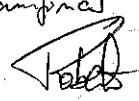


Este exemplar corresponde à redação final
da tese defendida pelo aluno Bartholomeu M. N.
Amaral e aprovada pela comissão julgadora.
Campinas 04/09/87

 Roberto de A. Martins

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"As equações fundamentais
da dinâmica dos meios
elásticos relativísticos"

ORIENTADOR

Roberto de Andrade Martins

ALUNO

Bartholomeu M.N. Amaral

AGRADECIMENTOS

ao Prof. Roberto de Andrade Martins
pela proposição do problema e pela
sua orientação neste trabalho
ã Prof. Carola Dobrigkeit Chinellato
por seu apoio e amizade nestes dois
anos
ã Marilena por seu cuidado e boa von-
tade na datilografia desta disserta-
ção
ao CNPq pelo suporte financeiro

Meus agradecimentos

RESUMO

São estabelecidas as equações de movimento e continuidade para meios elásticos relativísticos contínuos e são tratados os algoritmos que definem as diversas grandezas mecânicas que descrevem o meio. As componentes da densidade de momento transversais à velocidade de um ponto no meio elástico tensionado são obtidas a partir da conservação do momento de sistemas isolados e surgem como consequência da relatividade da simultaneidade para dois observadores que descrevam o tensionamento de uma mesma porção de um meio.

ABSTRACT

We establish the equations of motion and continuity for continuous relativistic elastic media and treat the algorithms defining all mechanical quantities which describe the medium. The components of the momentum density normal to the velocity of a point in the stressed elastic medium are obtained from the conservation of linear momentum of isolated systems and appear as a consequence of the relativity of simultaneity for two observers that describe the stressing of the portion of the medium.

INTRODUÇÃO

Procurou-se, nesta monografia, abordar alguns aspectos da dinâmica dos meios elásticos relativísticos contínuos que se apresentam como importantes para a compreensão das controvérsias existentes nos fundamentos da termodinâmica relativística.

Inicialmente, estabeleceu-se alguns resultados da dinâmica relativística de partículas (consideradas sempre classicamente) que são utilizados nos parágrafos subsequentes.

A densidade de momento e o tensor (tri-dimensional) de tensão, grandezas físicas utilizadas na descrição do comportamento dos sistemas em análise, são definidos nos parágrafos 2 e 3 a partir de grandezas geométricas e dinâmicas. Também são estabelecidas as equações de movimento em termos destas grandezas.

No § 4 obtém-se as leis de transformação das componentes da tensão e no § 5 é realizada uma análise de validade das equações obtidas, onde, são considerados fundamentalmente certos problemas relacionados à relatividade da simultaneidade que surgem muito naturalmente se se procura manter uma interpretação geométrica para as equações de movimento de meios elásticos. Os resultados dessa análise condicionam fortemente as equações de transformação para as densidades de momento e massa que são estabelecidas no §7.

O §6 trata da equação da continuidade que, juntamente com as equações de movimento consideradas no §3, são expressas de maneira simples e compacta no §8 (onde é definido o tensor

quadridimensional de tensão-energia).

O estabelecimento das equações de movimento dos meios elásticos contínuos, uma vez que o problema é de natureza puramente mecânica, pode ser realizado sem apelo a analogias com o eletromagnetismo, sendo as discussões que surgem naturalmente numa linha dedutiva puramente mecânica e geométrica a preocupação principal desse trabalho.

§1. ALGUMAS DEFINIÇÕES (DINÂMICA RELATIVÍSTICA)

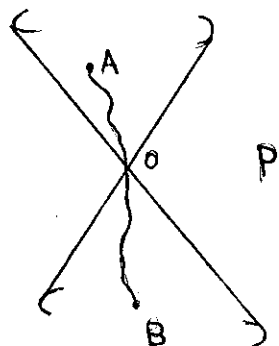
Neste parágrafo apresentamos uma reconstrução ligeira de resultados básicos da dinâmica relativística tomada essencialmente de [SYNGE, 1972] . Os conceitos e definições aqui somente apresentados ou referidos são de fundamental importância quando nos interessamos pela construção de uma dinâmica de corpos extensos, ainda que referindo-se principalmente à dinâmica de sistemas de partículas. Enunciamos aqui definições de referencial inercial, força e alguns teoremas envolvendo esses conceitos como o princípio de conservação de energia e momento.

Em primeiro lugar, definamos "evento" e "partícula".

Qualquer coisa que ocorra assinala um evento, mas (analogamente como fazemos em geometria com o conceito de ponto) um evento é uma ocorrência que não tem duração ou outras dimensões. A totalidade de todos os possíveis eventos forma o espaço-tempo: um contínuo quadrimensional com o que queremos dizer que um evento é identificado por quatro números (x^1, x^2, x^3, x^4) a que chamamos coordenadas do evento. A partícula material é definida como um ponto móvel a que se associa um número (massa). Os conceitos de evento e partícula se ligam pela afirmação de que a história de uma partícula é uma sequência contínua de eventos: sua trajetória no espaço-tempo.

Se tomarmos a liberdade de reduzir um ser humano a um ponto móvel, nós o chamamos um "observador" (idealizado), sendo que um observador pode ordenar os eventos que ocorrem em sua trajetória no espaço-tempo. Considerando apenas estes eventos, ele possui passado, presente, futuro; o presente consistindo de um único evento após o passado e antes do futuro. Consideremos dois eventos B e A. Se é possível ao observador se mover de maneira

que ambos os eventos ocorram em sua trajetória e, por exemplo, B ocorre antes de A, a diferença de leitura de um relógio que o observador carregue consigo entre B e A é chamada "separação" entre estes eventos ao longo da trajetória escolhida no espaço-tempo. Quando os eventos B e A não podem pertencer à trajetória de um observador a "separação" pode ainda ser definida em termos do relógio e fótons [SYNGE, pag. 25] .



o passado B, o presente P e o futuro A. (A 3- superfície que separa essas regiões é o cone de luz)

O espaço-tempo da relatividade restrita é um contínuo quadridimensional de eventos aos quais coordenadas podem ser assinaladas em uma grande variedade de maneiras, mas existem coordenadas x^α tais que a separação "ds" entre qualquer par de eventos adjacentes é dada por

$$ds^2 = (+ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2) \quad (1.1)$$

Neste trabalho, a partir deste ponto, consideramos apenas os sistemas coordenados onde é válida a expressão (1.1) e tão somente as transformações de coordenadas que deixam essa expressão invariante. (ou x^1, x^2, x^3, ix^4 onde a quarta coordenada é imaginária).

Os aspectos de dinâmica de partículas ou sistemas de partículas (que só interagem por colisão) que são utilizados podem ser colocados da maneira seguinte. O vetor quadri-velocidade de uma

partícula é definida por

(1.2)

$$\lambda_{\alpha} = \frac{dx_{\alpha}}{ds} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) = (x, y, z, ict)$$

e o momento como

$$M_{\alpha} = m \lambda_{\alpha} , \quad (1.3)$$

onde m é a massa própria da partícula.

A equação de movimento é escrita como:

$$\frac{d}{ds} \left(m \frac{dx_{\alpha}}{ds} \right) = X_{\alpha} \quad (1.4)$$

onde X_{α} é a 4-força. No caso de massa própria constante, as equações de movimento são equivalentes à

$$\frac{d}{dt} (m \gamma u_i) = P_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} (m \gamma c^2) = P_i u_i \quad (1.6)$$

onde:

$$\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \quad (1.7)$$

$$P_i = \frac{c^2}{\gamma} X_i \quad (1.8)$$

Para sistemas de partículas, utilizamos a lei de conservação do 4-momento.

$$\sum M'_{\alpha} = \sum M_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (1.9)$$

onde M_{α} é o 4-momento de uma partícula antes da colisão, e M'_{α} o 4-momento de uma partícula após a colisão, a somatória se estendendo a todas as partículas envolvidas. A equação (1.9) pode também ser escrita como:

$$\sum m' \gamma' u'_i = \sum m \gamma u_i \quad (1.10)$$

$$\sum m' \gamma' = \sum m \gamma \quad (1.11)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

§2. CONSERVAÇÃO DO MOMENTO E COMPONENTES DA TENSÃO

Os parâmetros utilizados na descrição de um meio elástico em um dado instante são fundamentalmente um campo escalar para representar a densidade de massa ρ , um campo trivetorial para a velocidade em cada ponto do meio e outro para a densidade de momento $\vec{g}$ (surgirão adiante), e ainda um tensor t^{ij} (onde $i, j = 1, 2, 3$) contravariante de segunda ordem para transformações de coordenadas que só envolvam os eixos espaciais. Consideremos as componentes do tensor de tensão t^{ij} .

Tomando os eixos cartesianos x, y, z de um referencial inercial, definimos as componentes do tensor de tensão como:

$$t^{ij} = \begin{bmatrix} t^{xx} & t^{xy} & t^{xz} \\ t^{yx} & t^{yy} & t^{yz} \\ t^{zx} & t^{zy} & t^{zz} \end{bmatrix}$$

onde t^{ij} , em qualquer ponto do meio, representa a componente da tensão na direção do eixo "i" exercida em uma superfície unitária normal à direção do eixo "j" pelo material do lado dessa superfície a que correspondem menores valores da coordenada x_j . Postulamos a igualdade da ação e reação chamando $-t^{ij}$ a tensão na direção do eixo x_i exercida em uma superfície infinitesimal normal a direção x_j pelo material do lado dessa superfície a que correspondem maiores valores da coordenada x_j (o que é equivalente a tomar a conservação local do momento como postulado, uma vez que admitimos que as diversas porções do meio só interagem por contato mecânico)

Define-se um meio elástico quando não existe difusão entre os pontos pertencentes ao meio. Em outros termos, se, ao solidificar-se um bloco de borracha azul, fosse colocado um pequeno cubo de borracha amarela em seu interior, quando se deformasse o bloco, se deformaria também o cubo amarelo no interior, mas as borrachas não se misturariam, formando sempre dois sólidos: um azul e outro amarelo.

§3. AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM TERMOS DAS TENSÕES

As equações de movimento para meios elásticos contínuos estão formuladas em termos de propriedades de grandezas físicas comuns à dinâmica relativística e newtoniana, já que utiliza-se a relação $\vec{F} = d\vec{P}/dt$, e são válidas portanto no caso clássico e relativístico.

Por um lado, calcula-se a força resultante num cubo infinitesimal do meio considerando-se a diferença de tensão entre as faces paralelas que delimitam o cubo. Se, por exemplo, considera-se a componente da força na direção x e fixa-se a atenção no par de superfícies perpendiculares ao eixo y , toma-se t^{xy} como a tensão exercida na superfície de menor coordenada y , conforme a igualdade da ação e reação, toma-se $-(t^{xy} + \delta y \partial t^{xy}/\partial y)$ como a tensão exercida sobre o cubo na superfície de maior coordenada y . A contribuição dessas superfícies para a força na direção x é $(-\partial t^{xy}/\partial y)\delta x \delta y \delta z$ e, para os três pares de superfícies paralelas, têm-se

$$F^x \delta v = \left(-\frac{\partial t^{xx}}{\partial x} - \frac{\partial t^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial t^{xz}}{\partial z} \right) \delta v \quad (3.1)$$

onde f^i é a densidade de força na direção i e

Portanto podemos escrever:

$$f^i = -\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} \quad (j=1,2,3) \quad (3.2)$$

Por outro lado, igualando a força exercida pelo meio sobre o volume infinitesimal à taxa de variação de momento deste volume

me obtemos:

$$f^i \delta v = \frac{d}{dt} g^i \delta v \quad (3.3)$$

onde g^i é a densidade de momento na direção "i" no ponto em questão.

Escreve-se a equação de movimento para o volume como:

$$-\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} \delta v = \frac{d}{dt} (g^i \delta v) = \frac{d}{dt} g^i \delta v + g^i \frac{d}{dt} (\delta v) \quad (3.4)$$

Entretanto,

$$\frac{d}{dt} g^i = \frac{\partial g^i}{\partial t} + u^x \frac{\partial g^i}{\partial x} + u^y \frac{\partial g^i}{\partial y} + u^z \frac{\partial g^i}{\partial z} \quad (3.5)$$

onde $\vec{U} = (u^x, u^y, u^z)$ é a velocidade no ponto em questão. Escreve-se também

$$\frac{d}{dt} (\delta v) = \left(\frac{\partial u^x}{\partial x} + \frac{\partial u^y}{\partial y} + \frac{\partial u^z}{\partial z} \right) \delta v \quad (3.6)$$

Substituindo-se (3.6) e (3.5) em (3.4) obtem-se

$$-\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} = \frac{\partial g^i}{\partial t} + u^j \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + g^i \frac{\partial u^j}{\partial x^j} \quad (3.7)$$

$$-\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} = \frac{\partial g^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} (g^i u^j) \quad (3.8)$$

que é a equação de movimento para meios elásticos contínuos.

§4. AS LEIS DE TRANSFORMAÇÃO PARA AS TENSÕES

No parágrafo 5, apresentamos um algoritmo a ser utilizado pelo observador que deseja calcular as componentes da tensão em um dado ponto do meio. Este algoritmo, em uma de suas etapas, exige que o observador se transfira de referencial inercial a modo de ter, no instante em que se requeira, o ponto em questão imóvel. Necessitamos, portanto, das leis de transformação de tensão do referencial próprio para um referencial não próprio. Para efeitos deste cálculo, deve-se observar que as componentes da tensão estão definidas em termos de forças e áreas sobre as quais atuam, logo, utilizando-se a lei de transformação de forças de um para outro referencial e a lei da transformação das áreas (que é consequência da transformação de Lorentz), pode-se determinar as leis de transformação para as componentes da tensão.

Por simplicidade, assumimos que o sistema original de coordenadas S esteja orientado de maneira que o material do ponto de interesse do meio se mova com velocidade " u ", paralela ao eixo x . Toma-se um segundo referencial chamado de "coordenadas próprias S' ", que se move na direção x com respeito a S com velocidade " v " igual à " u " de maneira a ter-se o material do meio em repouso em S' no ponto em questão. As forças se transformam de um para outro referencial inercial de acordo com:

$$F_x = F'_x \quad ; \quad F_y = F'_y \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad ; \quad F_z = F'_z \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (4.1)$$

e as áreas de acordo com:

$$A_x = A'_x ; A_y = A'_y \sqrt{1 - v^2/c^2} ; A_z = A'_z \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (4.2)$$

Uma vez que a tensão é definida como a razão da força aplicada pela área sobre a qual atua, obtém-se as equações de transformação:

$$\begin{aligned} t_{xx} &= t'_{xx} & t_{xy} &= \frac{t'_{xy}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & t_{xz} &= \frac{t'_{xz}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_{yx} &= t'_{yx} \sqrt{1 - v^2/c^2} & t_{yy} &= t'_{yy} & t_{yz} &= t'_{yz} \\ t_{zx} &= t'_{zx} \sqrt{1 - v^2/c^2} & t_{zy} &= t'_{zy} & t_{zz} &= t'_{zz} \end{aligned}$$

(4.3)

§5. UMA QUESTÃO*

Para se medir a componente da tensão t_{ij} em um determinado evento de coordenada $E(\vec{x}, t)$ em um referencial inercial S , em primeiro lugar, localiza-se o único ponto P do meio elástico cuja trajetória no espaço tempo contém o evento $E(\vec{x}, t)$. Determina-se a velocidade $\vec{v}$ do ponto no evento em questão. A esta altura, transfere-se o observador para um novo referencial S' que também possui velocidade $\vec{v}$ em relação à S , de maneira que o ponto P tenha velocidade nula em S' no evento em questão. Nesse novo referencial, é claro, $(\vec{x}', t')$ as coordenadas do evento, posição e ocasião em que se estuda o ponto do meio elástico, são ditadas por transformação de Lorentz das coordenadas do evento no referencial inicial para o novo referencial S' . No referencial próprio S' (para o ponto do meio que ocupa o evento em questão), escava-se então, um cubo de material elástico em torno do ponto P , mede-se t'_{ij} em cada uma das faces do cubo perpendiculares ao eixo j e toma-se para $t'_{ij}(\vec{x}', t')$, por exemplo, a média dos valores encontrados em cada par de faces opostas. Nem antes, nem depois, apenas no instante t' é necessária a escavação e a medida. O procedimento envolve três medidas de força e uma de área para cada uma das seis faces do cubo, todas simultâneas no referencial próprio S' . O observador em S toma os valores encontrados para t'_{ij} pelo observador em S' , substitui-os em (4.3)¹ e obtém assim os valores de t_{ij} no ponto do meio que ocupa o even-

* neste parágrafo escrevemos t_{ij} em lugar de t^{ij} para facilitar a notação.

to $(\vec{x}, t)$ (admitamos, por simplicidades, que $\vec{v} = v_x \hat{x}$ de maneira a podermos aplicar (4.3) sem nos preocuparmos com rotações dos eixos espaciais de S).

Admitamos agora que, no referencial S' , em cada uma das oito (trincas) coordenadas espaciais que determinam o cubo infinitesimal em torno do ponto P, seja colocada uma lâmpada, e que se acendessem simultaneamente (S') no instante t' . No referencial próprio S' , ligando as oito lâmpadas quando brilhassem, formar-se-ia um cubo que deixaria de existir para S' imediatamente depois, quando as lâmpadas se apagassem. Para o referencial S, não privilegiado ($v = 0$, para S), as lâmpadas não serão vistas a piscarem simultaneamente. O observador em S' pode, dessa forma, questionar as relações (4.3) uma vez que assumem que o cubo em S' terá, visto por S, suas arestas contraídas e o observador em S não constata a existência de qualquer cubo. A questão é essencial pois, o observador em S assume que t_{ij} é a componente da força por unidade de área exercida na direção do eixo "i" em uma superfície normal da direção do eixo "j" pelo material do lado da superfície a que correspondem menores valores da coordenada x_j e, como o algoritmo que define t_{ij} em função de t'_{ij} não admite, até onde havemos investigado, esta interpretação, o observador em S pode duvidar das equações de movimento (3.7) estabelecidas sob esta interpretação. De fato, alteraremos ligeiramente o algoritmo que define t'_{ij} de maneira a mantermos o significado de t_{ij} (definido no parágrafo 2) e não necessitarmos de modificações quer das equações de movimento (3.7) quer das relações de transformação (4.3). Esta alteração no algoritmo condicionará fortemente as relações de vínculo e a equação de conti

nuidade que encontraremos em parágrafos subsequentes.

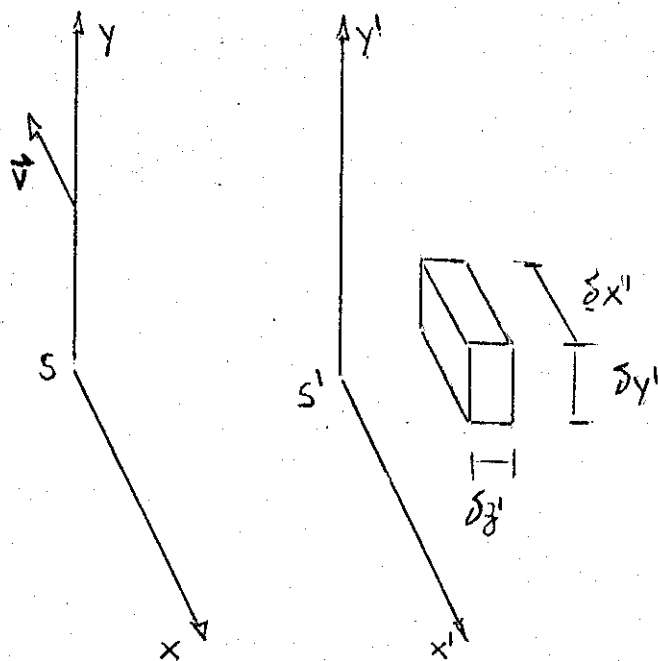
No algoritmo que realmente adotaremos, o observador do referencial próprio S' não só acende simultaneamente as oito lâmpadas como deixa que brilhem durante um intervalo $\delta t'$ antes de se apagarem simultaneamente. Em outras palavras: o observador próprio escava no instante t' o cubo e inicia neste mesmo instante as medidas de área e força que serão efetuadas em cada instante entre t' e $t' + \delta t'$. No instante t' , o cubo é formado por todos os pontos no meio elástico que estão contidos em um dado volume no espaço. Entre t' e $t' + \delta t'$

cada um desses pontos do meio se desloca e o cubo se deforma bem como os valores de t'_{ij} se alteram a cada instante. Estamos nos propondo a demonstrar que é possível escolher $\delta x', \delta y', \delta z', \delta t'$ de maneira que:

- a) entre t' e $t' + \delta t'$, o valor de t'_{ij} (bem como ρ', g' , e outras funções contínuas que descrevem o meio) têm variação tão diminuta quanto se desejar (analogamente para $t_{ij}, \rho, \vec{g}, \vec{U}$, etc).
- b) A qualquer instante de um intervalo θ_t , o observador em S , verificará a existência de um cubo imóvel em S' , que se lhe apresenta com a aresta contraída pelo fator de Lorentz, não tendo motivos portanto para duvidar das relações de transformação (4.3).

Comecemos por b). O observador em S' acende simultaneamente, no instante t' , oito lâmpadas incrustadas no meio elástico e que assinalam os vértices de um cubo de material elástico que se forma ligando-as por retas no espaço. Apaga-as simultaneamente em $t' + \delta t'$ e faz durante todo esse intervalo sucessivas medições das

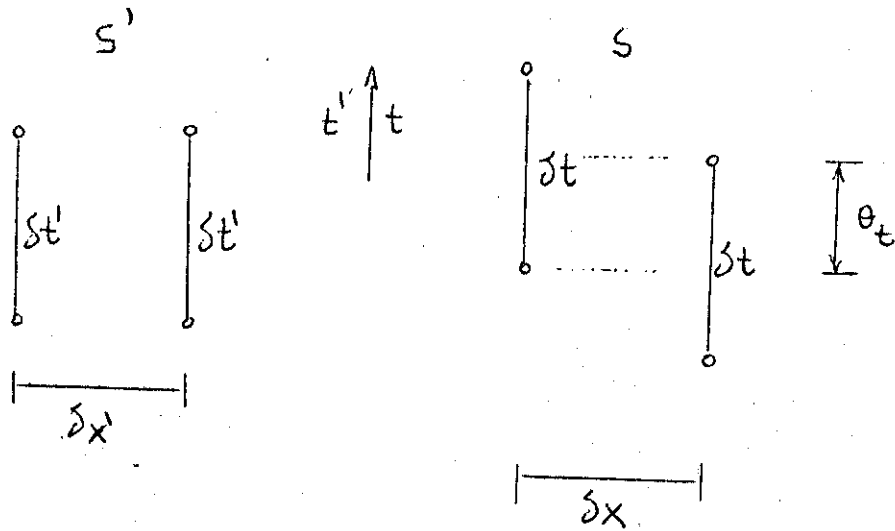
componentes de t'_{ij} . Os observadores do referencial S não as verão novamente se acenderem ou se apagarem simultaneamente, mas demonstraremos que é sempre possível escolher $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta t'$ infinitesimais, um quadrivolume infinitesimal do espaço-tempo contendo o evento x' , y' , z' , t' , de maneira às lâmpadas brilharem simultaneamente em S durante um intervalo θ_t . Para tanto, suponha-se que os referenciais S e S' sofram rotações de maneira a termos em S a velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ para o ponto do meio elástico que ocupa o evento P e os eixos espaciais de S e S' paralelos; a palavra "paralelo" não está aqui sendo utilizada para qualificar os vetores no espaço tempo que caracterizam os eixos espaciais de S e S' mas como indicado na figura abaixo:



Cada lâmpada brilha por $\delta t'$ em S' e por $\delta t = \gamma(v) \delta t'$ para um observador em S . As lâmpadas que se acendem (apagam) nas faces do cubo de coordenadas $x' + \delta x'/2$ e $x' - \delta x'/2$ são observadas a se acenderem (apagarem) com uma diferença de simultaneidade Δt para observador em S dada (pelas transformações de Lorentz) por:

$$\Delta t = \delta x' \gamma(v) v / c^2 \quad (5.1)$$

A figura abaixo apresenta a situação em S' e S



O intervalo θ_t em que as lâmpadas coexistem acesas em S é dado por:

$$\theta_t = \delta t - \Delta t > 0 \quad (5.2)$$

que, em termos da descrição do cubo em S' ($\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta t'$) fornece

$$\gamma(v) \delta t' - \gamma(v) \delta x' v / c^2 > 0 \Rightarrow \delta t' > \delta x' v / c^2 \quad (5.3)$$

$$\theta_t = \gamma(v) [\delta t' - \delta x' v / c^2] > 0 \quad (5.4)$$

Assim, a relação (5.3) determina uma "duração temporal mínima" $\delta t'$ para o cubo em termos de sua extensão espacial ($\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$). Evidentemente, reescrevendo (5.4) temos

$$\delta x' < \delta t' (v/c^2)$$

(5.5)

ou seja, existe um valor máximo para as dimensões espaciais diferenciais $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ de um cubo de extensão temporal $\delta t'$ dado por (5.5), de maneira a podermos manter a interpretação geométrica de um sólido "cúbico" para ambos os referenciais pelo menos por alguns instantes.

Para analisarmos o item (a), consideremos um observador em S' interessado em medir, por exemplo, a componente t'_{ij} da tensão no meio no evento (x', t') . O observador se move então, entre t' e $t' + \delta t'$, junto com o ponto do meio em questão e escolhe $\delta t'$ de maneira que:

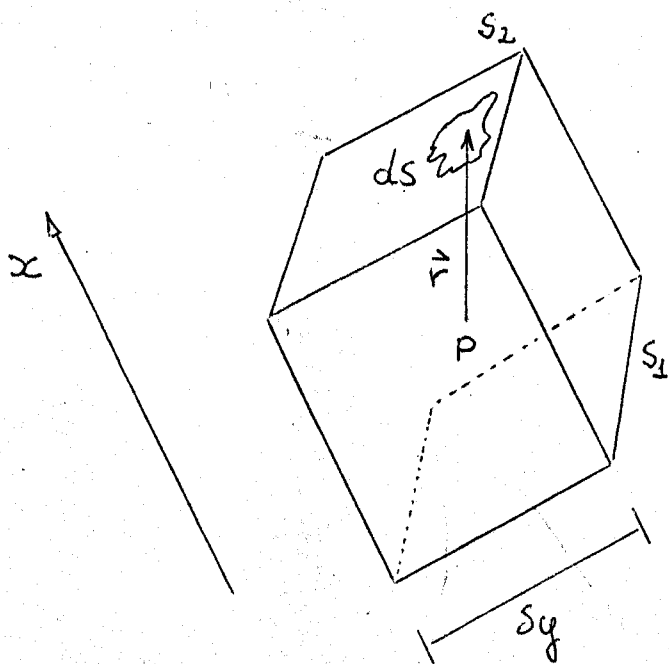
$$\Delta(t'_{ij}) = \delta t' \frac{d}{dt'}(t'_{ij}) < \epsilon$$

(5.6)

onde ϵ é tão pequeno quanto deseje. Se o observador em S' pretende que seus dados sejam utilizados por um observador em S para calcular t'_{ij} através de (4.3.3), deve escolher um cubo no meio elástico em torno de x' com dimensões espaciais infinitesimais que satisfaçam a desigualdade (5.5). Uma vez que isso é sempre possível, podemos manter a interpretação dinâmica-geométrica para as compontes da tensão e, conseqüentemente, as relações de transformação (4.3) e as equações de movimento (3.7).

§6. A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Delimitemos, no instante t , centrado no ponto P do espaço (na região ocupada pelo meio elástico), um cubo de dimensões infinitesimais $\delta x, \delta y, \delta z$. O observador que utiliza um referencial S atribui, ao ponto do meio elástico que ocupa o ponto P do espaço no instante t uma velocidade $\vec{v}$ e componentes t^{ij} para a tensão. Da mesma maneira, atribui a cada ponto da superfície do cubo velocidade $\vec{v}(\mathbf{r})$ e tensão $t^{ij}(\mathbf{r})$ onde $\vec{r}$ é o tri-vetor de componentes infinitesimais que vai do ponto P até o ponto em questão da superfície do cubo. Esse observador pode, portanto, calcular a potência transmitida ao cubo pelo meio elástico externo pelo argumento que se segue.



$$\frac{dw}{dt} = \int_S t^{ij} v^i ds$$

A velocidade e componentes da tensão na superfície do cubo infinitesimal, em primeira ordem nas componentes do vetor $\vec{r}$, se escrevem:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_P + [(\vec{\nabla}_P v^i) \cdot \vec{r}] \hat{x}_i = \vec{v} + [(\vec{\nabla} v^i) \cdot \vec{r}] \hat{x}_i \quad (6.1)$$

$$t_{ij}(\vec{r}) = t_{ij}^{(P)} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_P t_{ij} = t_{ij} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} t_{ij} \quad (6.2)$$

(onde v , t^{ij} , e derivadas parciais são tomados no ponto P). O observador em S escreve, portanto, para o fluxo de potência em um ponto nas superfícies do cubo perpendiculares ao eixo x_j :

$$\begin{aligned} v^i(\vec{r}) t_{ij}(\vec{r}) &= (v^i + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} v^i)(t_{ij} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} t_{ij}) \\ &= v^i t_{ij} + v^i (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} t_{ij}) + t_{ij} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} v^i) + O_2(\vec{r}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

(onde $O_n(r)$ é termo da forma $A \partial x^i \partial y^k \partial z^j$ tal que $i + j + k \geq n$)
O fluxo de potência no ponto determinado por r é definido na expressão acima pela potência fornecida pela porção do meio de menor coordenada x_j à de maior coordenada x_j se tomamos uma superfície infinitesimal dS em torno do ponto em questão.

Para calcularmos a potência fornecida ao cubo no instante t pelo meio elástico exterior, tomemos, por exemplo, o par de faces perpendiculares ao eixo x e chamemos S_1 e S_2 às faces de menor e maior coordenada x e normais à esse eixo. Definindo os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ por:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= (\delta x/2, \Delta y, \Delta z) \\ \vec{r}' &= (-\delta x/2, \Delta y, \Delta z) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\delta x/2 &\leq \Delta y \leq \delta x/2 \\ -\delta z/2 &\leq \Delta z \leq \delta z/2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

observamos que, variando-se Δy e Δz dentro dos limites permitidos, a extremidade de $\vec{r}$ varre S_2 e a extremidade de $\vec{r}'$ varre,

de maneira simétrica em relação ao plano YZ, a superfície S_1 . Escrevemos então, para a potência transferida ao cubo pelas faces consideradas:

$$\frac{dW_x}{dt} = \int_{-\delta y/2}^{\delta y/2} \int_{-\delta z/2}^{\delta z/2} \left\{ [v^i t_{ix}](-\delta x/2, y, z) - [v^i t_{ix}](\delta x/2, y, z) \right\} dy dz \quad (6.5)$$

Mas considerando (6.3) e (6.4) podemos escrever:

$$[v^i t_{ix}](\vec{r}_1) - [v^i t_{ix}](\vec{r}) = - \left(v^i \frac{\partial t_{ix}}{\partial x} + t_{ix} \frac{\partial v^i}{\partial x} \right) \delta x + O_2(\vec{r})$$

o que levado em (6.5) fornece:

$$\frac{dW_x}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} (v^i t_{ix}) \delta x \delta y \delta z + O_4(\vec{r}) \quad (6.6)$$

fazendo o raciocínio análogo para as demais faces do cubo, encontramos, para a potência total fornecida ao cubo elástico pelo meio elástico exterior no instante t , a expressão:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v^i t_{ij}) \delta x \delta y \delta z + O_4(\vec{r}) \quad (6.7)$$

Por outro lado:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{V} \right) = \frac{1}{V} \left(\frac{dM}{dt} \right) - \frac{\rho}{V} \left(\frac{dV}{dt} \right) \quad (6.8)$$

Assumindo a conservação de energia e substituindo na expressão acima a equação (3.6) obtemos:

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{c^2 V} \left(\frac{dW}{dt} \right) - \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (6.9)$$

Substituindo na expressão acima o resultado (6.7) e tomando o limite $x, y, z \rightarrow 0$ obtemos a equação da continuidade:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{c^2} \sum_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v^i t_{ij}) \right] - \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (6.10)$$

Como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (6.11)$$

e definindo o vetor $\vec{S}$ por

$$S^j = \rho c^2 v^j + \sum_i t^{ij} v^i \quad (6.12)$$

podemos reescrever a equação da continuidade como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.13)$$

§7. EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO PARA DENSIDADES DO
MOMENTO E MASSA (VÍNCULOS).

Para a associação de um meio elástico relativístico e uma descrição por funções $(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $\vec{g}(\vec{r}, t)$, $t^{ij}(\vec{r}, t)$ é necessário que esses campos contínuos não só satisfaçam as equações de movimento mas também a uma "condição de vínculo" que advém dos algoritmos de "medida" que definimos no §5. Da mesma forma, no caso newtoniano, só admitimos (para descrição de meios elásticos contínuos isotropos) campos contínuos $(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $\vec{g}(\vec{r}, t)$ tais que seja válida a "relação de vínculo":

$$\vec{g} = \rho \vec{v} \quad (7.1)$$

Para estabelecermos o vínculo no caso relativístico, notemos inicialmente que a densidade de momento em S' , g' , é nula para o ponto P em questão uma vez que, tomando cubos suficientemente diminutos, as velocidades em todo ponto vizinho de P , contido no cubo, diferem de zero tão pouco quanto se deseje (eq.(7.4)). Também é natural chamar a densidade avaliada em P por S' a "densidade própria". Nota-se que, para um cubo do material elástico, as forças em pares de superfícies paralelas tendem a se tornarem iguais em módulo e opostas em sentido, tanto menor seja feito o cubo (por exemplo, o par de superfícies perpendiculares ao eixo y e distantes em δy em que os módulos das tensões na direção se diferem em $\delta y \partial t_{xy} / \partial y$).

As equações de transformação para as densidades do momen

to e massa do referencial S' (onde o ponto P do meio está imóvel no instante em questão) e o referencial S (orientado em relação à S' como no § 5) onde P tem velocidade v na direção x , se escrevem como:

$$\rho = \gamma^2(v) \left\{ \rho' + t'_{xx} v^2/c^4 \right\} \quad (7.2)$$

$$g_x = \gamma^2(v) \left\{ \rho' v + t'_{xx} v/c^2 \right\} \quad (7.3)$$

$$g_y = \gamma(v) t'_{yx} v/c^2 \quad (7.4)$$

$$g_z = \gamma(v) t'_{zx} v/c^2 \quad (7.5)$$

Antes de procedermos aos argumentos que nos sugerem estas transformações, notemos que para $v/c \rightarrow 0$ as relações acima se tornam as relações newtonianas:

$$\rho = \rho' \quad (7.6)$$

$$g_x = \rho' v = \rho v \quad (7.7)$$

$$g_y = g_z = 0 = g'_y = g'_z \quad (7.8)$$

Observamos que as equações (7.2) a (7.5) de transformação para densidades de momento e massa (ao contrário das equações (7.6) a (7.8)) envolvem as tensões t'_{ij} no ponto P sendo que os termos com tal origem aparecem de maneira crítica nas equações (7.4) e (7.5) pois, de acordo com essas equações, devemos atribuir uma densidade

de momento transversal à direção do movimento para meios tensionados. As equações de transformação (7.2) à (7.5) surgem de forma natural quando consideramos a relatividade da simultaneidade como mostramos a seguir, inicialmente a partir de um modelo simples e depois de forma mais geral.

Em primeiro lugar, consideremos a configuração de partículas representada na figura (a) abaixo. Na situação que consideramos, as partículas só interagem através de colisão e povoam diferenciadamente os sistemas S_1, S_2, S_3 (e o sistema global S). Definimos os sistemas S_1, S_2, S_3 através de fronteiras espaciais de posição fixa no tempo para o referencial S' (o referencial S tem velocidade $-v$ em relação ao referencial S'). De acordo com a figura (a), o sistema S_1 é povoado pelas partículas que se enfileiram no círculo A_1 , S_2 pelas partículas do círculo B_2 e S_3 por aquelas dos círculos B_3 e A_3 .

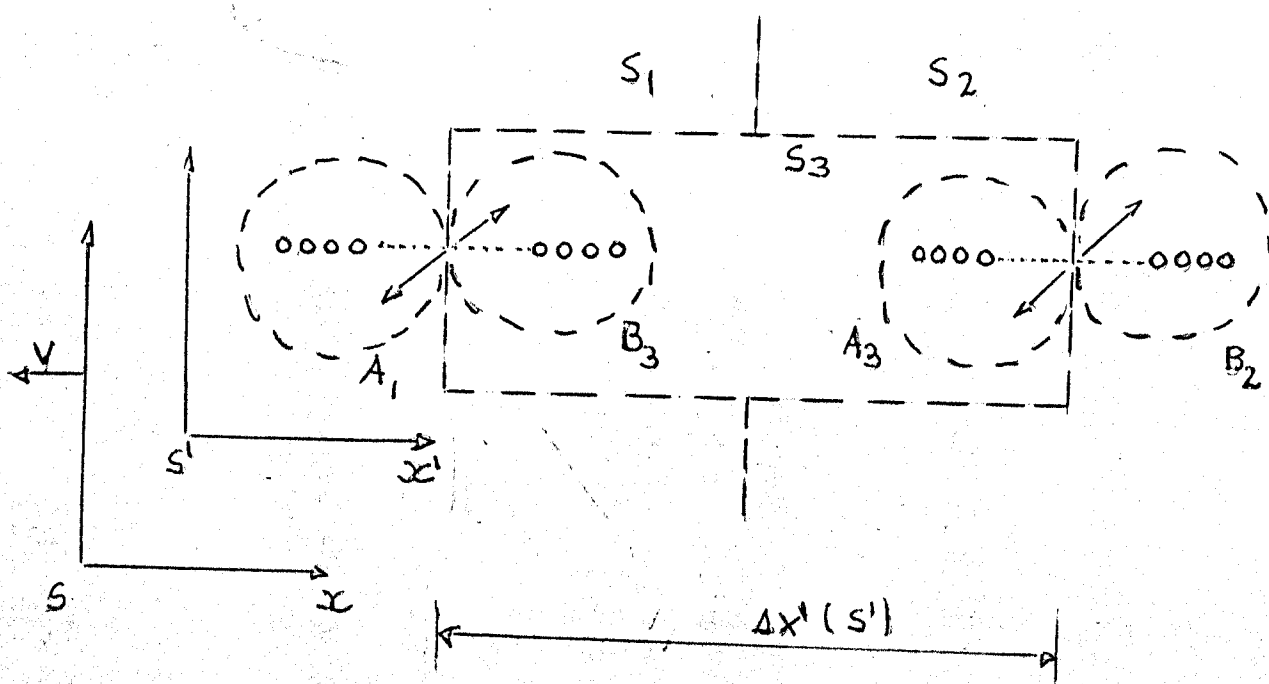


fig. (a)

As partículas de A_1 e de B_3 chocam-se sucessivamente em um ponto sobre a fronteira entre S_1 e S_3 e tomam consecutivamente após cada colisão a direção dada nos sentidos opostos indicados na figura, de maneira que as partículas contidas em A_1 (e portanto em S_1) são as mesmas a cada instante (da mesma forma para B_3). As colisões se dão entre partículas dos círculos A_3 e B_2 ocorrem de forma análoga.

A questão que se formula sobre esse modelo é: de que maneira diferem as descrições por S' e S das componentes do momento para cada sistema S_1 , S_2 ou S_3 ? Tanto para S' quanto para S , o momento para o par de círculos A_1 e B_3 (ou o par A_3 e B_2) é constante no tempo uma vez que os choques de partículas transmitem momento oposto por unidade de tempo de um círculo ao outro; ambos os observadores (cada um usando sua própria simultaneidade) concordam com a invariância no tempo do momento do sistema global. Admitamos agora que, para S' , os sistemas S_1 e S_3 , S_2 e S_3 comecem a trocar movimento simultaneamente. No referencial S' , a variação, desde um instante anterior ao início dos choques, do momento de A_1 , é igual e oposta à de B_2 a cada momento e é nula a variação de momento atribuído à S_3 . Por outro lado, o observador em S verifica que a troca de momento entre o par de círculos A_1 e B_3 inicia-se adiantada por $\Delta t = \Delta x' v \gamma(v)/c^2$ em relação àquela que ocorre entre o par A_3 e B_2 . Se as "fileiras" de partículas forem longas o suficiente para que as colisões envolvendo cada par de círculos considerados durem por um intervalo de tempo maior que Δt , o observador em S constatará que as componentes (em módulo) do momento de S_3 crescem a uma taxa constante no tempo durante o intervalo Δt após iniciadas as coli-

sões no par A_1B_3 . Após o intervalo Δt , o momento que S_1 transmite à S_3 por unidade de tempo é igual ao momento que S_3 fornece à S_2 por unidade de tempo e, portanto, o momento de S_3 permanece constante no tempo enquanto se mantiver esta situação. De passagem, nota-se que, se assumirmos a situação representada na figura (b) ao invés daquela representada na figura (a), os observadores em S e S' concordarão que o momento de S_3 não depende do tempo.

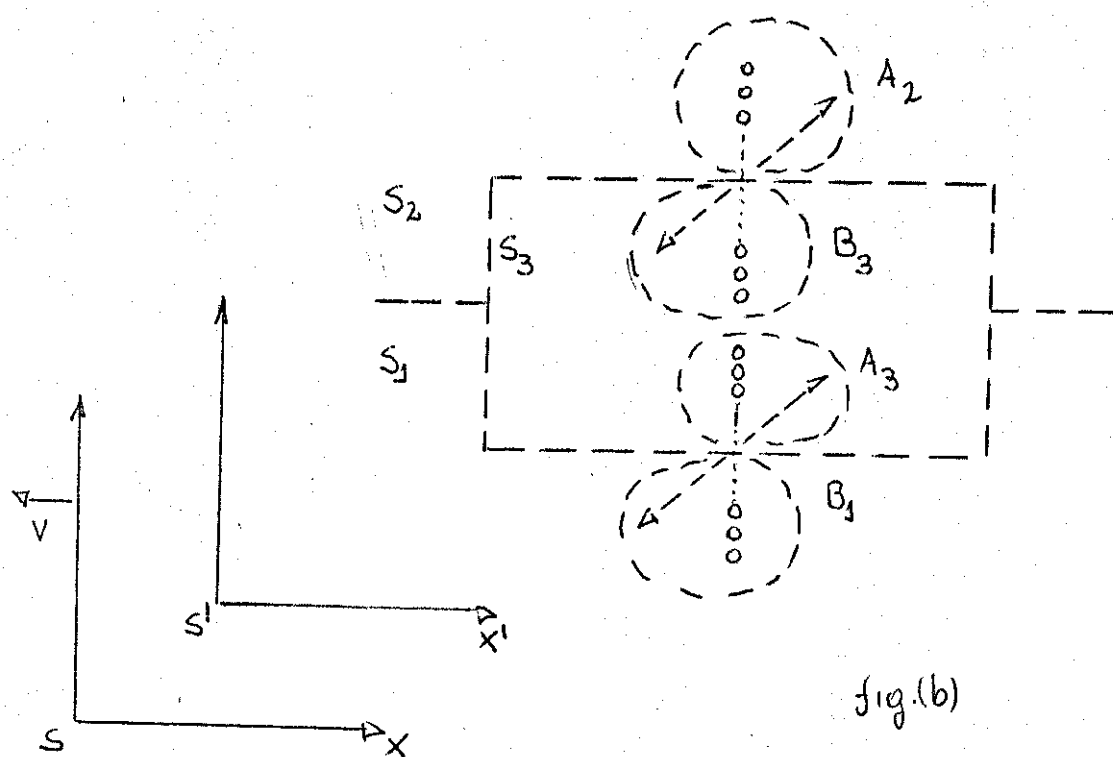


fig.(b)

A análise que obtivemos para a situação com partículas representada na figura (a) é essencialmente análoga aos argumentos que sugerem as equações de transformação para densidades de momento e massa (7.2) à (7.5) em meios elásticos contínuos. Como verificaremos adiante, um cubo de material elástico com arestas paralelas aos eixos coordenados de um referencial próprio S' e que passa de um estado de não tensionamento para um estado estacionário de tensiona-

mento assumindo dimensões $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, induz as mesmas leis de transformação de S' a S para as densidades de momento que as sugeridas pelo sistema de partículas representado na figura (a). Da mesma maneira que na análise do momento do sistema S_3 , o observador no referencial S verifica que, do estado de não tensionamento para o estado de tensionamento estacionário (onde forças opostas atuam em faces opostas e indefinidamente), o momento do cubo se altera na diferença de simultaneidade entre S e S' (função de $\delta x'$) multiplicada pela força que age sobre a face do cubo de menor coordenada x .

Para tanto, consideremos o diagrama apresentado na figura (c) abaixo. Estão representados os dois sistemas de coordenadas S e S' sobre o espaço-tempo. As duas linhas 1 e 2 representam as trajetórias no espaço-tempo dos pontos centrais das faces perpendiculares ao eixo x' do referencial S' . Nestas faces estão aplicadas as forças $F'_1(t')$ e $F'_2(t')$ tais que

$$F'_1(t') = -F'_2(t') = F'(t') \quad (7.9)$$

onde

$$F'(t' = 0) = 0 \quad e$$

$$F'(t' > t'_F) = F' = \text{cte} \quad (7.10)$$

O observador em S descreve a mesma aplicação das forças através das funções $F_1(t)$ e $F_2(t)$ conforme ilustrado a seguir.

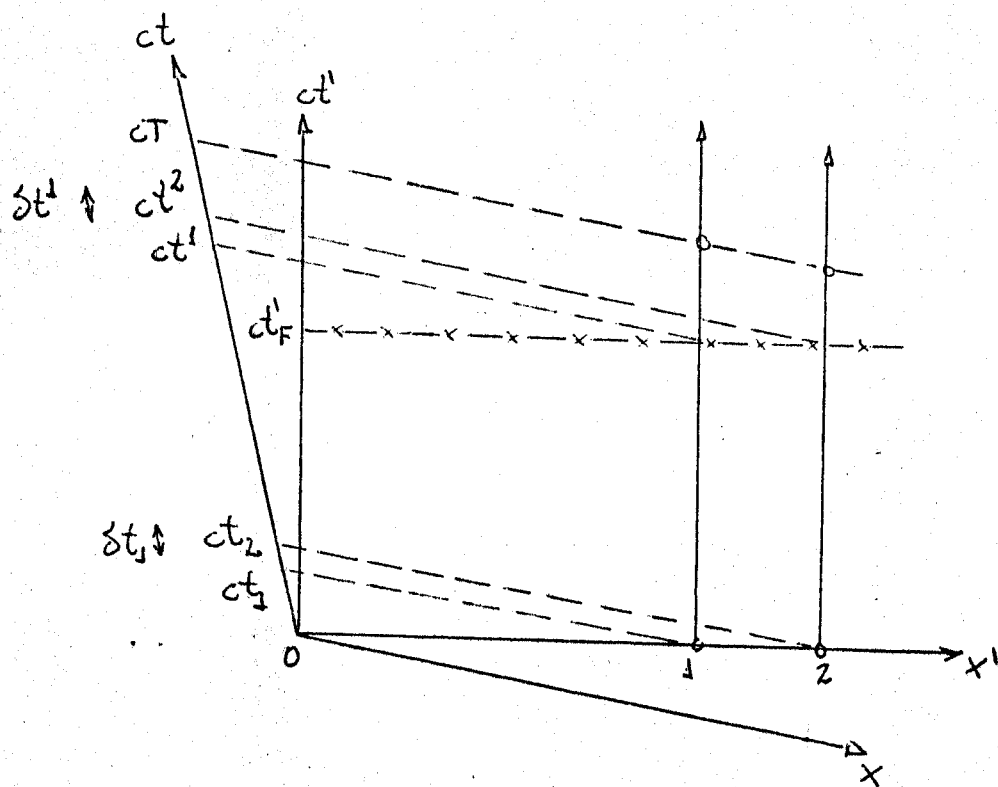


fig (c)

No referencial S, as forças $F_1(t)$ e $F_2(t)$ não "saem" do valor nulo simultaneamente bem como não atingem simultaneamente a condição:

$$F_1(t) = F_2(t) = F = \text{cte} , \quad (7.11)$$

portanto podemos integrar o impulso transmitido por cada uma das forças ao cubo desde o estado não tensionado até o estado estacionário (segundo S) onde vale:

$$F_1(T) = F_2(T) = F \text{ e } T > t^2 \quad (7.12)$$

para encontrarmos um valor não nulo. Chamando $I(T)$ o impulso líquido transmitido ao cubo temos:

$$I(T) = \int_{t_1}^T [F_1(t) - F_2(t)] dt$$

Em outras palavras, o cubo elástico consiste em um tri-volume infinitesimal cuja existência temporal vai do estado não-tensionado ao estado tensionado constituindo portanto um "filamento quadri-dimensional" no espaço-tempo. O observador em S secciona o filamento por dois hiperplanos (tri-planos) ortogonais ao vetor tipo tempo da base de S para o espaço-tempo (simultaneidade em S). A primeira secção define um tri-volume não tensionado e a segunda secção (num instante T de S) determina um tri-volume em condições estacionárias de tração; A potência líquida trocada entre o "quadri-filamento" e o restante do espaço tempo entre as duas secções mencionadas é expressa na equação (7.17) (para um arranjo conveniente dos eixos) dependendo apenas da tensão no estado estacionário e da diferença de simultaneidade em S se imaginamo-la aplicada abruptamente por um observador que usa a simultaneidade de S' .

Seja, portanto, o cubo elástico representado na figura (c).

O observador em S vê aplicadas não simultaneamente as tensões t_{ix} ($i = 1, 2, 3$) nas faces de coordenadas $x_0 \pm \delta x/2$. Chamando de S_1 o tri-espaço exterior ao cubo (x, y, z) tal que $x < x_0$ e S_2 para $x > x_0$, temos que, durante o intervalo $\Delta t = \delta x \gamma^2(v) v/c^2$, S_1 cede momento na direção i para o cubo à taxa $t_{ix} \delta y \delta z$. Da mesma maneira, essa é a taxa em que o cubo cede momento para S_2 após um intervalo Δt de iniciada sua troca de momento com S_1 . Admitindo que o cubo esteja em um estado estacionário de tensionamento, o momento do cubo nas direções y e z , inicialmente nulos em S' (e S), passa a:

$$I(T) = \left\{ \int_{t_1}^{t^1} F_1(t) dt + \int_{t^1}^T F_1(t) dt \right\} - \left\{ \int_{t_2}^{t^2 = t^1 + \delta t^1} F_2(t) dt + \int_{t^2}^T F_2(t) dt \right\} \quad (7.14)$$

o que reescrevemos

$$I(T) = \left\{ \int_{t_1}^{t^1} F_1(t) dt + \int_{t^1}^T F_1(t) dt \right\} - \left\{ \int_{t_2 = t_1 + \delta t_1}^{t^2 = t^1 + \delta t^1} F_1(t - \delta t_1) dt + \int_{t^2}^T F_1(t) dt \right\} \quad (7.15)$$

Considerando baixas compressões ($\delta t_1 \sim \delta t^1$) e fazendo a mudança de variáveis $u = t - \delta t_1$ em uma das integrais de (7.15) temos:

$$I(T) = \left\{ \int_{t_1}^{t^1} F_1(t) dt + \int_{t^1}^T F_1(t) dt \right\} - \left\{ \int_{t_1}^{t^1} F_1(u) du + \int_{t^2}^T F_1(u) du \right\} \quad (7.16)$$

Uma vez que $F(t) = F = \text{cte}$ para $t > t^1$ escrevemos:

$$I(T) = \left\{ \int_{t_1}^{t^1} F(t) dt + \delta t^1 F + (T - t^2) F \right\} - \left\{ \int_{t_1}^{t^1} F(t) dt + (T - t^2) F \right\} =$$

$$I(T) = \delta t^1 F \quad (7.17)$$

Logo, nas condições de compressão que admitimos, o observador em S atribui ao cubo tensionado um momento que advém da relatividade da simultaneidade e que pode ser calculado pela expressão (7.17), um resultado análogo àquele encontrado para o sistema de partículas S_3 representado na figura (a).

$$P_y = t_{yx} \gamma^2(v) \frac{v}{c^2} \delta x \delta y \delta z \quad (7.18)$$

$$P_z = t_{zx} \gamma^2(v) \frac{v}{c^2} \delta x \delta y \delta z \quad (7.19)$$

e o momento na direção x sofre um acréscimo

$$\Delta P_x = t_{xx} \gamma^2(v) \frac{v}{c^2} \delta x \delta y \delta z \quad (7.20)$$

As componentes da tensão nos demais pares de faces do cubo não transmitem-lhe momento líquido (e não executam trabalho líquido) em analogia com o processo apresentado na figura (b).

Por outro lado, as forças $t_{xx} \delta y \delta z$ e $-t_{xx} \delta y \delta z$ que aplicamos nas faces do cubo perpendiculares ao eixo x , apesar de executarem trabalho ataxas que se cancelam sobre o cubo, isso só passa a ocorrer após $\Delta t = \delta x \gamma^2(v) v/c^2$, quando ambas as forças já estão atuando. Tem-se:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta W = t_{xx} (\delta y \delta z) v \Delta t$$

$$\Delta W = t_{xx} \gamma^2(v) \frac{v^2}{c^2} \delta x \delta y \delta z \quad (7.21)$$

Define-se a massa própria em termos da densidade própria:

$$M' = \rho' \delta x' \delta y' \delta z'$$

Antes de se aplicar as tensões, o cubo apresenta (em S) massa M_i , volume V , densidade de massa ρ_i e momento p_{ix} na direção x :

$$M_i = \gamma(v) M' \quad (7.22)$$

$$V = \delta x \delta y \delta z = \gamma^{-1}(v) \delta x' \delta y' \delta z' \quad (7.23)$$

$$\rho_i = \gamma^2(v) \rho' \quad (7.24)$$

$$p_{ix} = M_i v \quad (7.25)$$

Após aplicadas ambas as forças, o cubo sofre um acréscimo de energia $\Delta E = \Delta W$ ou, equivalentemente, um acréscimo de massa einsteiniana $\Delta M = \Delta W/c^2$. Escreve-se:

$$M = \gamma(v) M' + \Delta W/c^2 \quad (7.26)$$

ou, substituindo (7.21) e (7.24) em (7.26):

$$\rho = \gamma^2(v) \left[\rho' + t_{xx} v^2/c^4 \right] \quad (7.27)$$

e, das equações (7.20) e (7.25) temos para o cubo tensionado:

$$P_x = \rho_i v \delta x \delta y \delta z + t_{xx} \gamma^2(v) \frac{v}{c^2} \delta x \delta y \delta z \quad (7.28)$$

Portanto, as leis de transformação buscadas são:

$$\rho = \gamma^2(v) \left\{ \rho' + t'_{xx} v^2/c^4 \right\} \quad (7.2)$$

$$g_x = \gamma^2(v) \left\{ \rho' v + t'_{xx} v/c^2 \right\} \quad (7.3)$$

$$g_y = \gamma(v) t'_{yx} v/c^2 \quad (7.4)$$

$$g_z = \gamma(v) t'_{zx} v/c^2 \quad (7.5)$$

No caso em que as componentes da tensão t_{ij} são nulas, as equações de transformação acima coincidem com aquelas para partículas. É um fato notável que o momento de uma porção tensionada do meio não seja necessariamente paralelo à velocidade.

§8. O TENSOR DE TENSÃO-ENERGIA*

Para obtermos um aparato que nos permita tratar a mecânica de um meio contínuo em uma linguagem quadri-dimensional, construiremos, a partir das grandezas físicas já consideradas, uma quantidade tensorial contravariante de segunda ordem, quadridimensional e que chamaremos tensor de tensão-energia e, em termos do qual, escreveremos de uma maneira simples as equações de movimento (§3) e a equação da continuidade (§6).

Definamos a matriz de tensão energia e expressemos em termos de seus elementos as equações dos §§3 e 6 antes de analisarmos seu caráter tensorial. Assim, seja a matriz:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} p^{xx} & p^{xy} & p^{xz} & cg^x \\ p^{yx} & p^{yy} & p^{yz} & cg^y \\ p^{zx} & p^{zy} & p^{zz} & cg^z \\ S^x/c & S^y/c & S^z/c & \rho c^2 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

onde

$$p^{ij} = t^{ij} + g^i{}_v v^j \quad (8.2)$$

$$S^j = \rho c^2 v^j + t^{ij} v^i \quad (\sum_i)$$

$$i = 1, 2, 3$$

* algumas vezes neste § escrevemos $t'^i{}_j$ ao invés de $(t')^{ij}$ ou $p'^i{}_j$ por $(p')^{ij}$, etc para maior facilidade de notação

As equações de movimento (3.7) e de continuidade (6.13) tornam-se simplesmente:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{onde } (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ct)) \quad (8.3)$$

Os elementos da matriz de tensão-energia estão definidos como funções das grandezas físicas que utilizamos para descrever o meio, portanto, a partir das equações de transformação para as grandezas densidade de momento e massa (§7) e para as componentes da tensão (§4), pode-se deduzir a lei de transformação de um referencial para outro da matriz. Seja então um referencial próprio S' (para o ponto P em questão, em um instante t). A matriz tensão-energia é escrita:

$$(T^{\alpha\beta})' = \begin{bmatrix} p'_{xx} & p'_{xy} & p'_{xz} & 0 \\ p'_{yx} & p'_{yy} & p'_{yz} & 0 \\ p'_{zx} & p'_{zy} & p'_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho' c^2 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Da mesma maneira forma, um observador no referencial S (de eixos paralelos à S') onde o ponto P do meio tem velocidade $v = v\hat{x}$, escreve para a matriz de tensão-energia:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \gamma^2(v)(p'_{xx} + p'_{vv}) & \gamma(v)p'_{xy} & \gamma(v)p'_{xz} & \gamma^2(v)\frac{v}{c}(p'_{c^2} + p'_{xx}) \\ \gamma(v)p'_{yx} & p'_{yy} & p'_{yz} & \gamma(v)p'_{yx}v/c \\ \gamma(v)p'_{zx} & p'_{zy} & p'_{zz} & \gamma(v)p'_{zx}v/c \\ \gamma^2(v)\frac{v}{c}(p'_{c^2} + p'_{xx}) & \gamma(v)p'_{xy}v/c & \gamma(v)p'_{xz}v/c & \gamma^2(v)(p'_{c^2} + p'_{xx}v^2/c^2) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

podendo (8.5) ser obtida substituindo nas equações (8.1) e (8.2) as equações de transformação (4.3) e (7.2) à (7.5). Por outro lado, verifica-se, por comparação com (8.5) e (8.4), que é válida a expressão

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} (T^{\mu\nu})' \quad (8.6)$$

onde, os coeficientes diferenciais em (8.6) (que são obtidos da transformação de Lorentz que liga S' e S) são diferentes de zero apenas em

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} &= \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \gamma(v) \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} &= \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} = \gamma(v)v/c \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} &= \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Dessa maneira, o arranjo matricial (8.1) (de componentes que têm o mesmo significado físico em todo referencial) se transforma como um tensor e define o tensor de tensão-energia.

As relações de vínculo encontradas no §7 (equação (7.2) à (7.5)) são obtidas por um observador inercial que estende uma malha-coordenada pelo espaço-tempo tal que o tensor métrico tenha a forma diagonal em todo evento (consideramos espaço-tempo plano). Entretanto as relações de vínculo encontradas pressupõem uma malha coordenada tal que o ponto do meio em estudo tenha velocidade na direção, digamos, do eixo espacial x . O problema considerado é a obtenção das condições de vínculo para um observador inercial que estende um sistema de coordenadas da classe que consideramos, e onde a velocidade do ponto do meio tem direção arbitrária.

Assim, tomemos os referenciais S (onde a velocidade do ponto tem direção genérica) e S'' (onde a velocidade tem a direção do eixo x''). As quatro equações (7.2) à (7.5) relacionam as grandezas ρ' , t'_{ij} e ρ'' , t''_{ij} que descrevem as condições do ponto do meio no evento considerado nos referenciais S' (próprio) e S'' . Substituindo ρ' (7.2) em (7.3) e substituindo t'_{ij} por t''_{ij} através das equações (4.3) obtêm-se as três equações abaixo que só envolvem grandezas em S'' :

$$g''_{xx} = \rho'' v + t''_{xx} v/c^2 \quad (9.1)$$

$$g''_{yy} = \gamma^2(v) t''_{yx} v/c^2 \quad (9.2)$$

$$g''_{zz} = \gamma^2(v) t''_{zx} v/c^2 \quad (9.3)$$

Através de uma rotação arbitrária, rígida e não envolvendo o tempo, obtém-se, a partir de S", um sistema de coordenadas onde a velocidade do ponto do meio tem direção arbitrária e a que denomina-se S. Seja então o referencial S que obtém-se de S" girando S" no ângulo θ_x em torno do eixo x", θ_y em torno do novo eixo y" e θ_z em torno do novo eixo z". Essas três rotações R_x, R_y, R_z compõem uma rotação arbitrária que liga S" e S e cuja representação na linguagem matricial é:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = [R_z R_y R_x] \begin{bmatrix} A''_x \\ A''_y \\ A''_z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} A_{x''} \\ A_{y''} \\ A_{z''} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

A relação inversa expressa as componentes S de um vetor em S" em termos das componentes deste vetor em S :

$$\begin{bmatrix} A_{x''} \\ A_{y''} \\ A_{z''} \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

A matriz $[R]$ é dada por:

$$[R] = [R_z] [R_y] [R_x] = \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & \sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z + \cos\theta_x \sin\theta_z & -\sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z + \sin\theta_x \sin\theta_z \\ \cos\theta_y \cos\theta_z & -\sin\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z + \cos\theta_x \cos\theta_z & \cos\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z + \sin\theta_x \cos\theta_z \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

e é tal que

$$(R^{-1})_{ij} = R_{ji} \quad (9.7)$$

Verifica-se, através de (9.4), que o vetor velocidade, que tem S'' as componentes $(v, 0, 0)$, apresenta em S as componentes:

$$\vec{v} = v \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z \\ -\cos \theta_y \sin \theta_z \\ \sin \theta_y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{em } S) \quad (9.8)$$

Uma última observação antes de se abordar o problema proposto nesse parágrafo: da mesma maneira que a lei de transformação das componentes de um tri-vetor entre dois referenciais S'' e S é expressa na notação matricial em (9.5), a lei de transformação para tensores de 2ª ordem se escreve:

$$\begin{bmatrix} t''_{xx} & t''_{xy} & t''_{xz} \\ t''_{yx} & t''_{yy} & t''_{yz} \\ t''_{zx} & t''_{zy} & t''_{zz} \end{bmatrix} = |R|^{-1} \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} |R| \quad (9.9)$$

Se, agora, escreve-se as equações (9.1), (9.2) e (9.3) substituindo cada componente de vetor ou tensor em S'' por seu valor em termos das suas componentes no referencial S de acordo com as equações (9.5) e (9.9), obtém-se as equações abaixo que só envolvem grandezas em S e os ângulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$:

$$R_{S1} g_S = \rho v + (R_{i1} R_{j1} t_{ij}) v/c^2 \quad (9.10)$$

$$R_{S2} g_S = \gamma^2(v) (R_{i2} R_{j1} t_{ij}) v/c^2 \quad (9.11)$$

$$R_{S3} g_S = \gamma^2(v) (R_{i3} R_{j1} t_{ij}) v/c^2 \quad (9.12)$$

Multiplicando cada uma das equações por v e usando a relação (9.8) obtêm-se:

$$v_S g_S = \rho v^2 + v_i v_j t_{ij} / c^2 \quad (9.13)$$

$$R_{S2} [v g_S - \gamma^2(v) v_j t_{Sj} v/c^2] = 0 \quad (9.14)$$

$$R_{S3} [v g_S - \gamma^2(v) v_j t_{Sj} v/c^2] = 0 \quad (9.15)$$

A equação (9.13) é a primeira das relações que buscamos. Chamando o termo que ocorre entre colchetes em (9.14) e (9.15) de α_S , reescreve-se essas equações como:

$$\begin{aligned} & \text{sen } \theta_x [\alpha_1 \text{sen } \theta_y \cos \theta_z - \alpha_2 \text{sen } \theta_y \text{sen } \theta_z - \alpha_3 \cos \theta_y] v + \\ & + \cos \theta_x [\alpha_1 \text{sen } \theta_z + \alpha_2 \cos \theta_z] v = 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\cos \theta_x [\alpha_1 \text{sen } \theta_z + \alpha_2 \cos \theta_z] v + \quad (9.17)$$

$$+ \text{sen } \theta_x [- \alpha_1 \text{sen } \theta_y \cos \theta_z + \alpha_2 \text{sen } \theta_y \text{sen } \theta_z + \alpha_3 \cos \theta_y] v = 0$$

Os termos entre colchetes nas equações (9.16) e (9.17) são nulos. Uma vez que essas equações devem ser válidas para todo θ_x (a equação (9.8) não envolve θ_x). Logo temos:

(9.18)

$$c^2 [v_x g_y - v_y g_x] - \gamma^2(v) [v_x v_j t_{yj} - v_y v_j t_{xj}] = 0$$

$$c^2 [g_x v_x v_y + g_y v_y v_z - g_z (v_x^2 + v_y^2)] - \quad (9.19)$$

$$- \gamma^2(v) v_j [t_{xj} v_x v_y + t_{yj} v_y v_z - t_{zj} (v_x^2 + v_y^2)] = 0$$

As equações (9.13) (9.18) e (9.19) foram obtidas a partir de (9.1) (9.2) e (9.3) de maneira tal que, se o observador em S'' permuta ciclicamente o nome de seus eixos coordenados cada uma das equações (9.18) e (9.19) dão origem a duas outras por permutação cíclica de índices: Temos portanto 7 equações (entre as quais a equação (9.13) simétrica nos índices x, y, z) e que podem ser consideradas como um sistema linear nas variáveis $\vec{g}$, ρ , t_{ij} . Se chamamos a equação (9.13) de "E", a equação (9.19) de $E(x, y, z)$, e as permutações cíclicas nos índices da equação (9.19) de $E(z \times y)$ e de $E(y \times z)$, podemos combinar essas quatro equações em três equações:

$$(1) \quad c^2 v_z E + E(x \times y \times z)$$

$$(2) \quad c^2 v_y E + E(y \times z \times x)$$

$$(3) \quad c^2 v_x E + E(z \times x \times y)$$

ou equivalentemente

$$g_j \cong \frac{\gamma^2(v)}{c^2} v_r t_{jr} - \frac{v_r v_j}{c^2} v_s t_{rs} + v_j \rho \quad (9.20)$$

O sistema de 7 equações lineares é portanto equivalente às equações (9.20) uma vez que as demais equações tornam-se identicamente nulas se se substitui nelas diretamente as expressões (9.20). Desta forma (9.20) expressa a condição de vínculo em um referencial inercial on de a velocidade do ponto do meio em consideração tem direção arbitrária.

§10. OBSERVAÇÕES FINAIS

A obtenção das equações de movimento, continuidade e das condições de vínculos que procuramos através do estabelecimento de algoritmos que definam os campos tri-vetoriais que descrevem o meio, não seguiu o argumento mais geral possível uma vez que duas hipóteses restritivas facilitaram nosso trabalho.

Em primeiro lugar, no parágrafo 7, admitimos "baixas compressões", o que nos permitiu definir relações de vínculo não totalmente gerais, mas independentes de parâmetros que descrevessem as características compressivas do meio.

Em segundo lugar, consideramos no parágrafo 1 a massa própria invariável nas equações de movimento de uma partícula o que provavelmente significa uma nova restrição à descrição do meio.

Assim, o tratamento considerado compreende os meios elásticos relativísticos de propriedades puramente mecânicas sob as restrições acima especificadas.

BIBLIOGRAFIA

- TOLAMN, R.C. - Relativity Thermodynamics and Cosmology
Oxford University Press 1934.
- MOLLER, C. - The theory of Relativity. Oxford University
Press (1952)
- ARZELIÉS, H. - Relativistic Kinematics Pergamon Press (1966)
- ARZELIÉS, H. - Relativistic Point Dynamics
- SYNGE, J.L. - Relativity: The Special Theory. North Holland
Publishing Company (1972)
- KOLSKY, H. - Stress waves in Solids - Dover Publications, Inc.
New York (1963)
- SOKOLNIKOFF - Análisis Tensorial - Editorial Limusa, México
(1976)
- ARZELIÉS, H. - Sur le problème Relativiste du levier Coudé,
Il Nuovo Cimento XXXV, N° 3 (1965)
- NEWBURG - The Relativistic Problem of the Right-Angled
Lever: The Correctness of the Laue Solution.
Il Nuovo Cimento LXI, N°2(1969)
- ARZELIÉS, H. - Sur le Probleme Relativiste du levier Coudé.
Il Nuovo Cimento XXXV, N°3 (1965)
- ARZELIÉS, H. - Sur la mécanique relativiste des milieux continus
Il Nuovo Cimento L, N° 2 (1967)