

Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física 'Gleb Wataghin'

A Energia Potencial de Schrödinger e a Eletrodinâmica de Weber

ALUNO: João José Caluzi ✓

ORIENTADOR: Prof. Dr. André Koch Torres de Assis

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" para
obtenção do grau de Doutor em Ciências

outubro de 1995

*Este exemplar corresponde a versão final
da tese de doutoramento defendida pelo Sr.
João José Caluzi e aprovada pela
comissão julgadora.*

André Koch Torres de Assis

11/10/95

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE IF
 N.º CHAMADA 11
 UNICAMP
 C138e
 V. 1 26133 m
 P. 433195
 C. 0 0 x
 PREÇO R\$ 11,00
 DATA 18/11/95
 N.º CPD

CM-00080820-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
 BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

C138e Caluzi, João José
 A energia potencial de Schrödinger e a
 eletrodinâmica de Weber / João José Caluzi.
 -- Campinas, SP : s.n. , 1995.
 Orientador: André Koch Torres de Assis.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual
 de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wata
 ghin".
 1. Massa efetiva (Física). 2. Força
 ponderomotriz. I. Assis, André Koch Torres
 de. II. Universidade Estadual de Campinas.
 Instituto de Física "Gleb Wataghin". III.
 Título.

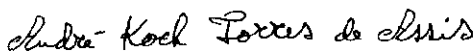


INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

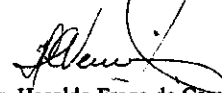
PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE
JOÃO JOSÉ CALUZI

DATA: 06 / 10 / 95

BANCA EXAMINADORA:


- Prof. Dr. André Koch Torres de Assis (Orientador)


- Prof. Dr. Iberê Luis Caldas


- Prof. Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho


- Prof. Dr. Roberto Antonio Clemente

APROVADO


- Prof. Dr. Márcio José Menon

Aos meus pais,
Emilia e José
e a memória de meus avós
Amábile e José,
Tereza e Fortunato
e aos mortos que
não podem ser esquecidos.

Aos meus pais,
Emilia e José
e a memória de meus avós
Amábile e José,
Tereza e Fortunato
e aos mortos que
não podem ser esquecidos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. André Koch Torres de Assis pela sugestão do tema, estímulo e orientação necessária para a realização deste trabalho.

Aos amigos Fausto Camargo Jr., Francisco Arpad Bajay e José Alexandre Nogueira pelo estímulo e ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus sobrinhos Mariana e Gabriel pela alegria nestes últimos anos.

Ao CNPq pelo suporte financeiro nos últimos anos.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	2
RESUMO	6
ABSTRACT	8
1 Introdução	10
1.1 Objetivos	10
1.2 Introdução histórica	12
1.3 Erwin Schrödinger e o Princípio de Mach	25
2 Estudo da casca esférica	37
2.1 Introdução	37
2.2 Estudo da energia de uma partícula movendo-se com uma velocidade $\vec{v}$ no interior da casca esférica dielétrica carregada .	42
2.2.1 Modelo clássico	42
2.2.2 Modelo de Weber	43
2.2.3 Modelo relativístico	46
2.2.4 Modelo de Weber-Schrödinger	47

2.2.5	Comparando os modelos	49
2.3	Estudo da equação de movimento de uma partícula carregada no interior de uma casca esférica supondo uma força de atrito na forma $-b\vec{v}$ agindo sobre a partícula	62
2.3.1	Partícula movendo-se ao longo do eixo $\hat{z}$ com veloci- dade $\vec{v} = \dot{z}\hat{k}$	62
2.3.2	Partícula movendo-se numa circunferência de raio ρ_0 com velocidade $\vec{v} = \rho_0\dot{\theta}\hat{\theta}$	82
3	Estudo do capacitor plano ideal: movimento retilíneo através do capacitor	84
3.1	Introdução	84
3.2	Energia de uma partícula carregada no interior de uma capa- citor plano ideal	87
3.3	Comparando os modelos	94
4	Estudo do capacitor plano ideal: movimento oscilatório pró- ximo às placas do capacitor	100
4.1	Introdução	100
4.2	Oscilador harmônico clássico (OHC)	104
4.3	Oscilador harmônico de Weber (OHW)	107
4.4	Oscilador harmônico relativístico (OHR)	112
4.5	Oscilador harmônico de Weber-Schrödinger (OHS)	118
4.6	Comparando os modelos	122
5	Discussões e Conclusão	144

Apêndices	151
A Cálculo da energia de interação gravitacional utilizando o potencial proposto por Erwin Schrödinger	151
B Formalismo Lagrangiano da eletrodinâmica de Weber	160
C Cálculo exato da energia Lagrangiana de Weber entre uma casca esférica dielétrica carregada de raio R e uma partícula de carga q	164
D Cálculo da energia potencial Lagrangiana eletromagnética entre um capacitor plano ideal e uma partícula de carga q	176
E Lagrangiana de Darwin	184
Bibliografia	187

RESUMO

O presente trabalho analisa o movimento de uma partícula com carga q e massa m em três situações: I) no interior de uma casca esférica dielétrica fixa e carregada a um potencial ϕ ; II) no interior de um capacitor plano ideal e III) oscilando próximo e externamente a um capacitor plano ideal. Neste trabalho utilizamos o modelo que denominamos de Weber-Schrödinger (W-S). No modelo W-S a energia de interação entre duas partículas carregadas é dada pela energia potencial eletromagnética proposta por W. Weber e pela energia de interação gravitacional proposta por E. Schrödinger. A energia de uma partícula carregada interagindo com uma distribuição de carga é constituída de dois termos, $E = U + K_S$. O primeiro termo, U , é devido à interação eletromagnética e o segundo, K_S , é devido à interação gravitacional da partícula com o resto do universo.

Um dos objetivos deste trabalho é reavaliar as críticas de H. von Helmholtz ao modelo de Weber. Na crítica de Helmholtz a energia total da partícula é dada por: $E = U + K_c$, onde U é a energia de interação eletromagnética de Weber entre a partícula carregada e uma casca esférica dielétrica fixa e carregada a um potencial ϕ e K_c a energia cinética clássica. Helmholtz mostra que o conjunto $U + K_c$ conduz a uma velocidade divergente, $v \rightarrow \infty$, da partícula no interior da casca esférica para um potencial ϕ finito.

Neste trabalho substituímos K_c por K_S . Na primeira situação, casca esférica, o conjunto $U + K_S$ superou as críticas apresentadas por Helmholtz

ao modelo de Weber. Ou seja, não temos mais uma velocidade divergente mas uma velocidade assintótica a c quando $E \rightarrow \infty$ ou quando $\phi \rightarrow \infty$.

Na segunda situação (movimento no interior do capacitor) com o conjunto $U + K_S$ também obtemos uma velocidade limite assintótica c . Quando graficamos a diferença de potencial entre as placas, $\Delta\varphi$, contra a velocidade normalizada ao quadrado, v^2/c^2 , a curva teórica é condizente com os dados experimentais de Bertozzi.

Por último analisamos o movimento oscilatório próximo às placas e também obtemos uma velocidade assintótica a c quando a energia do oscilador tende ao infinito. Um aspecto novo surge nesta última situação. O período de oscilação depende da diferença de potencial entre as placas.

Em todas as situações acima utilizamos o conceito de massa inercial efetiva dependente da velocidade e do potencial onde encontra-se a partícula. Este conceito de massa efetiva é essencial no modelo W-S.

A conclusão geral é que o modelo W-S conduz sistematicamente a uma velocidade limite assintótica c para a carga teste quando $E \rightarrow \infty$ e quando $\phi \rightarrow \infty$. E isto é compatível com os resultados experimentais.

ABSTRACT

This work analyses the motion of a particle with charge q and mass m in three situations: I) inside a fixed spherical dielectric shell charged to a potential ϕ ; II) inside an ideal capacitor and III) oscillating near and externally to an ideal capacitor. In this work we utilize the model that we call Weber-Schrödinger's model (W-S).

In this W-S model the interaction energy between two charged particles is given by the electromagnetic potential energy proposed by W. Weber and by the gravitational interaction energy proposed by E. Schrödinger. The energy of a charged particle interacting with a charged distribution is given by two parts, $E = U + K_S$. The first part, U , is due to the electromagnetic interaction with the charged distribution and the second part, K_S , is due to the gravitational interaction of the particle with whole universe.

One of the goals of this work is to reevaluate Helmholtz's criticism to Weber's model. In Helmholtz's criticism the total energy of the particle is given by $E = U + K_c$ where U is Weber's electromagnetic interaction energy between the charged particle and a fixed spherical dielectric shell charged to a potential ϕ and K_c is the classical kinetic energy. Helmholtz shows that $U + K_c$ leads to a divergent velocity, $v \longrightarrow \infty$, of the particle inside the spherical shell charged to a finite potential ϕ .

In this work we change K_c by K_S . In first situation, spherical shell, $U + K_S$ overcomes the criticism presented by Helmholtz against Weber's model. That

is, we don't have a divergent velocity but an asymptotic velocity to c , $v \longrightarrow c$, when $E \longrightarrow \infty$ or when $\phi \longrightarrow \infty$.

In second situation (motion inside the capacitor) with $U + K_S$ we also obtain an asymptotic limit velocity c . When we plot the difference of potential between the plates, $\Delta\varphi$, against the squared normalized velocity, v^2/c^2 , the theoretical curve agrees with Bertozzi's experimental data.

Lastly we analyse the oscillatory motion near to the plates. We also obtain an asymptotic velocity to c when the energy of the oscillator goes to infinity. A new aspect arises in this last situation. The period of oscillation depends on the difference of potential between the plates.

In all situations above we utilize the concept of an effective inertial mass depending on the velocity and potential where the particle is located. This concept of an effective mass is essential in the W-S model.

The general conclusion is that the W-S model leads systematically to an asymptotic limit velocity c for the test charge when $E \longrightarrow \infty$ and when $\phi \longrightarrow \infty$. And this is compatible with the experimental findings.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

Neste trabalho analisamos o comportamento de cargas pontuais próximas a capacitores ou no interior de cascas esféricas carregadas. Pesquisamos o movimento das cargas classicamente, relativisticamente, com a eletrodinâmica de Weber e com a energia potencial de Schrödinger. O objetivo é comparar estes diversos modelos.

Primeiramente, vamos estudar o comportamento de uma partícula carregada com carga q e massa m movendo-se no interior de uma casca esférica dielétrica fixa com raio R e com uma densidade de carga σ homogeneamente distribuída. Faremos duas abordagens do problema: I) Vamos estudar o comportamento da energia da partícula no interior da casca esférica. II) Supondo o interior da casca esférica preenchida por um meio que exerce uma força de resisistência ao movimento da partícula, vamos obter sua equação de

movimento e estudar seu comportamento.

Nas duas abordagens, energia e equação de movimento, vamos empregar quatro modelos distintos com a finalidade de compará-los: I) modelo clássico (energia potencial Coulombiana mais energia cinética clássica); II) modelo de Weber (energia potencial Weberiana mais energia cinética clássica); III) modelo relativístico (energia potencial Coulombiana mais energia cinética relativística) e IV) modelo Weber-Schrödinger (energia potencial Weberiana e energia cinética de Schrödinger). Nos modelos de Weber e Weber-Schrödinger a energia cinética é obtida de interações gravitacionais. Isto será discutido adiante na Seção 1.3 e no Apêndice A.

Em seguida analisamos o comportamento da partícula carregada movendo-se ortogonalmente às placas de um capacitor plano ideal. Neste capacitor vamos estudar dois movimentos: o retilíneo acelerado no interior do capacitor, e o oscilatório próximo e externo a uma das placas. No movimento oscilatório adotaremos as duas abordagens mencionadas acima, energia e equação de movimento para os quatro modelos: clássico, Weberiano, relativístico e Weber-Schrödinger (de agora em diante modelo W-S).

Nas duas geometrias, casca esférica e capacitor plano, abordaremos estes modelos, mencionados acima, através do formalismo Lagrangiano. Os aspectos essenciais deste formalismo para os modelos clássico e relativístico podem ser encontrados no livro *Classical Mechanics* de H. Goldstein, [Gol80, p. 21]. Para os modelos de Weber e W-S estes aspectos são dados no Apêndice B.

1.2 Introdução histórica

Para W. Weber a força entre duas partículas pontuais de cargas q_i e q_j localizadas em $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$ é dada por (em notação moderna, no sistema MKSA), [Web66] e [Ass94, p. 56]

$$\vec{F}_j = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij}\ddot{r}_{ij}}{c^2} \right). \quad (1.1)$$

Nesta expressão $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ é a permissividade do vácuo, $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ é a distância entre elas, $\dot{r}_{ij} = dr_{ij}/dt$ e $\ddot{r}_{ij} = d\dot{r}_{ij}/dt$. Temos ainda $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $\hat{r}_{ij} = \vec{r}_{ij}/r_{ij}$ é o versor unitário apontando de q_j para q_i , $c = 3 \times 10^8 m/s$ é a razão entre as unidades eletromagnética e eletrostática de carga e $\vec{F}_j$ é a força exercida por q_j em q_i . Esta força, equação (1.1), depende da distância entre as cargas e da velocidade e aceleração radial entre elas. Podemos derivar a equação (1.1) de uma energia potencial generalizada que denominamos energia Lagrangiana, vide Apêndice B, dada por

$$S = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} \left(1 + \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (1.2)$$

Utilizando a equação (B.5) obtemos a equação (1.1). A lei de força proposta por Weber em 1846 possui propriedades importantes: É uma lei de força relacional, ou seja, depende somente da distância, velocidade e aceleração entre as partículas envolvidas; satisfaz o princípio de ação e reação na forma forte – a força sempre está na linha que liga as cargas interagentes; pode

ser derivada de uma energia potencial e satisfaz os princípios de conservação (momento linear, momento angular e energia), [Ass94, p. 63].

Neste mesmo período H. von Helmholtz estudava a conservação da energia. No artigo “Sobre a conservação de energia”, publicado em 1847, [Hel66], Helmholtz conclui que as únicas forças conservativas são aquelas que dependem da distância entre as partículas. Neste trabalho demonstra que forças dependentes da distância e velocidade das partículas envolvidas não são conservativas. Destarte, Helmholtz considera a lei de força de Weber uma força não conservativa por ela depender da posição e velocidade das partículas envolvidas.

A resposta às críticas de Helmholtz foi publicada por Weber em 1871, ver [Web72]. Neste artigo Weber mostra que sua lei de força é conservativa. Um detalhe que ficou despercebido por Helmholtz é que a lei de força de Weber além de depender da distância e velocidade, também depende da aceleração das partículas envolvidas. A análise de Helmholtz não havia incluído este caso mais geral.

Em 1872 Helmholtz apresenta um nova crítica teórica à eletrodinâmica de Weber, [Hel72]. Além de apresentar sua lei de força em 1846, Weber havia introduzido em 1848 uma energia potencial dada por

$$U = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (1.3)$$

A menos do sinal dentro do parêntesis esta expressão é a mesma que a energia Lagrangiana S , equação (1.2). Discutimos a relação entre U e S no Apêndice

B. A força de Weber é obtida facilmente de U através de

$$\vec{F}_j = -\hat{r}_{ij} \frac{dU}{dr_{ij}}, \quad (1.4)$$

e observando que

$$\frac{d\dot{r}_{ij}^2}{dr_{ij}} = 2\dot{r}_{ij} \frac{d\dot{r}_{ij}}{dt} \frac{dt}{dr_{ij}} = 2\ddot{r}_{ij}. \quad (1.5)$$

Vamos agora à crítica de Helmholtz. Tomemos uma casca esférica não condutora, carregada com uma carga Q , com raio R e uma densidade de carga $\sigma = Q/4\pi R^2$ homogeneamente distribuída sobre sua superfície. Seja uma partícula de carga q e massa m movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em seu interior, (vide Figura 1.1).

Helmholtz integrou a energia potencial de Weber para a carga q interagindo com a casca e obteve (ver Apêndice C):

$$U = q\phi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (1.6)$$

onde $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ é o potencial na casca esférica. A energia total é obtida quando somamos a energia cinética da partícula ($E = \text{const.}$):

$$E = \frac{mv^2}{2} + q\phi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (1.7)$$

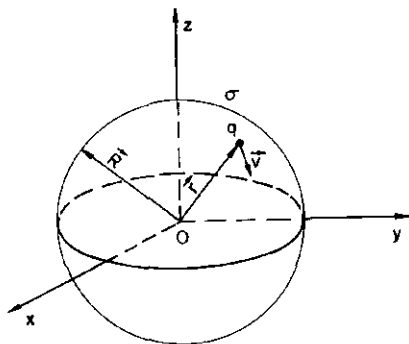


Figura 1.1: Casca esférica com uma densidade de cargas σ homogeneamente distribuída sobre sua superfície, com uma partícula de massa m e carga q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em seu interior ($r < R$).

A equação (1.7) pode ser escrita como

$$\frac{v^2}{c^2} = 6 \frac{E - q\phi}{3mc^2 - q\phi}. \quad (1.8)$$

A Figura 1.2 mostra o comportamento da equação (1.8) para $E < 3mc^2$. Para $q\phi > 0$ a carga da partícula e da casca esférica são de sinais iguais. Supondo um elétron no interior da casca a velocidade diverge quando $\phi = -1,5MV$.

A equação (1.7) também pode ser escrita como

$$E = q\phi + \left(m - \frac{q\phi}{3c^2}\right) \frac{v^2}{2}. \quad (1.9)$$

O termo entre parêntesis na equação (1.9) pode ser definido como sendo uma massa inercial efetiva dependendo do potencial eletrostático onde encontra-se a partícula. Repare que o termo entre parêntesis pode tornar-se nulo ou muito próximo de zero dependendo do valor de ϕ e para manter a energia constante a velocidade tenderia ao infinito.

Helmholtz baseia sua crítica à eletrodinâmica de Weber neste resultado e na suposição de um meio resistivo no interior da casca esférica. Maxwell descreve a crítica de Helmholtz nos seguintes termos:

Como o segundo termo do coeficiente de v^2 , [equação (1.9)] ¹

¹A equação (1.9) pode ser escrita como

$$E = \frac{q\sigma R}{\epsilon_0} + \left(m - \frac{q\sigma R}{3\epsilon_0 c^2}\right) \frac{v^2}{2}. \quad (1.10)$$

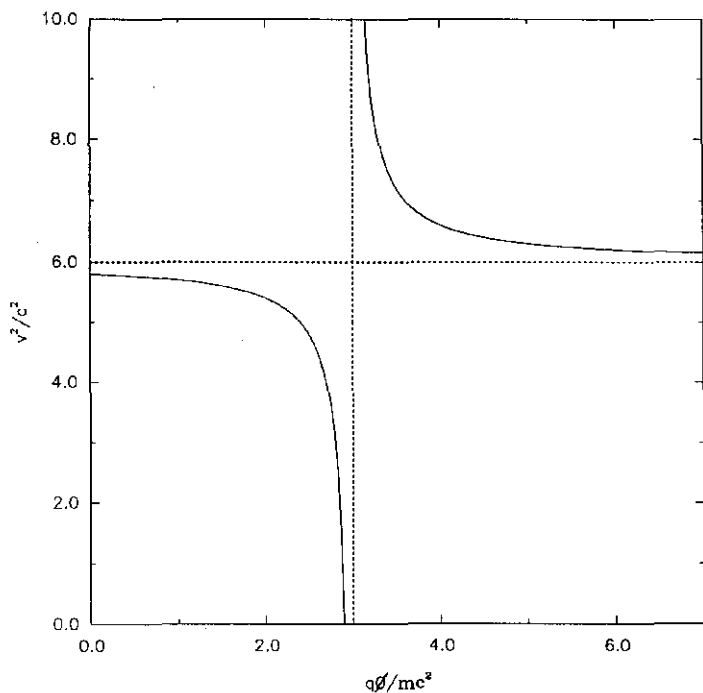


Figura 1.2: Comportamento da velocidade ao quadrado da partícula em função do potencial para a teoria de Weber supondo $E < 3mc^2$. Quando $q\phi/mc^2 = 3$, ou seja, $\phi \approx -1,5\text{MV}$, no caso de um elétron, a velocidade da partícula no interior da casca esférica diverge.

pode ser aumentado indefinidamente pelo acréscimo de R , o raio da esfera, enquanto a densidade superficial σ permanece constante, o coeficiente de v^2 pode ser tornado negativo. A aceleração do movimento da partícula corresponderia então à diminuição de sua *vis viva* [energia cinética], e o corpo movendo-se em um caminho fechado e submetido a uma força como o atrito, sempre oposta em direção a seu movimento, aumentaria continuamente em velocidade e isso sem limites. Este resultado impossível é uma consequência necessária da admissão de qualquer fórmula para o potencial que introduz termos negativos no coeficiente de v^2 , [Ass92b].

É mais fácil entender a crítica de Helmholtz trabalhando com força em vez de energia. Se tivesse integrado a força de Weber em vez da energia, Helmholtz teria obtido que a força exercida pela casca esférica carregada parada atuando sobre uma carga pontual q sendo acelerada em seu interior seria dada por, [Ass94, p. 194]:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{12\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a}}{Rc^2}, \quad (1.11)$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração da carga teste em relação à casca.

Vamos agora supor que o meio dentro da casca exerça uma força de atrito $\vec{F} = -b\vec{v}$ na carga, onde $b > 0$. A aplicação da segunda lei de Newton neste caso leva a:

$$\frac{qQ}{12\pi\epsilon_0 Rc^2} \vec{a} - b\vec{v} = m\vec{a} \quad (1.12)$$

ou

$$-b\vec{v} = \left(m - \frac{q\phi}{3c^2}\right) \vec{a} = (m - m_w)\vec{a} = m_{ie}\vec{a}. \quad (1.13)$$

Nesta última equação $m_w \equiv q\phi/3c^2$ pode ser chamada de massa de Weber. Vemos então que a carga vai se comportar de acordo com a eletrodinâmica de Weber como se tivesse um massa inercial efetiva dada por

$$m_{ie} \equiv m - m_w = m - \frac{q\phi}{3c^2}. \quad (1.14)$$

Se a carga teste for um elétron com $q = -1,6 \times 10^{-19} \text{C}$ e $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{kg}$ teremos $m_{ie} = 0$ ou $m_w = m$ para $\phi = -1,5 \times 10^6 \text{V}$. Caso $\phi < -1,5 \times 10^6 \text{V}$ então o elétron se comportará como tendo massa negativa. Ou seja, em vez de diminuir sua velocidade inicial devido ao atrito, sua velocidade aumentará indefinidamente neste modelo, podendo inclusive ultrapassar a velocidade da luz.

Algo análogo ocorreria neste modelo no caso de um movimento circular da carga teste no interior da casca esférica. Neste caso além das forças de atrito e da casca esférica atuando na carga teste teríamos uma força de vínculo radial, $\vec{F}_V$, que manteria o raio de curvatura constante qualquer que fosse a velocidade tangencial da carga. Isto pode ser visto na Figura 1.3.

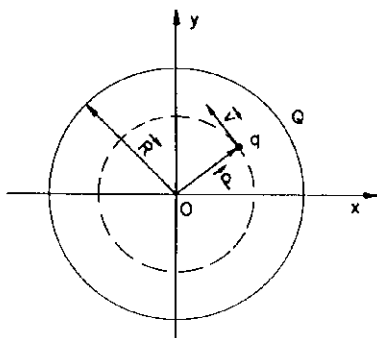


Figura 1.3: Carga q movendo-se numa circunferência de raio ρ dentro de uma casca de raio $R > \rho$ carregada uniformemente com uma carga Q .

Para simplificar a análise supomos um movimento circular de raio ρ constante centrado no centro da casca esférica de raio $R > \rho$. A segunda lei de Newton fica então:

$$m_w \vec{a} - b \vec{v} + \vec{F}_V = m \vec{a}. \quad (1.15)$$

Escolhemos os eixos tal que o movimento ocorra no plano xy . Usando coordenadas cilíndricas e lembrando que a força de vínculo é tal que mantém o

raio constante vem (com $\vec{v} = \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = -\rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi}$ e $\vec{F}_V = -F_V\hat{\rho}$):

$$F_V = (m - m_w)\rho\dot{\phi}^2, \quad (1.16)$$

e

$$-b\rho\dot{\phi} = (m - m_w)\rho\ddot{\phi}. \quad (1.17)$$

Chamando a velocidade tangencial de $v_t = \rho\dot{\phi}$ vem que estas equações podem ser escritas como:

$$F_V = (m - m_w)\frac{v_t^2}{\rho} = m_{ie}a_c, \quad (1.18)$$

$$-bv_t = (m - m_w)\frac{dv_t}{dt} = m_{ie}a_t. \quad (1.19)$$

Aqui representamos a aceleração centrípeta por $a_c = v_t^2/\rho$ e a aceleração tangencial por $a_t = dv_t/dt = \rho\ddot{\phi}$.

Vemos então que a equação (1.19) é a mesma que ocorria no caso de um movimento retilíneo, com a carga comportando-se classicamente como se tivesse uma massa inercial efetiva $m_{ie} = m - m_w = m - q\phi/3c^2$. Com isto os mesmos problemas que existiam no caso do movimento retilíneo continuam a ocorrer aqui. Ou seja, se aumentarmos o potencial da casca tal que $m_{ie} < 0$ então em vez da carga ser freada pelo atrito este fará com que ela seja acelerada aumentando indefinidamente sua velocidade. De acordo com este

modelo a velocidade poderia inclusive ultrapassar a da luz, o que nunca foi observado experimentalmente.

Helmholtz conclui da análise desta situação (utilizando a energia em vez da força como fizemos aqui) que a eletrodinâmica de Weber está errada. Esta é a crítica mais séria que já foi levantada contra a teoria de Weber.

Vários pontos podem ser levantados contra esta conclusão de Helmholtz, e a seguir listamos alguns deles:

(A) Antes de concluir por esta análise que a eletrodinâmica de Weber está errada, seria necessário testar esta previsão experimentalmente. Embora este comportamento de massa negativa seja não usual nada impede que cargas em regiões de alto potencial se comportem desta maneira. Apenas um experimento cuidadoso pode decidir isto. Até onde sabemos um experimento para testar este efeito nunca foi realizado. O próprio Maxwell sabia disto já que logo após apresentar esta crítica de Helmholtz afirma: “Mas temos agora de considerar a aplicação da teoria de Weber em fenômenos que podem ser realizados.” Recentemente foram propostos experimentos deste tipo para distinguir entre as forças de Weber e Lorentz, [Ass92a] e [Ass93]. A dificuldade maior em se realizar o experimento está em como carregar uma casca dielétrica uniformemente a potenciais tão altos. O experimento não pode ser feito com uma casca metálica, tipo um van der Graaff, já que a carga teste ocasionaria uma redistribuição de cargas na casca, e isto poderia mascarar o efeito que se está pesquisando.

(B) Não foi levada em conta nesta análise a perda de energia da carga teste por radiação .

(C) A afirmação de Maxwell que pode-se crescer indefinidamente Q/R ou

$R\sigma$ não é verdadeira devido ao efeito corona. Pode ser até que o próprio efeito corona tenha alguma relação com este aspecto do modelo de Weber. Por exemplo, para a descarga no ar é necessário um campo elétrico de $3 \times 10^6 \text{ V/m}$, o que é comparável com o que obtivemos anteriormente para uma casca de 1m de raio.

(D) Só conhecemos o comportamento das forças de atrito atuando em corpos neutros a baixas velocidades. Não temos um conhecimento experimental suficiente para prever como a força de atrito vai comportar-se ao atuar sobre uma partícula carregada com velocidade próxima à da luz. Isto mostra que esta análise de Helmholtz não pode ser levada muito à letra.

(E) A análise e conclusão de Helmholtz foram baseadas não apenas na eletrodinâmica de Weber mas também na mecânica Newtoniana ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$ como aqui, ou $U + mv^2/2 = \text{cte}$ como na análise original de Helmholtz).

É exatamente este ponto que enfocamos e ampliamos neste trabalho. Sabemos hoje em dia que para velocidades próximas à da luz tanto a segunda lei de Newton quanto a energia cinética clássicas são modificadas. Analisamos então este problema com a energia potencial de Schrödinger que mostrou como se derivar $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ por uma generalização da lei de Weber para a gravitação em conformidade com o princípio de Mach.

A importância deste trabalho e de experimentos deste tipo é que estes efeitos não ocorrem com a força de Lorentz. Em particular, como a casca esférica está parada ela não gera nenhum campo magnético e portanto a força de Lorentz se reduz a de Coulomb. Já o potencial eletrostático no interior de uma casca esférica é constante e portanto o campo elétrico é nulo em todos os pontos de seu interior (isto se comprova facilmente com a lei de

Gauss). Logo, experimentos que demonstrem a existência ou não de massas inerciais efetivas dependentes da energia potencial eletrostática permitirão uma distinção clara sobre a validade das forças de Weber ou de Lorentz.

1.3 Erwin Schrödinger e o Princípio de Mach

O princípio de Mach tem sua origem na crítica de Ernst Mach à distinção feita por Newton entre espaço relativo e espaço absoluto. Para Newton “o espaço absoluto em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos corpos e é comumente tomado por espaço imóvel” [New90, p. 7]. Assim “o movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro, e o movimento relativo, a translação de um lugar relativo para outro” [New90, p. 8].

O único meio para distinguirmos um movimento absoluto do movimento relativo “são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento a partir do eixo do movimento circular. Pois não há tais forças em um movimento circular relativo, mas em um movimento circular verdadeiro e absoluto elas são maiores ou menores dependendo da quantidade de movimento” [New90, p. 11].

Como argumento favorável a suas idéias Newton apresenta o famoso experimento do balde. As diferentes formas da superfície da água quando o balde está em rotação ou parado fornecem o argumento em favor ao espaço absoluto [Ghi87]. Em uma primeira fase com o balde parado em relação a Terra a superfície da água está plana; na segunda fase o balde começa a girar em relação a Terra e a superfície da água continua plana; na terceira fase a água também adquire uma rotação e sua superfície torna-se côncava (parabolóide de revolução) e na quarta fase a rotação do balde pára e a

água continua sua rotação por um tempo maior e sua superfície permanece côncava. Por último a água também pára por atrito e tudo volta à situação inicial.

Para chegar à conclusão que o movimento de rotação da água é em relação ao espaço absoluto Newton necessita eliminar outros candidatos materiais a sistema de referência, [Ghi87]: (1) balde; na terceira etapa do experimento temos o balde e a água com a mesma rotação e a superfície da água é côncava. Assim a forma da superfície não pode ser explicada por um movimento de rotação da água em relação ao balde e (2) outros corpos materiais; devido a sua proximidade a Terra também é uma candidata a sistema de referência absoluto. Mas a Terra possui um movimento de rotação que pode ser detectado pelo achatamento dos pólos, [New52, p. 288]. Isto indica que a Terra sofre a ação de uma força centrífuga. Este argumento permite eliminar o resto do sistema solar, pois por observação vemos que outros planetas têm rotação em torno de seu eixo.

Contudo, ainda restam as estrelas fixas. Para eliminá-las devemos lembrar que não existe diferença entre matéria terrestre e celeste. Assim, podemos supor que as leis físicas também são válidas para os corpos celestes e somos levados a uma regressão ao infinito. Ou seja, na mecânica Newtoniana a curvatura da superfície da água não é devido a sua rotação em relação ao balde, em relação à Terra, e nem em relação aos outros corpos do universo (estrelas fixas ou galáxias distantes). Por isto Newton teve de introduzir um quarto agente não relacionado com a matéria, e que chamou de espaço absoluto.

As concepções de Newton sobre espaço e tempo absoluto sofreram várias

críticas quando de seu surgimento. Entre seus críticos estavam Huygens, Leibnitz e Berkeley, [Koy86], e mais recentemente Ernst Mach. Em sua crítica às concepções de Newton sobre espaço, tempo e movimento absoluto Mach não distingue o papel do espaço absoluto do papel das “estrelas fixas” nos fenômenos mecânicos e faz a sua famosa proposição : “Tente fixar o balde de Newton e rode a esfera das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas” [Mac60, p. 279]. Para Mach a inércia dos corpos seria causada pela distribuição de massas ao seu redor.

Mach em seu livro *A Ciência da Mecânica* propõe qualitativamente a hipótese que a distribuição de massas ao redor de um corpo pode influenciar sua inércia. No artigo “O cumprimento do postulado da relatividade na mecânica clássica”, publicado em 1925, Erwin Schrödinger desenvolveu quantitativamente as idéias de Mach. Schrödinger propôs o problema na forma seguinte:

É bem conhecida a objeção levantada por E. Mach contra a mecânica de partículas sujeitas a potenciais centrais, cujos fundamentos foram melhor apresentados por L. Boltzmann. Tal objeção diz que a mecânica, do ponto de vista de seus fundamentos, não satisfaz ao relevante postulado de relatividade. As leis da mecânica não valem para quaisquer sistemas de coordenadas em movimento, mas apenas para um grupo de sistemas que se movem reciprocamente em movimento translacional uniforme. Empiricamente, mostra-se que tais sistemas têm eixos aproximadamente em repouso ou em movimento translacional uniforme em

relação às estrelas fixas, mas os fundamentos de mecânica clássica não dão nenhuma explicação para isto.

A teoria da relatividade geral também não satisfaz, em sua forma original, ao postulado de Mach, como logo se viu. Após a derivação do movimento secular do periélio de Mercúrio, que mostrou-se em espantosa concordância com a experiência, qualquer pessoa ingênua pode perguntar-se: Em relação a que dá-se, de acordo com a teoria, o movimento da elipse o qual, de acordo com a experiência, dá-se em relação ao sistema aproximado das estrelas fixas? Tem-se como resposta que a teoria exige tal movimento em relação a um sistema de coordenadas que satisfaz, no infinito, a determinadas condições de fronteira. O vínculo entre estas condições e a primeira das estrelas fixas não é, de nenhuma maneira, claro, já que as estrelas não são levadas em conta nos cálculos.

O tratamento destas dificuldades é feito pela teoria cosmológica que postula um universo espacialmente fechado, evitando, assim talvez, condições de fronteira. Pelas dificuldades conceituais que esta teoria cosmológica ainda possui e não pelas complicações matemáticas desta teoria, a solução de questões verdadeiramente fundamentais, que parecem evidentes à formação em ciência natural, nos parece conduzir a uma situação tal que não seja simples obter-se uma visão clara e concisa da realidade. Não duvido que, quando essa resposta for encontrada satisfazendo à teoria, ela não só satisfará plenamente, mas poderá ser colocada

em uma forma que possibilite uma visão completa da realidade em outros sentidos. Do ponto de vista atual, não é sem sentido se perguntar se o princípio de Mach não possa ser tornado válido por uma modificação na teoria clássica e se a preponderância do sistema inercial das estrelas fixas não possa ser compreendida de uma maneira simples.

A expressão para a energia potencial na mecânica de partícula, em especial o potencial de Newton, satisfaz, sem outras consequências, o princípio de Mach, já que ele só depende das distâncias dos corpos e não de sua posição absoluta no espaço. Pode-se, portanto, manter essa expressão, já que ela é aplicável do ponto de vista do postulado. Talvez ela seja uma primeira aproximação para uma lei da natureza algo mais complicada. Por outro lado, tem-se também a energia cinética. Ela é, de acordo com a mecânica clássica, determinada pelo movimento absoluto no espaço, enquanto que, para partículas pontuais, somente movimentos, distâncias e variações de distâncias relativas podem ser observadas. *Pode-se perguntar se talvez não fosse possível que a energia cinética, assim como a potencial, dependesse não apenas de uma partícula, mas da energia de interação de duas massas, e, assim sendo, da distância e velocidade relativa das duas partículas* [grifo meu]. De todas as possíveis expressões para essa energia, escolhemos heurísticamente a que satisfaz às seguintes exigências:

(1) A energia cinética como energia de interação deve depender das massas e distâncias das partículas da mesma maneira que o

potencial de Newton; (2) deve ser proporcional ao quadrado da velocidade de variação da distância [XA95].

Aqui discutiremos os resultados obtidos por Schrödinger a partir da proposta descrita acima. Os cálculos encontram-se no Apêndice A. Neste Apêndice apresentamos o desenvolvimento inverso ao de Schrödinger, ou seja, partimos de um resultado válido para qualquer velocidade e fizemos a aproximação para baixas velocidades.

A energia de interação gravitacional de duas massas pontuais m e m' proposta por Schrödinger é dada por, utilizando o sistema MKS:

$$W = -\frac{Gmm'}{r_{ij}} \left(1 - 3\frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right) \quad (1.20)$$

onde G é a constante gravitacional ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$), c é a velocidade da luz ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$), r_{ij} é a distância entre as partículas e $\dot{r}_{ij} = dr_{ij}/dt$ é a velocidade radial entre elas.

Se $\dot{r}_{ij} = 0$ voltamos ao potencial Newtoniano. Embora Schrödinger não cite nem demonstre conhecer a eletrodinâmica de Weber, proposta 80 anos antes, esta energia potencial é do mesmo tipo da de Weber substituindo $q_i q_j / 4\pi\epsilon_0$ por $-Gmm'$. Schrödinger afirma que chegou a esta expressão heurísticamente (ou seja, por tentativa e erro através de um raciocínio indutivo). Outros, inclusive Weber, haviam obtido esta energia gravitacional dada por (1.20) em analogia direta com a energia eletromagnética de Weber. De qualquer forma o trabalho de Schrödinger é importante pela implementação quantitativa do princípio de Mach com este potencial, coisa que outros antes dele

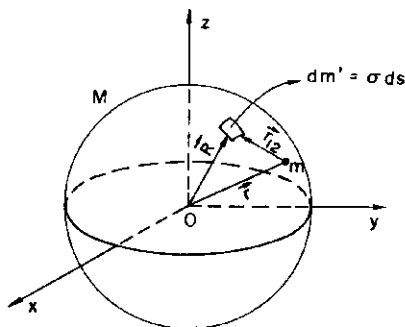


Figura 1.4: Casca esférica de raio R e massa M , com uma densidade superficial de massa σ homogeneamente distribuída, interagindo com uma massa m em seu interior.

não haviam obtido. Apresentamos aqui sua linha de raciocínio.

Vamos supor uma casca esférica de raio R e massa M , com uma densidade superficial de massa $\sigma = M/4\pi R^2$ homogeneamente distribuída. Uma partícula de massa m move-se em seu interior próximo do centro, vide Figura 1.4. Na Figura 1.4 $\vec{R}$ é a posição do elemento de massa dm' , $\vec{r}$ é a posição da partícula de massa m ($r < R$) e $\vec{r}_{12} = \vec{R} - \vec{r}$. O subíndice 1 refere-se ao elemento de massa e o subíndice 2 refere-se à massa m . Assim na equação (1.20) teremos, vide Apêndice A, equações (A.6) a (A.14), supondo $r \ll R$ e

escolhendo o sistema de eixos tal que $\theta_2 = 0$:

$$\begin{cases} r_{12} \approx R, \\ \dot{r}_{12} \approx -\dot{r} \cos \theta_1 - r \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ dm' = \sigma R^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \end{cases} \quad (1.21)$$

Expressimos todas as coordenadas em relação ao sistema de repouso da casca.

Substituindo a equação (1.21) na equação (1.20) e integrando obtemos:

$$\begin{aligned} W = -Gm\sigma R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 1 - \frac{3}{c^2} [\dot{r} \cos \theta_1 \right. \\ \left. + r \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^2 \right\} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \end{aligned} \quad (1.22)$$

A primeira integral é uma constante igual a $-4\pi Gm\sigma R$. A segunda integral resulta (usando $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}_2^2$):

$$W = \frac{8\pi G\sigma R m v^2}{c^2}. \quad (1.23)$$

A energia total obtida por Schrödinger é então

$$W = -4\pi Gm\sigma R \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (1.24)$$

Embora Schrödinger tenha feito os cálculos supondo $r \ll R$ isto não é necessário. Isto é, este resultado é exato e é válido para qualquer posição da massa m movendo-se com velocidade $\vec{v}$ no interior da casca esférica. Mostramos isto no Apêndice C.

Para implementar o princípio de Mach utilizamos este resultado para obter a energia gravitacional de um corpo de massa m interagindo com todo o universo conhecido. Para isto supomos uma densidade média de matéria no universo dada por ρ_0 e substituímos σ por $\rho_0 dR$. Integramos então a equação (1.24) com R variando de 0 até o raio do universo conhecido. Ou seja, até $R = c/H_0$, onde H_0 é a constante de Hubble. Após a integração obtemos

$$W = -\Phi \left(\frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \right), \quad (1.25)$$

onde $\Phi = 4\pi G\rho_0/H_0^2$ é uma constante adimensional. Com os valores conhecidos de G , ρ_0 e H_0 vemos que $\Phi \approx 1$, [Ass94, p. 218]. Não podemos dar um valor exato para Φ devido às incertezas que existem nas estimativas de ρ_0 e de H_0 .

Supondo $\Phi = 1$ vem então que obtem-se a energia cinética clássica $mv^2/2$ a partir de uma interação gravitacional do corpo de teste com o universo distante através de uma energia potencial de Weber.

Vale observar que o termo constante $-mc^2/2$ veio da integração do potencial Newtoniano, $-Gmm'/r_{ij}$, enquanto que a energia cinética $mv^2/2$ veio da integração do termo $3Gmm'\dot{r}_{ij}^2/r_{ij}c^2$.

Schrödinger continua seu trabalho observando que experimentos com elé-

trons a altas velocidades sendo desviados por campos elétricos e magnéticos indicam que a expressão $mv^2/2$ é apenas uma aproximação válida para baixas velocidades.

Schrödinger assume a energia cinética “relativística” como uma expressão empírica:

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (1.26)$$

Observa então que a equação (1.20) pode ser modificada para obtermos a equação (1.26), válida para qualquer velocidade. Assim propõe:

$$W = -\frac{Gmm'}{r_{ij}} \left[3 - 2 \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right)^{-3/2} \right]. \quad (1.27)$$

Com $\dot{r}_{ij} = 0$ voltamos novamente ao potencial Newtoniano. Expandindo esta expressão até segunda ordem em $\dot{r}_{ij}/c$ volta-se à equação (1.20). Substituindo a equação (1.21) na equação (1.27) e lembrando que $r \ll R$ quando integramos obtemos, vide Apêndice A equações (A.11) a (A.22):

$$W = -12\pi Gm\sigma R + \frac{8\pi Gm\sigma R}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.28)$$

Substituindo σ por $\rho_0 dR$ e integrando como antes, e usando $\Phi = 4\pi G\rho_0/H_0^2 = 1$ vem:

$$W = -\frac{3}{2}mc^2 + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1.29)$$

Expandindo esta expressão até segunda ordem em v/c reobtemos $-mc^2/2 + mv^2/2$.

A menos do termo constante que não influi nos resultados experimentais vemos que Schrödinger obteve um análogo à energia cinética relativística. Apesar desta analogia de forma, as duas expressões são conceitualmente bem distintas. A massa que aparece na expressão de Schrödinger é gravitacional, enquanto que na expressão relativística é a massa inercial de repouso. Além disto a expressão de Schrödinger implementa perfeitamente o princípio de Mach por partir de uma expressão completamente relacional que é uma generalização da energia potencial de Weber. Como a expressão de Schrödinger é compatível com o eletrodinâmica de Weber vamos utilizá-la neste trabalho.

Outro aspecto a ser ressaltado vem da equação (1.9) que pode ser escrita como

$$E = q\phi + \frac{mv^2}{2} - \frac{q\phi}{3c^2} \frac{v^2}{2}. \quad (1.30)$$

Esta energia é de uma partícula de carga q movendo-se no interior de uma casca esférica em repouso, dielétrica e carregada a um potencial eletrostático ϕ . No eletromagnetismo clássico a energia da partícula é dada pela energia potencial ($q\phi$), que é uma constante, e pela energia cinética clássica ($mv^2/2$). Mas ao adotarmos o modelo de Weber temos um termo adicional dado por

$$\frac{q\phi}{3c^2} \frac{v^2}{2} . \quad (1.31)$$

Fazendo uma análise dimensional do termo que multiplica v^2 vemos que ele possui dimensão de massa. Assim pelo modelo de Weber a distribuição de cargas ao redor de uma partícula carregada produz um termo constante ($q\phi$) mais a energia cinética eletromagnética devido à interação entre a partícula e a casca esférica.

Aqui vemos os pontos de contato entre o modelo de Schrödinger e o modelo de Weber. Em ambos a energia da partícula é dada por um termo constante mais a energia cinética induzida pela distribuição de massa e carga ao redor da partícula. Assim, a energia total da partícula dada pela equação (1.30) pode ser entendida como constituída de três partes: 1) uma parte constante; 2) a energia cinética devido a interação entre a massa da partícula com a distribuição homogênea de massa no restante do universo e 3) a energia cinética devido a interação entre a carga da partícula e a distribuição de carga ao seu redor que produz uma massa eletromagnética.

Para diferenciar as abordagens, já que a forma é a mesma para os modelos envolvidos, a energia cinética clássica será denotada por K_C , a energia relativística por K_R e a obtida por Schrödinger por K_S .

Capítulo 2

Estudo da casca esférica

2.1 Introdução

Vamos estudar o comportamento de uma partícula de carga q e massa m movendo-se no interior de uma casca esférica dielétrica fixa com raio R e carga Q , com uma densidade de carga $\sigma = Q/4\pi R^2$ homogeneamente distribuída, vide Figura 2.1. Na Figura 2.1 $\vec{R}$ é a posição do elemento de carga $dq_1 = \sigma ds$; $\vec{r}$ é a posição da partícula q e $\vec{r}_{12} = \vec{R} - \vec{r}$. Vamos utilizar quatro modelos distintos: I) modelo clássico; II) modelo Weberiano; III) modelo relativístico e IV) modelo W-S. Abordaremos o formalismo Lagrangiano dos modelos acima mencionados. Os principais resultados obtidos neste Capítulo encontram-se em [CA95d] e [AC95b].

A função Lagrangiana é definida por

$$L \equiv L_f - S \tag{2.1}$$

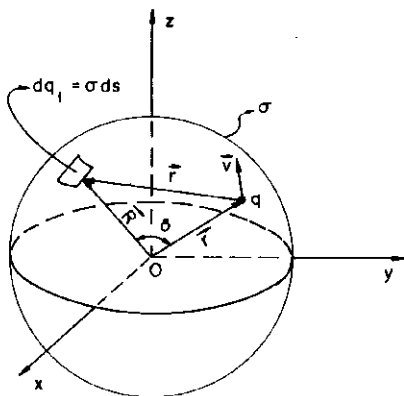


Figura 2.1: Partícula com carga q e massa m movendo-se no interior de uma casca esférica dielétrica em repouso carregada a um potencial ϕ .

onde L_f é a Lagrangiana das partículas livres e $S(q, \dot{q})$ é a energia Lagrangiana de interação eletromagnética. A força generalizada é obtida da energia potencial Lagrangiana através de

$$Q_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (2.2)$$

A equação de Lagrange é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.3)$$

A Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L. \quad (2.4)$$

Em nosso trabalho H e L não dependem explicitamente do tempo. Então $\partial L / \partial t = 0$ e $\partial H / \partial t = 0$ e temos que a Hamiltoniana é igual a energia total E do sistema dada por

$$H = E = K + U \quad (2.5)$$

onde K é a energia cinética e U a energia potencial. No Apêndice B mostramos a diferença entre S e U para o modelo Weberiano. Como foi dito

no Capítulo anterior, faremos duas abordagens. Vamos estudar o comportamento da energia da partícula no interior da casca esférica e para isto o formalismo Lagrangiano discutido até aqui e no Apêndice B é suficiente. Mas na segunda abordagem vamos supor o interior da casca esférica preenchida por um meio que apresenta uma força de resistência ao movimento da partícula em seu interior e para utilizarmos a equação (2.3) devemos modificá-la.

Quando uma força de atrito está presente e esta força é proporcional a velocidade, $\vec{F} = -b\vec{v}$, podemos definir uma função de dissipação dada por, (ver [Goi80, p. 21]):

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2} \sum_i (b_x v_{ix}^2 + b_y v_{iy}^2 + b_z v_{iz}^2). \quad (2.6)$$

Onde a somatória é sobre as partículas envolvidas. Assim a partir da definição (2.6), podemos obter a força de atrito na partícula:

$$F_x = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x}. \quad (2.7)$$

A componente da força generalizada devido a força de atrito é

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.8)$$

Incluindo a equação (2.8) na equação (2.3) temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \, . \tag{2.9}$$

2.2 Estudo da energia de uma partícula movendo-se com uma velocidade $\vec{v}$ no interior da casca esférica dielétrica carregada

2.2.1 Modelo clássico

A Lagrangiana é dada pela equação (2.1) com $L \equiv T_c - S_c$ onde

$$L_f^c = T_c = \frac{mv^2}{2} \quad (2.10)$$

é a energia cinética clássica e

$$S_c = q\phi - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (2.11)$$

Nesta equação ϕ é o potencial escalar elétrico e $\vec{A}$ o potencial vetor magnético gerados pela casca esférica carregada. Em nosso trabalho consideramos um referencial fixo na esfera. Como a casca esférica está em repouso temos $\vec{A} = 0$. Neste caso a equação (2.11) fica

$$S_c = q\phi. \quad (2.12)$$

Como a casca elétrica está em repouso e carregada uniformemente com uma carga Q temos

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}. \quad (2.13)$$

Aqui $\sigma = Q/4\pi R^2$ é a densidade superficial de carga e escolhemos o potencial nulo no infinito. Substituindo as equações (2.12) e (2.10) na equação (2.1) teremos a Lagrangiana clássica, L_c , dada por

$$L_c = \frac{mv^2}{2} - q\phi. \quad (2.14)$$

Utilizando a equação (2.4) a energia normalizada da partícula é dada por

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.15)$$

2.2.2 Modelo de Weber

A Lagrangiana é dada por $L \equiv L_f^W - S_W$ onde, L_f^W é dada pela equação (2.10)

$$L_f^W = T_c = \frac{mv^2}{2} \quad (2.16)$$

e

$$S_W = q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (2.17)$$

A Lagrangiana da partícula livre de Weber tem a mesma forma que a energia cinética clássica. Apesar disto ela é obtida a partir de uma energia de Weber para a gravitação em conformidade com o princípio de Mach, [Sch25], [Ass89] e [Ass94].

Para obtermos a energia Lagrangiana, equação (2.17), partimos da energia de interação entre duas partículas dada por

$$S_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} \right) \quad (2.18)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12} = \sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2[\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]}, \\ \dot{r}_{12} = \dot{r}_2 \frac{r_2}{r_{12}} - \dot{r}_2 \frac{R}{r_{12}} \cos\theta_1 + r_2 \dot{\theta}_1 \frac{R}{r_{12}} \sin\theta_1 - r_2 \dot{\theta}_2 \frac{R}{r_{12}} \sin\theta_1 \cos\varphi_1, \\ dq_1 = \sigma R^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

O subíndice 1 refere-se ao elemento de carga dq_1 da casca esférica e o subíndice 2 refere-se à partícula no interior da casca esférica. Substituindo a equação (2.19) na equação (2.18) e integrando, vide Apêndice C, obtemos a equação (2.17). Adotamos o referencial em que a casca esférica está em repouso, $\dot{\theta}_1 = 0$.

Da equação (2.17) e (2.16) obtemos a Lagrangiana para o modelo de Weber, L_W , dada por

$$L_W = \frac{mv^2}{2} + q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (2.20)$$

Utilizando a equação (2.4) temos que a energia da partícula no interior da casca esférica é

$$E = \frac{mv^2}{2} + U_W, \quad (2.21)$$

onde

$$U_W = q\phi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (2.22)$$

Mais uma vez chamamos a atenção para a mudança de sinal que ocorre dentro do parêntesis comparando esta última equação para U_W com a equação para S_W .

A energia normalizada fica então

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} . \quad (2.23)$$

2.2.3 Modelo relativístico

A Lagrangiana relativística, L_r , é dada por $L_r \equiv L_f - S_c$, onde

$$L_f = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}} + K , \quad (2.24)$$

e

$$S_c = q\phi . \quad (2.25)$$

Na equação (2.24) K é uma constante que não terá influência sobre a equação de movimento da partícula. Às vezes toma-se $K = 0$ para simplificar ou então $K = mc^2$ para que reobtenha-se a energia cinética clássica quando expande-se esta expressão até segunda ordem em v/c . Portanto

$$L_r = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + K . \quad (2.26)$$

Utilizando a equação (2.4) temos que a energia normalizada da partícula no

interior da casca é dada por

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{K}{mc^2}. \quad (2.27)$$

Daqui para a frente tomaremos $K = mc^2$.

2.2.4 Modelo de Weber-Schrödinger

A Lagrangiana é dada por $L_S \equiv L_f^S - S_W$, onde

$$L_f^S = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + C. \quad (2.28)$$

e

$$S_W = q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (2.29)$$

Na equação (2.28) C é uma constante que não vai ter influência na equação de movimento. Neste sentido ela é arbitrária e para que possamos obter a energia cinética clássica ao expandir esta expressão até segunda ordem em v/c vamos tomar $C = mc^2$.

Lembramos novamente que embora a forma desta Lagrangiana seja similar à relativística, ambas são conceitualmente bem distintas. Em particular a de Schrödinger implementa completamente o princípio de Mach e é compatível com a eletrodinâmica de Weber já que foi derivada de uma expressão

relacional. Portanto

$$L_S = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2} \right) + mc^2. \quad (2.30)$$

Substituindo a equação (2.30) na equação (2.4) teremos

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.31)$$

2.2.5 Comparando os modelos

Com a finalidade de melhor compararmos os resultados obtidos nesta Seção vamos resumir estes resultados em dois quadros. Na Tabela 2.1 apresentamos as Lagrangianas para os modelos aqui abordados. A Lagrangiana clássica é o limite para todas os modelos quando $v/c \ll 1$.

O objetivo principal desta Seção é analisar a energia da partícula carregada no interior da casca esférica em função da velocidade, e a velocidade em função da grandeza $q\phi/mc^2$. Antes gostaríamos de esclarecer algumas questões sobre a grandeza $q\phi/mc^2$. Esta grandeza adimensional pode ter valores negativos ou positivos dependendo dos sinais da carga na casca esférica e na partícula teste. Assim teremos que $q\phi/mc^2 < 0$ quando os sinais da partícula teste e casca esférica tiverem sinais opostos e para $q\phi/mc^2 > 0$ teremos que os sinais da partícula teste e casca esférica têm sinais iguais. A Tabela 2.2 sumariza as energias obtidas para os quatro modelos.

A Figura 2.2 mostra o comportamento da energia em função da velocidade para os vários modelos. Graficamos cada modelo para quatro valores diferentes de $q\phi/mc^2$. A Figura 2.2A refere-se ao modelo clássico; a Figura 2.2B ao modelo de Weber; a Figura 2.2C ao modelo relativístico e a Figura 2.2D ao modelo W-S.

Para $\phi = 0$ os modelos de Weber e W-S retornam aos modelos clássico e relativístico, respectivamente, para todos os valores de v^2/c^2 . Para $q\phi \neq 0$ temos que os modelos de Weber e W-S apenas retornam aos modelos clássico e relativístico no limite de baixas velocidades.

A Tabela 2.3 mostra a variação da energia com o quadrado da velocidade.

M	L_F	S	LAGRANGIANA ($L \equiv L_f - S$)
C	$\frac{mv^2}{2}$	$q\phi$	$L_c = \frac{mv^2}{2} - q\phi$
W	$\frac{mv^2}{2}$	$q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2}\right)$	$L_W = \frac{mv^2}{2} - q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2}\right)$
R	$-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + mc^2$	$q\phi$	$L_r = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + mc^2$ $-q\phi$
W-S	$-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + mc^2$	$q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2}\right)$	$L_s = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + mc^2$ $-q\phi \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2}\right)$

Tabela 2.1: Funções Lagrangiana para uma carga q movendo-se no interior de uma casca esférica dielétrica, fixa, carregada a um potencial $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 R$. Aqui C refere-se ao modelo clássico; W ao modelo de Weber; W-S ao modelo Weber- Schrödinger e R ao modelo relativístico.

M	K	U	ENERGIA TOTAL ($E = K + U$)
C	$\frac{mv^2}{2}$	$q\phi$	$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$
W	$\frac{mv^2}{2}$	$q\phi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2}\right)$	$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$
R	$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$	$q\phi$	$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1$
W-S	$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$	$q\phi \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v^2}{c^2}\right)$	$\frac{E}{mc^2} = \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$

Tabela 2.2: Energia total de uma carga q movendo-se no interior de uma casca esférica carregada. Aqui K é energia cinética e U é a energia potencial eletromagnética.

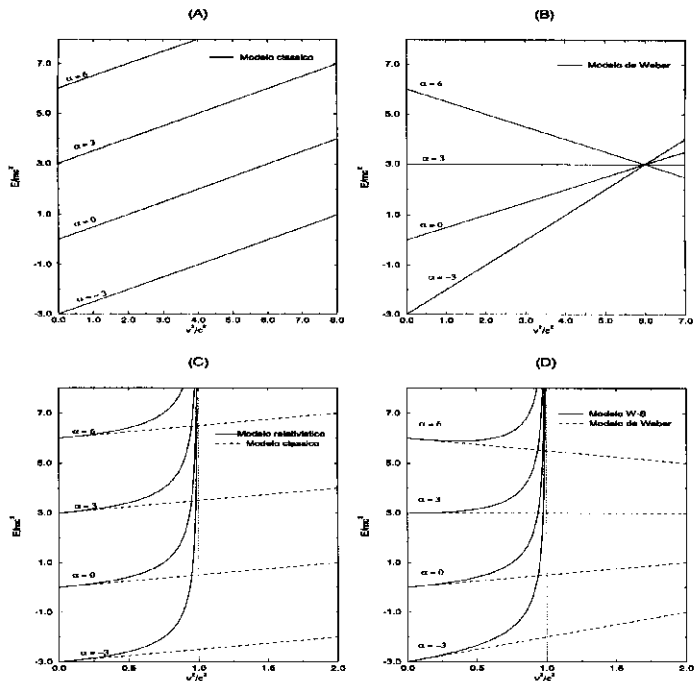


Figura 2.2: Comportamento da energia da partícula em função do quadrado da velocidade: (A) modelo clássico; (B) modelo de Weber; (C) modelo relativístico; (D) modelo W-S. Graficamos a energia em função da velocidade para quatro valores diferentes de $\alpha \equiv q\phi/mc^2$.

Repare que a variação no modelo clássico é uma constante positiva e independente da quantidade $q\phi/mc^2$ e da velocidade da partícula. No modelo de Weber também temos uma constante mas seu valor depende da relação $q\phi/mc^2$. Note que no intervalo $q\phi/mc^2 < 3$ esta constante será positiva, para $q\phi/mc^2 > 3$ será negativa e para $q\phi/mc^2 = 3$ a variação é nula.

No modelo relativístico a variação da energia com a velocidade depende somente da velocidade. Repare que para $v^2/c^2 \rightarrow 0$ a variação da energia com o quadrado da velocidade tende para $1/2$, que é o valor clássico. Agora quando $v^2/c^2 \rightarrow 1$ a variação da energia com o quadrado da velocidade tende para ∞ , como é característico para o modelo relativístico.

No modelo W-S a variação da energia com a velocidade da partícula depende da velocidade da partícula e da relação $q\phi/mc^2$. Quando $q\phi/mc^2 \leq 3$ esta variação é sempre positiva para qualquer velocidade mas para $q\phi/mc^2 > 3$ a variação poderá ser positiva ou negativa dependendo do valor da velocidade.

Na Figura 2.3 temos uma comparação detalhada dos quatro modelos quando $q\phi/mc^2 = -3$. Se a partícula teste for um elétron ($q = -1,6 \times 10^{-19} \text{C}$ e $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{kg}$) isto significa $\phi \approx 1,5 \times 10^6 \text{V}$. Vemos que os modelos relativístico e W-S apresentam um comportamento similar. A velocidade tende a $v/c \rightarrow 1$ quando $E/mc^2 \rightarrow \infty$. Para baixas velocidades o modelo relativístico tende para o modelo clássico e o modelo W-S tende para o modelo de Weber.

Da Figura 2.3 e das equações (2.27) e (2.31) vemos que para uma dada velocidade, sempre que $q\phi/mc^2 < 0$, teremos que a energia total de W-S é maior que a energia total relativística. Isto devido ao termo adicional no

MODELO	VARIAÇÃO DA ENERGIA COM O QUADRADO DA VELOCIDADE
CLÁSSICO	$\frac{1}{2}$
WEBER	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{q\phi}{mc^2}$
RELATIVÍSTICO	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$
W-S	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} - \frac{1}{6} \frac{q\phi}{mc^2}$

Tabela 2.3: Variação da energia com o quadrado da velocidade para os modelos clássico, Weber, relativístico e W-S. As energias são dadas na Tabela 2.2. Ou seja, valor de dy/dx onde $y = E/mc^2$ e $x = v^2/c^2$.

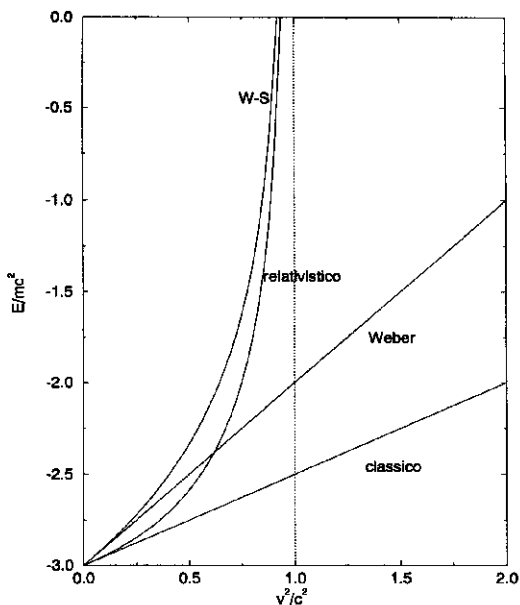


Figura 2.3: Energia em função da velocidade ao quadrado para $q\phi/mc^2 = -3$. Se a carga teste é um elétron então $\phi \approx 1,5\text{MV}$. Graficamos as equações da Tabela 2.2 para os quatro modelos.

modelo W-S, dado por,

$$-\frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Na Figura 2.4 temos o comportamento da energia em função da velocidade quando $\alpha = q\phi/mc^2 = 5$. No caso de um elétron isto significa $\phi \approx -2,5\text{MV}$. Neste caso a partícula teste e a casca esférica têm o mesmo sinal de carga. Não graficamos o modelo clássico e relativístico, pois como podemos ver pela Figura 2.2C o efeito de variarmos o valor de $q\phi/mc^2$ é um deslocamento vertical constante das curvas mas seu comportamento permanece inalterado.

Nos modelos de Weber e W-S temos uma mudança no comportamento das curvas. Mas ainda assim no modelo W-S quando $v/c \rightarrow 1$ temos $E/mc^2 \rightarrow \infty$. Contudo, repare o comportamento para baixas velocidades. Conforme a velocidade aumenta a energia total diminui até atingir um mínimo. Em seguida temos novamente com o aumento da velocidade um aumento da energia. A energia atinge um mínimo (no caso W-S com $q\phi/mc^2 > 3$) a uma velocidade que denominamos velocidade crítica, v_c , dada por

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{2/3}} \quad (2.32)$$

onde $\alpha \equiv q\phi/mc^2$. Esta relação é obtida fazendo

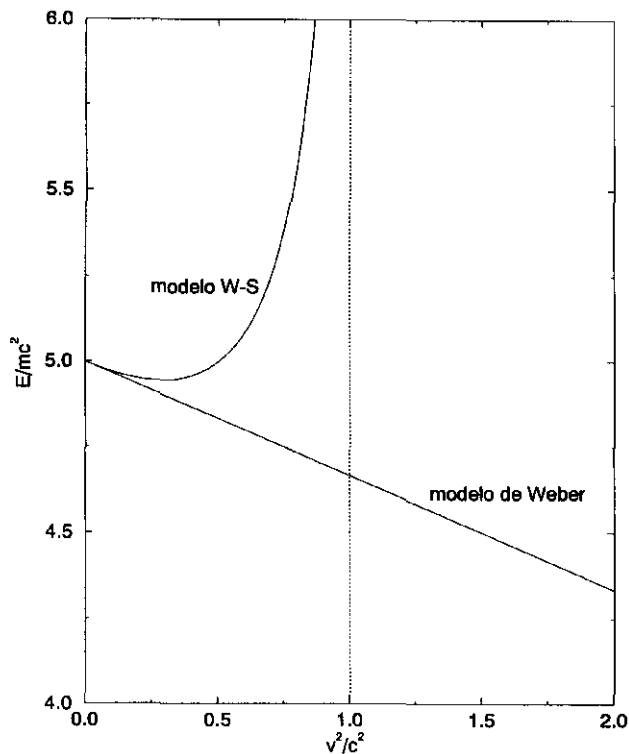


Figura 2.4: Energia em função da velocidade ao quadrado para $\alpha = q\phi/mc^2 = 5$. Se a carga teste é um elétron então $\phi \approx -2,5\text{MV}$. Graficamos as equações da Tabela 2.2 para os modelos de Weber e W-S.

$$\frac{dE}{dx} = 0, \quad (2.33)$$

onde $x = v^2/c^2$. Em nosso exemplo temos $\alpha = 5$ portanto $v_c/c \approx 0,5372$, ou $v_c^2/c^2 \approx 0,2885$.

A energia total no modelo W-S é dada por

$$E = q\phi + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 - \frac{q\phi}{3} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.34)$$

A energia neste modelo é composta por três termos, a energia potencial $q\phi$, a energia cinética mecânica de origem gravitacional

$$E_{cin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \quad (2.35)$$

e um termo adicional

$$E_{cin} = -\frac{q\phi}{3} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.36)$$

Este termo denominamos de energia cinética eletromagnética. O termo $q\phi/3c^2$ tem dimensão de massa. Esta massa que denominamos massa de Weber é devida à distribuição de carga elétrica ao redor da carga teste. Para $q\phi < 0$ a energia cinética eletromagnética é um termo positivo que portanto soma com a energia cinética mecânica. Para $0 < q\phi/mc^2 \leq$

3 a energia cinética eletromagnética é negativa mas menor que a energia cinética mecânica, portanto a energia cinética total ainda é um termo positivo. Quando $q\phi/mc^2 \geq 3$ a energia cinética eletromagnética é negativa. Agora temos uma peculiaridade em relação aos casos anteriores. Quando a velocidade da partícula teste está no intervalo $0 \leq v/c \leq v_c/c$, onde v_c/c é a velocidade crítica dada pela equação (2.32), a energia cinética eletromagnética é negativa e com módulo maior que a energia cinética mecânica. Isto explica o comportamento da curva do modelo W-S na Figura 2.4.

A questão da massa de Weber é decisiva no modelo W-S e retornaremos a ela na próxima Seção. Nesta Seção analisamos até agora o comportamento da energia em função da velocidade. Passaremos agora a estudar o comportamento da velocidade em função do potencial na casca esférica, ou melhor, em função da grandeza $q\phi/mc^2$.

Na Figura 2.5A a 2.5D graficamos as equações da Tabela 2.2. Agora, graficamos a velocidade ao quadrado em função do potencial na casca esférica. As curvas para os modelos clássico e relativístico não dependem muito (em sua forma) do valor de E/mc^2 . Na Figura 2.5A temos o modelo clássico. Neste caso a velocidade tende ao infinito quando $q\phi/mc^2 \rightarrow -\infty$. No modelo de Weber, Figura 2.5B, existem dois intervalos distintos: $q\phi/mc^2 < 3$ e $q\phi/mc^2 > 3$. Observe que $v^2/c^2 \rightarrow 6$ quando $q\phi/mc^2 \rightarrow \pm\infty$. Por outro lado $v^2/c^2 \rightarrow \pm\infty$ quando $q\phi/mc^2 \rightarrow 3$.

A divergência ocorre por adotarmos uma energia cinética clássica mais a eletrodinâmica de Weber. Mas, ao adotarmos a energia cinética de Schrödinger mais o modelo de Weber eliminamos a divergência e quando $q\phi/mc^2 \rightarrow -\infty$ temos $v^2/c^2 \rightarrow 1$, Figura 2.5D, como no modelo relativístico, Figura 2.5C.

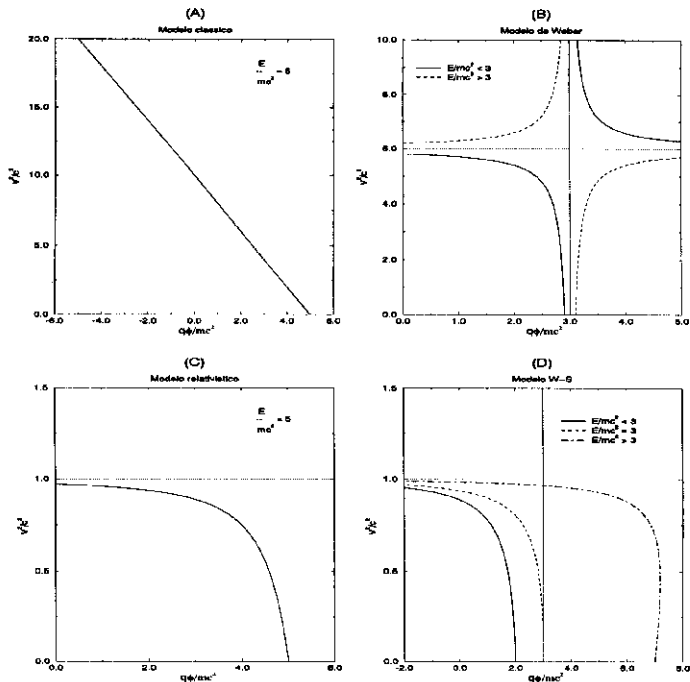


Figura 2.5: Comportamento da velocidade ao quadrado da partícula em função do potencial: (A) modelo clássico; (B) modelo de Weber (escolhemos dois valores representativos de E/mc^2 : 2.9 e 3.1); (C) modelo relativístico e (D) modelo W-S (escolhemos três valores representativos de E/mc^2 : 2, 3 e 7).

Portanto, ao adotarmos a energia cinética de Schrödinger eliminamos as críticas de Helmholtz sobre a divergência.

Na próxima Seção discutiremos esta situação na presença do atrito, como no exemplo original de Helmholtz.

2.3 Estudo da equação de movimento de uma partícula carregada no interior de uma casca esférica supondo uma força de atrito na forma $-b\vec{v}$ agindo sobre a partícula

2.3.1 Partícula movendo-se ao longo do eixo $\hat{z}$ com velocidade $\vec{v} = \dot{z}\hat{k}$

O problema que vamos analisar agora com os quatro modelos é o de uma carga q movendo-se ao longo do eixo z no interior de uma casca esférica de raio R carregada uniformemente com uma carga Q , vide Figura 2.6.

Consideraremos sempre a velocidade inicial v_0 no intervalo $-c < v_0 < c$. Vamos supor que a casca esférica dielétrica seja preenchida por um meio resistivo e que a força de atrito dependa da velocidade como

$$\vec{F}_f = -b\dot{z}\hat{k}, \quad (2.37)$$

onde b é uma constante que supomos positiva. Como discutimos na Seção 2.1, podemos escrever uma função $\mathcal{F}$ definida como

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}b\dot{z}^2 \quad (2.38)$$

tal que

$$F_z = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}} = -b\dot{z}. \quad (2.39)$$

Assim podemos escrever a equação de Lagrange como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}} = 0. \quad (2.40)$$

Utilizando as equações (2.38) e (2.40) mais as Lagrangianas da Tabela 2.1, onde fizemos $\vec{v} = \dot{z}\hat{k}$, teremos as equações de movimento resumidas na Tabela 2.4.

As soluções das equações da Tabela 2.4 estão resumidas na Tabela 2.5. Na Tabela 2.5 t_0 é o tempo característico dado por $t_0 = m/b$ e z_0/c é a velocidade inicial normalizada. Na Figura 2.7A graficamos o comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada da partícula para o modelo clássico. Repare que a aceleração em função da velocidade não depende do potencial na casca esférica. Na figura 2.7A $\ddot{z}_0$ é definido por: $\ddot{z}_0 \equiv cb/m$. Na Figura 2.7B graficamos a velocidade normalizada em função do tempo normalizado. A aceleração normalizada varia no seguinte intervalo $-1 \leq \ddot{z}/\ddot{z}_0 \leq 1$ e a velocidade normalizada no intervalo $-1 \leq \dot{z}/c \leq 1$. Como a partícula está sujeita a uma força de atrito sua aceleração

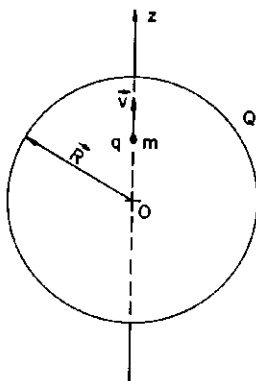


Figura 2.6: Partícula carregada movendo-se no interior de uma casca esférica carregada ao longo do eixo z com uma velocidade $\vec{v} = \dot{z}\hat{k}$.

MODELO	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO
CLÁSSICO	$m\ddot{z} + b\dot{z} = 0$
WEBER	$m\ddot{z} - \frac{q\phi}{3c^2}\ddot{z} + b\dot{z} = 0$
RELATIVÍSTICO	$\frac{m\ddot{z}}{(1-\dot{z}^2/c^2)^{3/2}} + b\dot{z} = 0$
W-S	$\frac{m\ddot{z}}{(1-\dot{z}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{q\phi}{3c^2}\ddot{z} + b\dot{z} = 0$

Tabela 2.4: Equação de movimento de uma partícula carregada no interior de uma casca esférica dielétrica fixa preenchida por um meio resistivo

sempre está oposta à velocidade, Figura 2.7A. Com isto a velocidade diminui exponencialmente com o tempo. Na Figura 2.7B temos o comportamento da velocidade em função do tempo para várias velocidades iniciais: 0,8c; 0,5c e 0,2c.

O próximo modelo a ser analisado é o de Weber. Neste modelo, temos um termo adicional quando comparamos com o modelo clássico. A equação de movimento é dada por

$$m\ddot{z} - \frac{q\phi}{3c^2}\ddot{z} + b\dot{z} = 0. \quad (2.41)$$

A equação (2.41) pode ser escrita como

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z}_0} = - \frac{\dot{z}/c}{\left(1 - \frac{q\phi}{3mc^2}\right)}. \quad (2.42)$$

Temos duas regiões para análise: $q\phi/mc^2 < 3$ e $q\phi/mc^2 > 3$. Primeiramente, vamos analisar $q\phi/mc^2 < 3$. Nesta região a aceleração tem sinal contrário à velocidade da partícula, vide Figura 2.8A. Apesar disto temos uma dependência do potencial na casca esférica. Quando $q\phi/mc^2 = 0$ reobtemos a equação de movimento para o modelo clássico. Na Figura 2.8B graficamos a solução da equação (2.41). No intervalo $q\phi/mc^2 < 3$ a velocidade normalizada em função do tempo normalizado decai exponencialmente, como no modelo clássico. Contudo, este decaimento está relacionado com o potencial na casca esférica.

A equação (2.41) pode ser escrita como

M	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO
C	$\frac{z}{c} = \frac{z_0}{c} \exp \left[-\frac{t}{t_0} \right]$
W	$\frac{z}{c} = \frac{z_0}{c} \exp \left[-\frac{t}{t_0} \left(1 - \frac{q\phi}{3mc^2} \right)^{-1} \right]$
R	$\frac{t}{t_0} = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}}{1 + \sqrt{1 - \dot{z}_0^2/c^2}} \right) - \ln \left(\frac{\dot{z}/c}{\dot{z}_0/c} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{z}_0^2/c^2}}$
W-S	$\frac{t}{t_0} = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}}{1 + \sqrt{1 - \dot{z}_0^2/c^2}} \right) - \left(1 - \frac{q\phi}{3mc^2} \right) \ln \left(\frac{\dot{z}/c}{\dot{z}_0/c} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{z}_0^2/c^2}}$

Tabela 2.5: Soluções das equações de movimento apresentadas na Tabela 2.4.

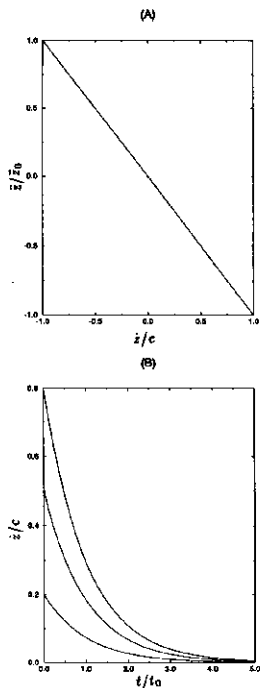


Figura 2.7: (A) comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada; (B) comportamento da velocidade normalizada em função do tempo normalizado. Ambos os casos para o modelo clássico. Temos que $\tilde{z}_0 = cb/m$ e $t_0 = m/b$.

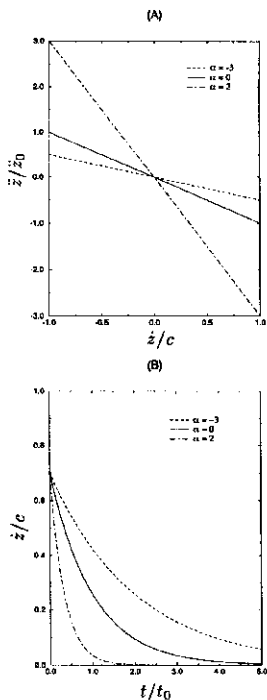


Figura 2.8: (A) comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada e (B) comportamento da velocidade normalizada em função do tempo normalizado. Ambos os casos para o modelo de Weber. Graficamos para diferentes valores de potencial na casca esférica no intervalo $\alpha \equiv q\phi/mc^2 < 3$.

$$m_{ieW}\ddot{z} + b\dot{z} = 0 \quad (2.43)$$

onde

$$m_{ieW} = m - \frac{q\phi}{3c^2} \quad (2.44)$$

é a massa inercial efetiva Weberiana. Quando $q\phi < 0$ teremos $m_{ie}/m > 1$, o que torna o decaimento mais lento comparando com o caso clássico devido ao aumento da massa inercial efetiva. Quando $q\phi/mc^2 = 0$ temos $m_{ie}/m = 1$, que é o caso clássico. Para $0 < q\phi/mc^2 < 3$ teremos $0 < m_{ie}/m < 1$, o que torna o decaimento mais rápido comparado com o caso clássico devido à diminuição da massa inercial efetiva. Na Figuras 2.8A e 2.8B graficamos a equação 2.41 e a solução desta equação, Tabela 2.5, para três valores de $q\phi/mc^2$: -3; 0 e 2. No gráfico 2.8B a velocidade inicial é $\dot{z}_0/c = 0,7$.

Agora vamos analisar $q\phi/mc^2 > 3$. Nesta região a aceleração tem sinal igual à velocidade, vide Figura 2.9A. Como no caso anterior, temos uma dependência do potencial na casca esférica. Na Figura 2.9B graficamos a solução da equação (2.41) no intervalo $q\phi/mc^2 > 3$. Vemos que a velocidade normalizada em função do tempo normalizado aumenta exponencialmente. Isto devido à massa inercial efetiva, equação (2.44), que torna-se negativa. Repare, quanto mais próximo de três o valor de $q\phi/mc^2$, menor será a massa inercial efetiva, equação (2.44), e teremos uma variação maior na velocidade. Na Figura 2.9A e 2.9B graficamos a equação (2.41) e a solução desta equação

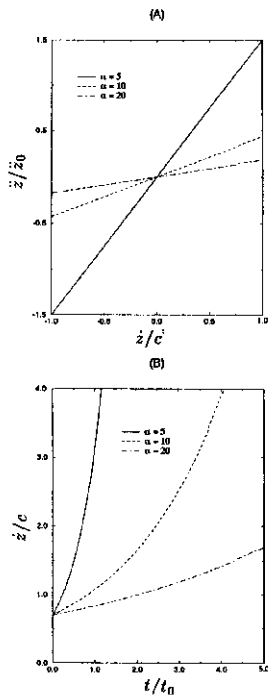


Figura 2.9: (A) comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada e (B) comportamento da velocidade normalizada em função do tempo normalizado. Ambos os casos para o modelo de Weber com $\alpha = q\phi/mc^2 > 3$.

para três valores de $q\phi/mc^2$: 5; 10 e 20. No gráfico 2.9B a velocidade inicial é $\dot{z}_0/c = 0,7$. Portanto, de acordo com a eletrodinâmica de Weber mais mecânica Newtoniana a velocidade inicial da carga teste aumenta indefinidamente devido ao atrito quando $q\phi > 3mc^2$, em vez de diminuir, como ocorre classicamente. Aqui está o ponto principal da crítica de Helmholtz. Mesmo com $\dot{z}_0 < c$ a carga ultrapassará a velocidade da luz a partir de um certo momento, algo nunca observado. Adiante mostraremos como isto é resolvido no modelo W-S.

Agora vamos analisar o modelo relativístico. A equação de movimento relativística dada na Tabela 2.4 pode ser escrita como

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z}_0} = -\frac{\dot{z}}{c} \left(1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2} \right)^{3/2}. \quad (2.45)$$

Na Figura 2.10A graficamos a equação (2.45). Como no caso clássico, a aceleração tem sinal contrário à velocidade. Quando graficamos a solução da equação relativística, Tabela 2.5, teremos um decaimento tipo exponencial da velocidade com o tempo, vide Figura 2.10B. No modelo relativístico, como no modelo clássico, a velocidade e aceleração independem do potencial na casca esférica. Graficamos a Figura 2.10B para várias velocidades iniciais $\dot{z}_0/c$: 0,2; 0,5 e 0,8.

A equação de movimento relativística é dada por

$$\frac{m\ddot{z}}{(1 - \dot{z}^2/c^2)^{3/2}} + b\dot{z} = 0. \quad (2.46)$$

Ela pode ser escrita como a segunda lei de Newton

$$m_{ier}\ddot{z} + b\dot{z} = 0 \quad (2.47)$$

onde

$$m_{ier} = m(1 - \dot{z}^2/c^2)^{-3/2} \quad (2.48)$$

é a massa inercial efetiva relativística.

O comportamento qualitativo das curvas na Figura 2.10 é o mesmo que no modelo clássico. As diferenças maiores ocorrem para $\dot{z} > 0,5c$, quando os efeitos relativísticos começam a aparecer. Nestes casos pode-se entender o comportamento das curvas observando-se que a massa inercial efetiva aumenta com a velocidade, fazendo com que o decaimento da velocidade seja mais lento do que no caso clássico.

Iniciamos agora a análise do modelo W-S. A equação de movimento do modelo W-S é dada por

$$\left(\frac{m}{(1 - \dot{z}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{q\phi}{3c^2} \right) \ddot{z} + b\dot{z} = 0. \quad (2.49)$$

A equação (2.49) pode ser escrita na forma Newtoniana como

$$m_{ieS}\ddot{z} + b\dot{z} = 0 \quad (2.50)$$

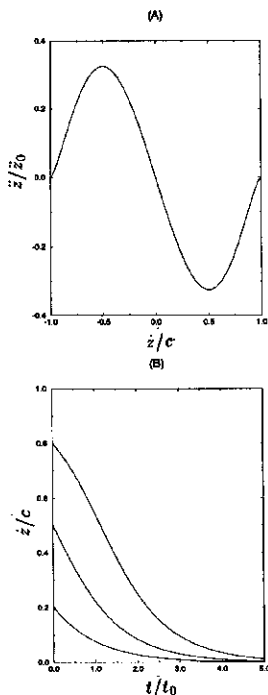


Figura 2.10: (A) comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada. (B) velocidade normalizada em função do tempo normalizado. Ambas os casos para o modelo relativístico.

onde

$$m_{ies} = \frac{m}{(1 - \dot{z}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{q\phi}{3c^2} \quad (2.51)$$

é a massa inercial efetiva. A equação (2.49) também pode ser escrita como

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z}_0} = - \frac{\frac{\dot{z}}{c} \left(1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right)^{3/2}}{1 - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \left(1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (2.52)$$

A equação (2.52) irá divergir quando

$$1 - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \left(1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right)^{3/2} = 0. \quad (2.53)$$

Isto ocorre somente para $q\phi/mc^2 \geq 3$. Então para um valor dado de $q\phi/mc^2$ teremos uma velocidade crítica dada por (sendo $\alpha = q\phi/mc^2$):

$$\frac{\dot{z}_c}{c} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{2/3}}, \quad (2.54)$$

que é o mesmo valor dado pela equação (2.32) quando discutimos o mínimo da energia, Seção 2.2.5. A solução da equação (2.49) é

$$\frac{t}{t_0} = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}}{1 + \sqrt{1 - \dot{z}_0^2/c^2}} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \frac{q\phi}{mc^2} \right) \ln \left(\frac{\dot{z}/c}{\dot{z}_0/c} \right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\dot{z}^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\dot{z}_0^2/c^2}}, \quad (2.55)$$

onde $\dot{z}_0/c$ é a velocidade inicial normalizada e $t_0 = m/b$ é o tempo característico. Da equação (2.52) temos dois intervalos para análise: $q\phi/mc^2 < 3$ e $q\phi/mc^2 > 3$.

A Figura 2.11A mostra o comportamento da equação (2.52) onde fizemos $q\phi/mc^2 = -3; 0$ e 2 . Da Figura vemos que a aceleração tem sempre sinal contrário à velocidade. No modelo relativístico, que corresponde ao modelo W-S quando $q\phi/mc^2 = 0$, a velocidade normalizada varia no intervalo $-1 \leq \dot{z}/c \leq 1$ enquanto que a aceleração normalizada varia no intervalo $-0,3 \leq \ddot{z}/\ddot{z}_0 \leq 0,3$. Mas no modelo W-S a aceleração normalizada depende não só da velocidade mas também do potencial na casca esférica, equação (2.52). Então, para $q\phi/mc^2 = -3$ e velocidade variando no intervalo $-1 \leq \dot{z}/c \leq 1$ a aceleração normalizada varia no intervalo $-0,2 \leq \ddot{z}/\ddot{z}_0 \leq 0,2$. Com isto a velocidade da partícula em função do tempo normalizado, Figura 2.11B, decai mais vagarosamente com o tempo se compararmos com o modelo relativístico. Para $q\phi/mc^2 = 2$ a velocidade da partícula em função do tempo decai mais rapidamente que o caso relativístico.

Este comportamento novamente deve-se à massa inercial efetiva, equação (2.51). Quando $q\phi/mc^2 < 0$ temos um acréscimo na massa inercial mecânica devido a massa inercial de Weber, $q\phi/3c^2$. Com isto obtem-se um decaimento mais lento que o modelo relativístico. Para $q\phi/mc^2 = 0$ a equação (2.51)

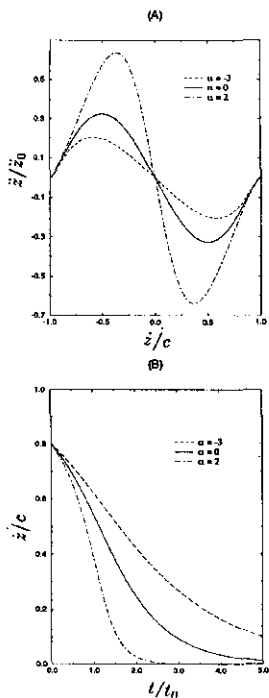


Figura 2.11: (A) comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada e (B) comportamento da velocidade normalizada em função do tempo normalizado. Ambos os casos para o modelo W-S.

torna-se a equação (2.48) e assim o decaimento é igual ao modelo relativístico. Quando $0 \leq q\phi/mc^2 \leq 3$ temos um decréscimo na massa inercial efetiva devido ao termo $q\phi/mc^2$ que torna-se negativo, vide equação (2.51).

Agora vamos analisar o caso mais interessante dentro do modelo W-S. Quando $q\phi/mc^2 \geq 3$ entramos no intervalo de divergência da equação (2.52). Em nossa análise numérica vamos supor $q\phi/mc^2 = 5$. Assim quando graficamos a equação (2.52), vide Figura 2.12A, ela diverge na velocidade crítica, (2.54), ou seja quando $\dot{z}/c \approx 0,5372$.

Vamos analisar o intervalo $0 \leq \dot{z}/c \leq 1$, Figura 2.12A. Quando $0 \leq \dot{z}/c < 0,5372$ a aceleração possui o mesmo sinal da velocidade. Então para uma velocidade inicial $\dot{z}_0 = 0,2$, Figura 2.12B, a velocidade da partícula crescerá até $\dot{z}/c = 0,5372$, que é a velocidade crítica. Agora, para uma velocidade inicial $\dot{z}_0/c = 0,7$ a velocidade da partícula diminuirá até $\dot{z}/c = 0,537$ que é a velocidade crítica.

Este comportamento deve-se à forma da massa inercial efetiva. Na Figura 2.13 graficamos a equação (2.51), a massa inercial efetiva, em função da velocidade normalizada no intervalo $0 \leq \dot{z}/c \leq 1$ para três valores de $q\phi/mc^2$: 0, 3 e 5. Repare que no intervalo $0 \leq \dot{z}/c < 0,537$ a massa inercial efetiva é negativa para $q\phi/mc^2 = 5$. Como temos uma força resistiva, a velocidade da partícula aumentará até $\dot{z}/c = 0,537$. Quando $0,537 < \dot{z}/c < 1$ a massa inercial efetiva é positiva para $q\phi/mc^2 = 5$. Para $\dot{z} = \dot{z}_c$ a massa inercial efetiva é zero. Podemos supor que a partícula deixa de interagir com o meio neste caso.

Vamos discutir aqui o caso em que $\alpha = q\phi/mc^2 > 3$. O ponto principal a ser observado nesta última análise é o problema apontado por Helmholtz

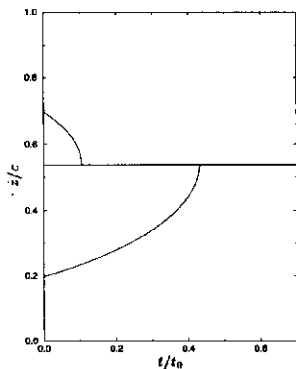
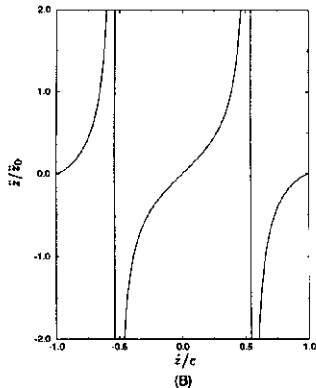


Figura 2.12: (A) comportamento da aceleração normalizada em função da velocidade normalizada. A divergência ocorre quando $\dot{z}/c = \dot{z}_c/c$. (B) comportamento da velocidade normalizada em função do tempo normalizado. Para $0 \leq \dot{z}_0 < \dot{z}_c$ a velocidade da partícula tende para $\dot{z}_c$. Para $\dot{z}_c < \dot{z}_0 < c$ a velocidade também tende para $\dot{z}_c$. Utilizamos $q\phi/mc^2 = 5$ nos gráficos acima tal que $\dot{z}_c/c \approx 0,5373$. Ambos os casos para o modelo W-S.

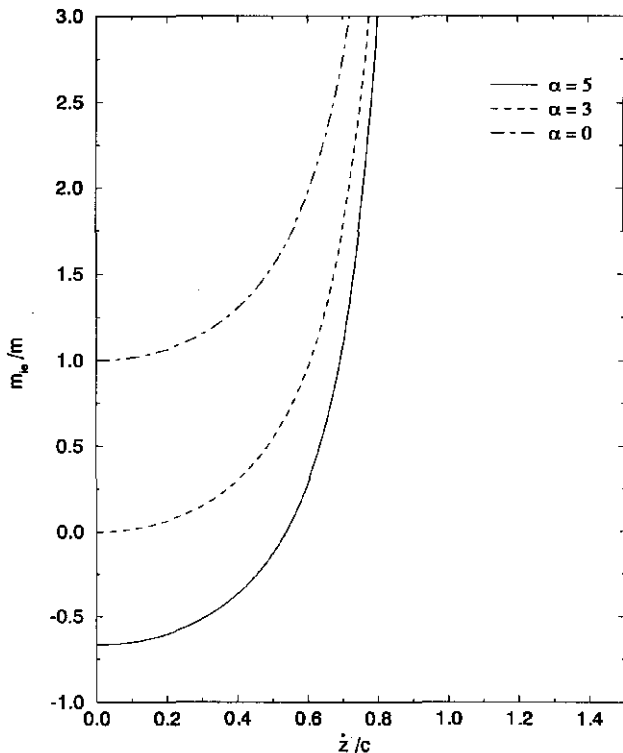


Figura 2.13: Comportamento da massa inercial efetiva normalizada em função da velocidade normalizada para o modelo W-S. Graficamos a massa efetiva para vários valores de $q\phi/mc^2$. Quando $q\phi/mc^2 = 0$ reobtemos a massa inercial efetiva para o modelo relativístico.

que não mais aparece no modelo W-S. Isto é, se a carga teste tem uma velocidade inicial menor que c , $0 < v_0 < c$, então sua velocidade final será a velocidade crítica $v_c = c\sqrt{1 - (3/\alpha)^{2/3}}$, que é menor que c . Se sua velocidade inicial estiver entre 0 e v_c , ela aumentará sua velocidade até atingir v_c , permanecendo então nesta velocidade. Caso $v_c < v_0 < c$ ela diminuirá sua velocidade novamente até atingir v_c .

Estes comportamentos podem ser entendidas fisicamente observando que em W-S a massa inercial efetiva depende não apenas do potencial mas também da velocidade

E o mais importante é que esta resolução da crítica de Helmholtz não envolveu modificações na eletrodinâmica de Weber mas apenas na mecânica Newtoniana . Ou seja, bastou introduzir uma energia cinética dada por $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2$, em vez de $mv^2/2$.

2.3.2 Partícula movendo-se numa circunferência de raio ρ_0 com velocidade $\vec{v} = \rho_0 \dot{\theta} \hat{\theta}$

Na Seção 2.3.1 analisamos o movimento ao longo do eixo $\hat{z}$. Agora vamos analisar um movimento numa órbita fechada da partícula teste. Para isto supomos que a partícula carregada move-se numa circunferência de raio constante ρ_0 , devido a vínculos radiais. Sua velocidade é então $\vec{v} = \rho_0 \dot{\theta} \hat{\theta}$.

Na Tabela 2.1 temos que a Lagrangiana para o modelo W-S é dada por

$$L_S = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2 \dot{\theta}^2}{c^2}} + mc^2 - q\phi \left(1 + \frac{\rho_0^2 \dot{\theta}^2}{6c^2} \right). \quad (2.56)$$

Utilizando a equação (2.7) e lembrando que

$$\mathcal{F} = \frac{bv^2}{2}, \quad (2.57)$$

então a equação de movimento para a componente tangencial da velocidade fica

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \rho_0^2 \dot{\theta}^2 / c^2}} + \frac{\rho_0^2 \dot{\theta}^2 / c^2}{(1 - \rho_0^2 \dot{\theta}^2 / c^2)^{3/2}} - \frac{q\phi}{3mc^2} \right] \frac{\rho_0 \ddot{\theta}}{bc/m} + \frac{\rho_0 \dot{\theta}}{c} = 0. \quad (2.58)$$

Vamos definir $x \equiv \rho_0 \theta$, $\dot{x} = \rho_0 \dot{\theta}$ e $\ddot{x} = \rho_0 \ddot{\theta}$. Assim a equação (2.58) pode ser escrita como

$$\left[\frac{1}{(1 - \dot{x}^2 / c^2)^{3/2}} - \frac{q\phi}{3mc^2} \right] \frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0} + \frac{\dot{x}}{c} = 0 \quad (2.59)$$

onde $\ddot{x}_0 = bc/m$. A equação (2.59) pode ser escrita como

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0} = - \frac{(\dot{x}/c)(1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2}}{1 - (q\phi/3mc^2)(1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2}}. \quad (2.60)$$

Comparando as equações (2.60) e (2.52) vemos que elas possuem a mesma forma. Assim o que foi discutido na Seção 2.3.1 também vale para o movimento circular no interior da casca esférica.

Capítulo 3

Estudo do capacitor plano ideal: movimento retilíneo através do capacitor

3.1 Introdução

Neste capítulo utilizamos uma mudança na geometria do problema. Uma partícula com carga q e massa m (nos exemplos numéricos será sempre um elétron) movendo-se perpendicularmente às placas de um capacitor plano ideal (com uma densidade superficial de carga σ de sinais opostos, módulos iguais e distribuídas homogeneamente), vide Figura 3.1. Nosso objetivo aqui é estudar o comportamento da partícula utilizando o modelo W-S. Em nossa tese de mestrado já analisamos o modelo clássico, o modelo de Weber e o modelo relativístico. E os principais resultados encontram-se em [AC91] e

Quando estudamos a casca esférica vimos que o modelo W-S superou as críticas de Helmholtz quanto à divergência da velocidade que ocorria no modelo de Weber com a mecânica clássica. Por outro lado ele introduziu novos aspectos que não tinham sido discutidos por Helmholtz: a massa inercial efetiva dependendo do potencial e da velocidade. Esta massa inercial efetiva conduz a uma massa inercial negativa devido ao termo da “massa de Weber”. Nas Seções 2.3.1 e 2.3.2 estudamos algumas das consequências de uma massa inercial negativa. Por exemplo, o aumento da velocidade da partícula carregada no interior de uma casca esférica preenchida por um meio resistivo.

Um experimento como o proposto por Helmholtz nunca foi realizado, pelo que temos conhecimento, e estamos na área dos argumentos teóricos. Portanto resolvemos aplicar estas teorias a uma geometria em que temos algum dado experimental disponível. Por este motivo adotamos o capacitor plano ideal.

Nos modelos que vamos estudar não levamos em consideração os efeitos de bordas, perdas de energias devido a radiação eletromagnética e induções de correntes nas placas do capacitor quando o eletrão é acelerado entre elas.

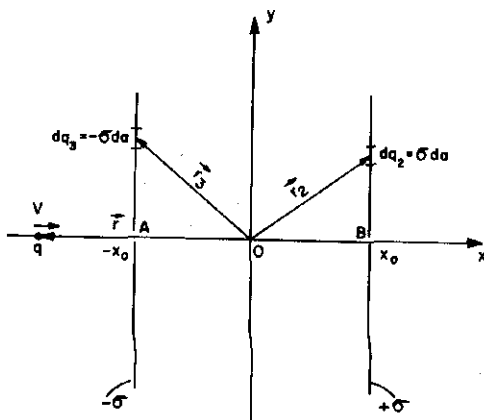


Figura 3.1: Capacitor plano com uma densidade de carga $\pm\sigma$ em suas placas, e uma partícula com carga q e massa m movendo-se perpendicularmente às placas.

3.2 Energia de uma partícula carregada no interior de um capacitor plano ideal

Vamos utilizar a energia potencial de Weber dada por

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{ij}^2}{c^2} \right). \quad (3.1)$$

A energia de interação de uma carga q movendo-se ao longo do eixo x é obtida integrando a equação (3.1), vide Apêndice D, sobre as duas placas. O resultado desta integração é dado por

$$U_W(x \leq -x_0) = -\frac{q\sigma}{\epsilon_0} x_0 - \frac{q\sigma x_0 v^2}{\epsilon \frac{1}{2} c^2}, \quad (3.2)$$

$$U_W(-x_0 \leq x \leq x_0) = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} x + \frac{q\sigma x v^2}{\epsilon \frac{1}{2} c^2}, \quad (3.3)$$

$$U_W(x \geq x_0) = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} x_0 + \frac{q\sigma x_0 v^2}{\epsilon \frac{1}{2} c^2}, \quad (3.4)$$

onde σ é a densidade de carga na placa positiva do capacitor, $\pm x_0$ é a posição das placas do capacitor e v é a velocidade normal às placas da partícula localizada em $\vec{r} = x(t)\hat{i}$.

Podemos escrever que

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \quad (3.5)$$

onde Q é a carga total na placa e A sua área. Temos ainda que:

$$Q = \frac{\epsilon_0 A \Delta\varphi}{2x_0}, \quad (3.6)$$

onde $\Delta\varphi$ é a diferença de potencial entre as placas ($\Delta\varphi \geq 0$). Substituindo a equação (3.6) na equação (3.5) obtemos

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \Delta\varphi}{2x_0}. \quad (3.7)$$

Estas são grandezas características do capacitor e não dependem da teoria utilizada.

Antes de continuarmos vamos utilizar as equações (D.16) a (D.18), Apêndice D. Destas equações e utilizando a equação (2.2), Seção 2.1, podemos obter a força exercida pelas placas do capacitor sobre a partícula quando esta move-se ao longo do eixo x :

$$\vec{F}(x \leq -x_0) = \frac{q\Delta\varphi}{2c^2} a \hat{i}, \quad (3.8)$$

$$\vec{F}(-x_0 \leq x \leq x_0) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{xa}{c^2} \right] \hat{i}, \quad (3.9)$$

$$\vec{F}(x_0 \leq x) = -\frac{q\Delta\varphi}{2c^2} a \hat{i}, \quad (3.10)$$

onde a é aceleração da partícula normal às placas do capacitor. As equações (3.8) a (3.10) são resultados que não obtínhamos com o modelo clássico. De acordo com a eletrodinâmica de Weber a carga q sofre a ação de uma força exercida pelas placas sempre que ela possuir uma aceleração em relação às placas, mesmo quando está fora do capacitor. Uma possível situação de teste para estas previsões é estudarmos como um oscilador harmônico carregado eletricamente é afetado pela presença do capacitor. Isto será analisado no capítulo 4. Agora, retomemos o estudo da energia.

A energia total da partícula quando consideramos o potencial Weberiano e a energia cinética de Schrödinger, é

$$E = U_W + K_S \quad (3.11)$$

onde E é energia total, U_W é a energia potencial Weberiana e K_S é a energia cinética de Schrödinger.

Utilizando as equações (3.2), (3.3) e (3.4) e as equações (2.35) e (3.7) temos que

$$E(x \leq -x_0) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2, \quad (3.12)$$

$$E(-x_0 \leq x \leq x_0) = \frac{q\Delta\varphi}{2} \frac{x}{x_0} + \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{v^2}{c^2} \frac{x}{x_0} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2, \quad (3.13)$$

$$E(x_0 \leq x) = \frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2. \quad (3.14)$$

Em nosso trabalho de mestrado analisamos o caso em que um elétron penetrava o capacitor à esquerda de A (Figura 3.1) com uma velocidade próxima de zero e era acelerado pela diferença de potencial entre as placas até sair em B (Figura 3.1). Mostramos que tanto no modelo clássico quanto no de Weber que para diferenças de potencial finitas (da ordem de 10^6V) o elétron atingiria velocidades acima da velocidade da luz, ver [Cal91] e [AC91]. Apenas o modelo relativístico previa um limite superior correto para a velocidade dos elétrons igual a $3 \times 10^8\text{m/s}$, como observado experimentalmente. Como o modelo de W-S superou as críticas apontadas por Helmholtz no caso da casca esférica, resolvemos analisar o mesmo problema do mestrado com esta teoria. Ou seja, supondo um elétron entrando em A com $v \approx 0$, queremos saber sua velocidade de saída em B para vários valores de $\Delta\varphi$.

Utilizando o princípio de conservação de energia vem:

$$E(x \leq -x_0) = E(-x_0 \leq x \leq x_0) . \quad (3.15)$$

Assim

$$\begin{aligned} & -\frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{v_a^2}{c^2} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_a^2/c^2}} \\ &= \frac{q\Delta\varphi}{2} \frac{x}{x_0} + \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{v^2}{c^2} \frac{x}{x_0} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde v_a é a velocidade da partícula antes de entrar no capacitor e v sua velocidade no interior do capacitor. Faremos a hipótese que $v_a \ll c$.

Podemos então escrever a equação (3.16) como

$$-\frac{q\Delta\varphi}{2mc^2} \left[1 + \frac{x}{x_0} + \frac{x}{x_0} \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 . \quad (3.17)$$

Considerando $x = x_0$, ou seja, a partícula teste saindo pela placa positiva e $q = -e$ (um elétron), teremos:

$$\Delta\varphi = \frac{mc^2}{e \left[1 + \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} \right]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\} . \quad (3.18)$$

Uma análise numérica da equação (3.18) é dada na Figura 3.2. O principal resultado é que a velocidade da partícula acelerada é sempre menor que c e assintótica a c quando $\Delta\varphi \rightarrow \infty$.

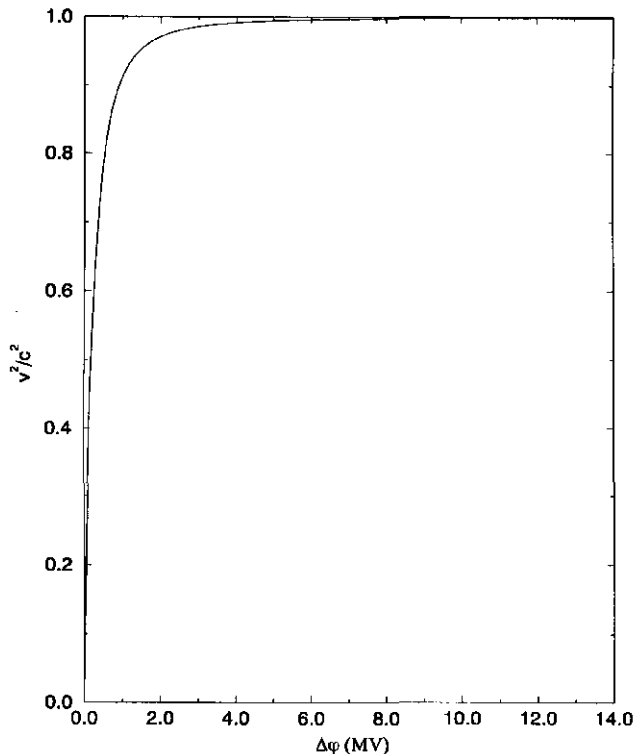


Figura 3.2: Comportamento da velocidade de saída em função da diferença de potencial para o modelo W-S. A partícula teste é um elétron acelerado a partir do repouso dentro do capacitor ideal. Vemos que a velocidade final vai para c quando $\Delta\varphi \rightarrow \infty$.

3.3 Comparando os modelos

Com a finalidade de compararmos os resultados vamos retomar o tratamento clássico (Coulomb + $mv^2/2$), Weberiano (Weber + $mv^2/2$), relativístico (Coulomb + energia cinética relativística) e utilizando os resultados obtidos na Seção 3.2 (Weber + Schrödinger), especificamente a equação (3.18). Os resultados aqui discutidos encontram-se em [CA95c].

Nas Figuras 3.3A a 3.3D comparamos os quatro modelos. Em todas elas utilizamos a conservação da energia, equação (3.15), na forma $E = K + U$. Para a energia cinética temos a clássica, $K_c = mv^2/2$, ou a dada por $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2$. Esta última expressão é análoga à energia relativística, K_r , e também à obtida por Schrödinger, K_s , discutida na Seção 1.3. Para a energia potencial temos a de Coulomb, U_C , equação (3.1) com $\dot{r}_{ij} = 0$ e energia potencial de Weber, U_W , equação (3.1). Quando integramos a equação (3.1) para uma carga interagindo com um capacitor plano ideal obtemos as equações (3.2) a (3.4) para o modelo de Weber ou para o clássico (sem o termo em v^2).

O problema analisado por estes modelos é o mesmo da Seção 3.1. Um elétron sendo acelerado do repouso a partir de $x = -x_0$ até $x = x_0$, ortogonalmente às placas de um capacitor ideal, Figura 3.1, [Cal91]. No primeiro modelo, $K_C + U_C$, temos a energia cinética clássica e potencial de Coulomb. Então v^2 é uma função linear de $\Delta\varphi$ e cresce indefinidamente sem limites. A diferença de potencial em função da velocidade ao quadrado é dada por

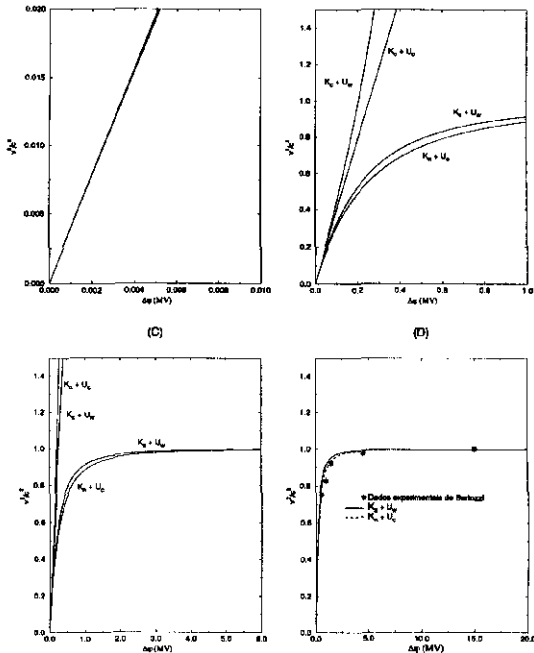


Figura 3.3: Velocidade final de um elétron sendo acelerado a partir do repouso dentro de um capacitor ideal como função da voltagem $\Delta\phi$ entre as placas de acordo com os quatro modelos. Utilizamos a energia cinética clássica, relativística e de Schrödinger (K_c ; K_r e K_S , respectivamente). Para a energia potencial elétrica utilizamos o potencial Coulombiano e Weberiano (U_C e U_W , respectivamente). Em (D) temos a comparação entre as predições teóricas do modelo W-S ($K_S + U_W$) e do modelo relativístico ($K_r + U_C$) com os dados experimentais obtidos por Bertozzi, [Ber64].

$$\Delta\varphi = \frac{c^2 m v^2}{2e c^2}. \quad (3.19)$$

No segundo modelo, $K_C + U_W$, temos a energia cinética clássica e a potencial de Weber. Neste modelo não temos limite superior na velocidade v^2 e ela diverge quando $\Delta\varphi \rightarrow 1\text{MV}$. A diferença de potencial em função da velocidade é dada por

$$\Delta\varphi = \frac{mc^2}{2e} \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (3.20)$$

No terceiro modelo, $K_r + U_C$, temos a energia cinética relativística e a energia potencial de Coulomb. Então a velocidade tende assintoticamente a c quando $\Delta\varphi \rightarrow \infty$. A diferença de potencial em função da velocidade é dada por

$$\Delta\varphi = \frac{mc^2}{e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}. \quad (3.21)$$

No quarto modelo, [CA95c], temos a energia cinética de Schrödinger mais a energia potencial de Weber. Os resultados deste modelo são próximos aos do modelo relativístico, Figura 3.3C. Mesmo utilizando a energia potencial de Weber obtemos uma velocidade limite para o elétron, $v \rightarrow c$, quando

a diferença de potencial vai ao infinito, $\Delta\varphi \rightarrow \infty$. Somente o modelo relativístico e o modelo W-S são compatíveis com os dados experimentais. A diferença de potencial em função da velocidade é dada pela equação (3.18).

Existe um experimento importante realizado por Bertozzi [Ber64] onde ele mede o tempo de voo de um elétron sendo acelerado em um acelerador eletrostático van der Graff e em um acelerador linear, LINAC.

Há cinco medidas em seu experimento nas quais a energia cinética dos elétrons, em MeV, são: 0,5; 1,0; 1,5; 4,5 e 15. A partir da medida do tempo de voo dos elétrons em cada medida e da distância viajada pelos elétrons, 8,4 metros, Bertozzi obteve os seguintes valores para v^2/c^2 , respectivamente: 0,752; 0,828; 0,922; 0,974 e 1,0. Na Figura 3.3D comparamos os modelos teóricos discutidos com os resultados experimentais de Bertozzi. Graficamos v^2/c^2 contra a diferença de potencial que acelera os elétrons. Como podemos ver da Figura 3.3D e das anteriores, Figuras 3.3A a 3.3C, somente o modelo relativístico e o modelo W-S são compatíveis com os dados experimentais.

Em seu artigo, [Ber64], Bertozzi diz que o erro experimental para todas as medidas é de dez por cento, 10%. Assim graficamos na Figura 3.4 os valores teóricos para os modelos W-S e relativístico mais os dados experimentais de Bertozzi com os respectivos erros. Vemos que as duas curvas teóricas são compatíveis com os dados experimentais dentro da faixa de erro. Como temos somente cinco pontos experimentais e efeitos de borda etc. não foram levados em consideração nos quatro modelos discutidos, não podemos decidir entre estas duas últimas curvas teóricas para este experimento.

De qualquer forma o mais importante a ser observado é que o modelo W-S está levando consistentemente a uma velocidade limite c para as cargas

sendo aceleradas em diversas situações, como observado experimentalmente. E isto apesar do fato de termos na eletrodinâmica de Weber uma massa inercial efetiva que depende da energia potencial elétrica da carga, fato que não ocorre na relatividade.

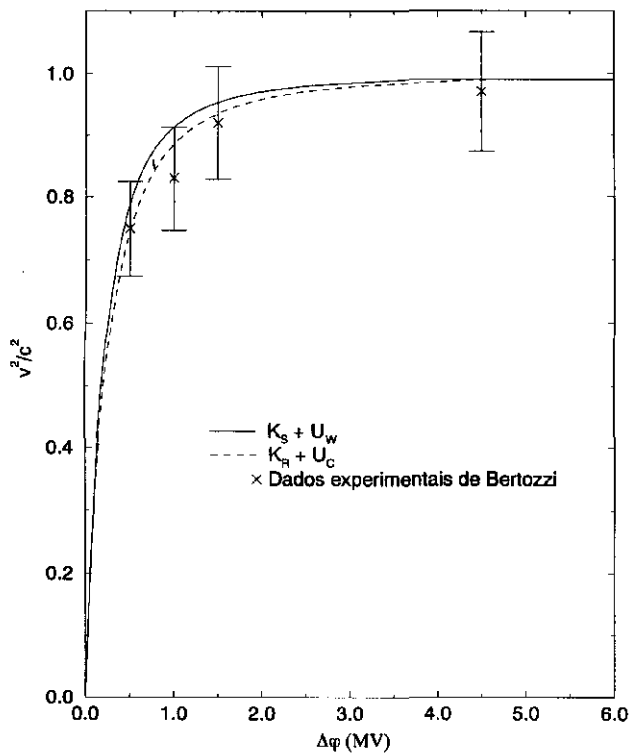


Figura 3.4: Comparação entre as curvas teóricas para os modelos W-S e relativístico com os dados experimentais de Bertozzi, [Ber64], com os respectivos erros.

Capítulo 4

Estudo do capacitor plano ideal: movimento oscilatório próximo às placas do capacitor

4.1 Introdução

Neste Capítulo vamos estudar o movimento oscilatório de uma partícula carregada próximo a um capacitor plano ideal. Pois como vimos anteriormente no modelo de Weber, equações (3.8) a (3.10), temos uma força de origem eletrodinâmica atuando sobre uma partícula carregada no exterior do capacitor quando a carga sofre uma aceleração, fato que não ocorre na eletrodinâmica clássica.

O objetivo de estudarmos um oscilador harmônico é verificar como esta força extra externa modifica a frequência do oscilador. Para isto vamos

estudar os quatro modelos diferentes com a finalidade de observarmos quatro limites: baixas ($v/c \ll 1$) e altas velocidades ($v/c \approx 1$) e verificarmos o comportamento quando a grandeza $q\Delta\varphi/mc^2 = 0$ e para $q\Delta\varphi/mc^2 \rightarrow \pm\infty$, onde q é a carga da partícula teste e $\Delta\varphi$ é a diferença de potencial entre as placas do capacitor.

Vamos utilizar como limite para baixas velocidades o oscilador harmônico clássico (OHC). Para o limite de altas velocidades o oscilador harmônico relativístico (OHR). No modelo de Weber a energia da partícula será dada pela energia cinética clássica, mais a energia potencial da mola (responsável pelo movimento oscilatório da carga teste) e mais energia potencial Weberiana, equação (3.2). A isto denominamos oscilador harmônico de Weber (OHW).

Quando consideramos altas velocidades e uma partícula carregada vamos utilizar o modelo que denominamos oscilador harmônico de W-S (OHS). Neste modelo a energia é dada da mesma forma que OHW onde trocamos a energia cinética clássica pela energia cinética de Schrödinger.

A Figura 4.1 mostra um esquema do problema estudado. Temos uma partícula carregada oscilando próximo a um capacitor plano ideal, com amplitude b e sua posição de equilíbrio dada por x_E .

A posição da carga q num certo instante t é representada por x . Na situação analisada aqui ela está fora do capacitor, à esquerda da placa negativa ($x < -x_0$). Consideramos que ela está presa a uma mola ideal de constante elástica k . Estudamos sua oscilação ortogonal às placas do capacitor, ou seja, ao longo do eixo x . Na posição de equilíbrio $x = x_E$ temos que ela não sente nenhuma força da mola. Sendo a amplitude de oscilação dada por b temos:

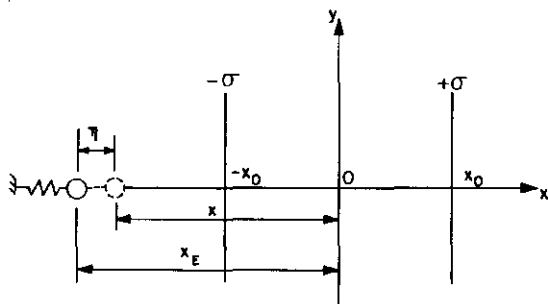


Figura 4.1: Partícula carregada oscilando próximo a um capacitor plano ideal: x_E é a posição de equilíbrio e x a posição da partícula. Assim $-b \leq x - x_E \leq b$, sendo b a amplitude de oscilação.

$$x_E - b \leq x \leq x_E + b. \quad (4.1)$$

Escolhendo o zero do potencial no meio das placas, $x = 0$, temos que a energia potencial eletrostática Coulombiana à esquerda da placa negativa é dada por $U_c = -q\Delta\varphi/2$. Já a energia potencial elástica é dada por $U_k = k(x - x_E)^2/2 = k\eta^2/2$, onde definimos $\eta \equiv x - x_E$. A energia cinética clássica é dada por $T = m\dot{x}^2/2 = m\dot{\eta}^2/2$. Os principais resultados deste Capítulo encontram-se em [CA95b] e [AC95a]. Com isto podemos começar a comparar os modelos.

4.2 Oscilador harmônico clássico (OHC)

A Lagrangiana para o OHC é dada por

$$L = T - S_c, \quad (4.2)$$

onde

$$T = \frac{m\dot{\eta}^2}{2}, \quad (4.3)$$

$$S_c = -\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{k\eta^2}{2}. \quad (4.4)$$

Substituindo as equações (4.3) e (4.4) na equação (4.2) teremos

$$L = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} + \frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{k\eta^2}{2}. \quad (4.5)$$

A partícula oscilará com uma amplitude b e sua posição de equilíbrio é dada por x_E , então $-b \leq x - x_E \leq b$. Utilizando a equação (2.5) a energia total E é dada por

$$E = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} + \frac{k\eta^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2}. \quad (4.6)$$

Para $t = 0$ vamos supor $x = x_E$ ($\eta = 0$) e $\dot{\eta} = \dot{\eta}_0$, onde $\dot{\eta}_0$ é a velocidade inicial. Portanto por conservação de energia podemos escrever que

$$E = \frac{m\dot{\eta}_0^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} + \frac{k\eta^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2}. \quad (4.7)$$

Ou seja,

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{\dot{\eta}_0^2 - \frac{k}{m}\eta^2}. \quad (4.8)$$

Vemos que $d\eta/dt = 0$ para $\eta = \pm \dot{\eta}_0 \sqrt{m/k}$. Da equação (4.7) vem:

$$m\dot{\eta}^2 + k\eta^2 = m\dot{\eta}_0^2. \quad (4.9)$$

Derivando esta equação em relação ao tempo obtemos a equação de movimento:

$$m\ddot{\eta} + k\eta = 0. \quad (4.10)$$

A solução desta equação que satisfaz às condições iniciais é:

$$\eta = \frac{\dot{\eta}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (4.11)$$

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_0 \cos \omega_0 t, \quad (4.12)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural de oscilação da carga ligada à mola.

O período de oscilação é dado por

$$\tau = 4 \int_0^{\dot{\eta}_0 \sqrt{m/k}} \frac{d\eta}{\dot{\eta}} = \frac{4}{\dot{\eta}_0} \int_0^{\dot{\eta}_0 \sqrt{m/k}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k\eta^2/m\dot{\eta}_0^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.13)$$

Se a condição inicial fosse $\eta(t=0) = b$ e $\dot{\eta}(t=0) = 0$ a solução seria

$$\eta = b \cos \omega_0 t, \quad (4.14)$$

$$\dot{\eta} = -b\omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (4.15)$$

A velocidade máxima atingida pela carga é $b\omega_0$. Em particular $\dot{\eta}$ pode ultrapassar a velocidade da luz se $b\omega_0 > c$. Isto nunca foi observado experimentalmente e indica uma limitação do modelo clássico.

4.3 Oscilador harmônico de Weber (OHW)

A Lagrangiana para OHW é dada por

$$L = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} + \frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} - \frac{k\eta^2}{2}. \quad (4.16)$$

Utilizando a equação (2.5) a energia total E é dada por

$$E = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2c^2} \frac{\dot{\eta}^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{k\eta^2}{2}. \quad (4.17)$$

Como no caso clássico quando $t = 0$ vamos supor $\eta = 0$ e $\dot{\eta} = \dot{\eta}_0$. Portanto podemos escrever que

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_{iew}\dot{\eta}_0^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2} \\ &= \frac{m_{iew}\dot{\eta}^2}{2} + \frac{k\eta^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde definimos

$$m_{iew} = m \left(1 - \frac{q\Delta\varphi}{2mc^2} \right) = m \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (4.19)$$

como a massa inercial efetiva Weberiana no caso do capacitor. Derivando a equação de energia em relação ao tempo obtemos a equação do movimento,

ou seja

$$m_{iew}\ddot{\eta} + k\eta = 0 . \quad (4.20)$$

Esta equação tem a mesma forma que no caso clássico. A única diferença é que nela temos $m_{iew} = m(1 - \alpha/2)$ em vez de m . Como $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$ vemos que m_{iew} pode ser positiva, nula ou negativa. Vamos analisar estes três casos:

A) $\alpha < 2$

Neste caso temos $m_{iew} > 0$ e soluções oscilatórias. Se $\eta(t = 0) = 0$ e $\dot{\eta}(t = 0) = \dot{\eta}_0$ vem:

$$\eta = \frac{\eta_0}{\omega_W} \sin \omega_W t , \quad (4.21)$$

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_0 \cos \omega_W t , \quad (4.22)$$

onde

$$\omega_W = \sqrt{\frac{k}{m(1 - \alpha/2)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \alpha/2}} \quad (4.23)$$

é a frequência natural de oscilação neste caso. Vemos então que apesar da solução qualitativa ser a mesma, a frequência de oscilação passou a depender

da diferença de potencial no capacitor, embora a carga esteja oscilando fora do capacitor. Isto é uma característica da eletrodinâmica de Weber.

Para as mesmas condições iniciais ($\eta = 0$ e $\dot{\eta} = \dot{\eta}_0$) vemos que a amplitude de oscilação mudou de $b = \dot{\eta}_0/\omega_0 = \dot{\eta}_0\sqrt{m/k}$ para

$$b_W = \frac{\dot{\eta}_0}{\omega_W} = \frac{\dot{\eta}_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \alpha/2} = b \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}. \quad (4.24)$$

Ou seja, quanto mais α se aproxima de 2 menor vai ficando a amplitude de oscilação e maior vai ficando a frequência de vibração.

Caso as condições iniciais fossem $\eta(t=0) = b$ e $\dot{\eta}(t=0) = 0$ teríamos:

$$\eta = b \cos \omega_W t, \quad (4.25)$$

$$\dot{\eta} = -b \omega_W \sin \omega_W t. \quad (4.26)$$

A amplitude de oscilação seria a mesma que no caso clássico mas novamente com uma frequência dada por $\omega_W = \omega_0/\sqrt{1 - \alpha/2}$. A velocidade máxima atingida pela carga não é mais $b\omega_0$ mas sim $b\omega_W = b\omega_0/\sqrt{1 - \alpha/2}$. Para α perto de 2 esta grandeza ultrapassa mais facilmente a velocidade da luz do que no caso clássico.

B) $\alpha = 2$

Neste caso temos $m_{iew} = 0$ e a única solução da equação de movimento é

$$\eta = 0, \forall t. \quad (4.27)$$

Ou seja, com a partícula tendo uma massa inercial efetiva nula é como se ela não pudesse interagir.

Para se ter uma idéia da ordem de grandeza, se a carga teste é um elétron então isto ocorre para $\Delta\varphi = 2mc^2/e = 10^6\text{V}$.

C) $\alpha > 2$

Neste caso a carga teste se comporta como tendo uma massa inercial efetiva negativa. A mola distendida vai então acelerar a partícula aumentando a distensão da mola, em vez de restaurá-la à posição inicial. Isto é análogo ao que ocorreria no exemplo de Helmholtz em que nesta situação a força de atrito acelerava a carga em vez de freia-la.

A solução da equação de movimento é então

$$\eta = \frac{\dot{\eta}_0}{\omega_{w2}} \sinh \omega_{w2}, \quad (4.28)$$

$$\dot{\eta} = \eta_0 = \cosh \omega_{w2}, \quad (4.29)$$

onde

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad (4.30)$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad (4.31)$$

$$\text{e } \omega_{w2} = \omega_0 / \sqrt{\alpha/2 - 1}.$$

Quando t cresce vemos que η e $\dot{\eta}$ também crescem indefinidamente. Ou seja, o movimento deixa de ser oscilatório e periódico para $\alpha > 2$. Qualquer perturbação na posição inicial de equilíbrio tende então a crescer indefinidamente. O equilíbrio em $x = x_E$ é então altamente instável se $\alpha > 2$.

Mesmo com $\dot{\eta}_0 < c$ chegaria um momento nesta situação em que $\dot{\eta} > c$. Novamente isto nunca foi observado experimentalmente.

Caso a condição inicial fosse $\eta(t=0) = b$ e $\dot{\eta}(t=0) = 0$ o mesmo problema ocorreria já que agora a solução é dada por

$$\eta = b \cosh \omega_{w2} t, \quad (4.32)$$

$$\dot{\eta} = b \omega_{w2} \sinh \omega_{w2} t. \quad (4.33)$$

Novamente η e $\dot{\eta}$ crescem indefinidamente com o aumento de t .

4.4 Oscilador harmônico relativístico (OHR)

A Lagrangiana para o caso relativístico é dada por

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2} + \frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{k\eta^2}{2} + mc^2. \quad (4.34)$$

Utilizando a equação (2.5) a energia da partícula é dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}} + \frac{k\eta^2}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2} - mc^2. \quad (4.35)$$

A equação (4.35) pode ser escrita como

$$\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2} = \frac{mc^2}{E - \frac{k\eta^2}{2} + \frac{q\Delta\varphi}{2} + mc^2}. \quad (4.36)$$

Portanto, mesmo com $E \rightarrow \infty$ ($b \rightarrow \infty$) temos que $\dot{\eta}^2/c^2 < 1$ e a velocidade máxima será c . Por simplicidade vamos considerar como condição inicial apenas o caso $\eta(t=0) = b$ e $\dot{\eta}(t=0) = 0$. Dividindo por mc^2 e definindo $A \equiv kb^2/2mc^2$, que é razão entre a energia elástica e a energia de repouso, esta equação pode ser escrita como

$$1 + A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}}. \quad (4.37)$$

Rearranjando os termos temos

$$\frac{\dot{\eta}}{c} = \frac{1}{c} \frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{[1 + A(1 - \dot{\eta}^2/c^2)]^2}}. \quad (4.38)$$

O período será dado por

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_0^b \frac{d\eta}{\dot{\eta}} \\ &= \frac{4}{c} \int_0^b \frac{[1 + A(1 - \frac{\eta^2}{b^2})] d\eta}{\sqrt{2A(1 - \frac{\eta^2}{b^2}) + A^2(1 - \frac{\eta^2}{b^2})^2}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Fazendo uma mudança de variável $\eta = b \cos \varphi$ e substituindo na equação (4.39) teremos

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{2A \sin^2 \varphi} \sqrt{1 + \frac{A}{2} \sin^2 \varphi}} \\ &+ \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Ab \sin^3 \varphi d\varphi}{\sqrt{2A \sin^2 \varphi} \sqrt{1 + \frac{A}{2} \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

As integrais acima são do tipo elípticas. Vamos supor que a energia elástica da partícula presa à mola seja muito menor que sua energia de repouso, $kb^2/2 \ll mc^2$. Então vamos expandir em potências de A e reter somente até a ordem A . Lembrando que $A \equiv kb^2/2mc^2$ temos

$$\tau = \frac{4b}{c} \sqrt{\frac{mc^2}{kb^2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{3}{8} \frac{kb^2}{mc^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \sin^2 \varphi d\varphi \right\}. \quad (4.41)$$

Resolvendo as integrais obtemos

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} \right\} = \frac{2\pi}{\omega_r}. \quad (4.42)$$

Escrevendo ω_r em função da frequência natural de oscilação, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, vem

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1}{1 + \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2}} \quad (4.43)$$

ou, expandindo:

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} \approx 1 - \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2}. \quad (4.44)$$

Vemos então que para uma mesma condição inicial o oscilador relativístico tem um período maior e uma frequência menor que o clássico. Isto pode ser entendido observando-se que a massa inercial da partícula na teoria da relatividade aumenta com a velocidade. Logo, durante um período a partícula comporta-se como se fosse mais massiva do que no caso clássico, por isto a mudança em τ e ω .

Retomando a equação (4.37), expandindo em potência de v/c e retendo até a ordem v^4/c^4 teremos

$$1 + A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{\dot{\eta}^4}{c^4}. \quad (4.45)$$

A equação acima pode ser escrita como

$$\frac{\dot{\eta}^4}{c^4} + \frac{4}{3} \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} - \frac{8A}{3} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right) = 0. \quad (4.46)$$

Resolvendo a equação (4.46) teremos

$$\frac{\dot{\eta}^2}{c^2} = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{1 + 6A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right)}. \quad (4.47)$$

Temos que $\dot{\eta}/c$ deve ser real então devemos ficar com o sinal positivo na equação (4.47). Ela pode então ser escrita como

$$\frac{1}{c} \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{1 + 6A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right)}}. \quad (4.48)$$

Expandindo o radical interno até a ordem A teremos

$$\frac{\dot{\eta}}{c} \approx \sqrt{2A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right)} \quad (4.49)$$

lembrando que $A \equiv kb^2/2mc^2$ temos

$$\dot{\eta} = \sqrt{\frac{kb^2}{m} - \frac{k}{m}\eta^2}. \quad (4.50)$$

A equação (4.50) é idêntica à equação análoga para o oscilador harmônico clássico com estas condições iniciais. Portanto, $v^2 \ll c^2$ é equivalente a $kb^2/2 \ll mc^2$.

Retomando a equação (4.48) e integrando para um período temos que

$$\tau = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{d\eta}{\sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1 + 6A\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right)}}}. \quad (4.51)$$

Expandindo o radical interno até ordem A^2 teremos

$$\tau = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{d\eta}{\sqrt{2A\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right) - 3A^2\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^2}}}. \quad (4.52)$$

Resolvendo a integral vem:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} \right\} = \frac{2\pi}{\omega_r}. \quad (4.53)$$

Este tipo de aproximação feita na equação (4.45) será útil quando estudarmos o OHS.

A equação de movimento relativística pode ser obtida a partir da equação (4.34). Ela é dada por

$$\frac{m}{(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} \ddot{\eta} + k\eta = 0 . \quad (4.54)$$

Definindo $m_{ier} \equiv m/(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}$ a equação (4.54) fica na forma Newtoniana:

$$m_{ier} \ddot{\eta} + k\eta = 0 . \quad (4.55)$$

A massa inercial efetiva relativística depende da velocidade da partícula e não depende da energia potencial.

No intervalo $0 \leq \dot{\eta}/c \leq 1$ a massa da partícula teste é sempre positiva e maior que no modelo clássico, como foi dito anteriormente.

4.5 Oscilador harmônico de Weber-Schrödinger (OHS)

A Lagrangiana para a teoria W-S é dada por

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2} + \frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{4} \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} - \frac{k\eta^2}{2} + mc^2. \quad (4.56)$$

Utilizando a equação (2.5) a energia da partícula normalizada é dada por

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}} - \frac{q\Delta\varphi}{2mc^2} \frac{\dot{\eta}^2}{2c^2} - \frac{q\Delta\varphi}{2mc^2} + \frac{k\eta^2}{2mc^2} - 1. \quad (4.57)$$

Desta equação podemos ver que para $\dot{\eta} \rightarrow c$ teremos $E \rightarrow \infty$. Portanto, qualquer que seja a energia e para qualquer valor de $\alpha \equiv q\Delta\varphi/mc^2$ finito temos que $v \leq c$, como veremos adiante.

Quando $t = 0$ vamos supor $\eta = b$ e $\dot{\eta} = 0$. Usando a conservação de energia podemos escrever a equação (4.57) como

$$\begin{aligned} \frac{E}{mc^2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}} - \frac{\alpha}{4} \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} + \frac{k\eta^2}{2mc^2} - \frac{\alpha}{2} - 1 \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{kb^2}{2mc^2}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Substituindo a equação (4.58) na equação (4.57), rearranjando alguns termos

e utilizando a definição $A \equiv kb^2/2mc^2$ temos

$$1 + A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}} - \frac{\alpha \dot{\eta}^2}{4 c^2}. \quad (4.59)$$

Expandindo o radical em série de $\dot{\eta}^2/c^2$ e retendo até a ordem $\dot{\eta}^4/c^4$ vem:

$$1 + A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right) = 1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{\dot{\eta}^4}{c^4}. \quad (4.60)$$

A equação (4.60) difere apenas no termo de v^2/c^2 quando comparada com a equação (4.45), modelo relativístico. Para $\alpha = 0$ na equação (4.60) reobtemos a equação (4.45). Reescrevendo a equação (4.60):

$$\frac{v^4}{c^4} + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{v^2}{c^2} - \frac{8}{3} A \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right) = 0. \quad (4.61)$$

Temos duas regiões possíveis para análise, $\alpha < 2$ e $\alpha \geq 2$. Resolvendo a equação (4.61) temos que

$$\frac{v^2}{c^2} = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \pm \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{6A}{(1 - \alpha/2)^2} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right)}. \quad (4.62)$$

Estamos interessados em soluções reais, logo devemos tomar o sinal positivo.

Expandindo o radical em potências de $A \equiv kb^2/2mc^2$ e retendo até A^2 temos:

$$\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{2A}{(1 - \alpha/2)} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right) - \frac{3A^2}{(1 - \alpha/2)^3} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2} \right)^2. \quad (4.63)$$

A velocidade é dada por

$$\frac{v}{c} = \pm \sqrt{\frac{2A}{(1-\alpha/2)} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right) - \frac{3A^2}{(1-\alpha/2)^3} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^2}. \quad (4.64)$$

Integrando para um período temos

$$\tau = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{2A}{(1-\alpha/2)} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right) - \frac{3A^2}{(1-\alpha/2)^3} \left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^2}}. \quad (4.65)$$

Comparando a equação (4.65) com a equação (4.52) vemos que elas possuem a mesma forma. Portanto possuem a mesma solução a menos do termo $(1 - \alpha/2)$. Assim o período é dado por

$$\tau \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{1 - \alpha/2} \left[1 + \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} \frac{1}{(1 - \alpha/2)^2} \right] = \frac{2\pi}{\omega_s}. \quad (4.66)$$

Repare que quando $\alpha = 0$ na equação (4.66) reobtemos a equação (4.53), que é o período aproximado para o OHR. Escrevendo ω_s em função da frequência natural teremos

$$\frac{\omega_s}{\omega_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/2}} - \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} \frac{1}{(1 - \alpha/2)^{5/2}}. \quad (4.67)$$

Nas equações (4.66) e (4.67) quando $\alpha \geq 2$ temos que o período e a

frequência angular tornam-se imaginários. Isto deve-se à massa inercial efetiva como no modelo de Weber.

A equação de movimento pode ser obtida da Lagrangiana, equação (4.56). A equação de movimento é dada por

$$m \left(\frac{1}{(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{q\Delta\varphi}{mc^2} \right) \ddot{\eta} + k\eta = 0 \quad (4.68)$$

definindo

$$m_{ies} \equiv m \left(\frac{1}{(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{q\Delta\varphi}{mc^2} \right) \quad (4.69)$$

a equação (4.68) pode ser escrita como

$$\ddot{\eta} = - \frac{k\eta/m(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}}{1 - \alpha/2(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} \quad (4.70)$$

onde $\alpha \equiv q\Delta\varphi/mc^2$. A aceleração diverge quando

$$\frac{\dot{\eta}_{crit}}{c} \equiv \frac{\dot{\eta}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2/3}}. \quad (4.71)$$

onde $\dot{\eta}_{crit}/c$ é a velocidade a que denominamos velocidade crítica. Quando substituímos a equação (4.71) na equação (4.69) obtemos $m_{ies} = 0$. Nesta velocidade a aceleração tende para infinito.

4.6 Comparando os modelos

Comparamos agora os quatro modelos supondo como condição inicial que $\eta(t = 0) = b$ e $\dot{\eta}(t = 0) = 0$. Com exceção do modelo de Weber para $\alpha \geq 2$ temos que neste caso os quatro modelos prevêm que o movimento será oscilatório com a velocidade máxima $\dot{\eta}_m$ da carga teste sendo atingida em $\eta = 0$ ($x = x_E$).

Na Tabela 4.1 apresentamos os quatro modelos. Como a grandeza constante $-q\Delta\varphi/2$ aparece nos quatro modelos e não influencia na equação de movimento apresentamos apenas a energia normalizada E_t definida por $E_t \equiv (E + q\Delta\varphi/2)/mc^2$. Usamos ainda $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$.

Deve ser notado que para o OHW e para o OHS além de depender da velocidade a energia também depende da diferença de potencial entre as placas do capacitor. Isto introduz o termo adicional

$$\frac{q\Delta\varphi}{2mc^2} \frac{\dot{\eta}_m^2}{2c^2}, \quad (4.72)$$

que pode ser interpretado como sendo uma energia cinética. Esta energia surge devido a uma massa inercial efetiva que tem origem na distribuição de cargas próximo a partícula teste carregada.

Nas Figuras 4.2 e 4.3 fazemos gráficos de $E_t = (E + q\Delta\varphi/2)/mc^2$ contra $\dot{\eta}_m^2/c^2$ para os quatro modelos, variando os valores de $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$. As Figuras 4.2A a 4.2D e 4.3A a 4.3D mostram os efeitos deste termo adicional quando comparamos com o OHC e com o OHR. Nas Figuras 4.2A a 4.2D atribuímos a $q\Delta\varphi/mc^2$ valores de -5, -3, -2 e -1, respectivamente. Note que

MODELO	ENERGIA NORMALIZADA
OHC	$E_t = \frac{1}{2} \frac{\dot{\eta}_m^2}{c^2}$
OHW	$E_t = \frac{1}{2} \frac{\dot{\eta}_m^2}{c^2} - \frac{\alpha}{4} \frac{\dot{\eta}_m^2}{c^2}$
OHR	$E_t = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{\eta}_m^2/c^2}} - 1$
OHS	$E_t = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{\eta}_m^2/c^2}} - 1 - \frac{\alpha}{4} \frac{\dot{\eta}_m^2}{c^2}$

Tabela 4.1: Energia normalizada do oscilador harmônico para os quatro modelos discutidos. Aqui $\dot{\eta}_m$ é a velocidade máxima da partícula quando $\eta = 0$.

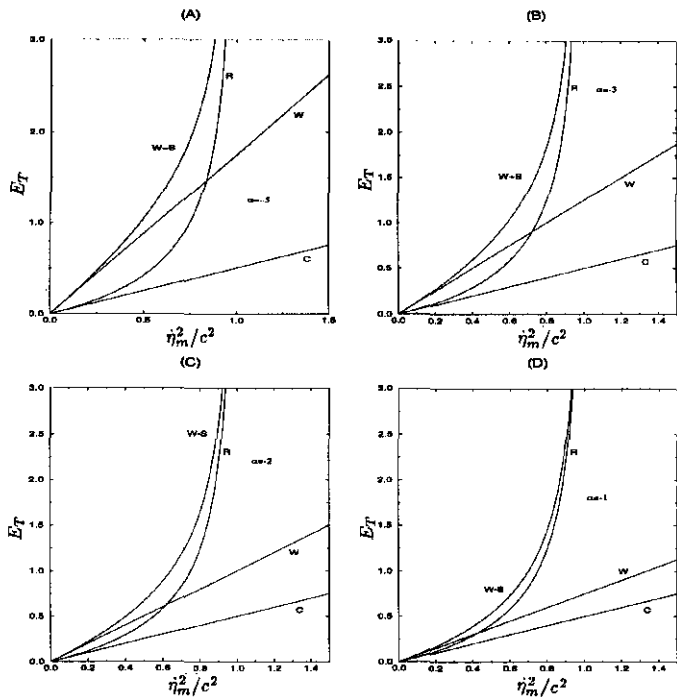


Figura 4.2: Comportamento da energia total normalizada em função da velocidade máxima ao quadrado de um oscilador harmônico para os modelos clássico, C, Weberiano, W, relativístico, R, e modelo W-S. As equações encontram-se na Tabela 4.1. Temos $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$.

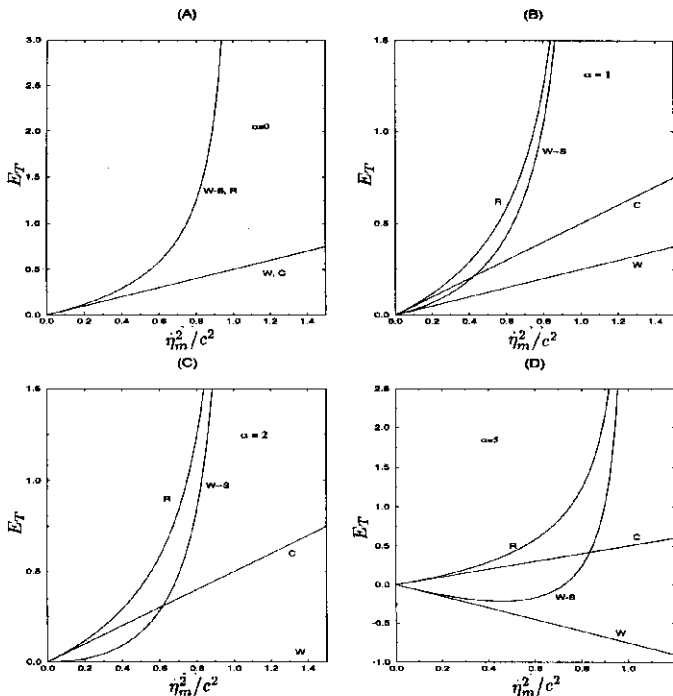


Figura 4.3: Comportamento da energia total normalizada em função da velocidade máxima ao quadrado de um oscilador harmônico para os quatro modelos. As equações encontram-se na Tabela 4.1.

para $q\Delta\varphi/mc^2 \leq 0$ a energia do OHS é maior que a energia do OHR para uma mesma velocidade. Isto deve-se a massa inercial efetiva. No OHS a massa efetiva é dada por

$$\frac{m_{ies}}{m} = \frac{1}{(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{q\Delta\varphi}{2mc^2} \quad (4.73)$$

e para OHR a massa inercial efetiva é dada por

$$\frac{m_{ier}}{m} = \frac{1}{(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}}. \quad (4.74)$$

O termo $q\Delta\varphi/2mc^2$ no intervalo $q\Delta\varphi/2mc^2 \leq 0$, equação (4.73), se soma ao termo $1/(1 - \dot{\eta}_m^2/c^2)^{3/2}$.

Nas Figuras 4.3A a 4.3D graficamos a energia, $E_t = E/mc^2 + q\Delta\varphi/2mc^2$, em função da velocidade máxima atribuindo a $q\Delta\varphi/mc^2$ valores de 0, 1, 2 e 5, respectivamente.

Quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 0$ a energia do OHC coincide com a energia do OHW e a energia do OHR coincide com a energia do OHS, Figura 4.3A. Isto torna-se claro analisando as equações da Tabela 4.1.

Quando $0 < q\Delta\varphi/mc^2$ a energia do OHR é maior que a energia do OHS. Analisando as equações (4.73) e (4.74) vemos que no intervalo acima a massa inercial efetiva relativística é maior que a massa inercial efetiva de W-S. Note que o termo $q\Delta\varphi/2mc^2$, quando $q\Delta\varphi/mc^2 > 0$, subtrai ao termo $1/(1 - \dot{\eta}_m^2/c^2)^{3/2}$.

A Figura 4.3D mostra o comportamento das equações da Tabela 4.1 quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 5$. Uma característica importante no modelo W-S para $q\Delta\varphi/mc^2 > 2$ é ter uma energia mínima para uma velocidade diferente de zero. É esta a velocidade que denominamos de crítica. Da equação do OHS, na Tabela 4.1, temos

$$\frac{\dot{\eta}_c}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2/3}}, \quad (4.75)$$

onde $\alpha \equiv q\Delta\varphi/mc^2$. Para $q\Delta\varphi/mc^2 = 5$ a velocidade crítica é $\dot{\eta}_c/c \approx 0,6761$. Este comportamento deve-se à massa inercial efetiva, equação (4.73). Quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 5$ e a velocidade da partícula varia no intervalo $0 \leq \dot{\eta}/c \leq \dot{\eta}_c/c$ a massa inercial efetiva torna-se negativa pois a massa de Weber, $q\Delta\varphi/mc^2$, é maior que a massa mecânica, $1/(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}$. Agora, quando a velocidade varia no intervalo $\dot{\eta}_c/c < \dot{\eta}/c \leq 1$ a massa mecânica é maior que a massa de Weber.

Com isto a massa inercial efetiva volta a ser positiva no modelo W-S e a mola quando distendida volta novamente a se comportar como uma força restauradora. Isto já não ocorreria no modelo de Weber com mecânica clássica. Neste último caso a massa efetiva dependia apenas do potencial mas não da velocidade, e uma vez negativa ficaria sempre assim mesmo para $v \rightarrow c$. Já no modelo W-S a massa pode se comportar como negativa dependendo do potencial a baixas velocidades, mas volta a ser positiva quando a velocidade ultrapassa a velocidade crítica (que é menor que c). Isto impede que a velocidade ultrapasse o limite c para o modelo W-S, como vemos em todas estas

Figuras, independente do valor de α .

Das Figuras 4.2A a 4.2D e 4.3A a 4.3D vimos que as energias do OHR e OHS tendem ao infinito, $E_t \rightarrow \infty$, quando a velocidade máxima tende para c , $\dot{\eta}_m/c \rightarrow 1$. Isto para uma valor dado da grandeza $\alpha \equiv q\Delta\varphi/mc^2$. Agora, vamos estudar o comportamento da velocidade máxima em função de $\alpha \equiv q\Delta\varphi/mc^2$ para uma energia dada.

As Figuras 4.4A a 4.4D mostram o comportamento da velocidade máxima ao quadrado em função de $q\Delta\varphi/mc^2$. Utilizamos as equações da Tabela 4.1, onde atribuímos valores para $E_t = E/mc^2 + q\Delta\varphi/2mc^2$. Os valores de E_t são 0,25; 0,5; 0,75 e 1 para as Figuras 4.4A, 4.4B, 4.4C e 4.4D, respectivamente. Note que a velocidade máxima para o OHW diverge quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 2$. Da equação (4.19) vemos que a massa inercial efetiva no modelo de Weber vai a zero quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 2$ e torna-se negativa para $q\Delta\varphi/mc^2 > 2$.

Mais uma vez vale observar que mesmo para $\Delta\varphi \rightarrow \pm\infty$ temos $\dot{\eta}_m \rightarrow c$ no modelo W-S, qualquer que seja o valor da energia.

Da Figura 4.3D temos que E_t pode ter valor negativo para os modelos de Weber (OHW) e W-S (OHS). Graficamos nas Figuras 4.5A e 4.5B o comportamento da velocidade máxima ao quadrado em função de $\alpha \equiv q\Delta\varphi/mc^2$ para as energias $E_t = 0$ e $E_T = -0,214$, respectivamente. O intervalo de variação de α torna-se limitado. Para $E_t = 0$ temos α variando no intervalo $2 \leq \alpha \leq \infty$ para o OHS. Quando $\alpha = 2$ temos que a velocidade máxima é $\dot{\eta}_m/c = 0$. Da equação (4.71) temos que a velocidade crítica quando $\alpha = 2$ é $\dot{\eta}_c/c = 0$.

Para os modelos clássico, de Weber e relativístico temos $\dot{\eta}_m = 0$ qualquer que seja o valor de α se $E_t = 0$.

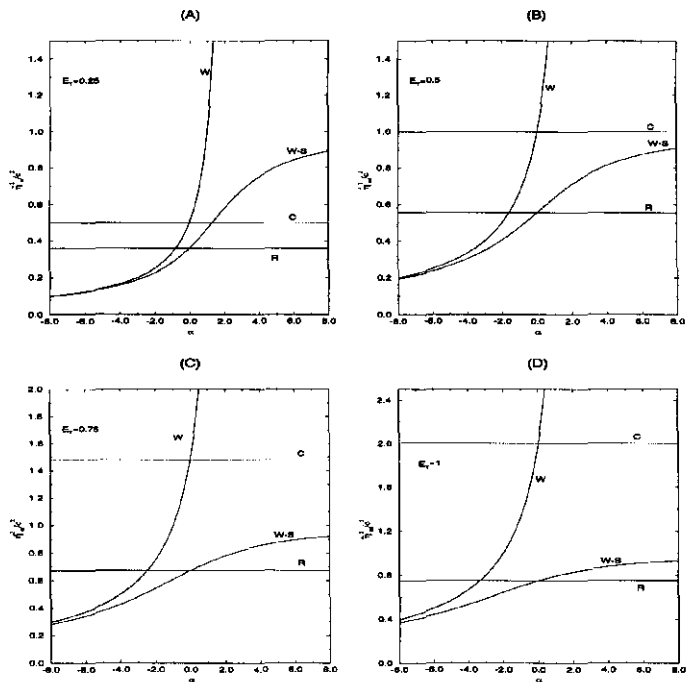


Figura 4.4: Comportamento da velocidade máxima ao quadrado em função de $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$. A energia normalizada é dada por: 0,25; 0,5; 0,75 e 1; nas Figuras A, B, C e D, respectivamente. As equações encontram-se na Tabela 4.1.

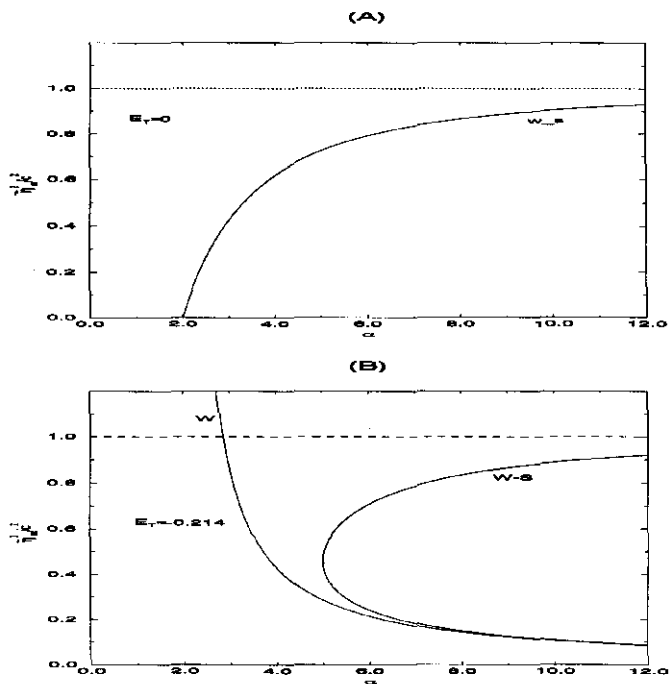


Figura 4.5: Comportamento da velocidade máxima ao quadrado em função de α para energias dadas por $E_t = 0$ e $E_t = -0,214$. Equações na Tabela 4.1.

Quando $E_t = -0,214$, Figura 4.5B, no modelo de Weber α varia no intervalo $2 \leq \alpha \leq \infty$ com a velocidade máxima divergindo em $\alpha = 2$. Agora, no modelo W-S α varia no intervalo $5 \leq \alpha \leq \infty$. Note que para $\alpha = 5$ a velocidade é $\dot{\eta}_m^2/c^2 = 0,4571$ que é igual a velocidade crítica, equação (4.71) para $\alpha = 5$.

No caso clássico teríamos para todo α , $\dot{\eta}_m^2/c^2 = -0,4 < 0$. Como só nos interessam valores reais de $\dot{\eta}_m$ não plotamos esta curva. No caso relativístico temos, para todo α :

$$\frac{\dot{\eta}_m^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{(1 + E_t)^2} . \quad (4.76)$$

Se $E_t = -0,214$ então $\dot{\eta}_m^2/c^2 = -0,6 < 0$. Novamente não nos interessa esta solução. É fácil ver desta fórmula que não haverão valores para $\dot{\eta}_m$ no caso relativístico se $E_t < 0$, qualquer que seja α .

O comportamento para o OHW deve-se ao fato mencionado anteriormente que para $q\Delta\varphi/mc^2 > 2$ a massa inercial efetiva é negativa. Para o OHS a massa inercial efetiva, equação (4.73), depende da velocidade e de α . Assim quando $\alpha > 2$ e a velocidade está no intervalo $0 \leq \dot{\eta}/c < \dot{\eta}_c/c$, onde $\dot{\eta}_c/c$ é a velocidade crítica, temos a massa inercial efetiva negativa e para $\dot{\eta}_c/c < \dot{\eta}/c < 1$ a massa inercial efetiva é positiva.

Nas Seções 4.2 a 4.5 obtivemos além das energias discutidas acima, as equações de movimento e os períodos dos osciladores para cada teoria abordada. Na Tabela 4.2 resumimos os períodos de oscilação. Note que no

MODELO	PERIODO DE OSCILAÇÃO NORMALIZADO
OHC	$\frac{\tau_c}{\tau_0} = 1$
OHW	$\frac{\tau_w}{\tau_0} = \sqrt{1 - \alpha/2}$
OHR	$\frac{\tau_r}{\tau_0} \approx 1 + \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2}$
OHS	$\frac{\tau_s}{\tau_0} \approx \sqrt{1 - \alpha/2} \left[1 + \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} \frac{1}{(1-\alpha/2)^2} \right]$

Tabela 4.2: Período de oscilação normalizado para os quatro modelos. Temos $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$. As aproximações para OHR e OHS são válidas somente para $mb^2/2 \ll mc^2$ e $v^2 \ll c^2$. Na Tabela $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$.

caso clássico e relativístico o período de oscilação não é afetado pela presença do capacitor. A Figura 4.6 mostra o comportamento das equações da Tabela 4.2 em função de α . Assumimos $kb^2/2mc^2 = 0,001$. Neste caso os valores dos períodos clássico e relativístico estão muito próximos e portanto representamos os períodos por uma única reta.

Quando $\alpha > 2$ os períodos do modelo de Weber e W-S tornam-se imaginários. Estes aspectos discutiremos mais adiante. Deve ser notado que o período depende fortemente da diferença de potencial entre as placas no modelo de Weber e W-S. Este aspecto pode ser explicado se analisarmos as equações de movimento, resumidas na Tabela 4.3.

Todas as equações da Tabela 4.3 podem ser escritas como

$$m_{ie}\ddot{\eta} + k\eta = 0 \quad (4.77)$$

onde m_{ie} é a massa inercial efetiva. A Tabela 4.4 mostra as massas efetivas para cada teoria

No modelo de Weber e W-S a massa efetiva é constituída de duas partes: uma massa que denominamos massa de Weber, $m_w = q\Delta\varphi/2c^2$, e uma massa mecânica. No modelo de Weber a massa mecânica é m e no modelo de W-S é dada por $m/(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}$.

Quando $0 \leq q\Delta\varphi/mc^2 < 2$ temos que a massa de Weber é negativa com módulo menor que a massa mecânica. Então a massa inercial efetiva m_{ie} é positiva mas menor que a massa clássica. Por isso, vide Figura 4.6, o período é menor que no caso clássico. Para $q\Delta\varphi/mc^2 < 0$ a massa de Weber é

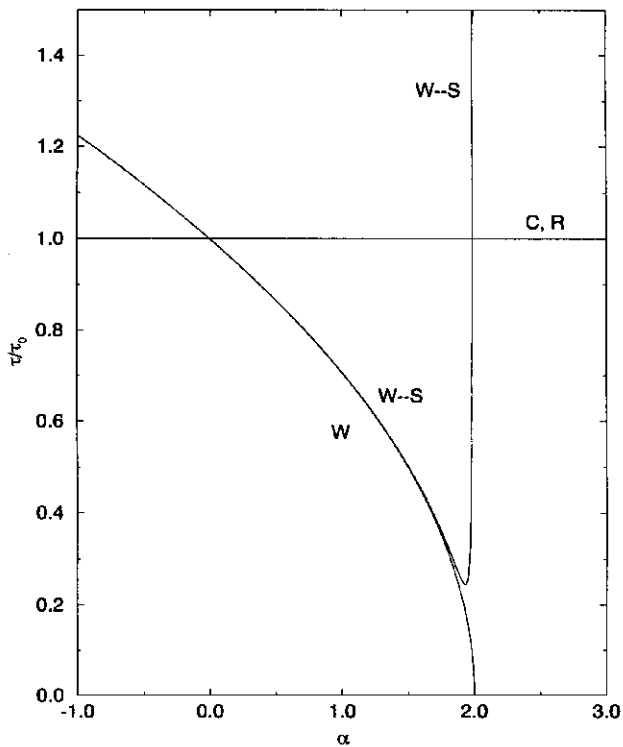


Figura 4.6: Comportamento do período normalizado em função de $q\Delta\varphi/mc^2$.
Temos $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$.

MODELO	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO
OHC	$m\ddot{\eta} + k\eta = 0$
OHW	$\left(m - \frac{q\Delta\varphi}{2c^2}\right)\ddot{\eta} + k\eta = 0$
OHR	$\frac{m}{(1-\dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}}\ddot{\eta} + k\eta = 0$
OHS	$\left(\frac{m}{(1-\dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{q\Delta\varphi}{2c^2}\right)\ddot{\eta} + k\eta = 0$

Tabela 4.3: Equações de movimento.

MODELO	MASSA INERCIAL EFETIVA
OHC	$m_{ie} = m$
OHW	$m_{ie} = m \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$
OHR	$m_{ie} = \frac{m}{(1-\eta^2/c^2)^{3/2}}$
OHS	$m_{ie} = \frac{m}{(1-\eta^2/c^2)^{3/2}} - \frac{m\alpha}{2}$

Tabela 4.4: Massa inercial efetiva, com $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$.

positiva e se soma à massa mecânica. Assim a massa inercial efetiva é maior que a massa clássica. Portanto, o período é maior no modelo de Weber e W-S quando comparada com o modelo clássico.

Vamos graficar a massa inercial efetiva, m_{ie}/m , em função da velocidade para valores dados de $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$. Isto facilitará nossa análise das soluções das equações de movimento. Na Figura 4.7 graficamos m_{ie}/m em função de $\dot{\eta}^2/c^2$ para a teoria de Weber e W-S. Atribuímos os seguintes valores a $q\Delta\varphi/mc^2$: -2; 0; 2 e 5. Quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 0$ o modelo de Weber se reduz ao modelo clássico e o modelo W-S se reduz ao modelo relativístico. Na Figura 4.7 as linhas paralelas ao eixo da velocidade referem-se ao modelo de Weber. As curvas de comportamento assintótico referem-se ao modelo W-S.

Para $q\Delta\varphi/mc^2 = -2$ a massa efetiva de W-S é sempre maior que a massa efetiva relativística. O caso mais interessante ocorre quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 5$. Note que no intervalo de velocidade $0 \leq \dot{\eta}^2/c^2 \leq 0,4571$ a massa é negativa e no intervalo $0,4571 \leq \dot{\eta}^2/c^2 < 1$ a massa é positiva.

Dentro da aproximação $kb^2/2 \ll mc^2$ e $v^2 \ll c^2$ o período do oscilador clássico e do oscilador relativístico são próximos. O período do oscilador no modelo de Weber e do oscilador no modelo W-S são próximos para $q\Delta\varphi/mc^2 < 2$ como podemos ver pela Figura 4.6. Assim a solução da equação de movimento clássica é muito próxima à solução da equação de movimento relativística. O mesmo ocorre para o modelo de Weber e o modelo W-S quando $q\Delta\varphi/mc^2 < 2$ e $kb^2/2 \ll mc^2$.

Graficamos a solução da equação clássica dada por

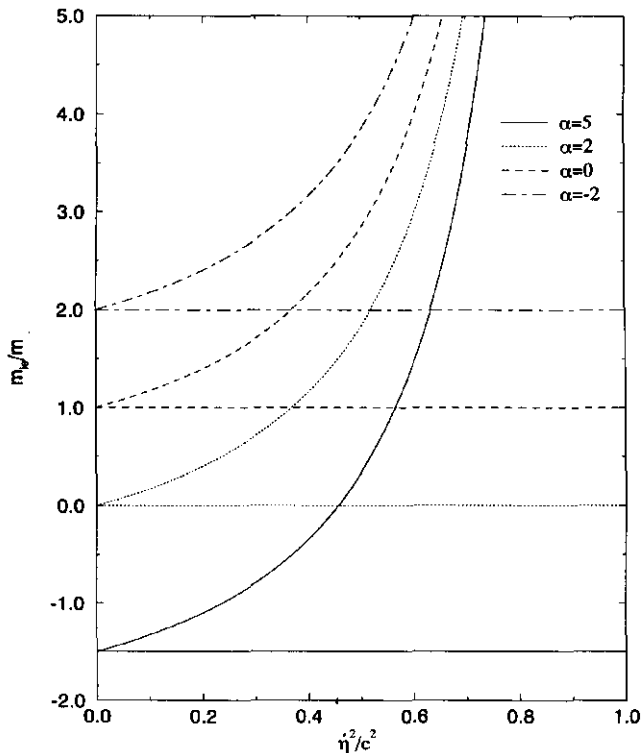


Figura 4.7: Massa inercial efetiva em função da velocidade ao quadrado. As curvas assintóticas referem-se ao modelo W-S e as paralelas ao eixo da velocidade referem-se ao modelo de Weber. Quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 0$ a massa efetiva nos modelos de Weber e W-S coincidem com a massa efetiva nos modelos clássico e relativístico, respectivamente

$$\frac{\eta}{b} = \cos \omega_0 t \quad (4.78)$$

e a solução da equação de movimento de Weber dada por

$$\frac{\eta}{b} = \cos \left[\frac{\omega_0 t}{\sqrt{1 - \alpha/2}} \right], \quad (4.79)$$

para alguns valores de α , onde α é considerado em dois intervalos $-\infty \leq \alpha \leq 0$ e $0 \leq \alpha < 2$. No gráfico 4.8A temos a posição normalizada, η/b , em função de $\omega_0 t$ para α : -5 e 0. O gráfico 4.8B mostra a velocidade normalizada, $\dot{\eta}/b\omega_0$, em função de $\omega_0 t$ para os valores de α acima. Na Figura 4.8C temos a posição normalizada, η/b , em função de $\omega_0 t$ para α : 0 e 1. O gráfico 4.8D mostra a velocidade normalizada em função de $\omega_0 t$ para os valores de α : 0 e 1.

Quando $-\infty < \alpha \leq 0$ o período de OHW é maior que o período do OHC, como podemos ver pela Figura 4.8A, pela Figura 4.6 e equações da Tabela 4.2. A velocidade máxima no modelo de Weber é menor que no caso clássico pois a massa inercial efetiva é maior como podemos ver na Figura 4.7 e equações da Tabela 4.4. Agora no intervalo $0 \leq \alpha < 2$ o período do OHC torna-se maior que o período do OHW pois a massa inercial efetiva no caso Weberiano é menor que no caso clássico.

Falta-nos analisar as soluções da equação de movimento quando $\alpha > 2$. As soluções do OHC e OHR continuam as mesmas pois não dependem de α .

Quando $\alpha > 2$ a massa inercial efetiva do OHW é uma constante negativa

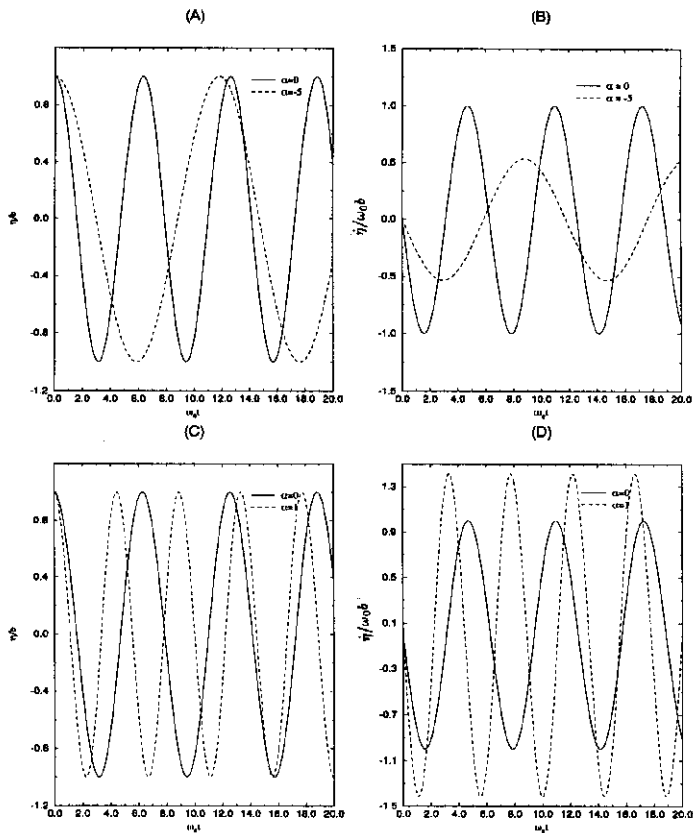


Figura 4.8: Posição e velocidade normalizadas em função de $\omega_0 t$ para diferentes valores de $\alpha = q\Delta\varphi/mc^2$, no caso do modelo de Weber. A solução clássica é o caso $\alpha = 0$.

pois a massa de Weber $m_w = q\Delta\varphi/2c^2$ tem módulo maior que 1, vide Tabela 4.4. A equação de movimento passa a ser

$$\ddot{\eta} = \omega_w^2 \eta. \quad (4.80)$$

Com isto as soluções da equação de movimento deixam de ser oscilantes e passam a ter uma solução dada por

$$\eta = \frac{b(e^{\omega_{w2}t} + e^{-\omega_{w2}t})}{2} \quad (4.81)$$

onde $\omega_{w2} = \omega_0/\sqrt{\alpha/2 - 1}$. A Figura 4.9A mostra o comportamento da equação (4.81) para alguns valores de $\alpha > 2$. A Figura 4.9B mostra o comportamento da velocidade derivada da equação (4.81). Note que quanto maior o valor de α menor é a variação da posição e velocidade.

Isto ocorre devido à massa inercial efetiva sempre ser negativa no modelo de Weber para $\alpha > 2$, vide Figura 4.7. Com isto a partícula será acelerada em sentido contrário à força, aumentando continuamente sua velocidade. Deve ser notado que para valores maiores de α a inércia aumenta pois o módulo da massa de Weber torna-se maior e assim a variação na posição e velocidade são menores como observado.

Agora vamos estudar o OHS para $\alpha > 2$. Pela Figura 4.7 quando $q\Delta\varphi/mc^2 = 5$ a massa inercial efetiva no intervalo de velocidade dado por $0 \leq \dot{\eta}^2/c^2 \leq 0,4571$ é negativa, onde $\dot{\eta}_c^2/c^2 = 0,4571$ é a velocidade crítica ao quadrado, equação (4.75), para $\alpha = 5$. Agora no intervalo

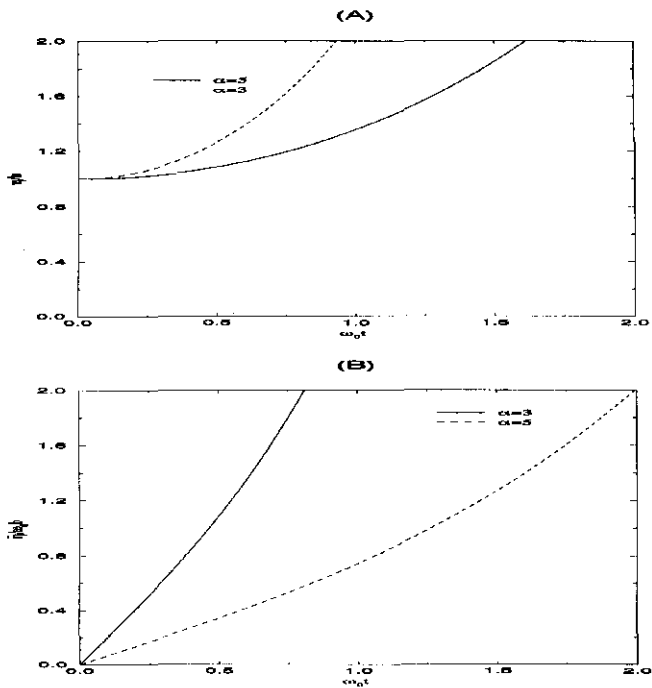


Figura 4.9: Posição e velocidade normalizada em função de $\omega_0 t$ para valores de $\alpha > 2$. Os resultados referem-se ao OHW.

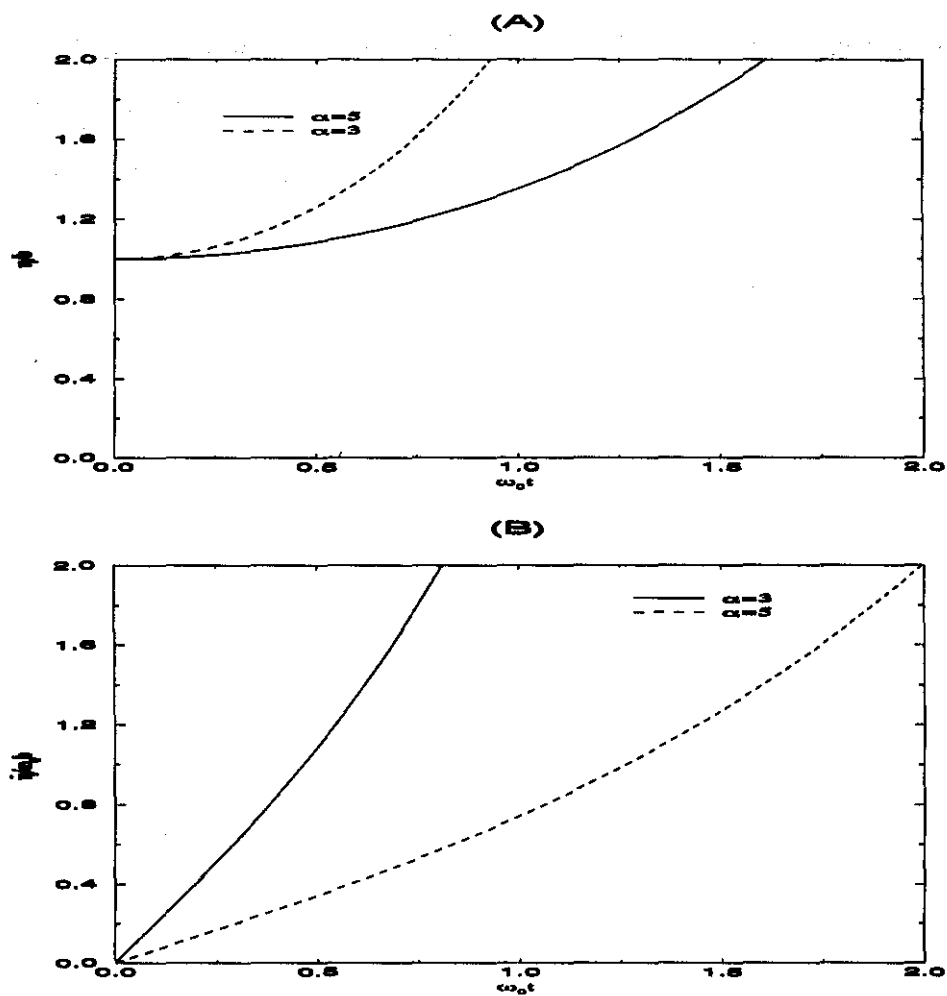


Figura 4.9: Posição e velocidade normalizada em função de $\omega_0 t$ para valores de $\alpha > 2$. Os resultados referem-se ao OHW.

$0,4571 \leq \dot{\eta}^2/c^2 < 1$ a massa inercial efetiva é positiva.

Logo, abaixo da velocidade crítica a velocidade tende a aumentar, e acima dela a velocidade tende a diminuir. Como a velocidade crítica é menor que c , temos que a carga teste nunca ultrapassará c no OHS, quaisquer que sejam as condições iniciais e o valor de α .

Capítulo 5

Discussões e Conclusão

O ponto principal deste trabalho foi mostrar que o conjunto energia gravitacional de Schrödinger mais a energia eletromagnética de Weber leva a alguns resultados fisicamente aceitáveis quando aplicado a duas geometrias: uma casca esférica dielétrica em repouso, carregada a um potencial ϕ com uma partícula carregada em seu interior, e um capacitor plano ideal.

Vimos que o conjunto acima supera as críticas apresentadas por Helmholtz ao modelo de Weber. Ou seja, não temos mais uma velocidade divergente para um dado potencial da esfera ou capacitor, mas uma velocidade assintótica a c quando $E \rightarrow \infty$ ou $\phi \rightarrow \infty$. Contudo novos aspectos aparecem quando adotamos o modelo W-S. O principal deles é uma massa inercial efetiva dependente da velocidade e da energia potencial elétrica onde encontra-se a partícula. Os efeitos desta massa inercial efetiva foram observados nas Figuras 2.2, 2.3 e 2.4 onde estão graficadas as equações da Tabela 2.4. Especificamente na Figura 2.4, vemos claramente o efeito da massa iner-

cial efetiva no comportamento da curva. No caso da casca esférica ela é dada por:

$$m_{ie} = \frac{m}{(1 - \dot{\eta}^2/c^2)^{3/2}} - \frac{q\phi}{3c^2}. \quad (5.1)$$

A massa efetiva é negativa no seguinte intervalo de velocidade: $0 \leq \dot{z} \leq \dot{z}_c$, onde $\dot{z}_c$ é dada pela equação (2.32), e positiva no intervalo $\dot{z}_c < \dot{z} < c$.

Os efeitos da massa inercial efetiva tornaram-se mais surpreendentes quando supomos um meio resistivo no interior da casca esférica e resolvemos a equação de movimento, Tabelas 2.4 e 2.5. Os resultados são melhores entendidos ao analisarmos as Figuras 2.11 e 2.12. Quando $q\phi/mc^2 < 2$ a velocidade da partícula decai exponencialmente como no modelo relativístico e clássico. Mas para $q\phi/mc^2 > 2$ a velocidade da partícula aumenta quando $0 < \dot{z} < \dot{z}_c$ e diminui quando $\dot{z}_c < \dot{z} < c$. Isto devido à m_{ie} , pois no primeiro intervalo de velocidade a massa é negativa e no segundo m_{ie} é positiva. Os resultados até aqui discutidos encontram-se em [CA95d] e [AC95b].

No capacitor plano ideal para a teoria W-S os resultados são condizentes com os dados experimentais. Ao graficarmos a equação (3.18), diferença de potencial entre as placas contra a velocidade de saída, Figura 3.3, vemos que o resultado teórico é condizente com os dados experimentais obtidos por Bertozzi, [CA95c]. Isto ao estudarmos a energia em função da velocidade.

Outro aspecto que surge ao analisarmos o modelo de Weber é a existência de uma força externa às placas do capacitor, equação (3.8). Esta força é

dependente da aceleração da partícula, fato que não ocorre no modelo clássico e relativístico. Com a finalidade de estudarmos o efeito desta aceleração supomos uma partícula oscilando próximo à placa do capacitor.

Vimos que o período de oscilação no modelo de Weber e W-S é influenciado fortemente pela presença do capacitor, equações da Tabela 4.3. Aqui como em todos os casos anteriores o modelo W-S conduz a uma velocidade limite c . Mas novamente a massa inercial efetiva, que é uma característica do modelo de Weber, influi grandemente nos resultados, vide Seção 4.6.

Vale ainda observar que a massa inercial efetiva depende não apenas do potencial eletrostático (devido à eletrodinâmica de Weber) e da velocidade (devido à energia potencial gravitacional de Schrödinger), mas também da geometria do problema. Por exemplo, enquanto que no interior da casca esférica ela é dada por $m_{ies} = m[(1 - v^2/c^2)^{3/2} - \alpha/3]$, temos que para oscilações normais às placas do capacitor ela é dada por $m_{ies} = m[(1 - v^2/c^2)^{3/2} - \alpha/2]$. Ou seja, temos $\alpha/2$ em vez de $\alpha/3$ para um mesmo potencial. E não apenas isto, já que para oscilações paralelas às placas do capacitor teríamos $m_{ies} = m[(1 - v^2/c^2)^{3/2} + \alpha/2]$, embora este caso não tenha sido analisado aqui. Neste caso temos $+\alpha/2$ em vez de $-\alpha/2$. Ou seja, embora no interior da casca esférica a massa inercial seja isotrópica, o mesmo já não ocorre no caso do capacitor.

Infelizmente nenhum destes aspectos foi testado experimentalmente até o momento. Apesar disto alguns experimentos já foram propostos para permitir uma distinção sobre a validade das forças de Weber e Lorentz: [Ass92a] e [Ass93]. O único experimento que encontramos relacionado ao assunto da tese, [Ber64], se mostrou compatível com o modelo W-S como mostramos

em [CA95c].

No caso da gravitação Schrödinger trabalhou com a energia potencial de Weber,

$$U_w = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left(1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} \right), \quad (5.2)$$

e também com uma generalização desta expressão para altas velocidades, a saber

$$U_s = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left(3 - \frac{2}{(1 - \dot{r}^2/c^2)^{3/2}} \right). \quad (5.3)$$

No mesmo sentido é possível que a própria eletrodinâmica de Weber tenha de ser generalizada para altas velocidades. Neste caso a expressão

$$U_w = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right), \quad (5.4)$$

pode ser uma boa aproximação válida até segunda ordem em $\dot{r}/c$. Embora esta seja uma possibilidade plausível não chegamos a analisar neste trabalho generalizações da eletrodinâmica de Weber. Nosso trabalho onde estudamos a energia potencial de Phipps se encontra atualmente submetido à publicação: [CA95a]. Outras generalizações como a inclusão do tempo retardado e de uma velocidade finita para as interações eletromagnéticas também são possíveis mas não discutiremos estes tópicos aqui.

Em relação ao trabalho de tese vale enfatizar diversas aproximações utilizadas: (A) No caso da casca esférica com meio resistivo supuzemos que a constante de atrito b era realmente constante independente do potencial da casca ou da velocidade da carga teste. Isto não precisa valer necessariamente se o atrito tiver uma origem eletromagnética. Também só conhecemos o comportamento das forças de atrito em corpos neutros a baixas velocidades. Deve ser observado que a constante b , presente na força de atrito $-b\vec{v}$, pode ser obtida fazendo-se uma análise detalhada das colisões de uma partícula macroscopicamente pequena movendo-se no interior de um fluido, movimento Browniano, ver [Rei65, Seções 15-5 a 15-8, pp. 560-570]. Em sua análise Reif mostra que a constante b é positiva e depende das forças de colisões entre as partículas. Em nossa análise vimos que a massa inercial efetiva pode ser negativa e podemos perguntar como isto altera o valor de b . Pois, como mencionamos acima, b pode ser obtido das colisões entre as partículas. Pode ser que b , nesta situação de massa efetiva negativa também torne-se negativo. Além disto, não temos conhecimento experimental para afirmar como vai atuar a força de atrito numa carga numa região de alto potencial e ainda por cima movendo-se a velocidades próximas à da luz.

(B) O que foi afirmado acima também vale no caso da constante elástica k . Ou seja, supuzemos k constante mas pode ocorrer de k ser função do potencial eletrostático ou da velocidade do corpo de prova preso à mola, principalmente para $v \approx c$. Apenas experimentos detalhados podem decidir esta questão.

(C) Não foi levada em conta a radiação emitida pela carga ao ser acelerada. Isto é relevante no contexto relativístico e do eletromagnetismo clássico,

mas não foi incluído nos cálculos.

(D) No caso do capacitor não foram considerados efeitos de borda devido ao tamanho finito de capacitores reais.

(E) Se assumiu também que as cargas sobre a casca esférica e sobre as placas do capacitor permanecem fixas e em repouso independente da posição ou estado de movimento da carga teste. Ou seja, não foram incluídas as perdas de energia da carga teste devido às correntes e rearranjos de carga induzidas na casca esférica ou nas placas do capacitor. No caso da eletrodinâmica de Weber esta simplificação, embora necessária para tornar os cálculos praticáveis, é mais séria do que no caso do eletromagnetismo clássico. Isto porque a força de Weber depende da aceleração entre as cargas:

$$\vec{F}_w = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{r\ddot{r}}{c^2} \right). \quad (5.5)$$

Em algumas situações analisadas aqui vimos que a aceleração da carga teste divergia para infinito. Como ela estava interagindo com as cargas sobre a casca esférica ou sobre as placas do capacitor, vemos que nestes casos também $\ddot{r}$ divergia. Isto significa que a força exercida pela carga teste sobre algumas cargas da casca esférica ou das placas do capacitor cresceria indefinidamente até um ponto em que superasse qualquer força de vínculo real que as mantivesse em repouso (como as forças que mantêm em repouso as cargas sobre o material dielétrico carregado). Na prática isto significa que as acelerações nunca divergirão de fato, já que a partir de um certo ponto

estas forças se tornam tão grandes a ponto de descarregar a casca esférica ou capacitor, ocorrendo algo análogo ao efeito corona. Devido à complexidade dos cálculos não fizemos esta análise aqui, mas é importante deixar ressaltado este fato.

O ponto principal é que apesar destas simplificações mostramos aqui que o modelo W-S levou a velocidades finitas da carga teste sempre menores ou iguais que a da luz, qualquer que fosse a energia ou potencial eletrostático do sistema. Isto já não ocorria no modelo de Weber com a mecânica Newtoniana.

Apêndice A

Cálculo da energia de interação gravitacional utilizando o potencial proposto por Erwin Schrödinger

Em 1925 E. Schrödinger, [Sch25] e [XA95], propôs que a energia de interação gravitacional entre dois corpos pontuais de massas m e m' separadas por uma distância r_{ij} , é dada por

$$W = -\frac{Gmm'}{r_{ij}} \left[3 - 2 \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right)^{-3/2} \right] \quad (\text{A.1})$$

onde $\dot{r}_{ij} = dr_{ij}/dt$ é a velocidade radial entre elas e G é a constante gravitacional.

Se $\dot{r}_{ij} = 0$ voltamos ao potencial gravitacional Newtoniano. Se expandimos este potencial até segunda ordem em $\dot{r}_{ij}/c$ obtemos uma energia potencial como a de Weber para a gravitação:

$$W = -\frac{Gmm'}{r_{ij}} \left(1 - 3 \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2} \right). \quad (\text{A.2})$$

Ao integrarmos esta energia potencial de Weber para o corpo teste de massa m interagindo gravitacionalmente com o universo conhecido obtemos um análogo à energia cinética clássica, [Ass89]:

$$W = -\Phi \left(\frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \right), \quad (\text{A.3})$$

onde $\Phi = 4\pi G\rho_0/H_0^2$, sendo ρ_0 a densidade média de matéria no universo, H_0 a constante de Hubble e $R_0 = c/H_0$ o raio do universo conhecido. Com os valores conhecidos de G , ρ_0 e H_0 nesta relação obtemos $\Phi \approx 1$. A maior incerteza neste caso está no valor de ρ_0/H_0^2 , que ainda não é conhecido com grande precisão, [Ass94, p. 218].

Curiosamente o termo constante $-mc^2/2$ veio da integração do potencial Newtoniano $-Gmm'/r_{ij}$, enquanto que a energia cinética $mv^2/2$ foi obtida a partir da integração do termo $3Gmm'\dot{r}_{ij}^2/r_{ij}c^2$.

Antes de continuarmos gostaríamos de observar que a equação (A.1) pode ser obtida de uma função Lagrangiana dada por

$$L = \frac{Gmm'}{r_{ij}} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - \dot{r}_{ij}^2/c^2}} - 4\sqrt{1 - \dot{r}_{ij}^2/c^2} + 3 \right]. \quad (\text{A.4})$$

Utilizando o procedimento usual temos que

$$W = \dot{r}_{ij} \frac{dL}{d\dot{r}_{ij}} - L. \quad (\text{A.5})$$

Com esta pequena digressão queremos enfatizar que o formalismo Lagrangiano é aplicável à teoria que estamos discutindo, como veremos no Apêndice B.

A equação (A.1) pode ser utilizado para calcularmos a interação gravitacional de uma massa m no interior de uma casca esférica de raio R e densidade superficial uniforme de massa σ . A Figura A.1 mostra um esquema da situação. Na Figura $\vec{r}$ é a posição da partícula de massa m , $\vec{R}$ é a posição do elemento de massa dm e $\vec{r}_{12} = \vec{R} - \vec{r}$. Usando coordenadas esféricas no sistema de repouso da esfera obtemos:

$$\vec{R} = R \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \hat{i} + R \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \hat{j} + R \cos \theta_1 \hat{k} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{r} = r \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \hat{i} + r \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \hat{j} + r \cos \theta_2 \hat{k} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} = & (R \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - r \sin \theta_2 \cos \varphi_2) \hat{i} + (R \sin \theta_1 \sin \varphi_1 - r \sin \theta_2 \sin \varphi_2) \hat{j} \\ & + (R \cos \theta_1 - r \cos \theta_2) \hat{k} . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O módulo da equação (A.8) ao quadrado é dado por

$$r_{12}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr[\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] . \quad (\text{A.9})$$

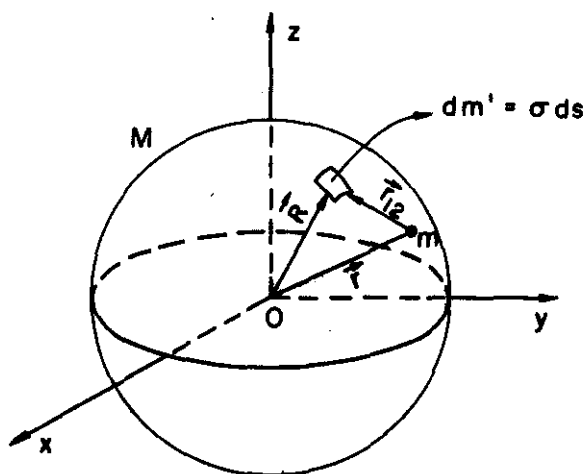


Figura A.1: Casca esférica de raio R , com uma densidade de massa σ homogeneamente distribuída sobre sua superfície, interagindo com uma massa m em seu interior.

Por diferenciação da equação (A.7) e lembrando que o sistema de referência é o de repouso da esfera obtemos

$$\begin{aligned}
 r_{12}\dot{r}_{12} &= r\dot{r} - R\dot{r}[\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \\
 &\quad - Rr[-\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\
 &\quad - \varphi_2 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

A orientação do sistema de coordenadas é arbitrário, então podemos escolher $\theta_2 = 0$. Assim, as equações (A.9) e (A.10) ficam simplificados para

$$r_{12} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta_1}, \tag{A.11}$$

$$\dot{r}_{12} = \frac{r\dot{r} - R\dot{r} \cos\theta_1 - Rr\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta_1}}. \tag{A.12}$$

Para obter a energia gravitacional de m interagindo com a casca esférica substituímos em (A.1) m' por $dm' = \sigma R^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$. Para resolver a integral Schrödinger supõe $r \ll R$, embora isto não seja necessário. Com esta

aproximação:

$$r_{12} \approx R \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{r}_{12} \approx -\dot{r} \cos \theta_1 - r \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (\text{A.14})$$

Substituindo estes valores de dm' , r_{12} e $\dot{r}_{12}$ em (A.1) e integrando sobre toda a casca esférica obtém-se

$$\begin{aligned} W = & -3Gm\sigma R \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \sin \theta_1 d\theta_1 + \\ & + 2Gm\sigma R \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\left\{ 1 - \frac{[\dot{r} \cos \theta_1 + r \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^2}{c^2} \right\}^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A primeira integral em (A.15) é uma constante independente da velocidade:

$$\begin{aligned} W_1 = & -3Gm\sigma R \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \sin \theta_1 d\theta_1 \\ = & -\frac{12\pi G\sigma R}{c^2} mc^2. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A segunda integral é dada por

$$W_2 = 2Gm\sigma R \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\left\{ 1 - \frac{[r \cos \theta_1 + r \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^2}{c^2} \right\}^{3/2}}. \quad (\text{A.17})$$

Fazendo uma mudança de variável $x = \cos \theta_1$ e $y = \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ esta equação pode ser escrita como

$$W_2 = 4Gm\sigma R \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\left\{ 1 - \frac{[rx + r\dot{\theta}_2 y]^2}{c^2} \right\}^{3/2} \sqrt{1-x^2-y^2}}. \quad (\text{A.18})$$

Fazendo uma nova mudança de variável $x = r \cos \psi$; $y = r \sin \psi$ temos

$$\begin{aligned} W_2 &= 4Gm\sigma R \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \frac{dx}{(1 - a^2 + a^2 x^2)^{3/2}} \\ &= 4Gm\sigma R \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - a^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde $a = \frac{r}{c} \cos \psi + \frac{r\dot{\theta}}{c} \sin \psi$. Integrando esta expressão Schrödinger obteve

$$W_2 = \frac{8\pi Gm\sigma R}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (\text{A.20})$$

onde $v^2 = r^2 + r^2 \dot{\theta}^2$. Definindo

$$\xi \approx \frac{8\pi G\sigma R}{c^2} \quad (\text{A.21})$$

e substituindo as equações (A.20) e (A.16) na equação (A.15) temos

$$W = \xi \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{3}{2}mc^2 \right]. \quad (\text{A.22})$$

A equação (A.22) é a energia de interação gravitacional obtida por Schrödinger. Na equação (A.20) R é o comprimento característico do universo. Se R é estimado como c/H_0 , onde H_0 é a constante de Hubble, então ξ deve ser aproximadamente igual a unidade. Se integrássemos a equação (A.4) como fizemos com a equação (A.1) obteríamos, a menos de uma constante:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (\text{A.23})$$

Esta expressão possui a mesma forma da Lagrangiana relativística.

Com o procedimento descrito neste Apêndice Schrödinger obteve a energia cinética para corpos com velocidades baixas ou próximas da luz, $v \sim c$.

Podemos obter uma estimativa melhor desta energia substituindo em (A.20) e (A.22) σ por $\rho_0 dR$ sendo ρ_0 a densidade média de matéria no universo. Fazendo isto e integrando (A.20) em R de 0 até o raio de Hubble c/H_0 obtemos:

$$W = -\Phi \left(\frac{3mc^2}{2} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (\text{A.24})$$

onde $\Phi = 4\pi G\rho_0/H_0^2$.

Como já foi afirmado sabemos que $\Phi \approx 1$. Daqui para a frente usaremos $\Phi = 1$. Ou seja, a energia gravitacional de um corpo de massa m movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em relação ao referencial das galáxias distantes, interagindo com o universo conhecido de acordo com Schrödinger é dada por

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{3}{2}mc^2. \quad (\text{A.25})$$

A menos de uma constante sem maior importância esta expressão tem a mesma forma que a energia cinética relativística dada por

$$W^R = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \quad (\text{A.26})$$

Apesar da semelhança de forma, há grandes diferenças entre estas duas expressões. A massa que aparece em W^R é a inercial, enquanto que na de Schrödinger é a massa gravitacional. Além disto, v em W^R é a velocidade do corpo de teste em relação a um referencial inercial arbitrário enquanto que em Schrödinger v é a velocidade em relação ao referencial das galáxias distantes.

De tudo isto vem que o grande feito de Schrödinger foi o de ter obtido uma expressão para a energia cinética válida para baixas e altas velocidades em conformidade com o princípio de Mach, utilizando apenas interações gravitacionais e grandezas relacionais.

Apêndice B

Formalismo Lagrangiano da eletrodinâmica de Weber

Para duas partículas de cargas q_i e q_j e massas m_i e m_j interagindo de acordo com a força de Weber sem a atuação de forças externas, a Lagrangiana é

$$L = L_f - S. \quad (\text{B.1})$$

Nesta expressão L_f pode ser a energia cinética clássica do sistema dada por:

$$\begin{aligned} T &= m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} + m_j \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j}{2} \\ &= m_i \frac{v_i^2}{2} + m_j \frac{v_j^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ou então a Lagrangiana das partículas livres de Schrödinger dada por

$$L_f = -m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} - m_j c^2 \sqrt{1 - \frac{v_j^2}{c^2}}. \quad (\text{B.3})$$

Já S é a energia Lagrangiana de Weber dada por

$$S = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 + \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (\text{B.4})$$

Nestas expressões as partículas i e j estão localizadas em $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$ em relação a um sistema de referência inercial movendo-se com velocidades $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ e $\vec{v}_j = d\vec{r}_j/dt$. Além disto $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, $\dot{r}_{ij} = dr_{ij}/dt$ e $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$.

Obtemos a força radial de Weber a partir da equação (B.1) pelo procedimento padrão, ver [Whi73, vol. 1 pp. 201-211]:

$$F_R = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{r}_{ij}} - \frac{\partial S}{\partial r_{ij}}. \quad (\text{B.5})$$

Daqui vem:

$$F_R = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right). \quad (\text{B.6})$$

A equação de movimento é obtida de modo usual:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \quad k = 1, \dots, 6. \quad (\text{B.7})$$

Aqui q_k representa uma das coordenadas: $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$. Fazendo isto obtemos no caso clássico

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) = m_i \ddot{a}_i, \quad (\text{B.8})$$

e uma equação análoga para m_j . Agora com a expressão para L_f de Schrödinger obtida no Apêndice anterior ($L_f = -\sum_i m_i c^2 \sqrt{1 - v_i^2/c^2}$) obtemos

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} \right), \quad (\text{B.9})$$

e uma equação análoga para m_j .

A Hamiltoniana H do sistema é dada por

$$H \equiv \left(\sum_{k=1}^6 \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - L. \quad (\text{B.10})$$

Como já vimos L_f e S não dependem explicitamente do tempo, assim $\partial L/\partial t = 0$ e $\partial H/\partial t = 0$. Com isto obtemos que a Hamiltoniana é a energia total do sistema dada por

$$E = K + U = H, \quad (\text{B.11})$$

onde K é energia cinética e U é a energia potencial de origem eletromagnética

dada por

$$U = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (\text{B.12})$$

A diferença entre a energia potencial U e a energia Lagrangiana S é o sinal no interior do parêntesis. Assim toda vez que buscamos a Lagrangiana devemos utilizar a equação (B.4) e toda vez que buscamos a energia potencial devemos utilizar a equação (B.12).

Se usarmos a Lagrangiana clássica das partículas livres dada por $L_f = \sum_i m_i v_i^2/2$ então obtemos com (B.10) e (B.11) $K = L_f$. Por outro lado se utilizarmos a Lagrangiana de Schrödinger $L_f = -\sum_i (m_i c^2 \sqrt{1 - v_i^2/c^2})$ então obtemos com (B.10) e (B.11)

$$K = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \frac{m_j c^2}{\sqrt{1 - v_j^2/c^2}}. \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

Cálculo exato da energia Lagrangiana de Weber entre uma casca esférica dielétrica carregada de raio R e uma partícula de carga q

A Figura C.1 mostra um esquema da situação que vamos analisar. Nesta Figura $\vec{r}_2$ é o vetor posição da carga q , $\vec{R}$ é o vetor posição do elemento superficial e $\vec{r}_{12} = \vec{R} - \vec{r}_2$. Serão analisadas situações em que $|\vec{r}_2| < R$ e $|\vec{r}_2| > R$. O módulo do vetor $\vec{r}_{12}$ é dado por

$$\begin{aligned} r_{12} &= |\vec{r}_{12}| = |\vec{R} - \vec{r}_2| \\ &= \sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \delta}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde $\cos \delta = \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. Para calcularmos a energia Lagrangiana entre a partícula teste de massa m e carga q e a casca esférica utilizamos a equação (B.6) dada por

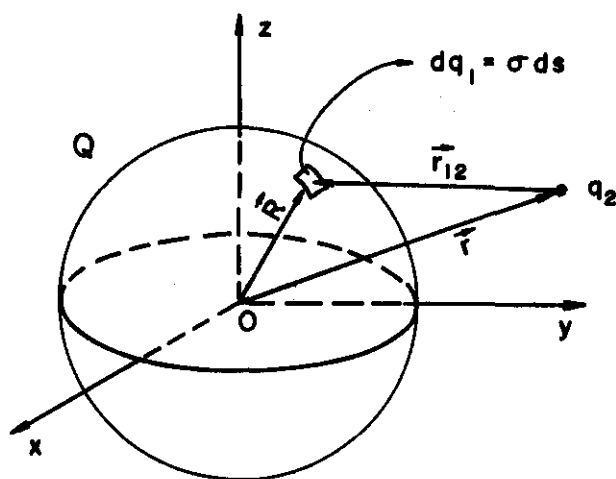


Figura C.1: Casca esférica dielétrica com uma densidade de carga σ homogeneamente distribuída sobre sua superfície interagindo com uma partícula de massa m e carga q

$$S_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \left(1 + \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right). \quad (\text{C.2})$$

Escrevendo os vetores $\vec{R}$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_{12}$ em coordenadas esférica teremos

$$\vec{R} = R \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \hat{i} + R \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \hat{j} + R \cos \theta_1 \hat{k}; \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{r}_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \hat{i} + r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \hat{j} + r_2 \cos \theta_2 \hat{k}; \quad (\text{C.4})$$

$$\vec{r}_{12} = (R \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2) \hat{i}$$

$$+ (R \sin \theta_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2) \hat{j}$$

$$+ (R \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) \hat{k}. \quad (\text{C.5})$$

A equação (C.1) pode ser escrita como

$$r_{12}^2 = R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 [\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (\text{C.6})$$

onde utilizamos as equações (C.3) a (C.5). Por diferenciação da equação (C.6) temos, supondo a casca esférica parada ($\dot{R} = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$):

$$r_{12}\dot{r}_{12} = r_2\dot{r}_2 - R\dot{r}_2[\cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$-Rr_2[-\sin\theta_2\cos\theta_1\dot{\theta}_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\theta}_2$$

$$- \sin\theta_2\sin\theta_1\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_2]. \quad (C.7)$$

A orientação do sistema de referência é arbitrária, então podemos escolher $\theta_2 = 0$ e $\varphi_2 = 0$. As equações (C.6) e (C.7) terão a forma

$$r_{12} = \sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\theta_1}, \quad (C.8)$$

$$\dot{r}_{12} = \frac{r_2}{r_{12}}\dot{r}_2 - \frac{R}{r_{12}}\dot{r}_2\cos\theta_1 - \frac{R}{r_{12}}r_2\sin\theta_1\cos\varphi_2\dot{\theta}_2. \quad (C.9)$$

Quadrando a equação (C.9) e dividindo por r_{12} temos

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} &= r_2^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} - 2Rr_2^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \cos \theta_1 + R^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} - R^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \sin^2 \theta_1 \\
&- 2R\dot{r}_2 \dot{\theta}_2 \frac{r_2^2}{r_{12}^3} \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + 2R^2 \dot{r}_2 \dot{\theta}_2 \frac{r_2^2}{r_{12}^3} \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\
&+ R^2 \dot{\theta}_2^2 \frac{r_2^2}{r_{12}^3} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \varphi_1 .
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Para poder integrar a equação (C.2) para a carga $q_2 = q$ interagindo com a casca esférica substituímos q_1 por um elemento de carga sobre a casca. Isto é, $q_1 \longrightarrow dq_1 = \sigma R^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$. Se a carga total na casca dielétrica carregada uniformemente é Q então $\sigma = Q/4\pi R^2$.

A equação (C.2) pode então ser escrita como

$$dS = \frac{q\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1}{r_{12}} + \frac{q\sigma R^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 . \tag{C.11}$$

Integrando a equação (C.11) em toda a casca teremos

$$S = \frac{q\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1}{r_{12}} + \frac{q\sigma R^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 . \tag{C.12}$$

Substituindo a equação (C.10) em (C.12)

$$\begin{aligned}
S = & \frac{q\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1}{r_{12}} + \frac{q\sigma R^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r_2^2 \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}^3} \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 \right. \\
& - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2Rr_2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \cos\theta_1 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 \\
& - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \sin^3\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2R\dot{r}_2 \frac{r_2^2}{r_{12}^3} \dot{\theta}_2 \sin^2\theta_1 \cos\varphi_1 d\theta_1 d\varphi_1 \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2R^2 \dot{r}_2 \frac{r_2}{r_{12}^3} \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \sin^2\theta_1 \cos\varphi_1 d\theta_1 d\varphi_1 \\
& \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \frac{r_2^2}{r_{12}^3} \dot{\theta}_2^2 \sin^3\theta_1 \cos^2\varphi_1 d\theta_1 d\varphi_1 \right\}. \quad (C.13)
\end{aligned}$$

Da equação (C.6) e das condições $\theta_2 = 0$ e $\varphi_2 = 0$ podemos escrever que

$$\frac{1}{r_{12}^3} = \frac{1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos\theta_1)^{3/2}}. \quad (C.14)$$

Como a equação (C.14) não depende de φ_1 então as integrais na equação (C.13) que são multiplicadas por

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi_1 d\varphi_1 \quad (\text{C.15})$$

se anulam. As integrais que restaram são reagrupadas e calculamos as integrais que envolvem outras potências de $\cos \varphi_1$. Assim a equação (C.13) fica

$$S = \frac{2\pi q\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{r_{12}} + \frac{2\pi q\sigma R^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \int_0^\pi (R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1) \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \sin \theta_1 d\theta_1 \right. \\ \left. - \int_0^\pi R^2 \frac{\dot{r}_2^2}{r_{12}^3} \sin^3 \theta_1 d\theta_1 + \frac{1}{2} \int_0^\pi R^2 \frac{r_2^2}{r_{12}^3} \dot{\theta}_2^2 \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \right\}. \quad (\text{C.16})$$

Substituindo a equação (C.14) e a equação (C.6) com $\theta_2 = 0$ em (C.16):

$$S = \frac{2\pi q\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{1/2}} \\ + \frac{2\pi q\sigma R^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \int_0^\pi \frac{\dot{r}_2^2 \sin \theta_1 d\theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{1/2}} \right. \\ \left. - \int_0^\pi \frac{R^2 \dot{r}_2^2 \sin^3 \theta_1 d\theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{R^2 r_2^2 \dot{\theta}_2 \sin^3 \theta_1 d\theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{3/2}} \right\}. \quad (\text{C.17})$$

Vamos agora resolver estas integrais exatamente. Nestas integrais, equação (C.17), temos duas situações distintas para o cálculo: $R > r_2$ e $R < r_2$. Utilizando os polinômios de Legendre podemos escrever que:

I - $R > r_2$

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta_1) \frac{r_2^n}{R^{n+1}} \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{1}{r_{12}^3} = \frac{1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta_1)}{\sin \theta_1} \frac{r_2^{n-1}}{R^{n+2}} \quad (\text{C.19})$$

II - $R < r_2$

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta_1) \frac{R^n}{r_2^{n+1}} \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{1}{r_{12}^3} = \frac{1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta_1)}{\sin \theta_1} \frac{R^{n-1}}{r_2^{n+2}} \quad (\text{C.21})$$

Para calcularmos as integrais utilizamos as seguintes propriedades:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq l \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & n = l \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Lembrando que $P_0(\cos \theta) = 1$ e $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$ as integrais na equação (C.17) para $R > r_2$ ficam

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{1/2}} d\theta_1 &= \frac{1}{R} \int_0^\pi P_0(\cos \theta_1) P_0(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{2}{R}, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{3/2}} d\theta_1 &= \frac{1}{R^3} \int_0^\pi P_1^1(\cos \theta_1) P_1^1(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{R^3}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Substituindo as equações (C.24) e (C.25) na equação (C.17) teremos

$$\begin{aligned} S(R > r_2) &= \frac{q4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{q4\pi\sigma R^2}{24\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} (\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2) \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 + \frac{(\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2)}{6c^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Para $R < r_2$ as integrais na equação (C.17) ficam

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{1/2}} d\theta_1 = \frac{1}{r_2} \int_0^\pi P_0(\cos \theta_1) P_0(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1$$

$$= \frac{2}{r_2}, \quad (\text{C.27})$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta_1}{(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \cos \theta_1)^{3/2}} d\theta_1 = \frac{1}{r_2^3} \int_0^\pi P_1^1(\cos \theta_1) P_1^1(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{r_2^3}. \quad (\text{C.28})$$

Substituindo as equações (C.27) e (C.28) na equação (C.17) teremos

$$S(R < r_2) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_2} \left\{ 1 + \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{1}{6c^2} \frac{R^2}{r_2^2} (r_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{r}_2^2) \right\}. \quad (\text{C.29})$$

Lembrando que $\vec{v} = \dot{r}_2 \hat{r} + r_2 \dot{\theta} \hat{\theta}$ teremos

$$\begin{cases} \hat{r} \cdot \vec{v} = \dot{r}_2 \\ \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2. \end{cases} \quad (\text{C.30})$$

As equações (C.26) e (C.29) podem então ser escritas como:

$$S(R > r_2) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{6c^2} \right), \quad (\text{C.31})$$

$$S(R < r_2) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} \left(1 + \frac{(\hat{r} \cdot \vec{v})^2}{2c^2} + \frac{1}{6c^2} \frac{R^2}{r_2^2} [\vec{v} \cdot \vec{v} - 3\hat{r} \cdot \vec{v}] \right). \quad (\text{C.32})$$

Estas equações (C.31) e (C.32) são as energias Lagrangianas entre a casca esférica e uma partícula carregada em seu interior e exterior. Estes cálculos são exatos, válidos para qualquer valor de r_2 . Neste trabalho utilizamos somente a equação (C.31) que pode ser escrita em função do potencial na casca, supondo $\phi = 0$ no infinito, como

$$S(R > r_2) = q\phi \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{6c^2} \right), \quad (\text{C.33})$$

onde $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ é o potencial na casca.

O resultado (C.31) foi calculado aqui de maneira exata, sem precisar supor $r_2 \ll R$, e se encontrou que esta energia Lagrangiana é independente de r_2 . Isto mostra que o resultado aproximado obtido por Schrödinger e válido apenas para $r_2 \ll R$ é exato e válido para todas as posições da carga teste no interior da casca esférica.

Utilizando os resultados dos Apêndices A e B com a equação (C.33) estamos aptos a escrever a Lagrangiana de uma partícula de carga q e massa m interagindo com uma casca esférica, como descrita no início deste Apêndice. A Lagrangiana é

$$L \equiv L_f - S \quad (\text{C.34})$$

onde L_f é dada pela equação (A.23) e S pela equação (C.33):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q\phi \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{6c^2} \right). \quad (\text{C.35})$$

Utilizando a equação (B.11) e (B.12) temos que a energia da partícula no interior da casca esférica é dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\phi \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{6c^2} \right). \quad (\text{C.36})$$

Para baixas velocidades, $v \ll c$, temos que a energia da partícula é dada por, a menos de uma constante:

$$E = \frac{mv^2}{2} + q\phi \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{6c^2} \right). \quad (\text{C.37})$$

Apêndice D

Cálculo da energia potencial Lagrangiana eletromagnética entre um capacitor plano ideal e uma partícula de carga q

Em nosso problema vamos supor uma partícula carregada incidindo perpendicularmente à placa negativa do capacitor, vide figura D.1, com uma velocidade dada por $\vec{v} = v_1 \hat{i}$ e sua posição dada por $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i}$.

O capacitor plano ideal é composto de placas S_2 e S_3 paralelas ao plano yz localizadas em $\pm x_0$, com densidades superficiais de carga $\pm\sigma$. Temos três regiões distintas para calcularmos a energia: $x_1 \leq -x_0$, $-x_0 \leq x_1 \leq x_0$ e $x_0 \leq x_1$. Utilizando o modelo de Weber vamos calcular a energia potencial nas três regiões e para isto vamos utilizar a energia Lagrangiana dada por

$$S_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 + \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (\text{D.1})$$

A equação (D.1) relaciona cargas pontuais, e como as placas do capacitor são extensas faremos $q_i = \pm\sigma da$, onde $\pm\sigma$ são as densidades de carga das

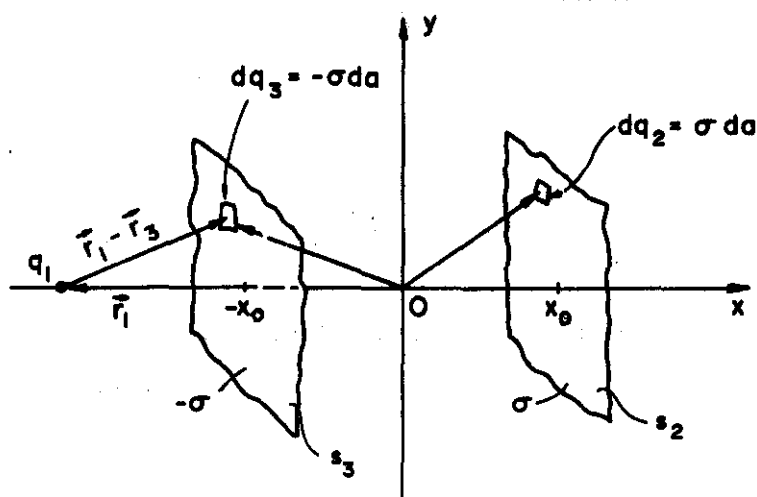


Figura D.1: Capacitor plano com uma densidade de carga $\pm\sigma$ em suas placas, e uma partícula com carga q e massa m movendo-se perpendicularmente as placas.

placas, que supomos distribuídas homoganeamente nas placas, e da é o elemento de área das placas. Assim a equação (D.1) pode ser escrita como

$$dS_{ij} = \pm \frac{q_i \sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{da}{r_{ij}} \left(1 + \frac{(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2}{2c^2 r_{ij}^2} \right), \quad (D.2)$$

onde utilizamos $\hat{r}_{ij} = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}/r_{ij}$. A energia potencial Lagrangiana é obtida quando integramos a equação (D.2)

$$S = \int_{S_2} dS_{12} + \int_{S_3} dS_{13}. \quad (D.3)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas os vetores indicados na figura D.1 referentes à placa S_2 são

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{r}_1 & = & x_1 \hat{i}, \\ \vec{r}_2 & = & x_0 \hat{i} - \rho \cos \theta \hat{j} + \rho \sin \theta \hat{k}, \\ \vec{r}_{12} & = & (x_1 - x_0) \hat{i} - \rho \cos \theta \hat{j} + \rho \sin \theta \hat{k}, \\ r_{12} & = & [\rho^2 + (x_1 - x_0)^2]^{1/2}, \\ \vec{v}_1 & = & v_{1x} \hat{i}, \\ \vec{v}_2 & = & 0, \\ \vec{v}_{12} & = & v_{1x} \hat{i}. \end{array} \right. \quad (D.4)$$

E referentes a placa S_3 são

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = x_1 \hat{i}, \\ \vec{r}_3 = -x_0 \hat{i} - \rho \cos \theta \hat{j} + \rho \sin \theta \hat{k}, \\ \vec{r}_{13} = (x_1 + x_0) \hat{i} - \rho \cos \theta \hat{j} + \rho \sin \theta \hat{k}, \\ r_{13} = [\rho^2 + (x_1 - x_0)^2]^{1/2}, \\ \vec{v}_1 = v_{1x} \hat{i}, \\ \vec{v}_3 = 0, \\ \vec{v}_{13} = v_{1x} \hat{i}. \end{array} \right. \quad (D.5)$$

Substituindo (D.4) em (D.2) temos

$$dS_{12} = \frac{q_1 \sigma da}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{[\rho^2 + (x_1 - x_0)^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{v_1^2 (x_1 - x_0)^2}{2c^2 (\rho^2 + (x_1 - x_0)^2)} \right], \quad (D.6)$$

e

$$dS_{13} = -\frac{q_1 \sigma da}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{[\rho^2 + (x_1 + x_0)^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{v_1^2 (x_1 + x_0)^2}{2c^2 (\rho^2 + (x_1 + x_0)^2)} \right], \quad (D.7)$$

Substituindo (D.6) e (D.7) em (D.3) e sabendo que $da = \rho d\rho d\theta$ teremos

$$\begin{aligned} S_W &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{q_1 \sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{[\rho^2 + (x_1 - x_0)^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{v_1^2 (x_1 - x_0)^2}{2c^2 (\rho^2 + (x_1 - x_0)^2)} \right] \\ &- \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{q_1 \sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{[\rho^2 + (x_1 + x_0)^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{v_1^2 (x_1 + x_0)^2}{2c^2 (\rho^2 + (x_1 + x_0)^2)} \right]. \end{aligned} \quad (D.8)$$

I-Potencial devido à placa S_3

Temos dois intervalos a considerar: $x_1 + x_0 > 0$ e $x_1 + x_0 < 0$. Considerando a segunda integral na equação (D.8) e integrando em termos de θ temos

$$S_{13} = -\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + (x_1 + x_0)^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{v_1^2(x_1 + x_0)^2}{2c^2(\rho^2 + (x_1 + x_0)^2)} \right]. \quad (D.9)$$

Integrando considerando os intervalos acima teremos.

$$\begin{aligned} {}_I S_{13}(x_1 > -x_0) = & -\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (x_1 + x_0)^2} + (x_1 + x_0) \right] \\ & - \frac{q\sigma}{4\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \left[-\frac{(x_1 + x_0)^2}{\sqrt{R^2 + (x_1 + x_0)^2}} - (x_1 + x_0) \right] \end{aligned} \quad (D.10)$$

e

$$\begin{aligned} {}_{II} S_{13}(x_1 < -x_0) = & -\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 - (x_1 + x_0)^2} + (x_1 + x_0) \right] \\ & - \frac{q\sigma}{4\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \left[-\frac{(x_1 + x_0)^2}{\sqrt{R^2 + (x_1 + x_0)^2}} + (x_1 + x_0) \right]. \end{aligned} \quad (D.11)$$

II) Potencial devido à placa S_2

Aqui também temos dois intervalos a considerar: $x_1 - x_0 > 0$ e $x_1 - x_0 < 0$. Considerando a primeira integral na equação (D.8) e integrando em θ temos

$$S_{12} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + (x_1 - x_0)^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{v_1^2 (x_1 - x_0)^2}{2c^2 (\rho^2 + (x_1 - x_0)^2)} \right]. \quad (D.12)$$

Integrando considerando os intervalos acima teremos

$${}_I S_{12}(x_1 > x_0) = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + (x_1 - x_0)^2} + (x_1 - x_0) \right] \\ \frac{q\sigma}{4\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \left[-\frac{(x_1 - x_0)^2}{\sqrt{R^2 + (x_1 - x_0)^2}} - (x_1 - x_0) \right] \quad (D.13)$$

e

$${}_{II} S_{12}(x_1 < x_0) = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 - (x_1 - x_0)^2} + (x_1 + x_0) \right] \\ \frac{q\sigma}{4\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \left[-\frac{(x_1 - x_0)^2}{\sqrt{R^2 + (x_1 - x_0)^2}} + (x_1 - x_0) \right]. \quad (D.14)$$

O valor de S é dado quando somamos S_{12} e S_{13} de acordo com a equação

abaixo:

$$S = \begin{cases} {}_{II}S_{13} + {}_{II}S_{12}, & x_1 < -x_0 \\ {}_IS_{13} + {}_{II}S_{12}, & -x_0 \leq x_1 \leq x_0 \\ {}_IS_{13} + {}_IS_{12}, & x_1 > x_0 \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

Substituímos (D.10), (D.11), (D.13) e (D.14) na equação (D.15). Fazendo a hipótese $R \gg x_1 + x_0$ e $R \gg x_1 - x_0$, ou seja, capacitor plano ideal com grandes placas onde desprezamos os efeitos de borda, teremos

$$S(x_1 < -x_0) = -\frac{q\sigma x_0}{\varepsilon_0} + \frac{q\sigma x_0}{2\varepsilon_0} \frac{v_1^2}{c^2}, \quad (\text{D.16})$$

$$S(-x_0 \leq x_1 \leq x_0) = \frac{q\sigma x_1}{\varepsilon_0} - \frac{q\sigma x_1}{2\varepsilon_0} \frac{v_1^2}{c^2}, \quad (\text{D.17})$$

$$S(x_1 > x_0) = \frac{q\sigma x_0}{\varepsilon_0} - \frac{q\sigma x_0}{2\varepsilon_0} \frac{v_1^2}{c^2}. \quad (\text{D.18})$$

Se tivéssemos integrado a energia potencial de Weber

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right), \quad (\text{D.19})$$

teríamos obtido

$$U(x_1 < -x_0) = -\frac{q\sigma x_0}{\epsilon_0} - \frac{q\sigma x_0}{2\epsilon_0} \frac{v_1^2}{c^2}, \quad (\text{D.20})$$

$$U(-x_0 \leq x_1 \leq x_0) = \frac{q\sigma x_1}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma x_1}{2\epsilon_0} \frac{v_1^2}{c^2}, \quad (\text{D.21})$$

$$U(x_1 > x_0) = \frac{q\sigma x_0}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma x_0}{2\epsilon_0} \frac{v_1^2}{c^2}. \quad (\text{D.22})$$

Note que quando $v^2 = 0$ reobtemos a energia potencial Coulombiana.

Apêndice E

Lagrangiana de Darwin

A Lagrangiana relativisticamente correta do eletromagnetismo clássico, válida até segunda ordem em v/c , é a de Darwin:

$$L^D = L_f - S^D, \quad (\text{E.1})$$

Nesta expressão L_f é a Lagrangiana das partículas livres dada classicamente por (no caso de duas partículas) $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$. No caso relativístico ela é dada por

$$T = -m_1 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + m_1 c^2 - m_2 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} + m_2 c^2. \quad (\text{E.2})$$

Já S^D é a Lagrangiana de Darwin dada por [Jac75, Seção 12.7, pp. 593–595]:

$$S^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left[1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2} \right]. \quad (\text{E.3})$$

Já a Hamiltoniana H e energia total E do sistema são dadas por:

$$E = H = \left(\sum_{k=1}^6 \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - L = K + U^D. \quad (\text{E.4})$$

Nesta expressão K é a energia cinética das partículas livres dada classicamente por T . No caso relativístico esta é dada por

$$K = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - m_1 c^2 + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - m_2 c^2. \quad (\text{E.5})$$

Já U^D é dada por

$$U^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left[1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2} \right]. \quad (\text{E.6})$$

Deve-se observar a mudança de sinal dentro dos colchetes comparando S^D e U^D . O mesmo ocorre na eletrodinâmica de Weber.

Nos problemas analisados neste trabalho temos uma carga teste em movimento interagindo com cargas em repouso sobre a casca esférica ou sobre as placas do capacitor. Se q_1 representa a carga teste e q_2 um elemento de carga qualquer da casca esférica ou das placas do capacitor temos $\vec{v}_2 = 0$.

Neste caso tanto U^D quanto S^D se reduzem à energia potencial Coulombiana $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r$. Logo a energia eletromagnética de q_1 interagindo com a casca ou com o capacitor vai ser dada no eletromagnetismo clássico simplesmente por $q_1 \phi$, onde ϕ é o potencial eletrostático na região onde ela se encontra.

Na Lagrangiana de Weber isto já não ocorre pois temos termos quadráticos em v_1 e v_2 . Logo, mesmo se $v_2 = 0$ ainda teremos termos com v_1^2 que não se anularão. E estes são os termos relevantes analisados neste trabalho.

Bibliografia

- [AC91] A. K. T. Assis and J. J. Caluzi. A limitation of Weber's law. *Physics Letters A*, 160:25–30, 1991.
- [AC95a] A. K. T. Assis and J. J. Caluzi. Charged particle oscillating near a capacitor. Submetido à publicação, 1995.
- [AC95b] A. K. T. Assis and J. J. Caluzi. Motion inside a charged spherical shell in Weber's electrodynamics. Submetido à publicação, 1995.
- [Ass89] A. K. T. Assis. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.
- [Ass92a] A. K. T. Assis. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, 18:475–478, 1992.
- [Ass92b] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.
- [Ass93] A. K. T. Assis. Changing the inertial mass of a charged particle. *Journal of the Physical Society of Japan*, 62:1418–1422, 1993.

- [Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*, volume 66 of *Fundamental Theories of Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [Ber64] W. Bertozzi. Speed and kinetic energy of relativistic electrons. *American Journal of Physics*, 32:551–562, 1964.
- [CA95a] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. An analysis of Phipps's potential energy. Submetido à publicação, 1995.
- [CA95b] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. The oscillatory motion of charged particles by Weber's electrodynamics. *Proceeding of International Workshop of the Institute of Basic Research*, Moteroduni, Itália, 1995. Aceito para publicação.
- [CA95c] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. Schrödinger's potential energy and Weber's electrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 27:429–437, 1995.
- [CA95d] J. J. Caluzi and A. T. K. Assis. A critical analysis of Helmholtz's argument against Weber's electrodynamics. Submetido à publicação, 1995.
- [Cal91] J. J. Caluzi. O movimento de cargas em capacitores e a velocidade limite de acordo com a lei de Weber. Tese de Mestrado, Instituto de Física "Gleb Wataghin" – UNICAMP, Campinas, agosto de 1991.
- [Ghi87] M. Ghins. O argumento de Newton a favor do espaço absoluto. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 9:61–67, 1987.

- [Gol80] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, New York, 1980.
- [Hel72] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.
- [Hel66] H. von Helmholtz. On the conservation of force; a physical memoir. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Vol. 7, pp. 114–162, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, second edition, 1975.
- [Koy86] A. Koyré. *Do mundo fechado ao universo infinito*. Forense Universitária, Rio de Janeiro, 1986.
- [Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, 1960.
- [New52] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, volume 34, pp. 1–372 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952.
- [New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, volume 1. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.
- [Rei65] F. Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill, New York, 1965.

- [Sch25] E. Schrödinger. Die erfüllbarkeit der relativitätsforderung in der klassischen mechanik. *Annalen der Physik*, 77:325–336, 1925.
- [Web72] W. Weber. Electrodynamic measurements — Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 and 119–149, 1872.
- [Web66] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pp. 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*, volume 2: *The Modern Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [XA95] A. L. Xavier e A. K. T. Assis. O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica - uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 1995. Aceito para publicação.