

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A dinâmica do universo: Sir Arthur Eddington e
as cosmologias relativísticas

Nury Isabel Jurado Herrera

Orientador: Dr. Roberto de Andrade Martins

UNICAMP

IFGW

Campinas, São Paulo

28 de Outubro de 2002

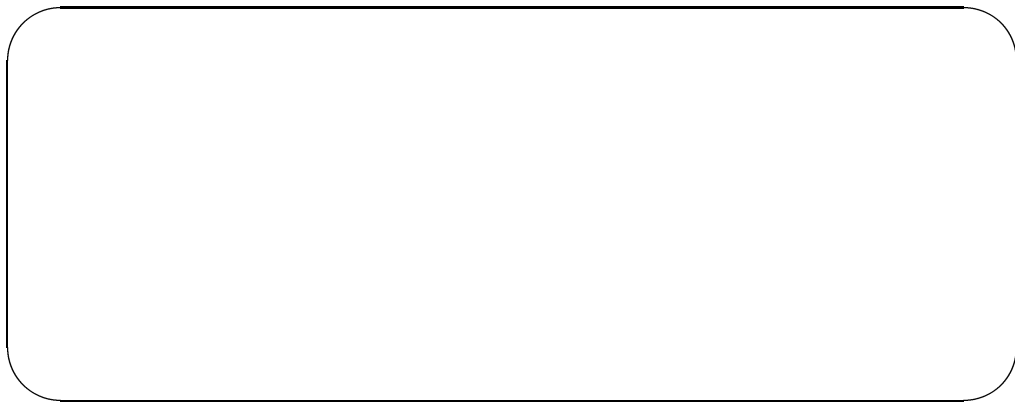
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A DINÂMICA DO UNIVERSO: SIR ARTHUR EDDINGTON E AS COSMOLOGIAS RELATIVÍSTICAS

Nury Isabel Jurado Herrera

Banca Examinadora:

- Dr. Roberto de Andrade Martins(Orientador)
- Dr. Adolfo Maia Júnior
- Dr. Carlos Ourivio Escobar



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”
Campinas, São Paulo

A cada um dos seres que permitiram minha trajetória de vida até hoje, às árvores por ser a fonte de vida, aos passáros por acompanhar meus sonhos e amanheceres, à neve por alimetar-me, às sementes plantadas e colhidas para nutrir-me, às mãos que plantaram e colheram esses frutos, aos seres que prepararam a terra para recebê-las, a cada ser que participou na elaboração do meu alimento diário, enfim a todos os seres que me permitiram e permitem compartilhar amor.

Agradecimentos

A Roberto Martins pela sua sabedoria, sua compreensão, sua ternura, sua confiança e pela sua infinita paciência, sem ele esta dissertação não teria sido possível.

A Pachita, “*mi linda princesita*” por ser minha “*maestra*”, pelo seu amor à vida e pelo seu compromisso de preservá-la, independente da situação.

A Bertica, “*mamita, mi linda hada*” por dar-me a vida, por ser meu exemplo de honestidade, humildade e entrega.

A meu “*Amado Gordiano*”, Jairo Jurado, *mi hermanito*, por fazer minha vida mágica.

A Camilito, “*papito*”, por ser a música de meu coração.

A Daniel Tygel, *meu amado Dani*, por acompanhar-me em meus sonhos, por estar aí para crescer junto, por ser “*mi eterno caminante*” e a Anita, sua companheira de vida, por entender o ter de sacrificá-los para escrever minha dissertação.

A Adriana Rojas, Adri, “*mi bella flor*”, por permitir-me desfrutar de uma “*hermanita cósmica*”. A “*mi lindo principe gitano*”, Marcelo Caldeira Barbosa, pelo seu profundo olhar.

A Carlos Escobar, pelo primeiro dia de biblioteca quando, com um doce sorriso, me disse: “Não tem problema não; o estudante não tem porque saber tudo”. A Bernardo Mayorga, por ajudar a construir minhas asas para estar aqui. A Mauro Almeida, “*o grande xamã*”, pela sua generosidade e confiança. A Marcos Sorrentino por aquele abraço no aeroporto, “*gracias*” Marcos. A Guillermo Cabrera, pela sua compreensão. A Benjamin Calvo e a toda a equipe do observatório da *Universidad Nacional de Colombia* por abrir-me suas portas e permitir-me compartilhar as diárias vivências naquele junho de 2000.

A Dina e Valquiria pela sua colaboração na obtenção do material da minha dissertação e ao senhor Mário, pelo seu sorriso.

A dona Teresinha, Ivone, Maria e Lita por serem as fadas silenciosas que dão vida a nossos lugares de trabalho.

A meus amados *serAFIMs*: Alik, “o Gordinho”, Chelin, Lise, Cauã “*meu anjinho dorado*”, Chau, Ana, Iara Terra “*a doce calma*”, Sandro, Celso, Mafe, Carol, Pri, Mauro, Rogério, João, Fernanda, Fer, Pedro, Cora, Violeta “*o sorriso puro*”, Leopoldo, Gui, Gi, Paty, Daniela, André, Marly, Alan, Paula, Digão, Alfi, Raquel, Paula, Marcos, Bel, Manu “*o grande guerrero*”, Fa, Fabiana, Tantis, Samuca, Sil, Sebastian, por serem os construtores de um “vôo” coletivo e hoje por manifestar através de ações a possibilidade de construir, a pequenos passos, um coletivo social.

A Roberto Ariano, “*Mi Principe de las montañas*”, por injetar-me o silêncio. A Cecilia Lynch, “*mi dulce hada*”, pelo seu olhar sonhador. À Colonia Colombiana em Campinas e São Carlos: Martis, Caro, Hector, Maya, William, German, Yeye, Lili, Sofi, Elder, Norita, Javier, Saul, Alvaro, Dianita, Carlos, e tantos outros que aqui esqueço, por nossos dias de “*tertulia*”. A Alfredo Sarmiento por compartilhar PATRIA. A Luis Eduardo Moreno, “*mi negrito*”, e sua linda família por compartilhar sua entrega à vida, sua honestidade e seu amor. A Katy, pela sua bondade e seu grande amor. A Lúcia Nobre, pelo seu doce sorriso.

Ao “quadrupleteo dinâmico” Ana Banana, Martinha “*doce martinha*”, Lauris e Herculis, por acompanhar minhas locuras de des-orientação.

A meus amigos, estudantes e companheiros de trabalho no “*Colegio Nuestra Señora de la Concepción Jornada Nocturna*” na Colômbia, pelos intermináveis dias de aprendizado.

A “*Mi linda gorda*”, Hilda Anaya, pelo “TE AMO”. A Sandita, por compartilhar nosso amor nestes 13 maravilhosos anos de amizade.

A Ana Melva Champi e José Chavez, por partilhar a nossa primeira aventura de república. A Ana Marcia Taveira, *linda Ana Marcia*, por seu ENORME coração. A Armando Garcia, *El presi*, por todas as noites de “*tertulia*”. A Jorge Leon, pela nossa tentativa sincera de compartilhar. A Javier Luyo, por todos os momentos compartilhados. A Fabiana, Silvia, Ana Paula, Cris e “*Baby*” por abrir as portas da F-2 e dos seus corações para me acolher. A Alik, “*minha bela artesã*” e o *Gordinho*, “*doce Élcio*”, por me acolher nos seus corações, por compartilhar o belo ritual do chá noturno e por abrir-me as portas de seu mágico lar.

A Armandinho, por aquele chocolate o primeiro dia da minha chegada em Campinas. A Del, *minha bela Del*, pelo seu doce olhar. A Maria Ignez, pelo seu sincero sorriso. A Lázaro de Assis Macedo Júnior, por ser o “*mago*” do prédio D. A Fernando da Rocha, pela sua força de escalador. A Josi, pela sua doçura e sua bela companhia nestes quatro anos. A Julio Garcia, *Mi querido Julio*, por ser meu *complice* de locuras. A Roddy e a Enver, por aquele um real que nunca

devolvi.

A Roldão, *lindo Roldão*, pelo seu canto. A Ricardo Mosna, por acompanhar minhas eternas confusões. A Cibelle Celestino, *Minha doce irmãzinha Ci*, pela sua paciência, sua ternura, seus ensinamentos e seu amor. A Ricardo Sato pela sua ternura, a Jefferson Ortiz e Walter Mello por entender minha ignorância tecnológica e, com paciência, ajudar-me a sair dela. A Oscar Agüero por nossas belas “*tertulias telefónicas*”.

A Éden, “*Mi vida*”, por permitir-nos sonhar e partilhar nossos caminhos.

Ao “combo da MUDA”: Adri, Roddy, Alvaro, Ana Marcia, Javier, Jorge, Monis, Pepe, Pablo, Ali, Carmen, Noemi, Humberto, Enver, Edson e todos os que fizeram com que uns “*acordes de todos los rincones de nuestra América Latina llegaron a Campinas*”.

A todos os sorrisos que recebi, a todos os olhares profundos e os abraços deste cálido e acolhedor povo brasileiro, a todos “*muchas gracias*”.

A todas e todos os cidadãos brasileiros que com suas contribuições fazem possível a existência dos órgãos como CNPq e CAPES que incentivam e apoiam economicamente a pesquisa no Brasil.

Enfim a todos aqueles seres que acreditam em um mundo melhor e se esforçam cada dia por construí-lo. Deixo aqui, junto a estes agradecimentos, meu compromisso com a vida através da minha entrega na luta pelo seu respeito por cima das cinzas da morte e da injustícia.

Conteúdo

Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
1.1 Sir Arthur Eddington	2
1.2 Aspectos que serão estudados	5
1.3 Interesse	6
2 Idéias básicas da relatividade geral	7
2.1 Histórico - A primeira teoria da gravitação de Einstein	7
2.2 O surgimento da teoria tensorial da gravitação	8
2.3 As bases da relatividade geral, no trabalho de 1916	10
2.3.1 O princípio de covariância	11
2.3.2 A introdução de uma métrica do espaço-tempo	12
2.3.3 A ferramenta básica: cálculo tensorial	15
2.3.4 Tensor fundamental $g_{\mu\nu}$	20
2.3.5 Leis de transformação de tensores covariantes, contravariantes e mistos	22
2.3.6 Geodésica	23
2.4 Construção de tensores por meio de diferenciação	25
2.5 A descoberta da lei einsteiniana da gravitação	29
2.5.1 Equações do campo gravitacional no vácuo	30
2.5.2 A rejeição inicial do tensor de Ricci	32
2.5.3 Equações do campo gravitacional na presença de matéria	34
2.5.4 Limite de campos fracos	41

3	Modelos do universo	42
3.1	As condições de contorno do campo gravitacional	42
3.2	A estrutura do universo	44
3.3	Problemas cosmológicos da gravitação newtoniana	46
3.4	Einstein e o problema clássico	48
3.4.1	O potencial gravitacional relativístico no infinito	50
3.4.2	O universo fechado	52
3.4.3	Conflito entre o modelo e a equação do campo	54
3.4.4	Mudança das equações de campo	55
3.5	O universo de Einstein	57
3.6	O universo de Willem De Sitter	58
3.7	Relação entre os modelos e fatos astronômicos	63
3.8	O desvio para o vermelho no modelo de De Sitter	66
3.9	O trabalho de Friedmann	68
3.10	As primeiras pesquisas de Lemaître	72
3.10.1	O universo em expansão de Lemaître	73
3.11	A contribuição de Robertson	77
3.12	A lei de Hubble	78
3.13	O início da expansão do universo	79
3.14	Eddington e o universo	80
3.15	A reação de Einstein ao universo em expansão	87
4	O universo de Eddington	90
4.1	O cálculo teórico das constantes do universo	91
4.2	Eddington e a constante cosmológica	93
4.3	A relação entre o universo e o átomo	96
4.4	As constantes fundamentais da física	99
4.4.1	A constante de estrutura fina	101
4.4.2	A massa do elétron	104
4.4.3	As constantes envolvendo grandes números	106
4.5	Relação entre observações e teoria	107
4.6	Um tratamento simétrico da equação de onda	109
4.6.1	Matrizes quadri-ponto	109
4.6.2	Solução de tensores	110

4.6.3	Rotações	111
4.6.4	Termos perpendiculares	112
4.6.5	Conjuntos mutuamente perpendiculares.	113
4.6.6	Propriedades invariantes	114
4.6.7	O quadrado de um tensor no 5-espaco	115
4.6.8	A equação de onda	116
4.6.9	Identificação dos E	117
4.6.10	Equação de onda para dois elétrons	118
4.7	A carga do elétron	119
4.8	Interação de cargas elétricas	124
4.9	Nota preliminar sobre a massa do elétron, o próton e o universo	127
4.9.1	A massa do átomo de hélio	128
4.9.2	A massa do elétron	129
4.9.3	A massa do universo	130
4.10	O valor da constante cosmológica	131
4.11	A massa do próton	134
4.12	As massas do próton e o elétron	138
5	As fases do trabalho de Eddington	140
5.1	A filosofia de Eddington	145
5.2	A filosofia de Eddington e a física	151
5.3	A visão epistemológica na primeira fase de Eddington	155
6	Considerações finais	165
	Anexo	169
	Bibliografia	170

Resumo

A presente dissertação introduz as idéias básicas para o surgimento da teoria da relatividade geral e sua posterior aplicação na construção de modelos cosmológicos relativísticos. Desta forma é apresentado um estudo histórico detalhado do desenvolvimento das cosmologias relativísticas no período compreendido entre 1917 e 1930, começando com o próprio Albert Einstein que, em 1917, propôs o primeiro modelo desta natureza, e encerrando a análise com Sir Arthur Eddington em 1930, cujo modelo, “Lemaître-Eddington”, engloba os avanços da época.

A partir do modelo de Lemaître-Eddington estudamos o papel fundamental que Eddington atribui à constante cosmológica, é neste item que suas concepções epistemológicas ficam mais evidenciadas, embora elas estejam presentes desde seus primeiros trabalhos. Discutimos também sua argumentação para calcular as constantes da natureza por métodos puramente teóricos. Acompanhamos o desenvolvimento do formalismo matricial que Eddington apresenta para escrever a equação de Dirac para o elétron e, a partir desta nova notação, descrevemos os argumentos utilizados por Eddington para encontrar o valor da constante de estrutura fina, a razão entre a massa do próton e do elétron, a razão entre a força elétrica e a força gravitacional entre um próton e um elétron, a razão entre um comprimento de tipo atômico e o raio de curvatura natural do espaço. Enfim, este estudo analisa as fases do trabalho científico de Eddington estabelecendo uma ponte entre seu trabalho cosmológico e seu trabalho epistemológico.

Abstract

The present dissertation introduce the basic ideas of the beginning of the general theory of relativity and its later application on the construction of relativistic cosmological models. So we present here a detailed historical study of the development of the relativistic cosmologies in the period between 1917 and 1930, starting with Albert Einstein who, in 1917, proposed the first model of this kind, and finishing the analysis with Sir Arthur Eddington in 1930, whose model, “Lemaître-Eddington”, incorporate the progresses of that time.

From the model of “Lemaître-Eddington” we study the basic rule Eddington gives to the cosmological constant. It is in this topic his epistemological concepts become more evident, even though it is present since his first works. We also discuss Eddington’s argumentation to calculate the constants of the nature by pure theoretical methods. We follow the development of the matrix formalism that Eddington presents to write the Dirac equation for the electron and from this new notation we describe the logic used by Eddington to find the value of fine structure constant, the rate between the proton and electron mass, the rate between the electrical and gravitational force between a proton and an electron, the rate between an atomic length and the natural spacial curvature radius. So, this essay analyzes the different periods of Eddington’s scientific work establishing one bridge between his cosmological work and his epistemological work.

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação têm dois propósitos centrais: o primeiro é o esclarecimento histórico de alguns aspectos das cosmologias relativísticas em torno de 1930, centralizando-se principalmente no trabalho do astrônomo inglês Arthur Stanley Eddington. E o segundo é o de estabelecer uma ponte entre o trabalho cosmológico e o trabalho epistemológico de Eddington.

Logo após a criação da relatividade geral (1915), essa teoria foi aplicada à construção de modelos cosmológicos. O primeiro modelo proposto pelo próprio Albert Einstein foi de um universo estático homogêneo finito, com curvatura positiva. Para tornar possível tal tipo de modelo, Einstein introduziu em 1917 uma modificação nas teorias de campo - o “termo cosmológico”, em que aparecia uma constante que, com o sinal e valor adequados, estabelecia um equilíbrio e impedia o colapso gravitacional do universo. Não havia razão para supor que o universo pudesse não ser estático, por isso o modelo de Einstein parecia a melhor descrição possível para as propriedades médias do universo.

Logo em seguida (1917), Willem de Sitter propôs um segundo modelo cosmológico: homogêneo, infinito, com densidade nula. Partículas de prova colocadas nesse universo teriam um movimento devido a uma “repulsão cósmica”, afastando-se umas das outras de modo acelerado. Inicialmente o modelo de De Sitter foi considerado uma mera curiosidade teórica, trazendo problemas conceituais para a própria teoria da relatividade geral, pois mostrava que essa teoria não satisfazia o princípio de Mach. Durante a década de 1920 o estudo astronômico das distâncias e velocidades de galáxias acabou por levar a uma visão de um universo dinâmico, em expansão, com a proposta da “lei de Hubble” em 1929. Paralelamente aos estudos astronômicos e sem conhecimento dos mesmos, alguns físicos teóricos desenvolveram - como meros exercícios matemáticos - a análise de modelos rela-

tivísticos não-estáticos, que mostravam a possibilidade de diversos universos em contração e em expansão. Os primeiros estudos desse tipo foram realizados pelo físico russo Alexander Friedmann em 1922 e 1924, mas tiveram pouca repercussão. Pouco depois (1927), sem conhecimento do trabalho de Friedmann, o belga Georges Lemaître também desenvolveu modelos dinâmicos do universo, e Henry Robertson, em 1928-1929, também independentemente, publicou análise muito semelhante. No final da década de 1920 percebeu-se que seria viável utilizar os modelos de universo em expansão para explicar as medidas astronômicas. A partir de 1928 houve um rápido desenvolvimento de estudos a respeito de modelos relativísticos dinâmicos do universo, embora houvesse carência de dados observacionais necessários para escolher entre as várias possibilidades teóricas, o que levava a muitos debates. Nesse período, os autores dos principais trabalhos relativísticos foram Lemaître, Robertson, De Sitter, Einstein, Tolman, Eddington, McCrea e McVittie (estudantes de Eddington) .

Antes de 1935 já estavam disponíveis todos os modelos que serviram posteriormente à criação da teoria do “big bang” por Georg Gamow.

Este é o período histórico analisado na presente dissertação.

1.1 Sir Arthur Eddington

O principal autor estudado na presente dissertação é Arthur Stanley Eddington (1882-1944). A carreira científica de Eddington foi quase totalmente associada à astronomia. Passou a maior parte de sua vida em Cambridge, onde realizou grande parte de sua formação acadêmica. Trabalhou como astrônomo assistente no *Royal Observatory de Greenwich*, de 1906 a 1913, retornando depois a Cambridge, onde sucedeu a George Darwin na cadeira de professor de “astronomia e filosofia experimental”. Foi diretor do Observatório Astronômico da universidade de 1914 até sua morte.

Arthur Eddington tornou-se famoso por várias de suas contribuições:

1. Estudos observacionais pioneiros sobre movimentos estelares na galáxia, que levaram a considerá-lo como um dos “pais” da astronomia estelar dinâmica, juntamente com J. C. Kapteyn.

Essas pesquisas foram iniciadas em 1906, levando à publicação de muitos artigos e depois, em 1914, do livro *Movimentos estelares e a estrutura do universo* que se tornou uma obra de referência sobre o assunto durante décadas. Esta obra apresentava, pela primeira vez, boas evidências a respeito

da estrutura e rotação da Via Láctea e de que as “nebulosas espirais” eram semelhantes à nossa galáxia.

2. Estudos de astrofísica teórica, sobre a constituição interna de estrelas, levando aos primeiros modelos estelares de estrelas estáveis e pulsantes que levaram a previsões confirmadas pelas observações.

Eddington iniciou essa linha de trabalho em 1916, com investigações a respeito dos processos de transmissão de energia no interior das estrelas. Ele introduziu as hipóteses de que as estrelas eram gasosas em todos os seus níveis e que a energia podia ser transmitida no seu interior sob forma de radiação (antes dele, pensava-se que havia apenas convecção), chegando ao estabelecimento da primeira lei que correlacionava a massa à luminosidade das estrelas. Estudou também a estrutura das anãs brancas. Uma parte de suas contribuições foi incorporada depois ao livro *A constituição interna das estrelas* publicado em 1926, que é considerado um dos “clássicos” da astrofísica.

3. Divulgação e defesa da teoria da relatividade na Inglaterra e realização do famoso teste da relatividade geral medindo a deflexão da luz das estrelas durante um eclipse solar (1919).

Eddington começou a se interessar pela teoria da relatividade em 1917, ou seja, durante a primeira guerra mundial. Nessa época, tanto por motivos científicos quanto por motivos políticos, havia uma grande rejeição aos trabalhos de Einstein na Inglaterra. Eddington publicou o primeiro relato em inglês sobre a teoria da relatividade geral, em 1918, e depois organizou a expedição astronômica à ilha de Príncipe, na África, para medidas da deflexão da luz das estrelas durante um eclipse solar (1919). Os resultados confirmaram as previsões da relatividade geral e foram o principal fator que levou à rápida aceitação geral dessa teoria, nos anos seguintes. Depois disso, Eddington publicou dois livros que ajudaram muito a difundir a teoria da relatividade nos países de língua inglesa: *Espaço, tempo e gravitação* publicado em 1920, era uma descrição simplificada, não matemática, da teoria; e *A teoria matemática da relatividade* publicado em 1923, era um tratamento técnico da teoria, que foi utilizado como obra de consulta durante muitos anos.

4. Desenvolvimento de modelos cosmológicos relativísticos, particularmente o “modelo de Lemaître-Eddington”.

Em 1930 Eddington utilizou as análises matemáticas de Lemaître para propor um modelo de universo que se iniciava com uma situação de equilíbrio semelhante ao modelo de Einstein, seguido por uma condensação da matéria (formação de galáxias) que rompia esse equilíbrio, ocorrendo então uma expansão ilimitada, tendendo no limite a um universo de De Sitter. Publicou diversos artigos sobre o assunto e o livro *O universo expandindo-se* em 1933.

5. Estudos sobre filosofia e fundamentos da física, oriundos de sua pesquisa científica, que tiveram grande influência na época.

Eddington supunha que uma grande parte do conteúdo das teorias científicas era apriorística e que por isso a própria análise do processo de interpretação subjacente às teorias físicas permitiria estabelecer muitos resultados científicos, sem necessidade de observações e experimentos. As idéias filosóficas de Eddington aparecem de passagem em vários de seus trabalhos científicos. Além disso, ele publicou diversos artigos sobre o assunto e também os livros *A natureza do mundo físico* em 1928 e *A filosofia da ciência física* em 1939.

6. Pesquisas sobre as constantes fundamentais da física, tentando explicar números adimensionais como a constante de estrutura fina e a razão entre a massa do elétron e a do próton, buscando também uma associação entre essas constantes e parâmetros cosmológicos.

Eddington acreditava que seria possível calcular matematicamente, sem uso de dados observacionais, todos os números puros que aparecem nas teorias físicas. Há uma certa semelhança entre a visão de Eddington e a teoria cosmológica desenvolvida por Paul Dirac, envolvendo os chamados “grandes números” adimensionais. No entanto, Eddington ia mais longe do que Dirac, na tentativa de deduzir todos esses números a partir de considerações matemáticas fundamentais. Essa linha de pesquisa iniciou-se em 1928.

7. Tentativa de unificar a teoria da relatividade à mecânica quântica.

Essa tentativa de Eddington tem relação com as tentativas de obtenção das constantes fundamentais da física. Durante a fase final de sua vida Eddington dedicou-se principalmente ao desenvolvimento dessa proposta de unificação entre relatividade e mecânica quântica, inspirada parcialmente pelo

sucesso da teoria quântica do elétron de Dirac. Desenvolveu uma abordagem estatística da relatividade, publicando muitos artigos e um livro (*The combination of relativity theory and quantum theory*, 1943) de enorme complexidade matemática e conceitual. Deixou, ao morrer, um vasto material manuscrito que foi editado por seu amigo Edmund Whittaker (*A teoria fundamental*, 1946).

As propostas de Eddington relativas aos itens (6) e (7) acima não foram aceitas e acabaram sendo esquecidas. Isso não impede, no entanto, que possuam grande interesse histórico, principalmente por partirem de um pesquisador que mostrou enorme capacidade em outras áreas da física.

Eddington exerceu uma enorme influência no desenvolvimento do pensamento físico. A influência chegou primeiro desde suas próprias contribuições à astronomia e astrofísica e segundo desde suas “revelações” nas contribuições dos outros; poderia pensar-se, como de fato MacCrea o fez, que ele freqüentemente parecia captar o significado dos avanços mais profundamente do que aqueles que os fizeram e explicá-los mais hábilmente, mas na verdade, foi esta a razão de que seus críticos o intitularem como um oportunista.

1.2 Aspectos que serão estudados

A dissertação não aborda todos os aspectos da obra de Eddington, mas apenas suas contribuições à cosmologia e ao cálculo das constantes fundamentais, em torno de 1930. Analisamos também sua contribuição aos fundamentos da teoria da relatividade geral, pois os dois temas estão intimamente relacionados. Seus estudos de astrofísica não são abordados. A tentativa de unificação entre teoria da relatividade e mecânica quântica, por sua complexidade também não é estudada. Os trabalhos epistemológicos de Eddington são incluídos na pesquisa, pois houve uma íntima relação entre as peculiaridades do trabalho cosmológico de Eddington e suas idéias sobre a natureza e o método da ciência.

A pesquisa estuda o desenvolvimento da teoria cosmológica relativística em torno de 1930, focalizando não apenas o trabalho de Eddington mas todas as tendências existentes na época. No entanto, procuramos analisar mais detalhadamente alguns pontos, como:

1. A natureza da constante cosmológica, e a discussão de Eddington e de outros autores sobre a validade e necessidade de incluí-la na teoria da relatividade geral.

2. As dificuldades de escolha de um modelo cosmológico relativístico em torno de 1930, e a natureza dos argumentos utilizados por Eddington para tentar justificar o modelo por ele favorecido na época.
3. As diferentes linhas de trabalho em cosmologia relativística existentes em torno de 1930, e os motivos que levaram diferentes pesquisadores a adotar diversas abordagens e objetivos.
4. A motivação e o método empregado por Eddington para tentar deduzir as constantes numéricas básicas da física e da cosmologia por argumentos puramente teóricos, comparando as idéias de Eddington a outros trabalhos semelhantes da época.
5. A relação entre as concepções epistemológicas de Eddington e seu trabalho cosmológico.

1.3 Interesse

Nosso interesse em estudar as contribuições de Eddington às cosmologias relativísticas fundamentam-se no seguinte fato; apesar de ser um autor bem conhecido, o trabalho cosmológico de Eddington foi muito pouco explorado pelos historiadores da ciência até hoje. Pode-se afirmar isso através de um levantamento realizado através dos volumes anuais da *Current bibliography* da revista *Isis*. Essa bibliografia apresenta os trabalhos históricos publicados em cada ano, em centenas de revistas especializadas de todo o mundo. Através de uma busca realizada utilizando essa bibliografia, bem como através do uso da base de dados da *History of Science Society*, foi possível notar que o tema aqui proposto, apesar de sua importância, recebeu pouca atenção dos historiadores da ciência.

Capítulo 2

Idéias básicas da relatividade geral

2.1 Histórico - A primeira teoria da gravitação de Einstein

Em 1907 Albert Einstein (1879-1955) começou a investigar um modo de introduzir referenciais acelerados e gravitação na teoria da relatividade (LANCZOS, p. 10). Nas suas primeiras tentativas, ele introduziu a equivalência entre referenciais acelerados e campos gravitacionais uniformes e deduziu algumas conseqüências, como o desvio para o vermelho, mas não introduziu nenhum formalismo novo.

A suposição de que um referencial acelerado é equivalente a um campo gravitacional uniforme para todos os tipos de fenômenos foi introduzida em 1907 sem receber nenhum nome especial. Em 1912 Einstein a denominou “hipótese de equivalência”, e depois “princípio de equivalência” (NORTON, 1993, p. 798).

Posteriormente, em 1911, Einstein começou a explorar a idéia de que a velocidade da luz seria uma função do potencial gravitacional. Nesses primeiros cálculos, o valor obtido para a deflexão era o resultado compatível com a física clássica (isto é, a metade do valor previsto posteriormente).

Utilizando o princípio de equivalência e a idéia de uma velocidade da luz variável, relacionada ao potencial gravitacional, Einstein deduziu que a luz deveria sofrer deflexão em um campo gravitacional e que a frequência da luz deveria sofrer um desvio para o vermelho ao passar de um ponto de potencial mais baixo para outro de potencial mais elevado (NORTON, 1993, p. 798).

No ano seguinte, Max Abraham publicou uma teoria da gravitação semelhante, porém matematicamente mais sofisticada, utilizando o formalismo quadridimensional de Minkowski que Einstein não havia ainda utilizado em nenhum

trabalho (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 91). Em resposta a uma crítica de Einstein, Abraham esclareceu que a geometria de Minkowski devia ser entendida como valendo apenas em uma região infinitesimal do espaço-tempo e que no caso geral devia-se considerar que o coeficiente c^2 diante de dt^2 era uma função da posição. Dessa forma, foi Abraham quem introduziu o elemento de linha na teoria da gravitação (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 91).

Em um novo trabalho, publicado em 1912, Einstein adotou uma abordagem semelhante à de Abraham. No caso da relatividade especial, Minkowski havia introduzido o intervalo invariante que, em forma diferencial, é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Essa fórmula vale para referenciais inerciais. No caso de um referencial acelerado, Einstein supôs inicialmente que seria possível utilizar uma geometria espacial euclidiana, porém com uma velocidade da luz variável, isto é, a velocidade c seria uma função das coordenadas (NORTON, 1993, p. 800):

$$ds^2 = c^2(x, y, z)dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Utilizando o princípio de equivalência, Einstein concluiu que, no limite clássico, o quadrado da velocidade da luz seria uma função linear do potencial gravitacional, e que portanto a velocidade da luz poderia substituir o potencial gravitacional, escrevendo então uma equação equivalente à equação de Poisson (EINSTEIN, 1912, p. 99):

$$\Delta c = kc\rho$$

A menos de uma constante (e com a escolha adequada de unidades), o potencial gravitacional corresponderia ao coeficiente c^2 do intervalo relativístico.

Nos anos de 1912 e 1913 Einstein enfatizou o princípio de Mach como uma hipótese fundamental para a teoria da gravitação, exprimindo-o desta forma: “Toda a inércia de um ponto material é uma influência de todas as massas presentes e se baseia em um tipo de interação com eles” (NORTON, 1993, p. 799). Essa idéia foi também chamada por Einstein de “hipótese da relatividade da inércia”.

2.2 O surgimento da teoria tensorial da gravitação

Em agosto de 1912 Einstein deixou Praga, lugar onde havia trabalhado durante um ano e meio, mudando-se para Zurich, tornando-se professor da *Eidgenössis-*

che *Technische Hochschule*, onde trabalhou até a primavera de 1914, quando se mudou para Berlim (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 92).

Em Zurich, Einstein iniciou uma intensa colaboração com o matemático Marcel Grossmann (1878-1936). Grossmann chamou a atenção de Einstein para o “cálculo diferencial absoluto” de Ricci e Levi-Civita e indicou que essa ferramenta matemática permitiria construir uma teoria covariante geral. Einstein começou então a estudar, junto com Grossmann, a possibilidade de utilizar um formalismo tensorial na teoria da gravitação (LANCZOS, p. 12-13).

O primeiro trabalho publicado por Einstein onde aparece um formalismo tensorial é um artigo que publicou em 1913 com a colaboração de Marcel Grossmann (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 255). Toda a parte matemática é assinada por Grossmann, que se baseou, por sua vez, no trabalho de Gregorio Ricci¹ (1853-1915) e seu estudante Tullio Levi-Civita (1873-1941).

O trabalho de 1913 escrito por Einstein e Grossmann é comumente denominado de “Entwurf” (ou seja, “Esboço”), porque seu título em alemão era “*Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*” (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913).

O cálculo tensorial já havia sido introduzido na relatividade especial, antes, em duas ocasiões diferentes. Hermann Minkowski (1864-1909) havia introduzido em 1909 um formalismo tensorial do eletromagnetismo, no qual o campo elétrico e o campo magnético formam parte de um único tensor. Max von Laue (1879-1960), por outro lado, havia apresentado uma abordagem tensorial da mecânica de sistemas contínuos, introduzindo o tensor de momento-energia-tensão da relatividade. No entanto, nesses dois casos, apenas se utilizavam sistemas de referência inerciais e eram aplicadas as transformações de Lorentz para calcular as componentes do tensor em outros referenciais.

Em 1912, quando iniciou o estudo do cálculo diferencial de Ricci e Levi-Civita com o auxílio de Grossmann, Einstein escreveu a Arnold Sommerfeld:

[...] Ocupo-me exclusivamente com o problema da gravitação e agora acredito que superarei todas as dificuldades com a ajuda de um amigo matemático daqui [Marcel Grossmann]. Mas uma coisa é certa: em toda minha vida eu nunca trabalhei tão duramente, e adquiri um grande respeito pela matemática, cujas partes mais sutis, em minha inocência, eu considerava até agora como um luxo. Comparado com

¹O sobrenome completo era Ricci-Curbastro.

este problema, a teoria original da relatividade é uma brincadeira de crianças (Einstein, citado por GOODSTEIN, 1983, p. 247).

Em 1913, no “Entwurf”, Einstein e Grossmann propuseram uma teoria da gravitação que não obedecia ao princípio geral de covariância - a equação do campo gravitacional somente mantinha a mesma forma para transformações *lineares* de coordenadas. Nessa época, Einstein supunha que não era possível formular equações covariantes para qualquer transformação de coordenadas. De 1913 a 1915 Einstein e seus colaboradores publicaram muitos artigos sobre gravitação, apresentando variantes da teoria do “Entwurf”, deduzindo conseqüências da teoria e tentando justificá-la.

Em 1915, Einstein retomou a tentativa de criar uma teoria covariante geral da gravitação, abandonando a teoria do “Entwurf”. No final de 1915, Einstein conseguiu chegar a uma teoria que obedecia ao princípio geral de covariância, correspondendo à formulação definitiva de sua teoria da relatividade geral (NORTON, 1993, p. 802). Ele comunicou seu trabalho à Academia de Ciências da Prússia em uma série de pequenas comunicações redigidas de forma apressada (EINSTEIN, 1915). No início do ano seguinte, Einstein enviou um artigo mais elaborado para a revista *Annalen der Physik* (EINSTEIN, 1916). Este é o trabalho considerado como a apresentação “oficial” da teoria da relatividade geral e que foi traduzido e editado muitas vezes. O artigo de 1916 será utilizado, aqui, como uma base geral para a apresentação das idéias básicas da teoria da relatividade geral. Ao longo da exposição, serão feitos alguns comentários utilizando tanto trabalhos anteriores de Einstein como de outros autores.

2.3 As bases da relatividade geral, no trabalho de 1916

Os princípios básicos utilizados por Einstein, em seus vários trabalhos, para justificar a elaboração da teoria da relatividade geral foram: o princípio de equivalência entre referenciais acelerados e campos gravitacionais uniformes; o princípio da relatividade (considerado por Einstein como equivalente ao princípio de covariância geral das leis físicas) e o princípio de Mach (ou princípio da relatividade da inércia).

Einstein apresentou diferentes formulações para os princípios básicos de sua teoria, em trabalhos publicados ao longo do tempo. Por isso, essas justificativas não são sempre compatíveis (NORTON, 1993, p. 798).

No início do artigo de 1916 Einstein apresenta a justificativa básica do desenvolvimento da relatividade geral (EINSTEIN, 1916, pp. 141-150) enfatizando especialmente:

1. As idéias de Ernst Mach.
2. A importância de uma teoria que possa ser aplicada a referenciais dotados de qualquer tipo de movimento (“princípio da relatividade geral”): “As leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento” (Einstein, 1916, p. 144).
3. O princípio de equivalência entre referenciais acelerados e campos gravitacionais uniformes.
4. A necessidade de abandonar os métodos da relatividade especial ao tratar referenciais acelerados.
5. O princípio de covariância geral das leis físicas: “As leis da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral)” (EINSTEIN, 1916, p. 149).

Einstein comenta que “uma física que satisfaça a este postulado [da covariância geral] também satisfaz o postulado da relatividade geral, porque em *todas* as substituições estão sempre necessariamente incluídas aquelas que correspondem a todos os movimentos relativos dos sistemas de coordenadas (tridimensionais)” (EINSTEIN, 1916, p. 149).

2.3.1 O princípio de covariância

O raciocínio básico do trabalho de 1916 é este: Einstein adota inicialmente a postura de que está tentando generalizar a teoria da relatividade para sistemas de referência com qualquer tipo de movimento (incluindo rotação e aceleração) e que, pelo princípio de equivalência, essa teoria deverá ser também uma teoria da gravitação. Depois, ele exprime o princípio da covariância e explica que a imposição dessa condição incluiria também todos os movimentos relativos entre sistemas de coordenadas.

No entanto, como John Norton comentou, o princípio da covariância não capta o significado físico de um princípio da relatividade geral. A covariância geral é mais ampla do que o princípio da relatividade exige, pois inclui transformações que não têm nada a ver com movimento relativo, como as transformações entre coordenadas cartesianas e polares (NORTON, 1993, p. 804). Não existe nenhuma relação entre transformações gerais de coordenadas (em um mesmo referencial) e

a teoria da relatividade e, portanto, exigir a covariância *geral* das leis físicas (que inclui qualquer transformação de coordenadas) parece um requisito sem justificativa. Portanto, a covariância não seria *necessária* em uma teoria da relatividade geral.

Deve-se assinalar que, sob o ponto de vista histórico, Einstein tentou a partir de 1912 obter uma teoria covariante geral, mas encontrou nos primeiros anos barreiras que lhe pareciam definitivas. Einstein afirma em 1913, no “Entwurf”, ser impossível encontrar uma formulação covariante geral para a lei da gravitação, comentando: “[...] deve-se enfatizar que não temos nenhuma base para assumir uma covariância geral das equações gravitacionais” (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 160). Contentou-se por isso com transformações lineares (mais gerais do que as da relatividade especial, mas mesmo assim muito limitadas), abandonando a idéia de que as equações da relatividade geral deveriam satisfazer o princípio de covariância para uma transformação qualquer de sistema de referência.

Gustav Mie publicou em 1914 uma crítica à teoria do “Entwurf”, indicando que - entre outros defeitos - a teoria não generalizava o princípio da relatividade para referenciais acelerados, já que só admitia transformações lineares entre os sistemas de coordenadas (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 265). No mesmo ano, Einstein e Grossmann conseguiram ampliar a classe de transformações admitidas pela teoria, incluindo sistemas de referência relacionados entre si por algumas transformações mais amplas (mas não totalmente gerais) - em particular, acelerações (EARMAN & GLYMOUR, 1978, pp. 269-270). Em 1915, no entanto, Einstein se convenceu de que mesmo essa ampliação era insatisfatória, porque sistemas de referência em rotação uniforme em relação a sistemas inerciais eram proibidos pelas condições ampliadas. Além disso, percebeu que a teoria previa um valor errôneo para a precessão do periélio de Mercúrio (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 271). Apenas no final de 1915 Einstein retornou à tentativa antiga de elaborar uma teoria totalmente covariante para qualquer tipo de sistema de coordenadas e, trabalhando com o tensor de Ricci, conseguiu finalmente chegar às equações covariantes gerais de campo gravitacional (LANCZOS, pp. 13-14).

2.3.2 A introdução de uma métrica do espaço-tempo

No artigo de 1916, após tentar justificar o princípio de covariância, Einstein introduziu uma métrica riemanniana do espaço-tempo. Utilizando o princípio de

equivalência, ele indica que é possível escolher um sistema de referência no qual, para uma região infinitamente pequena, o campo gravitacional desapareça (EINSTEIN, 1916, p. 151) - ou seja, um referencial em movimento inercial, naquele ponto. Nesse referencial e nessa região infinitesimal o elemento de intervalo relativístico ds é dado pela fórmula da relatividade especial:

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$$

Se, no entanto, for adotado outro referencial qualquer, na mesma região infinitesimal, o intervalo relativístico terá outra expressão, que deverá ser obtida substituindo-se os valores dos dX_ν em função das coordenadas dx_σ do novo referencial. Essas transformações são lineares e, por isso, será obtida para ds^2 uma expressão do tipo:

$$ds^2 = \sum g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau$$

Einstein esclarece que o conjunto de grandezas $g_{\mu\nu}$ pode ser escolhido de forma a ser simétrico, isto é, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ e que, portanto, há apenas 10 grandezas independentes, no caso mais geral. Ele indica, depois, que as grandezas $g_{\mu\nu}$ devem ser consideradas como uma descrição do campo gravitacional no referencial considerado (EINSTEIN, 1916, p. 153). A justificativa é a seguinte: no referencial em que ds^2 obedece à fórmula de Minkowski, uma partícula livre tem movimento retilíneo e uniforme; no outro referencial, o mesmo movimento poderá ser descrito como curvo e acelerado (dependendo de $g_{\mu\nu}$). Nesse novo referencial, pelo princípio de equivalência, esse movimento curvo e acelerado será interpretado como sendo devido a um campo gravitacional. Portanto, os $g_{\mu\nu}$ representam, nesse novo referencial (não inercial) a presença da gravidade.

É interessante assinalar que o uso da letra g para representar os coeficientes da métrica parece ter sido escolhido de forma proposital, procurando estabelecer uma relação entre essa grandeza e a gravitação. Podemos notar isso comparando os trabalhos de Einstein com trabalhos anteriores.

Sabe-se que Einstein e Grossmann se basearam nos trabalhos de Christoffel e de Ricci e Levi-Civita sobre geometria diferencial. Consultado o trabalho original, verifica-se que a “forma fundamental” introduzida por Ricci e Levi-Civita utilizava a seguinte notação (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 133):

$$\varphi = \sum_1^n r^s a_{rs} dx_r dx_s$$

Em outros pontos do mesmo artigo, ao fazer aplicações geométricas do método desenvolvido, a forma fundamental é representada por ds^2 (RICCI & LEVI-

CIVITA, 1901, p. 165). Portanto, os coeficientes da métrica não são indicados pela letra g e sim pela letra a .

Christoffel, antes de Ricci e Levi-Civita, havia estudado a transformação de uma forma diferencial quadrática que representou sob a forma (CHRISTOFFEL, 1869, p. 46):

$$F = \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k$$

onde o símbolo ∂x_k era utilizado para representar a diferencial da variável x_k . Portanto, no trabalho de Christoffel, a letra utilizada para representar os coeficientes da métrica era ω e não g .

É interessante notar que no livro que Levi-Civita escreveu posteriormente sobre cálculo tensorial (publicado em 1923) toda a parte matemática da obra é desenvolvida utilizando a mesma representação da métrica do artigo de 1901 (LEVI-CIVITA, *The absolute differential calculus*, p. 89):

$$ds^2 = \sum_{r,s}^n a_{rs} dx_r dx_s$$

Porém, ao desenvolver as aplicações do método na relatividade geral (LEVI-CIVITA, *The absolute differential calculus*, p. 364), passa a utilizar a letra g em vez de a para os coeficientes da métrica:

$$ds^2 = \sum_{r,s}^n g_{rs} dx_r dx_s$$

Esse uso da letra g apareceu no primeiro trabalho em que Einstein e Grossmann aplicaram a geometria diferencial à teoria da gravitação (o “Entwurf” de 1913).

Logo no início do “Entwurf”, Einstein introduz o intervalo minkowskiano; depois introduz um novo sistema de coordenadas espaço-temporal e indica que, utilizando essas novas coordenadas, o intervalo relativístico passa a ser representado por

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Em seguida, sem nenhuma explicação adicional, Einstein dá uma interpretação física para os coeficientes $g_{\mu\nu}$ da métrica: “Chegamos assim à conclusão de que *no caso geral o campo gravitacional é caracterizado por dez funções espaço-temporais [...]*” que são as 10 componentes independentes de $g_{\mu\nu}$ (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 155). Mais especificamente, Einstein vai associar os

$g_{\mu\nu}$ ao *potencial gravitacional*. No entanto, nada do que Einstein havia apresentado antes permitia afirmar que esses coeficientes estavam relacionados ao campo gravitacional.

Aparentemente o primeiro raciocínio utilizado por Einstein baseou-se nas suas pesquisas anteriores, a respeito da relação entre a velocidade da luz e o potencial gravitacional. Como vimos, ao desenvolver essas idéias ele havia obtido o resultado de que o c^2 na frente do dt^2 , na fórmula do intervalo relativístico, era proporcional ao potencial gravitacional. Em um caso mais geral, seria natural pensar que os coeficientes que aparecem na frente de todos os termos do intervalo relativístico estariam também associados de alguma forma ao potencial gravitacional.

Em um trabalho apresentado em setembro de 1913 e publicado no ano seguinte (EINSTEIN, 1914) Einstein esclareceu um pouco melhor o significado das grandezas $g_{\mu\nu}$:

Segue-se da idéia esboçada acima que as dez quantidades $g_{\mu\nu}$ caracterizam o campo gravitacional; elas substituem o potencial gravitacional escalar φ da teoria newtoniana da gravitação e formam o tensor covariante fundamental de segunda ordem do campo gravitacional. O significado físico fundamental dessas quantidades $g_{\mu\nu}$ consiste no fato de que determinam o comportamento das réguas e dos relógios. (EINSTEIN, 1914a, p. 194)

Apesar dessa caracterização do tensor $g_{\mu\nu}$ como representando o *potencial* gravitacional, na mesma página deste trabalho ele se refere a essas grandezas como “as componentes $g_{\mu\nu}$ do campo gravitacional”. Apesar dessa confusão de nomes, Einstein em geral associou os $g_{\mu\nu}$ com o potencial e isso guiou sua pesquisa, como ficará claro mais adiante.

2.3.3 A ferramenta básica: cálculo tensorial

Para desenvolver uma teoria covariante, Einstein e Grossmann utilizaram, a partir de 1912, a ferramenta que atualmente denominamos “cálculo tensorial”. No “Entwurf”, como também em outros trabalhos posteriores, há uma apresentação geral do cálculo tensorial, para facilitar a compreensão por parte de outros físicos que, como Einstein, não estavam familiarizados com essa ferramenta. No artigo de 1916 em que apresentou pela primeira vez uma exposição clara e coerente

da sua teoria da gravitação (EINSTEIN, 1916), aparece também uma apresentação do cálculo tensorial. Desde então tornou-se uma tradição apresentar essa ferramenta matemática nas obras sobre teoria da relatividade geral.

O estudo da geometria diferencial originou-se no século XIX - primeiramente, pelo estudo de Gauss a respeito de superfícies curvas e, depois, pelo trabalho de Bernhard Riemann (1826-1866) e seus sucessores, que generalizaram os métodos de Gauss para qualquer número de dimensões. Muitos dos métodos utilizados nesse estudo foram desenvolvidos por Elwin Christoffel (1829-1900) e, pouco depois, por Gregorio Ricci.

Em 1901 Ricci e seu estudante Tullio Levi-Civita, em um famoso trabalho publicado na revista *Mathematische Annalen*, apresentaram uma versão detalhada (76 páginas) do método que chamaram “cálculo diferencial absoluto” e de suas aplicações (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901). Nesse trabalho, chamaram a atenção para a relação entre o método desenvolvido por Christoffel e o conceito de variedade n-dimensional de Riemann, enfatizando aplicações geométricas e físicas.

No trabalho de Ricci e Levi-Civita não aparece o nome “tensor”. Eles se referem a “sistemas de funções” de n variáveis, ou simplesmente “sistemas” e estudam suas propriedades de transformação. Definem *sistemas covariantes* e *contravariantes*, introduzindo esses nomes pela primeira vez nesse trabalho (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, pp. 130-132). Para representar esses diferentes tipos de sistemas, eles utilizam a notação empregada até hoje: índices inferiores para sistemas covariantes e índices superiores para sistemas contravariantes. A notação utilizada é um pouco mais complicada do que a posterior, porque em muitas expressões os índices são representados por letras com subscritos, como por exemplo (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 131):

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n \sum_{s_1 s_2 \dots s_m} X_{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{s_1}} \frac{\partial x_{r_2}}{\partial y_{s_2}} \dots \frac{\partial x_{r_m}}{\partial y_{s_m}}$$

No entanto, em outros pontos - como ao introduzir a derivada covariante (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 138) - os autores simplificam a notação, que se torna semelhante à utilizada posteriormente:

$$X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} r s \\ q \end{matrix} \right\} X_q$$

O nome “tensor” foi dado por Grossmann e Einstein, em 1913 (NORTON, 1993, p. 799), generalizando o nome que era utilizado em teoria da elasticidade.

O “Entwurf” de 1913 tem duas partes. A primeira dela, assinada apenas por Einstein, é denominada “parte física”; a segunda, assinada apenas por Grossmann, é a “parte matemática”. Nessa segunda parte Grossmann apresenta de forma sistemática o formalismo tensorial, baseando-se especialmente nos trabalhos de Christoffel e de Ricci e Levi-Civita.

Grossmann utiliza no seu trabalho o nome “tensor” desde o início, sem explicar a origem do nome e sem dizer que Christoffel, Ricci e Levi-Civita não utilizam essa denominação.

Quadrivetores contravariantes e covariantes

Ricci e Levi-Civita introduziram em 1901 a notação usual de índices superiores para representar sistemas (tensores) contravariantes (T^μ) e índices inferiores para representar os sistemas (tensores) covariantes (T_μ). Em 1913 Einstein e Grossmann não utilizaram essa convenção, usando apenas índices inferiores. Por isso, para diferenciar os diferentes tipos de tensores, eles indicavam no “Entwurf” os tensores covariantes por letras romanas (T_μ, G_μ), os tensores contravariantes por letras gregas (Θ_μ, Γ_μ) e os tensores mistos por letras góticas ($\mathfrak{T}_\mu, \mathfrak{G}_\mu$).

Em um trabalho publicado no final de 1914 (EINSTEIN, 1914b), Einstein apresenta novamente toda a base matemática da sua teoria da gravitação, porém de um modo ligeiramente diferente. Ele começa a seguir a notação de Ricci e Levi-Civita, utilizando índices superiores para os tensores contravariantes (EINSTEIN, 1914b, p. 34); e passa a utilizar letras romanas indiferentemente para tensores covariantes ou contravariantes.

A notação x^m (com índice superior) para representar as coordenadas contravariantes foi introduzida por Wolfgang Pauli, em 1921 (CAJORI, 1933, vol. 2, p. 140, §510).

No artigo de 1916 Einstein introduziu, pela primeira vez, a convenção de que a presença de dois índices iguais em um mesmo tempo de uma expressão representa uma soma sobre esses índices (EINSTEIN, 1916, p. 157). Até o final de 1915 ele sempre representava as somas explicitamente, com o símbolo $\sum$.

O trabalho de 1916 apresenta os instrumentos matemáticos necessários para a construção das equações de campo, cujo formalismo, como mencionado, já tinha sido apresentado em uma nota submetida em 1914 (EINSTEIN, 1914, p. 33-39). A seguir vamos fazer uma descrição dos mesmos (EINSTEIN, 1916, p. 155-160).

O quadrivector contravariante por exemplo é definido como qualquer entidade que, em relação ao sistema de referência (ou de coordenadas), possa ser expressa

por meio de quatro componentes A^ν , transformável segundo a lei

$$A'^\sigma = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu$$

Da mesma forma, define o quadrivetor covariante como qualquer entidade que, em relação ao sistema de referência (ou de coordenadas), pode ser expressa por meio de quatro componentes A_ν , transformável segundo a lei

$$A'_\sigma = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu$$

Observação: os quadrivetores são considerados como tensores de primeira ordem.

Tensores de segunda ordem e de ordem superior

Einstein define o tensor contravariante de segunda ordem como uma entidade que, em relação a todo sistema de referência, é descrita por funções que obedecem à lei de transformação

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu},$$

Um exemplo de tensor contravariante de segunda ordem é $A^{\mu\nu}$, expresso por todos os produtos das componentes B^μ e C^ν de dois quadrivetores contravariantes. Não entanto, nem todo tensor $A^{\mu\nu}$ pode ser considerado como o produto de dois quadrivetores B^μ e C^ν porque o produto $B^\mu C^\nu$ só tem oito componentes independentes e $A^{\mu\nu}$ pode ter 16 componentes independentes.

Por sua vez, uma entidade que em relação a todo sistema de referência esteja descrita por funções que obedecem à lei de transformação

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu},$$

é dita um tensor covariante de segunda ordem.

Agora, o tensor misto de segunda ordem é definido como uma entidade que em relação a todo sistema de referência pode descrever-se mediante funções que obedecem à lei de transformação

$$A'^{\sigma}_{\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A^{\mu}_{\nu}$$

Um tensor contravariante ou covariante de segunda ordem, ou de ordem maior, diz-se simétrico quando são iguais duas componentes (das suas dez componentes

independentes) provenientes de uma outra, pela transposição de dois índices quaisquer, isto é,

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$$

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$$

Essa simetria assim definida é uma propriedade independente do sistema de referência

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} A^{\mu\nu} = A'^{\tau\sigma}$$

Por sua vez, um tensor de segunda ordem, ou de ordem maior, diz-se anti-simétrico quando duas componentes (das suas seis componentes independentes) provenientes uma da outra, por transposição de dois índices quaisquer, são de sinais contrários, isto é,

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$$

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$$

Um tensor de ordem zero, que tanto é contravariante como covariante, é dito um escalar ou invariante.

Multiplicação de tensores

Com as componentes de um tensor de ordem z e as de um outro de ordem z' pode-se obter as componentes de um outro tensor de ordem $z + z'$, multiplicando duas a duas todas as componentes do primeiro por todas as componentes do segundo, isto é,

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_\sigma$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}$$

$$T_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}$$

A partir de qualquer tensor misto pode-se formar um tensor de ordem inferior em duas unidades à do primeiro, igualando um índice de caráter covariante a um de caráter contravariante e somando em relação a tal índice, isto é,

$$A_{\alpha\beta}^{\lambda\delta} \rightarrow A_{\beta}^{\delta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\delta} (= \sum_{\alpha} A_{\alpha\beta}^{\alpha\delta})$$

$$A = A_{\beta}^{\beta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$$

Sendo A o traço do tensor $A^{\lambda\beta}$.

A multiplicação interior ou mista entre tensores consiste na combinação da multiplicação exterior com a contração. Por exemplo, com o tensor covariante de segunda ordem $A_{\mu\nu}$ e o tensor contravariante de primeira ordem B^σ forma-se, por multiplicação exterior, o tensor misto $D_{\mu\nu}^\sigma = A_{\mu\nu}B^\sigma$ e por contração nos índices ν e σ forma-se o quadrivetor covariante

$$D_\mu = D_{\mu\nu}^\nu = A_{\mu\nu}B^\nu$$

2.3.4 Tensor fundamental $g_{\mu\nu}$

O tensor fundamental covariante. Considerando X_1, X_2, X_3 como as coordenadas espaciais de um sistema de coordenadas local ao qual se atribui um estado de aceleração tal que fique removido todo campo gravitacional, e X_4 a respectiva coordenada temporal, assumindo $c = 1$, a expressão

$$ds^2 = -X_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$$

terá, segundo a relatividade especial, um valor independente da mudança (por translação e/ou rotação) do sistema de coordenadas local. A grandeza ds é dita ser o elemento de linha correspondente a pontos infinitamente próximos do espaço quadridimensional.

Agora ao invés do sistema local se adota um sistema de referencial arbitrário. Qualquer que seja a relação entre X_1, X_2, X_3, X_4 e x_1, x_2, x_3, x_4 , temos uma relação linear entre seus diferenciais e, portanto, ao elemento de linha, como acima referido, corresponderá também uma base $dx_1...dx_4$ do sistema de coordenadas desse referencial.

Sob essas considerações a representação geral do elemento de linha estará dada pela expressão:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

onde cada $g_{\mu\nu}$ obtém-se através do seguinte raciocínio²:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dx^\mu \cdot \mathbf{e}_\mu \\ |d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= (dx^\mu \cdot \mathbf{e}_\mu) \cdot (dx^\nu \cdot \mathbf{e}_\nu) \\ &= (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ g_{\mu\nu} &\equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \end{aligned}$$

²Este raciocínio não se encontra explícito no artigo de Einstein no qual estamos baseando nossa revisão teórica, mas nos parece conveniente introduzi-lo a maneira de clareza do texto. Para detalhes ver MARTINS, R. Notas de aula do curso Teoria da relatividade geral.

$\mathbf{e}_\mu$ é um elemento da base natural do sistema de coordenadas dado por

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\mu}$$

sendo $\mathbf{r}$ o vetor de posição no espaço.

No artigo de 1916, Einstein antes de trabalhar na descrição do tensor fundamental, enuncia três teoremas nos quais fundamenta seu estudo acerca de dito tensor (EINSTEIN, 1916, p. 162-163):

[TEOREMA 1] Se $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ for invariante para qualquer escolha do tensor $B^{\mu\nu}$, então $A_{\mu\nu}$ tem caráter tensorial³.

[TEOREMA 2] Se B^μ e C^ν são vetores arbitrários e se o produto interior

$$A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu$$

for um escalar, então $A_{\mu\nu}$ é um tensor covariante.

[TEOREMA 3] Se as grandezas $A_{\mu\nu}B^\nu$ formam um tensor de primeira ordem para uma escolha arbitrária do quadri vetor B^ν , então $A_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem.

Uma vez apresentados estes teoremas Einstein se refere ao tensor fundamental covariante nos seguintes termos (EINSTEIN, 1916, p. 164):

Na expressão invariante do quadrado do elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, onde dx^μ desempenha o papel de um vetor contravariante de escolha arbitrária, pode-se provar⁴ que os $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ representam um tensor covariante simétrico de segunda ordem, com dez das suas componentes independentes, chamado o tensor fundamental.

O tensor fundamental contravariante.

Por sua vez, Einstein se refere no artigo de 1916 ao tensor fundamental contravariante da seguinte forma (EINSTEIN, 1916, p. 164): Se no determinante formado com os elementos $g_{\mu\nu}$ se toma o menor correspondente a cada um dos $g_{\mu\nu}$ e se divide pelo determinante g dos $g_{\mu\nu}$ se obtém as componentes de um novo tensor $g^{\mu\nu}$. A demonstração do fato que $g^{\mu\nu}$ é um tensor segue-se do seguinte raciocínio: por propriedades dos determinantes

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu,$$

³Ver demonstração em EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* **49**, 785, 1916. Tradução: EINSTEIN, A. *O Princípio da relatividade*. [4a. ed.]. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989, p. 162.

⁴Ver TEOREMA 3

onde

$$\begin{cases} \delta_{\mu}^{\mu} &= 1 & \text{Se } \mu = \nu \\ &= 0 & \text{Se } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Pode-se agora, ao invés da expressão anterior, escrever ds^2 como

$$ds^2 = g_{\mu\sigma} \delta_{\nu}^{\sigma} dx_{\mu} dx_{\nu},$$

ou ainda

$$ds^2 = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

Mas, as componentes

$$d\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma} dx_{\mu}$$

formam um quadrvetor covariante, que é de escolha arbitrária (dado que o são os dx_{μ}). Introduzindo-o na nossa expressão para ds^2 teremos

$$ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_{\sigma} d\xi_{\tau}.$$

Como ds^2 é um escalar para uma escolha arbitrária do vetor $d\xi_{\sigma}$ e como $g^{\sigma\tau}$ é por definição simétrico nos índices σ e τ , segue-se pelo [TEOREMA 3] que $g^{\sigma\tau}$ é um tensor contravariante.

Observação: No “Entwurf” a forma contravariante do tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ é representada como $\gamma_{\mu\nu}$ (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 161).

Observação: O símbolo utilizado por Einstein para o delta de Kronecker δ_{ik} já havia sido introduzido pelo próprio Kronecker em 1903 (ver CAJORI, 1993, vol. 2, p. 100).

2.3.5 Leis de transformação de tensores covariantes, contravariantes e mistos

Einstein completa sua revisão matemática dos tensores com as leis de transformação, que no seu trabalho de 1916 estão referidas como *Construção de novos tensores por meio do tensor fundamental* (EINSTEIN, 1916, p. 168). A lei de transformação de vetores contravariantes em covariantes está dada pela seguinte equação

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$$

A transformação de tensores covariantes em contravariantes é realizada através da seguinte equação

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$$

Para tensores mais gerais temos

$$A_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\mu} = g^{\mu\nu} A_{\alpha\beta\nu}^{\gamma\delta}$$

e

$$A_{\alpha\beta\mu}^{\gamma\delta} = g_{\mu\nu} A_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\nu}$$

2.3.6 Geodésica

No artigo de 1901 de Ricci e Levi-Civita, as geodésicas já eram definidas como curvas para as quais a variação da integral de ds é nula (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 153). Além de utilizar a geodésica para fins geométricos, eles também mostram sua relação com o movimento de partículas. Primeiro, ao aplicar o método diferencial absoluto à mecânica, os autores escrevem a energia cinética sob a forma (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 178):

$$2T = \sum_1^n r^s a_{rs} x'_r x'_s$$

onde x' representa a derivada de x em relação ao tempo, e também sob esta outra forma, que exhibe uma relação mais direta com a forma fundamental:

$$2T dt^2 = \sum_1^n r^s a_{rs} dx_r dx_s$$

Note-se que a massa é considerada igual a 1, ou está incluída nos coeficientes da forma fundamental.

Depois, a solução das equações de Lagrange é representada sob a seguinte forma:

$$x''_i = X^{(i)} - \sum_1^n r^s \left\{ \begin{matrix} r^s \\ i \end{matrix} \right\} x'_r x'_{sr}$$

onde $X^{(i)}$ é a força (em forma contravariante). Na ausência de forças externas, como indicam os autores, a trajetória de uma partícula é uma geodésica (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 179).

Esse tipo de análise era, na verdade, mais antigo ainda. C. G. J. Jacobi, em 1837, estudou o movimento de uma partícula sobre uma superfície qualquer, sem ação de forças externas, e mostrou que as trajetórias eram geodésicas (LÜTZEN, 1995, p. 20). Outros autores também associaram as geodésicas ao movimento de partículas: Poisson, Mindling, Liouville, Joachimsthal, Tortolini e outros.

Christoffel introduziu em 1869 aquilo que posteriormente foi denominado “símbolo de Christoffel” (CHRISTOFFEL, 1869, p. 48):

$$\left[\begin{array}{c} gh \\ k \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_{gk}}{\partial x_h} + \frac{\partial w_{hk}}{\partial x_g} - \frac{\partial w_{gh}}{\partial x_k} \right]$$

onde w_{ij} representava o tensor métrico sob forma covariante; e o segundo símbolo de Christoffel era representado por índices dentro de chaves:

$$\left\{ \begin{array}{c} il \\ r \end{array} \right\} = \sum_k \frac{E_{rk}}{E} \left[\begin{array}{c} il \\ k \end{array} \right]$$

onde E_{ij}/E corresponde ao tensor métrico contravariante.

Ricci e Levi-Civita utilizaram o mesmo modo de representar os símbolos de Christoffel, e Grossmann e Einstein os seguiram.

O uso da letra grega Γ para representar os símbolos de Christoffel começou com Einstein e tem uma história bastante interessante. Em um artigo publicado em 1914 Einstein desenvolveu pela primeira vez a equação da geodésica em um espaço-tempo genérico (EINSTEIN, 1914b, p. 45). Nessa equação, o símbolo de Christoffel de segundo tipo tem um papel essencial, determinando a aceleração da partícula:

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = - \sum_{\mu\nu} \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \tau \end{array} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \quad (2.1)$$

Mais adiante, no mesmo artigo, Einstein afirmou:

“Vemos que para a ação do campo gravitacional sobre os processos materiais, as quantidades

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} \sum_\mu g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \quad (2.2)$$

são de importância crucial, e por esta razão nós as chamaremos de ‘componentes do campo gravitacional’ (EINSTEIN, 1914b, p. 57).

Esse símbolo Γ é utilizado logo em seguida por Einstein, para simplificar algumas fórmulas. No entanto, nesta época Einstein estava confuso sobre a conveniência de chamar essa expressão de campo gravitacional pois, mais adiante, ele afirma: “De acordo com a equação (39), o tensor de energia tem que ser considerado como um tensor contravariante e as quantidades $\left\{ \begin{array}{c} \tau\nu \\ \mu \end{array} \right\}$ como as componentes do campo gravitacional” (EINSTEIN, 1914b, p. 59).

Note-se que, como no caso do tensor $g_{\mu\nu}$, Einstein escolheu o novo símbolo Γ por um motivo bastante claro. A letra grega Γ corresponde à letra romana G e novamente lembra a palavra “gravitação”.

No final de 1915 Einstein apresentou uma série de comunicações nas quais conseguiu chegar à forma definitiva da sua teoria de gravitação (EINSTEIN, 1915). Nesse trabalho ele indica que havia, anteriormente, escolhido a expressão

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

para representar as componentes do campo gravitacional, mas que agora havia percebido que os símbolos de Christoffel são preferíveis a essas expressões, e passa então a escrever:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\tau} = - \left\{ \begin{array}{c} \nu\sigma \\ \tau \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

como sendo as componentes do campo gravitacional (EINSTEIN, 1915, p. 102; ver também p. 118). Ele chama também a atenção do leitor para a equação da geodésica, que pode então ser escrita:

$$\frac{d^2 x_{\tau}}{ds^2} = - \sum_{\mu\nu} \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \tau \end{array} \right\} \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} = \sum_{\mu\nu} \Gamma_{\tau}^{\mu\nu} \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} \quad (2.4)$$

2.4 Construção de tensores por meio de diferenciação

A derivada covariante de um tensor se baseia em propriedades estudadas por Christoffel, mas o nome de “derivada covariante” e o estudo de suas propriedades aparece apenas no trabalho posterior de Ricci. No trabalho de 1901 de Ricci e Levi-Civita já aparece a derivada covariante com a notação adotada por Einstein - exceto pelo uso explícito do somatório (RICCI & LEVI-CIVITA, 1901, p. 138):

$$X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_1^n q \left\{ \begin{array}{c} rs \\ q \end{array} \right\} X_q$$

A guisa de clareza, e mesmo que não explicitamente considerado este argumento no artigo de Einstein de 1916, vamos apresentar aqui a dedução de porque a derivada de um tensor, em geral, não é um tensor⁵. Consideremos um campo tensorial A^{α} , ou seja, um tensor que é função das coordenadas (posição e tempo):

$$A^{\alpha}(x_{\mu})$$

⁵MARTINS, R. Notas de aula do curso Teoria da Relatividade Geral

Não é possível em geral produzir um tensor a partir de um campo tensorial por derivação simples, mesmo se for feita a derivada em relação a um escalar:

$$\frac{dA^\alpha}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta\tau}$$

Nesse caso a diferença ΔA^α vai ser tomada em dois pontos distintos 1 e 2 do espaço-tempo:

$$\frac{dA^\alpha}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{(A_2^\alpha - A_1^\alpha)}{(\tau_2 - \tau_1)}$$

e, quando fizermos a transformação para outro sistema de referência, teremos (sendo τ um invariante):

$$\begin{aligned} \frac{dA'^\beta}{d\tau} &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{(A_2'^\beta - A_1'^\beta)}{(\tau_2 - \tau_1)} \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_2 A_2^\alpha - \left(\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \right)_1 A_1^\alpha \right]}{\Delta\tau} \end{aligned}$$

Os coeficientes de transformação $\left(\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$ são calculados em dois pontos distintos, podendo portanto ter valores diferentes. Por isso não se pode, em geral, transformar essa expressão em:

$$\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \left[\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{(A_2^\alpha - A_1^\alpha)}{(\tau_2 - \tau_1)} \right]$$

que daria a transformação tensorial adequada. Portanto conclui-se que

$$\frac{dA'^\beta}{d\tau} \neq \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{dA^\alpha}{d\tau}$$

ou seja, a derivada de um tensor não é um tensor (em geral).

Dois dos exemplos mais utilizados na construção da teoria da relatividade geral são o tensor covariante de segunda ordem $A_{\mu\nu}$ e o tensor de terceira ordem

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma & \mu \\ & \tau \end{matrix} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma & \nu \\ & \tau \end{matrix} \right\} A_{\mu\tau} \quad (2.5)$$

utilizado por Riemann na construção do tensor que leva seu nome⁶.

Riemann utilizando somente como ponto de partida o tensor fundamental $g_{\mu\nu}$, por diferenciação, introduziu em [2.5] a extensão do quadri vetor A_μ (EINSTEIN, 1916, p. 182-184):

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ & \rho \end{matrix} \right\} A_\rho$$

⁶onde se identificou $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. E $A_{\mu\nu\sigma} \neq A_{\mu\sigma\nu}$.

e dessa forma, com uma pequena modificação nos nomes dos índices, apresentou o tensor de terceira ordem

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} +$$

$$+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \mu \\ \rho \end{matrix} \right\} \right] A_\rho$$

Mas pela sua definição, esse tensor não é simétrico nos índices σ e τ .

Agora, uma vez tendo essa expressão, Riemann construiu o tensor $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$, motivado pelo fato de que nessa construção o primeiro termo da expressão $A_{\mu\sigma\tau}$, o quarto termo e também o termo correspondente à última parcela do colchete, são cancelados⁷ pelos termos da mesma ordem da expressão $A_{\mu\tau\sigma}$. O mesmo acontece com a soma do segundo e terceiro termos. Portanto obtém assim:

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B_{\mu\sigma\tau}^\rho A_\rho \quad (2.6)$$

$$B_{\mu\sigma\tau}^\rho = -\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \tau \\ \rho \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} \quad (2.7)$$

Um fato fundamental a ser notado é que no segundo membro de [2.6] entram apenas os A_ρ e não suas derivadas. Do caráter tensorial de $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ e sendo A_ρ um quadrivetor de escolha arbitrária, resulta que $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ é um tensor. Dessa forma chega-se ao que se conhece como o tensor de Riemann-Christoffel.

A importância matemática desse tensor tem uma razão muito especial. Quando o contínuo é constituído de tal modo que existe um sistema de coordenadas em relação ao qual os $g_{\mu\nu}$ são constantes, então todos os $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ se reduzem a zero. Assim, se o sistema de coordenadas original é substituído por um novo sistema, arbitrário (por exemplo, em rotação ou acelerado), os $g_{\mu\nu}$ com relação a este já não serão constantes. Mas o caráter tensorial de $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ arrasta consigo a consequência dessas componentes continuarem sendo todas nulas no sistema de referência arbitrário. O tensor de Riemann identicamente nulo é assim uma condição necessária para se obter a constância dos $g_{\mu\nu}$ mediante uma escolha apropriada do sistema de referência.

⁷Isso se deve ao fato de que todos esses termos são simétricos em σ e τ .

Contraindo [2.7] em relação aos índices τ e ρ , obtém-se o tensor covariante de segunda ordem

$$\left. \begin{aligned} B_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ & \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu & \alpha \\ & \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu & \beta \\ & \alpha \end{matrix} \right\} \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ & \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Einstein adota um sistema de coordenadas de tal forma que $\sqrt{-g} = 1$, por isso o termo $S_{\mu\nu}$ da [2.8] se anula, e isso reduz o tensor $B_{\mu\nu}$ a $R_{\mu\nu}$. Esse tensor como enunciado em [2.8] é conhecido como o tensor de Ricci e desempenha um papel fundamental na construção das equações de campo.

Observação: A restrição imposta por Einstein sobre o determinante do tensor métrico fundamental ($\sqrt{-g} = 1$) não é necessária, e foi deixada de lado posteriormente. Ela é incompatível até mesmo com o espaço-tempo da relatividade especial, em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

Na verdade, essa restrição tem origem histórica. No artigo publicado por Einstein e Grossmann em 1913, como vimos, os autores impuseram restrições às possíveis transformações de coordenadas. Em trabalhos posteriores, Einstein utilizou outras restrições diferentes, para conseguir obter equações que lhe pareciam adequadas. Na seqüência de comunicações apresentada no final de 1915 Einstein impôs que o jacobiano das transformações entre dois sistemas de coordenadas deveria ser igual a 1, o que conduz à invariância de $\sqrt{-g}$ (EINSTEIN, 1915, p. 99). Isso simplificou bastante muitas fórmulas. Mais adiante, ele investigou a possibilidade de fazer $\sqrt{-g} = 1$ mas notou que uma consequência dessa escolha seria que o escalar T de Von Laue (o traço $T = T^\mu_\mu$ do tensor $T_{\mu\nu}$ de momento-energia-tensão da matéria, que é proporcional à densidade própria de energia) deveria ser sempre nulo e, portanto, rejeitou essa possibilidade. Ao mesmo tempo, a dedução que levava a esse resultado impunha uma condição sobre as coordenadas permitidas (EINSTEIN, 1915, p. 105).

No entanto, em um adendo ao mesmo trabalho, Einstein insistiu na possibilidade de utilizar a relação $\sqrt{-g} = 1$, com a seguinte justificativa: o tensor de momento-energia-tensão da matéria tem um traço não nulo; mas o tensor correspondente do campo eletromagnético tem um traço igual a zero. Supondo que a matéria tenha uma constituição eletromagnética, Einstein sugeriu que $T = T^\mu_\mu$

fosse sempre nulo (EINSTEIN, 1915, p. 108). Nesse adendo, Einstein termina por concluir que pode (e deve) utilizar a relação $\sqrt{-g} = 1$ (EINSTEIN, 1915, p. 110). Por fim, na última comunicação do final de 1915, Einstein simplesmente *utiliza* essa restrição para simplificar as equações sem discutir as consequências físicas dessa escolha (EINSTEIN, 1915, p. 118).

Note-se, portanto, que a justificativa apresentada para a relação $\sqrt{-g} = 1$ era muito problemática.

No artigo de 1916, Einstein introduziu as condições de que o Jacobiano das transformações deve ser 1 e que $\sqrt{-g} = 1$ afirmando que isso não reduziria a generalidade da teoria, mas serviria apenas para simplificar as expressões (EINSTEIN, 1916, p. 167). Eddington discutiu o significado dessa escolha e preferiu não adotá-la (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, pp. 109-112).

2.5 A descoberta da lei einsteiniana da gravitação

O artigo de 1916 introduz a equação covariante do campo gravitacional de uma forma muito particular e que é diferente da que se tornou mais comum depois. Essa segunda parte do artigo tem a seguinte seqüência:

- Discussão sobre o movimento geodésico de uma partícula (§13).
- As equações do campo gravitacional em uma região sem matéria (§14).
- Utilização de uma função Hamiltoniana e discussão de momento e energia no campo gravitacional, introduzindo o pseudo-tensor de energia-momento do campo (§15).
- As equações do campo gravitacional na presença de matéria (obtidas a partir das considerações sobre energia) e nova discussão sobre as leis de conservação (§§16-18).
- Equações para fluidos e campo eletromagnético no campo gravitacional (§§19-20).
- Comparação entre o campo gravitacional newtoniano e soluções aproximadas das equações de campo (§21).
- Dedução de consequências da teoria: deflexão da luz, precessão do periélio de Mercúrio (§22).

Nessa forma de apresentação da teoria, discussões sobre energia e sobre o pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional têm um papel fundamental.

2.5.1 Equações do campo gravitacional no vácuo

A primeira seção dessa parte do artigo (§13) não introduz nenhum elemento novo importante, pois a equação da geodésia e sua interpretação como o movimento de um ponto material no campo gravitacional já havia sido introduzida antes (§9 do artigo), como vimos.

A seção seguinte (§14) discute como se pode determinar o tensor métrico (que representa o campo gravitacional) em uma região sem matéria (vácuo). Embora o artigo de 1916 não deixe isso claro, Einstein estava se baseando em uma analogia com a equação de Laplace da teoria newtoniana da gravitação, que estabelece condições que devem ser satisfeitas pelo potencial gravitacional no vácuo:

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}^2\varphi = 0$$

ou, escrevendo em coordenadas cartesianas:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{dx^2} + \frac{\partial^2\varphi}{dy^2} + \frac{\partial^2\varphi}{dz^2} = 0$$

Como as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são interpretadas por Einstein como potenciais gravitacionais, ele tinha a expectativa de que, na teoria da relatividade geral, houvesse uma equação análoga envolvendo derivadas segundas (e primeiras) do tensor métrico (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 256). Ou seja: ele esperava que houvesse algum tensor G que fosse calculado apenas a partir do tensor métrico, por derivação, e que fosse nulo no vácuo.

Talvez Einstein tenha pensado primeiramente em utilizar uma generalização tensorial de $\Delta\varphi = \vec{\nabla}^2\varphi = 0$, exigindo que a derivada covariante de segunda ordem do tensor métrico fosse nula (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 259). No entanto, a derivada covariante do tensor métrico é *idêntica* a zero, para qualquer métrica compatível com uma conexão afim do espaço-tempo, por isso tal tipo de generalização não introduzia nenhuma consequência nova e não podia ser uma generalização de $\Delta\varphi = \vec{\nabla}^2\varphi = 0$. Por isso, em 1913 Einstein afirmou:

O escalar Laplaciano $\Delta\varphi$ é obtido do escalar φ formando-se a expansão [gradiente] deste e então o operador interno [a divergência] deste. Ambas operações podem ser generalizadas de tal modo que elas podem ser realizadas em qualquer tensor de ordem arbitrariamente mais alta, permitindo ao mesmo tempo uma substituição arbitrária das variáveis básicas. Mas essas operações degeneram se forem aplicadas ao tensor fundamental $g_{\mu\nu}$. A partir daí segue-se que as equações

buscadas serão covariantes apenas em relação a um grupo particular de transformações, grupo este que é por enquanto desconhecido para nós. (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 160)

No caso da teoria da relatividade especial (que é válida no vácuo e na ausência de campo gravitacional), Einstein sabia que o tensor métrico podia ter a forma minkowskiana com todos os termos constantes. Nesse caso, evidentemente, qualquer tensor formado a partir das derivadas do tensor métrico seria nulo. Em particular, o tensor de Riemann-Christoffel $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$, que é formado por uma combinação de derivadas primeiras e segundas do tensor métrico, seria nulo.

No entanto, Einstein considera que uma equação do tipo $B_{\mu\sigma\tau}^\rho = 0$ não seria uma generalização adequada de $\Delta\varphi = 0$, pois nesse caso nunca poderia existir um campo gravitacional no vácuo. De fato, como $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ é um tensor, se todas as suas componentes são nulas em um referencial, elas continuarão a ser nulas em qualquer outro referencial (ou qualquer outro tipo de coordenadas). Se o tensor $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ fosse nulo em uma região *finita* do espaço-tempo, essa região seria “chata”, isto é, equivalente ao espaço-tempo de Minkowsky com todos os $g_{\mu\nu}$ constantes, nessa região. Assim, a equação $B_{\mu\sigma\tau}^\rho = 0$ teria como consequência que o espaço-tempo em uma região sem matéria seria desprovido de campo gravitacional.

Em vez de $B_{\mu\sigma\tau}^\rho = 0$, Einstein vai sugerir uma possibilidade mais fraca: a de que a contração do tensor de Riemann-Christoffel (isto é, o tensor de Ricci) tenha componentes nulas no vácuo, isto é, $G_{\mu\sigma} = B_{\mu\sigma\rho}^\rho = 0$.

Isso nos leva a exigir para o campo gravitacional sem matéria que o tensor simétrico $G_{\mu\nu}$ proveniente do tensor $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ deve se anular. Assim obtemos dez equações para as dez quantidades $g_{\mu\nu}$ que são satisfeitas [também] no caso especial em que todos os $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ se anulam.

[...]

Deve-se assinalar que há apenas um mínimo de arbitrariedade na escolha dessas equações. Pois além de $G_{\mu\nu}$ não existe nenhum outro tensor de segunda ordem formado a partir de $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas, que não contenha derivadas mais elevadas do que a segunda, e que seja linear nessas derivadas. (EINSTEIN, 1916, pp. 186-187)

Einstein utiliza em 1916 o tensor de Ricci em uma forma simplificada, válida apenas quando o determinante de $g_{\mu\nu}$ é igual a 1:

$$G_{\mu\sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0 \quad (\sqrt{-g} = 1)$$

Embora Einstein tenha enfatizado que havia 10 equações para 10 incógnitas, é evidente que as dez equações $G_{\mu\nu}=0$ não podem *determinar* os dez valores de $g_{\mu\nu}$, caso contrário não haveria nenhuma arbitrariedade na escolha das coordenadas utilizadas para descrever um campo gravitacional no vácuo. Na verdade, as dez equações $G_{\mu\nu}=0$ não são independentes, havendo quatro identidades que as relacionam e, por isso, há apenas 6 equações independentes em $G_{\mu\nu}=0$ (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 81).

Quanto à arbitrariedade na escolha da equação $G_{\mu\nu}=0$, é importante adicionar que o traço G do tensor $G_{\mu\nu}$ é um escalar que também depende das derivadas primeiras e segundas de $g_{\mu\nu}$ e, portanto, podemos formar um novo tensor

$$G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \lambda G g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

(onde λ é um escalar), que também obedece às mesmas condições matemáticas. É possível provar que não existe outro tensor mais geral do que este que satisfaça às mesmas condições (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, pp. 81-82).

2.5.2 A rejeição inicial do tensor de Ricci

Quando se apresenta dessa forma a justificativa para a escolha de $G_{\mu\nu}=0$, ela parece razoável e até óbvia. É curioso, no entanto, que Einstein havia *rejeitado* essa equação em 1913.

Em 1912, Grossmann havia sugerido a Einstein alguns candidatos plausíveis para o tensor a ser utilizado na equação do campo gravitacional, incluindo-se entre essas sugestões o tensor de Ricci (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 92).

No “Entwurf”, Grossmann chegou a apontar que a contração do tensor de Riemann-Christoffel - ou seja, o tensor de Ricci, que ele representa por $G_{\mu\nu}$ - poderia entrar na equação do campo gravitacional. No entanto, considerou que esse tensor era inadequado, porque não parece reduzir-se ao laplaciano do potencial gravitacional para o caso de campos fracos estáticos (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 185; NORTON, 1993, p. 801).

Cornelius Lanczos interpreta a rejeição da forma descrita a seguir (LANCZOS, pp. 13-14). Einstein esperava, nessa época, que mesmo na presença de um campo gravitacional a métrica fosse aproximadamente igual à métrica de Minkowski. Utilizando $x^4 = ict$, a métrica de Minkowski pode ser representada por

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

(ou $-g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, dependendo dos sinais da métrica). Assim, Einstein supôs que a métrica na presença de um campo gravitacional seria semelhante a:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + k\gamma_{\mu\nu}$$

onde k seria uma constante muito pequena. No entanto, verificou que era possível satisfazer a condição de que o tensor de Ricci $R_{\mu\gamma}$ seria nulo tomando qualquer função vetorial ϕ_μ e fazendo $\gamma_{\mu\nu} = \phi_{\mu,\nu} + \phi_{\nu,\mu}$. Essa indeterminação fez com que Einstein desistisse, por dois anos, de procurar satisfazer a equação $R_{\mu\gamma} = 0$ e procurasse trabalhar de outra forma a teoria da gravitação (LANCZOS, pp. 13-14).

Assim, no artigo de 1913 Einstein e Grossmann restringiram a teoria a *transformações lineares*, apenas, e procuraram um “tensor” $\Gamma_{\mu\gamma}$ que pudesse representar o campo gravitacional: “Portanto, exigimos que $\Gamma_{\mu\gamma}$ seja um tensor com respeito a transformações lineares arbitrárias” (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 161).

Einstein e Grossmann analisam primeiramente uma expressão do tipo:

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.10)$$

Nessa expressão, $\gamma_{\mu\nu}$ é a expressão que representa $g^{\mu\nu}$.

A expressão acima seria uma generalização do laplaciano $\Delta\varphi$. No entanto, os autores consideraram que essa expressão não era suficientemente geral e depois de uma análise bastante longa (na qual entram considerações sobre conservação de energia), chegaram à expressão (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, pp. 164-165):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} = & \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial X_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\rho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\rho}}{\partial X_\beta} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \left(\gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned}$$

Em 1913 Einstein, com a ajuda de Michele Besso, verificou que a teoria do “Entwurf” não levava ao valor correto para a precessão do periélio de Mercúrio (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 118). Durante uma troca de cartas com Levi-Civita, em 1915, Einstein teve que admitir que a equação básica do “Entwurf” não era covariante. Descobriu também que essa equação era incompatível com a métrica em um sistema de referência em rotação (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 118; ver também JANSSEN, 1999). Havia, portanto, muitos problemas com a teoria de 1913, mas Einstein não sabia como substituir essa fórmula por outra.

No trabalho de 1915 Einstein supôs, inicialmente, que o tensor de Ricci fosse proporcional ao tensor de momento-energia-tensão, com uma constante de proporcionalidade muito pequena:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

Trabalhou, no entanto, apenas com o caso do campo no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) e mostrou que, em primeira aproximação, um campo estático com simetria esférica devia ser equivalente ao dado pela teoria newtoniana. Depois, trabalhando com uma segunda aproximação, notou o aparecimento de efeitos não-newtonianos. As órbitas planetárias deveriam ter um movimento de precessão, e a luz deveria sofrer uma deflexão no campo gravitacional que seria o dobro do efeito que ele próprio havia calculado alguns anos antes (LANCZOS, p. 15). Aparentemente foi por causa de ter obtido essas importantes conseqüências que Einstein adotou o tensor de Ricci, rejeitando o “tensor” $\Gamma_{\mu\gamma}$ do “Entwurf”.

No trabalho de 1916, Einstein se refere à precessão do periélio logo depois de introduzir o tensor de Ricci e afirma: “Este fato, tendo em vista que as equações foram estabelecidas por via puramente matemática a partir do postulado da relatividade geral, constitui, na minha opinião, testemunho convincente de que a teoria é válida do ponto de vista físico” (EINSTEIN, 1916, p. 187).

2.5.3 Equações do campo gravitacional na presença de matéria

No artigo de 1916, depois de discutir as equações de campo no vácuo $G_{\mu\nu} = 0$, Einstein discute as equações de campo na presença de matéria. A apresentação que é feita nesse artigo é completamente diferente da que aparece em obras didáticas de relatividade geral.

Mas antes de apresentar o raciocínio de Einstein, vamos esclarecer a relação, atribuída por Einstein, entre o tensor fundamental e o potencial gravitacional. Relação que fica evidenciada na afirmação feita por D’Abro (D’ABRO, 1950, p. 267-271), de que “se a gravitação deve ser atribuída à curvatura do espaço-tempo, o potencial de Newton φ (um invariante) poderá ser substituído em cada ponto por dez valores separados $g_{\mu\nu}$ definidos no espaço-tempo [...] Onde essas componentes formam um tensor de segunda ordem e o potencial invariante de Newton torna-se um dos $g_{\mu\nu}$ ”.

De fato, ao considerarmos a aceleração de uma partícula inicialmente parada, pela lei da inércia temos um conjunto de quatro equações, uma para cada coor-

denada, da forma:

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(\frac{dx_\alpha}{d\tau} \right) \left(\frac{dx_\beta}{d\tau} \right)$$

onde o tempo próprio τ é dado por $d\tau = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{\gamma}$.

Mas se a partícula estiver inicialmente em repouso, teremos, para o instante inicial, a expressão:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = 0$$

onde $i = 1, 2, 3$. Portanto nesse caso apenas a quarta componente da quadrive-locidade é diferente de zero:

$$\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

e a lei da inércia fica:

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{44}^\mu \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right) \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right) = -\gamma^2 \Gamma_{44}^\mu$$

a qual pode-se escrever simplesmente como

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\mu$$

Agora, substituindo o símbolo de Christoffel pela sua expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^\mu &= g^{\mu\nu} \Gamma_{44,\nu} \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{4\nu}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{\nu 4}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{4\nu}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\nu 4}}{\partial t} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\nu} \right) \end{aligned}$$

Mas se supusermos que o tensor métrico é constante no tempo, os termos do tipo $\frac{\partial g_{4\nu}}{\partial t}$ serão nulos e o símbolo de Christoffel reduzir-se-á para:

$$\Gamma_{44}^\mu = g^{\mu\nu} \Gamma_{44,\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_4}{\partial x_\nu}$$

e portanto

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_4}{\partial x_\nu}$$

Pode-se considerar que $\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\nu}$ é semelhante ao gradiente de um potencial gravitacional, que é um tensor covariante.

Agora comparando com a expressão da física clássica,

$$a_j = -g_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

há uma correspondência

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\nu} \longleftrightarrow -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

e, portanto deve-se ter

$$g_{44} = K - 2\varphi$$

(pode haver uma constante arbitrária)⁸

Uma vez aclarado este especto, a apresentação didática das equações de campo pode ser feita da seguinte maneira:

Na ausência de matéria, como vimos, a equação do campo gravitacional pode ser escrita como

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci. A generalização mais simples, para o caso com matéria, seria:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

De fato, esta forma da equação foi proposta por Einstein no final de 1915 (EINSTEIN, 1915, p. 109).

No entanto, a equação $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$ não é satisfatória, sob o ponto de vista tensorial. O tensor de momento-energia-tensão $T_{\mu\nu}$ tem divergente nulo, e o tensor de Ricci $G_{\mu\nu}$ não tem divergente nulo. Assim, se fizermos o divergente dos dois lados da equação $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$ chegaremos a um absurdo (LANCZOS, p. 15). Para corrigir esse problema, podemos substituir o tensor de Ricci por uma expressão que tem divergente nulo:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

onde G é o traço do tensor de Ricci. Outra forma dessa equação é:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) \quad (2.14)$$

Se aceitarmos as restrições que tinham sido impostas ao lado esquerdo da equação do campo gravitacional, essa é a única equação tensorial razoável que poderia ser sugerida (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, pp. 119-120).

No entanto, Einstein não seguiu essa linha de raciocínio nem no artigo do final de 1915 nem no de 1916. Ele utilizou considerações sobre energia, seguindo os seguintes passos:

⁸Para maiores detalhes ver MARTINS, R. Notas de aula do curso Teoria da Relatividade Geral.

- Utilização de uma função Hamiltoniana e discussão de momento e energia no campo gravitacional, introduzindo o pseudo-tensor de energia-momento do campo (§15).

- As equações do campo gravitacional na presença de matéria (obtidas a partir das considerações sobre energia) e nova discussão sobre as leis de conservação (§§16-18).

Essa forma de apresentação é, novamente, uma herança do “Entwurf” de 1913. Naquele trabalho, Einstein procurou uma generalização da equação de Poisson:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho$$

Como, na teoria da relatividade especial, as propriedades mecânicas da matéria já não eram mais descritas por um escalar e sim por um tensor (o tensor de momento-energia-tensão $T_{\mu\nu}$, introduzido por Max von Laue), Einstein esperava que a generalização da equação de Poisson fosse do tipo:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \kappa\Theta_{\mu\nu}$$

onde κ seria uma constante e $\Gamma_{\mu\nu}$ seria um tensor de segunda ordem, obtido a partir do tensor métrico fundamental $g_{\mu\nu}$ e $\Theta_{\mu\nu}$ é o tensor de momento-energia-tensão sob forma contravariante (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 160). Já vimos que, no “Entwurf”, Einstein examina e rejeita o tensor de Ricci como candidato a $\Gamma_{\mu\nu}$.

Para encontrar um tensor adequado, Einstein analisa as propriedades do tensor $\Theta_{\mu\nu}$. As leis de conservação de momento e de energia da relatividade especial podem ser expressas em forma tensorial muito simples, $\Theta_{\mu\nu\lambda}=0$, onde $\Theta_{\mu\nu\lambda}$ é a derivada covariante do tensor $\Theta_{\mu\nu}$. Desenvolvendo a derivada covariante desse tensor, temos:

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot g_{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu} = 0 \quad (2.15)$$

Einstein guiou-se, no “Entwurf”, pela forma desta equação, procurando obter para $\Gamma_{\mu\nu}$ uma expressão que tivesse propriedades semelhantes, até chegar ao resultado:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} = & \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\rho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \left(\gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} \right) \end{aligned}$$

Einstein dividiu essa expressão em duas, às quais deu nomes diferentes:

$$\Delta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\rho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} \quad (2.16)$$

que tem uma forma semelhante à do divergente de um gradiente de $\gamma_{\mu\nu}$, e

$$-2\kappa\vartheta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\rho} \left(\gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.17)$$

Portanto, o tensor $\Gamma_{\mu\nu}$ foi decomposto em duas partes:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} - \kappa\vartheta_{\mu\nu}$$

Note-se que o tensor $\Gamma_{\mu\nu}$, que havia sido obtido unicamente a partir da métrica, tem agora uma parte onde aparece a constante gravitacional. No entanto, essa constante gravitacional não existe, na verdade, na expressão de $\Gamma_{\mu\nu}$ que foi apresentada acima. Ela foi introduzida de um modo artificial, durante a decomposição de $\Gamma_{\mu\nu}$ em duas partes.

A idéia que parece estar por trás dessa análise de Einstein é a seguinte: ele pensou que o próprio campo gravitacional deveria ter momento e energia, como o campo eletromagnético. Assim, mesmo na ausência de matéria (no vácuo), o espaço-tempo correspondente a um campo gravitacional deveria ter momento e energia; e o próprio momento-energia do campo gravitacional seria origem do campo. No caso do campo eletromagnético, a densidade de energia é proporcional ao quadrado dos campos elétrico e magnético. No caso do campo gravitacional, como os $g_{\mu\nu}$ (ou, em forma contravariante, $\gamma_{\mu\nu}$) representam o potencial gravitacional, suas derivadas em relação às coordenadas (que são alguma coisa parecida com o gradiente) devem representar o campo gravitacional, por isso é razoável esperar que a densidade de energia do campo gravitacional apareça sob a forma de expressões quadráticas das derivadas do $g_{\mu\nu}$. Assim, no vácuo (quando o tensor de momento-energia-tensão da matéria é nulo), a equação do campo gravitacional deveria se reduzir a alguma coisa do tipo

$$\Delta_{\mu\nu} = \text{“laplaciano” de } g_{\mu\nu} = \kappa \cdot \vartheta_{\mu\nu} = \kappa \cdot \text{“tensor energia-momento do campo”}$$

onde $\vartheta_{\mu\nu}$ é uma expressão que pode ser interpretada como um tensor de momento-energia-tensão do campo gravitacional.

Utilizando essa análise, Einstein transformou a equação

$$\Gamma_{\mu\nu} = \kappa\Theta_{\mu\nu}$$

na seguinte forma (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 165):

$$\Delta_{\mu\nu} - \kappa\vartheta_{\mu\nu} = \kappa\Theta_{\mu\nu} \quad \therefore \quad \Delta_{\mu\nu} = \kappa(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})$$

Um aspecto interessante dessa equação, indicado por Einstein, era que os divergentes dos dois lados da equação eram iguais entre si.

Sob forma covariante, a equação podia ser escrita (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 166):

$$-D_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$$

onde $t_{\mu\nu}$ é a forma covariante de $\vartheta_{\mu\nu}$.

Ao longo da dedução apresentada no “Entwurf”, Einstein dá o nome de “tensor contravariante de energia-tensão do campo gravitacional” à expressão $\vartheta_{\mu\nu}$ (EINSTEIN & GROSSMANN, 1913, p. 164 e seguintes) e o trata realmente como um tensor. No entanto, $\vartheta_{\mu\nu}$ *não é um tensor*, ou seja, não satisfaz a definição de tensor para transformações gerais de coordenadas. É um “pseudo-tensor”.

Um dos motivos que levou Einstein a restringir o tipo de sistemas coordenadas válidas em 1913 foi justamente a tentativa de formular a lei da conservação da energia na presença do campo gravitacional (HOEFER, 1994, p. 299). O “tensor” $t_{\mu\nu}$ de momento-energia do campo gravitacional só obedecia às transformações tensoriais para certa classe de transformações de coordenadas (transformações lineares) e podia ser anulado para outro tipo de transformações (EARMAN & GLYMOUR, 1978, p. 263).

No primeiro semestre de 1915 Einstein e Levi-Civita iniciaram uma intensa correspondência sobre alguns aspectos do cálculo tensorial relevantes para o desenvolvimento da teoria da gravitação (GOODSTEIN, 1983). Um dos aspectos da teoria de Einstein que Levi-Civita criticou foi o uso do “tensor” $t_{\mu\nu}$. No entanto, Einstein manteve sua convicção sobre a importância desse pseudo-tensor até a formulação final da sua teoria da gravitação.

No artigo de 1916, Einstein introduz o “tensor” de tensão-energia do campo gravitacional de uma forma diferente, impondo a condição $\sqrt{-g}=1$ e partindo de um princípio variacional em que utiliza um hamiltoniano com a forma (EINSTEIN, 1916, p. 188):

$$H = g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$$

Einstein mostra, então, que o princípio variacional colocado sob a forma

$$\delta\{\int H d\tau\} = 0$$

corresponde ao par de equações (EINSTEIN, 1916, p. 190):

$$\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

$$-2\kappa t_\beta^\alpha = g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H$$

A segunda dessas equações define a grandeza t_σ^α e a primeira é algo parecido com um divergente nulo, como na expressão da conservação de energia-momento da matéria. A expressão de t_σ^α pode ser desenvolvida sob a forma:

$$\kappa t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2} \delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\beta - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\beta$$

Logo em seguida, Einstein comenta: “É de salientar que t_σ^α não é um tensor, mas que, apesar disso, a equação (49) é válida em todos os sistemas de coordenadas para os quais $\sqrt{-g}=1$ ” (EINSTEIN, 1916, p. 190).

Depois, Einstein mostra que, na ausência de matéria, a equação

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0 \quad (\text{para } \sqrt{-g} = 1) \quad (2.19)$$

pode ser escrita de outra forma (EINSTEIN, 1916, p. 191):

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha) = -\kappa \left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\mu^\sigma t \right) \quad (\text{para } \sqrt{-g}=1)$$

Como essa equação é válida para o vácuo, Einstein propõe então generalizá-la para um espaço com matéria, colocando do lado direito da equação a soma dos tensores de momento-energia-tensão da matéria e do campo gravitacional:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha) = -\kappa \left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\sigma (t + T) \right] \quad (\text{para } \sqrt{-g}=1)$$

Por fim, Einstein mostra que essa relação pode ser expressa como (EINSTEIN, 1916, p. 193):

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (\text{para } \sqrt{-g}=1)$$

Como o lado esquerdo da equação é a forma simplificada do tensor de Ricci $G_{\mu\nu}$, essa equação poderia ser escrita sob formas que são mais familiares atualmente:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

Estas formas, no entanto, não aparecem no artigo de 1916.

Note-se que, na apresentação de 1916, o pseudo-tensor $t_{\mu\nu}$ de energia-momento-tensão do campo gravitacional aparece no meio da dedução e depois desaparece no resultado final.

2.5.4 Limite de campos fracos

Depois de chegar à equação do campo gravitacional, era necessário deduzir consequências dessas equações e compará-las tanto à teoria gravitacional newtoniana quanto aos fenômenos conhecidos, além de prever novos fenômenos. No artigo de 1916, Einstein faz isso nas seções finais do trabalho (§§21-22). A comparação com a teoria newtoniana era essencial, entre outras coisas, para determinar o valor da constante κ da equação de Einstein.

No final de 1915 Einstein analisou o caso do campo gravitacional na ausência de matéria, isto é, $G_{\mu\nu} = 0$, e obteve o campo gravitacional aproximado, no caso de simetria esférica. Em primeira aproximação, o campo é newtoniano, porém surge um desvio da luz no campo gravitacional que é o dobro do que Einstein havia calculado antes (EINSTEIN, 1915, p. 114). Fazendo uma aproximação de segunda ordem, o movimento dos planetas apresenta uma pequena diferença em relação ao movimento newtoniano, e Einstein mostra que isso produz uma precessão do periélio dos planetas que é capaz de explicar a anomalia que havia sido observada (principalmente no caso de Mercúrio) (EINSTEIN, 1915, p. 116). As deduções apresentadas no artigo de 1916 são semelhantes às do final de 1915.

Capítulo 3

Modelos do universo

3.1 As condições de contorno do campo gravitacional

Em 1917 Einstein publicou o seu primeiro trabalho sobre cosmologia, onde tentava apresentar uma descrição relativística do universo como um todo (EINSTEIN, 1917). Uma grande parte do trabalho é dedicada a descrever tentativas que não deram certo. Depois, Einstein apresenta uma modificação das equações do campo gravitacional e, no final do artigo, o modelo cosmológico “cilíndrico”.

A motivação do artigo, conforme a exposição de Einstein, é estabelecer as condições de contorno (ou condições-limite) para o uso da equação do campo gravitacional. Quando Einstein e, depois, Schwarzschild estudaram o campo de um planeta ou estrela, impuseram a condição de simetria esférica e também a condição de que a uma grande distância do centro o tensor métrico tendesse aos valores da relatividade especial. No entanto, em 1917 Einstein afirmou que essa condição não era evidente (EINSTEIN, 1917, p. 225) e se preocupou em analisar o limite do campo gravitacional quando a distância à matéria tende a infinito. Por que ele tinha essa preocupação?

Em 1913 Einstein considerava que a constância das componentes do tensor métrico (como no caso da métrica de Minkowski) correspondiam à ausência de campo e sua não-constância à presença do campo (HOEFER, 1994, p. 295). No entanto, em 1915, em uma carta escrita a Lorentz, Einstein defendeu a idéia de que todas as componentes do campo gravitacional se anulam no infinito (HOEFER, 1994, p. 303). É difícil saber se ele estava se referindo, nesse caso, às componentes do tensor métrico ou aos símbolos de Christoffel, mas provavelmente

estava pensando no tensor métrico. Nesta época, Einstein estava fortemente influenciado pelo pensamento de Mach e acreditava que as propriedades inerciais de um corpo eram devidas à interação desse corpo com o resto do universo. Um corpo distante de todos os outros (“no infinito”) não teria propriedades inerciais. No próprio trabalho de 1917 essa idéia está presente, pois Einstein afirma:

Em uma teoria de relatividade, conseqüentemente, não pode existir inércia *em relação ao “espaço”*, mas somente inércia das massas *em relação umas às outras*. Portanto, se eu colocar uma massa a uma distância espacial suficientemente grande de todas as outras massas do Universo, a sua inércia deverá desvanecer-se. (EINSTEIN, 1917, p. 229)

O espaço-tempo de Minkowski e a solução de Schwarzschild (que tinha um espaço-tempo minkowskiano como limite no infinito) mostravam a existência de uma estrutura do espaço-tempo mesmo em condições sem campo gravitacional, e isso parecia estar em conflito com o princípio de Mach (HOEFER, 1994, p. 288). Einstein esperava que a inércia de um corpo tendesse a zero quando ele estivesse muito afastado de qualquer outro corpo. Como essas propriedades inerciais, na relatividade geral, são representadas pela métrica, ele esperava que o tensor métrico se tornasse degenerado (coeficientes iguais a zero ou infinito) quando a distância tendesse a infinito, em vez de tender aos valores da métrica de Minkowski (NORTON, 1993, p. 806).

De Sitter comentou, em 1916, que uma teoria na qual a métrica tende aos valores da relatividade restrita quando a distância tende a infinito seria uma teoria na qual a inércia não é relativa. Além disso, apontou que essa métrica não é invariante e que portanto apenas para uma classe muito restrita de sistemas de referência as condições de contorno podem ser estas (DE SITTER, 1916-17, pp. 181-183). Foi aparentemente motivado por esses comentários de De Sitter que Einstein tentou encontrar uma métrica limite que fosse invariante.

Em novembro de 1916, em uma carta escrita a De Sitter, a posição de Einstein se torna mais clara: ele supunha que a ausência de campo gravitacional deveria ter como conseqüência a ausência de inércia de uma partícula no infinito (HOEFER, 1994, p. 307). Ele também acreditava que as condições de contorno, no infinito, deveriam ser invariantes sob mudanças de coordenadas, e a métrica de Minkowski obviamente não obedece a essa condição (HOEFER, 1994, pp. 309-310). De acordo com um documento de De Sitter, Einstein estaria pensando em

uma métrica limite do tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty^2 \end{pmatrix}$$

De Sitter havia sido um dos primeiros divulgadores da teoria de Einstein na Inglaterra, durante a época da primeira guerra mundial, com a ajuda de Eddington (HOEFER, 1994, p. 305). Embora ele fosse favorável, de modo geral, à teoria da relatividade geral, já tinha manifestado em 1916 uma desconfiança em relação à idéia da relatividade da inércia (NORTON, 1993, p. 814).

Em um trabalho popular escrito em 1917, Einstein escreveu: “Um campo gravitacional puro poderia ter sido descrito em função dos g_{ij} (como funções das coordenadas), por solução das equações gravitacionais. Se imaginarmos que removemos o campo gravitacional, isto é, as funções g_{ij} , não permanece um espaço do tipo (1) [espaço-tempo de Minkowski], mas absolutamente *nada*, e também nenhum ‘espaço topológico’. Pois as funções g_{ij} descrevem não apenas o campo, mas ao mesmo tempo as propriedades topológicas e a estrutura métrica da multiplicidade” (EINSTEIN, *Relativity: the special and general theory*, p. 415).

Assim, Einstein não considera o espaço-tempo de Minkowski como um espaço sem campo, mas como um caso especial de campo no qual o potencial gravitacional não depende das coordenadas. “Não pode existir espaço nem qualquer parte do espaço sem potenciais gravitacionais; pois estes conferem ao espaço suas propriedades métricas, sem as quais ele não pode ser imaginado de forma nenhuma” (Einstein, *apud* NORTON, 1993, p. 805).

Foi dentro desse contexto conceitual que Einstein começou a pensar sobre a métrica nos limites do universo.

3.2 A estrutura do universo

Para podermos compreender o ponto de partida de Einstein, é necessário conhecer aquilo que se pensava sobre a estrutura do universo, nessa época.

Do século XVII até o início do século XX praticamente todos os astrônomos pensavam que o universo conteria um único grupo de estrelas (a nossa galáxia), que poderia se estender até distâncias infinitas ou ser limitado. No entanto, no século XVIII alguns pensadores como Thomas Wright e Immanuel Kant sugeriram a possibilidade de diversos grupos de estrelas, ou “universos-ilha” (NORTH,

The measure of the universe, p. 4). No início do século XX estimava-se o tamanho de nossa galáxia em aproximadamente 100 mil anos luz. Pensava-se que as “nebulosas” [o nome que era dado às galáxias, na época] estavam dentro desses limites de distância.

Até 1910 apenas uma minoria de astrônomos acreditava na existência de grandes sistemas de estrelas fora de nossa galáxia. O universo parecia, assim, constituído por duas partes. Uma era o conjunto de estrelas que formava a Via Láctea. A outra era um espaço vazio, infinito, que jamais seria conhecido (SMITH, 1990, p. 53). Além das estrelas, pensava-se que a nossa galáxia continha muitas nebulosas, de vários tipos. A maioria delas tinha uma estrutura em espiral, que sugeria rotação. Elas eram consideradas pela maioria dos astrônomos como sendo nuvens de matéria em rotação com tamanho semelhante ao de nosso sistema solar, constituindo sistemas estelares em formação (SMITH, 1990, p. 53). Outros acreditavam que eram pequenos grupos de estrelas.

Em torno de 1920 começaram a se acumular evidências de que as nebulosas espirais eram sistemas gigantescos, a grande distância de nossa galáxia e tão grandes quanto ela (NORTH, *The measure of the universe*, p. 13). Uma importante evidência foi proporcionada pela descoberta de estrelas novas e variáveis (cefeidas) em nebulosas espirais, o que permitiu estimar sua distância em milhões de anos-luz.

Vesto Melvin Slipher acreditava que as nebulosas espirais eram sistemas solares em formação e começou a medir seus espectros com o objetivo de compreender a formação do sistema solar (SMITH, 1990, p. 54). Estudando o espectro de Andrômeda, em 1912 ele estabeleceu pela primeira vez a existência de um desvio para o vermelho, indicando uma velocidade de aproximadamente 300 km/s. Em 1914 ele já havia medido as velocidades de 15 nebulosas espirais e quase todas estavam se afastando - algumas delas com velocidades de mais de 1.000 km/s. Isso sugeria que elas não poderiam ser grupos de estrelas presos gravitacionalmente à nossa galáxia.

As observações feitas por Hubble em 1923 e 1924 mostraram a existência de estrelas variáveis (cefeidas) em nebulosas espirais. Pela medida do período de variação dessas estrelas era possível compará-las com estrelas mais próximas, permitindo medir suas distâncias e estabelecendo claramente que estavam fora de nossa galáxia (SMITH, 1990, p. 55). Estudando Andrômeda, concluiu que estava a uma distância de aproximadamente um milhão de anos-luz (cem vezes o tamanho estimado de nossa galáxia, na época).

A própria palavra “universo” mudou de significado, no início do século XX. Em

1914, quando Eddington publicou seu livro *Stellar movements and the structure of the universe*, ele estava estudando apenas a dinâmica das estrelas dentro da nossa galáxia (SMITH, 1990, p. 52). No entanto, já nessa época Eddington começou a interpretar o universo de outra forma, aceitando que as nebulosas espirais eram outros mundos semelhantes à Via Láctea (McCREA, 1991, p. 67).

Quando Einstein começou a desenvolver seu modelo cosmológico ele imaginava o universo como um conjunto de *estrelas*, pois não adotava ainda a idéia de galáxias imensas, espalhadas pelo espaço. Baseando-se nos estudos sobre a nossa galáxia, ele provavelmente pensava que a maior parte do universo era vazia e que existiria apenas uma região cheia de estrelas (como uma nuvem), em um espaço infinito.

Um modelo que ele parece ter explorado é o de um sistema de estrelas em movimento caótico, como as partículas de um gás, em um estudo de equilíbrio e obedecendo a uma distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann (BERNSTEIN & FEINBERG, *Cosmological constants*, p. 8). Supondo que essas estrelas formavam uma nuvem finita, era razoável pensar que a densidade de matéria tenderia a zero quando a distância ao centro do universo tendesse a infinito.

Antes de tratar esse modelo utilizando a teoria relativística da gravitação, Einstein faz algumas considerações a respeito da física clássica.

3.3 Problemas cosmológicos da gravitação newtoniana

A concepção de universo existente na época de Newton era a de um espaço infinito com estrelas (e talvez planetas) espalhadas de forma mais ou menos uniforme. Como a força gravitacional se estende a uma distância infinita, surgia o problema de saber por que as estrelas não se aglomeram todas, por causa de sua atração mútua. Em uma troca de cartas que manteve com Richard Bentley, em 1692, Newton esclareceu que essa aglomeração seria realmente a expectativa mais simples, mas que Deus poderia ter distribuído as estrelas pelo espaço de tal modo que elas ficassem em equilíbrio (instável) para sempre (NORTON, 1999, pp. 288-289). Bentley entendeu que esse equilíbrio de cada estrela seria causado por forças infinitas dirigidas para todos os lados, e que *como todos os infinitos são iguais*, essas forças se anulariam. Newton esclareceu que tal raciocínio era inadequado, porque nem sempre se pode supor que dois infinitos são iguais. Se as estrelas do universo estivessem na situação de equilíbrio e fosse adicionada uma

pequena força (finita) em alguma direção, continuariam a existir forças infinitas para todos os lados, mas agora o equilíbrio se romperia, porque um dos infinitos seria maior do que os outros (NORTON, 1999, pp. 290-291).

Uma das objeções à teoria de um universo estendendo-se infinitamente em equilíbrio foi feita no final do século XIX por Hugo Seeliger e Carl Neumann.

Em um artigo publicado em 1895, Seeliger indicou que, de acordo com a teoria newtoniana da gravitação, se a densidade média da matéria no universo for finita (e o universo infinito), o potencial gravitacional tenderia a infinito. Além disso, a força resultante sobre um ponto poderia ser calculada de diferentes maneiras, levando a resultados contraditórios dependendo do modo de fazer a integração sobre todo o espaço. As forças de maré também sofreriam anomalias do mesmo tipo (NORTON, 1999, pp. 274-279). Esses resultados lhe pareceram indicar um problema fundamental na física newtoniana. Ele considerou duas possibilidades de escapar do problema: ou a quantidade total de matéria do universo é finita, ou a lei da atração gravitacional deveria ser mudada. Ele optou pela segunda alternativa, propondo que a força gravitacional newtoniana sofresse uma redução exponencial com a distância:

$$F = -Gmm' \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}$$

Introduzindo esse fator exponencial, era possível manter um universo infinito com densidade uniforme, pois todas as integrais convergiam (NORTON, 1999, p. 294). Seeliger chegou a sugerir que essa alteração na lei de Newton poderia explicar a precessão anômala do periélio de Mercúrio, dando a λ o valor de 0,000 000 38 (em unidades astronômicas).

Após a publicação do artigo de Seeliger, Carl Neumann alegou que já havia estudado esse problema 20 anos antes. Há fortes dúvidas de que isso de fato tivesse ocorrido (NORTON, 1999, pp. 281-282), mas Seeliger não contestou a prioridade de Neumann. Em um livro publicado em 1896 Neumann discutiu o problema de um modo mais simples, indicando a existência de uma indeterminação no cálculo das forças que uma partícula sofreria em um universo infinito com distribuição uniforme de matéria. Ele propôs como solução para esse problema que o potencial gravitacional newtoniano (e não a força) fosse multiplicado por um fator $e^{-\alpha r}$ que diminuísse exponencialmente com a distância.

$$\varphi = -A \frac{e^{\alpha r}}{r}$$

Introduzindo essa modificação, a integral do potencial gravitacional se mantinha finito (NORTH, *The measure of the universe*, p. 17).

A alteração do potencial proposta por Neumann leva a uma força um pouco diferente da de Seeliger:

$$F = -Gm_1m_2 \frac{(1 + \alpha r)}{r^2} e^{-\alpha r}$$

Neumann também deduziu a alteração que seria necessário introduzir na equação de Poisson por causa dessa modificação, obtendo (NORTON, 1999, p. 298):

$$\nabla^2 \varphi - \alpha^2 \varphi = 4A\pi\varepsilon$$

onde ε é a densidade da matéria e A é a constante gravitacional G .

3.4 Einstein e o problema clássico

No artigo sobre cosmologia de 1917 Einstein estuda dois modos de resolver o problema da física newtoniana. Para evitar que o potencial gravitacional se tornasse infinito, poderíamos considerar que a densidade de matéria fosse decrescendo de um ponto central para a periferia (EINSTEIN, 1917, p. 226). Desde que a densidade média tendesse a zero mais rapidamente do que $\frac{1}{r^2}$, o potencial tenderia a um valor finito.

No entanto, Einstein considerou que essa solução seria insatisfatória porque corpos celestes com uma velocidade finita poderiam se afastar indefinidamente, e a luz também se perderia no infinito¹. O sistema de estrelas iria, portanto, se desfazendo. Ao desenvolver o seu argumento, Einstein compara o sistema de estrelas a um gás que obedecesse à distribuição de Boltzmann (EINSTEIN, 1917, p. 227).

Em 1922, alguns anos depois da publicação desse artigo de Einstein, Franz Selety mostrou que o argumento de Einstein não era conclusivo (NORTON, 1999, pp. 309-312). Considerando que a densidade diminuía com $\frac{1}{r^2}$, Selety mostrou que era possível ter um gás em equilíbrio, com temperatura constante, obedecendo à distribuição de Boltzmann. O argumento de “evaporação” do universo podia assim ser evitado. Nesse tipo de situação, o potencial gravitacional cresceria de forma logarítmica com a distância ao centro.

Einstein supõe, no artigo de 1917, que o potencial no infinito não poderia ser grande, porque se fosse observaríamos algumas estrelas se movendo com alta velocidade (EINSTEIN, 1917, p. 227). A idéia básica seria que as estrelas mais

¹Einstein se refere ao infinito com se fosse um lugar, neste artigo, como foi apontado por NORTH, *The measure of the universe*, p. 71.

distantes poderiam “cair” para o centro e, se a diferença de potencial fosse muito grande, elas poderiam atingir velocidades altíssimas. Como isso não ocorre, o potencial no infinito não pode ser grande.

Este argumento não é satisfatório, porque supõe que uma estrela pudesse “cair” para o centro sem sofrer trocas de energia com outras estrelas. Evidentemente, à medida que fosse se aproximando do centro e atravessando a “nuvem” de estrelas, essa estrela sofreria desvios e tenderia a adquirir a mesma velocidade média que as outras estrelas.

Embora o argumento de Einstein contra o universo clássico fosse inválido, ele pensava que era válido, e por isso discutiu a possibilidade de alterar a lei da atração gravitacional (EINSTEIN, 1917, p. 227-228). Sem se referir aos trabalhos de Seeliger e Neumann, ele indica que poderíamos substituir a equação de Poisson $\Delta\phi = 4\pi K\rho$ por:

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K\rho$$

Essa expressão é equivalente à de Neumann.

Com essa alteração, seria possível imaginar um universo infinito, com uma distribuição uniforme de matéria (densidade constante ρ_0) e com potencial gravitacional ϕ constante, pois se ϕ é constante o seu laplaciano se anula, e para satisfazer a equação acima basta fazer:

$$\phi = -4\pi K \frac{\rho_0}{\lambda}$$

Assim, uma alteração na lei de Newton da gravitação resolveria o problema dos potenciais infinitos. Note-se, também, que a introdução de um potencial constante faz com que a força ($-\nabla\phi$) sobre cada partícula seja nula e, por isso, esse universo é estável. Note-se que a força de uma partícula sobre outra, no entanto, é sempre *atrativa*, qualquer que seja a distância - ou seja, o termo $-\lambda\phi$ não introduz uma repulsão ou qualquer força que contrabalance a atração gravitacional.

Em um livro popular que escreveu nessa mesma época, Einstein se refere a Seeliger como o autor da crítica à teoria newtoniana (EINSTEIN, *Relativity - the special and the general theory*, p. 105).

No entanto, é claro que Einstein não estava procurando resolver o problema clássico e sim encontrar um modo de descrever o universo que fosse compatível com a teoria da relatividade geral. Essa introdução servia apenas para mostrar que havia um problema na física clássica e para explicar duas tentativas de solução (universo com massa finita concentrada em torno de um ponto ou mudança nas

equações do campo gravitacional) que são iguais às que ele próprio tentou, dentro da teoria da relatividade geral.

3.4.1 O potencial gravitacional relativístico no infinito

A primeira possibilidade explorada por Einstein, no artigo de 1917, é a de que o universo contenha matéria apenas em torno de uma região central. Nesse caso, ele esperava que uma partícula colocada a uma grande distância desse centro não poderia ter inércia, já que a inércia era o resultado da interação da partícula com o resto do universo.

Para poder exprimir essa condição de forma matemática, Einstein introduziu o quadrivetor momento energia em forma covariante (EINSTEIN, 1917, p. 230):

$$m\sqrt{-g}g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}$$

Essa fórmula não é explicada no artigo de Einstein, e não é a generalização mais natural da expressão utilizada na relatividade especial. De fato, na relatividade especial temos, usando o formalismo moderno:

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{ds}$$

onde m é a massa própria de uma partícula e p^μ é o quadrivetor de momento-energia. Como p^μ é um tensor (no caso, um quadrivetor contravariante), essa equação é válida em qualquer sistema de coordenadas e pode ser mantida sem modificação alguma na relatividade geral. Pode-se também escrever esse tensor em forma covariante:

$$p_\nu = g_{\mu\nu}p^\mu = mg_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}$$

mas não há motivo para multiplicar essa expressão por $\sqrt{-g}$.

Einstein supõe, em seguida, que a uma grande distância da região central do universo a métrica poderia ser escrita sob a forma:

$$ds^2 = -A[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2] + B(dx_4)^2$$

e, portanto, as componentes do momento de uma partícula com massa própria m com baixa velocidade ($ds \cong \sqrt{B}dx_4$) seriam dadas por expressões do tipo:

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4}$$

Portanto, o coeficiente $\frac{mA}{\sqrt{B}}$ tem um papel semelhante ao da massa inercial. Supondo que a inércia (e também o momento) de uma partícula desapareça

quando a distância tende a infinito, seria necessário que $\frac{A}{\sqrt{B}}$ tendesse a zero. Einstein impôs ainda a condição:

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B}$$

e portanto $B = \frac{1}{A^3}$ e $\frac{A}{\sqrt{B}} = A^{5/2}$. Como $\frac{A}{\sqrt{B}}$ deve tender a zero, Einstein concluiu que A deveria tender a zero, e B a infinito.

Note-se que há vários pontos problemáticos nessa dedução: (1) o uso do quadrivetor momento-energia em forma covariante - por que não em forma contravariante? (2) a multiplicação do quadrivetor momento-energia por $\sqrt{-g}$ e (3) a exigência de que $\sqrt{-g}$ seja igual a 1.

De qualquer forma, Einstein conclui que a métrica no infinito deveria ser degenerada, adquirindo uma forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Ele comenta: “Uma tal degenerescência dos coeficientes $g_{\mu\nu}$ apresenta-se, deste modo, como uma exigência do postulado de que toda inércia é relativa. A mesma exigência implica também que a energia potencial $m\sqrt{B}$ se torne infinitamente grande no infinito” (EINSTEIN, 1917, p. 230).

Einstein tentou analisar as conseqüências de uma métrica desse tipo, com a ajuda do matemático J. Grommer, mas concluiu que ela era inaceitável. Ele supunha que, no infinito, a densidade de matéria seria nula e, portanto, o tensor de momento-energia deveria ser nulo. Mas, ao mesmo tempo, a componente T^{44} deveria tender a infinito, o que era impossível (EINSTEIN, 1917, p. 232).

Um dos motivos que o levou a abandonar essa métrica degenerada foi que diferenças de potencial muito grandes (correspondendo aos coeficientes da métrica que tendiam a infinito) produziriam velocidades muito grandes das estrelas mais distantes, e isso não era observado (HOEFER, 1994, p. 312).

Há um comentário feito por De Sitter que indica uma idéia bastante estranha que Einstein explorou nessa época:

O próprio Einstein mostrou que é insustentável a hipótese anteriormente mantida por Einstein, e negada por mim, de que seria possível obter valores dos $g_{\mu\nu}$ que degenerariam a um conjunto invariante no infinito, utilizando as equações [do campo gravitacional] e por meio

de massas muito grandes a distâncias muito grandes. (DE SITTER, 1917, p. 1222)

Portanto, parece que Einstein chegou a pensar em uma densidade de matéria tendendo a infinito, a grandes distâncias do centro do universo.

Rejeitando a métrica degenerada no infinito, Einstein discute outras possibilidades:

- (a) Supor que a métrica no infinito é minkowskiana.
- (b) Desistir de discutir as condições da métrica no infinito.

Ele rejeita a primeira possibilidade porque essa métrica não é invariante (mudando o sistema de coordenadas, a métrica deixa de ter essa forma) e por ser incompatível com a relatividade da inércia, pois a métrica não seria determinada pela matéria presente (EINSTEIN, 1917, p. 233). Quanto à possibilidade (b), Einstein a rejeita porque não seria uma solução e significaria apenas desistir do problema.

Por fim, depois de discutir essas possibilidades, Einstein apresenta uma mudança de enfoque. Ele sugere que o universo poderia ser espacialmente fechado e, desse modo, não haveria necessidade de discutir as condições no infinito (EINSTEIN, 1917, p. 234).

3.4.2 O universo fechado

Em algum instante no final de 1916 ou início de 1917 Einstein se convenceu de que essas condições limite eram inadequadas e começou a investigar um universo com espaço fechado, de curvatura positiva (HOEFER, 1994, p. 311).

O modelo que Einstein vai introduzir é o de um espaço com curvatura positiva e constante, equivalente a uma hiper-esfera.

Espaços curvos haviam sido introduzidos na matemática em meados do século XIX e, no final do século, alguns autores como William Clifford (1876), Karl Schwarzschild e Simon Newcomb (1877) haviam sugerido a utilização de um espaço curvo na análise de fenômenos físicos (NORTH, *The measure of the universe*, p. 73). Charles H. Hinton publicou a partir da década de 1880 uma série de *Scientific romances*, que eram obras especulativas tratando de espaços curvos ou com mais de 3 dimensões.

Para analisar o campo gravitacional do universo, Einstein faz uma hipótese simplificadora: ele supõe que a densidade média da matéria do universo pode ser considerada constante, quando se estuda o universo em larga escala. Além disso,

considerando que as estrelas possuem baixas velocidades (comparadas com a da luz), ele vai supor que essa matéria pode ser considerada como se estivesse parada em relação a um certo referencial (EINSTEIN, 1917, p. 234). A matéria do universo de Einstein é assim equivalente a uma poeira distribuída uniformemente pelo espaço, sem movimento, sem pressão.

Assim, a métrica do universo seria extremamente simples. Levando-se no entanto em conta a presença de concentrações de matéria no espaço (as estrelas), a curvatura do espaço é modificada nas proximidades dessas massas.

De acordo com essas hipóteses, Einstein indica que o tensor de energia-momento-tensão da matéria seria, em todos os pontos, dado pela seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

O único termo não-nulo é T^{44} que corresponde à densidade de energia, que Einstein representa por ρ .

Einstein impõe então condições às componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$: como o campo é estático, os termos do tipo g_{4i} com $i = 1, 2, 3$ são nulos. O termo g_{44} deve ser constante, para que não haja acelerações em nenhum ponto do espaço, e Einstein escolhe o valor $+1$ para essa componente (EINSTEIN, 1917, p. 235).

A parte espacial do tensor métrico é escolhida por Einstein de modo a representar um espaço tridimensional com curvatura constante. Em vez de utilizar coordenadas esféricas, Einstein emprega coordenadas cartesianas, o que torna sua notação um pouco mais complicada. Provavelmente ele mantém coordenadas cartesianas para poder utilizar a condição $\sqrt{-g}=1$, que é incompatível com coordenadas esféricas.

Para representar a hiper-esfera, Einstein introduz quatro coordenadas espaciais (cartesianas) auxiliares ξ_i , com uma métrica

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2$$

Define então uma hipersuperfície:

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$$

onde R é constante. A partir dessa equação, uma das coordenadas pode ser determinada em função das outras três (EINSTEIN, 1917, pp. 236-237). Mantendo

apenas as três primeiras coordenadas espaciais, Einstein chega às componentes da parte espacial do tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = - \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right)$$

Note-se que esse tensor não é diagonal e que seria extremamente difícil fazer cálculos utilizando essa métrica porque nenhuma das derivadas das componentes espaciais em relação a qualquer das três coordenadas se anula (ou seja, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \neq 0$). Normalmente, são utilizadas coordenadas esféricas para fazer a dedução deste modelo de universo (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 156). Nesse caso, a métrica fica muito simples:

$$ds^2 = -R^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] + dt^2$$

3.4.3 Conflito entre o modelo e a equação do campo

Einstein discutiu o tensor de momento-energia-tensão e desenvolveu as componentes do tensor métrico sem utilizar as equações do campo gravitacional. Em seguida, ele indica que essa métrica e esse tensor de momento-energia não satisfazem as equações de campo da teoria da relatividade geral (EINSTEIN, 1917, pp. 237-238).

$$G_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

Ele não mostra os cálculos, informando apenas que são semelhantes aos mostrados na seção seguinte. Como o tensor métrico cartesiano de Einstein é extremamente complicado, podemos imaginar que o cálculo das derivadas desse tensor necessárias para construir o tensor de Ricci $G_{\mu\nu}$ será muito difícil. Para simplificar os cálculos, Einstein fez sua análise apenas em um único ponto do espaço, de coordenadas nulas, o que torna a métrica igual à de Minkowski, nesse ponto (porém, com derivadas não nulas).

De fato, olhando para o elemento de linha geral

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) + e^\nu dt^2$$

onde λ , μ , ν são função de r , encontramos, sob a métrica de Einstein $ds^2 = -R^2 d\chi^2 - R^2 \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + dt^2$, os valores

$$e^\lambda = R^2, \quad e^\mu = R^2 \sin^2\chi/\chi^2, \quad e^\nu = 1$$

com

$$G_{11} = -2, \quad G_{22} = -2 \sin^2\chi, \quad G_{33} = -2 \sin^2\chi \sin^2\theta, \quad G_{44} = 0$$

$$G = \frac{6}{R^2}$$

e substituindo o tensor energia-momento-tensão nas equações de campo encontra-se um problema na igualdade dos dois membros das equações. Pode-se notar que, para G_{ii} , onde $i = 1, 2, 3$, temos

$$G_{ii} = \left(\frac{2}{R^2} \right) g_{ii}$$

e, por isso, substituindo na equação do campo gravitacional, como $T_{ii} = 0$, temos:

$$\left(\frac{2}{R^2} \right) g_{ii} = \frac{\kappa}{2} \rho g_{i1} \quad \therefore \quad \rho = \frac{4}{\kappa R^2}$$

Portanto, as três primeiras equações levam a um resultado possível. No entanto, a quarta equação, leva a:

$$G_{44} = -\kappa \left(T_{44} - \frac{1}{2} T g_{44} \right) \quad \therefore \quad 0 = -\kappa \left(\rho - \frac{1}{2} \rho \right) = -\frac{\kappa \rho}{2}$$

Esta equação não pode ser satisfeita para $\rho \neq 0$.

3.4.4 Mudança das equações de campo

Tendo se convencido de que seu modelo de universo não satisfazia as equações de campo, Einstein decidiu mudar essas equações.

Porém, o sistema [de equações do campo gravitacional] admite uma extensão natural, que o concilia com o postulado da relatividade e que é inteiramente análogo ao que se deu à equação de Poisson com a equação [de Neumann]. De fato, podemos adicionar ao primeiro membro da equação de campo o tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ multiplicado por uma constante universal $-\lambda$ provisoriamente desconhecida, sem que isso vá prejudicar a covariância geral; e então, em vez da referida equação, teremos a seguinte:

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

Para valores suficientemente pequenos de λ , esta equação está também de acordo, em todos os casos, com os dados da observação no sistema solar. (EINSTEIN, 1917, p. 238)

Assim, por analogia com a equação de Neumann

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi K\rho$$

onde há uma constante multiplicada pelo potencial, Einstein introduziu um termo na equação de campo que corresponde a uma constante multiplicada pelo “potencial” $g_{\mu\nu}$.

Não está claro, no entanto, se Einstein realmente se guiou por esta analogia, ou se fez essa comparação com a equação de Neumann apenas como uma forma de apresentar suas idéias (NORTH, *The measure of the universe*, p. 83).

A justificativa tensorial para a introdução do novo termo nas equações de campo não é apresentada de forma detalhada por Einstein em 1917, mas é a seguinte. A equação do campo gravitacional sem a constante cosmológica

$$G_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

satisfaz a propriedade matemática de que os divergentes (tensoriais) dos dois lados da equação são iguais entre si. Na forma:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

os divergentes dos dois lados são nulos.

Se somarmos a um dos lados dessa equação qualquer termo cujo divergente (tensorial) seja nulo, essa propriedade se mantém. Ora, o divergente (tensorial) é a contração da derivada covariante, e a derivada covariante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é nula. Logo, se adicionarmos a um dos dois lados da equação um termo com uma constante vezes o tensor métrico $\lambda g_{\mu\nu}$, os divergentes dos dois lados continuarão sendo iguais.

Note-se que a condição importante não é simplesmente a covariância geral da equação, como se poderia entender pela leitura do artigo de Einstein, mas uma outra propriedade. Se somarmos a um dos dois lados da equação de campo qualquer tensor covariante de segunda ordem (por exemplo, $T.T_{\mu\nu}$ ou $G^{\lambda\zeta}G_{\lambda\zeta}.G_{\mu\nu}$ ou $G.G_{\mu\nu}$), a equação continuará covariante, mas terá sido perdida a propriedade de que os divergentes dos dois lados são iguais.

No artigo de 1917 Einstein não dá nenhum nome especial à constante λ , chamando-a apenas de “constante universal”. Posteriormente, essa constante passou a ser conhecida como “constante cosmológica”, e o termo $-\lambda g_{\mu\nu}$ passou a ser chamado de “termo cosmológico”.

3.5 O universo de Einstein

Einstein verificou em seguida que a métrica que ele havia pensado para o universo fechado e o tensor de momento-energia-tensão escolhido eram compatíveis com as equações de campo modificadas (EINSTEIN, 1917, p. 239). Essas equações conduzem às seguintes relações²:

$$\lambda = \frac{\chi\rho}{2} = \frac{1}{R^2}$$

Einstein comenta, em seguida (EINSTEIN, 1917, p. 239):

“A constante universal λ agora introduzida determina, como se vê, tanto a densidade média de distribuição ρ que pode subsistir em equilíbrio, como também o raio R do espaço esférico e seu volume $2\pi^2 R^3$ ”.

Vamos mostrar como esses resultados podem ser obtidos usando a métrica em coordenadas esféricas. Nesse caso, temos $G_{ij} = \left(\frac{2}{R^2}\right) g_{ij}$, para $i = j = 1, 2, 3$. Como $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$, as três primeiras equações serão:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$\left(\frac{2}{R^2}\right) g_{ii} - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{R^2}\right) g_{ii} + \lambda g_{ii} = 0 \quad \therefore \quad \lambda = \frac{1}{R^2}$$

A quarta equação, com $g_{44} = 1$, $G_{44} = 0$ e $T_{44} = \rho$, será

$$0 - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{R^2}\right) + \lambda = -\kappa\rho \quad \therefore$$

$$\frac{-3}{R^2} + \frac{1}{R^2} = -\kappa\rho \quad \therefore \quad \frac{2}{R^2} = \kappa\rho$$

ou

$$2\lambda = \kappa\rho$$

Portanto, $\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}$.

Segundo esta concepção, a massa total do universo, M , é finita, sendo o seu valor

$$M = \rho 2\pi^2 R^3 = \frac{4\pi^2 R}{\chi} = \frac{\sqrt{32\pi^2}}{\sqrt{\chi^3\rho}}$$

Note-se que, de acordo com esta última equação, $M = \frac{4\pi^2 R}{\chi}$, o raio do universo tende a zero quando sua massa tende a zero. Assim, seria impossível um universo sem matéria. No entanto, de acordo com a equação anterior

$$\lambda = \frac{\chi\rho}{2} = \frac{1}{R^2}$$

²Neste parágrafo, como na dissertação toda, procuramos ser fieis à notação utilizada pelo autor, por isso o χ no lugar do k representando a constante de Einstein.

podemos concluir que $R^2 = \frac{2}{(\chi\rho)}$ e, portanto, poderia haver um universo de raio tendendo a infinito, se a densidade da matéria tender a zero. Nesse caso, a constante cosmológica também tende a zero. Por outro lado, se a constante universal λ for considerada como um dado independente, concluiremos que a densidade e o raio do universo só podem possuir o valor dado pela equação acima, e a massa do universo tem que ser $M = \frac{4\pi^2}{(\chi\lambda^{\frac{1}{2}})}$, não havendo sentido em discutir o que aconteceria se a massa ou o raio variassem. No artigo, Einstein não comentou essas consequências.

Posteriormente, esse modelo passou a ser chamado de “universo de Einstein”. Ele também foi chamado de “universo cilíndrico”, porque só possui curvatura na parte espacial, enquanto o tempo aparentemente não sofre nenhuma influência pela presença da matéria ($g_{44} = 1$).

A relação entre a constante cosmológica e a massa do universo pareceu problemática a vários físicos da época. Hermann Weyl objetou que a relação entre M e λ “obviamente exige muito de nossa credulidade” (NORTH, *The measure of the universe*, p. 83). Aparentemente ele interpretou λ como uma constante fundamental (como sugerido por Einstein) e pensou na massa do universo como um parâmetro qualquer (como a massa do Sol ou o tamanho da órbita da Terra). A relação entre esse parâmetro e uma constante fundamental parecia estranha.

Arthur Eddington também considerou que essa relação era difícil de aceitar. Se os valores de M e λ estiverem perfeitamente ajustados, qualquer mudança de M exigiria que a constante cosmológica fosse alterada e que a lei da gravitação mudasse. Uma mudança de M poderia ocorrer, por exemplo, com transformações de matéria em radiação, ou vice-versa (NORTH, *The measure of the universe*, p. 85). Posteriormente, Eddington deu uma nova interpretação a essa constante cosmológica.

3.6 O universo de Willem De Sitter

O trabalho de Einstein sobre cosmologia foi apresentado no dia 8 de fevereiro de 1917 à Academia de Ciências de Berlim. Menos de dois meses depois, no dia 31 de março de 1917, Willem de Sitter apresentou à Academia de Ciências de Amsterdam seus comentários ao trabalho de Einstein e a proposta de um novo modelo cosmológico relativístico (DE SITTER, 1917). Em julho do mesmo ano ele completou um artigo mais detalhado, que foi publicado na Inglaterra, constituindo a terceira parte de sua série de artigos sobre relatividade geral (DE

SITTER, 1916-1917).

Primeiramente, De Sitter comentou o modelo obtido por Einstein e indicou que o espaço esférico poderia ser transformado em um espaço euclidiano infinito. Nesse espaço euclidiano, a métrica tende aos seguintes valores, no infinito (DE SITTER, 1917, p. 1218):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe-se que De Sitter não utiliza a condição de Einstein $\sqrt{-g} = 1$.

Essa métrica mantém um tempo “absoluto” (independente das coordenadas) mas as unidades de comprimento crescem sem limite quando a distância ao centro tende a infinito, o que significa que a velocidade da luz medida com essas coordenadas tende a infinito. O universo permanece finito, no sentido de que é possível percorrê-lo em um tempo finito (ou, como De Sitter escreve, “o universo é finito em medida natural”). No segundo artigo (DE SITTER, 1916-1917, p. 5) ele esclareceu melhor esse ponto, indicando que estava se referindo à distância:

$$L_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{-g_{11}} dx_1$$

De Sitter comenta que o universo esférico de Einstein é incompatível com as antigas equações de campo e que foi necessário introduzir uma mudança nelas (a introdução do termo cosmológico). Indica além disso um aspecto que Einstein não havia notado:

Além disso, encontrou-se a necessidade de supor que todo o espaço tridimensional está cheio de matéria cuja massa total é tão enormemente grande que, comparada com ela, toda a matéria que nos é conhecida é completamente desprezível. Chamarei essa matéria hipotética de “matéria-universal”. (DE SITTER, 1917, p. 1219)

No segundo artigo, De Sitter explica melhor esse comentário. Fazendo estimativas sobre o valor mínimo da curvatura do universo é possível estabelecer um limite para a sua massa, e De Sitter chegou ao valor mínimo de $R = 9 \times 10^{11}$ unidades astronômicas para a curvatura. No entanto, para produzir essa curvatura, a densidade média do universo teria que ser igual à densidade de matéria

no centro da nossa galáxia. Como a maior parte do espaço é vazio, De Sitter estimou que a sua massa seria na verdade 3.000 vezes menor do que a necessária para produzir essa curvatura do espaço (DE SITTER, 1916-1917, p. 25). Haveria, então, duas possibilidades: ou a maior parte da “matéria universal” é desconhecida e não está sob a forma de estrelas; ou a curvatura do universo é muito maior do que a estimada acima. Supondo que toda a matéria está sob forma de estrelas, De Sitter calculou que o raio de curvatura teria que ser aproximadamente 5×10^{13} parsec. Note-se, portanto, que havia nessa época um problema semelhante ao da “matéria escura” na cosmologia recente.

No seu segundo artigo, De Sitter esclarece também um ponto que Einstein não havia abordado. Há dois tipos de espaço finitos com curvatura positiva constante, que são o espaço esférico de Riemann e o “espaço elíptico” estudado por Newcomb (DE SITTER, 1916-1917, p. 7). No espaço esférico todas as geodésicas que partem de um ponto, radialmente, em todas as direções, se encontram no ponto mais distante possível do espaço, a uma distância igual a πR . No caso do espaço elíptico, a distância máxima entre dois pontos é $\pi \frac{R}{2}$ e todas as geodésicas que partem de um ponto, radialmente, em todas as direções, se encontram no próprio ponto de partida, depois de percorrer uma distância igual a πR . A não ser por essas propriedades globais (e topológicas), as duas métricas são iguais. Embora Einstein houvesse considerado um espaço esférico, De Sitter sugeriu que um espaço elíptico seria mais conveniente, e Einstein concordou posteriormente com ele (DE SITTER, 1916-1917, p. 8).

No modelo de Einstein, o tempo tem propriedades muito diferentes do espaço. De Sitter imaginou que seria possível introduzir um modelo em que tanto o espaço quanto o tempo fossem igualmente curvos. Na verdade, tal idéia já lhe havia sido sugerida por Paul Ehrenfest, antes da publicação do trabalho de Einstein, mas não havia sido desenvolvida (DE SITTER, 1917, p. 1219).

Para apresentar seu modelo, De Sitter utiliza coordenadas esféricas, abandonando as coordenadas cartesianas de Einstein (e também a condição $\sqrt{-g} = 1$). O espaço hiper-esférico de Einstein pode ser representado por três coordenadas angulares χ, ψ, θ , a partir das quais é possível obter os valores das coordenadas lineares:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \chi \sin \psi \sin \theta \\ x_2 &= R \sin \chi \sin \psi \cos \theta \\ x_3 &= R \sin \chi \cos \psi \end{aligned}$$

A métrica do universo esférico de Einstein pode então ser escrita sob a forma:

$$ds^2 = -R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2)] + c^2 dt^2$$

Essa é a métrica que De Sitter passa a denominar de “A”.

A generalização imediata é a introdução de mais uma dimensão, com um quarto ângulo ω :

$$\begin{aligned}x_1 &= R \sin \omega \sin \chi \sin \psi \sin \theta \\x_2 &= R \sin \omega \sin \chi \sin \psi \cos \theta \\x_3 &= R \sin \omega \sin \chi \cos \psi \\x_4 &= R \sin \omega \cos \chi\end{aligned}$$

A partir daí, temos a métrica “B” de De Sitter:

$$ds^2 = -R^2 \{d\omega^2 + \sin^2 \omega [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2)]\}$$

Fazendo algumas transformações de coordenadas mostra que os dois tipos de espaço podem ser tornados equivalentes a um espaço infinito (DE SITTER, 1917, p. 1220). No caso do modelo B, usando essas coordenadas, a métrica degenera no infinito e se torna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essa métrica é invariante, ao contrário da métrica limite do modelo A.

Depois ele calcula a relação entre a curvatura do espaço (nos dois modelos) e a constante cosmológica, obtendo:

$$\begin{aligned}A \rightarrow \lambda &= \frac{1}{R^2} \\ B \rightarrow \lambda &= \frac{3}{R^2}\end{aligned}$$

Mostra também que para o novo modelo B a densidade da matéria universal é nula, ao contrário do que ocorre no universo esférico de Einstein.

Depois de apresentar os dois modelos, De Sitter pergunta qual deles seria preferível, ou se seria melhor optar por um espaço-tempo sem curvatura (como o de Minkowski). Ele comenta que, para a discussão de fenômenos em nossa vizinhança, não há motivos para escolher um modelo ou outro, pois a métrica é essencialmente a de Minkowski, com perturbações locais.

A questão real é, portanto: como devemos extrapolar de nossa vizinhança para fora? A escolha não pode assim ser decidida por argumentos físicos, mas deve depender de considerações metafísicas ou filosóficas, nas quais é claro que julgamentos ou predileções pessoais também terão alguma influência. (DE SITTER, 1917, p. 1222).

De Sitter comenta então que a “escola de Mach” supõe que a inércia depende da interação de um corpo de prova com o resto do universo. Nesse caso, o espaço-tempo só pode existir se houver matéria. Como o modelo A exige a existência de matéria para que o espaço-tempo possa existir, ele será escolhido pelos seguidores de Mach.

No entanto, De Sitter critica essa posição. De acordo com os seguidores de Mach não existiria inércia se não houvesse matéria, ou seja, a matéria universal só serve para nos permitir supor que ela não existe e discutirmos as conseqüências dessa suposição. No entanto, o modelo A não permite que se pense na inexistência de matéria, pois tanto o raio do universo quanto a massa do universo e sua densidade são determinados pela constante universal λ . Assim, esse modelo nem mesmo nos permite pensar no que aconteceria se não existisse matéria.

O modelo B parecia a De Sitter preferível sob vários aspectos, como a simetria entre espaço e tempo (no modelo A, o tempo tem propriedades diferentes das coordenadas espaciais). No entanto, no final do artigo ele comenta que poderia ser preferível utilizar um espaço-tempo de Minkowski e desistir de explicar a inércia.

Devemos então preferir deixá-la [a inércia] inexplicada em vez de explicá-la por meio de uma constante λ indeterminada ou indeterminável. Não se pode negar que a introdução dessa constante diminui a simetria e elegância da teoria original de Einstein, na qual um dos principais atrativos era que explicava tanto sem introduzir qualquer nova hipótese ou constante empírica. (DE SITTER, 1917, p. 1225)

Antes de publicar seu trabalho, De Sitter enviou uma cópia para Einstein, que lhe respondeu em uma carta:

Seria insatisfatório, de acordo com minha opinião, se houvesse um mundo concebível sem matéria. O campo $g_{\mu\nu}$ é devido à matéria, sem a qual ele não poderia existir. Isso é o núcleo daquilo que entendo como princípio da relatividade da inércia. (Einstein, *apud* DE SITTER, 1917, p. 1225)

A partir do trabalho de De Sitter, Einstein deve ter percebido que a sua teoria não continha o princípio de relatividade da inércia. A introdução da constante cosmológica eliminou o problema do limite no infinito, mas não trouxe uma compatibilidade com o princípio de Mach, pois não eliminou a possibilidade de soluções das equações de campo sem matéria. Nessas soluções, a métrica (e a

inércia de um corpo de prova) não pode ser interpretada como devida à influência de outros corpos. No entanto, até 1924 Einstein ainda afirmava que a métrica era completamente determinada pelas massas existentes no universo (NORTON, 1993, p. 808). A partir de 1924, Einstein começou a se afastar do princípio de Mach.

A partir de 1919, Einstein passou a afirmar que a introdução da constante cosmológica era “gravemente prejudicial à beleza formal da teoria” (Einstein, *apud* NORTH, *The measure of the universe*, p. 86).

No modelo de Einstein, embora houvesse matéria, não havia pressão. No mesmo ano de 1917, Levi-Civita analisou as conseqüências das equações de campo com o termo cosmológico, porém introduzindo pressão além de massa (NORTH, *The measure of the universe*, p. 105). Além de deduzir uma generalização da equação de Schwarzschild para um corpo central com simetria esférica levando em conta o termo cosmológico, Levi-Civita também estudou as condições de equilíbrio do universo e mostrou que era necessário introduzir uma modificação nas equações de Einstein, deduzindo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{3}{R^2} - \kappa\rho \\ \kappa(p + \rho) &= \frac{2}{R^2}\end{aligned}$$

Quando a pressão tende a zero, essas equações se tornam iguais às obtidas por Einstein.

De Sitter foi também levado a analisar que influência a pressão teria em sua teoria e obteve as equações:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{3}{R^2} - \kappa\rho \\ p + \rho &= 0\end{aligned}$$

Seria possível, portanto, satisfazer as condições do universo de De Sitter com matéria (isto é, com $\rho \neq 0$), desde que houvesse uma pressão negativa. De Sitter no entanto considerou que essa condição deveria ser rejeitada (NORTH, *The measure of the universe*, p. 105).

3.7 Relação entre os modelos e fatos astronômicos

No seu segundo artigo sobre cosmologia, De Sitter estudou detalhadamente as conseqüências observacionais dos dois modelos. Ele analisa a paralaxe estelar nos dois casos, e ao analisar o modelo B introduz um novo tipo de coordenadas, para tornar a velocidade da luz constante em todos os pontos. Ao fazer essa

transformação, ele obtém uma métrica que, na sua parte espacial, representa um espaço com curvatura *negativa* constante (DE SITTER, 1916-1917, p. 13).

No modelo A, uma partícula livre descreve uma reta, com velocidade constante. No modelo B, pelo contrário, uma partícula livre descreve geralmente uma curva. Mesmo quando ela se move em linha reta, sua velocidade é variável. Isso mostrava, portanto, que nesse espaço-tempo vazio de matéria existiam forças gravitacionais associadas à curvatura do espaço-tempo.

Einstein não havia procurado comparar o seu modelo cosmológico com dados observacionais. De Sitter se preocupou bastante com esse aspecto, estudando várias conseqüências observáveis das duas hipóteses. Primeiramente ele estuda um sistema contendo uma única massa central (como uma estrela) nos modelos A e B e analisa os movimentos de partículas em torno dessa massa central, para verificar as alterações que apareceriam nos movimentos dos planetas de acordo com o modelo cosmológico adotado. Depois ele procura estabelecer estimativas para o raio de curvatura do espaço, a partir de considerações sobre densidade e paralaxe das estrelas, obtendo valores da ordem de 10^{12} unidades astronômicas (DE SITTER, 1916-1917, p. 24).

O ponto mais interessante da análise de De Sitter é a indicação de que no modelo B, como o tempo é influenciado pela posição (isto é, g_{44} depende das coordenadas), haveria um efeito de desvio para o vermelho. Observando-se o espectro emitido por estrelas muito distantes, deveria haver uma mudança de todos os comprimentos de onda das linhas espectrais para o vermelho, e esse efeito deveria aumentar com a distância da estrela até o observador (DE SITTER, 1916-1917, p. 26). De Sitter não discute essa relação mais detalhadamente; porém, como $g_{44} = \cos^2 \chi$, teríamos, para pequenas distâncias, $g_{44} \cong 1 - \chi^2$ e portanto a diferença de frequência seria proporcional ao quadrado da distância.

Em seguida, De Sitter discute se há evidências observacionais que pudessem ser interpretadas como correspondendo a esse efeito. Ele indica primeiramente a existência de certos tipos de estrelas que possuem um desvio para o vermelho anômalo e, supondo que esse efeito pode ser interpretado pelo modelo B, calcula que o raio de curvatura do espaço seria da ordem de 10^{10} unidades astronômicas. Depois ele se refere às nebulosas espirais, que seriam os objetos mais distantes conhecidos. Havia apenas três delas que tinham velocidades conhecidas, determinadas por mais de um observador. As velocidades eram:

Andrômeda (3 observadores) -311 km/s

NGC 1068 (3 observadores) +925 km/s

NGC 4594 (2 observadores) +1185 km/s

Como uma das nebulosas espirais (Andrômeda) estava se aproximando e as duas outras se afastando, era difícil dar qualquer interpretação cosmológica para esses dados. No entanto, De Sitter tirou a média dos três valores e, utilizando uma distância média, calculou um raio de curvatura $R = 3 \times 10^{11}$ unidades astronômicas. Depois, comentou:

É claro que este resultado, obtido de apenas três nebulosas, não tem valor prático. Se, no entanto, a observação continuada confirmar o fato de que as nebulosas espirais possuem velocidades radiais sistemáticas positivas, isso certamente seria uma indicação para adotar a hipótese B em vez de A. Se ocorrer que não existe tal deslocamento sistemático das linhas espectrais para o vermelho, isso poderia ser interpretado ou como mostrando que A é preferível a B, ou como indicando um valor ainda maior de R no sistema B. (DE SITTER, 1916-1917, p. 28)

O efeito previsto pela teoria de De Sitter era um desvio para o vermelho proporcional ao *quadrado* da distância. Somente posteriormente (com uma mudança de coordenadas) se verificou a existência de um termo proporcional à distância (EDDINGTON, 1932, p. 4).

Nota-se que, ao contrário de Einstein, que se baseava principalmente em argumentos teóricos e filosóficos, De Sitter procurou levar a discussão para o campo observacional. Na época, os dados existentes não permitiam concluir muita coisa, mas De Sitter apontou de forma bastante clara as consequências das duas hipóteses que poderiam ser testadas astronomicamente.

O trabalho de De Sitter recebeu muita atenção, tanto sob o ponto de vista matemático quanto por parte de astrônomos (NORTH, *The measure of the universe*, p. 87).

O próprio De Sitter havia mostrado que era possível alterar as coordenadas utilizadas para descrever as hipóteses A e B, de modo a analisar melhor suas propriedades. Diversos autores (como Weyl e Eddington) propuseram outras mudanças das coordenadas, nos anos seguintes.

3.8 O desvio para o vermelho no modelo de De Sitter

Eddington deu grande atenção ao “efeito De Sitter” de desvio para o vermelho no seu livro de 1922, *The mathematical theory of relativity*. Ele parece ter sido o primeiro autor a notar que no universo de De Sitter um conjunto de partículas inicialmente em repouso tenderia a se dispersar, com um movimento acelerado, como se houvesse uma repulsão agindo sobre elas (NORTH, *The measure of the universe*, p. 96). Ele obteve a seguinte relação para a aceleração radial de uma partícula de prova (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 161):

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{3}\lambda r$$

Assim, uma partícula inicialmente em repouso só permaneceria parada se estivesse na origem. Sua aceleração aumenta com a distância. Como qualquer ponto do universo de De Sitter pode ser considerado como o centro (já que ele é esférico), esse resultado não tem nenhuma relação com algum ponto especial do modelo, nem representa uma repulsão entre as partículas, já que o efeito existe mesmo considerando-se uma única partícula de prova. Portanto, no modelo de De Sitter existe um tipo de repulsão cósmica.

Foi Eddington, e não De Sitter, o primeiro a notar que um conjunto de partículas colocadas no universo de De Sitter se espalharia, e a notar o significado astronômico desse resultado (WHITROW, 1983, p. 261).

Note-se que De Sitter havia indicado a existência de um desvio para o vermelho que não tinha nenhuma relação com essa repulsão cósmica. Eddington indicou que existiam dois fenômenos diferentes no modelo de De Sitter (a variação da frequência própria com a distância e a aceleração cósmica), que produziam efeitos semelhantes (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 161).

No mesmo ano em que Eddington publicou seu livro, Cornelius Lanczos publicou um trabalho em que apresentou a métrica de De Sitter sob uma forma completamente diferente, em que a parte espacial da métrica aparecia multiplicada por uma função do tempo (NORTH, *The measure of the universe*, p. 111):

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t (d\phi^2 + \cos^2 \phi \cdot d\psi^2 + \cos^2 \phi \cdot \cos^2 \psi \cdot d\chi^2)$$

Essa é uma métrica em que o raio da parte espacial varia com o tempo, ou seja, era um universo com raio variável. Lanczos não proporcionou nenhuma interpretação física de suas equações, mas elas poderiam ser vistas como um universo não estático.

Quando Eddington escreveu o seu livro, já havia um maior número de dados sobre as velocidades das nebulosas espirais. O maior número de observações tinha sido obtido por V. M. Slipher, do *Lowell Observatory*, que forneceu a Eddington uma lista de 41 medidas (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 162). Dessas nebulosas, apenas 5 tinham seu espectro desviado para o azul (ou seja, estavam se aproximando), sendo que duas tinham sido medidas por outros observadores e mostravam uma alta velocidade de aproximação (aproximadamente 300 km/s). Seis das medidas indicavam velocidades de recessão superiores a 1.000 km/s.

Embora houvesse uma forte preponderância de velocidades de recessão, Eddington não tirou nenhuma conclusão desses dados. Indicou que as equações do modelo de De Sitter não poderiam explicar movimentos de aproximação, mas também apontou que há estrelas individuais que possuem velocidades de até 300 km/s em relação ao nosso sistema - portanto, as nebulosas que estão se aproximando poderiam estar manifestando apenas movimentos individuais e não um efeito cosmológico. É curioso que o próprio Slipher tinha uma interpretação completamente diferente dessas medidas. Ele acreditava que as velocidades das nebulosas espirais podiam ser interpretadas como sendo devidas apenas à velocidade de nossa galáxia em relação às outras. Sua hipótese parecia ter inicialmente algum fundamento, pois ele notou que as galáxias que se aproximavam de nós estavam no hemisfério sul e as que se afastavam no hemisfério norte (HETERINGTON, 1971, p. 312). No entanto, medidas posteriores mostraram que nos dois hemisférios havia uma maioria de nebulosas espirais se afastando e poucas se aproximando.

Note-se que Eddington (como outros autores da época) não pensava na teoria de De Sitter apenas como um exercício matemático e sim como um modelo que talvez correspondesse à realidade. Mais exatamente, Eddington supôs em 1922 que o universo real talvez fosse intermediário entre os modelos de Einstein e De Sitter:

Parece natural considerar as formas de De Sitter e Einstein como dois casos limite, sendo as circunstâncias de nosso mundo real intermediárias entre eles. O universo vazio de De Sitter é obviamente pensado apenas como um caso limite; e a presença de estrelas e nebulosas deve modificá-lo, mesmo se apenas ligeiramente, na direção da solução de Einstein. O universo de Einstein, contendo massas que excedem muito qualquer coisa imaginada pelos astrônomos, poderia

ser considerado como o outro extremo - um universo contendo tanta matéria quanto é capaz de segurar. (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 160)

Podemos considerar de forma anacrônica, a partir de nosso conhecimento atual, que o modelo de De Sitter previa uma relação entre o desvio para o vermelho e a distância das nebulosas que antecipava o efeito Hubble. No entanto, deve-se notar que, na época em que Eddington e Weyl publicaram seus trabalhos (1922 e 1923) não existiam medidas de distâncias das nebulosas, sendo impossível testar esse tipo de efeito.

No final da década de 1920 De Sitter conhecia as determinações das velocidades radiais de 25 nebulosas espirais, das quais apenas 3 tinham velocidades de aproximação. No entanto, ele acreditava que esses dados não eram ainda suficientes para escolher entre A e B (HETHERINGTON, 1971, p. 310).

O modelo de Einstein não mereceu o mesmo tipo de interesse que a teoria de De Sitter, provavelmente porque não levava a nenhuma previsão tão interessante. O próprio Einstein parece ter se desinteressado completamente por cosmologia e por seu modelo no início da década de 1920, voltando-se para outros assuntos. No final da década de 1920, quando surgiram resultados experimentais e teóricos de enorme importância, Einstein estava envolvido com a mecânica quântica e não deu nenhuma contribuição importante para o desenvolvimento das teorias do universo em expansão (NORTH, *The measure of the universe*, p. 109).

3.9 O trabalho de Friedmann

Simultaneamente com o trabalho de Lanczos foi publicada a primeira extensão realmente importante da cosmologia teórica desde o artigo de De Sitter em 1917. Em 1922 Friedmann (FRIEDMANN, 1922) investigou soluções cosmológicas das equações de campo com um raio dependente do tempo, enquanto que em 1924 pesquisou os casos de ambos universos estacionário e não estacionário com curvatura negativa (FRIEDMANN, 1924). A maioria da sua teoria seguiu de perto as suposições feitas por Einstein e De Sitter. Especialmente baseou-se nas equações de campo gravitacional, tomadas com o termo $\lambda g_{\mu\nu}$, e nas hipóteses sobre a velocidade e o estado da matéria. Em consequência da suposição de que a matéria é incoerente e exibe velocidades relativas pequenas comparadas com a velocidade da luz, expressões simples estariam disponíveis para descrever as componentes do tensor energia-momento.

O trabalho de Friedmann é puramente matemático. Ele não discute a relação entre os modelos e as observações astronômicas, nem a possível realidade de um universo em expansão (ou contração).

O ponto de partida de Friedmann desde o primeiro trabalho foi olhar para o caráter geométrico do modelo. Friedmann decidiu, procurando a generalidade, que em qualquer instante de tempo o modelo representaria um espaço de curvatura constante. Assim escreveu o elemento de linha como sendo

$$ds^2 = R^2(dx_2^2 + \sin^2 x_1 dx_3^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_4^2) + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4 + g_{44}dx_4^2 \quad (3.1)$$

Supôs que R dependeria só de x_4 . Agora os g_{14}, g_{24}, g_{34} podiam ser escolhidos tal que o tempo e o espaço fossem ortogonais. Friedmann ressaltou que não existiam bases físicas ou filosóficas para pensar desta forma. Embora ele os tenha tomado assim, ele não estabeleceu claramente as razões pelas quais o fez.

Friedmann tomou portanto a seguinte expressão para o elemento de linha:

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + M^2 dx_4^2 \quad (3.2)$$

onde R é uma função de x_4 e M pode ser uma função de todas as coordenadas³. As coordenadas estão sujeitas às restrições ($0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi, 0 < x_3 < 2\pi$). Usando as equações de campo junto com a forma escolhida do tensor energia-momento segue-se

$$R'(x_4) \left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right) = R'(x_4) \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right) = R'(x_4) \left(\frac{\partial M}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (3.3)$$

onde $R' = \frac{dR}{dx_4}$.

Portanto ou R é independente de x_4 , ou M depende só de x_4 . No primeiro caso os elementos de linha de Einstein, De Sitter e da teoria especial da relatividade mostraram esgotar as assim ditas possibilidades estáticas.

Através de uma escolha apropriada de x_4 , M pode ser escolhido como unitário, e a forma final do elemento de linha fica:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2 \quad (3.4)$$

³A métrica do universo de Einstein obtém-se fazendo a substituição de R^2 por $\frac{-R^2}{c^2}$ em [3.2] e fazendo $M = 1$, lembrando que o raio de curvatura R é constante. A métrica de De Sitter é obtida quando em [3.2] R^2 é substituído por $\frac{-R^2}{c^2}$ e M por $\cos x_1$.

Uma vez mais usando as equações de campo, junto com essa expressão para o intervalo segue-se, que (FRIEDMANN, 1922, p. 53)

$$\left(\frac{R'^2}{R^2}\right) + \left(\frac{2RR''}{R^2}\right) + \left(\frac{c^2}{R^2}\right) - \lambda = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\left(\frac{3R'^2}{R^2}\right) + \left(\frac{3c^2}{R^2}\right) - \lambda = kc^2\rho \quad (3.6)$$

onde $R' = \left(\frac{dR}{dx_4}\right)$ e $R'' = \left(\frac{d^2R}{dx_4^2}\right)$

Integrando a primeira dessas equações segue-se que

$$\frac{R}{c^2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = A - R + \left(\frac{\lambda}{3c^2}\right) R^3 \quad (3.7)$$

e portanto

$$t = \left(\frac{1}{c}\right) \int_a^R \sqrt{\left\{\frac{x}{A - x + \left(\frac{\lambda}{3c^2}x^3\right)}\right\}} dx + B \quad (3.8)$$

onde a , A , B , são constantes arbitrárias e t é usada para x_4 . As equações [3.6] e [3.7] juntas dão

$$\rho = \left(\frac{3A}{kR^3}\right) \quad (3.9)$$

A relação [3.8] contém uma integral elíptica e, na ausência de informação independente, é assumido que λ pode tomar qualquer valor. Os três casos de interesse, com as correspondentes interferências desde [3.8] e [3.8] são:

(i) $\lambda > \left(\frac{4c^2}{9A^2}\right)$. R é uma função crescente de t . Não existem restrições ao valor inicial (R_0) de R desde que este seja positivo. O modelo foi chamado “monotônico de primeiro tipo”. O valor crítico de λ corresponde a um modelo de Einstein. Isso pode ser verificado usando [3.4], com $\frac{dR}{dt} = 0$, junto com a relação de Einstein entre λ_e e R_e .

(ii) $0 < \lambda < \left(\frac{4c^2}{9A^2}\right)$. O valor inicial de R poderia, em princípio, estar nos três domínios. Um deles pode ser excluído como envolvendo o tempo imaginário. Um outro dá um “modelo monotônico de segunda ordem”. E o terceiro intervalo faz de R uma função periódica de t .

(iii) $0 > \lambda$. Aqui de novo o tempo imaginário é abolido só se R_0 for menor que um certo valor, x_0 . Neste caso R resulta ser uma função periódica de t , com período t_π , onde

$$t_\pi = \frac{2}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{\left\{\frac{x}{A - x + \left(\frac{\lambda x^3}{3c^2}\right)}\right\}} dx \quad (3.10)$$

Neste caso R varia entre 0 e t_0 ; t_π aumenta com λ e tende ao infinito quando λ tende para o valor $\left(\frac{4c^2}{9A^2}\right)$, enquanto que para λ pequeno, $t_\pi \simeq \left(\frac{\pi A}{c}\right)$. O primeiro trabalho de Friedmann (de 1922) foi criticado por Einstein, que acreditou ter encontrado um erro matemático no artigo. Depois, no entanto, Einstein admitiu que estava enganado, mas não deu importância ao trabalho de Friedmann (BERNSTEIN & FEINBERG, *Cosmological constants*, pp. 12, 66-67)

No seu segundo artigo Friedmann (FRIEDMANN, 1924) enfatiza a diferença essencial entre universos estacionários de curvatura positiva e negativa: o modelo estacionário de curvatura negativa não permite uma densidade material positiva. Esse caso deve ser excluído como fisicamente impossível. Não existe, em outras palavras, um análogo ao modelo de Einstein, i. é, um com densidade constante, embora exista um para o modelo de De Sitter. Friedmann encontra dois casos: estacionário e não-estacionário. O elemento de linha que ele toma é

$$d\tau^2 = - \left(\frac{R^2}{c^2}\right) \left(\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}\right) + M^2 dx_4^2 \quad (3.11)$$

a análise que ele faz é similar à apresentada anteriormente com a divisão em estacionário $R' = 0$ e não estacionário $R' \neq 0$. A primeira leva a um desses casos

$$\begin{aligned} (i) \quad \lambda R^2 &= 3, & \rho &= 0 \\ (ii) \quad \lambda R^2 &= 1, & \rho &= -\frac{2}{kR^2} \end{aligned}$$

O caso (i) pode comparar-se com o modelo de De Sitter, enquanto que o caso (ii), com densidade negativa não teria significado físico.

Para o modelo não-estacionário, como M é uma função de x_4 , ela pode ser tomada para ser igual a 1, a equação de Friedmann fica

$$\left(\frac{R'2}{R^2}\right) + \left(\frac{2RR''}{R^2}\right) - \left(\frac{c^2}{R^2} - \lambda\right) = 0 \quad (3.12)$$

a qual se diferencia de [3.5] só no sinal do terceiro termo. A densidade em tal modelo é encontrada

$$\rho = \left(\frac{3A}{kR^3}\right) \quad (3.13)$$

Pela primeira vez a possibilidade de um universo não-estacionário de curvatura negativa constante e com densidade material positiva tinha sido mostrada. Friedmann enfatizou, não obstante, um ponto que costumava ser passado por alto: o espaço poderia ser totalmente curvo sem ser finito.

É difícil explicar por que esses dois artigos de Friedmann foram ignorados.

O trabalho de Friedmann não foi amplamente conhecido até quase dez anos depois da sua publicação, e então só como um resultado do interesse estimulado pelos trabalhos de Lemaître e Robertson. Em 1927 Lemaître, trabalhando em ignorância das memórias de Friedmann, desenvolveu a teoria relativística em um caminho similar ao de Friedmann. Uma vez mais independentemente, Robertson em 1928 usou a transformação de coordenadas que dava o modelo de de Sitter em forma não-estática. Estes dois trabalhos serão descritos a seguir.

3.10 As primeiras pesquisas de Lemaître

O físico belga Georges Lemaître (1894-1966) começou a se interessar pela teoria da relatividade em torno de 1920 e em 1923 fez um estágio na Inglaterra, junto a Eddington. Nessa ocasião começou a se familiarizar com as cosmologias relativistas. Estudou o livro de Eddington, *The mathematical theory of relativity*, e em seu primeiro trabalho sobre cosmologia, publicado em 1925, citou a seguinte frase dessa obra: “Algumas vezes se contrapõe ao universo de De Sitter que ele se torna instável logo que se introduz alguma matéria nele. Mas esta propriedade é mais favorável à teoria de De Sitter do que contrária a ela” (KRAGH, 1987, p. 118).

Lemaître tinha forte interesse tanto pela física matemática quanto pelos aspectos observacionais. Seu envolvimento com a cosmologia relativística levou-o a estudar mais profundamente a própria astronomia.

No início de 1925 Edwin Hubble publicou suas observações sobre estrelas variáveis (cefeidas) em nebulosas espirais, que permitiam determinar suas distâncias. Esses estudos convenceram a maioria dos astrônomos que as nebulosas espirais eram realmente “universos-ilha” fora da nossa galáxia. Lemaître visitou Hubble e também Slipher, convencendo-se que havia realmente um efeito de desvio sistemático para o vermelho dos espectros das nebulosas espirais e que um modelo cosmológico correto deveria incluir esse tipo de efeito.

O primeiro artigo de Lemaître sobre cosmologia consistiu em uma nova interpretação do universo de De Sitter. De modo semelhante ao que Cornelius Lanczos havia feito (mas sem conhecer seu trabalho), Lemaître indicou que a teoria de De Sitter poderia ser interpretada como um universo de curvatura homogênea (igual em todos os pontos do espaço) mas variável em função do tempo. Indicou que esse tipo de modelo poderia explicar o desvio para o vermelho do espectro das nebulosas espirais, e obteve uma fórmula para esse efeito, mostrando que o

desvio para o vermelho deveria ser proporcional à distância (KRAGH, 1987, p. 119).

Pode-se perceber que a idéia de interpretar o universo de De Sitter como algo dinâmico era bastante natural na época. Alguns anos mais tarde (1928), H. P. Robertson também sugeriu uma versão não-estática do universo de De Sitter, equivalente à de Lemaître (KRAGH, 1987, p. 118). No entanto, vários dos autores que fizeram esses estudos tinham um enfoque principalmente matemático. Lemaître, ao contrário, estava fortemente interessado em explicar o universo real, levando em conta os novos fatos astronômicos.

3.10.1 O universo em expansão de Lemaître

Em 1927, sem ter conhecimento dos trabalhos de Friedmann, Lemaître publicou um novo artigo, em que apresentava modelos dinâmicos do universo, com densidade não nula (ou seja, diferentes do de De Sitter). Uma diferença importante entre esse trabalho e as pesquisas de Friedmann foi que Lemaître levou em conta não apenas a densidade de matéria mas também a pressão da radiação existente no universo.

Sob o ponto de vista matemático, o trabalho de Lemaître adicionou muito pouco ao trabalho de Friedmann, mas seu enfoque era completamente diferente, pois queria descrever o universo real.

Logo no início de seu artigo, Lemaître comenta sobre os problemas dos dois modelos cosmológicos conhecidos (de Einstein e de De Sitter):

Cada teoria tem suas próprias vantagens. Uma [a de De Sitter] está de acordo com as velocidades radiais observadas das nebulosas, a outra [de Einstein] com a existência da matéria, proporcionando uma relação satisfatória entre o raio e a massa do universo. Parece desejável encontrar uma solução intermediária que combine as vantagens de ambas.

À primeira vista, tal solução intermediária parece não existir. Um campo gravitacional estático para uma distribuição uniforme de matéria sem tensão interna tem apenas duas soluções, a de Einstein e a de De Sitter. O universo de De Sitter é vazio, o de Einstein foi descrito como “contendo tanta matéria quanto é capaz de segurar”. É notável que a teoria não pode proporcionar um intermediário entre esses dois extremos. (LEMAÎTRE, 1927, p. 483).

Note-se, por essa citação, que Lemaître estava preocupado com um modelo do universo que pudesse explicar os movimentos das nebulosas espirais.

A citação acima lembra o parágrafo do livro *The mathematical theory of relativity* de Eddington citado anteriormente:

Parece natural considerar as formas de De Sitter e Einstein como dois casos limite, sendo as circunstâncias de nosso mundo real intermediárias entre eles. O universo vazio de De Sitter é obviamente pensado apenas como um caso limite; e a presença de estrelas e nebulosas deve modificá-lo, mesmo se apenas ligeiramente, na direção da solução de Einstein. O universo de Einstein, contendo massas que excedem muito qualquer coisa imaginada pelos astrônomos, poderia ser considerado como o outro extremo - um universo contendo tanta matéria quanto é capaz de segurar. (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 160)

Levando em conta que o universo de De Sitter pode ser descrito, em outras coordenadas, como um universo com raio que depende do tempo, Lemaître resolveu investigar um modelo não estático, semelhante ao de Einstein em suas características gerais (LEMAÎTRE, 1927, p. 484). Todas as hipóteses básicas de Lemaître são muito semelhantes às de Einstein: matéria distribuída uniformemente, com movimento desprezível. As diferenças são que ele introduz radiação (com pressão $p = \frac{\rho}{3}$) e considerou que o raio R da parte espacial do universo é uma função do tempo. O tensor de momento-energia-tensão é dado por

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

e tanto a pressão de radiação p quanto a densidade total de energia ρ (incluindo matéria + radiação) são variáveis no tempo. O escalar de Von Laue $T = \rho - 3p = \delta$ é a densidade da matéria. Note-se que Friedmann não havia levado em conta a pressão de radiação.

A métrica poderia ser representada por

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2$$

onde $d\sigma$ é o elemento de distância espacial dividido pelo quadrado do raio do universo. O tempo é absoluto (independente das coordenadas), como no universo

de Einstein (LEMAÎTRE, 1927, pp. 484-485). Utilizando as equações de campo (com termo cosmológico), Lemaître obteve equações relacionando as derivadas do raio do universo com a constante cosmológica, a densidade e a pressão.

Para poder resolver o sistema de equações Lemaître supôs que a matéria do universo $M = V\delta = \alpha$ era constante. A quantidade total de radiação do universo $E = 3pV$ não era constante, na teoria de Lemaître. Ele verificou que durante variações de volume do universo, essa pressão realizava trabalho e que a variação de energia da radiação era igual ao trabalho realizado. Obteve uma relação $kp = \frac{\beta}{R^4}$, onde β era uma constante de integração. Representando a derivada de R em relação ao tempo por R' , Lemaître obteve:

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4}$$

Dois casos particulares eram a solução de De Sitter e a de Einstein. Para obter a solução de De Sitter, bastava colocar tanto α quanto β iguais a zero, isto é, eliminar a matéria e a radiação. A teoria de Einstein era obtida fazendo β igual a zero e supondo que inicialmente o raio do universo é constante (LEMAÎTRE, 1927, pp. 485-486).

O modelo geral de Lemaître, que tinha esses dois casos limites, mostrava um universo com raio variável. O ponto de partida era o universo de Einstein, em equilíbrio, e o limite final (para um tempo $t = +\infty$) era o universo de De Sitter, com densidade nula.

Lemaître indica que o raio do universo de Einstein R_E havia sido calculado por Hubble a partir da densidade média da matéria do universo (supondo que o universo era estático, evidentemente) e que havia sido obtido o resultado:

$$R_E = 8,5 \times 10^{28} cm = 2,7 \times 10^{10} parsec$$

Lemaître supôs que a constante cosmológica podia ser calculada a partir da massa total do universo, utilizando as relações do universo de Einstein (LEMAÎTRE, 1927, p. 489).

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi}{\kappa M}$$

A partir de seu modelo, mostrou que o desvio para o vermelho de corpos distantes deveria ser proporcional à distância. Além disso, utilizando dados cuja origem não indicou, Lemaître calculou a velocidade atual de expansão do universo obtendo:

$$\frac{R'}{R} = 0,68 \times 10^{-27} /cm$$

(Lemaître considera $c = 1$).

A teoria permitia prever uma proporcionalidade entre o desvio para o vermelho e a distância. Lemaître relacionou a expansão do universo à recessão das nebulosas espirais e mencionou as observações mais recentes, indicando que a constante de proporcionalidade entre velocidade e distância seria de aproximadamente $2,7 \times 10^{-17}/s$. Note-se que esse trabalho foi publicado dois anos antes do famoso trabalho de Edwin Hubble.

A partir das equações do seu modelo, calculou que o raio inicial R_0 do universo era 0,0465 do raio atual R (ou seja, o raio já havia aumentado aproximadamente 20 vezes). Os resultados obtidos foram (LEMAÎTRE, 1927, p. 487):

$$R = 0,215R_E = 1,83 \times 10^{28}cm = 6 \times 10^9 parsec = 2 \times 10^{10} \text{ anos luz}$$

$$R_0 = 8,5 \times 10^{26}cm = 2,7 \times 10^8 parsec = 9 \times 10^8 \text{ anos luz}$$

Dois casos particulares da teoria de Lemaître eram os universos de Einstein e de De Sitter. Lemaître mostrou que uma solução possível das equações de campo tinha exatamente esses dois modelos como casos-limite. Podia-se pensar em um universo que começasse praticamente igual ao universo de Einstein e que fosse se expandindo, tendendo a uma densidade cada vez mais baixa e aproximando-se do universo de De Sitter (KRAGH, 1987, p. 124).

Por fim, Lemaître discutiu a causa da expansão do universo:

Resta encontrar a causa da expansão do universo. Vimos que a pressão de radiação realiza trabalho durante a expansão. Isso parece sugerir que a expansão foi iniciada pela própria radiação. Em um universo estático, a luz emitida pela matéria viaja pelo espaço, volta ao ponto de partida e se acumula indefinidamente. Parece que esta pode ser a origem da velocidade de expansão R'/R que Einstein assumiu ser igual a zero e que em nossa interpretação é observada como a velocidade radial das nebulosas extra-galáticas. (LEMAÎTRE, 1927, p. 489)

Deve-se notar que o universo de Lemaître não iniciava de uma singularidade, nem tinha uma duração finita. O estado inicial do universo era o universo estático de Einstein, com matéria parada, distribuída uniformemente em um espaço curvo finito. Esse estado inicial não teria ocorrido um tempo finito atrás, mas seria o limite assintótico do universo atual, para $t = -\infty$.

O trabalho de Lemaître não teve repercussão. Foi publicado em francês, em uma revista belga obscura. Embora Lemaître tivesse contatos científicos importantes, ele parece não ter enviado cópias de seu artigo para pessoas como Shapley, Slipher, Hubble e Eddington (KRAGH, 1987, p. 125). No mesmo ano de publicação do artigo, Lemaître encontrou Einstein em um congresso que ocorreu em Bruxelas e conversaram sobre esse trabalho. Einstein achou que o trabalho era correto sob o ponto de vista matemático, mas que a proposta era “abominável” sob o ponto de vista físico (KRAGH, 1987, p. 125). Lemaître comentou, mais tarde, que Einstein parecia desconhecer as informações astronômicas sobre as nebulosas espirais. Através dessa conversa, Lemaître ficou sabendo que Friedmann havia desenvolvido uma teoria semelhante, alguns anos atrás.

3.11 A contribuição de Robertson

Da mesma forma que Lemaître e outros autores anteriores, em 1928, H. P. Robertson procurou reinterpretar o universo de De Sitter, proporcionando uma solução matematicamente equivalente mas que resolvesse algumas dificuldades que haviam sido sentidas por diversos autores (ROBERTSON, 1928, p. 836). Utilizando uma transformação adequada, Robertson obteve a seguinte forma para a métrica de De Sitter:

$$ds^2 = -e^{2kct}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2 dt^2$$

Com esse novo tipo de coordenadas, o espaço se tornava infinito, euclidiano, e a velocidade da luz se tornava isotrópica. O movimento da luz e de partículas nesse universo é retilíneo. Estudando o desvio para o vermelho, Robertson concluiu que ele seria proporcional à distância, em primeira aproximação, obtendo um resultado igual ao que já havia sido apresentado alguns anos antes por Weyl (ROBERTSON, 1928, p. 844). Assim como Lemaître, Robertson também estava preocupado em comparar esse modelo com os dados astronômicos. Comparando dados publicados por Hubble em 1926 sobre distância de galáxias, com os dados de Slipher publicados por Eddington, Robertson obteve uma relação empírica aproximada, correspondendo a essa previsão de proporcionalidade (ROBERTSON, 1928, p. 845).

O trabalho de Robertson de 1928 era essencialmente semelhante ao de Lemaître de 1925, mas parece ter sido desenvolvido sem conhecimento daquele (NORTH, *The measure of the universe*, p. 112). Por coincidência, em 1929

Robertson também redescobriu as métricas de Friedmann (NORTH, *The measure of the universe*, pp. 120-121). Posteriormente, seu modo de apresentar as hipóteses da teoria e de analisar os modelos passou a ser admirado pela clareza.

O trabalho de Robertson foi visto, na época, apenas como uma curiosidade matemática. Ele não se dedicou como Lemaître a tentar estabelecer a “verdadeira” teoria do universo, nem esclareceu o significado empírico das coordenadas que utilizou (NORTH, *The measure of the universe*, p. 118). Apenas depois da “redescoberta” do artigo de Lemaître por Eddington, o trabalho de Robertson passou a ser também valorizado.

3.12 A lei de Hubble

Em 1929 Edwin Hubble publicou um artigo em que apresentava os resultados preliminares de seus estudos sobre distância das nebulosas espirais e sua relação com o desvio para o vermelho, mostrando que havia uma relação de proporcionalidade aproximada (HUBBLE, 1929). É provável que Hubble não conhecesse os trabalhos de Friedmann, Lemaître e Robertson, nessa época. Ele apenas mencionou o próprio modelo de De Sitter:

A característica importante, no entanto, é a possibilidade de que a relação entre velocidade e distância possa representar o efeito De Sitter e portanto que os dados numéricos possam ser introduzidos nas discussões sobre a curvatura geral do espaço (HUBBLE, 1929, p. 81).

No trabalho de 1929, Hubble obteve uma constante de proporcionalidade de aproximadamente 500 ± 50 km/s por megaparsec (HUBBLE, 1929, p. 79).

O artigo de Hubble de 1929 continha uma análise de nebulosas com velocidades até 1.100 km/s. Pouco depois (1931), juntamente com seu colaborador Milton Humason, publicou outro trabalho, incluindo mais nebulosas, com velocidades de até 20.000 km/s e confirmado mais fortemente a relação entre distância e desvio para o vermelho (SMITH, 1990, p. 58).

O trabalho de Hubble produziu forte repercussão. No início de 1930 Eddington, Robertson e De Sitter concluíram que era necessário procurar uma teoria cosmológica não-estática - mas não mencionaram que tal teoria já existia. Ao ler um relato da apresentação de Eddington, Lemaître lhe escreveu chamando a atenção para seu artigo de 1927. O historiador Helge Kragh acredita que Eddington havia recebido uma cópia do trabalho de Lemaître, ou que este lhe

havia escrito a respeito de sua teoria, mas Eddington não havia lido ou não havia dado importância ao artigo (KRAGH, 1987, p. 126). Agora, em 1930, a situação era diferente. Ele imediatamente percebeu que a teoria de Lemaître preenchia exatamente aquilo que as observações astronômicas pediam. Publicou então um comentário elogioso ao trabalho de Lemaître, e logo depois uma tradução inglesa do artigo de 1927. Ao tomar conhecimento desse artigo, De Sitter também apoiou Lemaître, que logo se tornou conhecido. Em 1931 Einstein também aderiu à idéia de um universo em expansão.

Em um artigo publicado em 1931, De Sitter indicou que o trabalho de Lemaître era a solução mais adequada para descrever o universo em expansão (DE SITTER, 1931, pp. 5-6). Apoiando a idéia de que o universo estava inicialmente na situação de equilíbrio instável representada pelo modelo de Einstein e utilizando os dados disponíveis, De Sitter indicou que seu raio inicial seria de aproximadamente 1 bilhão de anos luz, mas que no instante atual seria pelo menos três vezes maior. Ele aponta, no entanto, as outras possibilidades (um universo que havia se contraído e depois expandido, ou uma expansão iniciada a partir de uma forte concentração de matéria), considerando que são pouco prováveis (DE SITTER, 1931, pp. 6-7).

3.13 O início da expansão do universo

Havia um problema conceitual na teoria de Lemaître. O modelo do universo em expansão tinha como ponto de partida o universo de Einstein e tendia ao universo de De Sitter. Porém, o universo de Einstein é estático. Como justificar o início da expansão do universo?

Antes de tomar conhecimento do artigo de Lemaître de 1927, Eddington já estava preocupado com a questão da estabilidade do universo de Einstein (NORTH, *The measure of the universe*, p. 122). Ele estava trabalhando com seu aluno George McVittie no problema, mas antes de publicar seus resultados leu o artigo de Lemaître. Logo depois, Eddington investigou mais detalhadamente a questão da expansão inicial do universo (EDDINGTON, 1930b). Primeiramente, ele provou que o universo de Einstein era instável - um equilíbrio delicado entre a força gravitacional de contração e a força expansiva representada pela constante cosmológica. Qualquer pequena expansão ou contração desse universo iria produzir uma aceleração crescente. Assim, foi Eddington, e não Lemaître, quem provou que o universo de Einstein era instável e estabeleceu as condições para

o início de sua expansão (WHITROW, 1983, p. 261). A análise de Eddington (discutida na próxima seção) mostrou que, contrariamente à nossa intuição, a pressão da radiação é um fator que tende a produzir uma *contração* do universo e não uma expansão. Dessa forma, a interpretação de Lemaître não poderia estar correta.

Tolman imaginou que processos de aniquilação de matéria e sua conversão em radiação poderiam desencadear o início da expansão. Eddington, no entanto, criticou essa proposta pois, contrariamente ao que pensaríamos de forma intuitiva, um aumento de pressão no universo produziria uma *contração*, e não uma expansão. Assim, Eddington procurou processo que reduzissem a pressão do universo, e imaginou que o início da expansão poderia ter sido causado pela condensação da matéria para formar as estrelas ou nebulosas. Pouco depois, Lemaître propôs um mecanismo semelhante (KRAUGH, 1987, p. 128).

3.14 Eddington e o universo

Partindo do fato que a finitude do espaço depende da constante cosmológica λ , a qual aparece nas equações gravitacionais de Einstein $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ para o espaço vazio e sabendo ademais que além de envolver λ , a forma e o tamanho do espaço dependem da quantidade de matéria contida no universo e da forma na qual esta é distribuída, Eddington centrou sua atenção no espaço esférico, pois se a matéria estiver uniformemente distribuída o espaço só podia ter curvatura constante. Assim, estritamente falando, ele assumiu o universo como estando preenchido com matéria de densidade uniforme. Mas praticamente insistiu na uniformidade a grande escala, i. e., supôs que o universo estava preenchido com galáxias as quais estariam igualmente distribuídas regularmente em qualquer lugar.

Dentro da sua análise ele encontra que se for postulado que este universo esférico é estático e não se altera, existiria uma única solução, o universo de Einstein. Portanto, para o equilíbrio, o espaço deveria ter um raio particular e conter uma quantidade particular de massa, a qual estaria determinada em termos da constante cosmológica λ .

Tecnicamente, ele viu que a solução de De Sitter era também uma solução de equilíbrio, mas isto só acontecia por causa de que, sendo um universo inteiramente vazio, não existiria nada nele para mostrar um desvio do estado de equilíbrio.

Eddington viu que em um universo esférico expandindo-se as galáxias, já que elas continuam preenchendo o espaço uniformemente, deveriam afastar-se à me-

dida que o tempo passa. Portanto, as soluções expandindo-se seriam de interesse astronômico vistas como uma possível explicação do espalhamento observado das nebulosas espirais⁴.

No *modelo* de Eddington, como na solução de Einstein, o intervalo correspondendo ao espaço esférico e ao tempo não alterado é (EDDINGTON, 1930 (b), p. 669)

$$ds^2 = -R^2 \{d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\} + dt^2 \quad (3.14)$$

onde R é o raio do espaço e (χ, θ, ϕ) são coordenadas angulares⁵. Mas agora R seria uma função de t . Lemaître já tinha encontrado os valores para a densidade ρ e a pressão p da matéria no espaço [3.14] mostrando que estes se derivavam das equações gravitacionais de Einstein. Esses valores correspondiam às seguintes equações

$$8\pi\rho = -\lambda + 3 \left\{ \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \right\} \quad (3.15)$$

$$8\pi p = -\lambda - \left\{ \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \right\} - \frac{2}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} \quad (3.16)$$

Ele tomou as unidades sendo tais que a velocidade da luz e a constante de gravitação fossem unitárias. Um resultado importante para a análise de Eddington encontra-se de [3.15] e [3.16]

$$\frac{6}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} = 2\lambda - 8\pi(\rho + 3p) \quad (3.17)$$

Sob sua visão o curso da expansão do universo simplificar-se-ia se fosse assumido que a massa total do universo permanecia constante. Mas sob seu exame também sabia que isto não é rigorosamente certo. Pois poder-se-ia considerar ou a massa própria (a soma das massas de repouso) ou a massa relativa, i.e., a massa relativa aos eixos em repouso (proporcional à energia). Infelizmente nenhuma delas é estritamente conservada:

1. deixando fora a radiação, a massa própria é conservada; a massa relativa diminui devido à redução da energia cinética do movimento aleatório, durante a expansão.

⁴Eddington centra sua atenção para o universo expandindo-se por esta razão, mas as equações são sempre tais que o tempo é reversível, e para cada solução expandindo-se existe uma correspondente solução contraindo-se.

⁵Para distâncias pequenas comparadas com R pode ser escrito $\frac{r}{R} = \chi = \sin \chi$ aproximadamente; e [3.14] torna-se a expressão usual para coordenadas polares (r, θ, ϕ) .

2. Na conversão de matéria em radiação, a massa relativa é conservada. A massa própria diminui já que a radiação não tem massa própria.

Assim as duas massas podem diminuir um pouco no curso do tempo. Não obstante, segundo Eddington, essas complicações seriam insignificantes. E por isso assumiu para seu modelo que a massa própria e a massa relativa eram sempre iguais e as duas se conservariam para a ordem de aproximação por ele estabelecida.

É ao considerar analiticamente a instabilidade do universo de Einstein que [3.17] cobra importância na análise de Eddington. Fazendo $p = 0$ em [3.17] ele obteve

$$3\frac{d^2R}{dt^2} = R(\lambda - 4\pi\rho)$$

Para o equilíbrio, solução de Einstein, dever-se-ia ter $\rho = \frac{\lambda}{4\pi}$. Não obstante, se existisse uma pequena perturbação tal que $\rho < \frac{\lambda}{4\pi}$, $\frac{d^2R}{dt^2}$ seria positivo e o universo se expandiria. Esta expansão diminuiria a densidade e portanto $\frac{d^2R}{dt^2}$ aumentaria. Similarmente se existisse um mínimo excesso de massa, aconteceria uma contração a qual aumentaria continuamente. É desta análise que Eddington chega a sua conclusão que o universo de Einstein seria instável.

A pequena perturbação inicial aconteceria sem interferência sobrenatural. Se se começa com uma nebulosa uniformemente difusa a qual gradualmente se condensa em galáxias, a massa poderia não alterar-se, mas a massa equivalente usada aplicando as equações para uma distribuição estritamente uniforme deveria ser ligeiramente alterada. Parecia pois possível que deste processo evolucionário se originasse a expansão do universo. Uma vez começado, Eddington apontava, este deveria continuar e expandir-se em uma razão crescente. Eddington admitiu não ter decidido teoricamente se a condesação deveria começar uma expansão no lugar de uma contração.

Alternativamente ele supôs que o equilíbrio inicial poderia ser afetado pela conversão de matéria em radiação. Tal conversão porém não mudaria ρ , devido ao fato da massa da radiação ser igual à matéria convertida, mas aumentaria p . Da equação [3.17] se deduz que o aumento de p gera $\frac{d^2R}{dt^2}$ negativo; portanto o universo poderia começar a contrair-se. Esta explicação, Eddington enfatizou, deveria ser rejeitada. Pois parecia provável, em termos gerais, que a conversão de matéria em radiação não tivesse se iniciado até depois de um considerável grau de condensação nas galáxias ter acontecido, e a conseqüente expansão ter progredido.

Eddington conhecia um resultado obtido por R. C. Tolman (TOLMAN, 1930) no qual este sugeria a conversão de matéria em radiação como uma explicação da recessão das nebulosas. Não obstante ficava claro para Eddington que essa não seria uma explicação, pois de [3.17] deduzia-se que esta tende a retardar a expansão.

Prosseguindo seus argumentos, Eddington se propôs comparar as condições de equilíbrio (a) quando o universo contém só matéria em repouso, e (b) quando este contém só radiação. Assim, fazendo $\frac{dR}{dt}, \frac{d^2R}{dt^2} = 0$ em [3.15] e [3.16] obteve

$$8\pi\rho = -\lambda + \frac{3}{R^2}$$

$$8\pi p = \lambda - \frac{1}{R^2}$$

Tal que $\frac{1}{R^2} = 4\pi(\rho + p)$, $\lambda = 4\pi(\rho + 3p)$. Analisou os dois casos propostos, encontrando que

(a) Para matéria em repouso, $p = 0$. Assim $R^2 = \frac{1}{\lambda}$.

(b) Para radiação, $\rho = 3p$. Assim $R^2 = \frac{3}{2\lambda}$.

As massas totais seriam

$$(a) \frac{\pi}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$(b) \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Agora, fazendo $p = 0$, e considerando R_e, M_e o raio e a massa do universo de Einstein, R, M o raio e a massa do sistema sob consideração. Onde R é função do tempo e as outras quantidades são constantes. Eddington obteve os resultados para o universo de Einstein:

$$\frac{2}{\pi} M_e = R_e = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.18)$$

Do fato do volume total do universo esférico ser $2\pi^2 R_e^3$; obteve a densidade $\rho_e = \frac{1}{4\pi R_e^2} = \frac{\lambda}{4\pi}$. Agora, por [3.15]

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 1 &= \frac{1}{3} R^2 (\lambda + 8\pi\rho) \\ &= \frac{1}{3} R^2 \lambda + 4 \frac{M}{3\pi R} \\ \frac{dR}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{1}{3} R^2 \lambda - 1 + 4 \frac{M}{3\pi R}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

dessa forma ele chegou a seus conhecidos três casos de análise do universo:

1. Se $M > M_e$, encontrou que o lado direito não se anulava para nenhum valor positivo de R , e portanto o sistema expandir-se-ia continuamente desde um raio bem pequeno até um bem grande. O mínimo de $\frac{dR}{dt}$ é dado diferenciando [3.19] com respeito a R , $\frac{2}{3}R\lambda - 4\frac{M}{3\pi R^2} = 0$, tal que $R^3 = \frac{2M}{\pi\lambda}$ ou usando [3.18] $\frac{R}{R_e} = \left(\frac{M}{M_e}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Como o raio aumenta através do valor de R , a razão da expansão diminuiria e incrementar-se-ia novamente. Segundo Eddington, a dificuldade de aplicar este caso estaria em que se requereria um começo repentino das coisas.

2. Se $M < M_e$, então o lado direito anular-se-ia para dois valores positivos de R , os quais Eddington assumiu serem R_1, R_2 , e seria imaginário para os valores de R intermediários entre R_1, R_2 . Portanto ou o universo teria começado com uma velocidade finita de expansão expandindo-se até o raio R_1 e então contraiu-se, ou começou com uma velocidade finita de contração contraindo-se para o raio R_2 e aumentou de novo. Aqui Eddington admite a dificuldade de encontrar um ponto inicial natural para o desenvolvimento do universo atual. Portanto, caso se aceitasse esta visão, isto implicaria assumir que o universo atual começou com o raio R_2 , tal que inicialmente $\frac{dR}{dt} = 0$; pois este estaria expandindo-se continuamente.
3. O caso limite seria quando $M = M_e$. Então R_1 e R_2 tenderiam ao valor R_e . Assim o tempo que o raio permaneceria na vizinhança de R_e seria logaritmicamente infinito. Existindo, para Eddington, pelo menos uma satisfação filosófica em ver o universo como evoluindo infinitamente devagar desde uma distribuição uniforme primitiva em equilíbrio instável. Foi este o caso no qual Eddington investiu suas pesquisas.

Um ponto importante na sua escolha foi o fato de [3.19] poder ser integrada sem funções elípticas quando $M = M_e$. O resultado já tinha sido encontrado por Lemaître.

Sob a hipótese de ser $M_e = M$ a história da expansão do universo resolver-se-ia a uma transição gradual desde o universo de Einstein para o universo de De Sitter. Segundo Eddington o modelo de de Sitter daria uma melhor aproximação à expansão; mas isto dependeria da veracidade do fato que a estimativa da densidade média do universo ser menor que $10^{-28} \frac{g}{cm^3}$. Se isto fosse admitindo, nenhuma grande mudança seria requerida nas teorias que na época, tinham assumido um universo de De Sitter.

Na sua análise Eddington faz uma interpretação do universo de De Sitter como o limite de uma série de universos de densidade diminuindo gradualmente, enquanto que na visão original de De Sitter estava-se pensando em um universo completamente vazio, no qual os corpos materiais seriam colocados como corpos de prova.

Para Eddington, portanto, a prova da instabilidade do modelo de Einstein fortalecia grandemente os terrenos de interpretação do afastamento das nebulosas espirais como uma indicação da curvatura do universo. Quando esta explicação foi primeiro sugerida por de Sitter, tudo o que era conhecido era que dos dois modelos conhecidos que satisfaziam corretamente as equações de Einstein, um exibia um fenômeno deste tipo. Agora a posição seria que em cada universo que satisfaça as equações de Einstein, tal fenômeno deveria necessariamente aparecer no decorrer do tempo. O fenômeno não seria unicamente consistente com a teoria, mas estaria predito pela teoria.

O problema da expansão do universo foi estudado de forma mais detalhada por dois estudantes de Eddington, William McCrea e George McVittie. Eles estudaram um modelo cosmológico muito simples, em que se formasse uma única condensação de matéria em um ponto do universo, para verificar que efeito isso teria na estabilidade do universo. Concluíram que essa condensação produziria uma contração (e não expansão) do universo (McCREA & McVITTIE, 1930). Posteriormente, McVittie desenvolveu uma análise aproximada de um universo com uma distribuição descontínua de massas e chegou à conclusão oposta: a formação de condensações deveria produzir uma expansão, como Eddington havia suspeitado (NORTH, *The measure of the universe*, p. 126).

Em 1931 Lemaître publicou um artigo sobre esse ponto específico. Ele já havia desistido de sua explicação inicial e agora propôs que a expansão do universo seria produzida por uma “estagnação” do mundo - que seria uma diminuição de trocas de energia entre suas partes (LEMAÎTRE, 1931, p. 490).

Primeiramente, Lemaître apresentou uma prova de que as condensações não produziriam efeitos, utilizando o teorema de Birkhoff (LEMAÎTRE, 1931, p. 491). De acordo com esse teorema, no caso de um campo gravitacional com simetria esférica, o campo em uma superfície a uma dada distância do centro não pode sofrer alterações, a menos que haja transporte de matéria através dessa superfície. Assim, a contração da matéria não deveria ser capaz de produzir nenhum efeito - nem contração, nem expansão do universo - porque não poderia produzir uma mudança do campo gravitacional. É claro, no entanto, que esse argumento não levava em conta a variação de pressão criada pela contração da

matéria.

Para explicar o início da expansão, Lemaître introduziu a idéia de “estagnação”, que não passa na verdade de uma redução da pressão de radiação (LEMAÎTRE, 1931, p. 499). Portanto, apesar do nome estranho, sua proposta não era muito diferente da apresentada por Eddington.

Pouco depois, Eddington publicou um trabalho em que afirmou:

Foram feitas tentativas de estabelecer se a expansão deveria ser esperada teoricamente, em vez da contração, mas não estou seguro de que tenham tido sucesso. De qualquer forma elas envolvem hipóteses adicionais e não dependem simplesmente da lei da gravitação. (EDDINGTON, 1932, p. 7)

Nessa época, Eddington já estava desinteressado dessa questão, que lhe parecia sem importância teórica. A situação permaneceu confusa nos anos seguintes, pois diferentes autores chegaram a resultados contraditórios (NORTH, *The measure of the universe*, pp. 127-128).

Independentemente da causa que teria desencadeado a expansão do universo, Eddington acreditava que a melhor opção era que ele tivesse começado como um universo de Einstein, em equilíbrio, e estivesse agora tendendo a um universo de De Sitter. Essa escolha lhe parecia interessante porque continha o menor número de parâmetros arbitrários - a constante cosmológica e o raio inicial do universo estavam relacionados à massa total do universo.

Como foi Eddington quem mais divulgou e defendeu esse tipo de proposta, esse tipo de teoria acabou sendo conhecida como “universo de Lemaître-Eddington”.

Em 1931 Eddington publicou um artigo no qual defendeu esse modelo, afirmando que uma de suas vantagens era que assim se evitava o conceito de um instante no qual o universo começou, comentado: “Filosoficamente, a noção de um início da presente ordem da Natureza é repugnante para mim” (EDDINGTON, 1931a, p. 319).

Esse comentário desagradou Lemaître, talvez porque ele era um padre e, sob o ponto de vista religioso, um início do universo em certo momento do passado lhe parecia mais adequado. Logo em seguida, Lemaître propôs outra teoria cosmológica, em que o universo começava como uma grande condensação de matéria, um “átomo primitivo”, que explodia lançando átomos menores e radiação para todos os lados (KRAGH, 1987, p. 130). Esse foi o precursor do modelo do “big bang”, proposto quase 20 anos depois por Gamow. A partir desse momento, Lemaître deixou de aceitar o “universo de Lemaître-Eddington”.

3.15 A reação de Einstein ao universo em expansão

Diante das evidências astronômicas favoráveis a um universo em expansão, e vendo que os modelos dinâmicos não exigiam a presença da constante cosmológica, Einstein sugeriu, em 1931, que essa constante cosmológica fosse abandonada. Conta-se que ele teria dito, nessa época, que a introdução da constante cosmológica havia sido o erro mais grave de sua vida (RAY, 1990, p. 589).

Em 1932 Einstein e De Sitter publicaram um artigo conjunto, de apenas duas páginas (EINSTEIN & DE SITTER, 1932). Nesse trabalho eles comentam a falta de dados que permitam inferir se o espaço realmente possui uma curvatura e analisam um modelo do universo em expansão sem constante cosmológica. Desprezando também a pressão, ele obtêm uma relação entre as duas principais grandezas observáveis: a densidade média do universo atual ρ e a constante de Hubble H :

$$H^2 = \frac{\kappa\rho}{3}$$

Utilizando para a constante de Hubble o valor de 500 km/s por megaparsec, eles calculam uma densidade média para o universo de $4 \times 10^{-28} \frac{g}{cm^3}$, que era o limite máximo da densidade que havia sido estimada por De Sitter um ano antes. A curvatura do espaço não podia ser determinada pelos dados disponíveis e poderia ser nula.

Podemos tentar compreender o que se passava com Einstein nessa época, 14 anos depois da introdução da constante cosmológica, da seguinte forma. Em 1917, Einstein acreditava que as idéias de Mach eram fundamentais e que a teoria da relatividade geral deveria satisfazer o princípio de Mach. Essa foi uma das motivações do seu trabalho cosmológico. Além disso, a introdução do termo cosmológico nas equações de campo foi necessária para criar um universo em equilíbrio - que lhe parecia, na época, corresponder à realidade. Em 1931 esses dois motivos já não existiam, pois Einstein havia desistido das idéias de Mach e sabia que o universo estava em expansão. A terceira justificativa para introduzir o termo cosmológico, em 1917, era puramente matemática: a generalização mais natural das equações de campo de Einstein é obtida exatamente introduzindo esse termo. No entanto, essa generalização era acompanhada por um defeito: a constante cosmológica tinha um valor arbitrário, na teoria da relatividade geral, o que reduzia a beleza da teoria (RAY, 1990, p. 597). Logo depois, o trabalho de De Sitter mostrou ainda novos problemas: a teoria da relatividade com o termo

cosmológico previa a possibilidade de um universo sem matéria mas com inércia e com forças repulsivas, contrariando as concepções básicas de Einstein. Por todos esses motivos, é compreensível que a posição de Einstein tenha mudado posteriormente. Mas nada disso justifica que ele se acusasse de haver cometido um sério erro em 1917.

Pode ser que Einstein se culpasse por não haver previsto teoricamente a expansão do universo. Segundo Abraham Pais, se Einstein não tivesse introduzido a constante cosmológica e tivesse imposto as condições de simetria e homogeneidade de 1917, ele teria verificado que as equações de campo eram incompatíveis com um universo estático e poderia ter sugerido um modelo do universo em expansão. No entanto, deve-se notar que a previsão de um universo em expansão por Einstein seria tão fácil ou tão remota quanto a previsão de um universo em expansão por Newton (RAY, 1990, p. 599). Afinal de contas, nos dois casos (relatividade geral e física clássica) a teoria parecia indicar a impossibilidade de um universo estático, e nos dois casos um universo em expansão resolveria o problema. O fato histórico é que nem Newton nem Einstein tiveram essa idéia.

Tanto nas décadas de 1930 quanto posteriormente, houve diferentes posturas em relação à constante cosmológica. Muitos físicos seguiram o exemplo de Einstein e consideraram que ela podia ser dispensada. Outros a mantiveram para dar maior maleabilidade à teoria da relatividade geral, sob a forma de um parâmetro ajustável. Outros, enfim, consideraram que a constante cosmológica tinha um papel essencial na física. Entre esses últimos estava Eddington, que interpretou a constante cosmológica como a base do próprio conceito de comprimento. A posição de De Sitter se manteve bastante cautelosa:

Logo após o completamento da teoria [da relatividade geral], certas considerações de natureza filosófica ou metafísica levaram Einstein a introduzir em suas equações uma certa grandeza representada pela letra grega *lambda* e que ele chamou de “constante cosmológica”. É verdade que a generalidade completa da teoria, do ponto de vista matemático, exige essa constante, mas ela poderia ser zero sem prejudicar a teoria: as equações são completas sem ela. Não conhecemos seu significado físico exato e, até o presente, não conseguimos ainda penetrar as relações que a unem a outras constantes da física. A introdução dessa nova constante tem a aparência de uma complicação inútil e, na verdade, muitos físicos a consideraram assim. Mas, por outro lado, ela apresenta vantagens tão evidentes que foi adotada pela maio-

ria, mesmo antes que tivessem sido observados fenômenos suscetíveis de serem explicados pelas equações contendo o termo *lambda*, mas inexplicáveis sem ele. (DE SITTER, 1931, pp. 2-3)

Durante a década de 1930 a cosmologia se dividiu em duas linhas principais. Uma delas começou a investigar processos astrofísicos, tais como a condensação da matéria para formar galáxias, estudando também radiação cósmica e procurando explicar a formação dos elementos químicos. Outro grupo se manteve estudando as propriedades globais (geométricas e cinemáticas) do universo, dentro do contexto da relatividade geral ou propondo alternativas (como a de Milne). Essa segunda linha de pesquisa foi aos poucos se enfraquecendo, pois não existiam informações que permitissem escolher um dentre os vários modelos oferecidos. A cosmologia relativística tornou-se apenas um exercício matemático (SMITH, 1990, p. 58).

Na década de trinta não houve uma grande repercussão no avanço da construção de modelos cosmológicos. Mesmo que ainda existindo alguns trabalhos no tema, como por exemplo os de Tolman, o interesse declinou devido ao fato que parecia ter sido esgotada a análise teórica tanto de se existia ou não a constante cosmológica como por que o universo estava expandindo-se, e por sua vez, as observações não ofereciam nenhum avanço promissor. Foi só a partir de 1948 com o trabalho de Gamow (GAMOW, 1948) sobre o Big-Bang que a comunidade científica marcou um grande avanço no referente ao “modelamento” do universo.

Capítulo 4

O universo de Eddington

Logo no início da década de 1930, Eddington se fixou no modelo cosmológico de Lemaître-Eddington, e nunca mais o abandonou nem questionou. Como esse modelo começa com um universo de Einstein, que só pode existir se as equações de campo incluírem o termo cosmológico, Eddington também nunca colocou em dúvida a existência da constante cosmológica. Por vários outros motivos, ele acreditava que a constante cosmológica era uma grandeza física fundamental, determinando a curvatura do universo de Einstein e servindo de base para o próprio conceito de comprimento.

Havia dúvidas sobre o início do processo de expansão a partir do universo de Einstein, e Eddington sempre admitiu isso: “Vários pesquisadores tentaram examinar se havia alguma causa definida decidindo que o universo deveria cair em um estado de expansão em vez de contração; mas não foi atingida nenhuma conclusão decisiva” (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 220).

Em 1933, Eddington apresentou os principais parâmetros do universo da seguinte forma (EDDINGTON, *The expanding universe*, pp. 96-97):

1. Velocidade de recessão das galáxias = 528 km/s por megaparsec
2. Raio inicial do universo (antes do início da expansão) (R_e) = 328 megaparsec = 1068 milhões de anos-luz
3. Massa total do universo (M) = $2,14 \times 10^{55}$ g = $1,08 \times 10^{22}$ massas do Sol
4. Número de prótons do universo (N) = número de elétrons = $1,29 \times 10^{79}$
5. Densidade média inicial da matéria do universo (ρ) = $1,05 \times 10^{-27}$ g/cm³
6. Constante cosmológica $\lambda = 9,8 \times 10^{-55}$ cm²

Apesar do número de algarismos significativos desses valores, Eddington alertava que os 5 primeiros números poderiam estar errados por um fator 2, e os dois últimos por um fator 4. Essas grandezas, evidentemente, estavam relacionadas entre si (EDDINGTON, *The expanding universe*, p. 102-103).

$$\rho = \frac{M}{(2\pi^2 R^3)}$$

$$\lambda = \frac{1}{R_e^2}$$

$$\frac{GM}{c^2} = \frac{1}{2}\pi R_e$$

A velocidade de expansão (ou, mais exatamente, a constante de Hubble) é variável, no modelo de Lemaître-Eddington, mas seu valor máximo podia ser calculado e era igual a $\frac{c}{(\sqrt{3}R_e)} = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}$ (EDDINGTON, *The expanding universe*, p. 103).

Conhecendo-se apenas uma dessas constantes do universo, todas as outras podiam ser calculadas (com exceção da velocidade de recessão, já que apenas o valor limite tinha uma relação exata com as outras constantes). Supondo que a velocidade de recessão atual está próxima do limite máximo, era possível calcular todas as outras constantes a partir do valor medido por Hubble e Humason.

Parecia, portanto, que apenas faltava determinar de forma mais exata o valor das constantes do modelo cosmológico. Não havia mais nenhuma contribuição teórica importante a fazer, se esse modelo estava correto.

4.1 O cálculo teórico das constantes do universo

Eddington praticamente não participou do desenvolvimento posterior da cosmologia relativística, pois já estava envolvido com outro tipo de preocupação. Em torno de 1930, ele começou a dedicar-se à tentativa de deduzir teoricamente certas constantes numéricas fundamentais da física. Essa linha de investigação, baseada em uma combinação da teoria da relatividade com a mecânica quântica, foi inspirada pelo trabalho de Dirac sobre o elétron e utilizou métodos algébricos inventados pelo próprio Eddington.

Ao longo de uma série de trabalhos, Eddington procurou determinar teoricamente, entre outras, as seguintes constantes adimensionais:

1. O inverso da constante de estrutura fina $\frac{hc}{(2\pi e^2)}$ para a qual obteve inicialmente o valor inteiro 136 e, depois, 137.

2. A razão entre as massas do próton M_p e do elétron m , para a qual obteve inicialmente o valor $\frac{M_p}{m} = \frac{136^2}{10} = 1849,6$ e, depois, o valor

$$\frac{M_p}{m} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{40}{136^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{40}{136^2}}} = 1847,60$$

3. Uma relação entre grandezas cosmológicas e grandezas associadas às partículas da matéria, associando o número total de partículas do universo N e o raio de curvatura do universo de Einstein R com as massas do próton e do elétron, carga do elétron e velocidade da luz:

$$\frac{M_p m}{M_p + m} \left(\frac{c}{e}\right)^2 = \frac{\sqrt{N}}{R}$$

4. Uma relação entre o número de partículas do universo e a razão entre a força elétrica e a força gravitacional entre um elétron e um próton, $F = \frac{e^2}{(GM_p m)}$ que levou inicialmente à equação

$$F = \frac{e^2}{(GM_p m)} = \frac{2}{\pi} \sqrt{N}$$

e, depois, a uma equação corrigida:

$$F = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{136}{137}\right)^2 \sqrt{5N}$$

5. O “número cósmico” N , que representa o número total de partículas do universo ou, mais exatamente, o número de pares elétron-próton que constituem a matéria do universo, para o qual Eddington obteve inicialmente valores aproximados como $N = 1,4 \times 10^{79}$ e, por fim, o valor

$$N = \frac{3}{2} \times 136 \times 2^{256} = 2,36216... \times 10^{79}$$

Esse tipo de pesquisa foi gradualmente se tornando o centro de seu trabalho. Nos últimos anos de sua vida, Eddington apenas se dedicava àquilo que denominou de “teoria fundamental”, que deveria proporcionar uma base para toda a física. Além de um grande número de artigos, publicou três livros sobre sua teoria:

Relativity theory of protons and electrons, 1936

The combination of relativity theory and quantum theory, 1943

The fundamental theory, 1946

Essa última obra estava ainda incompleta quando Eddington faleceu e foi preparada para publicação por seu amigo Edmund Whittaker.

Nos primeiros anos, essa linha de trabalho de Eddington despertou grande interesse e expectativa. Depois, no entanto, não foi aceita pela comunidade científica e é considerada, hoje em dia, apenas uma curiosidade do passado. Isso não impede, no entanto, que possua grande interesse histórico, principalmente porque essas idéias partiram de um pesquisador que mostrou enorme capacidade em outras áreas da física e que certamente não estava senil. Jacques Merleau-Ponty comentou que a parte mais difícil da “teoria fundamental” é a álgebra dos números-E ou “sedenions”, e que esta constitui um trabalho matemático correto:

Esses desenvolvimentos são difíceis, mas seguros. Durante a vida de Eddington e sobretudo depois de sua morte, foram consagrados numerosos estudos sobre os *números-E*. De acordo com o que sabemos, os autores desses estudos não assinalaram nenhum erro nem insuficiência nos enunciados e demonstrações de Eddington; esse fato, embora puramente negativo, merece ser notado; ele mostra que não poderíamos atribuir a obscuridade dos escritos tardios de Eddington a algum enfraquecimento de suas capacidades matemáticas, a algum “desarranjo” de sua lógica. (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, p. 98)

4.2 Eddington e a constante cosmológica

Em um universo de Einstein o raio de curvatura R do espaço está relacionado com a constante cosmológica:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Eddington obteve uma relação semelhante a esta, com um significado mais amplo, que o levou a interpretar a constante cosmológica como uma grandeza fundamental do universo. O resultado matemático foi apresentado pela primeira vez em 1921 (EDDINGTON, 1921b), e depois, em uma versão mais correta, em 1922 (EDDINGTON, 1922a). Esta versão corrigida foi depois inserida no livro *The mathematical theory of relativity*.

Uma superfície tem uma curvatura gaussiana K que é o inverso do produto de seus dois principais raios R_1 R_2 de curvatura: $K = \frac{1}{(R_1 R_2)}$. No caso de um

espaço-tempo genérico, há uma generalização desse conceito, introduzindo o raio de curvatura esférica como sendo o raio de uma hiper-esfera que tem a mesma curvatura gaussiana que aquela superfície, no ponto considerado. Esse conceito está associado ao traço do tensor de Ricci (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 151).

Um espaço-tempo riemanniano genérico contém 10 funções $g_{\mu\nu}$ das quatro coordenadas. Ele pode ser representado como uma superfície de 4 dimensões em um hiper-espaço euclidiano, com 10 dimensões (coordenadas $y_1, y_2, \dots, y_{10}$). A partir da comparação entre esses espaços, Eddington chega a um modo de calcular a curvatura de uma superfície em qualquer direção, como por exemplo, $G_{(1)}$ na direção de x_1

$$G_{11} - \frac{1}{2}Gg_{11} = \frac{1}{2}G_{(1)}$$

Generalizando, ele introduz a quádrlica

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu}\right) dx_\mu dx_\nu = 3$$

a partir da qual se pode calcular a curvatura em cada direção. Suponhamos que o raio dessa quártica na direção x_1 seja igual a ρ_1 . Escolhendo-se a direção, x_1 e tomando-se o deslocamento $dx_\mu = (\rho_1, 0, 0, 0)$, teremos:

$$\left(G_{11} - \frac{1}{2}Gg_{11}\right) \rho_1^2 = 3$$

Por comparação, vemos que

$$\frac{1}{2}G_{(1)}\rho_1^2 = 3$$

e, portanto,

$$G_{(1)} = \frac{6}{\rho_1^2}$$

Do mesmo modo, podemos calcular a curvatura em qualquer outra direção utilizando a quádrlica acima (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 152).

Se partirmos da equação de Einstein sob a forma:

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)$$

e a aplicarmos ao espaço vazio, teremos:

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$$

Contraindo esta expressão obtemos $G = 4\lambda$, e portanto

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu} = -\lambda g_{\mu\nu}$$

Multiplicando os dois lados por $dx_\mu dx_\nu$ e comparando com a quádrica, temos

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu}\right) dx_\mu dx_\nu = 3 = -\lambda g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Portanto,

$$-ds^2 = \frac{3}{\lambda}$$

Esta equação pode ser interpretada como uma indicação da constância da curvatura em todas as direções: em todos os pontos, no espaço vazio, o raio de curvatura tem o valor constante $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$ (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 153). Inversamente, se o raio de curvatura do espaço-tempo é o mesmo em todas as direções, no espaço vazio, então a lei de Einstein (com a constante cosmológica) é válida.

Note-se que o resultado não é óbvio, de modo nenhum, porque o espaço vazio não precisa ser desprovido de campos gravitacionais e pode ter uma métrica bastante complicada e assimétrica. No entanto, aparece uma curvatura do espaço que é sempre a mesma, igual a $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$, qualquer que seja esse campo.

Este resultado leva Eddington a oferecer uma nova interpretação para a constante cosmológica. Primeiro, ele esclarece o que significaria, em princípio, fazer uma medida de curvatura do espaço-tempo em alguma direção: seria preciso comparar as propriedades do espaço com algum padrão de comprimento, colocado na mesma direção, no mesmo ponto do espaço. Portanto, o resultado acima obtido poderia ser descrito desta forma: “o raio de curvatura em qualquer ponto e em qualquer direção mantém uma proporção constante em relação ao comprimento de uma unidade material específica colocada no mesmo ponto e orientada na mesma direção” (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 153). Invertendo a relação, Eddington obtém:

O comprimento de uma estrutura material específica mantém uma razão constante em relação à curvatura do mundo no lugar e na direção em que for colocada.

Ou seja: quando uma estrutura material qualquer é deslocada no espaço (vazio) e colocada em qualquer ponto, em qualquer direção, ela deve ajustar seu

comprimento de tal forma a manter uma proporção constante com a curvatura do espaço.

Imagine primeiro um universo no qual a curvatura, em relação a algum padrão (não-material) de comprimento fosse anisotrópica. Um elétron inserido nele precisaria ter a mesma anisotropia para que pudesse obedecer às condições de equilíbrio que um elétron simétrico obedece no mundo isotrópico. A mesma anisotropia persistiria em qualquer estrutura material formada desses elétrons. Finalmente, quando nós medimos o mundo, isto é, fazemos comparações com estruturas materiais, a anisotropia ocorre dos dois lados da comparação e é eliminada. A lei da gravitação de Einstein exprime o resultado dessa eliminação. A simetria e homogeneidade expressas pela lei de Einstein não é uma propriedade do mundo externo, mas uma propriedade da operação de medida.

Deste ponto de vista certamente a constante λ não pode ser zero; só assim um espaço vazio tem um raio de curvatura finito em relação aos padrões familiares. Um elétron nunca poderia decidir que tamanho deve ter a menos que existisse algum padrão de comprimento independente dele mesmo, para que ele possa se comparar. (EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, p. 154)

Portanto, a constante cosmológica estabelece o raio de curvatura $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$ de um espaço vazio e representa o padrão de comprimento em relação ao qual todos os outros comprimentos devem ser comparados. Dessa forma, para Eddington, o termo cosmológico deixa de ser uma adição *ad hoc* da teoria de Einstein e passa a ser essencial, não podendo nunca desaparecer das equações de campo.

4.3 A relação entre o universo e o átomo

A mesma idéia reaparece em muitos trabalhos de Eddington, sob várias formas. Vamos acrescentar mais alguns aspectos, a partir de uma obra de 1935: *New pathways in science*.

A constante cósmica é o agente que está por trás do fenômeno de recessão das galáxias. Mas é também o agente que está por trás de muitas outras coisas. Alguns anos atrás eu me convenci fortemente que nestas descobertas astronômicas nos recessos remotos do espaço nós capturamos a chave para os mistérios do próton e do elétron. Tudo o que fui capaz de desenvolver desde então confirma minha convicção. No espaço esférico, aqueles que começam em uma direção devem se encontrar por fim com os que começaram na direção oposta. Da

mesma forma, na ciência, os astrônomos que caminharam em busca do inconcebivelmente grande estão agora encontrando os físicos atômicos que foram em busca do inconcebivelmente pequeno. (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 222)

Eddington coloca, em seguida, a relação entre o mundo microscópico e macroscópico de uma forma bastante simples. Se dissermos que o universo se expande, essa expansão deve ser medida em relação a algum padrão de comprimento, que pode ser um corpo material ou alguma grandeza atômica. “Mas se o universo está se expandindo em relação a esses padrões, todos esses padrões estão encolhendo em relação ao universo. A teoria do universo em expansão é também a teoria do átomo que encolhe” (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 223).

Em princípio, a teoria física poderia prever uma contração do átomo, em vez de uma expansão do universo e, é claro, teria que aparecer na teoria da contração do átomo alguma grandeza que desempenhasse um papel semelhante à constante cosmológica. De certa forma, portanto, deve existir uma relação entre a teoria da expansão do universo e uma teoria suficientemente geral para prever a contração das dimensões atômicas. “Assim, deveríamos ser capazes de nos aproximar da constante cosmológica através da teoria do átomo (ou mais explicitamente através das equações da teoria quântica que determinam o tamanho dos sistemas de pequena escala) tanto quanto pela teoria do universo” (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 223).

O raciocínio de Eddington pode parecer estranho, mas tem uma boa fundamentação. Ele está simplesmente generalizando a idéia que fundamenta a teoria da relatividade. As medidas físicas devem ser relações ou comparações. Não há sentido em falar sobre tamanho absoluto - todos os tamanhos são relações entre tamanhos - e, portanto, nas teorias físicas fundamentais, só deveriam aparecer razões entre comprimentos e nunca comprimentos isolados. As equações relativas ao átomo devem ser capazes de estabelecer uma relação entre suas dimensões e alguma outra grandeza física dotada de tamanho, mas não devem ser capazes de estabelecer um tamanho absoluto, sem comparação com nada.

Temos que reconhecer portanto que aquilo que chamamos de propriedades do elétron são propriedades combinadas ou relações entre o elétron e algum outro sistema físico que constitui um sistema de comparação. Pois um elétron por si próprio não tem propriedades. Se ele estivesse totalmente sozinho, não haveria nada que pudesse ser

dito sobre ele - nem mesmo que ele é um elétron. (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 225)

Podemos perceber nesse tipo de raciocínio uma motivação semelhante à que havia dirigido o trabalho de Ernst Mach e de Einstein (até 1920). No entanto, Eddington não pensa propriamente em *interações* como a causa das propriedades de um elétron. Ele pensa que é impossível conceber uma grandeza sem um termo de comparação. É um princípio epistemológico e não uma suposição sobre um processo físico.

Mesmo se aceitarmos esse raciocínio, poderíamos pensar que a teoria física poderia estabelecer uma relação entre as propriedades do elétron e de algum outro objeto microscópico, e não necessariamente uma relação com o universo. No entanto, Eddington tem um argumento contra essa possibilidade:

Na física atual a equação mais fundamental é a equação de onda do elétron. Supõe-se usualmente que ela descreve apenas o elétron. Mas vimos que isso seria desprovido de sentido - não há nada para descrever. Ela descreve a relação entre o elétron e um objeto ou sistema físico de comparação; e embora o sistema de comparação não seja mencionado, podemos perceber facilmente que ele deve ser o universo - não o universo real, mas o universo idealizado fazendo-se um arredondamento dos campos eletromagnéticos e gravitacionais. Pois se estivessem envolvidos objetos de comparação locais, a mecânica ondulatória precisaria, por seus próprios princípios, utilizar uma equação mais complicada com uma dupla função de onda para exibir as relações observáveis envolvendo o elétron e aquele objeto. (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 226)

Portanto, Eddington acredita que a teoria de Dirac do elétron deve conter, escondida, uma relação entre o elétron e o universo. Ocorre, porém, que na teoria do elétron todas as constantes são conhecidas, enquanto na teoria cosmológica havia uma constante (λ) desconhecida. De alguma forma, comparando a equação do elétron com a teoria cosmológica, deveria ser possível encontrar o valor da constante cosmológica (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 227).

No entanto, o procedimento não era tão simples assim. Primeiramente, segundo Eddington, era necessário corrigir a teoria quântica, já que esta não era relativística (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 227). Poderíamos adicionar: seria também necessário corrigir a teoria da relatividade, que não obedece

aos princípios quânticos. Nessa época, Eddington não pensava nesse outro aspecto, mas ao desenvolver a última versão de sua teoria trabalhou também nesse outro extremo.

4.4 As constantes fundamentais da física

Tendo argumentado que todas as grandezas importantes devem ser relativas - ou seja, razões entre grandezas do mesmo tipo, Eddington analisou as constantes físicas fundamentais e procurou relações numéricas (adimensionais) entre elas, pois apenas essas constantes numéricas poderiam ter um significado teórico mais profundo.

A natureza é medida por seu próprio padrão. Assim o significado de nossas constantes físicas está nas razões puramente numéricas que estão contidas nelas. (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 230)

Como constantes físicas fundamentais, Eddington indicou as seguintes (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 230):

- e = carga do elétron
- m = massa do elétron
- M = massa do próton
- h = constante de Planck
- c = velocidade da luz
- G = constante gravitacional
- λ = constante cosmológica

Note-se que ele estava incluindo as constantes básicas da teoria da gravitação, do eletromagnetismo e da teoria quântica. A termodinâmica ou a teoria das forças nucleares não aparecem contempladas nesta lista.

Todas as constantes escolhidas por Eddington possuem dimensões que podem ser representadas em função de comprimento, tempo e massa. Assim, combinando essas sete constantes é possível substituir essas constantes por outras sete, três das quais tendo dimensões respectivamente de comprimento, de massa e de

tempo, e outras quatro sendo adimensionais. Eddington indicou quatro combinações adimensionais que lhe interessava discutir (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 232):

$$(a) \frac{M}{m} \quad (b) \frac{hc}{2\pi e^2} \quad (c) \frac{e^2}{GMm} \quad (d) \frac{2\pi c}{h} \sqrt{\frac{Mm}{\lambda}}$$

(a) é a razão entre as massas do próton e do elétron, que se sabia ser aproximadamente igual a 1840; (b) é a constante de estrutura fina, cujo valor era aproximadamente 137 [na verdade, dá-se o nome de “constante de estrutura fina” ao *inverso* deste número, ao contrário do que Eddington fazia]; (c) é a razão entre a força elétrica e a força gravitacional entre um elétron e um próton, cujo valor é de aproximadamente $2,3 \times 10^{39}$; e (d) é uma razão mais complicada, entre um comprimento de tipo atômico e o raio de curvatura natural do espaço, com valor aproximado de $1,2 \times 10^{39}$.

A partir dessas quatro constantes é possível evidentemente, por multiplicação, divisão e exponenciação, obter muitas outras constantes adimensionais, mas qualquer delas será uma combinação dessas quatro (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 232). Se a teoria pudesse proporcionar os valores de quatro constantes adimensionais, teria atingido o máximo que pode ser feito.

Eddington acreditava que o cálculo teórico das constantes poderia depender de unificações de teorias. No eletromagnetismo, por exemplo, havia uma constante (a razão entre as unidades de carga eletrostática e eletromagnética) que tinha dimensões de velocidade e valor experimental próximo ao da velocidade da luz. Com a unificação entre eletromagnetismo e óptica, essa constante se tornou idêntica à velocidade da luz, reduzindo assim uma constante básica da física. Da mesma forma, a teoria do corpo negro de Planck reduziu o número de constantes necessárias para descrever as várias leis da radiação. A existência de 4 constantes adimensionais indicaria o grau de unificação que ainda faltava na física (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 234).

As constantes (c) e (d) tinham valores muito altos e próximos entre si. Eddington suspeitou - como outras pessoas - que não poderia ser uma coincidência a existência de números tão grandes e semelhantes. Supôs que a base dessas constantes fosse algum número associado ao universo como um todo (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 234).

4.4.1 A constante de estrutura fina

Uma das constantes adimensionais era a constante de estrutura fina, $\frac{hc}{2\pi e^2}$. Eddington considerava essa constante como a razão entre duas unidades de ação. A constante $\frac{h}{2\pi}$ representa o quantum de ação de Planck, e a grandeza $\frac{e^2}{c}$ tem as mesmas dimensões e deve também representar uma ação. Já em 1914, Lewis e Adams haviam sugerido que deveria existir uma relação simples entre essas grandezas (LEWIS & ADAMS, 1914, p. 97). A relação sugerida foi:

$$h = \frac{\varepsilon''^2}{c} \sqrt[3]{\frac{8\pi^5}{15}}$$

Os autores utilizando o símbolo ε' para representar a carga elétrica no sistema de Heaviside, sendo $\varepsilon'' = 4\pi e$. Fazendo a substituição, teríamos:

$$\frac{hc}{2\pi e^2} = 16\pi^2 \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{15}} = 137,35$$

No caso do trabalho de Lewis e Adams, a “dedução” não se baseia em nenhuma teoria física, mas apenas em considerações geométricas e dimensionais. A argumentação de Eddington foi completamente diferente.

Eddington comentou que a grandeza $\frac{e^2}{c}$ também representava uma unidade de ação, com o seguinte significado: quando dois elétrons (ou um próton e um elétron) estão a uma distância r , a energia potencial entre eles é $V = \frac{e^2}{r}$ (em unidades eletrostáticas), e a luz demora um tempo $t = \frac{r}{c}$ para ir de um até o outro. Multiplicando essa energia por esse tempo obtemos a unidade de ação $\frac{e^2 r}{r c} = \frac{e^2}{c}$, que está associada à interação entre cargas elétricas. Dividindo $\frac{h}{2\pi}$ por $\frac{e^2}{c}$ obtemos $\frac{hc}{2\pi e^2}$ que vale aproximadamente 137 e que representa portanto a razão entre o quantum de ação de Planck e a unidade de ação relacionada com a interação entre dois elétrons (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 235).

Assim, em todos os problemas que envolvem partículas e radiação - matéria e éter - temos que tratar com dois sistemas construídos em escalas diferentes, construídos de átomos de ação de tamanhos diferentes. A teoria atual não tenta explorar o significado dessa diferença de escala; simplesmente a aceita como um fato empírico e introduz uma constante de estrutura fina para dar conta dela. Mas isso não pode ser o limite final para o progresso. Somos desafiados a encontrar uma teoria unificada de partículas elétricas e radiação na qual a ação do tipo eletrostático e a ação do quantum são buscadas até suas

fontes. Então seremos capazes de compreender por que um pertence a um átomo que é 137 vezes o outro átomo, e realmente perceberemos essa razão tão claramente quanto percebemos que a circunferência de um círculo é 3,14159... vezes seu diâmetro. (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 235)

O modo pelo qual Eddington tentou calcular o valor da constante de estrutura fina variou ao longo dos anos. Deve-se notar que a exposição que estamos apresentando aqui é de 1935, vários anos depois de suas primeiras tentativas. Pode ser que ele pensasse de forma completamente diferente no início de sua pesquisa.

Como $\frac{hc}{2\pi e^2} = 137$, podemos escrever a energia potencial de um par de elétrons como $\frac{e^2}{r}$ ou como $\frac{1}{137} \frac{hc}{2\pi r}$. Pode-se assim dizer que a energia potencial entre dois elétrons é 1/137 do valor que esperaríamos que houvesse, levando em conta a existência do quantum de Planck. A idéia básica de Eddington é que a energia $\frac{hc}{2\pi r}$ está distribuída entre 137 graus de liberdade do sistema de dois elétrons, e que apenas um desses graus de liberdade é a distância entre as duas cargas. Assim apenas 1/137 da energia fica relacionada à energia potencial eletrostática.

O conceito de grau de liberdade utilizado por Eddington é abstrato e não corresponde ao da física clássica. Ele introduz a teoria de Dirac do elétron, observando que há certos símbolos associados a esse sistema do tipo EF, onde E se refere a uma das partículas e F se refere à outra. Há 16 tipos de símbolos E e outros 16 tipos de símbolos F, possibilitando $16^2 = 256$ combinações diferentes EF. Dessas 256, 120 são indistinguíveis entre si. Há, por isso, apenas $256 - 120 = 136$ combinações diferentes possíveis EF. Portanto, a energia pode se distribuir de 136 modos diferentes, e cada um desses modos corresponde a $\frac{1}{136} \frac{hc}{2\pi r}$ (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 237).

Nesta obra, que não é técnica, Eddington não mostra como calcular esses números, apenas indica a idéia geral que está por trás dos cálculos.

O próprio Eddington indica em seguida que essa análise permite explicar o surgimento do número 136, mas não 137. De fato, sob o ponto de vista histórico, Eddington havia primeiramente calculado que a constante $\frac{hc}{2\pi e^2}$ seria igual a 136, e só depois chegou a 137. De certa forma, ele está indicando nesse livro os passos que seguiu em sua pesquisa.

Para introduzir o 137^o grau de liberdade, Eddington faz considerações sobre a estatística de Fermi-Dirac. Primeiramente ele faz uma comparação com um fenômeno clássico: o movimento de um elétron é influenciado pela presença de outro (pelas forças eletrostáticas) e, por isso, a probabilidade de encontrá-lo em

certo estado vai depender da presença de outros elétrons. Quando são estudados apenas dois ou poucos elétrons, faz-se uso dessas forças eletrostáticas para estudar suas influências. Por outro lado, em análises estatísticas, com grande número de partículas, a diferença entre o comportamento entre um conjunto de elétrons e um conjunto de átomos clássicos é dada pelo tipo de estatística à qual os elétrons obedecem (a estatística de Fermi-Dirac). Eddington vai afirmar que os dois tipos de teorias são análises diferentes de uma mesma interação e que é possível unificar os dois enfoques (EDDINGTON, *New pathways in science*, pp. 239-240). Em seguida, Eddington dá o passo fundamental: ele reinterpreta a força coulombiana entre dois elétrons como sendo uma consequência da impossibilidade de distinguir dois elétrons entre si:

É bem conhecido que a estatística de Fermi-Dirac é uma consequência do fato que as partículas envolvidas não podem ser distinguidas uma da outra. Mas a origem da interação deve ser a mesma, seja quando a exprimimos por uma nova estatística ou pela concepção de força. Se a estatística de Fermi-Dirac surge da troca de partículas indistinguíveis, as forças de Coulomb também. Portanto a energia de Coulomb é a energia de troca. Isso dá uma indicação clara sobre a linha a ser seguida ao fazer um cálculo teórico do seu valor, $\frac{1}{137r}$. Devemos realizar para duas cargas o que Fermi e Dirac parecem ter realizado para um grande número de cargas; quer dizer, devemos estudar em detalhe o modo pelo qual as probabilidades relacionadas com um sistema de duas partículas são afetadas pelo fato que não podemos distinguir uma partícula da outra. (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 240)

Prosseguindo sua análise, Eddington conclui que além dos 136 graus de liberdade associados às 136 diferentes combinações dos símbolos EF que caracterizam um par de elétrons, é necessário introduzir um 137 grau de liberdade associado à possibilidade de troca entre os dois elétrons. Tratar os dois elétrons como distintos significa estabelecer a impossibilidade de que eles se aproximem indefinidamente e ocupem o mesmo lugar. Tratar os dois elétrons como indistinguíveis significa que um deles pode ocupar o lugar do outro, possibilitando assim um tipo de movimento que era impossível no outro caso. Isso, segundo Eddington, introduz um novo grau de liberdade no sistema, permitindo passar de 136 para 137 graus de liberdade. Assim, $1/137$ da energia do sistema está relacionada ao “movi-

mento” neste grau de liberdade, que está associado justamente ao movimento radial (redução de distância entre os elétrons) e à energia Coulombiana.

Esta é apenas uma descrição qualitativa da teoria de Eddington, que permite termos uma idéia geral sobre o seu método de trabalho. Mas não se pode avaliar o trabalho de Eddington ou criticá-lo apenas a partir desse tipo de descrição, que aparece em uma obra de popularização. Sabemos que qualquer teoria, quando é popularizada, sofre simplificações e distorções. Se tentássemos avaliar a própria teoria da relatividade a partir de obras de divulgação (mesmo as melhores delas), a teoria deveria ser considerada insatisfatória e até ridícula. É interessante indicar que, na mesma época do primeiro trabalho de Eddington sobre o assunto, outros autores sugeriram também relações para calcular $\frac{hc}{2\pi e^2}$. Essas outras propostas, no entanto, em vez de propor algum fator puramente numérico, introduziram uma comparação entre $\frac{hc}{e^2}$ e a razão entre as massas do próton e do elétron (BOND, 1930, p. 995):

$$\text{Perles (1928)} \quad \frac{hc}{e^2} = \frac{M_p}{\pi-1}$$

$$\text{Fürth (1929)} \quad \frac{hc}{e^2} = \frac{15}{32} \frac{(M_p+m)^2}{M_p m}$$

Com os dados disponíveis na época, Bond calculou que a primeira relação (de Perles) coincidia com as medidas experimentais com um erro relativo de apenas 1,6 partes em 1.000, porém não tinha nenhuma base teórica, devendo ser interpretada apenas como uma coincidência. A segunda relação (de Fürth) tinha uma concordância pior, com uma diferença relativa de 1,2% que era 18 vezes maior do que o erro provável das medidas (BOND, 1930, p. 1001).

4.4.2 A massa do elétron

Outra das constantes fundamentais, adimensionais, é a razão entre a massa do elétron e a do próton. Para tentar deduzir essa razão, Eddington parte da seguinte idéia: a equação de Dirac de um elétron envolve a massa dessa partícula. Porém, a massa de uma partícula isolada não tem sentido - apenas se pode falar de razões entre massas, ou de relações entre a massa do elétron e outras massas do universo. Se a equação do elétron envolvesse alguma outra partícula com a qual ele está interagindo, apareceria a razão entre suas massas na equação. No caso da equação de um único elétron, a sua massa deve ser, na verdade, a razão entre a massa do elétron e alguma massa associada ao universo como um todo, e a equação do elétron deve ser, na verdade, uma equação que relaciona o elétron com o universo, mas em que o universo aparece de forma “disfarçada”. Eddington procura por isso determinar em que condições uma equação de onda descrevendo

dois corpos (o universo e um elétron) pode ser transformado na equação do elétron (uma única onda) e encontra a seguinte condição (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 247):

$$10m^2 - 136mm_0 + m_0^2 = 0$$

Nessa equação, m_0 é uma massa cósmica (que não é a massa do universo), que serve como padrão de comparação para a massa m do elétron.

Resolvendo a equação de segundo grau, Eddington obtém dois valores positivos:

$$M = 13,593m_0 \quad m = 0,07357m_0$$

Como o valor dessa massa cósmica de referência m_0 não é determinado pela teoria, não se pode encontrar o valor de m , porém Eddington divide um valor pelo outro e obtém 1847,6, que é o valor experimental da razão entre a massa do próton e a do elétron (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 247). Assim, Eddington identifica as duas raízes dessa equação de segundo grau com as duas partículas fundamentais do universo (nessa época, pensava-se que não havia outras partículas fundamentais).

Para a própria massa de referência, Eddington proporciona uma análise aproximada, baseando-se na seguinte idéia. No universo há N partículas, distribuídas ao acaso em um espaço de raio R . Considerando-se que a incerteza da posição de cada partícula é da ordem de R , o centro de massa dessa distribuição terá uma incerteza da ordem de $\frac{R}{\sqrt{N}}$. Pelo princípio de Heisenberg, haverá uma incerteza de momento associada a essa incerteza de posição, que será da ordem de $\delta p = \frac{h}{2\pi} \frac{R}{\sqrt{N}}$. Eddington associa a esse momento uma massa da ordem de $\frac{\delta p}{c}$ e considera que essa é a massa cósmica de referência m_0 (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 249):

$$m_0 = \frac{h}{2c\pi} \frac{\sqrt{N}}{R}$$

O próprio Eddington comenta que não estava muito seguro sobre esse cálculo, mas que supunha que a idéia geral estava correta, podendo no entanto haver a necessidade de alguns ajustes de detalhes (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 249). Utilizando os valores experimentais conhecidos para a massa do próton, é possível calcular m_0 . Utilizando o valor do raio do universo de Einstein obtido a partir de dados astronômicos, Eddington avaliou o número N de partículas do universo como sendo da ordem de 10^{79} , o que era coerente com os dados a respeito da massa das galáxias e sobre o tamanho do universo, na época (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 250).

4.4.3 As constantes envolvendo grandes números

Como vimos, duas das constantes adimensionais de Eddington tinham valores da ordem de 10^{39} : as constantes (c) e (d):

$$(c) \quad \frac{e^2}{GMm} \quad (d) \quad \frac{2\pi c}{h} \sqrt{\frac{Mm}{\lambda}}$$

Recordemos que (c) é a razão entre a força elétrica e a força gravitacional entre um elétron e um próton, e (d) é uma razão entre um comprimento de tipo atômico e o raio de curvatura natural do espaço.

Alguns autores já havia feito sugestões sobre as constantes físicas adimensionais com altos valores. Hermann Weyl havia sugerido que o raio de curvatura do espaço-tempo R , o raio elétrico do elétron R_e e o raio gravitacional do elétron R_g formariam aproximadamente uma progressão geométrica (BOND, 1930, p. 1003), ou seja:

$$\frac{R}{R_e} = \frac{R_e}{R_g} \quad \text{ou} \quad RR_g = R_e^2$$

Os raios do elétron eram definidos igualando-se a energia potencial eletrostática ou gravitacional de uma carga e com a energia de repouso do elétron, obtendo-se:

$$R_e = \frac{e^2}{mc^2} \quad R_g = \frac{Gm^2}{mc^2} = \frac{Gm}{c^2}$$

Portanto, a sugestão de Weyl conduzia a uma relação parecida com a constante (c) de Eddington:

$$\frac{R_e}{R_g} = \frac{e^2}{Gm^2}$$

Outro autor que já havia sugerido uma explicação para um dos grandes números foi Fürth, que em 1929 apresentou a relação (BOND, 1930, p. 996):

$$\frac{hc}{2(M_p + m)^2 G} = \frac{\pi}{2}(16)^{32}$$

Como hc pode ser substituído pela constante de estrutura fina f multiplicada por $\frac{2\pi}{e^2}$, essa constante proposta por Fürth poderia ser escrita:

$$\frac{fe^2}{(M_p + m)^2 G} = \frac{1}{2}(16)^{32}$$

Essa constante tem uma semelhança com a constante (c) de Eddington. É interessante indicar que a relação de Fürth proporcionava um excelente resultado, quando comparada com os dados experimentais (BOND, 1930, p. 1002).

Nessa época (1935) Eddington tinha dúvidas sobre como calcular as constantes (c) e (d), pois a massa de referência do universo m_0 entrava na dedução (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 252). No entanto, ele indica que a razão entre as constantes (c) e (d) seria igual a $\frac{\sqrt{90}}{\pi}$ que é aproximadamente igual a 3,02. Quanto às duas constantes isoladamente, Eddington apresenta fórmulas em que elas dependem do número de partículas do universo:

$$(c) \quad \frac{e^2}{GMm} = \frac{3N}{\pi}$$

$$(d) \quad \frac{2\pi c}{h} \sqrt{\frac{Mm}{\lambda}} = \sqrt{\frac{N}{30}}$$

As constantes (c) e (d) eram, portanto, da ordem de grandeza da raiz quadrada do número de partículas do universo.

Eddington pensava, nessa época, que o número total N de partículas do universo poderia ser uma constante impossível de determinar teoricamente (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 252).

Para satisfazer os dados observacionais, ele considerava que o valor aproximado de N seria de 2×10^{79} , sendo 10^{79} elétrons e 10^{79} prótons. Embora, nessa época, não tivesse proposto nenhum modo de prever N teoricamente, Eddington indicou que Fürth havia indicado que 2 elevado a 256 era aproximadamente igual a 10^{77} e que talvez o número de partículas do universo tivesse alguma relação com 2^{256} . Isso parecia uma conjectura interessante, mas não havia nenhuma teoria que indicasse essa relação (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 253). Alguns anos depois, Eddington obteve o resultado:

$$N = \frac{3}{2} \times 136 \times 2^{256}$$

4.5 Relação entre observações e teoria

As duas primeiras constantes obtidas por Eddington foram (a) a constante de estrutura fina (137) e (b) a razão entre a massa do próton e a do elétron (1847,6). Esses valores eram muito próximos dos valores experimentais conhecidos na época (diferenças menores do que 1%), mas não eram exatamente iguais, e as diferenças eram bem maiores do que os erros experimentais das medidas (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 250). Seria isso uma evidência de que a teoria estava errada?

O físico William N. Bond havia feito uma cuidadosa comparação entre os dados experimentais e a teoria. Em 1930 ele havia concluído que as medidas disponíveis eram compatíveis com o valor exato $\frac{hc}{2\pi e^2} = 137$ (BOND, 1930, p. 1002). Em um segundo artigo, revendo todos os dados disponíveis, comparando os métodos e calculando os erros, concluiu que os dados experimentais indicavam um valor compatível com o de Eddington (BOND, 1931, p. 637):

$$\frac{hc}{2\pi e^2} = 137,01 \pm 0,05$$

Nesse mesmo artigo, no entanto, Bond concluiu que a previsão de Eddington para a razão entre as massas do próton e do elétron não era satisfatória. Ele obteve, a partir da análise dos dados experimentais, o seguinte valor:

$$\frac{M_p}{m} = 1846,5 \pm 0,4$$

O valor teórico de Eddington (nessa época) era $\frac{M_p}{m} = \frac{136^2}{10} = 1849,6$ - que diferia dos dados experimentais por mais de 6 vezes o erro provável das medidas (BOND, 1931, p. 640).

Eddington alterou logo depois a dedução da razão entre as massas do próton e do elétron, obtendo o novo valor teórico 1847,6. Este valor era satisfatório, considerando os dados experimentais (BOND, 1932, p. 379).

Posteriormente o próprio Bond chegou à conclusão de que existiam realmente discrepâncias significativas entre as medidas e as previsões de Eddington. No entanto, o próprio Bond sugeriu que aquilo que se mede no laboratório pode não ser idêntico àquilo que a teoria está estudando. A discordância entre a teoria de Eddington e os dados desapareceria se fosse feita a suposição de que os métodos experimentais de medida da massa do elétron dessem resultados que fossem 137/136 vezes a massa “verdadeira” do elétron, ou se o valor das medidas de $\frac{e}{m}$ para o elétron fossem multiplicados por 137/136. Nesse caso, a concordância entre os valores teóricos e experimentais das duas primeiras constantes (a) e (b) era perfeita (EDDINGTON, *New pathways in science*, p. 251).

Eddington considerou que a sugestão de Bond poderia ser correta. Talvez a análise que relaciona as observações à massa do elétron contivesse um erro - exatamente o mesmo fator que estava errado na análise inicial de Eddington - e, por isso, não se podia comparar diretamente os resultados experimentais com a teoria.

No intuito deste capítulo, a seguir, faremos uma revisão dos principais artigos de Eddington relacionados à forma com que Eddington encontra, segundo ele, por argumentos puramente teóricos o valor das constantes da natureza.

4.6 Um tratamento simétrico da equação de onda

EDDINGTON, A.S. A symmetrical treatment of the wave equation. *Proceedings of the Royal Society* 121: 524-542, 1928

No seu primeiro artigo sobre o tema, Eddington apresenta uma teoria de matrizes, baseado na análise do estudo da teoria do elétron de Dirac (DIRAC, 1928 (a), 1928 (b)) e no comentário de Darwin (DARWIN, 1928) a respeito da forma não simétrica das equações de Dirac e na afirmação deste de que, mesmo sendo invariantes sob as transformações de Lorentz, elas não estavam construídas em forma tensorial. Com esta motivação, Eddington constrói uma base matricial que lhe permite olhar para um espaço de 16 dimensões a partir do produto de matrizes 4x4 visando escrever uma equação de onda de primeira ordem, equivalente à de Dirac, mas expressa em forma simétrica e tensorial, da qual vai se valer depois para encontrar, por “resultados puramente teóricos”, o valor das que ele chamou constantes da natureza, abordadas na introdução deste capítulo.

Já que esta teoria de matrizes configura-se como fundamental para o entendimento teórico da obra de Eddington que analisaremos no presente capítulo, faz-se necessário nos determos numa apresentação do desenvolvimento matemático que estrutura a teoria. Começaremos pela definição matricial.

4.6.1 Matrizes quadri-ponto

A base desta teoria matricial são matrizes e tensores em quatro dimensões. Partindo deste ponto o seguinte passo é a definição de 4 matrizes, $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$, estruturadas a partir da configuração dos eixos em duplas.

$$\alpha = 12, 34 \quad \beta = 13, 42 \quad \gamma = 14, 23.$$

Os pontos $(1, 2)(2, 1)(3, 4)(4, 3)$ foram chamados pontos α , $(1, 3)(3, 1)(4, 2)(2, 4)$ de pontos β , etc. Os pontos restantes $(1, 1)(2, 2)(3, 3)(4, 4)$ são os pontos δ .

A matriz S_α é definida como a matriz com elementos iguais a 1 nos pontos α e zeros em qualquer outro lugar, as outras matrizes são definidas de modo análogo.

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_\delta = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Eddington também define outras matrizes, diagonais, dadas por:

$$D_\alpha = (1, 1, -1, -1) \quad D_\beta = (1, -1, 1, -1) \quad D_\gamma = (1, -1, -1, 1)$$

$$D_\delta = (1, 1, 1, 1)$$

O conjunto de propriedades destas matrizes é deduzido a partir das diferentes relações¹

$$S_\alpha = D_\alpha = 1 \quad S_\alpha S_\beta = S_\gamma \quad D_\alpha D_\beta = D_\gamma \quad S_\alpha^2 = 1 \quad D_\alpha^2 = 1 \quad S_\alpha D_\beta = -D_\beta S_\alpha \\ S_\alpha D_\beta = D_\alpha S_\alpha$$

Dentro desta estrutura se define um fator (ab) tal que

$$\begin{aligned} (ab) &= +1 & \text{se} & \quad a = \delta & \text{ou} & \quad b = \delta & \text{ou} & \quad a = b \\ (ab) &= -1 & \text{em qualquer outro caso.} \end{aligned}$$

Obtendo-se assim uma outra forma de expressar o resultado da multiplicação de matrizes

$$S_\alpha D_\beta = -D_\beta S_\alpha \quad S_\alpha D_\alpha = D_\alpha S_\alpha$$

através de

$$S_a D_b = (ab) D_b S_a \quad (a, b = \alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad S_a S_b = S_b S_a \quad D_a D_b = D_b D_a.$$

4.6.2 Solução de tensores

Fazendo os produtos $S_a D_b$ encontra-se um conjunto de 16 matrizes das quais 4 são matrizes α ($S_\alpha D_\alpha, S_\alpha D_\beta, S_\alpha D_\gamma, S_\alpha D_\delta (= S_\alpha)$), 4 β , etc. Estes 16 produtos têm a particularidade de serem independentes, i.e., não existe uma identidade linear relacionando-os.

Segue-se que uma matriz qualquer de quatro linhas e colunas pode ser expressa na forma

$$\sum_{ab} t_{ab} S_a D_b \tag{4.1}$$

Os 16 coeficientes arbitrários t_{ab} proporcionam todos os valores possíveis dos 16 termos da matriz, e como os $S_a D_b$ são linearmente independentes, as equações

¹O mesmo pode ser verificado permutando α, β, γ mas não δ .

determinando os t também são independentes. Assim qualquer tensor T_{ab} de segunda ordem pode ser representado pelos 16 coeficientes t_{ab}

Seja T_b^a um tensor misto, sua transformação para este sistema é dada por

$$T_d'^c = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^d} T_b^a$$

Essa relação pode ser escrita de forma matricial, representando por k e k' as matrizes dos coeficientes de transformação e representndo o tensor por T

$$T' = kTk' \quad (4.2)$$

onde

$$kk' = 1 \quad (4.3)$$

4.6.3 Rotações

A transformação

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta & x_3 &= x'_3 \cos \theta - x'_4 \sin \theta \\ x_2 &= x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta & x_4 &= x'_3 \sin \theta + x'_4 \cos \theta \end{aligned}$$

representa rotações através de um ângulo θ nos planos (x_1x_2) e (x_3x_4) , k sendo da forma obtido através da lei de transformação de tensores $T_\mu'^\nu = T_\sigma^\tau \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\tau}$ com $k_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$ e $k'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}$

$$k = \cos \theta - \sin \theta . S_\alpha D_\beta \quad (4.4)$$

Sua transformação inversa, sendo uma rotação através de $-\theta$:

$$k' = \cos \theta + \sin \theta . S_\alpha D_\beta$$

O termo “rotação” com um significado generalizado é utilizado de tal maneira que inclua qualquer transformação da forma²

$$\left. \begin{aligned} k &= \cos \theta + \sin \theta . i(ef)^{\frac{1}{2}} S_e D_f \\ k' &= \cos \theta - \sin \theta . i(ef)^{\frac{1}{2}} S_e D_f \end{aligned} \right\}$$

Sob estas considerações encontram-se 16 rotações as quais correspondem às matrizes $S_e D_f$ para $(ef) = -1$ e $iS_e D_f$ para $(ef) = +1$.

²O argumento para incluir o fator $i(ef)^{\frac{1}{2}}$ é entendido olhando para a transformação unitária $kk' = 1$.

Rotação de um tensor. Tomando o primeiro caso $(ef) = -1$, vamos considerar o que acontece quando se aplica a rotação $S_e D_f$ em um tensor misto T_μ^ν . Analisando o tensor, expresso nas suas componentes t_{ab} , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{ab} t'_{ab} S_a D_b = \sum (t_{ab} S_a D_b (\cos^2 \theta - (af)(be)(ef) \sin^2 \theta) \\ + S_a S_e D_b D_f ((af) - (be)) \sin \theta \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Neste arranjo distinguimos dois grupos de termos³:

Grupo 1 $(af)(be) = +1$. Se $(ef) = -1$, o lado direito de [4.5] fica:

$$\sum t_{ab} S_a D_b (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 0$$

Conclui-se, após a análise que, sob esta transformação, os termos permanecem inalterados.

Grupo 2 $(af)(be) = -1$. Após a análise encontramos que o lado direito de [4.5] adquire agora a forma

$$\sum t_{ab} (S_a D_b \cos(2\theta) \pm S_a S_e D_b D_f \sin(2\theta)) \quad (4.6)$$

Seguindo um raciocínio igual ao anterior e igualando os coeficientes das matrizes a ambos lados de [4.5] obtemos

$$\left. \begin{aligned} t'_{ab} &= t_{ab} \cos(2\theta) \mp t_{cd} \sin(2\theta) \\ t'_{cd} &= \pm t_{ab} \sin(2\theta) + t_{cd} \cos(2\theta) \end{aligned} \right\},$$

do qual concluímos que uma transformação com estas características pode ser vista como uma rotação através de um ângulo 2θ no plano dessas componentes.

Agora, no caso $(ef) = +1$, a rotação $iS_e D_f$, dá os mesmos resultados, mas a rotação circular é agora entre t_{ab} e it_{cd} , equivalente a uma rotação hiperbólica ou transformação de Lorentz de t_{ab} e t_{cd} .

4.6.4 Termos perpendiculares

Na subseção anterior deduzimos que a rotação $S_e D_f$ (ou $iS_e D_f$) deixava o termo t_{ab} inalterado se

$$(af)(be) = +1 \quad (4.7)$$

enquanto que t_{ab} seria rodado com um termo conjugado t_{cd} como em [4.6] se

$$(af)(be) = -1 \quad (4.8)$$

³Esta distinção segue-se da informação adotada acerca do (ef) .

Ademais, c e d estão determinados por⁴

$$S_c = S_a S_e \quad D_d = D_b D_f$$

Agora, olhando para o que acontece se aplicamos S_a a D_d e D_b a S_c obtemos

$$(ad) = (ab)(af) \quad (bc) = (ba)(be)$$

Portanto se fizermos uma rotação $S_a D_b$ sobre $S_c D_d$ obtemos

$$(ad)(bc) = (ab)(ab)(af)(be) = (af)(be),$$

E desta forma⁵

$$(ad)(bc) = -1 \tag{4.9}$$

Dois termos que satisfazem a condição [4.9] são chamados ortogonais ou perpendiculares. As duas matrizes correspondentes também são ditas perpendiculares.

Olhando os termos t_{ab} como as coordenadas num espaço de 16 dimensões onde dois eixos coordenados definem um plano de coordenadas se encontra que *alguns dos planos de coordenadas num espaço de 16 dimensões são possíveis planos de rotação e outros não*. De fato, esta afirmação pode ser vista a partir de [4.5]. Se olharmos para uma rotação dada (excluindo $S_\delta D_\delta$) encontramos que esta roda 8 dos termos t_{ab} e deixa os outros 8 inalterados. O mesmo acontece se olharmos para um termo dado (excluindo $t_{\delta\delta}$), este é rodado por 8 das 16 possíveis rotações $S_e D_f$ e fica inalterado pela ação das outras 8 (ver tabela em anexo).

4.6.5 Conjuntos mutuamente perpendiculares.

Um conjunto de elementos mutuamente perpendiculares é definido como um conjunto que cumpre a seguinte condição: dados três termos p, q, r perpendiculares entre si, uma rotação no plano pq deixa r inalterado. De fato, sejam

$$p = S_a D_b \quad q = S_a S_e D_b D_f \quad r = S_g D_h$$

tal que a rotação de pq corresponda a $S_e D_f$. Lembrado que r é perpendicular a p e q ⁶ obtemos

$$(ah)(bg) = -1 \quad (ah)(eh)(bg)(fg) = -1 \equiv (eh)(fg) = +1$$

⁴Das propriedades da multiplicação matricial dadas na primeira subseção.

⁵Pela condição [4.8] de que dois termos estejam conjugados em rotação.

⁶Pela propriedade de perpendicularidade [4.9].

que é a condição [4.7] que a rotação $S_e D_f$ deixa $S_g D_h$ inalterada.

Devido ao fato que existem só 8 rotações que deixam um termo inalterado conclui-se que não mais de cinco termos podem formar um conjunto mutuamente perpendicular.

A seguir construiremos a tabela dos conjuntos com cinco elementos mutuamente perpendiculares. Para sua construção olhamos cada dois termos perpendiculares e escrevemos as duas listas de 8 termos perpendiculares a cada um. Nestas listas encontramos que há três termos comuns às duas, perpendiculares entre si⁷. Os seguintes são os seis conjuntos

Conjuntos perpendiculares

$$\begin{array}{cccccc}
S_\alpha & S_\alpha & S_\beta & S_\beta & S_\gamma & S_\gamma \\
D_\beta & D_\gamma & D_\alpha & D_\gamma & D_\alpha & D_\beta \\
iS_\gamma D_\beta & iS_\beta D_\gamma & iS_\gamma D_\alpha & iS_\alpha D_\gamma & iS_\beta D_\alpha & iS_\alpha D_\beta \\
iS_\alpha D_\gamma & iS_\alpha D_\beta & iS_\beta D_\gamma & iS_\beta D_\alpha & iS_\gamma D_\beta & iS_\gamma D_\alpha \\
S_\gamma D_\gamma & S_\beta D_\beta & S_\gamma D_\gamma & iS_\alpha D_\alpha & iS_\beta D_\beta & S_\alpha D_\alpha
\end{array}$$

As matrizes com o fator i são as matrizes antissimétricas.

Da tabela acima Eddington formula o que ele chamou *Teorema do acoplamento*, mais tarde utilizado na construção da equação de onda. Ao multiplicar um conjunto por um dos seus termos $S_a D_b$ se obtém um outro conjunto contendo $S_a D_b$, exceto que $S_a D_b$ é substituído pela unidade (EDDINGTON, p. 530, 1928), destruindo a perpendicularidade.

4.6.6 Propriedades invariantes

Consideremos o tensor T o qual tem componentes correspondendo aos cinco termos do primeiro conjunto, i.e.,

$$t_{\alpha\delta}, \quad t_{\delta\beta}, \quad it_{\gamma\beta}, \quad it_{\alpha\gamma}, \quad t_{\gamma\gamma} \quad (4.10)$$

as outras 11 componentes são todas nulas. Eddington escreve estas cinco componentes (incluindo os i) como t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e as enxerga como coordenadas em um espaço 5-dimensional.

Substituindo it_4 como a quarta coordenada, Eddington obteve um universo que é como o espaço-tempo, no que este admite transformações de Lorentz de

⁷Na realização deste exercício encontra-se quatro termos comuns só que um dos quatro corresponde à raiz.

acordo com a teoria especial da relatividade. Essas transformações são garantidas pelas propriedades de rotação, que já foram discutidas, e que podem ser interpretadas como transformações de Lorentz em alguns casos. Os dois i em [4.10] indicam que o t -universo teria necessariamente 3 dimensões como o espaço e 2 como o tempo. Isto dependeria de correlacionar valores reais ou imaginários de um t_{ab} particular com variáveis físicas reais quando se interpretavam as fórmulas físicas. Os i em [4.10] lhe representaram uma forma de relacionar o t -espaço e o 4-espaço inicial, relação esta que Eddington chamou de ψ -espaço (EDDINGTON, p. 531, 1928).

Na procura de uma equação tensorial da forma

$$T_\mu^\nu \psi_\nu = \psi_\mu \quad (4.11)$$

a qual deve ser válida para qualquer transformação linear de ψ , Eddington define agora o quadrado de um tensor num espaço de 5 dimensões.

4.6.7 O quadrado de um tensor no 5-espaço

Na construção do quadrado do tensor os termos $S_a D_b$ (incluindo i se está presente) de um conjunto perpendicular são denotados por $E_1, E_2, \dots, E_5$, e o tensor T é apresentado na forma

$$T = t_1 E_1 + t_2 E_2 + t_3 E_3 + t_4 E_4 + t_5 E_5 \quad (4.12)$$

Onde os E_i são cinco elementos mutuamente perpendiculares. Pelas propriedades do produto de matrizes e perpendicularidade respectivamente,

$$E_1^2 = 1 \quad E_1 E_2 + E_2 E_1 = 0 \quad (4.13)$$

Se os t forem só algébricos obtemos

$$T^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 \quad (4.14)$$

Mas se os t contêm operadores os quais não comutam, deve ser adicionado o produto

$$E_1 E_2 (t_1 t_2 - t_2 t_1)$$

Um caso interessante a considerar é quando t_5 não contém tal operador, mas

$$t_1, t_2, t_3, t_4 = i\nabla^2 + V,$$

onde V é algébrico. Sob estas considerações encontramos os termos produto na forma

$$iE_1 E_2 (\nabla \times V)_{12} \quad (4.15)$$

4.6.8 A equação de onda

Mas o intuito de Eddington era encontrar uma equação linear cujos coeficientes admitissem transformações correspondendo às transformações de Lorentz da teoria da relatividade especial. Sob essas condições ele adotou

$$T\psi = 0 \quad (4.16)$$

sendo T da forma [4.12]. Na sua análise, chama a atenção para o fato que a única crítica que podia ser feita a esta escolha era que ordinariamente só se reconheciam quatro variáveis (as coordenadas do espaço e do tempo) admitindo as transformações relativísticas enquanto que sua equação era uma forma relativística em cinco variáveis. Eddington se libera da hipótese de que tendo escolhido E_1, E_2, E_3, E_4 perpendiculares, se estaria livre para escolher qualquer matriz como E_5 ; seu argumento parte da base de que a equação [4.16] não é invariante se as rotações internas das primeiras quatro coordenadas alteram t_5 . Portanto a quinta matriz seria não perpendicular às seis rotações entre E_1, E_2, E_3, E_4 ; esta matriz seria a condição rigorosa para limitar esta a E_5 ou 1, a unidade sendo não perpendicular a qualquer rotação. Sob estas restrições ao multiplicar [4.16] por E_5 , pelo teorema do acoplamento, encontra-se que todos os termos são perpendiculares. Assim as duas alternativas correspondem a escrever a equação em duas formas equivalentes $T\psi = 0, E_5T\psi = 0$.

Sob as considerações anteriores a equação de onda de segunda ordem foi escrita como

$$T^2\psi = 0 \quad (4.17)$$

sendo esta satisfeita se [4.16] fosse satisfeita. Por [4.14]:

$$(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 + \text{termos não comutativos})\psi = 0 \quad (4.18)$$

Olhando para a equação de onda de segunda ordem ortodoxa

$$h^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m^2 c^2}{h^2} \right) \psi = 0 \quad (4.19)$$

por comparação com [4.18] se identifica

$$t_1 = \frac{ih\partial}{\partial x} \quad t_4 = \frac{h\partial}{\partial t} \quad t_5 = mc$$

O passo seguinte é olhar para problemas mais gerais onde o vetor potencial electromagnético V aparece junto com o operador gradiente, tal que

$$(t_1, t_2, t_3, it_4) = ih\nabla^2 + \left(\frac{e}{c}\right)V \quad t_5 = mc \quad (4.20)$$

Usando [4.15] se obtém

$$T^2\psi = \left\{ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - (it_4)^2 + m^2c^2 + \left(\frac{ihe}{c}\right) \sum_1^{(4)} E_\mu E_\nu (\nabla \times V)_{\mu\nu} \right\} \psi = 0 \quad (4.21)$$

onde $(-iE_4)$ foi usado no lugar de (E_4) . A equação linear é dada por

$$T\psi = \left\{ [ih\nabla^2 + \left(\frac{e}{c}\right)V](E_1, E_2, E_3, -iE_4) + mcE_5 \right\} \psi = 0 \quad (4.22)$$

4.6.9 Identificação dos E

A única restrição na identificação dos E com matrizes particulares $S_a D_b$ está baseada na condição de que eles formem um conjunto perpendicular.

A equação de onda de Dirac na notação de Eddington é expressa como

$$(-t_1 S_\gamma D_\alpha - t_2 i S_\gamma D_\gamma - t_3 S_\beta D_\gamma + t_4 i D_\alpha + mc.1)\psi = 0$$

Aqui está a importância dos conjuntos mutuamente perpendiculares. Lembremos que quatro coeficientes formam um conjunto perpendicular e, neste caso o quinto membro, S_β , foi substituído pela unidade. Assim se multiplicamos por S_β obteremos⁸ novos coeficientes os quais formam um conjunto perpendicular.

$$(t_1 S_\alpha D_\alpha - t_2 i S_\alpha D_\gamma - t D_\gamma + t_4 i S_\beta D_\alpha + t_5 S_\beta)\psi = 0 \quad (4.23)$$

É este o argumento que Eddington utiliza para mostrar que a equação original de Dirac sob sua teoria é equivalente $S_\beta T\psi = 0$.

Dentro das vantagens atribuídas para sua teoria Eddington começa chamando a atenção para a liberdade total de escolha das matrizes mais adaptadas ao problema a ser considerado. Neste caminho procura não introduzir mais coordenadas imaginárias que as necessárias e para isto considera a identificação

$$[t_1 S_\beta + t_2 D_\gamma + t_3 S_\alpha D_\alpha + (it_4) S_\alpha D_\gamma + (imc) S_\beta D_\alpha]\psi = 0 \quad (4.24)$$

Devido ao fato de (it_4) corresponder ao tempo real as únicas quantidades imaginárias nesta equação são (imc) e o operador gradiente imaginário em [4.20]. No exame da natureza dos termos extra na equação de segunda ordem [4.21] se encontra que:

$$i \sum_1^{(4)} E_\mu E_\nu (\nabla \times V)$$

⁸Pelo teorema do acoplamento.

a expressão toda é imaginária já que o rotacional é real, e com sua última restrição [4.24] os E_1, E_2, E_3, iE_4 também são reais. Enquanto que na identificação de Dirac há uma mistura de termos imaginários e reais. De fato, na teoria de Dirac os termos magnéticos x e z são reais e os termos y imaginários, e inversamente para os termos eléctricos.

Um outro aspecto fundamentando a importância da sua teoria encontrou-o analisando $T^2\psi$ como a equação de segunda ordem no lugar da forma usual $T'T\psi$ onde T' era derivada de T trocando o sinal do termo do tempo. Para Eddington a introdução de duas diferentes funções era desnecessária, por causa de, na sua teoria, $T'T$ ser um quadrado perfeito. De [4.13] encontramos que

$$-TE_4 = E_4T'$$

Assim

$$(E_4T)^2 = E_4TE_4T = -E_4E_4T'T = -T'T$$

4.6.10 Equação de onda para dois elétrons

Dentro dos argumentos de Eddington encontra-se que existe outra forma de aproximação à equação de onda a qual tem a vantagem que não considera uma quinta dimensão. Seus esforços desta vez encaminham-se nesta direção, o ponto de vista inicial foi a avaliação de m , a massa própria do elétron.

Sua pesquisa neste sentido baseia-se em olhar para entidades que possuam uma certa característica: a invariança da massa, m . Reconhecendo que as matrizes deviam ser introduzidas, associou m com uma matriz E_5 arbitrariamente escolhida; então quaisquer quantidades físicas relativas estariam associadas com outras matrizes em um caminho tal que suas rotações mútuas deixassem E_5 invariante e permitissem que m retivesse sua invariância. Isto requeria que elas estivessem associadas com as oito matrizes perpendiculares a E_5 . A teoria matricial de Eddington o guiou a escolher essas matrizes. Tomando E_1, E_2, E_3, E_4 desde um conjunto mutuamente perpendicular, as outras seriam

$$E'_1 = E_5E_1 \quad E'_2 = E_5E_2 \quad E'_3 = E_5E_3 \quad E'_4 = E_5E_4$$

como dadas pelo teorema do acoplamento. Assim a forma geral da equação de onda linear na qual m é invariante quando os outros coeficientes são transforma-

dos, foi apresentada⁹

$$\mathfrak{T}\psi = \{(t_1 E_1 + t_2 E_2 + t_3 E_3 + t_4 E_4) + (t'_1 E'_1 + t'_2 E'_2 + t'_3 E'_3 + t'_4 E'_4) + 2mcE_5\} \psi = 0 \quad (4.25)$$

Provisoriamente Eddington supôs que $\mathfrak{T}\psi = 0$ era a equação para um sistema contendo dois elétrons.

Nos seus trabalhos posteriores esta dedução para a equação de dois elétrons não foi mais utilizada. Percebe-se que o método de Eddington consiste em criar estruturas algébricas com propriedades equivalentes às grandezas físicas que quer representar e ajustá-las em equações semelhantes às que já eram conhecidas.

4.7 A carga do elétron

EDDINGTON, A.S. The charge of an electron. *Proceedings of the Royal Society, A*, 122: 358-369, 1929.

Continuando nossa análise vamos estudar seu segundo artigo no qual Eddington começa enfatizando o fato da razão de $\frac{hc}{2\pi e^2}$ ser um número puro.

Enquanto que seu primeiro artigo ocupa-se do problema de um elétron, o segundo sugere a análise do problema de dois elétrons. Para tal é introduzida uma repulsão elétrica entre eles, que representa um fator especial modificando a probabilidade de distribuição *a priori*. Assume ademais que eles obedecem a estatística de Fermi-Dirac e que há uma correspondência entre a interação elétrica e essa estatística.

Na justificativa de olhar para a equação de onda para dois elétrons (ou um elétron e um próton), e portanto para $\frac{hc}{2\pi e^2}$, o argumento provém do fato da carga elétrica manifestar-se só na interação de pelo menos duas cargas, portanto, é pouco útil considerar somente um elétron.

O valor experimental de $\frac{hc}{2\pi e^2}$ já tinha sido medido por Millikan e foi encontrado o valor 137,1. Mas a proposta inicial de Eddington é desenvolver argumentos para mostrar que seu valor era de 136. Dentro das suas concepções não cabia pensar que os defeitos se encontravam na teoria e não em um erro experimental, por isso, apesar da discrepância ser grande com relação ao valor experimental, empreendeu seu trabalho na busca de confirmar suas hipóteses. Seu argumento baseou-se no princípio de exclusão e na estatística de Fermi-Dirac, segundo o qual as funções ψ pertencendo a um par de elétrons deviam ser antisimétricas. Uma das suas

⁹Eddington admite ter posto o fator 2 no último termo de uma forma especulativa.

hipótese era que, combinado com a teoria da relatividade, o princípio de exclusão guiava de uma maneira não forçada para o valor de 136, que é o número de termos simétricos na matriz 16×16 .

Sua dedução está fundamentada em três fortes premissas (EDDINGTON, 1929, p. 358.):

1. O princípio de exclusão descreve uma interação mútua de dois elétrons e é improvável que exista um outro tipo de interação independente; assim, se corretamente formulado, este compreende todas suas interações e desta maneira pode-se determinar o valor de e .
2. Sua formulação natural conduz a termos que correspondem com aqueles atribuídos à carga elétrica na equação de onda
3. A determinação do coeficiente numérico desses termos depende do número de graus de liberdade atribuídos ao sistema

Esta última premissa levou Eddington a procurar construir uma teoria em que aparecesse um número de graus de liberdade igual ou semelhante ao número obtido experimentalmente (137).

Uma vez convencido que esta era a linha de ataque correta, Eddington vai ser levado a um número de graus de liberdade sugeridos pelo valor observacional, mas não igual, neste caso 136, e arranjou os fenômenos em um esquema de acordo com o número requerido; apontando que este era um tipo de exercício no qual pequenos erros eram improváveis, i.e., poder-se-ia hesitar entre 10 e 136 e 256, mas não entre 136 e 137. Ele queria dizer que no esquema teórico aparecem alguns sistemas com dez componentes independentes (por exemplo tensores simétricos 4×4) e outros números como 136 e 256 poderiam ter uma justificativa matemática simples, mas 137 não é um número que apareça naturalmente. Mas também fortaleceu seu argumento para as convergências que levariam a este resultado através da análise do seu artigo anterior (EDDINGTON, 1928, pp. 524-542), segundo o qual os eixos identificados com aqueles do espaço e do tempo na teoria macroscópica seriam uma seleção de um conjunto de dezesseis. De fato, se o problema a considerar se limita ao espaço dos 16 seria óbvio que o número de graus de liberdade apropriado era 136, isto deduzido do seu artigo anterior.

Uma outra hipótese proposta neste trabalho é a de que ao invés de postular a estatística de Fermi-Dirac *em adição* à carga elétrica¹⁰ era necessário postular a carga elétrica como um outro lado da estatística de Fermi-Dirac.

¹⁰Isto por causa de que o termo da energia $\frac{e^2}{r_{12}}$, devido à carga, introduz uma singularidade na

Olhando para a indistinguibilidade, Eddington frisou o fato de nenhum fenômeno físico ser afetado trocando a identidade de dois elétrons. Portanto, se sua fórmula exibisse os dois elétrons com uma identidade estabelecida, a convenção estaria no mesmo patamar que uma escolha especial dos eixos do espaço e do tempo. Sua hipótese aqui era que se poderia conceber uma ampliação do princípio da relatividade que admitisse, em adição à rotação do espaço e do tempo, uma “rotação” que troca a identidade de dois elétrons.

Mas sobre esta visão uma dificuldade se origina na hora de representar a posição de um par de elétrons no espaço e o tempo por oito coordenadas.

Sejam q e q' as coordenadas de dois elétrons e e e' . Suponhamos que $q = \alpha$ e $q' = \beta$. Considerando que os dois elétrons são indistinguíveis, a situação (α, β) é idêntica a (β, α) . Não entanto, pelo princípio de exclusão, as funções ψ estariam relacionadas pela transformação

$$\psi(\alpha, \beta) = -\psi(\beta, \alpha) \quad (4.26)$$

Portanto, em vista da não clareza ao invés de se continuar atribuindo duas funções de probabilidade $\psi(\alpha, \beta)$ e $\psi(\beta, \alpha)$ a um par de elétrons, adotou-se uma função única

$$\Psi = e^{i\theta} \psi(\alpha, \beta) = e^{i\theta} \psi(q, q') \quad (4.27)$$

incluindo os dois. Sendo θ uma coordenada do par de elétrons relativa ao sistema de referência¹¹, quando θ fosse incrementado em π a identidade dos dois elétrons seria trocada. A forma [4.27] representava assim a expressão analítica do princípio de exclusão.

O raciocínio de Eddington o leva a argumentar a necessidade da introdução da sua teoria matricial. De fato, na hora de se olhar para a teoria de Dirac se encontra que existem quatro funções ψ para um elétron e portanto 16 para dois. Portanto isto exige uma extensão de [4.27] e é aqui onde entram as matrizes. Já que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.1$$

A generalização foi dada por

$$\cos \theta + i \sin \theta. E_\mu$$

equação de onda para $r_{12} \rightarrow 0$, e isto evita que a equação seja satisfeita por qualquer autofunção finita simétrica; as funções antissimétricas se salvam por causa de que para elas $\psi = 0$ para $r_{12} = 0$.

¹¹Mas no lugar de estar relacionada aos eixos particulares do espaço e do tempo estava relacionada à assinalação de identidade para os dois elementos do par.

onde E_μ é uma das 16 matrizes do seu artigo anterior. Não obstante, as matrizes correspondendo ao problema dos dois elétrons seriam duplas e convenientemente Eddington as notou como $E_\mu E'_\nu$. Assim [4.27] ficou agora escrita como:

$$\Psi = R(\theta, E_\mu E'_\nu) \psi(q, q') = (\cos \theta + i \sin \theta . E_\mu E'_\nu) \psi(q, q') \quad (4.28)$$

Sob a hipótese de que aumentando θ em π se inverte o sinal de Ψ , Eddington argumenta que, pelo princípio de exclusão, a identidade tradicional dos dois elétrons teria sido trocada.

Para fortalecer seu argumento Eddington tomou as rotações da teoria da relatividade especial como seu ponto de partida. Assim, quando ψ fosse rodada um ângulo, os eixos do espaço e o tempo seriam rodados o duplo do ângulo (como no caso do artigo anterior). No caso particular quando o ângulo duplo fosse 2π (ou seja, $\theta = \pi$) os marcos de referência do espaço e tempo retrocederiam à sua posição inicial. Que significado poderia ser atribuído ao fato de que ψ tivesse como única representação a metade da revolução? A resposta foi que esta parte do sistema de referência, que não estava relacionada a um local no espaço e no tempo mas estava relacionada à assinalação de identidades separadas para os elétrons indistinguíveis, realizava só a metade do ciclo; matematicamente houve uma mudança de sinal mas, ao mesmo tempo, retornamos à situação inicial. Assim aparecem ao mesmo tempo a propriedade de indistinguibilidade (voltou-se à situação inicial) e do princípio de exclusão (houve mudança de sinal). Assim, associando a inversão da identidade com a inversão do sinal de ψ por esta metade de revolução Eddington diz ter alcançado o princípio de exclusão.

Considerando r_{12} como sendo a distância entre os dois elétrons e θ como o ângulo girado em torno de r_{12} Eddington assumiu $\frac{\partial}{r_{12}\partial\theta}$ como um momento simbólico, no mesmo sentido em que $\frac{\partial}{\partial x}$ também era um momento simbólico. Esses símbolos devem ser aplicados entre Ψ^* e Ψ :

$$\Psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi$$

$$\Psi^* \frac{1}{r_{12}} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi$$

Por [4.33] se obtém a segunda expressão como sendo

$$\Psi^* \left(\frac{i}{r_{12}} \right) \Psi$$

concluindo que $\frac{i}{r_{12}}$ seria um momento simbólico.

Para a expressão matricial correspondendo [4.28] se obtém:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= (-\sin \theta + i \cos \theta \cdot E_\mu E'_\nu) \psi(q, q') \\
&= i E_\mu E'_\nu (\cos \theta + i \sin \theta E_\mu E'_\nu) \psi(q, q') \\
&= i E_\mu E'_\nu \Psi
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Mas $(E_\mu E'_\nu)^2 = 1$. Portanto o momento simbólico, comparável com $\frac{\partial}{\partial x}$, é

$$E_\mu E'_\nu \left(\frac{i}{r_{12}} \right) \tag{4.30}$$

De acordo com o momento [4.30] uma rotação em R no plano $E_\mu E'_\nu$ deve ser multiplicada pela probabilidade $\frac{1}{n}$ de R estar neste plano, assim que estatisticamente a componente do momento deve ser

$$E_\mu E'_\nu \frac{i}{n r_{12}} \tag{4.31}$$

Esse termo foi interpretado por Eddington como uma tensão, e identificado então com o potencial eletrostático entre os dois elétrons $\frac{e^2}{r_{12}}$.

Note-se que aqui Eddington introduziu, sem comentários, a hipótese mais importante: de que existe uma probabilidade $\frac{1}{n}$ de que a rotação R esteja no plano $E_\mu E'_\nu$ e que isso vai afetar o valor medido desse momento associado a θ . É aqui que vai aparecer depois o número 136.

Diferente do seu artigo anterior, onde apresenta as quatro função de Dirac distinguidas por sufixos, neste artigo Eddington tomou os sufixos como os quatro valores possíveis de uma quinta coordenada u . Assim para dois elétrons se teriam duas coordenadas u e u' , dando dezesseis combinações. As matrizes E_μ sendo operadores de intercâmbio atuando em u , e distinguiu operadores similares E'_μ atuando em u' . O operador de intercâmbio geral foi dado por $E_\mu E'_\nu$. Esses dois fatores foram considerados comutativos e E_μ ou E'_ν em casos especiais foram tomados como sendo a matriz 1.

A equação de onda para um elétron, encontrada no seu artigo anterior, é reescrita sob estas considerações como:

$$H\Psi = \left\{ \frac{i\hbar}{2\pi} (E_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + E_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + E_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + E_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + mc) \right\} \psi = 0 \tag{4.32}$$

onde E_1, E_2, E_3 e E_4 formam um conjunto perpendicular, e o quinto membro E_5 poderia ser usado, no lugar de 1, como o coeficiente de mc . As equação separadas dos dois elétrons, com o mesmo spin, foram escritas como:

$$H\psi_a = 0 \quad H'\psi'_b = 0$$

Multiplicando por ψ'_b e por ψ_a , respectivamente e somando encontra-se

$$(H + H')\psi_a\psi'_b = 0 \quad (4.33)$$

A equação de onda dos dois elétrons, desta vez considerando a interação, é escrita como:

$$\left\{ H + H' + \frac{e^2}{cr_{12}}(E_1E'_1 + E_2E'_2 + E_3E'_3 + E_4E'_4) \right\} \Psi = 0 \quad (4.34)$$

Eddington fez então uma comparação entre a equação de um elétron [4.26] e a de dois elétrons [4.28]. Na primeira aparece $\frac{h}{2\pi}$, na segunda aparece $\frac{e^2}{c}$. As constantes são totalmente diferentes mas devem estar relacionadas.

Na busca do argumento para o valor da constante de estrutura fina esta expressão toda foi dividida por $\frac{ih}{2\pi}$ e se substituiu $\frac{2\pi e^2}{hc}$ pelo número $\frac{1}{n}$ de [4.31]. Eddington tomou seu valor numérico como sendo $\frac{1}{136}$, segundo ele o único número provável, suficientemente perto do valor experimental que era $\frac{1}{137}$. Sob estas condições, a equação foi escrita como:

$$\left\{ \sum_{\mu=1}^4 (E_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + E'_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - \frac{1}{136} E_\mu E'_\mu \frac{i}{r_{12}}) - \frac{4\pi imc}{h} \right\} \Psi = 0 \quad (4.35)$$

Para Eddington isto mostrava que além do momento $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ o qual aparecia quando os elétrons eram tratados separadamente, ele teria incluído certas componentes do momento θ calculado em [4.31]. Esta seria uma forte confirmação da sua visão que na introdução do fator $R(\theta, E_\mu E'_\nu)$, para expressar o princípio de exclusão em uma maneira relativista, ele tinha introduzido todo o necessário para descrever a influência mútua de dois elétrons. Desta forma comparando [4.31] e [4.35] obteve $n = 136$.

Qual a interpretação teórica do número $n = 136$? A probabilidade de que uma dada rotação R esteja no plano $E_\mu E'_\nu$ é $\frac{1}{n}$ onde n é o número de planos diferentes nos quais a rotação pode ocorrer. Como $E_\mu E'_\nu = E'_\mu E_\nu$, há apenas $16 + 120$ planos diferentes de rotação, portanto $n = 136$.

A partir deste ponto não vamos mais seguir os detalhes da teoria de Eddington. Vamos apenas indicar as hipóteses básicas de cada trabalho e os resultados mais importantes.

4.8 Interação de cargas elétricas

EDDINGTON, A.S. Interaction of electric charges. *Proceedings of the Royal Society, A*, 126: 696-728, 1930.

Logo depois de ter apresentado seu trabalho sobre a carga do elétron Eddington apresenta seu terceiro artigo como uma consequência dos seus dois trabalhos anteriores. No artigo anterior (EDDINGTON, 1929, pp. 358-369) Eddington propôs a teoria do elétron a qual o guiou ao valor da constante $\frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{136}$. Seu propósito era substituir as analogias da dinâmica clássica na teoria por uma base geométrica mais satisfatória. Pois em um problema deste tipo, relacionado com a questão do significado dos métodos da teoria quântica, era pouco provável que a finalidade fosse alcançada em uma segunda tentativa. Desta forma justificou a publicação do seu terceiro artigo arguindo seu progresso.

No seu artigo sobre a carga do elétron o valor encontrado para $\frac{2\pi e^2}{hc}$ foi de $\frac{1}{136}$. Nele Eddington observa que, como este representava o número de graus de liberdade de um sistema, pequenos erros seriam improváveis; não obstante neste seu terceiro artigo ele admite ter cometido um erro, e encontra um novo valor para $\frac{2\pi e^2}{hc} : \frac{1}{137}$. Seus argumentos provêm do fato que os 136 graus de liberdade seriam uma generalização das rotações e translações no espaço; mas seria uma característica de um par de elétrons que eles possuíam um grau de liberdade especial diferente dos outros o qual não teria análogo na teoria do elétron simples, i.e., uma alteração da distância entre eles. Portanto, segundo Eddington, visto que as 136 seriam rotações relativas ao sistema de referência utilizado, o grau de liberdade ímpar representaria a alteração de uma quantidade absoluta (o intervalo). Segundo sua visão, o erro encontrado na primeira teoria não estava tanto em “passar por alto” este grau de liberdade (este tinha aparecido como a rotação a qual trocava a identidade dos dois elétrons) senão em não reconhecer sua diferença dos outros.

Sua análise para obter o “novo valor” para a constante $\frac{2\pi e^2}{hc}$ está baseada na estrutura algébrica apresentada no seu primeiro artigo (EDDINGTON, 1928, 524-542). Mas Eddington introduz várias complicações, como rotações infinitesimais. A transformação infinitesimal básica é

$$\Psi' = \exp(i\Theta)\Psi$$

onde Θ é uma matriz cujas componentes são matrizes:

$$\Theta = \sum_{\mu, \nu=1}^{16} \theta_{\mu\nu} E_{\mu} E_{\nu}$$

Aparecem então 136 combinações simétricas

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E_{\mu} E'_{\nu} + E_{\nu} E'_{\mu})$$

e 120 combinações antissimétricas

$$\zeta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E_\mu E'_\nu - E_\nu E'_\mu)$$

As transformações $\zeta_{\mu\nu}$ são proibidas pelo princípio de Fermi-Dirac. Eddington parte do fato da representação da equação para dois elétrons, com interação, na qual o deslocamento de um elétron foi dado como $dx'_1, dx'_2, dx'_3, dx'_4$ pelas rotações

$$d\theta_{15} = i \frac{dx'_1}{x'_5} \quad (4.36)$$

etc. Sendo essas as rotações do espaço de um elétron e, o outro permanecendo imutável, estas refeririam-se também à transição de dois elétrons não interagindo para elétrons interagindo.

Eddington compara esta representação com a relação entre o elemento linear e angular provenientes da sua análise da origem da métrica e da relação entre r e λ , sendo r a distância própria entre as cargas e λ visto como um raio vetor.

$$dx = \lambda d\theta \quad (4.37)$$

As duas equações se referiam a duas concepções um pouco diferentes de dx . Em [4.36] dx' foi vista só como uma diferença de coordenadas, não uma longitude em um sentido métrico. Esta teria só as propriedades relativísticas de uma coordenada retangular e não as propriedades métricas.

O seguinte passo foi tomar

$$x'_5 = i\lambda \quad (4.38)$$

com o fim de fazer as duas equação concordarem. Desta manera a diferencial dx'_1 seria ao mesmo tempo, uma coordenada diferencial e um elemento de comprimento.

Analisando a relação $\lambda = \frac{137}{2}ir$, obtida na sua interpretação da métrica, e [4.38], Eddington encontrou

$$x'_5 = -\frac{137}{2}r \quad (4.39)$$

.

Finalmente apresentou a equação de onda para dois elétrons como

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{E_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + E'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + E'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2}}{137r} \\ + \dots 2i\beta - \frac{i(E_1 E'_1 + E_2 E'_2 + E_3 E'_3 + E_4 E'_4)}{137r} \end{array} \right\} \Psi = 0$$

trocando aqui E_{15} por E_1 .

A conclusão de Eddington foi que o último termo dava a interação de dois elétrons e mostrava que o valor da constante $\frac{2\pi e^2}{hc}$ era de $\frac{1}{137}$. Eddington além de tentar explicar a constante de estrutura fina, obteve um novo resultado. Se um sistema de dois elétrons tem 137 graus de liberdade e se for criado um sistema rígido com duas cargas (um elétron e um próton), o grau de liberdade associado à distância entre as cargas se perde e ficam 136 graus de liberdade. Isso deve corresponder a uma perda de energia (e de massa de $\frac{1}{137}$), e a massa do sistema multiplicada por $\frac{136}{137}$. Eddington sugere que isso poderia explicar o defeito de massa do núcleo de hélio - mas que a explicação seria aproximada, porque o núcleo não é rígido.

4.9 Nota preliminar sobre a massa do elétron, o próton e o universo

EDDINGTON, A.S. Note on the masses of the electron, proton and the universe. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 27: 15-19, 1931.

No seu quarto artigo Eddington diz ter melhorado sua teoria da constante $\frac{hc}{2\pi e^2}$ sem ter feito nenhuma alteração ao valor 137 obtido no seu trabalho já publicado em 1930 (EDDINGTON, 1930 (a), p. 696). E declarou que este avanço foi devido à luz que lhe trouxeram os fundamentos da mecânica quântica no livro de Dirac. Com um conhecimento pleno da teoria do 137, lhe foi possível discernir oportunidades de extensão em várias direções. Embora elas estivessem no seu estado rudimentar, Eddington acreditava que já que a teoria parecia dar corretamente os valores, ou aproximados ou exatos, das massas do elétron, o átomo de hélio e o cosmos em termos da massa do próton; ele estava indo na linha certa. Ademais para Eddington, o princípio de “ignorância dos graus de liberdade” dos quais dependiam as previsões numéricas estaria fortemente sugerido pela teoria da constante 137. Se sua visão fosse correta, a única constante arbitrária da natureza seria o número de partículas do universo (se este número fosse arbitrário). Somente vários anos depois Eddington se convenceu de que até mesmo esse número podia ser calculado teoricamente.

Eddington começou seu artigo considerando duas cargas iguais em diferentes pontos do espaço-tempo, e as rotulou com os números 1 e 2. Chamou de s o intervalo do tempo próprio medido desde 1 até 2. Se s for real, esse intervalo troca

de sinal (s por $-s$), intercambiando-se as partículas; e por continuidade analítica o intercambio deveria também trocar s por $-s$ quando s fosse imaginário, i.e., quando o intervalo entre as duas partículas fosse do tipo espaço. Agora, pela estatística de Fermi-Dirac o intercambio dos rótulos das duas partículas também trocaria Ψ por $-\Psi$. Na sua teoria do 137 Eddington enxergou este como um caso especial de uma transição contínua, a função de onda sendo $\Psi e^{i\theta}$. Similarmente o inverso de s foi visto como devido às transformações contínuas do intervalo $se^{i\theta}$ ou $se^{-i\theta}$. O intercambio completo ocorre incrementando θ de π . Este intercâmbio seria uma troca do ponto de vista, não um movimento de cargas.

Dois casos se originariam conforme se o intervalo for $se^{i\theta}$ ou $se^{-i\theta}$:

1. $\frac{\Psi}{s} = \text{cte.}$
2. $\Psi s = \text{cte.}$

Eddington afirmou que as duas possibilidades corresponderiam a cargas de sinais opostos.

Eddington chamou a atenção ao fato de que as transformações Ψ^* seriam as mesmas que as de Ψ . Isto seria impossível se Ψ^* e Ψ fossem, como no seu primeiro trabalho, vetores contravariantes e covariantes. Eles experimentariam necessariamente transformações inversas, e os casos (1) e (2) não poderiam ser distinguidos a menos que se fizesse uma distinção absoluta entre Ψ^* e Ψ . Mas Ψ^* e Ψ seriam agora vetores densidade, portanto a transformação considerada seria uma troca do elemento de volume o qual os afetaria igualmente.

Suponhamos agora que temos um par próton-elétron, com cargas opostas. Os casos (1) e (2) dependiam do sinal da carga de uma das partículas. Sempre que se conservassem ângulos reais θ , a diferença entre o próton e o elétron se limitaria a este comportamento cíclico oposto que dava o sinal oposto para a energia de interação. Mas se por qualquer razão a transformação real de Ψ , correspondendo a valores imaginários de θ , for considerada, a escala de s seria expandida para a carga de um sinal e contraída para a de outro sinal. Eddington vai tentar interpretar essa diferença como a origem das massas do elétron e do próton.

4.9.1 A massa do átomo de hélio

Neste artigo Eddington repetiu, de forma um pouco diferente, um argumento do artigo anterior.

O argumento de Eddington neste ponto baseia-se em que um sistema de duas cargas tem 136 rotações relativas, os graus de liberdade ignoráveis. A distância

própria r entre as cargas, a qual é o grau de liberdade 137 da sua teoria, não seria ordinariamente ignorável já que esta entraria explicitamente no termo de energia mútua no Hamiltoniano. Se um número de cargas formassem um núcleo rígido, tal que não existisse no Hamiltoniano qualquer mudança interna do núcleo, qualquer alteração da distância r entre pares de cargas seria ignorável e o número de coordenadas ignoradas aumentaria para 137, para cada par de cargas. Eddington aponta o fato de que poderia ser objetado que sob tais circunstâncias, em dinâmica, não se podia tecnicamente ignorar uma coordenada a qual não variasse. Mas neste problema em particular ele argumenta que está sendo considerado o intercambio do momento, expressado por variações de r do tipo $re^{i\theta}$. De fato, suprimindo as variações reais de r se restringiria esta à variações desse tipo, tal que esta pudesse ser tratada como cíclica e ignorável.

O aumento do número de graus de liberdade ignoráveis de 136 para 137 no núcleo rígido diminuiria a massa dos prótons em uma razão $\frac{136}{137}$ e aumentaria a massa dos elétrons na razão $\frac{137}{136}$. Segundo Eddington, a última predição não podia ser verificada; mas a primeira seria uma boa aproximação para a “packing fraction”, i.e., a redução da massa do próton quando este entra no, aproximadamente rígido, núcleo de hélio.

Este cálculo não contradiria a teoria existente da “packing fraction”, a perda de massa representaria a energia electrostática negativa. Não seria portanto preciso ignorar r ; pois poder-se-ia deixar o termo de energia elétrica contendo-a explicitamente no Hamiltoniano. Mas para um núcleo rígido o método de ignoração deveria dar o mesmo resultado, e esse teria a vantagem de dar um método praticável de cálculo, enquanto que os outros métodos apresentavam problemas.

4.9.2 A massa do elétron

Esta confirmação que Eddington obteve do seu princípio o animou para aplicá-lo mais ambiciosamente. Eddington passou a procurar algum argumento que lhe trouxesse uma redução da massa (do próton para o elétron) relacionada com redução de graus de liberdade. Na teoria de Schrödinger havia apenas 10, relacionados a 6 rotações e 4 translações no espaço-tempo (ou aos termos independentes da métrica, $g_{\mu\nu}$). Talvez essa diferença entre 10 e 136 graus de liberdade tivesse relação com a diferença entre a massa do próton e a do elétron.

Eddington admite que por algum processo, que ainda desconhecia em detalhe, esses sistemas microscópicos com 136 rotações relativas seriam substituídos por observação prática em um espaço-tempo admitindo mesmo número de rotações

rotações relativas. Segundo Eddington essa mudança seria feita, por exemplo, quando se substituisse a função de onda de Schrödinger no lugar da de Dirac. O espaço-tempo quadridimensional ofereceria apenas 10 graus de liberdade cíclicos, 4 deslocamentos e 6 rotações.

Esses 10 graus de liberdade corresponderiam ao Hamiltoniano de segunda ordem, enquanto que os 136 originais corresponderiam ao Hamiltoniano linear de Dirac. A diferença estaria em que os quadrados do momento seriam adicionados juntos no lugar de uma soma linear estar envolvida. Assim a adição dos 10 termos iguais equivaleria a usar um termo simples com escala de momento alterada na razão $\sqrt{10}$. Eddington afirma ter assim encontrado os graus de liberdade no espaço macroscópico como equivalentes aos $\sqrt{10}$ graus de liberdade em um Hamiltoniano linear. A redução de 136 para $\sqrt{10}$ incrementaria a massa aparente do próton na razão $\frac{136}{\sqrt{10}}$ e diminuiria a massa aparente do elétron na razão $\frac{\sqrt{10}}{136}$. A razão da massa do próton para a massa do elétron sendo portanto $\left(\frac{136}{\sqrt{10}}\right) \div \left(\frac{\sqrt{10}}{136}\right) = 1849,6$. Eddington adiciona que o resultado 1849,6 estava razoavelmente perto do observado “valor de deflexão” de $\frac{M}{m}$.

Eddington não justificou essa análise, no seu artigo. Ao contrário dos trabalhos anteriores, este passa a impressão de um simples ajuste de números, sem base teórica.

4.9.3 A massa do universo

Segundo Eddington uma constante da natureza que sempre causava surpresa e interesse era a razão entre a repulsão electrostática entre duas cargas elementares e sua atração gravitacional. Chamando esta de F , se obteria $F = \frac{e^2}{Gm^2}$. Eddington já suspeitava (desde a época em que escreveu *The mathematical theory of relativity* acerca da dependência entre F e o número de partículas no universo N , e mais particularmente que $F^2 = \alpha N$, onde α seria um fator geométrico não muito diferente da unidade. Mas já que $F^2 \propto m^{-4}$, existiria uma incerteza de 10^{13} conforme se se enxergasse o próton ou o elétron como a massa fundamental. Segundo as idéias astronômicas do tamanho do espaço, N poderia ser intermediário entre os dois possíveis extremos.

Segundo sua argumentação anterior a média geométrica de M e m teria um significado fundamental, sendo a massa original dos dois tipos de carga e acontecendo como tal nas equações iniciais nas quais poderia ser esperada uma associação de energias gravitacionais e elétricas mais simples. Usando $\sqrt{Mm}$ como a

massa fundamental, se encontra

$$F^2 = \frac{e^2}{GMm} = 5,3 \times 10^{78}$$

Pela velocidade de recessão observada das nebulosas espirais, tomada como 500 km. por seg. por mpsec., Eddington encontra que o número de prótons no universo é

$$N = 7 \times 10^{78} \quad \text{ou} \quad 14 \times 10^{78}$$

segundo o espaço seja tomado como elíptico ou esférico. Para fazer esse cálculo ele usou o valor limite da velocidade, supondo que a atração das galáxias e da matéria cósmica não é importante comparada com o termo de repulsão cósmica. Se este fosse significativo N diminuiria.

Eddington não supõe que F^2 seja precisamente igual a qualquer valor de N . Para ele poderia existir um fator α , possivelmente $\frac{2}{\pi}$ ou alguma coisa desse tipo.

Eddington pensava que a lei $F \propto \sqrt{N}$ poderia obter-se desde o princípio que toda alteração no número de graus de liberdade de um sistema estaria compensado por uma mudança de escala linear. Tal alteração afetaria a energia elétrica diferentemente. Aceitando a lei de variação, tomado $N = 2$ segue-se que no sistema simples de dois elétrons a razão da energia elétrica à gravitacional é $\sqrt{2\alpha}$ e portanto não está longe da unidade. No entanto, ele não se sentia capaz de fazer um cálculo desse tipo.

4.10 O valor da constante cosmológica

EDDINGTON, A.S. On the value of the cosmical constant. *Proceedings of the Royal Society, A*, 133: 605-615, 1931.

Eddington considera a equação de campo no vácuo, $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ ao tratar a constante cosmológica aparecendo na lei da gravitação de Einstein. Como visto no capítulo anterior, nas equações de movimento o termo contendo λ representa uma força de repulsão a qual tende a fazer com que todos os corpos remotos se afastem uns dos outros; sendo este fenômeno a base das teorias de De Sitter e Lemaître que tratam acerca da expansão do universo. Se o afastamento observado da nebulossa espiral fosse uma manifestação deste efeito, o valor de λ poderia encontrar-se a partir das observações astronômicas. Mas Eddington queria encontrar uma relação teórica entre λ e a física atômica.

O tratamento de Eddington começa pela análise da equação de onda para um elétron movendo-se em um campo eletrostático devido a um elétron fixo, apresentada no seu primeiro artigo

$$\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \left\{ m^2 c^2 + \left(\frac{ih}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \psi + \frac{e^2}{r} \psi \quad (4.40)$$

A partir desta expressão encontra uma forma de rearranjá-la fazendo

$$\alpha = \frac{hc}{2\pi e^2} \quad \gamma = \frac{2\pi mc\alpha}{h} \quad (4.41)$$

Desta forma obtém-se uma outra expressão para [4.40]:

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{r} \right) \psi + \left\{ \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + (i\gamma)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \psi = 0 \quad (4.42)$$

Eddington vai interpretar

$$\gamma = \frac{\sqrt{N}}{R} \quad (4.43)$$

Sendo R o raio de curvatura do universo em um estado estático (ou autoestado do universo) e N o número de elétrons do universo. Deve-se notar que Eddington não vai fazer nenhum uso dos modelos cosmológicos em expansão, para discutir o valor teórico de λ . As idéias básicas para a interpretação de γ são as seguintes. A energia potencial de um elétron à distância r de uma singularidade é $\frac{e^2}{r}$, e na equação do elétron isso aparece como o termo $\frac{i}{r}$. A energia de N elétrons indistinguíveis a uma distância R de uma singularidade seria representada por $\frac{i\sqrt{N}}{R}$.

Mas por que aparece $\sqrt{N}$ e não N , nessa expressão? Quando somamos números, eles se adicionam simplesmente, mas quando somamos vetores perpendiculares, a soma é expressa por $\sqrt{N}$. As duas possibilidades poderiam ser defendidas.

Para discutir entre elas, Eddington indica que se uma função de onda Ψ está normalizada e representa uma única partícula, a mesma função multiplicada por $\sqrt{N}$ representará N partículas (porque o número de partículas é dado pela integral de $\Psi\Psi^*$). Portanto é mais razoável procurar um fator $\sqrt{N}$ na equação de onda.

Considerando ψ como uma simples função harmônica de t tal que $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ satisfaça as mesmas equações que ψ , encontra-se uma outra forma de representar [4.40], omitindo os elétrons fixos

$$\left(\frac{ih}{2\pi} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ m^2 c^2 + (\partial ih 2\pi)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \psi \quad (4.44)$$

Agora, utilizando mais uma vez [4.41] encontra-se:

$$\left\{ \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \gamma^2 \right\} \psi = 0 \quad (4.45)$$

Com a identificação

$$\gamma^2 = \frac{N}{R^2} = N\lambda \quad (4.46)$$

A constante cosmológica é λ , sendo R o raio de Einstein. Note-se que o raio atual do universo é irrelevante nessa teoria. Assim [4.45] pode ser escrita como

$$(\alpha^2 \square + N\lambda)\psi = 0 \quad (4.47)$$

Segundo Eddington a equação [4.47] o seduziu a uma divagação. Suas investigações teóricas de α guiaram-no a pensar que o circuito correspondendo a R necessariamente deve ser diminuído na razão da fração $\frac{136}{137}$ para fazer esta comparável estritamente com r . Eddington viu que esta correção, se fosse real, era desprezível para seus propósitos e não a tomou em consideração em seu artigo. Mas depois pensou que α em [4.47] seria tomada como 136 no caso dos prótons e como $\sqrt{10}$ no caso dos elétrons. As equações para elétrons e prótons livres seriam respectivamente

$$(136^2 \square + N\lambda)\psi = 0 \quad (10 \square + N\lambda)\psi = 0 \quad (4.48)$$

os números 136^2 e 10 originando-se mais ou menos no caminho que Eddington sugeriu no seu artigo sobre as massas do elétron, do próton e do universo (EDDINGTON, 1931(c), p. 18).

Por [4.41] e [4.42] obtém-se

$$\frac{2\pi m c \alpha}{h} = \frac{\sqrt{N}}{R} \quad (4.49)$$

A teoria do universo de Einstein está expressa como

$$\frac{GM_0}{c^2} = \frac{1}{2}\pi R \quad (4.50)$$

sendo M_0 é a massa total do universo¹² e G a constante de gravitação. Dentro do seu argumento assume-se o número de prótons igual ao número de elétrons, portanto obtém-se aproximadamente $M_0 = NM$, sendo M a massa do próton. Portanto

$$N = \frac{1}{2}\pi c^2 \frac{R}{GM} \quad (4.51)$$

¹²Eddington adotou o espaço esférico.

por [4.49]

$$\left(\frac{2\pi mc\alpha^2}{h}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}\pi c^2}{GM} \cdot \frac{1}{R} \quad (4.52)$$

Mas no universo de Einstein $\lambda = \frac{1}{R^2}$, portanto

$$\lambda = \left(\frac{2GM}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2\pi m\alpha}{h}\right)^4 = 9,79 \times 10^{-55} \quad (4.53)$$

A partir desse valor, Eddington calcula o raio do universo de Einstein (1070 milhões de anos-luz) e a velocidade limite de recessão das galáxias ($528 \frac{km}{s}$ por megaparsec). O número de partículas do universo seria $1,29 \times 10^{79}$. Os valores da época para a constante de Hubble eram bastante próximas do valor calculado. As outras constantes só podiam ser estimadas aproximadamente, mas também pareciam ser da ordem de grandeza correta.

4.11 A massa do próton

EDDINGTON, A.S. On the mass of the proton. *Proceedings of the Royal Society, A*, 134: 524-532, 1931.

Neste artigo Eddington desenvolve a teoria da relação entre as massas do próton e do elétron sugerida na sua nota preliminar da massa do próton, elétron e do universo (EDDINGTON, 1931(c), pp. 15-19). Nessa nota estende a discussão da constante 137 em uma ampla investigação abarcando outras constantes naturais.

O primeiro resultado desta extensão está contido no seu artigo de 1931 (EDDINGTON, 1931(b), pp. 605-615). Esta é principalmente a teoria da massa de um elétron; sendo satisfatoriamente confirmada pelas velocidades de recessão observadas da nebulosa espiral. No seu artigo anterior Eddington havia relacionado a constante cosmológica às constantes atômicas fazendo:

$$\lambda = \left(\frac{2GM}{\pi}\right)^2 \left(\frac{2\pi m\alpha}{h}\right)^4$$

Nesta equação, m era a massa do elétron. Mas por que não seria a massa do próton? No novo artigo, Eddington vai supor que a equação de Dirac deve permitir incluir as duas massas, e que o m que apareceu antes seria, na verdade, a massa reduzida $\frac{Mm}{M+m}$ que é aproximadamente igual a m , mas não idêntica.

Segundo a teoria da constante cosmológica, poder-se-ia calcular a partir da velocidade observada de objetos remotos (nebulosas espirais), o termo de massa

presente na equação de onda. A massa da equação foi interpretada como a massa do elétron. Se perguntou então porque o elétron e não o próton? A teoria utilizada foi puramente geométrica, assim como esta adquiriria uma preferência para um dos dois tipos de carga? Neste artigo, a intenção de Eddington era responder a questão, mostrando que um desenvolvimento razoável da teoria geométrica proporcionaria as ferramentas para calcular a massa do próton e também a do elétron a partir do afastamento das nebulosas espirais já que esta removia todas as possíveis sugestões de preferência para o elétron. Partindo do fato que o termo de massa originalmente calculado era estritamente $\frac{Mm}{(M+n)}$, este termo sendo simétrico com respeito ao próton e ao elétron. Retomou a equação de Dirac para um elétron simples:

$$\left\{ \frac{ih}{2\pi} \left(E_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + E_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + E_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + E_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) + mc \right\} \psi = 0 \quad (4.54)$$

Com E_1, E_2, E_3 e E_4 sendo raízes quadradas anticomutando de -1 , tal que

$$E_\mu^2 = -1 \quad E_\mu E_\nu + E_\nu E_\mu = 0 \quad (4.55)$$

Sob a consideração de uma solução elementar consistindo em ondas planas na direção

$$s = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4$$

l_1, l_2, l_3, l_4 , sendo cossenos diretores. Assumiu que

$$E_s = l_1 E_1 + l_2 E_2 + l_3 E_3 + l_4 E_4$$

de tal forma que por [4.55],

$$E_s^2 = -1 \quad (4.56)$$

[4.54] pudesse ser escrito na forma:

$$\left(iE_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{2\pi mc}{h} \right) \psi = 0 \quad (4.57)$$

Segundo a teoria da constante cosmológica, já desenvolvida por ele,

$$\frac{2\pi mc\alpha}{h} = \frac{\sqrt{N}}{R}$$

onde α é a constante de estrutura fina 137, N o número total de elétrons (ou prótons) no universo, e R o raio de equilíbrio do universo. Portanto, fazendo

$$ds = R d\chi_s = \left(\frac{R}{\sqrt{N}} \right) d\theta_s \quad (4.58)$$

encontrou uma nova expressão para [4.57]

$$\left\{ \alpha \left(iE_s \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) + 1 \right\} \psi = 0 \quad (4.59)$$

Eddington assumiu que a relação essencial entre o próton e o elétron ficaria mais claramente exibida tratando-se o universo da forma mais simples possível, ou seja constituído por um próton e um elétron. Nesse caso $N = 1$ e $d\theta_s = d\chi_s$, assim que $d\theta_s$ seria a medida afim do deslocamento. Mas percebendo que, desde o ponto de vista físico, esta seria uma simplificação excessiva, já que vários dos conceitos físicos ordinários seriam indefiníveis em um universo tão simples, sugeriu que em qualquer estagio se poderia voltar a um universo mais compreensível com N prótons e N elétrons através da transformação $d\theta_s = \sqrt{N} d\chi_s$, de tal modo que $d\theta_s^2 = N R_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Isto significava que, no lugar de referir-se a um elétron só, agora podia-se só fazer referência a “um dos N elétrons indistinguíveis”.

Olhando para a constante α em [4.59] ele a enxergou como um simples fator numérico na equação e assumiu que não seria difícil discernir sua origem na geometria do problema. As séries de investigações de Eddington se originaram na crença de que α representava o número de rotações relativas ou graus de liberdade do sistema, e essa interpretação foi seguida em todos seus desenvolvimentos posteriores. Segundo Eddington, um sistema de duas cargas teria 136 rotações relativas de tipo ordinário junto com uma rotação adicional representando a mudança da medida (tamanho). Assim no problema de interação de duas cargas cujas posições eram referidas no espaço Riemanniano, $\alpha = 137$, numa boa aproximação com os experimentos. Eddington tomou $\alpha = 136$ como sendo o valor apropriado para [4.59].

Ele usou o número de rotações relativas de duas cargas principais, devido a que este seria o apropriado para o universo constituído por um elétron e um próton. Mas o mesmo número teria uma ampla aplicação, ele pensava, devido ao fato que a base de uma geometria afim seria um deslocamento elementar dx_μ . Tal deslocamento seria então uma relação entre dois pontos, e um ponto só seria considerado como sendo o possível centro da carga elétrica. Desta forma o dx_μ como este acontecendo na física microscópica seria essencialmente uma relação entre duas cargas, e teria os graus de liberdade de um sistema de duas cargas diretamente associado com ele.

Fazendo $\alpha = 136$ em [4.59], obteve:

$$\left\{ 136 \left(iE_s \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) + 1 \right\} \psi = 0 \quad (4.60)$$

No lugar do hamiltoniano linear de Dirac usou o hamiltoniano quadrático de Schrödinger:

$$\frac{1}{\mu} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) = -\frac{h^2}{4\pi^2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right) \quad (4.61)$$

Para ondas planas na direção s a equação de onda de segunda ordem se reduziria a

$$\left(\beta \frac{\partial^2}{\partial \theta_s^2} + 1 \right) \psi = 0 \quad (4.62)$$

onde usou a medida natural $d\theta_s$ como antes e β como um coeficiente numérico positivo.

Na equação de onda de segunda ordem, ψ seria uma quantidade simples ou um grupo de componentes, mas no último caso as componentes não interatuariam umas com as outras. As 136 rotações do ψ de Dirac não estavam envolvidas. De fato, segundo Eddington, as características elétricas da partícula seriam ignoradas e portanto a forma de Schrödinger da equação se referiria a partículas elétricas sem quaisquer propriedades elétricas.

Seguindo a mesma regra que utilizou para determinar α , Eddington tomou agora um outro valor β como sendo o número de rotações relativas ou graus de liberdade que se originam na teoria de partículas mecânicas (nêutron=som sem carga). As possíveis alternativas sugeriam o valor de $\beta = 10$ correspondendo aos graus de liberdade da geometria de Riemann. Os 136 graus de liberdade foram associados com um deslocamento cujos extremos eram os lugares onde estariam localizadas as partículas elétricas; agora, se se substituíssem partículas mecânicas, o deslocamento aparecia, no seu aspecto ordinário, como uma relação a qual seria totalmente representável no espaço-tempo Riemanniano.

O nêutron ideal de Eddington então obedecia à equação

$$\left(10 \frac{\partial^2}{\partial \theta_s^2} + 1 \right) \psi = 0 \quad (4.63)$$

Por comparação com [4.60] sua massa própria seria $\frac{136}{\sqrt{10}}$ vezes maior do que a da partícula descrita aqui: o elétron. Isto faria com que a massa de uma partícula neutra ideal estivesse muito perto de $\sqrt{Mm}$ onde M e m seriam as massas do próton e do elétron.

Unindo as duas equações, Eddington sugeriu a seguinte combinação:

$$\left\{ 10 \left(iE_s \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right)^2 + 136 \left(iE_s \frac{\partial}{\partial s} \right) + 1 \right\} \psi = 0$$

Supondo que essa equação possa ser fatorada em duas equações mais simples, temos

$$\left(A i E_s \frac{\partial}{\partial \theta_s} + 1 \right) + 136 \left(i E_s \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right) \psi = 0$$

onde os fatores A e B são as raízes da equação de segundo grau

$$10x^2 + 136x + 1 = 0$$

Os dois fatores são, respectivamente, 135,9264 e 0,0735692. A razão entre os dois é 1.847,60, que Eddington interpretou como a razão entre as massas do próton e do elétron.

Em 1934, Eddington apresenta seu artigo sobre a massa do próton e o elétron (EDDINGTON, 1934, p. 327) e se dedica a recopilar suas descobertas em dois livros um deles publicado em 1936 (EDDINGTON. *Relativity theory of protons and electrons*) e o outro publicado em 1946, intitulado *Teoria Fundamental* (EDDINGTON, *The Fundamental Theory*). Estes trabalhos, como mencionado na introdução, não formam parte do nosso objeto de estudo pois sua complicação vai além da nossa proposta. O artigo de 1934 é o último trabalho de Eddington que vamos considerar nesta dissertação.

4.12 As massas do próton e o elétron

EDDINGTON, A.S. On the masses of the proton and electron. *Proceedings of the Royal Society, A*, 143: 327, 1934.

A conclusão atingida por Eddington neste artigo é que a massa m de uma partícula elementar (próton ou elétron) é dada pela equação quadrática

$$10m^2 - 136mm_0 + m_0^2 = 0 \quad \text{onde} \quad m_0 = \frac{h}{2\pi c} \frac{\sqrt{N}}{\rho},$$

N sendo o número de tais partículas no universo, e ρ o raio de curvatura de uma região vazia, igual a $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$ onde λ é a constante cosmológica.

Exceto por uma pequena diferença na definição de N e ρ , este resultado está de acordo com a fórmula sugerida num dos seus artigos anteriores (EDDINGTON, 1931(b)).

Neste artigo Eddington faz uma revisão dos princípios físicos fundamentais. A análise matemática que aqui apresenta é uma continuação da que desenvolveu

em um dos seus primeiros artigos (EDDINGTON, 1931(b)), mas não abordaremos este desenvolvimento pois os resultados aqui obtidos, mesmo partindo uma abordagem diferente, não conduzem a um resultado relevante para nosso estudo.

Apesar destas confirmações o trabalho de Eddington sobre as constantes da natureza não teve repercussão e foi amplamente criticado. O próprio Pauli escreve para Sommerfeld que não acreditava no trabalho de Eddington para a constante de estrutura fina como sendo 136 (KILMISTER, 1994, p. 116). Schrödinger foi um dos poucos físicos importantes que apoiou o trabalho de Eddington (KILMISTER, 1994, p. 224).

Capítulo 5

As fases do trabalho de Eddington

Costuma-se descrever a carreira científica de Eddington diferenciando entre a sua fase produtiva “normal”, em que deu grandes contribuições à astrofísica, à teoria da relatividade e à cosmologia (até 1930, aproximadamente), de sua fase “estranha” em que se dedicou à tentativa de deduzir *a priori* os valores das constantes básicas do universo.

Nessa segunda fase, Eddington utilizava um método de pesquisa no qual construía um formalismo matemático abstrato (baseado em estruturas da mecânica quântica, mas diferente da teoria “normal”) e tentava associar as constantes fundamentais com certos números que apareciam nas equações. Essa identificação não parecia seguir uma metodologia rigorosa. Parecia basear-se, primeiramente, no próprio conhecimento do resultado ao qual ele queria chegar (por exemplo, o número 137) e, em segundo lugar, na manipulação arbitrária de relações, na mudança de significado de termos das equações e em uma liberdade teórica que parecia pouco razoável aos olhos da maioria dos físicos da época. A matemática utilizada por Eddington era uma construção interessante e rigorosa, mas as relações entre essa matemática e a física (a identificação das constantes) parecia um simples exercício de ajuste, sem fundamentos.

O método matemático utilizado por Eddington, que consistia em desenvolver uma estrutura abstrata sem saber exatamente como relacioná-la com as entidades físicas correspondentes, para depois procurar identificações, pode ser encontrado nesta citação:

Temos um sistema que está em um certo estado no qual certas variáveis dinâmicas possuem certos valores. Esta informação é expressa por equações envolvendo os símbolos que denotam o estado e as variáveis dinâmicas. A partir destas equações, deduzimos então outras

equações de acordo com os axiomas que governam os símbolos, e das novas equações são tiradas conclusões físicas. Em nenhum lugar a natureza exata dos símbolos é especificada, e tal especificação nem mesmo é necessária. Eles são usados todo o tempo de forma abstrata; apenas os axiomas algébricos que eles satisfazem e a conexão entre as equações que os envolvem e as condições físicas são necessários. Os axiomas, juntamente com esta conexão, contêm certo número de leis físicas, que não podem ser analisadas de forma conveniente, nem mesmo expressas de outro modo.

Essa descrição, um pouco confusa, mostra o físico teórico tentando manipular símbolos e equações para os quais não dispõe de interpretações, acreditando no entanto que lá estão contidas certas relações importantes. É mais ou menos isso que Eddington faz. Ocorre, no entanto, que a citação não é de Eddington e sim de Dirac (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 85). Eddington tem, sim, aspectos diferentes dos outros cientistas, mas muitos de seus aspectos “estranhos” apareciam também nos trabalhos de outros grandes físicos.

Kilmister enfatizou que mesmo um físico ortodoxo, como Dirac, chegou a afirmar que a teoria quântica de campos era incompleta porque não tinha conseguido calcular o valor da constante de estrutura fina (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 5). Para outros cientistas, como De Sitter, a existência de constantes puramente empíricas na física não parecia um problema:

É impossível, para nós, ir além das equações matemáticas e, até aqui, não conseguimos descobrir a menor conexão entre esse λ perturbador e outras constantes fundamentais da física. [...] O comportamento do λ não é mais estranho, nem mais misterioso, do que o da constante da gravitação κ , ou da constante h do quantum, ou da velocidade da luz c . (DE SITTER, 1931, p. 9)

Merleau-Ponty assinalou vários outros pontos do trabalho de Dirac que se assemelham à abordagem de Eddington (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, p. 112). Não há dúvidas de que foi o contato com a teoria de Dirac (e com seus métodos) que despertou em Eddington a procura de um método para calcular as constantes fundamentais da física.

No entanto, deve-se mencionar que Dirac não apoiou o trabalho de Eddington. Ele mostrou dúvidas sobre essas pesquisas, porque primeiro Eddington havia

provado que a constante de estrutura fina seria dada pelo número 136, e depois, quando ficou claro que o valor experimental não permitia esse número, Eddington provou que o número correto era 137. Para Dirac, isso não parecia um trabalho sério (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 117).

Logo depois da publicação (póstuma) do livro *Fundamental theory*, Milne publicou uma resenha da obra (MILNE, 1947), onde comentou: “O volume é escrito de uma forma brilhante; mas a argumentação física é tão pouco familiar, tão intrincada, tão sujeita a revisão e correção perpétua, que é extremamente difícil extrair dele qualquer prova convincente de qualquer das fórmulas mais famosas de Eddington” (MILNE, 1947, p. 486). Um exemplo da crítica de Milne mostra o tipo de problemas que se via, na época, no trabalho de Eddington:

Aqueles que procuram uma prova compacta de que a constante de estrutura fina $\frac{2\pi e^2}{hc}$ tem o valor exato de $\frac{1}{137}$ passarão por grandes dificuldades neste livro. Primeiro é preciso dominar o uso que Eddington faz de seus fatores de multiplicidade K , que são definidos de uma forma desafiadora como o número de dimensões em certos espaços de fase; depois, o seu processo de estabilização, que é um tipo de varinha mágica que ele balança para suprimir graus de liberdade inconvenientes, alterando assim os fatores de multiplicidade; então é necessário superar todos os preconceitos para engolir uma fórmula na página 29, onde as massas são *inversamente proporcionais* aos fatores de multiplicidade, embora, com a repetida identificação que Eddington faz entre massa e energia, teríamos esperado que a energia de uma partícula fosse diretamente e não inversamente proporcional a seus graus de liberdade no espaço de fase. Depois desses preliminares perturbadores lê-se o parágrafo 20, intitulado “A constante de estrutura fina”, apenas para descobrir que lá são apresentadas apenas considerações plausíveis para atribuir o número 137 à razão entre dois “átomos de ação”, e que a dedução teórica é adiada para o parágrafo 33. Por fim, não se consegue acompanhar o parágrafo 33 de modo nenhum. Essas dificuldades ocorrem novamente em todo o livro. (MILNE, 1947, p. 487)

William McCrea, que havia sido estudante de Eddington, escreveu em 1991 um artigo popular sobre seu ex-professor, no qual comentou: “Nenhum dos resultados desta parte do trabalho de Eddington foi aceito. E jamais qualquer físico alegou estar certo dos postulados a partir dos quais Eddington partiu, ou de haver

seguido seu raciocínio completamente até alguma de suas conclusões principais; sempre parecia existir alguma lacuna - alguma lacuna irritante - na lógica” (McCREA, 1991, p. 71). Não se deve interpretar essa “lacuna na lógica” descrita por McCrea como falhas de raciocínio, mas como saltos injustificados. Sob o ponto de vista de coerência matemática, o próprio McCrea comentou: “O desenvolvimento [da teoria de Eddington] envolvia muita matemática engenhosa, parte dela inventada para essa finalidade por Eddington, e deve ser dito que ninguém jamais detectou qualquer erro significativo naquilo que ele escreveu” (McCREA, 1991, p. 71).

Os primeiros trabalhos de Eddington nessa linha de pesquisas tinham sido recebidos com curiosidade e interesse - até mesmo com esperança de que ele tivesse encontrado um caminho para resolver problemas de enorme importância (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, p. 84). No entanto, à medida que se percebeu que ele ia mudando os argumentos, que a teoria era maleável e podia ir sendo ajustada de muitos modos diferentes, surgiu uma desconfiança e insatisfação com esses trabalhos. O primeiro livro publicado por Eddington nessa linha, que foi o *Relativity theory of protons and electrons* (1936), parece ter sido uma linha divisória. O trabalho desapontou a comunidade científica, que não reconhecia nessa obra o mesmo Eddington do *Mathematical theory of relativity* e de tantas outras obras excelentes.

A posição epistemológica de Eddington, que se tornou muito clara nessa época, incomodou a diversos cientistas. Em 1937 Herbert Dingle criticou não apenas Eddington mas também outros físicos (como Milne e Dirac) por adotarem uma abordagem semelhante à de Aristóteles, tentando criar uma ciência *a priori* em vez de adotar o método experimental de Galileu (DINGLE, 1937).

Um dos poucos físicos que apresentou uma defesa incondicional do trabalho de Eddington foi seu amigo Edmund Whittaker, que além de editar o *Fundamental theory* escreveu uma obra (WHITTAKER, *From Euclid to Eddington*) onde Eddington é apresentado sempre de forma positiva. Erwin Schrödinger foi um dos poucos grandes físicos que tentou compreender a teoria de Eddington, tendo se correspondido com ele e feito visitas a Cambridge para discutir esses trabalhos (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 224).

Eddington, é claro, não considerava que seu trabalho estivesse decadente ou que estivesse seguindo uma metodologia errada. Ao mesmo tempo em que desenvolvia essas pesquisas, ele publicou trabalhos sobre filosofia da ciência em que, entre outras coisas, descrevia sua concepção sobre como a física teórica deve ser desenvolvida. Estudando-se esses trabalhos, nota-se que ele apresenta argumen-

tos para justificar sua metodologia. Ou seja: ele procurava manter uma coerência entre sua prática científica e suas crenças fundamentais sobre como a física deve ser construída. Pode-se também notar, lendo com atenção seus trabalhos técnicos, que mesmo neles Eddington vai apresentando argumentos epistemológicos e metodológicos para justificar seu enfoque pouco ortodoxo.

Pode-se chamar de “numerologia” o processo de tentar identificar certos números sem dispor de qualquer teoria para isso. Por exemplo: em 1951 um autor chamado Lenz chamou a atenção para o fato de que a razão entre as massas do próton e do elétron (que tinha o valor de 1836,12) coincidia com o valor de $6\pi^5$ (que vale 1836,12), sem oferecer nenhum motivo para introduzir π elevado à quinta potência ou o número 6 da fórmula. Isso é pura numerologia (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 213).

Não parece, portanto, que Eddington estivesse apenas brincando de numerologia em sua segunda fase científica. Ele estava se dedicando seriamente a fazer algo que lhe parecia correto, sob o ponto de vista científico. Não se deve pensar, também, que seu objetivo central fosse absurdo. Ele queria obter uma unificação de toda a física, como outros grandes cientistas de sua geração.

Na sua teoria sobre os fundamentos da física Eddington foi um de um pequeno grupo de pesquisadores independentes que perseguia fins essencialmente semelhantes. Eddington, Einstein, Milne, Erwin Schrödinger um pouco depois e Hermann Weyl um pouco antes, tentaram construir teorias unificadas da física e da cosmologia, e por fim falharam. Pode-se dizer que eles desperdiçaram tempo e talento em tal busca. No entanto, se pensarmos individualmente sobre esses homens, será difícil ver que outra coisa eles poderiam ter feito se não se voltassem para esses desafios. Além disso, o que eles estavam tentando fazer é o que alguns líderes têm tentado desde então - procurar grandes teorias unificadas. Já foram realmente encontradas soluções parciais, tais como a unificação do eletromagnetismo e da força nuclear fraca. (McCREA, 1991, p. 71).

Uma pesquisa de história da ciência não tem o objetivo de julgar se um determinado cientista estava correto ou errado, se sua física era válida ou inválida. Não faz muito sentido, em um trabalho histórico, discutir as teorias de Eddington do ponto de vista atual, indicando se concordamos ou não com elas. Podemos, no entanto, analisar até que ponto Eddington apresentava uma fundamentação para

seu trabalho, no contexto da época. Vamos, por isso, descrever a justificativa filosófica que o próprio Eddington apresenta para seu trabalho.

5.1 A filosofia de Eddington

Em 1938 Eddington deu uma série de conferências no *Trinity College*, em Cambridge, na qual desenvolveu sua filosofia da ciência. A partir dessas conferências ele escreveu o livro *The philosophy of physical science*, publicado no ano seguinte, que é considerado sua principal obra epistemológica. A exposição apresentada aqui se baseia principalmente nesse livro.

Não queremos expor toda a visão de Eddington sobre a ciência, mas apenas os aspectos que são mais importantes para compreender suas pesquisas sobre as constantes do universo.

Eddington não considerava que sua filosofia da ciência fosse pessoal ou *sui generis*. Ele a considerava como uma consequência natural do desenvolvimento da física de sua época e a descreve como a filosofia da física atual [*the present philosophy of physical science*] e não como uma entre muitas propostas existentes.

Na medida em que reconhecemos a autoridade de um corpo de opinião que decide o que é e o que não é aceito como a física presente, existe uma filosofia atual da ciência física, que pode ser determinada. É a filosofia à qual aqueles que seguem a prática aceita da ciência ficam obrigados por sua prática. Ela está implícita nos métodos pelos quais eles fazem a ciência avançar, algumas vezes sem compreender completamente por que os empregam, e no procedimento que aceitam como proporcionando a segurança da verdade, geralmente sem examinar que tipo de segurança ele pode dar. (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. vii)

Em certo sentido, Eddington se refere à “minha filosofia”, mas explica que não alega ser o autor das idéias que apresenta, pois elas estão “amplamente difundidas no pensamento moderno”, e sim apenas por haver selecionado e sintetizado essas idéias de um modo pessoal. Eddington chama sua apresentação particular da filosofia da física de “subjetivismo seletivo” ou “estruturalismo” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. viii), por razões que ficarão claras mais adiante.

Um ponto importante da filosofia da ciência defendida por Eddington é sua interpretação sobre a relação entre teoria e conhecimento empírico. Eddington dá

importância ao aspecto empírico ou observacional das ciências, é claro. Ele afirma que a observação é a “corte suprema de recursos” para o estabelecimento da verdade das conclusões da ciência física (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 9). Em princípio, todo conhecimento físico deveria ser apresentado sob uma forma tal que pudesse ser submetido a um teste observacional. Afirma também que se houver um conflito entre teoria e o conhecimento observacional, deve-se admitir que a teoria está errada.

Eddington dá importância à observação e às medidas, mas com uma conotação de simples leituras de ponteiros que não dão informações diretas sobre a realidade (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, pp. 20-21). São as teorias que podem dar sentido às medidas. As teorias indicam o que pode ser medido, e especificam qual o significado das medidas. A análise das condições necessárias para que uma grandeza física possa ser medida pertence aos enunciados não-empíricos da ciência (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, p. 21).

Uma parte do conhecimento físico é obtido por generalização da experiência - mas nem todo. Logo no segundo capítulo do seu livro, Eddington introduz de modo bastante claro sua visão sobre a possibilidade de uma ciência a priori, através de uma estória (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 16).

Suponhamos que um ictiólogo está explorando os seres vivos do oceano que coleta através de uma rede. Examinando os animais que recolhe, ele procura sistematizar suas observações e chega a duas generalizações:

- (1) Nenhuma criatura marinha tem menos do que duas polegadas de comprimento.
- (2) Todas as criaturas marinhas possuem guelras.

As duas generalizações descrevem os fatos que ele observou e ele acredita que serão válidas também para outras observações que ele fará no futuro.

Suponhamos no entanto que uma pessoa que estava observando o trabalho do ictiólogo comenta que ele está errado: há criaturas marinhas com menos de duas polegadas, porém a rede do ictiólogo não consegue capturá-las, porque as malhas são muito grandes. O cientista poderia responder que “Tudo o que não pode ser capturado por minha rede está fora do conhecimento ictiológico. Em resumo, o que minha rede não pode capturar não é peixe”. O ictiólogo e a pessoa que o criticou poderiam ficar discutindo muito dias sem chegar a um acordo. Um deles (a pessoa que fez o comentário) está se referindo a um mundo externo, independente do ictiólogo e de sua rede, e que contém coisas que não

são capturadas pela rede. O ictiólogo está querendo restringir a discussão àquilo que ele pode observar (ou seja, aquilo que ele pode captar com sua rede).

De certa forma, podemos dizer que essa estória tem uma grande semelhança com as discussões surgidas no século XX (tanto na teoria da relatividade quanto na mecânica quântica) a respeito daquilo que deve ser incluído na ciência. A relatividade rejeitou o éter porque ele não podia ser observado. Muitos físicos reclamaram dessa posição, pois poderiam existir coisas que não estavam sendo observadas, mas que eram reais. Duas décadas depois, o desenvolvimento da teoria quântica levou à idéia de que não existe sentido em descrever simultaneamente a posição e a velocidade de um elétron, ou em descrever sua trajetória. Muitos físicos não aceitaram essa limitação (incluindo Einstein), alegando que a mecânica quântica poderia não ser uma descrição completa da realidade.

Eddington vai adotar a postura que lhe parece ser o resultado natural da evolução da física no século XX: só devemos incluir no “mundo físico” aquilo que pode ser observado e deixar de lado discussões a respeito daquilo que não podemos observar. Assim, ele considera que o ictiólogo está correto. Se só é possível estudar aquilo que a rede extrai do oceano, então não tem sentido ficar discutindo outros seres inobserváveis, com menos de duas polegadas, que poderiam estar ocultos no mar.

Deixando de lado a analogia, se tomarmos as observações como sendo a base da ciência física, e insistirmos que suas afirmações devem ser verificáveis pela observação, imporemos um teste seletivo sobre o conhecimento que pode ser admitido como físico. A seleção é subjetiva, porque depende do equipamento sensório e intelectual que é nosso meio de adquirir conhecimento observacional. As generalizações da física, aquilo que chamamos de leis da natureza, se aplicam a esse conhecimento selecionado subjetivamente e ao universo que se supõe estar sendo descrito. (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 17)

O ictiólogo da estória é um cientista que age corretamente e que apenas se preocupa com aquilo que pode ser observado. A pessoa que o criticou é descrita por Eddington como um filósofo metafísico, que está preocupado com uma “realidade” que não pode ser captada.

Quando Eddington fala sobre o universo físico ele não está se referindo a alguma coisa independente dos seres humanos, que “está lá fora” e que procuramos conhecer. Ele se refere àquilo que é descrito pela física, ou seja, a uma descrição

que fazemos e que muda com o tempo (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 3).

Há no entanto uma continuação da estória, que Eddington conta, e que traz uma outra lição epistemológica. Ele supõe que uma outra pessoa, que estava observando o ictiólogo trabalhar, poderia fazer um novo comentário:

“Eu percebo que você está correto em recusar a hipótese de peixes incapturáveis de nosso amigo, que não pode ser verificada por nenhum teste que consideremos válido. Restringindo-se ao seu método de estudo, você atingiu uma generalização da maior importância - para os pescadores, que não se interessariam por generalizações sobre peixes que não podem ser capturados. Como essas generalizações são muito importantes, eu quero ajudá-lo. Você chegou à sua generalização pelo método tradicional de examinar os peixes. Posso indicar-lhe que você poderia ter chegado mais facilmente à mesma generalização examinando a rede e o método de utilizá-la” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 18)

Esta outra pessoa é, para Eddington, um epistemólogo que pode ajudar o cientista. O método tradicional de examinar sistematicamente os dados fornecidos pela observação não é o único modo de chegar a generalizações válidas, na física. Examinando-se a rede e o modo pelo qual ela é utilizada seria possível concluir-se que ela só pode capturar peixes com menos de duas polegadas, e portanto poderíamos antecipar o resultado dos experimentos. Da mesma forma, na física, pelo menos uma parte das generalizações encontradas experimentalmente poderia ser encontrada pelo mero exame do equipamento (sensório e intelectual) usado na observação (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 18). Eddington acredita que o desenvolvimento das novas teorias da física tinha utilizado exatamente essa metodologia: “O desenvolvimento da teoria da relatividade e a transformação da teoria quântica de uma teoria empírica para uma teoria racional são o resultado de um novo método; e nele está nossa grande esperança de avanços fundamentais posteriores” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 19).

Nem todas as generalizações da física são desse tipo, é claro. A segunda generalização do ictiólogo (a de que todas as criaturas marinhas possuem guelras) só poderia ser obtida por observação, e não examinando a rede de pesca. Essas generalizações obtidas pela observação podem também ser derrubadas, futuramente, por outras observações (a descoberta de um peixe sem guelras). Pelo

contrário, as generalizações baseadas em uma análise epistemológica do processo de conhecimento não podem ser derrubadas por observações: “As generalizações que podem ser atingidas epistemologicamente possuem uma segurança que é negada àquelas que só podem ser atingidas empiricamente” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 19).

A análise epistemológica defendida por Eddington consiste essencialmente em determinar as conseqüências dos processos de observação utilizados pelos físicos, de modo a prever algumas (mas não todas) as propriedades daquilo que poderá vir a ser observado. O conhecimento do universo físico que provém das observações é denominado “conhecimento *a posteriori*”, e aquele que provém do estudo epistemológico dos processos de observação é o “conhecimento *a priori*” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 24). No entanto, o conhecimento *a priori* não é um conhecimento tirado do nada. É preciso primeiramente desenvolver um plano de observações, descrever os instrumentos de pesquisa, e então analisá-los para obter algum resultado a partir deles. Uma pessoa sem experiência observacional e sem conhecimento daquilo que outros cientistas poderiam lhe contar sobre o trabalho observacional nunca poderia desenvolver uma análise epistemológica, no sentido em que Eddington utiliza essa expressão.

Pode-se dizer que o método epistemológico de Eddington não é tão puramente epistemológico quanto se poderia imaginar à primeira vista. Como Harold Jeffreys comentou, as análises desenvolvidas por Eddington utilizam um grande volume de conhecimentos físicos já existentes (WHITROW, 1983, p. 264).

Eddington comenta que, anteriormente, a idéia de conhecimentos *a priori* na física havia sido rejeitada; mas nesse período antigo, tentava-se chegar a conclusões *a priori* a respeito de um mundo externo, objetivo. No entanto, Eddington considera que é possível um conhecimento *a priori* sobre o “universo físico”, que é definido por ele como aquilo que a física descreve, e não como uma realidade externa.

Poderíamos entender essa posição de Eddington de um modo um pouco menos chocante. Existem princípios meta-teóricos na física, que se aplicam ao nosso modo de construir as equações e que não saem da observação do mundo exterior, mas são impostas pelo físico. Temos, por exemplo, o princípio de que as grandezas dos dois lados de uma igualdade devem ser do mesmo tipo. Se de um lado temos um tensor contravariante de segunda ordem, do outro lado também devemos ter um tensor contravariante de segunda ordem. Se de um dos lados da equação temos um tensor cujo divergente é nulo, devemos ter do outro lado outro tensor cujo divergente também seja nulo. Não há nada de estranho nessas im-

posições, que utilizamos sem analisar mais profundamente. Essas são imposições do formalismo, não são o resultado do estudo da natureza externa, mas levam a consequências físicas importantes.

Whitrow comentou que há uma semelhança de princípio entre o método de Eddington e a análise dimensional desenvolvida no século XIX. Muitas vezes é possível antecipar o resultado de teorias muito complicadas, utilizando a análise dimensional. Como isso pode funcionar? A análise dimensional não faz (nem pode fazer) afirmações sobre o universo. Ela só pode fazer afirmações sobre a estrutura das equações que os físicos criam. O poder da análise dimensional vem de sua capacidade de indicar propriedades que as leis quantitativas da física devem obedecer, para serem coerentes com os conceitos sobre medidas e unidades básicas da física. Utilizando essa análise, é possível chegar a relações nas quais fica apenas faltando descobrir o valor de certas constantes adimensionais. O método funciona e, de certa forma, é *epistemológico*, no sentido de Eddington. Assim, Whitrow comenta que o trabalho de Eddington era uma tentativa de desenvolver um método mais poderoso do que a análise dimensional, através de uma teoria mais profunda a respeito das medidas, que pudesse calcular os valores das constantes adimensionais (WHITROW, 1983, p. 265). Colocando-se as coisas dessa forma, a proposta de Eddington não parece tão absurda.

Eddington procura indicar as semelhanças de sua filosofia com a de sistemas anteriores. Ele indica que, dentre os filósofos antigos, Kant teria sido o que defendeu idéias mais parecidas com a da proposta do próprio Eddington. No entanto, ele não aceitava o rótulo de “kantiano” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 188). Sob outros aspectos, o pensamento de Eddington tinha semelhanças com o positivismo lógico, mas também havia diferenças importantes.

Apesar de defender a possibilidade de uma ciência *a priori*, Eddington se distancia de filósofos como Kant, porque não aceita que as formas de pensamento sejam imutáveis. Ele reconhece que há uma história do pensamento humano - e, mais particularmente, da ciência - que deve ser levada em conta. No momento atual (para Eddington) o desenvolvimento da teoria da relatividade (e, depois, da mecânica quântica) havia permitido perceber certas estruturas de pensamento, mas no futuro poderiam surgir outras diferentes (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, pp. 27-28).

Por analogia com a estória da rede, Eddington chama sua proposta de “subjetivismo seletivo”, porque o processo de observação pode ser considerado como um tipo de seleção daquilo que se observa, e subjetivo no sentido de que a epistemologia não estuda uma realidade externa, mas estuda os procedimentos dos

cientistas e a descrição que a ciência faz do mundo (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 26). O universo físico é subjetivo no sentido de ser construído pelos cientistas (e poder mudar com o tempo). No entanto, “subjetivo” não é um adjetivo negativo, para Eddington. Há vantagens em dispor-se de um universo subjetivo - pois ele pode ser conhecido diretamente pelo pesquisador. O universo “objetivo”, por outro lado, não pode ser captado diretamente, não é passível de conhecimento imediato e, por isso, não faz parte daquilo que a ciência estuda. No entanto, Eddington não nega a objetividade do mundo externo (como Berkeley e outros idealistas).

5.2 A filosofia de Eddington e a física

Eddington nunca se preocupou em obter uma formação filosófica mais ampla. Seu trabalho filosófico foi guiado essencialmente pela pesquisa física e ele não tomava conhecimento do desenvolvimento da filosofia de sua época (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, p. 18).

A base da filosofia da ciência apresentada por Eddington é a própria prática científica, da qual ele procurou extrair suas idéias.

Para Eddington, a base da teoria da relatividade não é um conjunto de fórmulas e sim um novo ponto de vista, envolvendo a idéia de que apenas podemos observar relações entre entidades físicas. Ao discutir o processo de medida e de observação da física, a teoria da relatividade trouxe a epistemologia como auxiliar da ciência. Da mesma forma, a ênfase na rejeição de inobserváveis, utilizada pela teoria quântica, é de natureza epistemológica (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, pp. 31-32)

Na física quântica, a partir do princípio de que dois elétrons não podem ser distinguidos um do outro, são tiradas conseqüências físicas importantes. Trata-se de um exemplo de análise epistemológica (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, pp. 35-36). A estatística de Fermi-Dirac depende dessa suposição. Da mesma forma, quando Eddington procurou deduzir o valor da constante de estrutura fina, utilizou esse mesmo princípio para discutir como deveria ser feita uma descrição quântica correta de um sistema de dois elétrons, terminando por concluir que a força coulombiana era uma outra conseqüência da indistinguibilidade de dois elétrons. Podemos ter dúvidas sobre a dedução feita por Eddington; mas devemos aceitar que ele estava procurando seguir um exemplo bem sucedido da teoria quântica, de obter conseqüências físicas importantes a partir de um

princípio epistemológico.

Aqueles que não estão familiarizados com a mecânica ondulatória podem ficar atônitos por haver uma diferença entre a mecânica de partículas distinguíveis e a mecânica de partículas indistinguíveis. Mas isso não deveria surpreender os físicos quânticos, pois admite-se universalmente que há uma diferença entre as suas estatísticas [dos dois tipos de partículas], que não é menos misteriosa. Realmente eu nunca consegui compreender por que aqueles que estão bem conscientes das importantes conseqüências da indistinguibilidade em grandes grupos não se preocupam em examinar suas conseqüências precisas em sistemas menores. Seja ao considerarmos o efeito bem conhecido na estatística de grandes grupos ou os efeitos menos conhecidos da mecânica de duas partículas, as conclusões parecem incríveis a menos que tenhamos em mente a subjetividade do mundo descrito pela física e de tudo o que ela diz que ele contém. Naturalmente se pode objetar que as partículas não podem ser afetadas por nossa falta de capacidade em distingui-las, e é absurdo que elas mudem seu comportamento por causa disso. Isso seria verdade se estivéssemos nos referindo a partículas completamente objetivas e a um comportamento completamente objetivo. Mas nossas generalizações sobre seu comportamento - as leis da mecânica - descrevem propriedades impostas por nossos processos de observação, como a generalização sobre os peixes que podem ser capturados foi imposta pela estrutura da rede. As partículas objetivas não estão preocupadas com nossa incapacidade de distingui-las; mas elas também não estão preocupadas com o comportamento que lhes atribuímos e que é parcialmente uma conseqüência de nossa incapacidade de distingui-las. É este comportamento observável, e não o comportamento objetivo, com o qual nós estamos preocupados. (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 37)

Uma das formas mais comuns dos princípios epistemológicos seria, de acordo com Eddington, a afirmação de que certa coisa é inobservável. Esse tipo de princípio começou a ser utilizado na física a partir do desenvolvimento da teoria da relatividade (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 45).

Eddington comenta que, embora as teorias físicas modernas (relatividade e mecânica quântica) envolvessem de forma essencial a metodologia epistemológica,

isso não era reconhecido por muitos físicos. Aqueles que apenas aplicam a nova física (ao contrário dos que a desenvolveram), principalmente, não pareciam conscientes dessa nova situação (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 54). No entanto, para Eddington, as pessoas que realmente compreendiam a teoria da relatividade não poderiam negar que, nela, houve uma substituição parcial de hipóteses físicas por princípios epistemológicos. No entanto, existiam diversas opiniões sobre a extensão que essa substituição tinha tomado, ou até que ponto poderia chegar e Eddington tinha uma opinião que sabia ser diferente da maior parte de seus colegas:

Penso que todo o sistema de hipóteses fundamentais pode ser substituído por princípios epistemológicos. Ou, para colocar de forma equivalente, todas as leis da natureza que usualmente classificamos como sendo fundamentais podem ser vistas como conseqüências de considerações epistemológicas. Correspondem a um conhecimento *a priori* e, portanto, são *totalmente subjetivas*. (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, pp. 56-57).

Não existe um método infalível de pesquisa. Uma abordagem que levou a excelentes resultados em uma área pode levar ao fracasso em outra. Eddington estruturou sua metodologia epistemológica a partir de exemplos bem sucedidos desenvolvidos na física do século XX. No entanto, isso não podia garantir o sucesso de seu trabalho.

Como vimos anteriormente, Eddington propôs uma nova interpretação da equação do campo gravitacional no vácuo (com constante cosmológica), $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$. Ele provou, a partir dessa equação, que os raios de curvatura direcionais do espaço vazio são sempre iguais, em todas as direções, mesmo em regiões onde há um campo gravitacional variável, e que esse raio de curvatura estava relacionado com a constante cosmológica, sendo igual a $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$. Vimos, também, que ele logo interpretou esse resultado puramente matemático, técnico, como uma conseqüência do princípio epistemológico de que todos os comprimentos são relativos, e que um objeto material no vácuo precisa ajustar seu comprimento ao padrão geométrico lá existente - e que é proporcionado exatamente pelo raio de curvatura do espaço.

Tanto no caso da teoria da relatividade quanto, depois, no desenvolvimento da teoria quântica, os físicos perceberam que era necessário tomar cuidado com coisas inobserváveis (o éter, a posição e a velocidade de um elétron, etc.). Tornase importante, por isso, especificar o que pode ser observado, e como pode ser medido. Segundo Eddington, nós só podemos observar relações entre objetos

físicos (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, p. 25). Dentre essas relações, as mais fundamentais são as medidas de comprimento, que estabelecem relações entre um dado objeto e um padrão. A própria noção de medidas espaciais se torna sem significado se não é possível pensar sobre algum padrão e, por isso, pode-se concluir que deve existir um padrão de medida no universo.

Com essa reinterpretação, a equação do campo gravitacional no vácuo, $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, torna-se uma consequência imediata do próprio conceito de medição de comprimentos. Sendo fundamentada em um argumento epistemológico, essa relação parecia a Eddington algo totalmente seguro e, portanto, a constante cosmológica era também algo que não poderia ser abandonado. Ele chegou a afirmar, em outra obra, que “se alguma vez a teoria da relatividade cair em descrédito, a constante cósmica será o último bastião a cair” (EDDINGTON, *The expanding universe*, p. 148). O motivo dessa afirmação tão radical - e que destoa da opinião de outros físicos da época - é que Eddington via essa sua prova, baseada em argumentos epistemológicos, como mais segura do que qualquer outro aspecto da teoria da relatividade geral.

Eddington não começou com uma idéia preconcebida sobre o método epistemológico. Como cientista, ele partiu do estudo científico e, ao se familiarizar com a teoria da relatividade, percebeu o poder desse método e diz ter percebido que ele abrangia um campo cada vez maior da física fundamental. Assim, ele se convenceu que o método epistemológico não só era importante, mas que iria acabar se tornando o método central - não apenas para encontrar a forma das leis fundamentais, mas até mesmo para calcular as constantes fundamentais da natureza (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 58).

Essa crença não foi adotada por Eddington desde o início. Ele pensava, durante algum tempo, que uma parte da física (a teoria quântica) não podia ser reduzida a princípios *a priori*. Depois, quando começou a tentar calcular as constantes básicas da física, também achou que haveria pelo menos uma delas (o número de partículas do universo) que não poderia ser encontrada *a priori* (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 59). Na época em que escrevia este livro, a física nuclear lhe parecia não ter ainda atingido um estágio que permitisse aplicar-lhe o método epistemológico - da mesma forma que a teoria quântica, antes de 1925.

O capítulo 11 do seu livro *The philosophy of physical science* começa com uma afirmação que parece ser uma provocação: “Eu acredito que há 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231

425 076 185 631 031 296 prótons no universo e o mesmo número de elétrons” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 170). Eddington não tinha certeza sobre a exatidão desse número e afirma que poderia haver algum engano tolo nos seus cálculos, mas nada que não pudesse ser corrigido rapidamente por outros pesquisadores. Não haveria, em resumo, nenhuma barreira essencial ao conhecimento desse número.

A revolução trazida pela teoria da relatividade foi a introdução da exigência de que todas as quantidades físicas deveriam ser definidas por seus processos de medida e que aquilo que não pode ser medido deveria ser rejeitado da física (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 71). Porém, Eddington considerava que essa análise do processo de medida não havia sido levada até suas últimas consequências. Para medir comprimentos, na teoria da relatividade, supõe-se a existência de algum objeto material (um padrão de medidas sólido). Mas esse objeto não pode ser justificado pela própria teoria da relatividade. Para se estudar um cristal, por exemplo, é necessária a intervenção da física atômica e da teoria quântica. Assim, pode-se esperar que a base da medida de comprimentos utilizada na relatividade tenha alguma relação com a física quântica (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 75).

Embora a teoria da relatividade e a mecânica quântica tivessem utilizado o método epistemológico, Eddington acreditava que essas duas teorias ainda não haviam aproveitado todas as vantagens desse método. Fazendo uma análise epistemológica mais completa, e verificando suas consequências matemáticas, seria possível determinar todas as leis fundamentais da natureza, incluindo as constantes puramente numéricas da natureza, sem a ajuda de nenhuma hipótese física (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. 104). A possibilidade de utilização desse método indicaria, segundo ele, que as leis fundamentais e as constantes da física são puramente subjetivas, sendo provenientes do equipamento sensório e intelectual que determinam o conhecimento.

5.3 A visão epistemológica na primeira fase de Eddington

Pode-se supor que toda essa justificativa epistemológica que Eddington apresentou para seu trabalho é simplesmente uma filosofia *ad hoc*, uma desculpa que ele inventou depois do desenvolvimento de seus trabalhos “estranhos” para tentar dar-lhe algum sentido. McCrea afirmou que o pensamento filosófico de

Eddington teria se desenvolvido a partir de 1928, quando ele escreveu *The nature of the physical world* (McCREA, 1991, p. 71). Se McCrea estivesse correto, poderíamos interpretar a mudança do pensamento filosófico de Eddington como sendo produzido por seu trabalho com as constantes adimensionais. Na verdade, no entanto, essas idéias surgiram muitos anos antes.

O fato histórico curioso é que há uma continuidade entre a filosofia da ciência de Eddington em sua fase “normal” e sua filosofia da ciência na fase “estranha”. Dentro de sua exposição “ortodoxa” da teoria da relatividade geral (*The mathematical theory of relativity*) Eddington já havia introduzido aspectos importantes de sua filosofia da ciência, como o princípio de identificação (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 59). Desde 1920 - muito antes de tentar calcular teoricamente as constantes universais - Eddington já defendia uma epistemologia idêntica à de sua segunda fase.

Quando se lê com atenção o próprio livro *The mathematical theory of relativity*, percebe-se que lá já estão presentes essas concepções, em meio às discussões técnicas sobre a teoria da relatividade. Não existem dois Eddingtons. Existe apenas um Eddington, em duas fases profissionais. Na primeira, desenvolveu trabalhos que pareciam corretos aos seus contemporâneos e durante a qual formulou sua concepção sobre o método da física teórica. Na segunda, aplicou as idéias que tinha desenvolvido anteriormente a um novo tipo de estudos, e seu trabalho foi considerado um fracasso pela comunidade científica. Mas a concepção de ciência, nos dois casos, é a mesma.

A procura de uma unificação da física também estava presente em trabalhos antigos de Eddington. Após o desenvolvimento da teoria da relatividade geral, Hermann Weyl havia proposto uma generalização da teoria, utilizando uma geometria um pouco diferente (com um tensor de curvatura que não era mais simétrico) e incluindo nesse formalismo tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo. Logo depois o próprio Eddington tentou generalizar ainda mais a teoria de Weyl, para resolver alguns de seus problemas, mantendo a idéia de uma teoria unificado da gravitação e do eletromagnetismo (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. 47). É essencial, portanto, estudar os trabalhos mais antigos de Eddington (antes da sua tentativa de calcular as grandezas adimensionais da física) para verificar se há de fato uma coerência e continuidade em seu pensamento.

O contato de Eddington com a teoria da relatividade geral começou em 1916, através de De Sitter, que lhe enviou uma cópia do trabalho de Einstein (isso ocorreu durante a primeira guerra mundial, quando a comunicação direta entre

Alemanha e Inglaterra estava interrompida). Em 1918 Eddington escreveu um relatório sobre a relatividade geral para a *Physical Society* de Londres e em 1919 foi um dos principais organizadores da expedição que verificou o desvio da luz das estrelas durante um eclipse solar. No ano de 1920 ele escreveu um livro de divulgação sobre a teoria da relatividade, *Space, time and gravitation*. Ao publicar a edição francesa dessa obra (em 1921), inseriu um apêndice matemático que, depois, foi expandido e se tornou a obra *The mathematical theory of relativity*, de 1923. Este livro foi a principal fonte através da qual os físicos de língua inglesa aprenderam relatividade, nos anos seguintes. Durante o desenvolvimento da mecânica quântica, na década de 1920, Eddington se manteve à parte. Aparentemente os métodos dessa nova teoria não o atraíam tanto quanto a teoria da relatividade. Entusiasmou-se, no entanto, com o trabalho de Dirac, que relacionava a teoria da relatividade à mecânica quântica.

Eddington não via a teoria da relatividade como uma teoria acabada. Desde suas primeiras publicações ele procurou analisar a teoria de um modo diferente, adicionando suas próprias contribuições.

A filosofia da ciência de Eddington começou a ser desenvolvida a partir de seus estudos sobre a teoria da relatividade. Antes disso, seus trabalhos não mostravam nenhum interesse filosófico mais profundo (MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*, pp. 9-10). Em 1920 ele publicou dois artigos na revista filosófica *Mind*. Nos seus livros sobre relatividade, a partir de então, aparece uma preocupação filosófica muito clara, guiando sua interpretação da teoria e até mesmo suas pesquisas. Em 1928 Eddington publicou seu primeiro livro filosófico, *The nature of the physical world*. A partir de então, seus trabalhos técnicos se intercalam com trabalhos filosóficos, culminando com *The philosophy of physical science* (1938) que contém a versão mais acabada de seu pensamento. Mas a maior parte de suas idéias filosóficas fundamentais já estava presente nos seus trabalhos anteriores.

É possível encontrar a atitude apriorística peculiar de Eddington desde seus mais antigos escritos sobre filosofia da ciência. Vamos analisar dois artigos que ele publicou em 1920, sobre “O significado da matéria e as leis da natureza de acordo com a teoria da relatividade” (EDDINGTON, 1920a) e sobre “Os aspectos filosóficos da teoria da relatividade” (EDDINGTON, 1920b).

Segundo Eddington, a ciência utiliza três tipos de entidades: (1) conceitos analíticos elementares, que não podem ser definidos nem medidos; (2) relações, que não podem ser definidas mas podem ser medidas; (3) objetos da experiência, que podem ser definidos. As teorias da física utilizam entidades que não podem

ser definidas, “Mas é desejável que em algum estágio na discussão consigamos saber sobre o que estamos falando; e isso é conseguido quando identificamos uma das complexas combinações de nossos indefiníveis com algum objeto da experiência reconhecido pela mente” (EDDINGTON, 1920a, p. 146). um exemplo é o tensor métrico:

O matemático mede esta qualidade do Mundo por um conjunto de coeficientes, indicados individualmente por g_{11} , g_{12} , etc., até g_{44} , e coletivamente por $g_{\mu\nu}$. Mas os $g_{\mu\nu}$, além de conter a medida desta qualidade absoluta, contém alguma outra coisa - o espaço e tempo físico, que nós agora acreditamos não serem qualidades intrínsecas do mundo. (EDDINGTON, 1920a, p. 149)

Pode-se utilizar qualquer sistema de medida de espaço e tempo, e há uma ferramenta matemática que permite desenvolver esse estudo deixando as coordenadas completamente indefinidas.

As entidades como $g_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}$ (chamadas de tensores) ocupam uma posição intermediária entre as qualidades intrínsecas do mundo e as qualidades que envolvem espaço e tempo ao acaso. O desaparecimento de um tensor indica realmente uma condição intrínseca completamente independente do espaço e do tempo, e a igualdade de dois tensores na mesma região é também uma relação absoluta. É por essa razão que $G_{\mu\nu}$ (o tensor mais simples depois de $g_{\mu\nu}$) atrai nossa atenção. (EDDINGTON, 1920a, p. 150)

Eddington indica, em seguida, que no espaço vazio vale a relação

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = 0$$

e comenta:

De forma diferente da lei newtoniana, essa [lei] não pressupõe nenhum modo particular de medir o espaço e o tempo, e é especialmente por esta razão que ela se recomenda para aqueles que possuem uma tendência a favor da teoria da relatividade. Ela expressa uma relação entre propriedades intrínsecas de porções adjacentes do Mundo, e não (como na lei newtoniana) uma relação entre essas propriedades e algum espaço e tempo externos. (EDDINGTON, 1920a, p. 150)

Nas regiões com matéria, a lei da gravitação toma a forma:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = -8\pi T_{\mu\nu}$$

Eddington indica que a interpretação usual dessas equações é que a matéria perturba o contínuo espaço-tempo. No entanto, ele propõe uma interpretação diferente, pois lhe parece incongruente introduzir um objeto da experiência (matéria) como um corpo estranho entre conceitos analíticos com os quais a teoria estava sendo construída. Eddington acredita que em vez de forçar algo externo nas equações, de procurar *identificar* os termos que aparecem nela.

Não parece existir razão para postular que existe uma entidade [matéria] de natureza estranha que causa a diferença de geometria; e se postularmos tal entidade será pouco adequado considerá-la como matéria física, porque não é a entidade estranha mas a diferença de geometria que é o sujeito do experimento físico. (EDDINGTON, 1920b, p. 420)

Primeiramente, Eddington vai reinterpretar a equação da gravitação no espaço vazio, afirmando que “A lei de Einstein da gravitação não é uma lei da natureza e sim uma definição - a definição de um vácuo” (EDDINGTON, 1920a, p. 151). O que significa isso, para ele? Significa que quando encontramos em uma região do universo as propriedades descritas por $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = 0$, esta região tem certa característica que pode ser identificada com algum aspecto de nossa experiência sensorial e ele sugere que tal região nos transmite a percepção sensorial de vazio. De modo semelhante, quando $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$ não é igual a zero em uma outra região, ela nos transmite outra impressão - e chamamos essa segunda situação de matéria.

Isto novamente não é uma lei inerente ao mundo externo, mas meramente descreve como a qualidade até aqui indefinível medida pelo lado esquerdo da equação é apreciada pela mente humana. A matéria não causa uma irregularidade no campo gravitacional; a irregularidade do campo gravitacional é matéria. (EDDINGTON, 1920a, p. 152)

Eddington identifica irregularidades de $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$ com a matéria, que é algo que podemos perceber com nossos sentidos. Mas que relação pode haver entre $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$ e nossa mente? Se considerarmos os $g_{\mu\nu}$ como sendo uma propriedade do espaço e tempo, seria incompreensível como eles podem produzir uma sensação na mente. A solução, para Eddington, é que o cérebro é constituído

por $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$ e que, por isso, os $g_{\mu\nu}$ podem criar uma impressão na mente (EDDINGTON, 1920a, p. 152).

Para Eddington, não existe uma matéria que produz modificações no espaço-tempo, pois a matéria é esse conjunto de modificações do espaço-tempo. Não existe também uma mente capaz de perceber as modificações do espaço-tempo externas a ela, pois a mente é um conjunto de modificações do espaço-tempo. Assim, a matéria é da mesma natureza da mente.

De acordo com essa visão nem se pode dizer que a matéria existe sem a mente. A matéria é apenas uma entre milhares de relações entre os constituintes do mundo, e nossa tarefa será mostrar por que uma relação particular tem um valor especial para a mente. (EDDINGTON, 1920a, p. 153)

Estudando outras propriedades dos tensores formados a partir dos $g_{\mu\nu}$, Eddington procura fazer outras identificações. O tensor $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$ obedece à propriedade de *conservação* (pois, como sabemos, seu divergente é nulo, o que representa matematicamente a idéia de uma continuidade). Ora, a mente parece ter uma certa predileção por viver em um universo mais ou menos permanente e procura no mundo externo certos elementos que sejam permanentes e que chama de matéria. O tensor $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$ satisfaz exatamente esse desejo de permanência e pode por isso ser escolhido para representar a matéria. No entanto, esses resultados não são “leis da natureza”. As propriedades dos $G_{\mu\nu}$ serão as mesmas em um universo imaginário, e independentemente de escolhermos representar o espaço-tempo ou as relações humanas pelo tensor $g_{\mu\nu}$ (EDDINGTON, 1920a, pp. 153-154).

A intervenção da mente nas leis da natureza tem, creio eu, um alcance maior do que os físicos usualmente supõem. Eu estou quase inclinado a atribuir toda a responsabilidade pelas leis da mecânica e da gravitação à mente, e negar ao mundo externo qualquer participação nelas. Provavelmente será objetado que isso está indo muito longe; sem dúvida as leis dependem da escolha que a mente faz do material para seu universo, mas certamente a Natureza merece algum crédito por fornecer material com propriedades tão convenientes? Eu duvido disso. Tanto quanto posso ver, a Natureza só precisou fornecer um agregado tetra-dimensional de eventos pontuais; e como estes e suas relações não podem ser definidos, e podem ser de qualquer caráter,

seria possível em qualquer caso escolher um conjunto de entidades que servissem como eventos pontuais, por pior que a Natureza tivesse manejado as coisas no mundo externo. Apenas a mente é responsável pelo uso que faz dos eventos pontuais. (EDDINGTON, 1920a, p. 155)

Eddington faz uma comparação interessante, que ajuda a compreender o que ele quer dizer. Quando se olha para o céu estrelado, a mente procura estruturas como triângulos, alinhamentos e até mesmo figuras fantásticas formadas pelas estrelas. É a mente que projeta essas figuras sobre as estrelas, que estão dispostas ao acaso. Da mesma forma, nossa mente projeta sobre o mundo físico a idéia de substância, de algo permanente, e procura encontrar algo que corresponda a essa idéia (EDDINGTON, 1920b, p. 420). Assim, muitas das “leis da física” seriam apenas imposições da mente à descrição do mundo, mas não leis que governam os acontecimentos no mundo objetivo.

Mais adiante, no seu artigo, Eddington indica que a teoria de Hermann Weyl estende a teoria da relatividade para incluir também as forças eletromagnéticas dentro do espaço-tempo, e comenta:

Se aceitarmos esta extensão da teoria, parece à primeira vista que tudo o que chamamos de leis da natureza são meras identificações - que a mente escolhe reconhecer aquelas qualidades que, por causa de identidade matemática, devem obedecer necessariamente as leis que ela [a mente] impõe despoticamente. As leis da mecânica, da eletrodinâmica e da gravitação cobrem quase todo o campo da física; e no entanto vimos que nenhuma delas impõe qualquer restrição no livre arranjo do Mundo externo. Não há então nenhuma lei genuína do mundo externo? Será o universo construído apenas de elementos que são puramente caóticos? (EDDINGTON, 1920a, p. 156)

Se todas as descobertas da física estiverem associadas a leis desse tipo, seremos forçados a admitir que a física nada tem a contribuir para a grande questão de como o mundo fora de nós é governado. Eu ainda não estou preparado para admitir isso. Eu penso que encontramos algumas leis genuínas que governam o mundo externo, mais especialmente na física moderna, e estamos tentando - tal vez com pouco sucesso - tratar delas. Mas as grandes leis exatas da gravitação, da mecânica e do eletromagnetismo, pelas quais a física conseguiu sua alta reputação como uma ciência exata, todas elas pertencem à outra categoria. (EDDINGTON, 1920b, p. 421)

Eddington reconhece, nessa época, que havia leis que não podiam ser incluídas nessa interpretação. A teoria da relatividade não introduzia nenhuma atomicidade na matéria, mas a matéria, a carga elétrica e a energia parecem ter uma atomicidade. Eddington conjectura que talvez existam leis da natureza (como essas) que não seriam impostas pela mente. No entanto, as leis gerais da atomicidade e da quantização ainda não haviam sido descobertas (EDDINGTON, 1920a, pp. 156-158).

Em 1920, Eddington estava construindo uma filosofia da ciência baseada em uma interpretação muito pessoal da teoria da relatividade geral. Ao mesmo tempo, ele estava trabalhando no desenvolvimento de uma ampliação dessa teoria. Assim como Weyl havia estendido a teoria de Einstein para incluir o eletromagnetismo, Eddington tinha a esperança de conseguir ampliar a teoria de Weyl para abranger, além da gravitação e do eletromagnetismo, as forças que controlam as próprias partículas da matéria.

Passando além da geometria euclidiana, aparece a gravitação; passando além da geometria riemanniana, aparecem as forças eletromagnéticas; o que resta para ser conseguido por uma generalização posterior? Evidentemente, as forças de ligação não-maxwellianas que conservam um elétron unido. Mas o problema do elétron deve ser difícil, e não posso dizer se a presente generalização é bem sucedida em proporcionar os materiais para sua solução. (EDDINGTON, 1921a, p. 104)

Se isso fosse conseguido, essa teoria unificada talvez pudesse explicar as propriedades atômicas da matéria e toda a física passaria a ter um único tipo de fundamentação. Para tentar construir esse tipo de teoria, em 1921, Eddington utilizou exatamente o tipo de concepção filosófica que descreveu nos artigos de 1920. Embora o artigo de 1921 seja essencialmente técnico, nele aparece um parágrafo que mostra essa conexão:

Um estudo dedutivo da geometria do universo e um estudo indutivo da ciência observacional atacam o problema da Natureza de extremos opostos. Os conceitos mais elementares do conhecimento experimental podem não aparecer até um estágio tardio do tratamento dedutivo. Nosso trabalho segue portanto duas etapas: primeiro, o desenvolvimento de uma geometria pura de um tipo muito geral; segundo, uma teoria física baseada na identificação de funções geométri-

cas com quantidades obtidas por medida experimental. (EDDINGTON, 1921a, p. 105)

Sob o ponto de vista geométrico, a teoria de Weyl se diferencia da relatividade geral por admitir que comparações de comprimento em dois pontos diferentes do espaço-tempo podem dar resultados diferentes, conforme o caminho utilizado para fazer essa comparação. É necessário assim introduzir uma unidade de comprimento em cada ponto do espaço-tempo. Esse sistema de unidades-padrão é chamada de “sistema de escala” ou “sistema de calibração” (*gauge system*). A teoria de Weyl supõe que o sistema de calibração é tão arbitrário quanto o sistema de coordenadas; no entanto, aparece a necessidade de introduzir um tipo especial de sistema de calibração chamado “natural” para permitir comparações entre objetos distantes - pois, afinal de contas, supomos que faz sentido comparar o tamanho do Sol com o da Terra. Eddington se preocupou em analisar melhor o significado desse sistema de escala natural (EDDINGTON, 1921a, p. 105) e, a partir daí, propôs uma generalização da teoria de Weyl, com menos restrições matemáticas.

Poderiam ser indicados outros exemplos, mas estes devem ser suficientes para mostrar que, muito antes de 1928 (quando publica seu primeiro livro de filosofia da ciência e seu primeiro artigo sobre o cálculo das constantes adimensionais), Eddington já havia formulado e aplicado seu método epistemológico.

Assim, pode-se ver que a epistemologia de Eddington não é uma tentativa de justificar seus trabalhos não-ortodoxos sobre o cálculo das constantes da natureza. Suas idéias sobre a natureza do método científico já haviam surgido muitos anos antes, como resultado de seus estudos sobre a teoria da relatividade, e ele já havia aplicado esse método em outros trabalhos (como sua proposta de uma alternativa à teoria de Weyl, ou sua interpretação da constante cosmológica como um padrão de medidas). A própria exposição que Eddington fazia da lei da gravitação de Einstein na presença de matéria como consistindo em uma mera *identificação* de grandezas abstratas com objetos da experiência, seguia esse método. Podemos, assim, aceitar a afirmação que Eddington fez em 1939: “Nem os avanços científicos da última década nem esses anos de reflexão alteraram a tendência geral de minha filosofia” (EDDINGTON, *The philosophy of physical science*, p. viii).

Houve, portanto, uma grande continuidade e coerência no trabalho de Eddington. Inicialmente, seus contemporâneos aparentemente não perceberam quão radicais eram suas idéias, porque ele parecia estar apenas descrevendo os resultados aceitos, da teoria da relatividade.

Kilmister, por exemplo, comentou que, quando jovem, estudou o livro *The mathematical theory of relativity* sem perceber que tal obra continha muitas idéias filosóficas pouco ortodoxas. No entanto, a obra que Eddington publicou em 1936 - *Relativity theory of protons and electrons* - chamou a atenção claramente para a posição ímpar de Eddington, em relação à sua metodologia (KILMISTER, *Eddington's search for a fundamental theory*, p. ix).

Pode-se dizer que os contemporâneos de Eddington só se deram conta do caráter revolucionário do seu método quando ele começou a aplicá-lo ao cálculo das constantes da natureza. A reação negativa, nessa época, deve ter sido inesperada para Eddington, que não estava fazendo (em sua opinião) nada de estranho. Ele estava apenas aplicando aquilo que havia aprendido com o desenvolvimento da teoria da relatividade (e, depois, da mecânica quântica).

Capítulo 6

Considerações finais

O autor central estudado nesta pesquisa é Sir Arthur Eddington. Não obstante, ao seguir o percurso histórico do desenvolvimento das cosmologias relativísticas passamos pelas contribuições que outros autores, entre eles Albert Einstein, Wilhem De Sitter, Aleksander Friedmann, Georges Lemaître e Henry Robertson, fizeram ao tema.

Motivado pelas anomalias presentes na interpretação newtoniana do universo, Einstein propõe o primeiro modelo cosmológico relativístico em 1917. Sobre a visão de Einstein, o espaço tinha uma curvatura positiva e constante equivalente a uma hiper-esfera. Para analisar o campo gravitacional do universo, Einstein faz várias hipóteses simplificadoras, mas ao querer explicar seu modelo a partir das suas equações de campo originais, $G_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$, encontra que elas não são satisfeitas.

Em seguida Einstein admite que suas equações de campo admitem uma extensão natural, conciliável com o postulado da relatividade, e introduze, no lado esquerdo das suas equações, um termo que lhe permite argumentar sua hipótese de um universo estático. Este termo proporcional ao tensor métrico (o termo cosmológico), contém uma constante λ , que não é determinada pela teoria (a constante cosmológica), que permite determinar a densidade da matéria, o raio, o volume e a massa do universo.

Na sua análise do universo Einstein chega à conclusão de que um universo sem matéria era impensável, mas menos de dois meses depois de Einstein ter publicado seu modelo, De Sitter apresenta um novo modelo cosmológico desprovido de matéria. De Sitter considerou seu modelo como sendo estático, mesmo que mais tarde o universo de De Sitter foi visto como o “pioneiro” dos modelos de expansão. Em 1922 Friedmann apresentou o primeiro modelo cosmológico relativístico em

expansão. O trabalho de Friedmann teve pouca repercussão.

Foi só em 1927, com Lemaître, que o papel da pressão não nula foi considerado na construção dos modelos cosmológicos. Lemaître associou a pressão da radiação à expansão do universo mas posteriormente, em 1930, Eddington mostrou que, contrário à interpretação de Lemaître, o efeito da pressão da radiação era o de uma contração e não de uma expansão.

Em 1930 Eddington concentra seu trabalho cosmológico na análise do artigo de Lemaître e propõe o que hoje é conhecido como o modelo de “Lemaître-Eddington”. A particularidade deste modelo está na transição entre o universo de Einstein, em equilíbrio, e o universo de De Sitter, de densidade nula. Partindo do fato que o estado inicial do universo é o universo de Einstein, Eddington incorporou como inquestionável a existência da constante cosmológica considerando-a como uma grandeza física fundamental cujo papel predominante, além de determinar o raio de curvatura do universo de Einstein, era o de servir de base para o próprio conceito de comprimento.

Eddington, trabalhando com a generalização do conceito de curvatura gaussiana e com as equações de campo de Einstein para o espaço vazio, encontra uma expressão que lhe permite calcular a curvatura em qualquer direção e, a partir dela, encontra a relação $-ds^2 = \frac{3}{\lambda}$ que interpreta como uma indicação da constância da curvatura em todas as direções. Ou seja, sob esta expressão em todos os pontos, no espaço vazio, o raio de curvatura tem um valor constante.

Este resultado leva Eddington a oferecer uma nova interpretação para a constante cosmológica. O primeiro que ele faz é esclarecer o que significa fazer uma medida de curvatura do espaço-tempo em alguma direção, chegando à conclusão de que para fazer uma medida desta curvatura seria preciso comparar as propriedades do espaço com algum padrão de comprimento, colocado na mesma direção, no mesmo ponto do espaço onde a medida seria efetuada. Da mesma forma, o comprimento de uma estrutura material específica deveria manter uma razão constante em relação à curvatura do mundo no lugar e na direção que for colocada. Ou seja, quando uma estrutura material qualquer é deslocada no espaço (vazio) e colocada em qualquer outro ponto, em qualquer direção, ela deve ajustar seu comprimento de tal forma a manter uma proporção constante com a curvatura do espaço.

Baseado neste resultado Eddington passa a considerar a constante cosmológica como o padrão de comprimento em relação ao qual todos os outros comprimentos deveriam ser comparados.

O raciocínio de Eddington, mesmo que pareça estranho, tem uma boa funda-

mentação. Ele está generalizando a idéia que fundamenta a teoria da relatividade. As medidas físicas devem ser relações ou comparações. Não há sentido em falar sobre tamanho absoluto, todos os tamanhos são relações entre tamanhos.

Na procura da relação entre o mundo microscópico e macroscópico Eddington, baseado na consideração da constante cosmológica como o parâmetro de comparação, acredita que a teoria de Dirac do elétron deve conter uma relação entre o elétron e o universo. Mas na teoria do elétron todas as constantes são conhecidas, enquanto na teoria cosmológica havia uma constante desconhecida, a constante cosmológica. Portanto comparando a equação do elétron com a teoria cosmológica, Eddington encontra o valor da constante cosmológica.

As considerações anteriores o levaram a olhar para o que ele chamou de “constantes da natureza”. Convencido de que era possível obter um conhecimento *a priori* analisando as conseqüências dos processos das observações de modo a prever algumas (mas não todas) das propriedades daquilo que poderá vir a ser observado, Eddington se propôs obter por métodos puramente teóricos o valor destas constantes adimensionais, as quais estavam relacionadas direta ou indiretamente com a constante cosmológica.

Uma das constantes adimensionais era a constante de estrutura fina, $\frac{hc}{2\pi e^2}$. O modo pelo qual Eddington tentou calcular o valor da constante de estrutura fina variou ao longo dos anos. O primeiro valor que Eddington encontra é o de 136, atribuindo estes 136 aos graus de liberdade de um espaço de 16 dimensões mas, Eddington não dá nenhum significado físico para este espaço. O conceito de grau de liberdade utilizado por Eddington é abstrato e não corresponde ao da física clássica que nós conhecemos. Logo após, ciente de que este valor não concordava com o valor obtido observacionalmente, obteve o valor de 137, argumentando que este grau de liberdade 137 estaria associado à possibilidade de troca dos elétrons.

Outra das constantes fundamentais, adimensionais, é a razão entre a massa do elétron e a do próton. Para encontrar este valor Eddington parte do fato de que a equação de Dirac para o elétron envolve a massa do elétron, mas a massa de uma partícula isolada não tem sentido. Portanto Eddington argumenta que no caso da equação de um único elétron, sua massa deveria ser a razão entre a massa do elétron e alguma massa associada ao universo como um todo, e a equação do elétron deveria ser uma equação que relacionasse o elétron com o universo. Eddington procura por isso determinar em que condições uma equação de onda descrevendo dois corpos (o universo e um elétron) pode se transformar na equação do elétron (uma única onda) e encontra desta maneira a expressão quadrática $10m^2 - 136mm_0 + m_0^2 = 0$ e, ao calcular a razão entre os dois valores

encontrados, obtém um valor que está perto do valor conhecido para a razão entre as massas do próton e do elétron.

Esta fase do trabalho de Eddington, mesmo que interessante no seu começo, não foi aceita pela comunidade científica da época. Um dos motivos principais foi que, na procura dos seus interesses, Eddington baseava seu método de pesquisa na construção de formalismos matemáticos abstratos que, mesmo que rigorosos e interessantes, não mantinham uma relação fluida e clara com as aplicações físicas.

Podemos ver o trabalho de Eddington como uma tentativa de quebrar o paradigma da ciência de teorizar os fenômenos a partir das observações. A proposta de Eddington vai no sentido da análise das estruturas e a forma como estas estruturas podem ser utilizadas para chegar-se a generalizações.

Anexo

	$\alpha\alpha$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\gamma\beta$	$\gamma\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\delta\delta$
$\alpha\alpha$	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
$\alpha\beta$	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+
$\alpha\gamma$	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+
$\alpha\delta$	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
$\beta\alpha$	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+
$\beta\beta$	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
$\beta\gamma$	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
$\beta\delta$	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
$\gamma\alpha$	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+
$\gamma\beta$	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
$\gamma\gamma$	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
$\gamma\delta$	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
$\delta\alpha$	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
$\delta\beta$	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
$\delta\gamma$	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+
$\delta\delta$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Bibliografia

- [1] BERGIA, Silvio & MAZZONI, Lucia. Genesis and evolution of Weyl's reflections on De Sitter's universe. Pp. 325-342, *in*: GOENER, Hubert, RENN, Jürgen, RITTER, Jim & SAUER, Tilman (eds.). *The expanding worlds of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 1999 (Einstein Studies, 7).
- [2] BERNSTEIN, Jeremy & FEINBERG, Gerald (eds.). *Cosmological constants. Papers in modern cosmology*. New York: Columbia University Press, 1986.
- [3] CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations*. New York: Dover, 1993. 2 vols.
- [4] CHRISTOFFEL, E. B. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70**: 46-70, 1869.
- [5] DARWIN, C. G. The wave equation of the electron. *Proceedings of the Royal Society A* **118**: 654-679, 1928.
- [6] DE SITTER, Willem. A. Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **76**: 699-728, 1916; **77**: 155-83, 1916; **78**: 3-28, 1917.
- [7] DE SITTER, Willem. On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*: 142-152, 1917. Reprodução: Pp. 27-48, *in*: BERNSTEIN, Jeremy & FEINBERG, Gerald (eds.). *Cosmological constants. Papers in modern cosmology*. New York: Columbia University Press, 1986.
- [8] DE SITTER, Willem. On the relativity of inertia: remarks concerning - Einstein's latest hypothesis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam [Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen]* **19**: 1217-1225, 1917.

- [9] DE SITTER, Willem. L'univers em expansion. *Scientia* **49** (225): 1-9, 1931.
- [10] DINGLE, Herbert. Modern Aristotelianism. *Nature* **139**: 784-786, 1937.
- [11] DIRAC, Paul A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A* **117**: 610-624, 1928.
- [12] DIRAC, Paul A. M. A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society A* **165**: 199-208, 1938.
- [13] EARMAN, John & GLYMOUR, Clark. Lost in the tensors: Einstein's struggles with covariance principles 1912-1916. *Studies in the History and Philosophy of Science* **9**: 251-278, 1978.
- [14] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The mathematical theory of relativity*. Cambridge: University Press, 1965.
- [15] EDDINGTON, Arthur Stanley. *Stellar movements and the structure of the universe*. London: Macmillan, 1914.
- [16] EDDINGTON, Arthur Stanley. The meaning of matter and the laws of nature according to the theory of relativity. *Mind*, **29**: 145-158, 1920. (a)
- [17] EDDINGTON, Arthur Stanley. Philosophical aspects of the theory of relativity. *Mind*, **29**: 415-422, 1920. (b)
- [18] EDDINGTON, Arthur Stanley. *Report on the relativity theory of gravitation*. [2d ed.]. London: Fleetway, 1920.
- [19] EDDINGTON, Arthur Stanley. *Space, time and gravitation: an outline of the general relativity theory*. Cambridge: University Press, 1920.
- [20] EDDINGTON, Arthur Stanley. A generalisation of Weyl's theory of the electromagnetic and gravitational fields. *Proceedings of the Royal Society of London A* **99**: 104-122, 1921. (a)
- [21] EDDINGTON, Arthur Stanley. The relativity of field and matter. *Philosophical Magazine* [series 6] **42**: 800-806, 1921. (b)
- [22] EDDINGTON, Arthur Stanley. On the significance of Einstein's gravitational equations in terms of the curvature of the world. *Philosophical Magazine* [series 6], **43**: 174-177, 1922.

- [23] EDDINGTON, Arthur Stanley. The propagation of gravitational waves. *Proceedings of the Royal Society A*, **102**: 268, 1922.
- [24] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The theory of relativity and its influence on scientific thought*. Oxford: The Clarendon Press, 1922.
- [25] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The mathematical theory of relativity*. Cambridge: The University Press, 1923.
- [26] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The nature of the physical world*. New York: Macmillan; Cambridge: The Cambridge University Press, 1928.
- [27] EDDINGTON, Arthur Stanley. A symmetrical treatment of the wave equation. *Proceedings of the Royal Society, A*, **121**: 524-542, 1928.
- [28] EDDINGTON, Arthur Stanley. The charge of an electron. *Proceedings of the Royal Society, A*, **122**: 358-369, 1929.
- [29] EDDINGTON, Arthur Stanley. The interaction of electric charges. *Proceedings of the Royal Society, A*, **126**: 696-728, 1930. (a)
- [30] EDDINGTON, Arthur Stanley. On the instability of Einstein's spherical world. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **90**: 668-678, 1930. (b)
- [31] EDDINGTON, Arthur Stanley. Preliminary note on the masses of the electron, the proton and the universe. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **27**: 15-19, 1930. (c)
- [32] EDDINGTON, Arthur Stanley. The end of the world: from the standpoint of mathematical physics. *Mathematical Gazette*, **15**: 316, 1931; *Nature* **127**: 447-453, 1931. (a)
- [33] EDDINGTON, Arthur Stanley. On the value of the cosmical constant. *Proceedings of the Royal Society A*, **133**: 605-615, 1931. (b)
- [34] EDDINGTON, Arthur Stanley. On the mass of the proton. *Proceedings of the Royal Society A*, **134**: 524-532, 1931. (c)
- [35] EDDINGTON, Arthur Stanley. The expansion of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **91**: 412-416, 1931. (d)

- [36] EDDINGTON, Arthur Stanley. The recession of the extra-galactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **92**: 3-7, 1931. (e)
- [37] EDDINGTON, Arthur Stanley. The expanding universe. *Proceedings of the Physical Society* **44**: 1-16, 1932.
- [38] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The expanding universe*. Cambridge: Cambridge University Press, 1933.
- [39] EDDINGTON, Arthur Stanley. The masses of the proton and electron. *Proceedings of the Royal Society, A*, **143**: 327, 1934.
- [40] EDDINGTON, Arthur Stanley. The speed of recession of the galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **95**: 636, 1935.
- [41] EDDINGTON, Arthur Stanley. *New pathways in science*. Cambridge: Cambridge University Press, 1935.
- [42] EDDINGTON, Arthur Stanley. *Relativity theory of protons and electrons*. Cambridge: The University Press, 1936.
- [43] EDDINGTON, Arthur Stanley. The cosmical constant and the recession of the nebulae. *American Journal of Mathematics* **59**: 1-8, 1936.
- [44] EDDINGTON, Arthur Stanley. The cosmological controversy. *Science Progress* **34**: 225-236, 1939.
- [45] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The philosophy of physical science*. Cambridge: The University Press, 1939.
- [46] EDDINGTON, Arthur Stanley. *The combination of relativity theory and quantum theory*. Dublin: Institute for Advanced Studies, 1943.
- [47] EDDINGTON, Arthur Stanley. *Fundamental theory*. Ed. Sir Edmund Whittaker. Cambridge: The University Press, 1946.
- [48] EINSTEIN, Albert. On the general theory of relativity. Tradução de: Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin*: 778-786, 799-806, 831-839, 844-847, 1915. Pp. 98-120, in: EINSTEIN, Albert. *The collected papers of Albert Einstein*. Vol. 6. The Berlin Years: writings, 1914-1917. Trad. Alfred Engel. Princeton: Princeton University Press, 1997.

- [49] EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* **49**, 808, 1916. Tradução: EINSTEIN, A. *O Princípio da relatividade*. [4a. ed.]. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 192-194, 1989.
- [50] EINSTEIN, A. Cosmological considerations on the general theory of relativity. Traduzido de: Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*: 142-152, 1917. Pp.175-188, in: LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A., MINKOWSKI, H.& WEYL, H. *The principle of relativity*. Trad. W. Perrett & G. B. Jeffery. New York: Dover, 1952. Utilizamos a tradução em português: Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral. Pp. 225-240, in: *O princípio da relatividade*. Trad. Mário José Saraiva. Porto: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989.
- [51] EINSTEIN, Albert. *Relativity: the special and general theory*. Trad. Por Robert W. Lawson. Tradução de: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. Braunschweig: Vieweg, 1917. Pp. 247-420, in: EINSTEIN, Albert. *The collected papers of Albert Einstein*. Vol. 6. The Berlin Years: writings, 1914-1917. Princeton: Princeton University Press, 1997.
- [52] EINSTEIN, Albert. *Relativity - the special and the general theory*. Trad. Robert W. Lawson. New York: Crown, 1961.
- [53] EINSTEIN, Albert & DE SITTER, Willem. On the relation between the expansion and the mean density of the universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **18**: 213-214, 1932.
- [54] EINSTEIN, Albert & GROSSMANN, Marcel. Outline of a generalized theory of relativity and a theory of gravitation. Traduzido de: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Leipzig: Teubner, 1913. Pp. 151-188, in: EINSTEIN, Albert. *The collected papers of Albert Einstein*. Vol. 4. The Swiss Years: writings, 1912-1914. Trad. Anna Beck. Princeton: Princeton University Press, 1996.
- [55] FRIEDMANN, Aleksandr. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik* **10**: 377-386, 1922. Tradução: On the possibility of a world with constant negative curvature. Pp. 49-58, in: BERNSTEIN, Jeremy & FEINBERG, Gerald (eds.). *Cosmological constants. Papers in modern cosmology*. New York: Columbia University Press, 1986.

- [56] FRIEDMANN, Aleksandr. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik* **21**: 326-332, 1924. Tradução: On the possibility of a world with constant negative curvature. Pp. 59-65, in: BERNSTEIN, Jeremy & FEINBERG, Gerald (eds.). *Cosmological constants. Papers in modern cosmology*. New York: Columbia University Press, 1986.
- [57] GALE, George & URANI, John. Milne, Bondi and the ‘second way’ to cosmology. Pp. 343-375, in: GOENER, Hubert, RENN, Jürgen, RITTER, Jim & SAUER, Tilman (eds.). *The expanding worlds of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 1999 (Einstein Studies, 7).
- [58] GAMOW G. The origin of elements and the separation of galaxies. *Physical Review*, **74**, 505-506, 1948.
- [59] GOENER, Hubert, RENN, Jürgen, RITTER, Jim & SAUER, Tilman (eds.). *The expanding worlds of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 1999 (Einstein Studies, 7).
- [60] GOODSTEIN, Judith R. The Italian mathematicians of relativity. *Centaurus* **26**: 241-261, 1983.
- [61] HETHERINGTON, N. S. The measurement of the radial velocities of spiral nebulae. *Isis* **62** (3): 309-313, 1971.
- [62] HOEFER, Carl. Einstein’s struggle for a Machian gravitation theory. *Studies in the History and Philosophy of Science* **25**: 287-335, 1994.
- [63] HUBBLE, Edwin. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15**: 168-173, 1929. Pp. 77-83, in: BERNSTEIN, Jeremy & FEINBERG, Gerald (eds.). *Cosmological constants. Papers in modern cosmology*. New York: Columbia University Press, 1986.
- [64] KILMISTER, C. W. *Eddington’s search for a fundamental theory: A key to the universe*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [65] KRAGH, Helge. The beginning of the world: Georges Lemaître and the expanding universe. *Centaurus* **32**: 114-139, 1987.

- [66] LANCZOS, Cornelius. Einstein's path from special to general relativity. Pp. 5-19, *in*: O'Riافةartaigh, L. (ed.). *General relativity. Papers in honour of J. L. Synge*. Oxford: Clarendon Press, 1972.
- [67] LEMAÎTRE, Georges. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **47**: 49-56, 1927. Tradução inglesa: A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **91**: 483-490, 1931.
- [68] LEMAÎTRE, Georges. The expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **91**: 490-501, 1931.
- [69] LÜTZEN, Jesper. Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences* **49**: 1-72, 1995.
- [70] MCCREA, William. Arthur Stanley Eddington. *Scientific American*, **264** (6): 92-97, 1991.
- [71] MCCREA, W. H. & MCVITTIE, G. C. On the contraction of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **91**: 128-133, 1930.
- [72] MCCREA, W. H. & MCVITTIE, G. C. The expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **92**: 7-12, 1931.
- [73] MCVITTIE, G. C. Condensations in an expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **92**: 500-518, 1932.
- [74] MERLEAU-PONTY, Jacques. *Philosophie et théorie physique chez Eddington*. Paris : Les Belles Lettres, 1965. (Annales Littéraires de l'Université de Besançon, 75)
- [75] MILNE, E. A. Last testament of a physicist. *Nature* **159**: 486-488, 1947.
- [76] NORTH, John D. *The measure of the universe. A history of modern cosmology*. New York: Dover, 1990.
- [77] NORTON, John. The cosmological woes of Newtonian gravitational theory. Pp. 271-322, *in*: GOENER, Hubert, RENN, Jürgen, RITTER, Jim & SAUER, Tilman (eds.). *The expanding worlds of general relativity*. Boston: Birkhäuser, 1999 (Einstein Studies, 7).

- [78] RAY, Christofer. The cosmological constant: Einstein's greatest mistake? *Studies in the History and Philosophy of Science* **21**: 589-604, 1990.
- [79] RICCI, Gregorio & LEVI-CIVITA, Tullio. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen* **54**: 125-201, 1901.
- [80] ROBERTSON, H. P. On relativistic cosmology. *Philosophical Magazine* [ser. 7] **5**: 835-848, 1928.
- [81] ROBERTSON, H. P. On the foundations of relativistic cosmology. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**: 822-829, 1929.
- [82] SMITH, Robert W. Edwin Hubble and the transformation of cosmology. *Physics Today* **35**: 52-58, 1990.
- [83] WHITTAKER, Edmund. *From Euclid to Eddington. A study of conceptions of the external world*. Cambridge: Cambridge University Press, 1949.
- [84] WHITROW, G. J. Sir Arthur Eddington, OM (1882-1944). *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, **24**: 258-266, 1983.