vamos avaliar quatro esperanças que serão importantes:

Avaliemos primeiramente

$$E \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^p = \int_{\sigma_\ell}^{\infty} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^p \frac{mV}{\sigma_0 V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \times \\ \times \exp \left[\frac{-V}{V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right] d\sigma. \quad (39)$$

p inteiro.

Observamos que a integral passou a ter limite inferior em σ_ℓ , uma vez que não é possível tensão de ruptura menor do que esta.

Façamos a mudança de variáveis:

$$t = \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m, \text{ com } dt = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} d\sigma. \quad (40)$$

Substituindo (40) em (39) e utilizando a função

"Gama de Euler", encontramos:

$$E \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^p = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-p/m} \cdot \Gamma(1 + p/m). \quad (41)$$

$$\text{Onde, } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Para o cálculo de $E \left[\left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \right]$ faremos outra troca de variáveis:

$$x = \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m, \quad dx = \frac{Vm}{V_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} d\sigma. \quad (43)$$

Daí,

$$E \left[\left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \right] = \frac{1}{(V/V_0)^m} \int_0^{+\infty} x \ln x e^{-x} dx - \ln \left(\frac{V}{V_0} \right). \quad (44)$$

A integral em (44) é dada por [11] :

$$\int_0^{\infty} x \ln x e^{-x} dx = 0.422785. \quad (45)$$

Para $E \left[\left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln^2 \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \right]$ utilizamos a mesma troca de variáveis anterior, obtendo:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_\ell}^{\infty} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln^2 \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \cdot F(\sigma) d\sigma = \\ & = \frac{1}{(V/V_0)^{m^2}} \left[\int_0^{\infty} x \ln^2 x e^{-x} dx - 2 \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \cdot \int_0^{\infty} x \ln x e^{-x} dx + \ln^2 \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]. \quad (46) \end{aligned}$$

A primeira integral que surge em (46) é dada pelo valor aproximado [12]:

$$\int_0^{\infty} x \ln^2 x e^{-x} dx = 0.82379. \quad (47)$$

A segunda integral em (46) já foi vista em (45).

Utilizaremos também $E \left[\left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \right]$.

Por meio da troca de variáveis (43) obtemos:

$$E \left[\left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \right] = \frac{1}{m \left(\frac{V}{V_0} \right)^{[1 - (1/m)]}} \cdot \int_0^{+\infty} x^{[1 - (1/m)]} \ln x \cdot e^{-x} \cdot dx - \left(\frac{m-1}{m} \right) \cdot \Gamma \left(\frac{m-1}{m} \right) \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \quad (48)$$

Definamos $J(m)$ como:

$$J(m) = \int_0^{+\infty} x^{[1 - (1/m)]} \cdot \ln x \cdot e^{-x} \cdot dx. \quad (49)$$

A solução para (49) é dada por [13]:

$J(m) = \Gamma(v) \cdot \Psi(v)$, onde v é igual a $[2 - (1/m)]$ e real.

Ficamos com a condição de que m deve ser maior do que 0.5.

Observa-se que $\Psi(v)$ é a função "psi de Euler".

Portanto está concluída a solução para (48).

De posse dos resultados para (39), (44), (46) e (48) estamos aptos a avaliar todos os r_{ij} , elementos da matriz de Fisher. Listaremos abaixo cada um deles, lembrando que a matriz é simétrica.

$$r_{11} = - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} \right) = \frac{1}{m^2} + A \cdot E \left[\left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln^2 \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) \right] = \frac{1}{m^2} (1.82379 - 0.84557 \ln A + \ln^2 A). \quad (50)$$

Substituímos (V/V_0) por A . Se possível substituiremos $[1-(1/m)]$ por z nas próximas expressões.

$$r_{12} = - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \partial \sigma_\ell} \right) = \frac{1}{\sigma_0} E \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{-1} - \frac{Am}{\sigma_0} E \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1}$$

$$\cdot \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) - \frac{A}{\sigma_0} E \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} = \frac{1}{\sigma_0} A^{(1/m)}$$

$$\frac{1}{m} + z \ln A \quad \Gamma(z) - J(m) \quad . \quad (51)$$

$$r_{13} = - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \partial \sigma_0} \right) = - E \left[- \frac{1}{\sigma_0} + \frac{Am}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right) + \frac{A}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right] = \frac{1}{\sigma_0} (\ln A - 0.422785) . \quad (52)$$

$$r_{22} = - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\ell^2} \right) = - E \left[- \frac{m-1}{\sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{-2} - \frac{Am(m-1)}{\sigma_0^2} \cdot \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-2} \right] = \left(\frac{m-1}{\sigma_0} \right)^2 \cdot A^{(2/m)} \Gamma [z - (1/m)] . \quad (53)$$

$$r_{23} = - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\ell \partial \sigma_0} \right) = - E \left[- A \frac{m}{\sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^{m-1} \right] = \left(\frac{zm^2}{\sigma_0^2} \right) A^{(1/m)} \cdot \Gamma(z) . \quad (54)$$

$$r_{33} = - E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_0^2} \right) = - E \left[\left(\frac{m}{\sigma_0^2} \right) - A \frac{m(m+1)}{\sigma_0^2} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right] = \left(\frac{m}{\sigma_0} \right)^2 . \quad (55)$$

c) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Momentos -

John H. K. Kao [14] mostrou que o k-ésimo momento da distribuição de Weibull, neste caso, é dado por:

$$M_k^* = \sigma_\ell^k + k \int_{\sigma_\ell}^{\infty} \sigma^{(k-1)} [1 - F(\sigma)] \cdot d\sigma. \quad (56)$$

Onde k é a ordem do momento considerado e F(σ) a função de Weibull acumulativa (14).

Este método de estimativa consiste em igualar-se momentos de determinada ordem aos momentos amostrais de mesma ordem. Então,

$$M_k^* = M_k. \quad (57)$$

M_k^* é um momento de ordem k e M_k é o k-ésimo momento amostral.

Com os três primeiros momentos construímos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^* , \\ M_2 &= M_2^* - (M_1^*)^2 , \\ M_3 &= M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3 , \end{aligned} \quad (58)$$

O primeiro momento foi tomado em torno da origem e o segundo e terceiro tomados em torno do valor médio [6].

Os momentos amostrais são:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i , \text{ a média.} \quad (59)$$

$$M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - M_1)^2 , \text{ a variância.} \quad (60)$$

$$M_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - M_1)^3, \text{ o skewness.} \quad (61)$$

Especifiquemos as expressões do sistema (58):

- Como mostrado por K. Kao, expressão (56),

$$M_1^* = \sigma_\ell + \int_{\sigma_\ell}^{\infty} \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_0} \right)^m \right] d\sigma, \quad (62)$$

chamando $\sigma - \sigma_\ell = x$ e $-(V/V_0)/(\sigma_0)^m = -q$ temos,

$$M_1^* = \sigma_\ell + \int_0^{\infty} \exp [(-qx^m)] dx. \quad (63)$$

Mas [15] ,

$$\int_0^{\infty} \exp (-qx^v) x^z dx = \left[v q^{\left(\frac{z+1}{v} \right)} \right]^{-1} \cdot \Gamma \left(\frac{z+1}{v} \right), \quad (64)$$

onde $\Gamma(x)$ é dada por (42) e também,

$$\frac{1}{m} \Gamma(1/m) = \Gamma \left(\frac{1}{m} + 1 \right). \quad (65)$$

Logo,

$$M_1^* = \sigma_\ell + q^{(-1/m)} \Gamma \left(\frac{1}{m} + 1 \right). \quad (66)$$

Substituindo q e A pelos seus valores originais

$$M_1^* = \sigma_\ell + \sigma_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{(1/m)} \Gamma \left(\frac{1}{m} + 1 \right), \quad (67)$$

vamos fazer mais uma identificação que será útil;

$$\Gamma \left(\frac{i}{m} + 1 \right) \equiv g_i. \quad (68)$$

Logo:

$$M_1 = \sigma_\ell + \sigma_o \left(\frac{V_o}{V} \right)^{(1/m)} g_1 . \quad (69)$$

Para o segundo momento,

$$M_2 = M_2^* - (M_1^*)^2 . \quad (70)$$

M_2^* utilizando (56) é

$$M_2^* = \sigma_\ell^2 + 2 \int_{\sigma_\ell}^{\infty} \sigma \cdot \exp \left[- \frac{V}{V_o} \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_o} \right)^m \right] d\sigma . \quad (71)$$

Fazendo $\sigma - \sigma_\ell = x$ e $q = (V/V_o) / (\sigma_o^m)$,

$$M_2^* = \sigma_\ell^2 + 2 \int_0^{\infty} x \exp [(-qx^m)] dx + \sigma_\ell \int_0^{\infty} \exp(-qx^m) dx . \quad (71a)$$

Utilizando (64),

$$M_2^* = \sigma_\ell^2 + q^{(-2/m)} \cdot g_2 + 2\sigma_\ell q^{(-1/m)} \cdot g_1 . \quad (72)$$

Substituindo (72) e (69) em (70),

$$M_2 = \sigma_\ell^2 + g_2 q^{(-2/m)} + 2\sigma_\ell g_1 q^{(-1/m)} - \left[\sigma_\ell + g_1 q^{(-1/m)} \right]^2 . \quad (73)$$

Após fazermos as simplificações e substituirmos novamente q , encontramos

$$M_2 = \sigma_o^2 \left(\frac{V_o}{V} \right)^{(2/m)} \cdot \left(g_2 - g_1^2 \right) . \quad (74)$$

Para o terceiro momento,

$$M_3 = M_3^* - 3M_2^*M_1^* + 2(M_1^*)^3 , \quad (75)$$

resta-nos avaliar M_3^* , que por (56) fornece:

$$M_3^* = \sigma_\ell^3 + 3 \int_{\sigma_\ell}^{\infty} \sigma^2 \exp \left[\left(\frac{-V}{V_o} \right) \left(\frac{\sigma - \sigma_\ell}{\sigma_o} \right)^m \right] d\sigma . \quad (76)$$

Substituindo $\sigma - \sigma_\ell = x$ e $q = (V/V_o)/(\sigma_o^m)$,

$$M_3^* = \sigma_\ell^3 + 3 \int_0^{\infty} (x + \sigma_\ell)^2 \exp(-qx^m) dx . \quad (77)$$

Empregando (64),

$$M_3^* = \sigma_\ell^3 + 3 \left[mq^{(-3/m)} \Gamma(3/m) + 2\sigma_\ell mq^{(-2/m)} \Gamma(2/m) + \sigma_\ell^2 mq^{(-1/m)} \Gamma(1/m) \right] . \quad (78)$$

Com (65),

$$M_3^* = \sigma_\ell^3 + g_3 q^{(-3/m)} + 3\sigma_\ell g_2 q^{(-2/m)} + 3\sigma_\ell^2 g_1 q^{(-1/m)} . \quad (79)$$

Substituindo (79), (72) e (69) em (75), após as simplificações e substituições fica:

$$M_3 = \sigma_o^3 \left(\frac{V_o}{V} \right)^{(3/m)} \cdot \left(g_3 - 3g_1g_2 + 2g_1^3 \right) . \quad (80)$$

Observa-se que a partir de (80) e (74) pode-se obter uma equação só envolvendo a variável m . Para isto basta avaliar-mos $M_3/(M_2)^{(3/2)}$ [16]. Então,

$$\frac{M_3}{M_2^{3/2}} = \frac{g_3 - 3g_2g_1 + 2g_1^3}{[(g_2 - g_1^2)]^{3/2}} \quad (81)$$

Resolvendo (81), obtém-se \underline{m} que, aplicado em (74), fornece σ_0 .

$$\sigma_0 = V^{(1/m)} \cdot [M_2/(g_2 - g_1^2)]^{1/2} \quad (82)$$

Com m e σ_0 encontramos σ_ℓ utilizando (69).

$$\sigma_\ell = M_1 - \sigma_0 \left(\frac{1}{V}\right)^{(1/m)} g_1 \quad (83)$$

d) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Quadrados Mínimos não Linear.

Por este método, os valores dos estimadores que tornam mínima a soma de quadrados dada por

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - y(\sigma_i)]^2 \quad (84)$$

podem ser obtidos por ajustamento [17] .

Para o nosso caso, tomando o logaritmo de (14):

$$\ln [1 - F(\sigma_i)] = \frac{-V}{V_0 \sigma_0^m} (\sigma_i - \sigma_\ell)^m \quad (85)$$

Definindo y_i como

$$y_i = \ln \left[1 - F(\sigma_i) \right] \quad (86)$$

obtêm-se

$$y(\sigma_i) = \frac{-V}{V_0 \sigma_0^m} (\sigma_i - \sigma_\ell)^m \quad (87)$$

Desenvolveu-se um programa computacional [18] tendo como base o procedimento acima, daí obtendo-se os estimadores pesquisados.

II.1.2 - Função de Weibull para Materiais Frágeis na Flexão.

Devido à complexidade da expressão para a função de Weibull, quando a tensão limite inferior é considerada não nula na flexão em 3 pontos [19], inviabilizando a aplicação dos métodos de estimativa de parâmetros, passaremos a trabalhar com a função de Weibull com $\sigma_l = 0$. No caso da tração, temos:

$$F(\sigma_t) = 1 - \exp \left[- \frac{V}{V_0} (\sigma_t / \sigma_0)^m \right]. \quad (88)$$

σ_t - tensão máxima de tração.

Foi mostrado por Medrano [20] uma relação entre a tensão de tração e a tensão de flexão. Considerando o volume da amostra, como fizemos em compressão, tal relação é:

$$T = \frac{\sigma_t}{\sigma_f} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^1 z^m (1-z^2)^{1/2} dz \right]^{1/m}. \quad (89)$$

Onde, σ_t é a máxima tensão de tração, σ_f a máxima tensão de flexão, m o parâmetro de Weibull, $z = (Y/R)$, R é o raio da amostra cilíndrica e Y a distância até o eixo neutro.

A partir de (89) podemos substituir σ_t por $T\sigma_f$ em (88), obtendo uma expressão de Weibull para flexão. Então, trabalharemos com a seguinte expressão:

$$F(\sigma_i) = 1 - \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m \right]. \quad (90)$$

σ_i - tensão máxima de flexão.

i - índice ordenador dos ensaios.

Será sobre (90) que passaremos a aplicar os métodos de estimativa de parâmetros.

a) Método de Estimativa de Parâmetros por Quadrados Mínimos Lineares.

É possível converter (90) em uma equação linear, basta aplicar o logaritmo natural duas vezes:

$$\ln \left[1 - F(\sigma_i) \right] = - \frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m . \quad (91)$$

$$\ln \left\{ -\ln \left[1 - F(\sigma_i) \right] \right\} = \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + m \ln \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) . \quad (92)$$

Portanto,

$$\ln Y = m \left(\ln \sigma_i \right) + C . \quad (93)$$

Onde,

$$Y = - \ln \left[1 - F(\sigma_i) \right] . \quad (94)$$

$$C = \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - m \ln \sigma_0 . \quad (95)$$

Resta determinarmos $F(\sigma_i)$.

Kapur e Lamberson [21] fez um resumo da teoria que fornece as várias funções de probabilidades de posições associadas a $F(\sigma_i)$.

O procedimento consiste em dividir o espaço amostral em três regiões mutuamente exclusivas, com probabilidade constante de uma dada observação cair em uma delas. Por meio da distribuição multinomial é possível determinar-se uma distribuição de posições das observações, que é a conhecida distribuição Beta. Como o único argumento que se utiliza é o da diferenciabilidade da função acumulativa que se deseja estudar, esta distribuição de posições obtida se aplicará tanto à Weibelliana quanto a qualquer outra função de probabilidades contínua.

Avaliando o valor médio da função Beta encontrada se obtém $i/(n+1)$, i é a ordem da observação e n o número total de observações. A mediana que se obtém é $(i-0.3)/(n+0.4)$, sendo este valor uma aproximação para a integral na função Beta incompleta. Ambas são utilizadas, dependendo de ser a média ou a mediana a escolhida como valor representativo das observações. Mas, em distribuições altamente assimétricas, a mediana representa melhor as observações, geralmente a média fornece resultados subestimados. Por exemplo, para uma reta graficada utilizando-se a distribuição de posições baseada na média, estará ligeiramente girada no sentido horário em relação àquela obtida utilizando-se a baseada na mediana. Consequentemente a inclinação da mesma estará subestimada. Este é o argumento básico para se tentar outras distribuições de posições.

Kimball [22], mais recentemente Bergman [23], realizaram estudos que indicam para o nosso tamanho amostral ($n=30$) a seguinte função de distribuição de posições como sendo a melhor:

$$F(\sigma_i) = \frac{i-(1/2)}{n} . \quad (96)$$

Onde, \underline{n} é o número total de ensaios realizados, \underline{i} é o índice ordenador destes ensaios.

Se plotamos em um gráfico logarítmico \underline{y} versus $\ln \sigma_i$, obtemos uma reta, permitindo o conhecimento dos estimadores \hat{m} , coeficiente angular da reta, e $\hat{\sigma}_0$, chamado parâmetro de localização da curva.

Partindo de (95):

$$m \ln \sigma_0 = \ln(V/V_0) - c . \quad (97)$$

Logo,

$$\hat{\sigma}_0 = \exp \left\{ \frac{1}{\hat{m}} \left[\ln(V/V_0) - c \right] \right\} . \quad (98)$$

Como visto anteriormente se desejarmos uma comparação com as tensões máximas de tração, basta determinar T em (89) para cada lote de ensaios.

b) Método de Estimativa de Parâmetros por Máxima Verossimilhança.

A função acumulativa é dada por (90), a função densidade de probabilidade é:

$$f(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} F(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \left\{ 1 - \exp \left[- A (\sigma/\sigma_0)^m \right] \right\} \quad (99)$$

$$\text{Onde, } A = -(V/V_0) . \quad (100)$$

Logo,

$$f(\sigma) = \frac{Am}{\sigma_0} (\sigma/\sigma_0)^{m-1} \exp \left[-A(\sigma/\sigma_0)^m \right]. \quad (101)$$

A função de máxima verossimilhança fica:

$$L(m, \sigma_0) = \prod_{i=1}^n \frac{Am}{\sigma_0} (\sigma_i/\sigma_0)^{m-1} \exp \left[-A(\sigma_i/\sigma_0)^m \right] \quad (102)$$

Neste ponto percebemos não haver distinção com o caso tratado no item II.1.a, bastando apenas fazer $\sigma_\ell=0$. Então, as equações finais serão:

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma_0)}{\partial m} = \frac{n}{m} + \sum_{i=1}^n \ln(\sigma_i/\sigma_0) - A \sum_{i=1}^n (\sigma_i/\sigma_0)^m = 0. \quad (103)$$

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} = -nm + Am \sum_{i=1}^n (\sigma_i/\sigma_0)^m = 0. \quad (104)$$

Lembrando que $A = -(V/V_0)$.

As equações (103) e (104) podem ser resolvidas pelo mesmo método utilizado em (26), (27) e (28).

c) Método de Estimativa de Parâmetros por "Momentos".

Comparando com os cálculos efetuados em II.1.c, fazendo $\sigma_\ell=0$, obtemos as seguintes equações:

$$M_1 = \sigma_0 (V_0/V)^{1/m} g_1. \quad (105)$$

$$M_2 = \sigma_o^2 (V_o/V)^{2/m} \left(g_2 - g_1^2 \right) . \quad (106)$$

Onde g_i é dado por (68), M_1 e M_2 dados por (59) e (60) respectivamente.

Substituindo (105) em (106) obtemos:

$$\frac{g_2}{g_1^2} = 1 + (M_2/M_1^2) . \quad (107)$$

Resolvendo (107) obtemos \hat{m} , que aplicado em (105) fornece $\hat{\sigma}_o$.

d) Método de Estimativa de Parâmetros por Quadrados Mí-
nimos não Lineares.

Vamos partir da equação (91).

$$\ln \left[1 - F(\sigma_i) \right] = -(V/V_o) (\sigma_i/\sigma_o)^m . \quad (108)$$

Como visto em II.1.d devemos minimizar a soma:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[y_i - Y(\sigma_i) \right]^2 , \quad (109)$$

onde definimos

$$y_i = \ln \left[1 - F(\sigma_i) \right] \quad (110)$$

e

$$Y(\sigma_i) = -(V/V_o) (\sigma_i/\sigma_o)^m . \quad (111)$$

Aplicaremos a (109) o mesmo programa utilizado em II.1.d.

II.2 - Função "Normal" de Distribuição de Probabilidades .

A função densidade de probabilidade "Normal" é dada por,

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \text{Var}} \exp \left[- \frac{1}{2 \text{Var}^2} (\sigma - \sigma_m)^2 \right]. \quad (112)$$

Var é a variância da distribuição e σ_m o valor médio.

A função em (112) será testada nos três tipos de ensaios, compressão, tração e flexão em três pontos.

É sabido que, se um certo fenômeno estatístico segue esta função de distribuição, então a causa do mesmo é múltipla, ou seja, para o nosso caso, a ruptura da amostra ocorreria pela união de várias trincas que se propagariam.

a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Máxima Verossimilhança .

A função de máxima verossimilhança neste caso é:

$$L(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n; \sigma_m, \text{Var}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\text{Var} \sqrt{\pi 2}} \cdot \exp \left[\frac{-1}{2 \text{Var}^2} (\sigma_i - \sigma_m)^2 \right]. \quad (113)$$

Tomando o logaritmo de (113), pois L e lnL possuem máximo no mesmo ponto,

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \ln(\text{Var}) - \frac{1}{2\text{Var}^2} (\sigma_i - \sigma_m)^2 \right]. \quad (114)$$

Logo,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_m} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \text{Var}} = 0. \quad (115)$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_m) = 0 \quad (116)$$

e

$$\frac{n}{\text{Var}} = \frac{1}{\text{Var}^3} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_m)^2. \quad (117)$$

Desde que a média independe de n:

$$\hat{\sigma}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i, \quad (118)$$

e

$$\text{Var}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \hat{\sigma}_m)^2. \quad (119)$$

Como no ponto de máximo devem valer simultaneamente (116) e (117), temos:

$$\text{Var}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \hat{\sigma}_m)^2. \quad (120)$$

Obs. - Utiliza-se $1/(n-1)$ porque esta é a expressão que leva a um resultado menos tendencioso [24].

II.3-Função de Distribuição de Probabilidades Lognormal (2 parâmetros).

Obs. - Também uma só expressão para os três tipos de ensaios.

Esta função de distribuição possui as mesmas características que a anterior. A única diferença é que o que estaria distribuído normalmente não seria a variável σ , mas sim o logaritmo de σ .

A função densidade de probabilidade neste caso é:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\text{Var } \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[- \frac{(\ln \sigma - \sigma_m)^2}{2\text{Var}^2} \right]. \quad (121)$$

a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Máxima Verossimilhança.

Utilizando-se este processo de estimativa é fácil ver, comparando-se com os cálculos do item III.a, que:

$$\hat{\sigma}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\sigma_i) \quad (122)$$

e

$$\hat{\text{Var}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln \sigma_i - \hat{\sigma}_m)^2. \quad (123)$$

II.4-Função de Distribuição de Probabilidades Lognormal (três parâmetros).

A diferença da lognormal 2 parâmetros é que se inclui mais um parâmetro (θ). A distribuição normal se fa-

ria logarítmicamente em torno de σ_m com a variável σ subtraída do valor θ .

Temos também uma só expressão para os três tipos de ensaio.

A função densidade de probabilidade no caso é:

$$f(\sigma) = \frac{1}{(\sigma-\theta)\alpha\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{[\ln(\sigma-\theta) - \sigma_m]^2}{2\alpha^2} \right\}. \quad (124)$$

α é a variância da distribuição.

Resolvê-la por máxima verossimilhança é muito trabalhoso. Prefere-se o método de momentos.

a) Estimativa dos Parâmetros pelo Método de Momentos.

Por este método se obtém [25]:

$$M_1 = \hat{\theta} + \exp \left[\hat{\sigma}_m + (1/2)\hat{\alpha}^2 \right], \quad (125)$$

$$M_2 = \exp(2 \hat{\sigma}_m + \hat{\alpha}^2) \cdot (e^{\hat{\alpha}^2} - 1), \quad (126)$$

$$M_3 = \exp \left[3\hat{\sigma}_m + (3/2)\hat{\alpha}^2 \right] \cdot (e^{\hat{\alpha}^2} - 1)^2 \cdot (e^{\hat{\alpha}^2} + 2). \quad (127)$$

Fazendo

$$B = \frac{M_3^2}{M_2^3} = (e^{\hat{\alpha}^2} - 1) (e^{\hat{\alpha}^2} + 2)^2, \quad (128)$$

chamando $e^{\hat{\alpha}^2}$ de \hat{w} ,

$$B = (\hat{w} - 1) (\hat{w} + 2)^2. \quad (129)$$

A solução explícita de (129) é:

$$\hat{w} = \left\{ 1 + \frac{B}{2} + \left[\left(1 + \frac{B}{2} \right)^2 - 1 \right]^{(1/2)} \right\}^{(1/3)} +$$
$$+ \left\{ 1 + \frac{B}{2} - \left[\left(1 + \frac{B}{2} \right)^2 - 1 \right]^{(1/2)} \right\}^{(1/3)} - 1. \quad (130)$$

M_1 , M_2 e M_3 acima são as mesmas de (59), (60) e (61).

Como conhecemos o valor de B, basta resolver (130) para obtenção de $\hat{\alpha}$. Com $\hat{\alpha}$ resolvemos (126) e obtemos $\hat{\sigma}_m$. De posse de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\sigma}_m$ resolvemos (129), obtendo $\hat{\theta}$.

II.5 - Testes de Ajuste de Curvas.

a) Teste do Qui-quadrado.

Em cada um dos casos tratados anteriormente pode-se verificar o ajustamento das funções de probabilidade obtidas, sobre os dados experimentais. Uma maneira de se medir este ajustamento é exatamente avaliando o qui-quadrado [26] destas funções.

Para tanto se considera a amostra de tamanho \underline{n} , onde os possíveis eventos do conjunto $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ocorreram com frequências O_1, O_2, \dots, O_k (frequências observadas). De acordo com a função de probabilidade, com os parâmetros fornecidos por um dos métodos de estimativa, seria de esperar que tais eventos ocorressem com frequências E_1, E_2, \dots, E_k . Portanto, desejamos saber se as diferenças existentes entre as frequências observadas e as frequências esperadas, diferem significativamente.

Pela estatística do qui-quadrado, esta diferença é fornecida por:

$$\chi^2_{\phi} = \sum_{j=1}^k \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} . \quad (131)$$

Onde, χ^2_{ϕ} é a estatística do teste com ϕ graus de liberdade, O_j as frequências observadas, E_j as frequências esperadas, \underline{n} é o número de elementos da amostra e \underline{k} o número de classes consideradas. Trabalharemos com $n=30$ e $k=6$.

Deve-se observar o seguinte com relação ao número de graus de liberdade:

- quando as frequências esperadas puderem ser calculadas sem que se façam estimativas dos parâmetros populacionais, a partir das distribuições amostrais, temos $\phi=k-1$.
- mas, quando para a determinação das frequências esperadas, r parâmetros tiveram suas estimativas calculadas a partir das distribuições amostrais, então $\phi=k-1-r$.

Do observado acima temos:

Weibull (compressão) $\rightarrow \phi=2$.

Weibull (flexão) $\rightarrow \phi=3$.

Normal $\rightarrow \phi=3$.

Lognormal (2P) $\rightarrow \phi=3$.

Lognormal (3P) $\rightarrow \phi=2$.

Para $k=6$ como observado anteriormente.

Portanto, o teste de ajustamento do Qui-quadrado fornece uma visão geral, mas temos um outro método que informa localmente a qualidade do ajuste. Este método é o de Kolmogorov-Smirnov.

b) Teste de Kolmogorov-Smirnov.

Este é um teste não-paramétrico para diferenças entre distribuições acumulativas. É geralmente mais eficiente do que o Qui-quadrado para pequenas amplitudes amostrais [24].

Ele é baseado na máxima diferença absoluta \underline{K} entre os valores da distribuição acumulativa de uma amostra randomica de tamanho \underline{n} e uma distribuição teórica especificada. Para determinar-se o quanto o valor encontrado é bom, construiu-se tabelas com os valores críticos de \underline{K} para os diversos tamanhos de \underline{n} .

III - Arranjos Experimentais e Obtenção de Dados.

III.1 - Introdução.

Vamos descrever agora os testes experimentais que forneceram os dados a serem submetidos aos cálculos teóricos.

Escolhemos como material de trabalho o vidro comum (material frágil), sob a forma de bastões cilíndricos, a partir dos quais cortou-se as amostras ensaiadas. Estes bastões são borossilicatos encontrados comumente no mercado, e utilizados largamente em laboratórios químicos. A escolha destes bastões deu-se devido à facilidade de obtenção, às suas boas qualidades (homogeneidade e regularidade dimensional) e ao baixo custo.

Os bastões são disponíveis em varetas de 1.5 m de comprimento, sendo necessário cortá-los, ou com uma vídia, no caso da flexão, onde não há necessidade de grande precisão no comprimento da amostra, ou com uma máquina apropriada, se for o caso de compressão, onde há necessidade de exatidão no corte.

Para flexão em três pontos, a distância entre os apoios inferiores foi de 10 vezes o diâmetro da amostra. Na compressão a altura da peça foi igual a duas vezes o diâmetro. A razão para estas proporções da-se devido aos efeitos friccionais das superfícies de carregamento sobre a superfície total da amostra [27].

Trabalhamos com 3 diâmetros diferentes, pois esperamos obter alguma relação entre o volume da amostra e a resistência do material nos variados ensaios.

Foram preparadas em cada modalidade de ensaio (compressão e flexão), e para cada diâmetro, 30 amostras. A escolha deste tamanho amostral se deveu ao fato de haver um razoável conhecimento estatístico sobre as implicações desta escolha [23], e ser o mais comumente empregado na literatura. Então, o número total de amostras preparadas foi 180. 90 para flexão (30 para cada um dos 3 diâmetros) e 90 para compressão (também 30 para cada diâmetro).

Não foram realizados ensaios de tração, visto que encontrou-se dificuldades técnicas inviabilizando-os. A dificuldade maior foi na fixação da amostra à máquina de testes, sem que ocorresse escorregamento da peça. Por outro lado, observa-se que este é um ensaio de mesmo tipo que a compressão, a função de Weibull que o descreve é a mesma para compressão.

A máquina utilizada para ensaiar as amostras foi uma MTS.

III.2 - Testes de Flexão em Três Pontos e Dados Obtidos.

Os diâmetros dos bastões utilizados foram:

$$d_1 = 0.385 \text{ cm.}$$

$$d_2 = 0.445 \text{ cm.} \quad (132)$$

$$d_3 = 0.630 \text{ cm.}$$

Implicaram em amostras para flexão com os seguintes comprimentos:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 11 \cdot d_1 = 4.235 \text{ cm.} \\
 c_2 &= 11 \cdot d_2 = 4.895 \text{ cm.} \\
 c_3 &= 11 \cdot d_3 = 6.930 \text{ cm.}
 \end{aligned}
 \tag{133}$$

Como se percebe, deixou-se uma margem de 1 diâmetro para uma fácil fixação da amostra à máquina, uma vez que a distância entre os apoios inferiores na flexão foi de 10 diâmetros.

As amostras, neste caso, foram obtidas por corte simples a partir das varetas de 1.5 m. Este corte foi feito com v \tilde{u} idia.

Foram preparadas peças de fixação e o arranjo final pode ser observado esquematicamente na figura 2.

Na figura 3 observa-se uma amostra preparada para este ensaio.

Como sabemos da teoria da elasticidade [28], a tensão m \tilde{a} xima suportada pelo corpo pode ser obtida, neste caso, por:

$$\sigma_m = \frac{3}{2} \frac{\tilde{P}_m L}{\pi r^3} .
 \tag{134}$$

Onde, \tilde{P}_m é a força m \tilde{a} xima suportada pela amostra na ruptura, L é a distância entre os apoios inferiores e r o raio da amostra cil \tilde{u} ndrica.

Nas tabelas 1, 2 e 3 podemos observar os resultados para os ensaios de flexão. As tensões m \tilde{a} ximas est \tilde{a} o dadas em MPA.

III.3 - Testes de Compressão e Dados Obtidos.

Neste caso foi necessário um maior trabalho no preparo das amostras, pois havia necessidade de que a altura das mesmas fosse exatamente igual a duas vezes o diâmetro do bastão considerado. Portanto, além do corte mais preciso com uma máquina apropriada (ISOMET), poliu-se as amostras em discos de alumina até que fossem atingidas as dimensões exigidas.

O arranjo mecânico pode ser observado na figura 4, na figura 5 um esquema das amostras ensaiadas.

A expressão que fornece as tensões máximas de compressão é [28]:

$$\sigma_m = \frac{\vec{P}_m}{\pi r^2} . \quad (135)$$

Onde, \vec{P}_m é a força máxima suportada pela amostra no teste e r o seu raio.

Nas tabelas 4,5 e 6 estão os resultados dos ensaios de compressão, com os valores dados em MPA.

IV - Resultados das Aplicações dos Métodos Estatísticos Sobre os Dados Obtidos.

Vamos listar os parâmetros estimados um a um. O parâmetro m da função de Weibull, estimado pelos diversos métodos, estão na tabela 7. Na tabela 8 está σ_0 , na tabela 9 está σ_ℓ para compressão.

Na tabela 10 temos todos os parâmetros das funções Normal (N), Lognormal de dois parâmetros (LN2P) e Lognormal de três parâmetros (LN3P). A Normal e a Lognormal de dois parâmetros foram submetidas ao método de Máxima Verossimilhança, a Lognormal de três parâmetros ao método de Momentos.

Nas tabelas 11 e 12 estão os resultados para o grau de ajustamento do Qui-quadrado para as diversas funções. Estes resultados já estão dados em porcentagem, ou seja, o grau de ajustamento é tanto melhor quanto maior for a porcentagem indicada. Na tabela 11 aparece os resultados para Compressão, na tabela 12 para Flexão.

Nas tabelas 13(Compressão) e 14(Flexão) estão os resultados para o ajustamento de Kolmogorov-Smirnov.

V - Discussão dos Resultados.

Faremos agora as análises de cada uma das tabelas de resultados, procurando conclusões em cada uma delas bem como tentando relaciona-las entre si.

Para o parâmetro \underline{m} de Weibull é de se esperar que se houver acordo com o "modelo do anel mais fraco", todos os valores deverão coincidir, ou serem bem próximos, mesmo havendo variação no volume do material ensaiado. Isto se deve ao fato de que este modelo já envolve correção para variação de volume.

Na tabela 7 temos os resultados das estimativas para este parâmetro \underline{m} de Weibull, nos casos de compressão e flexão. Claramente percebemos uma distinção entre os dois tipos de testes, em flexão os valores de \underline{m} são mais altos (entre 7 e 10), já para compressão são mais baixos (entre 1 e 4). Por outro lado, observamos um certo acordo entre os dados de flexão que não aparece em compressão. Em flexão, para um certo volume (por exemplo V_2), vemos que todos os valores obtidos pelos diversos métodos estão bem próximos, se comparados com os de compressão. Fazendo uma média destes valores (9.14 para V_2), todos os outros resultados deste grupo não apresentam uma diferença maior do que 6% deste valor médio. Para compressão (valor médio 2.53) o desvio maior atinge 50% deste valor médio. Tudo isto sem mencionarmos que utilizamos 4 métodos de estimativa em flexão e apenas 3 em compressão.

Também, se comparamos dentro de um mesmo método os resultados de \underline{m} , notamos outra diferença. Em flexão obser-

vamos em geral o valor de \hat{m} praticamente constante, os piores valores (7.04 e 7.09 para V_1) são apenas da ordem de 15% do valor médio. Já em compressão estas diferenças atingem até 50% do valor médio. Ainda observamos que praticamente todos os valores de \hat{m} para compressão, se situam fora da faixa indicada pela variância do parâmetro. Por exemplo, para V_1 a faixa se situa entre 1.77 e 1.87, mas os outros dois valores são 1.56 e 1.81.

Então, observando somente esta tabela, notamos haver uma concordância com o modelo do anel mais fraco nos ensaios de flexão, e a independência esperada de \hat{m} com o volume do material.

Na tabela 8 vemos os valores de $\hat{\sigma}_0$ estimados pelos diversos métodos, para compressão e flexão.

Também, para o parâmetro $\hat{\sigma}_0$, se for seguido o referido modelo do anel mais fraco (ruptura a partir de uma única trinca), deveremos obter um valor praticamente constante, apesar da variação de volume das amostras ensaiadas. O motivo para este fato é o do que o modelo já contém a correção para a variação de volume do material ensaiado.

Fazendo a mesma comparação feita para a tabela 7 obtemos:

- Dentro do conjunto de valores para um mesmo volume (por exemplo V_2), observamos que em compressão o valor médio é 9.11 MPA, com um desvio máximo de 72% deste valor para o pior dado (2.50 MPA). Para flexão o valor médio é 104.18 MPA, com desvio máximo menor que 1% deste valor.

Também, para um mesmo método, as diferenças com o valor médio atingem cerca de 70% para compressão, e ape

nas 6% no máximo para flexão.

Observando os valores das variâncias, constatamos que todos os valores para este parâmetro estimados pelo método de momentos, estão fora da faixa de previsão. Lembramos que de todos os métodos utilizados o de momentos fornece os resultados mais imprecisos.

Então, novamente observa-se uma maior homogeneidade nos dados referentes a flexão, com o valor do parâmetro praticamente constante, indicando acordo com o modelo do anel mais fraco.

Na tabela 9 estão as estimativas para o parâmetro $\hat{\sigma}_\rho$ de Weibull, somente para os ensaios de compressão.

Se percebe logo que não há uma relação clara entre este parâmetro e o volume, ou qualquer outro dado, sendo que até mesmo entre os próprios valores do mesmo não se percebe muita coerência. Para o volume V_1 os dados são levemente mais próximos, apresentando desvio máximo de 50% do valor médio (2.08).

Aqui também os valores de $\hat{\sigma}_\rho$ estão fora das faixas indicadas pelas variâncias obtidas por máxima verossimilhança.

Na tabela 10 temos todos os parâmetros estimados para as funções Normal, Lognormal dois parâmetros e Lognormal três parâmetros.

Para a função Normal observamos claramente, tanto em flexão quanto em compressão, uma queda da média com o aumento do volume. Isto sugere que o aumento de volume propicia o encadeamento de falhas. A variância também cai com o aumento de volume, ou seja, as tensões de ruptu

ra mais se agrupam em torno de um valor médio.

Para a Lognormal dois parâmetros em compressão, observamos uma relação do valor médio com o volume da amostra ensaiada. Esta dependência, além de sugerir a aplicabilidade do modelo de encadeamento de falhas, pode indicar que as falhas originais contidas na amostra são importantes, pois se dependesse apenas do encadeamento, deveríamos obter valores constantes para as médias, apesar da variação de volume das amostras.

A Lognormal três parâmetros apresenta comportamento distinto entre compressão e flexão. Em compressão não observamos a queda do valor médio com o aumento de volume, fato bem claro para flexão.

Nas tabelas 11 (compressão) e 12 (flexão) estão as porcentagens que medem o ajuste das curvas estimadas pelo método do Qui-quadrado. Quando comparadas entre si é evidente o melhor ajuste em flexão, em média 25% melhor do que o correspondente em compressão. Em alguns casos a melhora do ajuste chega a 70%.

Em compressão temos a função Lognormal dois parâmetros apresentando melhor ajuste, seguida logo após pela de Weibull, com os parâmetros estimados por quadrados mínimos não lineares. A normal definitivamente não forneceu bom ajuste, quando comparada com as outras funções.

Em flexão os melhores ajustes ficaram seguramente com a função de Weibull, com os parâmetros estimados por quadrados mínimos não lineares (o melhor) e quadrados mínimos lineares. Observa-se que também a Lognormal dois parâmetros foi bastante boa.

Entre todos os resultados observamos que alguns são muito ruins, mas aparecem bem mais frequentemente em compressão (7 menores que 8% em um total de 18 resultados), do que em flexão (2 menores que 5% em um total de 21 resultados). Analisando de outra forma, 40% dos ajustes em compressão foram menores que 8%, e apenas 9% dos ajustes foram menores que 5% em flexão.

Nas tabelas 13 (compressão) e 14 (flexão) estão os resultados para o ajuste de Kolmogorov-Smirnov. Temos praticamente uma confirmação dos resultados obtidos pelo Qui-quadrado. Para compressão o melhor ajuste foi fornecido pela função de Weibull, com os parâmetros estimados por quadrados mínimos não lineares, seguida pela função Log-normal dois parâmetros. A Normal se mostrou a pior delas. Em flexão os valores obtidos pelos ajustes das funções de Weibull são muito próximos e muito bons, uma vez que o pior ajuste que se poderia obter com este método seria 1. A Normal novamente forneceu péssimos ajustes, sendo melhor a Lognormal três parâmetros.

Também, se computamos os valores ruins de ajuste, por exemplo todos os resultados maiores que 0.1, observamos que em compressão são bem mais frequentes (62% do total) do que em flexão (38% do total).

VI - CONCLUSÕES:

Todos os resultados observados anteriormente, para cilindros de vidro comum, nos permite concluir:

1) As tensões máximas obtidas nos ensaios de flexão, são descritas pelo "modelo do anel mais fraco", confirmando a independência dos parâmetros m e σ_0 da função de Weibull com o volume da amostra ensaiada.

2) As tensões máximas obtidas nos ensaios de compressão, são melhores descritas pela função Lognormal dois Parâmetros, sugerindo um acordo com o modelo do encadeamento de falhas.

3) A relação entre os parâmetros da Lognormal dois Parâmetros e o volume das amostras, nos sugere que há uma dependência da ruptura com o tamanho das trincas originais.

-X-X-X-X-X-

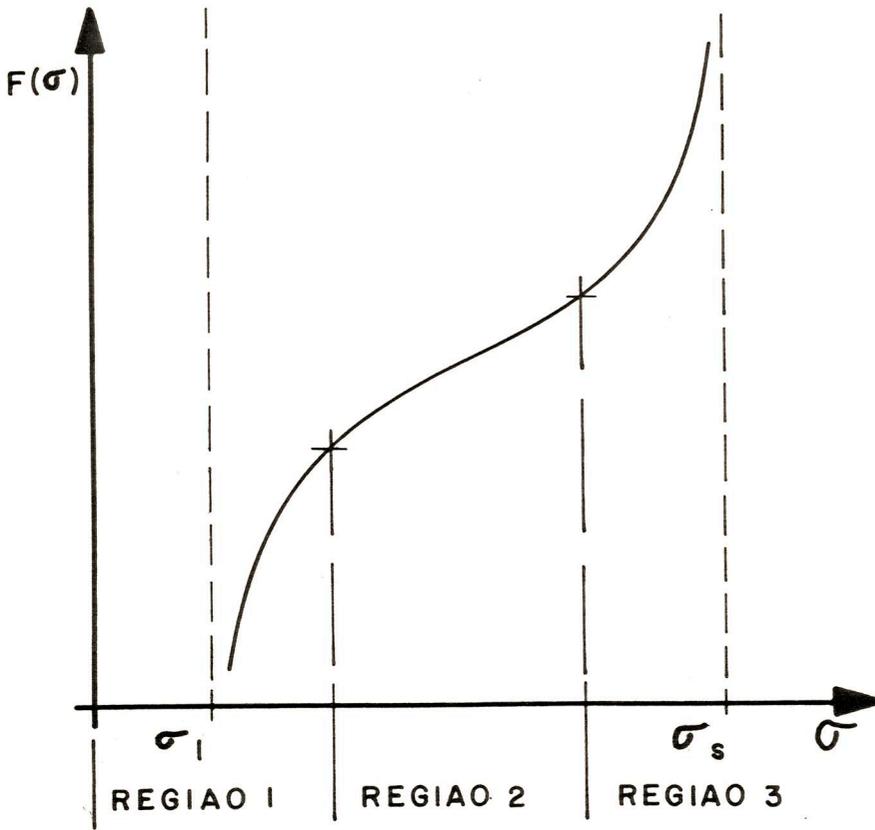


Figura 1 - Diagrama de Weibull.

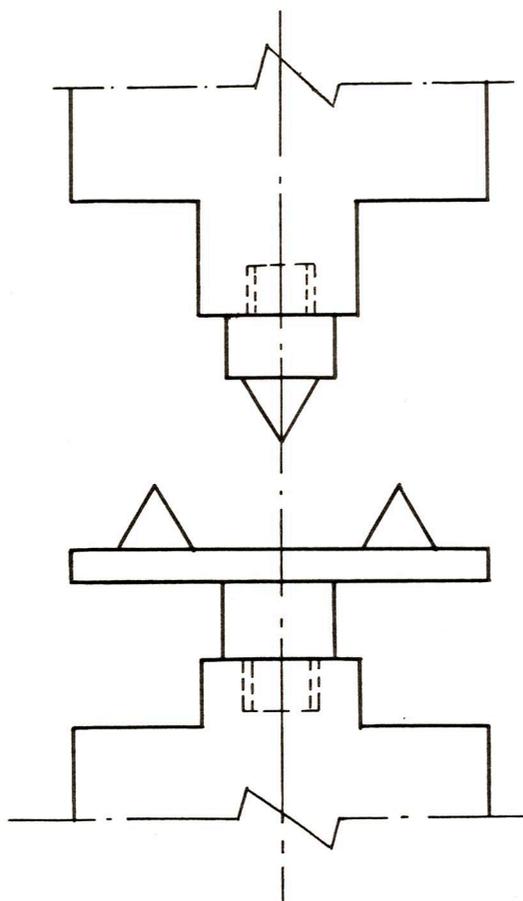


Figura 2 - Sistema montado para os ensaios de flexão.

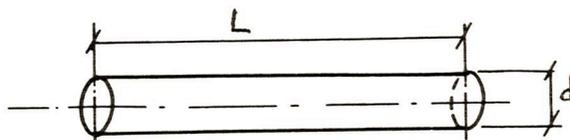


Figura 3 - Amostra utilizada nestes ensaios. $L=10d$.

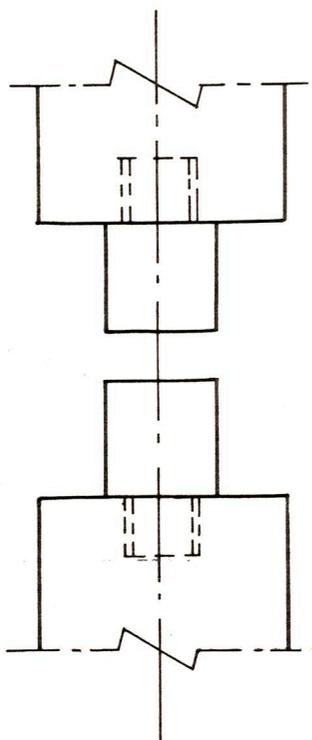


Figura 4 - Sistema utilizado em compressão.

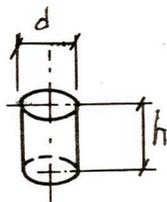


Figura 5 - Amostra ensaiada em compressão. $h=2d$.

85.5	129.7
88.2	130.6
93.7	134.9
96.0	135.9
97.7	136.8
105.9	140.7
112.9	142.1
117.5	142.3
120.2	142.5
121.3	144.0
123.1	148.4
123.8	148.7
124.3	159.4
125.9	161.7
127.1	164.0

83.8	122.6
93.6	125.5
94.6	126.7
102.5	129.6
104.9	132.0
106.2	133.4
113.1	134.9
114.0	135.4
116.1	135.5
116.8	139.6
117.3	140.0
119.4	140.2
121.0	141.7
121.8	142.6
122.4	147.4

78.3	97.5
80.5	98.5
85.2	98.8
87.1	98.8
87.8	102.5
88.1	103.8
88.4	106.6
88.4	107.9
88.7	107.9
89.0	108.2
90.0	112.9
92.8	113.2
93.4	117.3
95.3	122.7
97.5	122.7

Tabela 1 - σ (MPa)

FLEXÃO

Diâm. = 0.385cm.

Tabela 2 - σ (MPa)

FLEXÃO

Diâm. = 0.445cm.

Tabela 3 - σ (MPa)

FLEXÃO

Diâm. = 0.630cm.

9.26	26.23
10.44	26.49
11.70	28.68
13.81	28.76
14.02	28.85
14.32	32.93
14.40	35.38
15.25	38.79
19.37	41.02
19.58	45.91
19.88	47.67
20.80	56.94
21.06	63.17
21.90	64.01
26.15	74.97

10.47	22.07
12.86	23.17
14.41	23.48
14.72	23.96
15.38	25.22
16.74	25.82
18.54	26.64
20.05	26.80
20.08	27.52
20.55	28.06
20.71	29.00
21.25	35.81
21.44	36.00
21.59	39.25
21.66	54.16

04.09	16.04
06.13	17.46
06.29	17.78
07.86	21.55
08.80	22.18
09.12	22.65
09.28	23.12
10.69	23.28
11.01	23.43
11.17	23.75
11.48	28.63
12.11	28.78
12.58	29.88
13.84	31.93
14.63	39.48

Tabela 4 - σ (MPA).
 COMPRESSÃO
 Diâm. = 0.385cm.

Tabela 5 - σ (MPA).
 COMPRESSÃO
 Diâm. = 0.445cm.

Tabela 6 - σ (MPA).
 COMPRESSÃO
 Diâm. = 0.630cm.

		MV	MM	QMñL	
C O M P R E S S A O	V ₁	m = 1.82 (0.05)	m = 1.56	m = 1.81	
	V ₂	m = 2.78 (0.29)	m = 1.27	m = 3.54	
	V ₃	m = 1.77 (0.04)	m = 2.14	m = 1.89	
					QML
F L E X A O	V ₁	m = 7.21	m = 7.09	m = 7.24	m = 7.04
	V ₂	m = 9.65	m = 9.15	m = 8.79	m = 9.00
	V ₃	m = 8.65	m = 9.92	m = 8.72	m = 9.92

Tabela 7 - parâmetro m de Weibull fornecidos por: MV, máxima verossimilhança. MM, método de momentos. QMñL, quadrados mínimos não lineares e QML quadrados mínimos lineares.

$$V_1 = 0.08963 \text{ cm}^3, V_2 = 0.1384 \text{ cm}^3 \text{ e } V_3 = 0.3927 \text{ cm}^3.$$

Obs. - Entre parênteses estão as variâncias dos parâmetros \hat{m} .

σ_o (MPa).

	MV	MM	OML	
V ₁	$\sigma_o = 8.56$ (1.43)	$\sigma_o = 6.31$	$\sigma_o = 8.04$	
V ₂	$\sigma_o = 12.67$ (3.68)	$\sigma_o = 2.50$	$\sigma_o = 12.17$	
V ₃	$\sigma_o = 9.90$ (1.12)	$\sigma_o = 13.12$	$\sigma_o = 11.93$	OML
V ₄	$\sigma_o = 97.46$	$\sigma_o = 96.94$	$\sigma_o = 97.01$	$\sigma_o = 96.68$
V ₅	$\sigma_o = 105.21$	$\sigma_o = 104.14$	$\sigma_o = 103.56$	$\sigma_o = 103.82$
V ₆	$\sigma_o = 93.06$	$\sigma_o = 94.09$	$\sigma_o = 91.80$	$\sigma_o = 94.15$

Tabela 8 - parâmetro σ_o de Weibull. A convenção para os símbolos é a mesma utilizada na tabela 7.

Obs. - Entre parênteses estão as variâncias dos parâmetros σ_o .

σ_{ℓ} (MPA)

		MV	MM	QMñL
C O M P R E S S A O	V ₁	$\sigma_{\ell} = 2.12$ (0.26)	$\sigma_{\ell} = 3.10$	$\sigma_{\ell} = 1.04$
	V ₂	$\sigma_{\ell} = 1.22$ (0.11)	$\sigma_{\ell} = 12.88$	$\sigma_{\ell} = 3.57$
	V ₃	$\sigma_{\ell} = 2.60$ (0.92)	$\sigma_{\ell} = -0.70$	$\sigma_{\ell} = -0.03$

Tabela 9 - parâmetro σ_{ℓ} de Weibull, sômente para os testes de compressão. Os símbolos são idênticos aos utilizados na tabela 7.

Obs. - Entre parênteses estão as variâncias dos parâmetros σ_{ℓ} .

		N	LN2P	LN3P
C O M P R E S S A O	V ₁	Med = 29.72 Var = 17.40	Med = 3.24 Var = 0.56	Med = 3.94 Var = 0.31 Tet = -24.23
	V ₂	Med = 23.91 Var = 8.76	Med = 3.12 Var = 0.34	Med = 2.91 Var = 0.42 Tet = 3.94
	V ₃	Med = 17.30 Var = 8.87	Med = 2.71 Var = 0.56	Med = 3.88 Var = 0.18 Tet = -31.98
F L E X A O	V ₁	Med = 127.49 Var = 21.16	Med = 4.83 Var = 0.17	Med = 5.32 Var = 0.10 Tet = -78.86
	V ₂	Med = 122.49 Var = 16.02	Med = 4.80 Var = 0.14	Med = 4.46 Var = 0.18 Tet = 34.36
	V ₃	Med = 98.33 Var = 11.92	Med = 4.58 Var = 0.12	Med = 4.43 Var = 0.14 Tet = 13.29

Tabela 10 - parâmetros das funções da família da Normal. Tet=0.

	V_1	V_2	V_3	
MV	$\chi^2 = 37\%$	$\chi^2 = 0.5\%$	$\chi^2 = 7\%$	Weibull
MM	$\chi^2 = 25\%$	$\chi^2 = 13\%$	$\chi^2 = 3\%$	Weibull
QMñL	$\chi^2 = 25\%$	$\chi^2 = 25\%$	$\chi^2 = 16\%$	Weibull
MV	$\chi^2 = 1\%$	$\chi^2 = 13\%$	$\chi^2 = 8\%$	Normal
MV	$\chi^2 = 49\%$	$\chi^2 = 16\%$	$\chi^2 = 42\%$	Log.2P
MM	$\chi^2 = 13\%$	$\chi^2 = 7\%$	$\chi^2 = 3\%$	Log.3P

Tabela 11 - Compressão. MV(máxima verossimilhança), MM(método de momentos) e QMñL(quadrados mínimos não lineares).

	V_1	V_2	V_3	
MV	$\chi^2 = 42\%$	$\chi^2 = 75\%$	$\chi^2 = 2\%$	Weibull
MM	$\chi^2 = 42\%$	$\chi^2 = 66\%$	$\chi^2 = 13\%$	Weibull
QMñL	$\chi^2 = 75\%$	$\chi^2 = 66\%$	$\chi^2 = 16\%$	Weibull
QML	$\chi^2 = 42\%$	$\chi^2 = 66\%$	$\chi^2 = 13\%$	Weibull
MV	$\chi^2 = 36\%$	$\chi^2 = 26\%$	$\chi^2 = 22\%$	Normal
MV	$\chi^2 = 5\%$	$\chi^2 = 75\%$	$\chi^2 = 42\%$	Log.2P
MM	$\chi^2 = 20\%$	$\chi^2 = 30\%$	$\chi^2 = 16\%$	Log.3P

Tabela 12 - Flexão. MV(máxima verossimilhança), MM(método de momentos), QML(quadrados mínimos lineares) e QMñL(quadrados mínimos não lineares).

COMPRESSAO

		V_1	V_2	V_3
W E I B U L L	MV	0.139	0.146	0.095
	MM	0.095	0.159	0.086
	QMñL	0.078	0.104	0.083
	NORMAL	0.170	0.135	0.119
	LOGN. 2P	0.068	0.114	0.123
	LOGN. 3P	0.108	0.131	0.099

Tabela 13 - Valores de K, medida do ajuste de Kolmogorov-Smirnov, para cada uma das curvas obtidas em compressão.

FLEXAO

		V_1	V_2	V_3
W E I B U L L	MV	0.063	0.065	0.134
	MM	0.060	0.056	0.145
	QMñL	0.064	0.060	0.103
	QML	0.058	0.055	0.150
	NORMAL	0.082	0.188	0.635
	LOGN. 2P	0.116	0.090	0.102
	LOGN. 3P	0.098	0.095	0.098

Tabela 14 - Valores de K, medida do ajuste de Kolmogorov-Smirnov, para cada uma das curvas obtidas em flexão.

VII - REFERÊNCIAS:

- 1 - Griffith, A.A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Phil. Trans. Roy. Soc., 221A, 163 (1920).
- 2 - Weibull, W., "A Statistical Theory of Strength of Materials", Ing. Vetenskaps Akad. Handl. N^o 151 (1939); "The Phenomenon of Rupture in Solids", Ibid. N^o 153 (1939).
- 3 - Fisher, R.A. and Tippett, H.C., "Limiting Forms of the Frequency Dist. of the Largest and Smallest Member of a Sample", Proc. Camb. Phil. Soc. 24, 180 (1928).
- 4 - Jayatilaka, A. de S. and Trustrum, K., "Statistical Approach to Brittle Fracture", Journal of Materials Science, 12 (1977) 1426-1430.
- 5 - Jayatilaka, A. de S. and Trustrum, K., "Fracture of Brittle Materials in Uniaxial Compression", Ibid. 13 (1978) 455-457.
- 6 - Graybill, F.A. and Mood, A.M., "Introduction to the Theory of Statistics", Mc.Graw Hill, New York (1962).
- 7 - Kies, J.A., "The Strength of Glass", NRL Report 5093, Naval Research Laboratory, Washington (1958).

- 8 - Aulich, H., Kinshofer, G., Liertz, H. and Oestrich, V.,
Proc. of the 5th ECOC, Amsterdam (1979), p. 8-4-1.
- 9 - Martínez, J.M., "Generalization fo the Methods of
Brent and Brown for Solving Nonlinear Simultaneous
Equations", SIAM J. Numer. Anal. 16, 434-448 (1979).
- 10 - Martínez, J.M., "Solving Nonlinear Simultaneous
Equations with a Generalization of Brent's Method",
BIT 20, 501-510 (1980).
- 11 - Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., "Table of Integrals,
Series and Products", New York, Academic Press Inc.,
1981, pp. 576 (4.352-2).
- 12 - Idem, pp. 578 (4.358-2).
- 13 - Idem, pp. 576 (4.352-1).
- 14 - Kao, J.H.K., "A Graphical Estimation of Mixed Weibull
Parameters in Life-Testing of Eletron Tubes", Techno
metrics, Vol. I, N^o 4, pp. 389-407 (1959).
- 15 - Idem 11 , pp. 935.
- 16 - Dubey, S.D., "On Some Statistical Inferences for Wei-
bull Laws", Naval Research Logistics Quarterly, 13,
227-251 (1965).

- 17 - Bevington, P.R., "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences", New York, Mc Graw-Hill, 1969.
- 18 - Pulino, P. - Laboratório de Matemática Aplicada do Departamento de Matemática Aplicada da UNICAMP, programa de Quadrados Mínimos não Lineares utilizando o Método de Bem-Israel.
- 19 - Kittl, P., "Sobre la Teoria Estadística de la Fractura de Cuerpos Frágiles", Bol. Soc. Esp. Ceram. e Vid., 21, 235-237 (1981).
- 20 - Medrano, R.E., "Relação Teórica Entre as Tensões de Tração e Flexão para a Estatística de Weibull", Anais do 5º CBECIMAT, Porto Alegre, Brasil (1982).
- 21 - Kapur, K.C. and Lamberson, L.R., "Reliability in Engineering Design", New York, John Wiley & Sons (1977).
- 22 - Kimball, B.F., "On the Choice of Plotting Positions on Probability Paper", Journal of the American Statistical Association, Vol. 55, sept. 1960.
- 23 - Bergman, B., "On the Estimation of the Weibull Modulus", Journ. of Mater. Sci. Letters, 3, 689-692 (1984).

- 24 - Miller, I. and Freund, J.E., "Probability and Statistics for Engineers", New Jersey, Prentice-Hall Inc. (1977).
- 25 - Kotz, S. and Johnson, N.I., "Continuous Univariate Distributions", Vol. I, John Wiley & Sons, New York, 1970, pp. 124.
- 26 - Guerra, M.J. e Donaire, D., "Estatística Indutiva", São Paulo, Livraria Ciência e Tecnologia Editora, 1979.
- 27 - Jayatilaka, A. de S., "Fracture of Engineering Brittle Materials", Applied Science Publishers, London, 1979.
- 28 - Timoshenko, S.P., "Resistência de Materiais", Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1966.