

**Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual de Campinas**

**Potenciais e Campos Elétricos Dentro e Fora de
Condutores Resistivos com Correntes
Constantes**

Tese de Doutorado

Aluno: Júlio Akashi Hernandez

Orientador: Prof. Dr. André Koch Torres de Assis

Tese submetida ao Instituto de Física Gleb Wataghin
da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos
requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências

*Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado defendida pelo aluno
Júlio Akashi Hernandez e aprovada pela
comissão julgadora.*

Campinas, 15/04/05

André Koch Torres de Assis

UNIDADE	IFGW
Nº CHAMADA	
	7/UNICAMP
	H43p
V	EX
TOMBO BC	64129
PROC.	16-P-00086-05
C	☐
	☒
PREÇO	11,00
DATA	01/06/05
Nº CPD	

IF 389

81810 - 351044

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

H43p

Hernandes, Júlio Akashi

Potenciais e campos elétricos dentro e fora de condutores resistivos com correntes constantes / Júlio Akashi Hernandez. -- Campinas, SP : [s.n.], 2005.

Orientador: André Koch Torres de Assis.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Eletromagnetismo. 2. Eletrodinâmica. 3. Campos elétricos. 4. Correntes contínuas. 5. Circuitos elétricos – Corrente contínua. 6. Funções harmônicas. I. Assis, André Koch Torres de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** Potentials and electric fields inside and outside resistive conductors carrying steady currents

- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**

1. Electromagnetism
2. Electrodynamics
3. Electric fields
4. Direct currents
5. Electric circuits – Direct current
6. Laplace's equations

- **Área de concentração:** Física

- **Titulação:** Doutor em ciências

- **Banca examinadora:**

Prof. Humberto de Menezes França

Prof. Edmundo Capelas de Oliveira

Prof. Roberto José Maria Covolan

Prof. Sérgio Gama

Prof. André Koch Torres de Assis

- **Data da defesa:** 28.02.2005



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE JÚLIO AKASHI HERNANDES – RA 950932 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 28 / 02 / 2005.

COMISSÃO JULGADORA:

André Koch Torres de Assis

Prof. Dr. André Koch Torres de Assis (Orientador do Candidato) –
DRCC/IFGW/UNICAMP

Humberto M. de Menezes França

Prof. Dr. Humberto de Menezes França – IF/USP

Edmundo Capelas de Oliveira

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira – IMECC/UNICAMP

Roberto José Maria Covolan

Prof. Dr. Roberto José Maria Covolan – DRCC/IFGW/UNICAMP

Sérgio Gama

Prof. Dr. Sérgio Gama – DFA/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. André Koch Torres de Assis pela orientação e estímulo constante ao longo dos últimos anos. Minha formação científica vem impregnada de seu profundo saber nesta área que tanto prezo, a física.

À minha esposa, Giovana Trevisan Nogueira, que me acompanhou em todos os momentos, e cuja assistência foi inestimável.

Aos meus pais, José Hernandes e Izaura Mieko Akashi Hernandes, que sempre me apoiaram nas minhas decisões.

Aos Profs. Drs. Edmundo Capelas de Oliveira, John David Jackson, Mark A. Heald, David Bartlett, Steve Hutcheon, Roberto Antonio Clemente, Márcio Menon, Antonio Manoel Mansanares, Humberto de Menezes França, Roberto José Maria Covolan, Sérgio Gama, Haroldo Fraga de Campos Velho, e à Regina Fonseca Avila.

À Faep por apoio financeiro relacionado ao projeto.

Ao CNPq por uma bolsa de doutorado durante o desenvolvimento destes trabalhos.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	vi
Lista de Figuras	vii
1 Introdução Geral	1
1.1 Introdução	1
1.2 Cargas superficiais e correntes constantes	3
1.3 Resultados experimentais	5
I Condutores Retos	14
2 Fio Reto Longo de Seção Reta Circular	16
2.1 Resultados conhecidos na literatura	16
2.2 Efeito Hall radial	18
2.3 Comparação com os resultados experimentais	19
3 Carga Puntual Próxima de um Condutor Cilíndrico Sem Corrente	23
3.1 Introdução	23
3.2 Cilindro condutor finito com carga puntual dentro dele	23
3.2.1 Cilindro finito (com carga dentro) mantido a um potencial nulo	25
3.3 Cilindro condutor infinito com carga puntual dentro dele	26
3.3.1 Cilindro infinito (com carga dentro) mantido a um potencial nulo	26
3.4 Cilindro condutor infinito com carga puntual fora dele	28
3.4.1 Cilindro infinito (com carga fora) mantido a um potencial nulo	29
3.4.2 Cilindro infinito fino (com carga fora) mantido a um potencial nulo	32
3.4.3 Cilindro infinito mantido a um potencial constante qualquer	33
3.5 Discussão	35
3.6 Comparação com as experiências de Sansbury, Bartlett e Maglic	37
4 Fio Cilíndrico com Bateria	39
4.1 Introdução	39
4.2 Solução eletrostática da casca cilíndrica com suas duas metades mantidas em potenciais constantes e opostos	41
4.3 Solução para a casca cilíndrica com corrente estacionária e bateria	42
4.4 Discussão	44
5 Placas Condutoras	47
5.1 Solução conhecida na literatura	47

6 Placas com Bateria	50
6.1 Introdução	50
6.2 Descrição do problema	50
6.3 Solução eletrostática de placas mantidas a potenciais constantes	52
6.4 Solução de placas com corrente estacionária e bateria	53
6.5 Discussão	57
7 Fita Reta	59
7.1 Introdução	59
7.2 Descrição do problema	59
7.3 Solução	60
7.4 Fita carregada mas sem corrente	62
7.5 Análise da fita com corrente estacionária	63
7.6 Comparação com os resultados experimentais	64
 II Condutores Curvos	 68
8 Circuito Azimutal	70
8.1 Solução conhecida na literatura	70
9 Casca Esférica Resistiva Transportando Corrente Azimutal Constante	73
9.1 Introdução	73
9.2 Descrição do problema	73
9.3 Solução geral	74
9.4 Campo elétrico e cargas superficiais	76
9.5 Conclusão	82
10 Condutor Toroidal	83
10.1 Introdução	83
10.2 Descrição do problema	83
10.3 Solução geral	86
10.4 Solução particular para corrente constante	86
10.5 Casos particulares do potencial	90
10.6 Campo elétrico e cargas superficiais	92
10.7 Aproximação de toróide fino	92
10.8 Comparação do toróide fino com fio cilíndrico com corrente	96
10.9 Condutor carregado sem corrente	96
10.10 Comparação com os resultados experimentais	99
 III Conclusão	 103
A Cálculo da Integral da Eq. (4.11)	107
B Cálculo da integral da Eq. (6.10)	109
 Referências Bibliográficas	 111

Resumo

No Capítulo 1 apresentamos uma introdução sobre os campos elétricos dentro e fora de condutores resistivos com corrente constante. Discutimos também a distribuição de cargas superficiais que mantêm a corrente fluindo e sua relação com estes campos elétricos. São apresentados alguns experimentos relacionados com estes campos elétricos fora de condutores com corrente constante.

A Parte I deste trabalho trata de condutores retos e compridos. No Capítulo 2 apresentamos o tratamento de um fio cilíndrico longo de seção reta circular conduzindo uma corrente estacionária, já conhecido na literatura. São apresentados alguns dos métodos que seguimos nos tratamentos dos problemas apresentados a seguir. O Capítulo 3 trata da força entre uma casca cilíndrica condutora infinita sem corrente e uma carga pontual próxima (dentro ou fora da casca), cuja solução é inédita na literatura. Esta força de ordem zero (eletrostática) complementa a análise da força de primeira ordem (ou seja, proporcional à corrente ou à velocidade dos elétrons de condução) no caso do fio cilíndrico longo com corrente constante. No Capítulo 4 tratamos o problema inédito de um fio cilíndrico longo, ainda conduzindo uma corrente estacionária, mas agora com uma bateria colocada no centro. Nosso objetivo aqui é estudar o comportamento dos campos e das cargas superficiais próximas à bateria. O Capítulo 5 apresenta o problema conhecido na literatura de placas retas conduzindo correntes estacionárias. Este problema foi tratado por este mesmo autor durante sua dissertação de mestrado. O comportamento dos campos e das cargas superficiais próximas a uma bateria no problema de condutores em forma de placas é abordado no Capítulo 6. Este também é um problema inédito na literatura, análogo ao problema tratado no Capítulo 4. No Capítulo 7 generalizamos o problema das placas com corrente constante utilizando agora uma fita de largura finita. Para resolver este problema inédito utilizamos coordenadas elíptico-cilíndricas. Com este caso encerramos nosso tratamento de problemas onde os condutores são retos e compridos, conduzindo correntes na direção longitudinal.

Na Parte II tratamos de condutores curvos conduzindo correntes constantes na direção azimutal. Estes problemas são importantes porque representam uma classe de circuitos elétricos em que a corrente percorre um caminho fechado finito. O Capítulo 8 apresenta o problema conhecido na literatura de uma casca cilíndrica condutora de comprimento infinito conduzindo uma corrente estacionária na direção azimutal. Há uma bateria em forma de linha, paralela ao eixo da casca. Esta geometria tem solução bastante simples com forma analítica fechada para o potencial, para o campo elétrico e para as cargas superficiais, embora o cilindro tenha comprimento infinito. O Capítulo 9 apresenta o tratamento inédito para uma casca esférica resistiva conduzindo uma corrente estacionária. Neste caso, a bateria tem a forma de um segmento de linha (um meridiano da esfera). O problema mais complexo de um toróide condutor conduzindo uma corrente constante na direção azimutal, também novo na literatura, é apresentado no Capítulo 10. Estes dois problemas, da casca esférica e do toróide, representam duas situações onde não há infinitos na geometria nem na condutividade, sendo que a corrente está confinada em um espaço finito. Mesmo a bateria está incluída no sistema, de modo que se obtém naturalmente o comportamento esperado dos campos e das cargas superficiais próximas a ela.

Na Parte III fazemos uma discussão sobre os problemas tratados. Demonstramos que para todos os casos analisados existe um campo elétrico fora dos condutores com corrente constante e obtemos sua expressão analítica. Os comportamentos em todos os casos em que a bateria

está presente foram encontrados de acordo com o esperado. As comparações que fizemos com experimentos da literatura mostraram que nossos resultados teóricos são razoáveis e coerentes.

Abstract

In Chapter 1 we present an introduction about the electric field inside and outside resistive conductors carrying steady currents. We also discuss the distribution of surface charges that maintains the current flow and its relation with these electric fields. We present some experiments related with these electric fields outside conductors with steady current.

Part I of this work deals with long straight conductors. In Chapter 2 we present the treatment of a long cylindrical wire of circular cross section conducting a steady current, already known in the literature. We present some of the methods that we employ in the problems that follow. Chapter 3 deals with the force between an infinite cylindrical conducting shell without current and a point charge close by (inside or outside the shell). This solution is new in the literature. This force of zeroth order (electrostatics) complements the analysis of the first order force (i.e., proportional to the current or to the drifting velocity of the conduction electrons) in the case of the long cylindrical wire with steady current. Chapter 4 deals with the new problem of a long straight wire, still with a steady current, but now with a battery in the middle. Our objective here is to study the behaviour of the fields and of the surface charges near the battery. Chapter 5 presents the known problem of straight plates conducting steady currents. This problem was dealt with by the present author during his Master's Degree. The behaviour of the fields and of the surface charges near the battery in the problem of conductors in the shape of plates is approached in Chapter 6. This is also a new problem in the literature, analogous to the problem treated in Chapter 4. In Chapter 7 we generalize the problem of plates with steady currents utilizing now a strip of finite width. To solve this new problem we utilize elliptic-cylindrical coordinates. With this case we finish our treatment of problems of long and straight conductors, carrying currents in the longitudinal direction.

In Part II we treat curved conductors with steady currents in the azimuthal direction. These problems are important because they represent a class of electric circuits in which the current flows over a closed finite path. Chapter 8 presents the known problem of a conducting cylindrical shell of infinite length carrying a steady current in the azimuthal direction. There is a battery in the shape of a line, parallel to the axis of the shell. This geometry yields a very simple solution with a closed analytical form for the potential, electric field and surface charges, although the cylinder has an infinite length. Chapter 9 presents the new treatment of a resistive spherical shell with a steady current. In this case, the battery has the shape of a segment of line (a meridian of the sphere). The more complex problem of a conducting toroid with a steady current in the azimuthal direction, also new in the literature, is presented in Chapter 10. These two problems, about the spherical shell and the toroid, represent two situations where there are no infinities in the geometry nor in the conductivity, while the current is confined in a finite space. Even the battery is included in the system, so that we obtain naturally the expected behaviour of the fields and of the surface charges near the battery.

In Part III we present a discussion of the problems treated here. We demonstrate that for all the analysed cases there is an electric field outside the conductors with steady currents and we obtain their expressions analytically. The behaviours of all cases in which the battery was present were found according to our expectations. The comparisons that we made with experiments of the literature showed that our theoretical results are reasonable and coherent.

Lista de Figuras

1.1	Uma bateria suprindo uma tensão V entre os terminais de um fio gera uma corrente estacionária I . Existe força entre o circuito e uma carga estacionária q localizada fora do fio?	2
1.2	O campo elétrico no ponto C aponta ao longo da direção x na figura à esquerda. Entortando o fio como na figura à direita, o campo elétrico em C passa a apontar na direção y . Entretanto, as direções e intensidades dos campos elétricos em A , B , D e E não mudam.	3
1.3	Distribuição qualitativa de cargas ao longo da superfície de um fio resistivo conduzindo uma corrente estacionária em duas geometrias.	4
1.4	Representação qualitativa das cargas superficiais (à esquerda) e do campo elétrico interno e externo (à direita) no caso de um anel resistivo conduzindo uma corrente estacionária.	5
1.5	Mapeamento experimental das linhas de campo elétrico fora de um condutor resistivo retilíneo transportando uma corrente constante (faixa preta central). A semolina espalhada em óleo se polariza na presença do campo elétrico e se alinha com ele.	6
1.6	À esquerda: Experiência similar à mostrada na Figura 1.5, agora para uma linha de transmissão. À direita: Linhas de campo elétrico num plano perpendicular aos fios e ao plano formado pela linha de transmissão.	6
1.7	Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico no circuito formado por uma fita condutora reta, [Jef62]. A corrente flui horizontalmente. As partes em cinza mostram a tinta condutora resistiva e as partes em preto mostram a tinta sem resistência (na verdade, com resistência muito menor que a tinta em cor cinza). As sementes de grama se polarizam na presença do campo elétrico e se alinham com ele.	7
1.8	Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico nas duas fitas bidimensionais conduzindo correntes em direções opostas, [Jef62] e [Jef89, Placa 6].	7
1.9	Neste experimento de Jefimenko, o condutor inferior (na cor preta) tem uma resistividade muito menor do que o condutor superior (na cor cinza claro), [Jef62].	8
1.10	Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico dentro e em volta do circuito circular conduzindo corrente constante, [Jef62].	8
1.11	Linhas equipotenciais obtidas experimentalmente em uma câmara retangular oca conduzindo uma corrente uniforme, [JBK62].	8
1.12	Geometria do experimento de Sansbury. A chapa metálica 5 está na extremidade da balança de torção 2 e é carregada com o gerador de tensão 4. O condutor 6 transporta uma corrente constante ao ser ligado à fonte de corrente 9.	9
1.13	No início não existe corrente no condutor e a chapa de prata descarregada permanece em a . Depois de carregada, a chapa de prata se move de a para b . Então uma corrente estacionária I passa através do condutor. Neste caso aparece uma força extra de atração ou repulsão entre a chapa carregada e o condutor em forma de U	10

1.14	Geometria do experimento de Bartlett. A chapa metálica está na extremidade da balança de torção (fio que entra por cima da lata de alumínio) e é carregada com o gerador de alta tensão HV. A bateria no canto inferior esquerdo mantém uma corrente de 50 A que flui pela bobina retangular que está dentro da lata de alumínio.	11
1.15	Vista superior do esquema experimental. Flui uma corrente de 50 A pelas 16 voltas da bobina retangular (na figura acima são visíveis apenas 4 voltas da bobina). A chapa carregada gira a balança de torção de um ângulo θ quando circula uma corrente constante na bobina.	11
1.16	Força eletrostática entre duas cargas longe de outras cargas e condutores.	12
1.17	Forças eletrostáticas sobre q_1 devido a q_2 , devido à carga imagem q_{i1} e devido à carga imagem q_{i2}	12
2.1	Um circuito quadrado fechado composto por um fio resistivo de seção reta com formato circular. Há uma carga q próxima do centro de um de seus lados. Uma bateria mantém uma diferença de potencial V , fazendo fluir uma corrente estacionária I	16
2.2	Fio reto de comprimento ℓ e raio $a \ll \ell$ conduzindo uma corrente estacionária I ao longo do eixo z . Uma carga teste q colocada em (ρ, z) mapeia a força em torno do condutor.	17
2.3	Linhas equipotenciais encontradas por Assis, Rodrigues e Mania para o problema do fio reto, [ARM99]. A figura representa um plano que corta o fio em duas metades longitudinalmente.	18
2.4	Linhas de campo elétrico encontradas por Assis, Rodrigues e Mania para o problema do fio reto, [ARM99].	18
2.5	Linhas equipotenciais teóricas sobrepostas à figura experimental obtida por Jefimenko, Barnett e Kelly, Figura 1.11.	21
2.6	Linhas equipotenciais teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico obtidas por Bergmann e Schaefer.	21
2.7	Linhas equipotenciais teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico experimentais obtidas por Jefimenko.	21
2.8	Linhas de campo elétrico teóricas sobrepostas às linhas equipotenciais experimentais obtidas por Jefimenko, Barnett e Kelly.	22
2.9	Linhas de campo elétrico teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico experimentais obtidas por Bergmann e Schaefer.	22
2.10	Linhas de campo elétrico teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico experimentais obtidas por Jefimenko.	22
3.1	Casca cilíndrica oca, condutora e finita, de comprimento ℓ e raio a centrada em $z = \ell/2$, com z sendo seu eixo de simetria. A casca é tampada em $z = 0$ e em $z = \ell$ por condutores. Existe uma carga puntual q localizada em $(\rho, \varphi, z) = (\rho' < a, \varphi', 0 < z' < \ell)$	24
3.2	Força F entre um cilindro condutor infinito e aterrado, de raio a com eixo de simetria ao longo do eixo z e uma carga puntual q a uma distância $\rho' < a$ do eixo z , normalizada por $F_0 = q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$	27
3.3	Força F entre um cilindro condutor infinito e aterrado, de raio a cujo eixo de simetria está ao longo do eixo z e uma carga puntual q a uma distância ρ' do eixo z , normalizada por $F_0 = q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. Para $\rho' < a$ a força vem da Eq. (3.24), enquanto que para $\rho' > a$ ela é dada pela Eq. (3.44).	30
3.4	Densidade linear de carga induzida no cilindro condutor infinito, λ , com uma carga puntual fora dele, Eq. (3.46), como função de z/a . Utilizamos $z' = 0$, $\rho'/a = 2$ e normalizamos por q/ρ'	31
3.5	Densidade linear de carga induzida máxima, $\lambda_{\text{máx}}(z = z')$, no cilindro condutor infinito com uma carga puntual fora dele, Eq. (3.46), como função de ρ'/a . Normalizamos o gráfico por q/ρ'	31

3.6	Parâmetro adimensional α_L dado pela Eq. (3.73) como função de a/ρ' . A linha contínua representa o parâmetro advindo da Eq. (3.74); a linha com traços juntos representa o parâmetro da Eq. (3.75); e a linha com traços espaçados representa o parâmetro da Eq. (3.76).	35
3.7	Parâmetro adimensional α_L dado pela Eq. (3.73) como função de a/ρ' , para a região $a/\rho' \ll 1$. A linha contínua representa o parâmetro advindo da Eq. (3.74); a linha com traços juntos representa o parâmetro da Eq. (3.75); e a linha com traços espaçados (que neste intervalo de a/ρ' está sobreposta à linha contínua) representa o parâmetro da Eq. (3.76).	36
3.8	Parâmetro adimensional α_E dado pela Eq. (3.78) como função de a/ρ' (linha grossa contínua). Este gráfico está sobreposto à Figura 3.6.	37
4.1	Uma casca cilíndrica resistiva de raio a e comprimento $\ell \gg a$ conduzindo uma corrente estacionária ao longo do eixo z . Existe uma bateria em forma de círculo centrada em $z = 0$ mantendo uma diferença de potencial de $2\phi_0$ em $z = 0$	39
4.2	Potencial ao longo da casca cilíndrica.	40
4.3	O potencial da Figura 4.2 pode ser decomposto em duas partes: a casca mantida em potenciais constantes mas descontínuos (linhas tracejadas) e a casca com um potencial contínuo variando linearmente com a coordenada longitudinal (linha contínua).	41
4.4	Equipotenciais de uma casca cilíndrica oca e resistiva próximas a $z = 0$. Este é um gráfico das Eqs. (4.16) e (4.17) com $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell/a = 10$. Existe uma corrente estacionária fluindo ao longo da direção positiva do eixo z , sendo a bateria idealizada como um anel de raio a localizada em $z = 0$	43
4.5	Densidades superficiais de carga como função da coordenada longitudinal z para uma casca cilíndrica resistiva e oca conduzindo uma corrente estacionária. A linha tracejada (contínua) é a densidade superficial de carga interna (externa) normalizada. Ambas as densidades estão normalizadas pela densidade interna ($\rho = a^-$) em $z = a$	44
5.1	Uma placa resistiva no plano $x = 0$ com uma densidade superficial de corrente constante e uniforme $\vec{K}$ ao longo da direção positiva de z	48
5.2	Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para uma placa condutora com corrente constante.	48
5.3	À esquerda: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para duas placas paralelas ortogonais ao plano desta figura conduzindo corrente na mesma direção z . As placas estão localizadas em $y/\ell_z = \pm 1/12 = \pm 0,0833$. À direita: Reprodução da Figura 1.7.	48
5.4	À esquerda: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para quatro placas paralelas ortogonais ao plano desta figura conduzindo correntes em direções opostas. As duas placas superiores (inferiores) transportam correntes na direção $+z$ ($-z$). As placas com mesma resistividade estão localizadas em $y/\ell_z = \pm 1/6 = \pm 0,167$ e $y/\ell_z = \pm 1/3 = \pm 0,333$. À direita: Reprodução da Figura 1.8.	49
5.5	À esquerda: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para quatro placas paralelas ortogonais ao plano desta figura conduzindo correntes em direções opostas. Foi feita uma modelagem teórica na qual as placas inferiores foram tratadas como supercondutoras. As duas placas superiores (inferiores) transportam correntes na direção $+z$ ($-z$). As placas estão localizadas em $y/\ell_z = \pm 1/6 = \pm 0,167$ e $y/\ell_z = \pm 1/3 = \pm 0,333$. À direita: Reprodução da Figura 1.9.	49
6.1	Uma placa conduz uma corrente constante uniforme I na direção z . Existe uma bateria em forma de linha ao longo de $z = 0$	50

6.2	Duas grandes placas paralelas resistivas localizadas nos planos $x = a$ e $x = -a$. As duas transportam correntes constantes na mesma direção, $+\hat{z}$. Há uma bateria linear em cada placa, localizada em $z = 0$, fornecendo uma diferença de potencial $2\phi_0$ entre $z \rightarrow 0^-$ e $z \rightarrow 0^+$	51
6.3	Potencial ao longo das placas. A descontinuidade do potencial e, $z = 0$ se deve à presença da bateria.	52
6.4	O potencial da Figura 6.3 pode ser decomposto em duas partes. (a) As placas mantidas a potenciais constantes $-\phi_0$ para $z < 0$ e $+\phi_0$ para $z > 0$, linhas tracejadas. (b) As placas com um potencial contínuo variando linearmente com a coordenada longitudinal z , linha contínua.	52
6.5	Equipotenciais (linhas contínuas) e linhas de campo elétrico (linhas tracejadas) para duas placas resistivas paralelas localizadas nos planos $x = \pm a$ e transportando correntes constantes na direção $+\hat{z}$. Há uma bateria linear em $z = 0$ nas duas placas. Este é um gráfico das Eqs. (6.14), (6.15), (6.18) and (6.19) com $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell_y/\ell_z = \ell_z/2a = 10$	55
6.6	Distribuições de carga superficiais normalizadas, como função da coordenada longitudinal z para duas placas resistivas transportando correntes constantes na mesma direção $+\hat{z}$. As distribuições de carga superficiais internas dadas pelas Eqs. (6.20) e (6.22) são representadas pelas linhas contínuas. Já as distribuições externas dadas pelas Eqs. (6.21) e (6.23) são representadas pelas linhas tracejadas. A densidade de carga superficial interna (externa) está normalizada pela densidade de carga superficial interna (externa) em $z = a$. Utilizamos $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell_z/2a = 10$	56
6.7	Distribuições de carga superficial externa ($x \rightarrow a^+$, linhas contínuas) e interna ($x \rightarrow a^-$, linhas tracejadas). As duas distribuições foram normalizadas pela densidade de carga superficial interna ($x \rightarrow a^-$) em $z = a$. Utilizamos $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell_z/2a = 10$	56
6.8	Equipotenciais (linhas contínuas) e linhas de campo elétrico (linhas tracejadas) de uma única placa resistiva localizada no plano $x = 0$ e transportando uma corrente constante na direção $+\hat{z}$. Há uma linha de bateria em $z = 0$ mantendo uma diferença de potencial $2\phi_0$ em $z \rightarrow 0^-$ e $z \rightarrow 0^+$. Utilizamos $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$	57
7.1	Uma corrente constante I flui ao longo da direção z de uma fita reta e longa de comprimento 2ℓ e largura $2a$ localizada no plano $x = 0$, com uma densidade superficial de corrente $\vec{K} = I\hat{z}/2a$	60
7.2	Coordenadas elíptico-cilíndricas (ζ, ϑ, z) , [MS88, pág. 17].	60
7.3	A força magnética $\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$ direcionada ao centro da fita, agindo sobre um elétron de condução que se desloca com velocidade de deriva v_d . Esta força é devida ao campo magnético $\vec{B}$ gerado pela corrente elétrica I fluindo ao longo da direção z	64
7.4	Linhas equipotenciais (tracejadas) e linhas de campo elétrico (contínuas) no plano $y = 0$. A linha horizontal grossa representa a interseção com o plano da fita. Usamos os valores $A_2/A_1 = 3,6$ e $A_4/A_4 = 0$	65
7.5	Linhas equipotenciais (tracejadas) e linhas de campo elétrico (contínuas) no plano $x = 0$. As linhas horizontais grossas representam as extremidades da fita em $y/a = 1$ e $y/a = -1$. Usamos $A_2/A_1 = 3,6$ e $A_4/A_4 = 0$	66
7.6	Linhas de campo elétrico da Figura 7.5 sobrepostas na Figura 1.7.	66
7.7	Linhas equipotenciais no plano $x = 0$ sobrepostas à Figura 1.11. Usamos $A_2/A_1 = 3,0$ e $A_4/A_3 = 0$	67
8.1	Geometria do problema considerado por Heald. Há uma densidade de corrente superficial K fluindo uniformemente na direção azimutal sobre a superfície do cilindro.	70
8.2	Resultado teórico encontrado por Heald para as linhas equipotenciais no circuito azimutal.	71
8.3	Resultado teórico encontrado por Heald para as linhas de campo elétrico no circuito azimutal.	72

8.4	Resultado teórico encontrado por Heald para a distribuição superficial de carga total.	72
9.1	Uma casca esférica resistiva de raio a está centrada na origem. Uma bateria linear idealizada, localizada em $(r, \theta, \varphi) = (a, \theta, \pi)$ mantém uma corrente estacionária I fluindo ao longo da superfície da casca na direção azimutal. A linha escura representa a bateria semi-circular.	74
9.2	Geometria da casca esférica resistiva com raio a projetada no plano $z = 0$. Note que a bateria, representada pela linha escura, é vista como uma linha reta para $-a \leq x \leq 0$	74
9.3	Equipotenciais no plano $z = 0$. A casca esférica resistiva conduz uma corrente estacionária no sentido horário. A circunferência escura representa a casca. A projeção da bateria é representada pela linha reta escura que vai de $x = -a$ para $x = 0$. O campo elétrico não tem componente z , de modo que as linhas de campo elétrico são ortogonais às equipotenciais neste plano.	79
9.4	Equipotenciais no plano $x = 0$ da casca esférica com $\phi_A = 0$. A circunferência escura representa a casca. A corrente entra no plano do papel no lado esquerdo da circunferência e sai do papel no lado direito.	79
9.5	Densidade superficial total de carga $\sigma_t(\varphi)$ como função do ângulo azimutal φ no plano equatorial $z = 0$ de uma casca esférica resistiva conduzindo uma corrente azimutal estacionária, normalizada pelo seu valor em $\varphi = \pi/4$ rad. Utilizamos as Eqs. (9.29) e (9.30) com a somatória em p indo de $p = 1$ a $p = 100$	80
9.6	Densidade superficial total de carga σ_t de uma casca cilíndrica resistiva e infinita conduzindo uma corrente azimutal estacionária, como função do ângulo φ , Eq. (8.7). A linha escura é um gráfico da forma fechada da solução de $\sigma_t(\varphi)$, Eq. (9.31), enquanto que a linha oscilatória é um gráfico de $\sigma_t(\varphi)$ expresso na forma de série de Fourier, Eq. (9.32).	81
9.7	Densidade superficial total de carga dada pela Eq. (8.7). A somatória que aparece como uma oscilação na Figura 9.6, dada pela Eq. (9.32), está suavizada tomando o valor médio de cada ponto em suas vizinhanças (neste caso, utilizamos uma oscilação inteira em torno de cada ponto), utilizando a Eq. (9.33). A forma analítica fechada, Eq. (9.31), está sobreposta a ela. Os gráficos coincidem entre si, indicando que este procedimento de tomar a média está correto.	81
9.8	Gráfico suavizado da Figura 9.5.	81
10.1	Um condutor toroidal uniformemente resistivo com eixo de simetria em z , raio menor r_0 e raio maior R_0 . Uma bateria fina está localizada em $\varphi = \pi$ rad mantendo potenciais constantes (representados pelos sinais “+” e “-”) em suas extremidades.	84
10.2	Os dois casos considerados aqui: (a) um condutor sólido cheio, com uma densidade de corrente volumétrica $\vec{J}$ em sua seção reta; (b) um condutor oco, com uma densidade de corrente superficial $\vec{K}$ fluindo através do perímetro $2\pi r_0$ de sua seção reta.	84
10.3	Coordenadas toroidais (η, χ, φ) , [MS88, pág. 113].	85
10.4	Expansão de Fourier do potencial ao longo da superfície condutora como função do ângulo azimutal φ expresso em radianos.	87
10.5	Equipotenciais no plano $z = 0$ para um condutor toroidal cheio. A bateria está localizada à esquerda ($\varphi = \pi$ rad). Usamos $R_0 = 1$ e $\eta_0 = 2,187$	89
10.6	Equipotenciais no plano $x = 0$ de um condutor toroidal cheio com corrente. As linhas tracejadas representam a superfície do condutor. Usamos $R_0 = 1$ e $\eta_0 = 2,187$	90
10.7	Densidade de cargas σ como função do ângulo azimutal φ no caso de um toróide resistivo fino conduzindo uma corrente estacionária dado pela Eq. (10.67). Utilizamos $\eta_0 = 10$	94

10.8	Linhas equipotenciais no plano $x = 0$ (perpendicular ao toróide) para um anel fino carregado e sem corrente. As Eqs. (10.90) e (10.95) coincidem entre si. Utilizamos $\eta_0 = 38$ ($\cosh \eta_0 = 1,6 \times 10^{16}$). Perceba a diferença entre esta Figura e a Figura 10.6: os lados à esquerda e à direita do condutor têm o mesmo sinal de cargas, enquanto que na Figura 10.6 eles têm sinais opostos.	98
10.9	O potencial normalizado como função de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distância do eixo z) no plano $z = 0$. As Eqs. (10.89) e (10.95) dão o mesmo resultado. Utilizamos $\eta_0 = 38$ ($\cosh \eta_0 = 1,6 \times 10^{16}$).	99
10.10	Experimento de Jefimenko [Jef62] no qual linhas de campo elétrico foram mapeadas usando sementes de grama espalhadas sobre uma placa de vidro. Existe uma fita circular condutora conduzindo uma corrente constante. A Figura 10.5 foi sobreposta a ela – as linhas equipotenciais são normais às linhas de campo elétrico.	99
10.11	Representação em série de Fourier do potencial dado pelas Eqs. (10.96) e (10.97). Este potencial representa mais fielmente a experiência de Jefimenko, [Jef62, Figura 3], do que o potencial descontínuo da Eq. (10.12). Usamos $\varphi_i = 9\pi/10$ rad = 2,83 rad e $\varphi_j = 17\pi/18$ rad = 2,97 rad.	100
10.12	Linhas equipotenciais teóricas obtidas quando a condição de contorno é dada pela Eq. (10.96).	101
10.13	Figura experimental de Jefimenko para uma fita circular bidimensional, Figura 1.10, conduzindo uma corrente constante, com a Figura 10.12 sobreposta a ela. As equipotenciais são normais às linhas de campo elétrico.	101
A.1	Contorno no qual se calcula a integral da Eq. (4.11) para $z > 0$. Para $z < 0$ escolhemos um contorno simetricamente refletida no eixo horizontal (eixo real de k).	107
B.1	Contorno para calcular a integral da Eq. (6.10), para $s > 0$. Aqui usamos s real em vez da variável longitudinal z real para evitar confusões com a variável complexa $z = x + iy$. Para $s < 0$ escolhemos um contorno simétrico refletido no eixo horizontal (s real). . . .	110

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Introdução

Neste trabalho abordamos o problema de condutores resistivos conduzindo correntes constantes. Mais especificamente, abordamos o campo elétrico que existe fora destes condutores devido à corrente. Este campo elétrico é proporcional à corrente no condutor. Portanto, é de primeira ordem em v_d/c , onde v_d é a velocidade de deriva dos elétrons que participam da corrente (velocidade média de deslocamento dos portadores de carga) e c é a velocidade da luz no vácuo. Recentemente tem havido interesse renovado no estudo deste campo elétrico, [Hea84, AHR92, Sin93, Jac96, AM99, AC00, Pre00, FdF03].

No nosso mestrado estudamos o problema de placas condutoras sem espessura conduzindo correntes constantes [AH99, AHL01, Her01]. Iniciamos o estudo de uma placa, com uma distribuição de cargas superficiais (linear com a direção da corrente). Por integração, encontramos o potencial fora da placa, próximo ao seu centro. Este procedimento está descrito em mais detalhes no Capítulo 2. Fizemos um estudo do comportamento do potencial a partir da contribuição de duas placas paralelas, separadas por uma distância a , conduzindo correntes na mesma direção e na direção oposta. Quando as placas conduzem corrente na mesma direção, elas se comportam, para a solução do potencial, como se fossem uma única placa grossa (de espessura a) conduzindo uma corrente constante. Tanto esta placa grossa quanto a composição de quatro placas sem espessura (ou, analogamente, duas placas grossas), conduzindo uma corrente estacionária em direções opostas, permitiram fazer comparações com experimentos na literatura. Os resultados deste trabalho estão apresentados no Capítulo 5.

Apresentamos a seguir algumas considerações sobre a natureza do campo elétrico fora de condutores com correntes constantes.

Considere a Fig. 1.1. Entendemos que se colocarmos uma carga teste livre parada próxima a um condutor inicialmente neutro, essa carga induzirá neste uma distribuição de carga em sua superfície. Este fenômeno é conhecido como indução eletrostática. O aparecimento destas cargas faz com que surja uma força de atração entre a carga livre e o condutor. Esta força não depende da velocidade ou aceleração entre a carga e o condutor, apenas de sua distância, do valor absoluto da carga e da geometria do condutor. Por este motivo este tipo de força é conhecido como de ordem zero em v_d/c . Se, além disso, houver uma corrente fluindo no condutor, haverá outras forças agindo nesta carga livre? Se a carga teste está parada, o campo magnético não exerce forças. Neste trabalho mostramos que existe outra força, de natureza elétrica e proporcional à corrente no condutor, que age na carga livre parada.

Livros-textos atuais apresentam declarações no sentido de que não existe este campo elétrico de primeira ordem fora de condutores com corrente constante, além de afirmar que o interior deste fio é neutro em todos os pontos. Podemos citar como exemplo [RMC82, pág. 142–143]:

Consideremos uma amostra condutora que obedece à lei de Ohm, na forma de um fio reto de

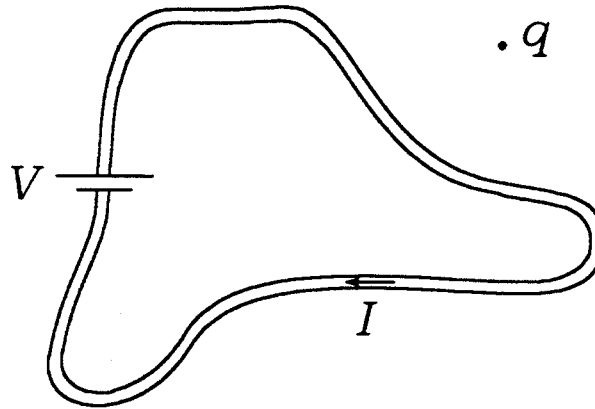


Figura 1.1: Uma bateria suprindo uma tensão V entre os terminais de um fio gera uma corrente estacionária I . Existe força entre o circuito e uma carga estacionária q localizada fora do fio?

seção reta uniforme cujas extremidades são mantidas a uma diferença de potencial constante $\Delta\phi$. Supõe-se que o fio seja homogêneo e caracterizado pela constante de condutividade g . Nestas condições, existirá um campo elétrico no fio, relacionado com $\Delta\phi$ através da relação:

$$\Delta\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

É claro que não pode haver componente, em estado estacionário de campo elétrico, perpendicular ao eixo do fio já que, pela Eq. (7-10) [$\vec{J} = g\vec{E}$], isto produziria uma carga contínua da superfície do fio. Dessa forma, o campo elétrico é puramente longitudinal.

Aqui mostramos que existe uma distribuição de cargas ao longo da superfície do condutor e são estas cargas que geram o campo elétrico que mantém a corrente fluindo. São estas cargas que geram também um campo elétrico não nulo fora do condutor. Além disso deve haver no interior do fio um campo elétrico perpendicular ao seu eixo, $\vec{E}_\perp$, de modo que haverá uma força elétrica $q\vec{E}_\perp$ atuando sobre os elétrons de condução que cancelará a força magnética $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ devida ao campo magnético azimutal gerado pela corrente, como discutiremos na Seção 2.2.

Outro exemplo é [EKL76], onde até mesmo o efeito de ordem zero é suposto nulo:

Há muito se sabe que as forças de ordem zero e de primeira ordem em um objeto carregado, próximo a um condutor neutro com corrente constante, parado no laboratório, são nulas em magnitude.

Independentemente de haver ou não corrente no condutor, se houver a presença de uma carga teste próxima ao condutor, há indução eletrostática (força de ordem zero). Neste trabalho mostramos que existe também a força de primeira ordem.

Existe também a idéia de que um fio com corrente não gera campo elétrico em seu exterior porque assumem que o magnetismo é um efeito relativístico. Um exemplo é o livro do Feynman, de onde podemos citar:

Em um condutor normal, como cobre, as correntes elétricas vêm do movimento de alguns de seus elétrons negativos – chamados elétrons de condução – enquanto as cargas positivas nucleares e o resto dos elétrons ficam fixos no corpo do material. Denominamos a densidade dos elétrons de condução de ρ_- e sua velocidade em S [referencial fixo com relação ao fio]

de $\vec{v}_0$. A densidade de cargas paradas em S é ρ_+ , que tem de ser igual ao negativo de ρ_- , já que estamos considerando um fio descarregado. Não há portanto campo elétrico fora do fio, e a força na partícula em movimento é somente $\vec{F} = q\vec{v}_0 \times \vec{B}$, [FLS64, vol. 2, pág. 13-7].

Apesar do condutor ter carga total nula, ela não está distribuída de maneira uniforme ao longo do condutor, de modo que há uma resultante de primeira ordem, como vamos mostrar nos capítulos seguintes.

Veremos que as afirmações de Reitz, Edwards, Feynman e outros estão erradas. Mesmo que desconsideremos o efeito de ordem zero, ainda temos um efeito de primeira ordem em v_a/c . Este efeito deriva da presença de uma distribuição de cargas na superfície dos condutores resistivos quando por estes flui uma corrente. Vamos calcular as cargas superficiais em condutores resistivos com corrente constante e o campo elétrico fora destes condutores. Vamos comparar nossos cálculos com resultados experimentais e teóricos presentes na literatura.

Utilizamos g para a condutividade, ao invés da notação padrão σ , para evitar confusão com a densidade superficial de carga, que representamos por σ .

1.2 Cargas superficiais e correntes constantes

Considere um fio resistivo de condutividade finita g conectado a uma bateria e conduzindo uma corrente estacionária I , como no lado esquerdo da Fig. 1.2. Uma bateria ideal gera uma diferença de potencial constante entre seus terminais.

A densidade de corrente $\vec{J}$ é dada essencialmente por $\vec{J} = (I/A)\hat{u}$, onde A é a área da seção reta do fio e o vetor unitário $\hat{u}$ aponta na direção da corrente em cada ponto no interior do fio. A lei de Ohm na forma diferencial estabelece que $\vec{J} = g\vec{E}$, onde $\vec{E}$ é o campo elétrico conduzindo a corrente. Por esta relação vemos que $\vec{E}$ também aponta na direção da corrente em cada ponto. Pode-se imaginar que este campo elétrico seja devido somente à bateria (ou devido somente às cargas localizadas na bateria), mas esta resposta não estaria completa.

Para perceber que a bateria não gera o campo elétrico em todos os pontos ao longo do fio, considere a Fig. 1.2. Sabemos que o campo elétrico conduzindo a corrente constante segue em geral a geometria do fio. Em um ponto C específico dentro do fio o campo elétrico dentro do fio na Fig. 1.2, à esquerda, aponta na direção positiva do eixo x . Quando entortamos uma parte do fio, o campo elétrico muda, apontando ao longo da nova geometria. No circuito à direita da Fig. 1.2 pode ser visto que no mesmo ponto C o campo elétrico agora aponta na direção positiva do eixo y .

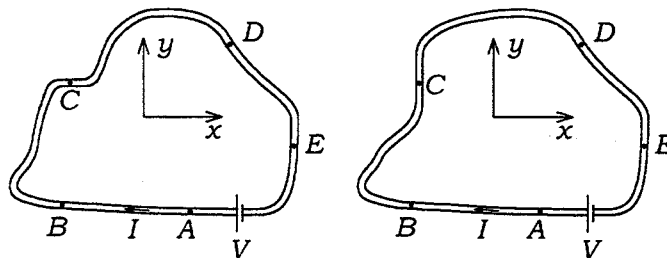


Figura 1.2: O campo elétrico no ponto C aponta ao longo da direção x na figura à esquerda. Entortando o fio como na figura à direita, o campo elétrico em C passa a apontar na direção y . Entretanto, as direções e intensidades dos campos elétricos em A , B , D e E não mudam.

O campo elétrico muda seu caminho e sua direção somente na porção em que foi entortado e nas regiões próximas a ela, mantendo os valores e direções anteriores em todos os outros pontos (como A , B , D e E na Fig. 1.2). Como o campo elétrico dentro do fio mudou apenas na

porção alterada do fio, deve ser algo local que cria esta mudança na direção do campo elétrico. A geometria do fio obviamente mudou, mas a geometria não cria campo elétrico. Chegamos então à idéia de Kirchhoff e Weber de que o campo elétrico dentro de um fio conduzindo uma corrente constante é devido a uma distribuição de cargas livres espalhadas ao longo da superfície do fio: [Kir49], [Kir57c], [Kir57b] (com traduções para o inglês em [Kir50], [Kir57a] e [GA94], respectivamente) e [Web52]. O papel da bateria é o de manter esta distribuição de cargas livres ao longo da superfície do fio. Haverá então um gradiente contínuo de cargas superficiais ao longo do comprimento do fio. No caso de um fio com carga total nula, estas cargas são mais positivas em direção ao terminal positivo da bateria, decrescendo em magnitude até alcançar zero em um ponto intermediário, e tornando-se mais negativa em direção ao terminal negativo da bateria, veja a Fig. 1.3.

Se não existisse bateria, a densidade de cargas seria nula em todos os pontos ao longo da superfície do fio. É esta distribuição de cargas superficiais que cria o campo elétrico dentro do fio conduzindo a corrente. Quando entortamos uma porção do fio, as cargas livres se redistribuem no espaço ao longo da superfície do fio, criando o novo campo elétrico que então segue a trajetória alterada do fio. Isto pode ser visto qualitativamente no lado direito da Fig. 1.3. Vemos claramente que o fio não pode ser neutro em todos os pontos ao longo do circuito. E estas cargas ao longo da superfície do fio criam não apenas o campo elétrico dentro do fio, mas também um campo elétrico no espaço ao redor do fio.

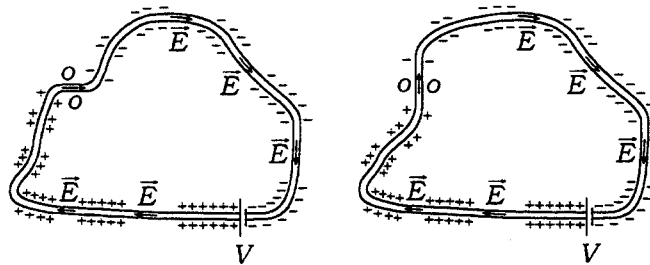


Figura 1.3: Distribuição qualitativa de cargas ao longo da superfície de um fio resistivo conduzindo uma corrente estacionária em duas geometrias.

Uma representação qualitativa das cargas superficiais em um anel resistivo conduzindo uma corrente estacionária I quando o anel está conectado a uma bateria que gera uma tensão V entre seus terminais está representada no lado esquerdo da Fig. 1.4. Uma representação do campo elétrico interno e externo devido a estas cargas superficiais está mostrada no lado direito da Fig. 1.4.

Uma outra maneira de concluir que tem de haver um campo elétrico fora de um condutor resistivo conduzindo uma corrente constante é utilizando a lei de Faraday. A equação de Faraday para correntes estacionárias pode ser escrita como $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Selecionando um pequeno circuito fechado retangular C em que uma parte percorre o interior do fio e a parte oposta do circuito está imediatamente fora do circuito, paralela à parte interna, podemos obter a continuidade da componente longitudinal do campo elétrico dentro e fora do condutor. Ou seja, a partir desta análise simples é possível mostrar que existe pelo menos uma componente longitudinal do campo elétrico fora do condutor. Mas partindo apenas desta análise não se pode encontrar o comportamento desta componente com a distância do condutor, nem obter informações sobre a componente radial do campo elétrico.

Uma discussão qualitativa desta redistribuição de cargas superficiais quando entortamos um fio já foi dada por Parker, [Par70], e por Chabay e Sherwood, [CS95, Cap. 6]. Um cálculo da ordem de magnitude das cargas necessárias para mudar a direção da corrente I em 90 graus foi dada por Rosser, [Ros70].

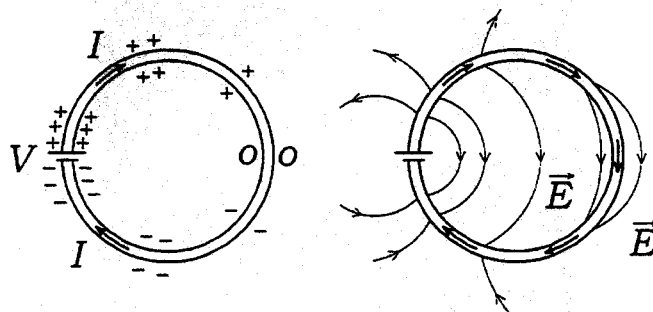


Figura 1.4: Representação qualitativa das cargas superficiais (à esquerda) e do campo elétrico interno e externo (à direita) no caso de um anel resistivo conduzindo uma corrente estacionária.

1.3 Resultados experimentais

Bergmann e Schaefer mapearam experimentalmente as linhas de campo elétrico fora de condutores resistivos transportando correntes constantes em geometrias simples, [BS50, págs. 164–167] e [BS87, págs. 197–199]. Eles comentam que, devido à grande condutividade dos metais, é difícil utilizá-los porque não podem sustentar uma grande diferença de potencial entre suas extremidades, de modo que eles produzem apenas um campo elétrico externo muito pequeno. Por isto, utilizaram fitas de papel grafitado de alta resistividade e aplicaram de 20.000 a 40.000 V entre suas extremidades para produzir uma corrente estacionária ao longo da fita. Eles aterraram o centro da fita, mantendo-o a um potencial nulo, de modo que as linhas de campo elétrico estão localizadas simetricamente em torno deste centro. Eles espalharam semolina em óleo castor em torno da fita e obtiveram o resultado mostrado na Figura 1.5. A linha central preta é a fita de papel conduzindo uma corrente constante. As partículas de semolina se polarizam devido ao campo elétrico externo e se alinham com ele, de maneira análoga ao que acontece à limalha de ferro mapeando o campo magnético de um ímã.

Eles observaram que este campo elétrico é diferente do campo eletrostático usual devido a condutores carregados sem corrente, já que possui uma componente paralela ao condutor (no caso de condutores carregados em equilíbrio eletrostático, $\vec{E}$ é sempre normal à superfície).

Obtiveram também as linhas de $\vec{E}$ fora de uma linha de transmissão, Figura 1.6. A corrente constante vai num sentido e volta em outro.

Experiências demonstrando a existência de campos elétricos fora de condutores também foram realizadas por Jefimenko, [Jef62] e [Jef89, Placas 6 a 9]. Ele utilizou tinta condutora transparente para fazer circuitos impressos bidimensionais em placas de vidro de 25 cm x 30 cm. Nas figuras seguintes, as partes em cinza representam uma tinta de baixa condutividade (representando seções do circuito onde existe resistividade), enquanto que as partes em preto representam uma tinta de alta condutividade (representando seções do circuito em que quase não haveria resistividade). O circuito foi ligado a um gerador de tensão da ordem de 10.000 V. Jefimenko espalhou sobre a placa de vidro pequenas sementes de grama, que agem como partículas-teste. Estas sementes, neutras no estado natural, polarizam-se na presença de um campo elétrico, alinhando-se ao longo das linhas de campo elétrico.

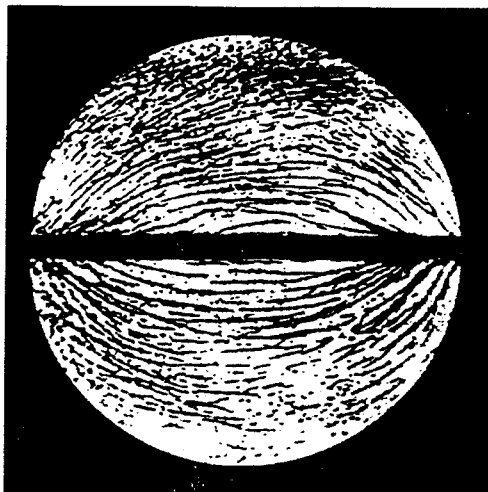


Figura 1.5: Mapeamento experimental das linhas de campo elétrico fora de um condutor resistivo retilíneo transportando uma corrente constante (faixa preta central). A semolina espalhada em óleo se polariza na presença do campo elétrico e se alinha com ele.

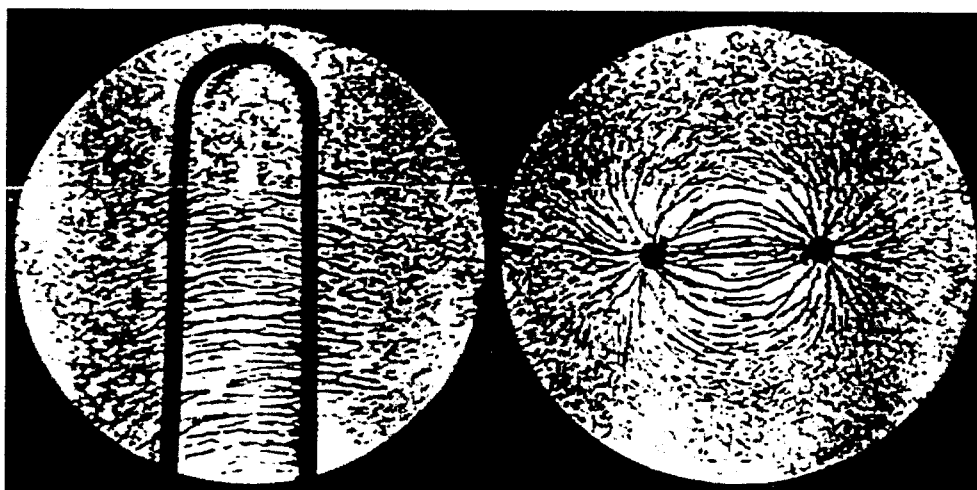


Figura 1.6: À esquerda: Experiência similar à mostrada na Figura 1.5, agora para uma linha de transmissão. À direita: Linhas de campo elétrico num plano perpendicular aos fios e ao plano formado pela linha de transmissão.

Nas Figuras 1.7 e 1.8 temos situações análogas às Figuras 1.5 e 1.6 de Bergmann e Schaefer. Na Figura 1.9 o condutor de retorno tem uma resistividade bem menor do que o condutor de ida, tal que possa ser considerado na prática quase como um supercondutor. Na Figura 1.10 temos um condutor na forma de um anel bidimensional.

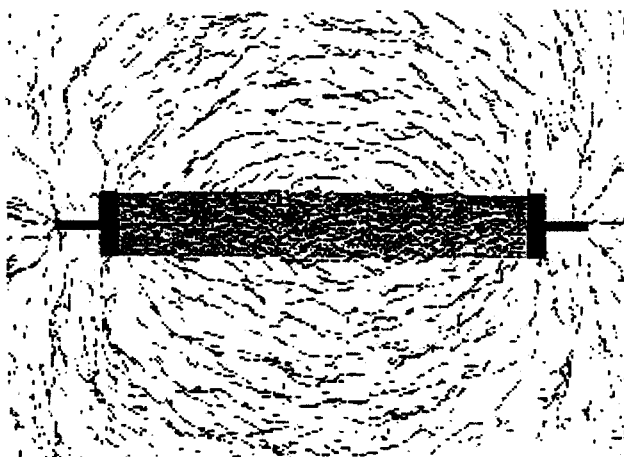


Figura 1.7: Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico no circuito formado por uma fita condutora reta, [Jef62]. A corrente flui horizontalmente. As partes em cinza mostram a tinta condutora resistiva e as partes em preto mostram a tinta sem resistência (na verdade, com resistência muito menor que a tinta em cor cinza). As sementes de grama se polarizam na presença do campo elétrico e se alinham com ele.

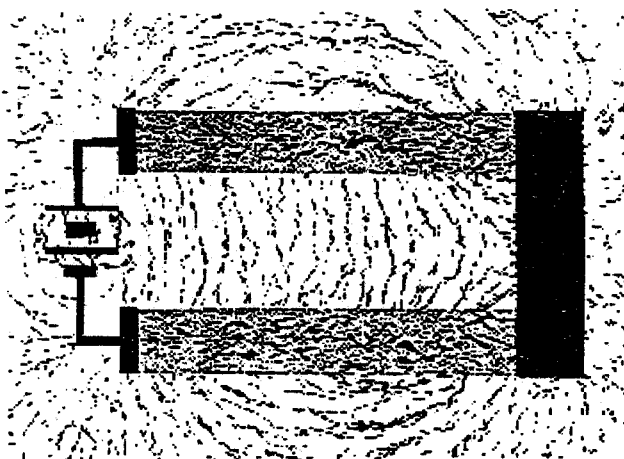


Figura 1.8: Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico nas duas fitas bidimensionais conduzindo correntes em direções opostas, [Jef62] e [Jef89, Placa 6].

As linhas equipotenciais também foram medidas diretamente por Jefimenko, Barnett e Kelly, [JBK62]. Neste caso foi utilizada uma câmara retangular oca com eletrodos (folhas de alumínio) como extremidades e paredes semi-condutoras (fita de papel de grafite) conduzindo uma corrente uniforme, Figura 1.11. Oitenta volts foram aplicados aos eletrodos e as linhas equipotenciais foram mapeadas utilizando uma fonte de radiação alfa para ionizar o ar nos pontos em que o potencial seria medido. A fonte de radiação alfa adquiria o mesmo potencial que o campo naqueles pontos e o potencial era medido em relação a um ponto de referência utilizando um eletrômetro eletrônico conectado à fonte alfa. As equipotenciais obtidas experimentalmente na Figura 1.11 representam a contrapartida das linhas de $\vec{E}$ obtidas experimentalmente nas Figuras 1.5 e 1.7.

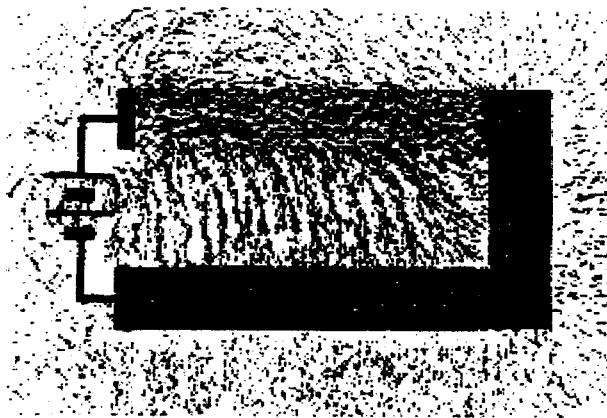


Figura 1.9: Neste experimento de Jefimenko, o condutor inferior (na cor preta) tem uma resistividade muito menor do que o condutor superior (na cor cinza claro), [Jef62].

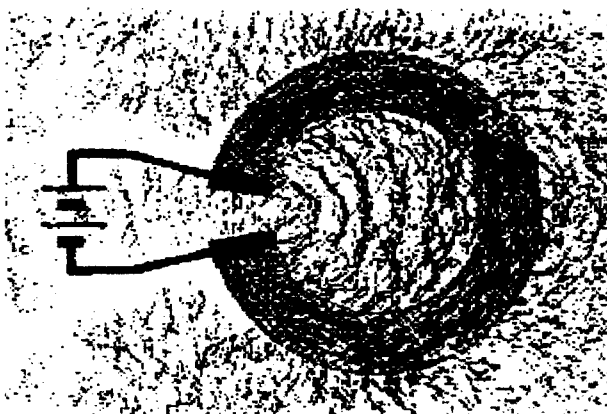


Figura 1.10: Placa experimental de Jefimenko mostrando linhas de campo elétrico dentro e em volta do circuito circular conduzindo corrente constante, [Jef62].

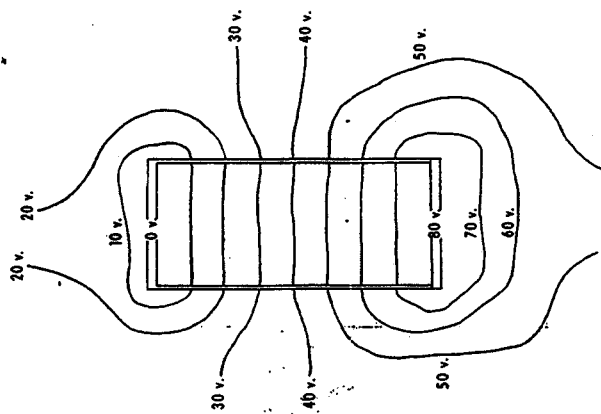


Figura 1.11: Linhas equipotenciais obtidas experimentalmente em uma câmara retangular oca conduzindo uma corrente uniforme, [JBK62].

Também existe um experimento feito por Sansbury no qual ele detectou diretamente a força entre uma chapa metálica carregada parada e um condutor conduzindo uma corrente por meio de uma balança de torsão, [San85]. Ele colocou uma chapa de prata descarregada de $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, que estava na extremidade de uma balança de torsão, a $3,5\text{ cm}$ de um condutor neutro em forma de U (condutor de cobre com diâmetro de $0,95\text{ cm}$, comprimento de 50 cm , separação entre os fios de 10 cm) sem corrente, Figura 1.12. Quando ele carregou a chapa com uma carga estimada em aproximadamente $5 \times 10^{-10}\text{ C}$ (conectando-a a um gerador de tensão de 3 kV), observou (mas não mediu quantitativamente) uma atração entre a chapa e o fio. Isto foi provavelmente devido à força de indução eletrostática no fio devido à presença da folha carregada próxima. A corrente então [nossa tradução entre aspas] “foi aumentada até 900 A ” no fio e ele observou uma atração ou repulsão extra entre a chapa carregada e o fio, dependendo do sinal da carga na chapa, Figura 1.13. Devido às flutuações devidas a vibrações no chão, Sansbury afirmou que “forças menores que $1,7 \times 10^{-7}\text{ N}$ não puderam ser detectadas”. Outra fonte de erro foi que “qualquer desvio da placa da posição de equilíbrio (b) da Fig. 2 [nossa figura 1.13] mudará a força eletrostática entre os eletrodos capacitores. Em ambos os casos, a atração e a repulsão da placa produzida pela corrente, a mudança na força eletrostática se adiciona ao efeito da corrente e, portanto, leva a instabilidade”. Apesar disto, ele afirma que “pode ser dito com certeza que esta força devida à corrente era maior que $1,7 \times 10^{-7}\text{ N}$ ”. Mais tarde discutiremos se esta força (adicional à força eletrostática) é devida ao campo elétrico externo sendo discutido aqui. Isto é, se é devida ao campo elétrico proporcional à corrente no fio.

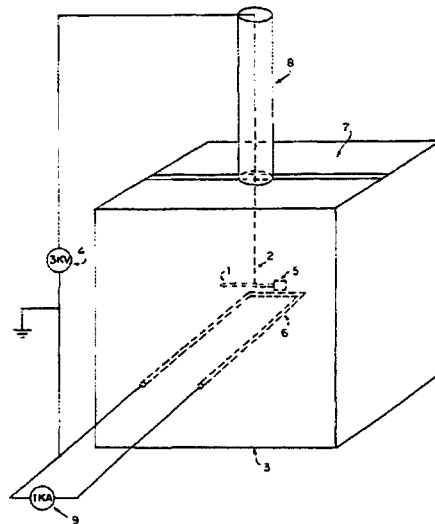


Figura 1.12: Geometria do experimento de Sansbury. A chapa metálica 5 está na extremidade da balança de torção 2 e é carregada com o gerador de tensão 4. O condutor 6 transporta uma corrente constante ao ser ligado à fonte de corrente 9.

A força entre a chapa de metal carregada de Sansbury e o fio conduzindo uma corrente parece ser similar à força entre a pequena esfera carregada de Parker e um circuito conduzindo uma corrente, [Par70]. Parker realizou diversas experiências indicando a existência de campos elétricos externos a condutores resistivos transportando correntes constantes. Não utilizaremos estas experiências aqui pois ele não realizou medidas quantitativas que pudessemos utilizar como comparação.

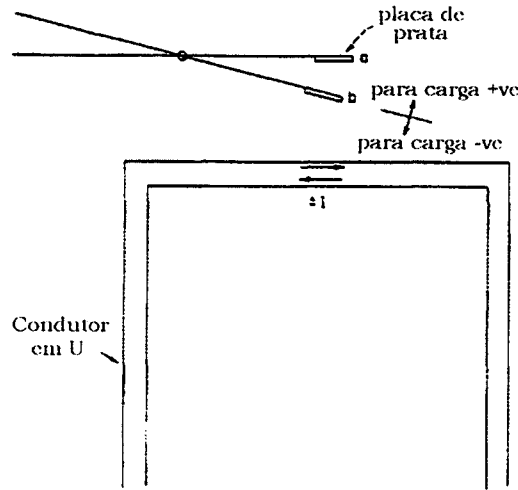


Figura 1.13: No início não existe corrente no condutor e a chapa de prata descarregada permanece em *a*. Depois de carregada, a chapa de prata se move de *a* para *b*. Então uma corrente estacionária *I* passa através do condutor. Neste caso aparece uma força extra de atração ou repulsão entre a chapa carregada e o condutor em forma de *U*.

Bartlett e Maglic consideraram a força detectada por Sansbury um “efeito eletromagnético anômalo,” como aparece no título de seu trabalho, [BM90]. Eles fizeram um experimento similar, veja as Figs. 1.14 e 1.15. Eles utilizaram uma bobina retangular com 16 voltas (4 x 4), de lados 60 cm e 30 cm, feita de um tubo de cobre com 1/8 de polegada de diâmetro (ou 0,3175 cm). Em comunicação particular, eles informaram que dentro do tubo fluía água para resfriamento, ocupando aproximadamente a metade da área de seção reta do fio. Uma fonte de corrente ligada à bobina mantinha uma corrente constante de 50 A. Eles detectaram uma força sobre uma placa carregada de 2,54 cm x 2,54 cm colocada parada a 3,5 cm da bobina com corrente constante. Isto era similar ao resultado obtido por Sansbury. Mas quando envolveram com uma gaiola de Faraday a metade superior do circuito (contendo a corrente e a chapa carregada) o efeito desapareceu. A conclusão deles foi que não puderam encontrar esta interação “anômala”, implicando que ela não existe.

Entretanto, eles parecem não estar cientes de um importante aspecto relacionado a gaiolas de Faraday. Elas são usualmente utilizadas para blindar influências externas sobre o sistema em consideração. Mas elas afetam a força total em cada carga teste interna. Assim, se tivermos duas cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância d , a força coulombiana entre elas tem uma magnitude de $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 d^2$ e está direcionada ao longo da linha que as une, Figura 1.16.

Porém, quando envolvemos ambas por uma casca metálica, elas induzem uma distribuição de cargas ao longo da superfície da casca. Como resultado destas cargas induzidas, a casca exerce força sobre q_1 e sobre q_2 . Isto resulta, em geral, em uma força total em cada uma delas diferentes do valor anterior de $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 d^2$. Com uma casca esférica esta força exercida pelas cargas induzidas ao longo da parede sobre as cargas teste internas pode ser facilmente calculada pelo método das imagens. Cada carga q_j localizada a uma distância a_j do centro da casca de raio $r_0 > a_j$, com $j = 1$ ou 2 , induz cargas equivalentes a uma carga imagem $q_{ij} = -q_j r_0 / a_j$ a uma distância $a_{ij} = r_0^2 / a_j > r_0$ do centro da casca ao longo da linha reta conectando o centro da casca a q_j . A força resultante sobre q_1 , por exemplo, será dada por $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{i1,1} + \vec{F}_{i2,1}$ ao invés de simplesmente $\vec{F}_{21}$. Aqui $\vec{F}_{im,n}$ é a força exercida pela carga imagem m sobre a carga n . Se a linha reta conectando as duas cargas q_1 e q_2 não passa pelo centro da casca, a força resultante em cada uma delas mudará sua magnitude e também sua direção em comparação com o valor anterior sem a casca, Figura 1.17.

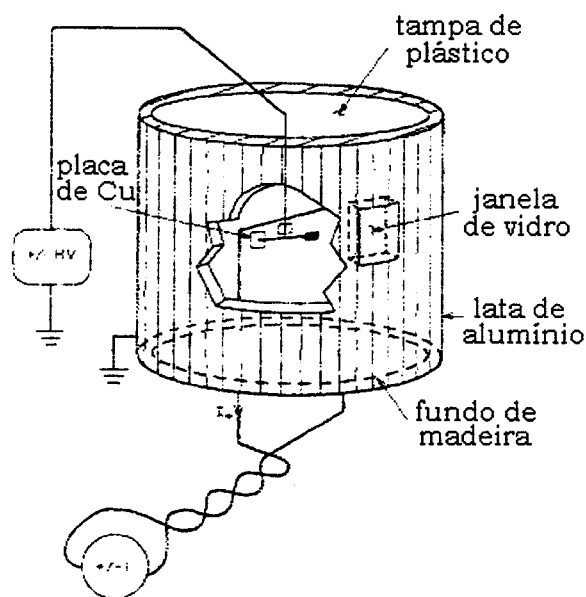


Figura 1.14: Geometria do experimento de Bartlett. A chapa metálica está na extremidade da balança de torção (fio que entra por cima da lata de alumínio) e é carregada com o gerador de alta tensão HV. A bateria no canto inferior esquerdo mantém uma corrente de 50 A que flui pela bobina retangular que está dentro da lata de alumínio.

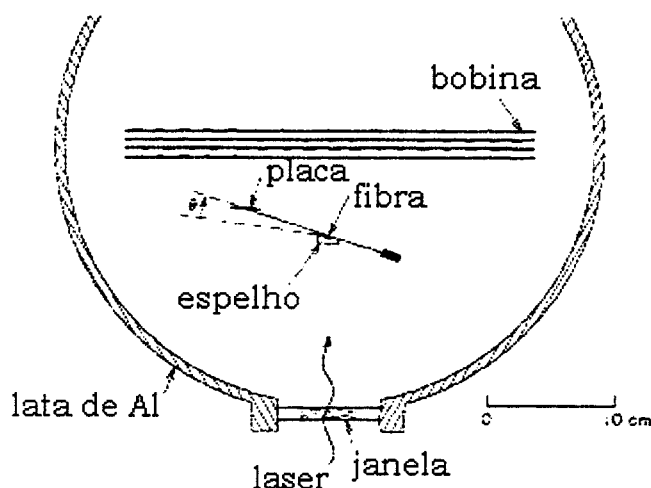


Figura 1.15: Vista superior do esquema experimental. Flui uma corrente de 50 A pelas 16 voltas da bobina retangular (na figura acima são visíveis apenas 4 voltas da bobina). A chapa carregada gira a balança de torção de um ângulo θ quando circula uma corrente constante na bobina.

Se existem N cargas internas, a força resultante sobre q_1 será dada pela soma das forças devidas às outras $N - 1$ cargas sobre q_1 , mais as N forças das cargas imagem sobre q_1 . Se a gaiola de Faraday não for esférica, será bastante difícil calcular a força resultante nas cargas teste. No caso de Bartlett e Maglic a gaiola de Faraday era cilíndrica com lados metálicos e extremidade dielétrica. Isto torna muito difícil estimar o efeito da blindagem sobre a chapa carregada interna. Além disto, não temos apenas duas cargas q_1 e q_2 como discutido acima, mas uma chapa carregada e uma quantidade de cargas distribuídas ao longo da superfície de um

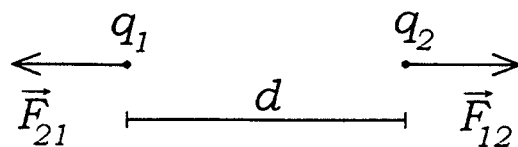


Figura 1.16: Força eletrostática entre duas cargas longe de outras cargas e condutores.

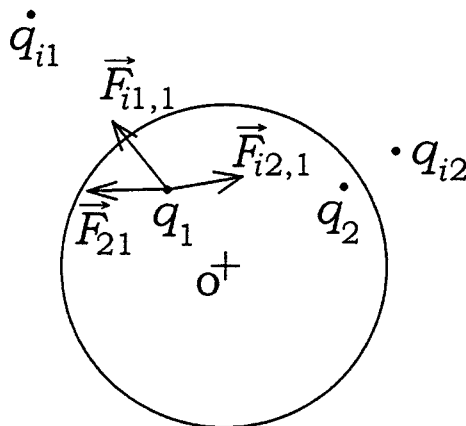


Figura 1.17: Forças eletrostáticas sobre q_1 devido a q_2 , devido à carga imagem q_{i1} e devido à carga imagem q_{i2} .

fio resistivo conduzindo uma corrente. Como o fio é feito de um material condutor, as cargas induzidas sobre a gaiola de Faraday mudam a distribuição de cargas espalhadas ao longo da superfície do fio (comparadas com a distribuição superficial de cargas sem a gaiola de Faraday), de modo que mesmo esta nova distribuição não é ainda conhecida até que possamos calculá-la a partir da equação de Laplace e as condições de contorno apropriadas. Isto complica enormemente a análise teórica de qual força resultante esperaríamos sobre a carga teste quando blindamos o fio com corrente e a carga teste. Por esta razão, parece-nos que é melhor realizar este tipo de experimento sem blindagem metálica.

O resultado que Bartlett e Maglic relatam em seu trabalho foi que [nossa tradução] “fazendo a média dos resultados com e sem a blindagem (...) obtivemos uma força de $(0,27 \pm 0,27) \times 10^{-7}$ N”. A impressão que tivemos ao ler o artigo foi que a força medida sem a blindagem era de $0,27 \times 10^{-7}$ N. Já com a blindagem a força medida foi nula (daí viria o sinal $\pm$ acima). Nossa opinião é que a blindagem muda a distribuição de cargas sobre a casca metálica. E isto altera a força resultante sobre cada carga teste interna, como mostramos acima. Logo fica praticamente impossível comparar os casos com e sem a blindagem. O ideal seria fazer medidas apenas sem a blindagem de Faraday nestes casos. Infelizmente não foi este o procedimento adotado por Bartlett.

Mais discussões sobre o experimento de Sansbury com diferentes abordagens podem ser encontradas em [Whi88], [Hay90], [Wes90] e [Wes91, Seção 6.10], [BC91a], [BC91b], [Ive91], [RG93], e [ARM99].

Em conclusão podemos dizer que os experimentos de Bergmann, Schaefer, Jefimenko, Barnett, Kelly, Sansbury e Parker demonstram qualitativamente a existência de um campo elétrico externo a um circuito resistivo conduzindo uma corrente constante. Este campo elétrico é proporcional à corrente fluindo no circuito (portanto, de primeira ordem em v_d/c).

Nesta tese fazemos um esforço consciente de comparar nossos resultados teóricos com estes

dados experimentais. Fazemos isto principalmente sobrepondo às figuras experimentais as nossas figuras teóricas de linhas equipotenciais e linhas de campo elétrico adequadas à geometria experimental. Este tipo de comparação é essencialmente qualitativo. Fazemos também algumas comparações numéricas com os experimentos de Sansbury, Bartlett e Maglic. Nestes casos foram medidas forças experimentalmente. Apesar disto, estas comparações devem ser apreciadas como comparações essencialmente qualitativas pois os dados experimentais quantitativos de que dispomos são em número bem reduzido. Seguimos esta abordagem essencialmente pela falta de mais dados experimentais. Esperamos que o amplo tratamento teórico apresentado neste trabalho sirva como motivação para a realização de novos experimentos.

Podemos dizer que este trabalho tem dois enfoques principais. O primeiro é o caráter pedagógico. Queremos mostrar que existe um campo elétrico não nulo fora de condutores com correntes constantes através do estudo de várias geometrias. A solução obedece às equações de Maxwell e às condições de contorno do problema específico. Este campo elétrico está intrinsecamente ligado ao campo elétrico no interior do fio que mantém a corrente fluindo. Também existe uma relação muito forte entre as cargas espalhadas ao longo da superfície do condutor e o campo elétrico dentro e fora do condutor. Ou seja, procuramos mostrar que a eletrostática e a magnetostática (estudo das correntes constantes) são assuntos solidamente ligados. O segundo enfoque se refere ao aspecto físico. Ou seja, uma carga parada, colocada próxima a um condutor com corrente constante, sofre a ação de uma força? Um fio com corrente é neutro em todos os pontos? Como mostramos na Seção 1.1, há vários autores que supõem que não há força, ou que não haja cargas distribuídas ao longo do condutor com corrente. Neste trabalho mostramos que estas suposições de Edwards, Reitz, Feynman (que apresentamos na Seção 1.1) e outros são falsas. Tentamos sempre enfatizar os motivos físicos da existência do campo elétrico externo ao condutor, sua origem e suas principais propriedades. Neste aspecto este enfoque é mais ligado aos fundamentos da física básica.

Parte I

Condutores Retos

Nesta parte apresentamos problemas com condutores resistivos longos e retos conduzindo correntes estacionárias. O sistema de referência é sempre o laboratório (nas experiências e cálculos descritos aqui o laboratório pode ser considerado inercial), em relação ao qual os condutores, a carga teste e o observador estão parados. Consideramos que os condutores tenham resistividade uniforme e que o meio em torno dos condutores seja ar ou vácuo.

Capítulo 2

Fio Reto Longo de Seção Reta Circular

2.1 Resultados conhecidos na literatura

O caso do fio reto maciço de seção reta circular foi detalhadamente tratado em [ARM99]. Neste artigo também há uma extensa discussão a respeito dos motivos que levaram cientistas a negarem erroneamente a existência de campos elétricos fora de condutores com corrente constante e a ignorarem a abordagem de cargas superficiais que exploramos neste trabalho. Alguns destes motivos e discussão concernente foram apresentados neste trabalho no Capítulo 1.

A situação considerada aqui é a de um circuito fechado de forma retangular $ABCD$, Figura 2.1. Uma bateria gera uma diferença de potencial V entre seus terminais e quando é fechado o circuito resistivo $ABCD$, flui uma corrente elétrica constante I . Queremos saber a força resultante exercida sobre uma carga teste q parada em relação ao circuito no caso estacionário em que flui a corrente constante I . Cada segmento AB , BC e CD do condutor resistivo é um fio retilíneo maciço de seção reta com formato circular.

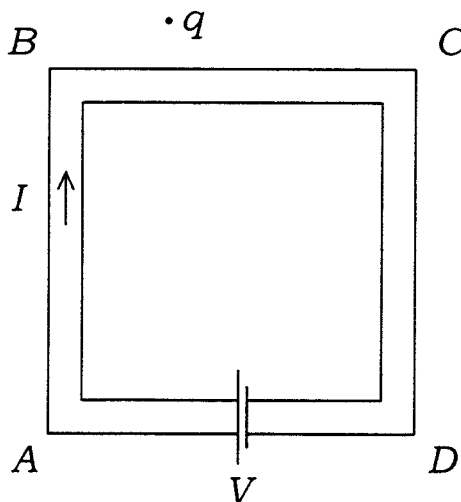


Figura 2.1: Um circuito quadrado fechado composto por um fio resistivo de seção reta com formato circular. Há uma carga q próxima do centro de um de seus lados. Uma bateria mantém uma diferença de potencial V , fazendo fluir uma corrente estacionária I .

Em [ARM99] foi calculada a força de primeira ordem agindo sobre q (proporcional à corrente I ou proporcional à velocidade de deriva – ou seja, à velocidade média de deslocamento dos portadores de carga – v_d dos elétrons de condução no fio), quando q está fora do fio mas próxima do centro de AB , de BC ou de CD . Os cálculos que vão a seguir não são válidos para q próxima do centro de DA , caso este tratado no Capítulo 4.

A geometria considerada neste problema é a de um fio de comprimento ℓ e raio $a \ll \ell$, homogêneo e com condutividade finita constante. O fio transporta uma corrente I constante no tempo e na seção reta, veja a Figura 2.2. Este fio representa os lados AB , BC ou CD da Figura 2.1. Utilizando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , supõe-se uma densidade superficial de carga linear com o eixo z do fio, [Rus68]:

$$\sigma_f(a, \varphi, z) = \sigma_A + \sigma_B \frac{z}{\ell}, \quad (2.1)$$

onde σ_A e σ_B são constantes. A partir desta densidade de carga, é calculado o potencial elétrico dentro e fora do fio por integração direta, resultando:

$$\phi(\rho \leq a, \varphi, z) = a \frac{\sigma_A + \sigma_B z/\ell}{\varepsilon_0} \ln \frac{\ell}{a} = \frac{\lambda(z)}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\ell}{a}, \quad (2.2)$$

$$\phi(\rho \geq a, \varphi, z) = a \frac{\sigma_A + \sigma_B z/\ell}{\varepsilon_0} \ln \frac{\ell}{\rho} = \frac{\lambda(z)}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\ell}{\rho}, \quad (2.3)$$

onde $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m é a permissividade elétrica do vácuo. No lado direito das equações escrevemos o potencial em função da densidade linear de carga $\lambda(z) = a \int_0^{2\pi} \sigma(a, \varphi, z) d\varphi$.

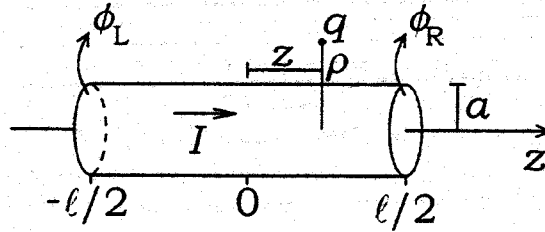


Figura 2.2: Fio reto de comprimento ℓ e raio $a \ll \ell$ conduzindo uma corrente estacionária I ao longo do eixo z . Uma carga teste q colocada em (ρ, z) mapeia a força em torno do condutor.

Supondo que o fio esteja submetido a potenciais ϕ_L e ϕ_R nos seus lados esquerdo e direito, respectivamente, podemos reescrever este potencial como:

$$\phi(\rho \leq a) = \frac{\phi_R + \phi_L}{2} + (\phi_R - \phi_L) \frac{z}{\ell}, \quad (2.4)$$

$$\phi(\rho \geq a) = \frac{\phi_R + \phi_L}{2} \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)} + (\phi_R - \phi_L) \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)} \frac{z}{\ell}, \quad (2.5)$$

onde podemos encontrar as relações $\sigma_A = \varepsilon_0(\phi_R - \phi_L)/a \ln(\ell/a)$ e $\sigma_B = \varepsilon_0(\phi_R + \phi_L)/2a \ln(\ell/a)$.

O campo elétrico $\vec{E}$, dado por $-\nabla\phi$, resulta:

$$\vec{E}(\rho < a) = \frac{\phi_L - \phi_R}{\ell} \hat{z}, \quad (2.6)$$

$$\vec{E}(\rho > a) = \frac{1}{\ln(\ell/a)} \left[\frac{\phi_L + \phi_R}{2} + (\phi_R - \phi_L) \frac{z}{\ell} \right] \frac{\hat{\rho}}{\rho} + \frac{\phi_L - \phi_R}{\ell} \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)} \hat{z}. \quad (2.7)$$

Na Figura 2.3 temos as linhas equipotenciais encontradas pelos autores, enquanto que na Figura 2.4 temos as correspondentes linhas de campo elétrico.

Note que esta abordagem segue o caminho inverso àquela em que, a partir da equação de Laplace, é encontrado o potencial, daí o campo elétrico, e então as cargas superficiais. Estas duas maneiras independentes se completam se forem utilizadas para verificar os resultados encontrados em cada um dos métodos.

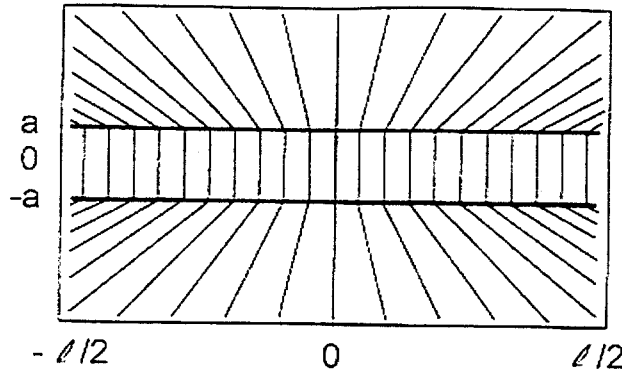


Figura 2.3: Linhas equipotenciais encontradas por Assis, Rodrigues e Mania para o problema do fio reto, [ARM99]. A figura representa um plano que corta o fio em duas metades longitudinalmente.

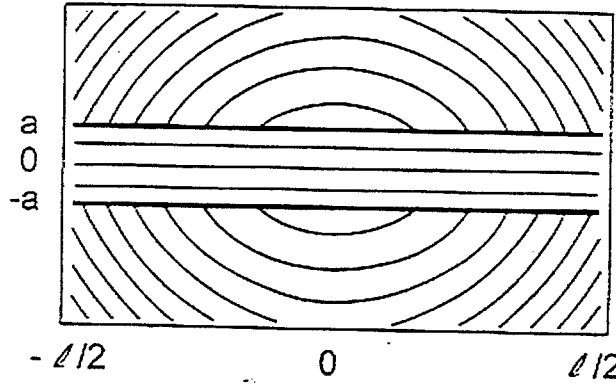


Figura 2.4: Linhas de campo elétrico encontradas por Assis, Rodrigues e Mania para o problema do fio reto, [ARM99].

2.2 Efeito Hall radial

Uma questão importante que pode aparecer é a seguinte: um fio resistivo conduzindo uma corrente constante é eletricamente neutro em seu interior?

Alguns autores quotados na Seção 1.1 responderam positivamente a esta questão, já que esta era uma de suas razões para acreditar que este fio não poderia gerar um campo elétrico fora dele. Entretanto, já mostramos que no fio, quando conduzindo uma corrente constante, aparece uma distribuição de cargas superficiais que dão origem ao campo elétrico dentro do fio e também a um campo elétrico fora dele. Aqui mostramos que existe também um campo elétrico radial dentro do fio devido ao fato de que o interior do fio está carregado negativamente.

Em nosso conhecimento, os primeiros a considerar este efeito e a apresentar cálculos quantitativos foram Matzek, Russell e Rosser, [MR68] e [Ros70]. Smythe também discutiu este assunto brevemente, [Smy68, Seção 6.04, págs. 250–252].

Aqui consideramos o efeito Hall radial devido ao campo magnético azimuthal dentro do fio. Assim como é comumente considerado, [Whi73, pág. 90], supõe-se que a corrente total I flui uniformemente em um longo cilindro de comprimento ℓ e raio a , ao longo da direção positiva de z que coincide com o eixo deste cilindro. Esta corrente gera um campo magnético azimuthal dado por (a uma distância $\rho < a$ do eixo) $\vec{B} = \mu_0 I \rho \hat{\phi} / 2\pi a^2$, onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2}$ é a permeabilidade magnética do vácuo e $\hat{\phi}$ é o versor unitário azimuthal. A força magnética que age em um elétron de carga $q = -e$, movendo-se com velocidade de deriva $\vec{v}_d = -|\vec{v}_d|\hat{z}$ em

relação ao fio, é dada por $q\vec{v}_d \times \vec{B} = -|\mu_0 e v_d I \rho / 2\pi a^2| \hat{\rho}$. Esta força radial direcionada ao eixo do fio leva a uma acumulação de cargas negativas no interior do fio, que cria um campo elétrico radial $\vec{E}_\rho$ apontando para o centro. No estado estacionário, as forças radiais elétrica e magnética se equilibram, $q\vec{E}_\rho = q\vec{v}_d \times \vec{B}$, gerando $\vec{E}_\rho = -|\mu_0 v_d I \rho / 2\pi a^2| \hat{\rho}$. Esta força elétrica aumenta linearmente dentro do fio. Seu valor máximo perto de $\rho = a$ é dado por $|E_\rho^{\text{máx}}| = |\mu_0 v_d I / 2\pi a|$. O campo elétrico longitudinal que dá origem à corrente pode ser obtido pela lei de Ohm, $V = RI$, onde V é a força eletromotriz ao longo do fio de resistência R . Para um fio de comprimento ℓ sob a ação de um campo elétrico longitudinal $|E_\ell|$ que aponta ao longo da direção z , esta voltagem é dada por $V = \ell |E_\ell|$, de tal modo que $|E_\ell| = RI / \ell$. A razão entre os campos elétricos radial máximo e longitudinal é dada por $|E_\rho^{\text{máx}} / E_\ell| = |\mu_0 v_d \ell / 2\pi a R| = |\mu_0 v_d g a / 2|$, onde g é a condutividade do fio e está relacionado à sua resistência por $R = \ell / g\pi a^2$.

Para encontrar a ordem de magnitude, suponha um fio de cobre ($g = 5,7 \times 10^7 \Omega\text{m}$ e $v_d \approx 4 \times 10^{-3} \text{ m/s}$) de 1 mm de diâmetro ($a = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$). Com estes valores na equação acima obtemos $|E_\rho^{\text{máx}} / E_\ell| \approx 4 \times 10^{-5}$, o que justifica desprezarmos a componente radial do campo elétrico. Conceitualmente, desprezarmos a componente radial pode ser explicada pelo fato de que o campo elétrico Hall é pequeno porque ele é devido a um campo magnético produzido pela corrente no fio, e não por um campo magnético externo grande que seja aplicado sobre o condutor.

Da lei de Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ vem que a densidade de carga no interior do fio no estado estacionário em que a força elétrica radial já equilibrou a força magnética é dada por $\rho_- = -|I v_d| / \pi a^2 c^2$, constante para todo $\rho < a$. A carga negativa total dentro do fio é compensada por uma carga positiva espalhada sobre a superfície do fio com uma densidade superficial de carga $\sigma_+ = |\rho_- a / 2| = |I v_d| / 2\pi a c^2$. Isto é, a carga negativa dentro do fio em um pequeno segmento de comprimento dz , $\rho_- \pi a^2 dz$, é igual e oposta à carga negativa ao longo da superfície, $\sigma_+ 2\pi a dz$. Isto significa que o efeito Hall radial não gera qualquer campo elétrico fora do fio, apenas dentro dele. Este σ_+ independente de z que vem do efeito Hall radial não deve ser confundido com o σ_f da Eq. (2.1) que é linear em z e que gera $\vec{E}$ fora do fio.

Apesar de podermos desprezar esta componente radial do campo elétrico dentro do fio com corrente constante (comparada com a componente longitudinal do campo elétrico que mantém a corrente, por exemplo), esta componente radial de fato existe. Também existe uma distribuição uniforme de cargas negativas dentro do fio. Estas conclusões contrariam afirmações como as de Reitz, Milford e Christy, apresentadas na Seção 1.1.

2.3 Comparação com os resultados experimentais

As soluções apresentadas aqui permanecem válidas no caso de uma casca cilíndrica oca de raio interno a_i e raio externo a . A densidade interna de cargas superficiais em $\rho = a_i$ será zero dentro das aproximações consideradas aqui, enquanto que a densidade externa de cargas superficiais será a mesma obtida acima. A principal diferença é que o campo elétrico na região $\rho < a_i$ não produz nenhuma corrente, já que não há condutor nesta região.

As linhas de campo elétrico e as equipotenciais dentro e fora de condutores resistivos com correntes constantes já foram observadas em laboratório, como vimos no Capítulo 1. Consideramos a corrente fluindo na parte superior de um circuito como aquele da Figura 2.1, com potenciais simétricos: $\phi_R = -\phi_L$. Para comparar estes resultados teóricos com os experimentos, precisamos obter as linhas de campo elétrico. Para obter estas linhas seguimos a abordagem apresentada no livro de Sommerfeld, [Som64, págs. 125–130] (original em alemão de 1948 baseado em aulas dadas em 1933–1934). Obtemos as linhas no plano $y = 0$. Todo plano contendo o eixo z dará uma solução similar. Estamos procurando por uma função $\xi(\rho, z)$ tal que:

$$\nabla \xi(\rho, z) \cdot \nabla \phi(\rho, z) = 0. \quad (2.8)$$

Para $\rho < a$ temos ϕ como uma função linear em z , tal que ξ pode ser encontrada proporcional a ρ . Escrevemos $\xi(\rho < a, z) = -A\ell\rho$, onde A é uma constante. As linhas equipotenciais, $\phi(\rho, z) = \text{constante}$, podem ser escritas como $z_1(\rho) = K_1$, onde K_1 é uma constante (para cada constante temos uma linha equipotencial diferente). Analogamente, as linhas de campo elétrico serão dadas por $z_2(\rho) = K_2$, onde K_2 é outra constante (para cada K_2 temos uma linha de campo elétrico diferente). Da Eq. (2.8) obtemos $dz_2/d\rho = -1/(dz_1/d\rho) = (\partial\phi/\partial z)/(\partial\phi/\partial\rho)$. Integrando esta equação obtemos $\xi(\rho, z)$. Com a Eq. (2.5) isto dá a solução para $\rho > a$. Encontramos então:

$$\xi(\rho < a, z) = (\phi_R - \phi_L)\frac{\rho}{\ell}, \quad (2.9)$$

$$\xi(\rho > a, z) = (\phi_R + \phi_L)\frac{z}{\ell} + (\phi_R - \phi_L) \left(\frac{\rho^2}{2\ell^2} + \frac{z^2}{\ell^2} - \frac{\rho^2}{\ell^2} \ln \frac{\rho}{\ell} \right). \quad (2.10)$$

Destas equações podemos facilmente verificar a Eq. (2.8).

Para comparar estes resultados com os experimentos de Bergmann, Schaefer, Jefimenko, Barnett e Kelly precisamos essencialmente do valor de ℓ/a . Da Figura 1.5 temos $\ell/a \approx 33$, da Figura 1.7 temos $\ell/a \approx 13$, enquanto que da Figura 1.11 temos $\ell/a \approx 4$. Na Figura 2.5 sobreposumos o resultado teórico dados pelas Eqs. (2.4) e (2.5) com o resultado experimental de Jefimenko, Barnett e Kelly, Figura 1.11. Já nas Figuras 2.6 e 2.7 sobreposumos o resultado teórico com os resultados experimentais de Bergmann, Schaefer e Jefimenko, Figuras 1.5 e 1.7, respectivamente. Há uma boa concordância em todos estes casos. Fazemos também uma comparação numérica com a experiência de Sansbury na Seção 3.6.

Os gráficos das linhas de campo entre $z = -\ell/2$ e $\ell/2$ dadas pelas Eqs. (2.9) e (2.10) com os valores correspondentes de ℓ/a são dadas nas Figuras 2.8, 2.9 e 2.10 (com os resultados experimentais de Bergmann, Schaefer, Jefimenko, Barnett e Kelly sobrepostos a elas). Novamente há uma concordância muito boa entre nossos gráficos teóricos e os resultados experimentais obtidos por estes autores.

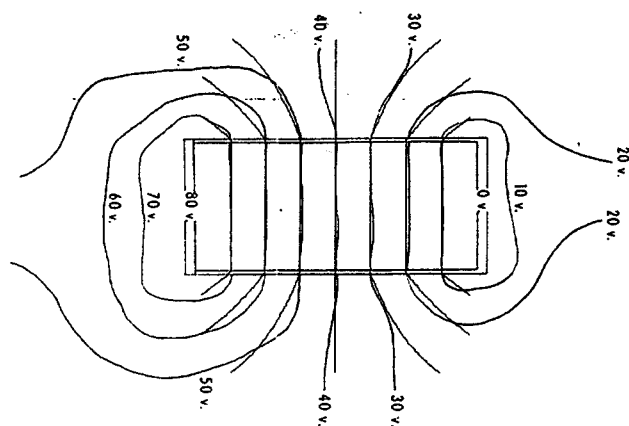


Figura 2.5: Linhas equipotenciais teóricas sobrepostas à figura experimental obtida por Jefimenko, Barnett e Kelly, Figura 1.11.

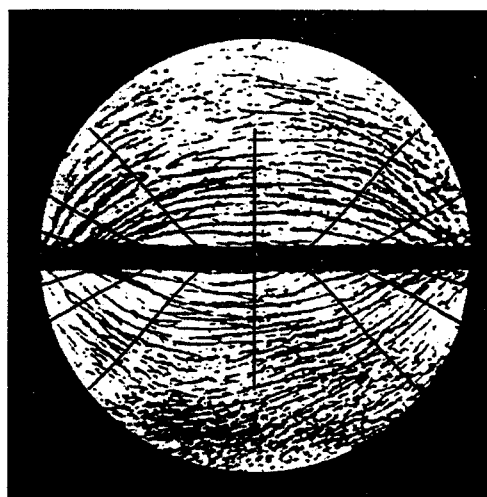


Figura 2.6: Linhas equipotenciais teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico obtidas por Bergmann e Schaefer.

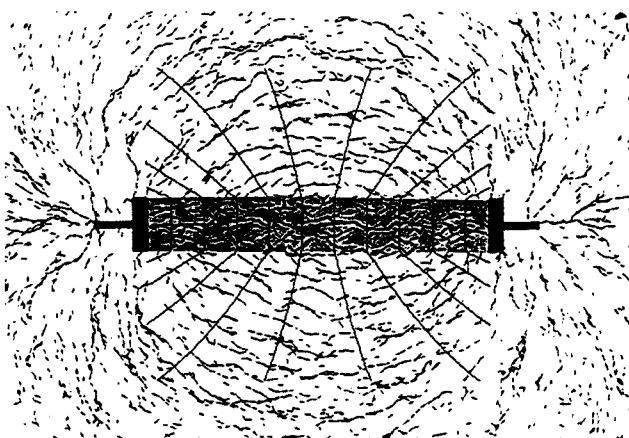


Figura 2.7: Linhas equipotenciais teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico experimentais obtidas por Jefimenko.

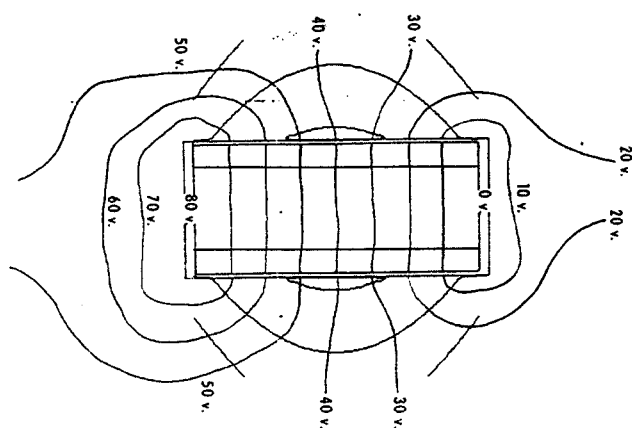


Figura 2.8: Linhas de campo elétrico teóricas sobrepostas às linhas equipotenciais experimentais obtidas por Jefimenko, Barnett e Kelly.

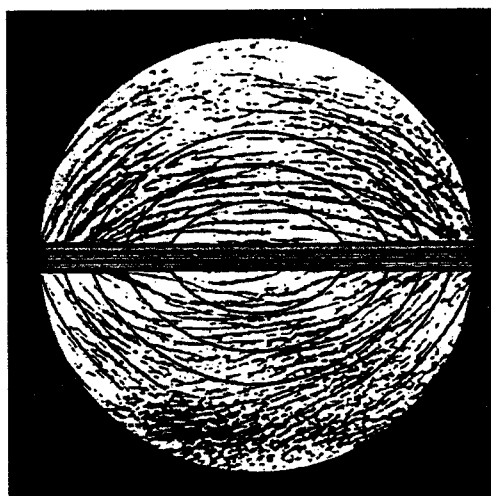


Figura 2.9: Linhas de campo elétrico teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico experimentais obtidas por Bergmann e Schaefer.

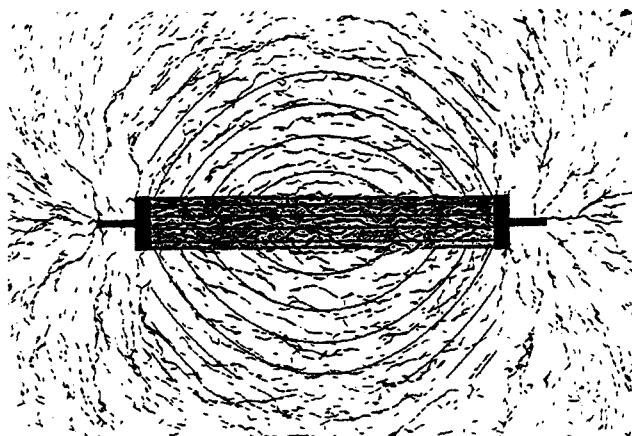


Figura 2.10: Linhas de campo elétrico teóricas sobrepostas às linhas de campo elétrico experimentais obtidas por Jefimenko.

Capítulo 3

Carga Puntual Próxima de um Condutor Cilíndrico Sem Corrente

3.1 Introdução

Para complementar o cálculo do Capítulo 2 e analisar a experiência de Sansbury precisamos da força eletrostática entre uma carga e um fio condutor sem corrente.

Neste capítulo calculamos a força eletrostática entre um condutor cilíndrico infinito de raio a mantido a um potencial constante e uma carga puntual externa q . Em nosso conhecimento, isto nunca foi feito antes. Não encontramos a solução deste problema em livros nem em artigos da literatura. Também perguntamos aos Drs. Mark A. Heald e John David Jackson se conheciam a solução e as respostas foram negativas. Por sugestão do Dr. Jackson resolvemos abordar este problema utilizando o método da função de Green, [Jac99, Caps. 1 a 3]. Iniciamos revisando uma solução conhecida do potencial dentro de uma caixa cilíndrica finita oca, fechada e aterrada, com uma carga puntual dentro dela, [Jac99, pág. 143]. Analisamos o limite de um cilindro infinito e exploramos a força exercida sobre a carga puntual. Então realizamos uma análise similar para o caso de uma carga puntual externa. Consideramos em detalhe a situação particular de um fio fino, isto é, com uma carga puntual muitos raios longe do eixo do cilindro.

Com a solução deste problema, temos a força de indução eletrostática que age sobre uma carga colocada próxima a um cilindro condutor infinito de raio arbitrário. Esta força, de ordem zero em v_d/c , pode então ser comparada com a força proporcional à corrente, de primeira ordem em v_d/c , apresentada no Capítulo 2.

3.2 Cilindro condutor finito com carga puntual dentro dele

Antes de tratar do caso que nos interessa, desenvolvemos inicialmente a solução de um problema resolvido por Jackson, [Jac99, pág. 143].

Considere uma caixa cilíndrica condutora de raio a e comprimento ℓ , com z sendo seu eixo de simetria, veja a Figura 3.1. Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) o centro da caixa está em $(\rho, z) = (0, \ell/2)$. Consideramos também uma carga puntual q localizada em $\vec{r}' = (\rho' < a, \varphi', z')$ dentro da caixa. Queremos calcular o potencial elétrico do sistema, o campo elétrico, a distribuição de carga superficial induzida por q sobre a superfície do cilindro e a força resultante entre o cilindro e q .

O potencial eletrostático ϕ obedece à equação de Poisson:

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.1)$$

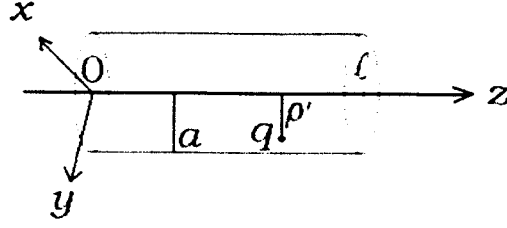


Figura 3.1: Casca cilíndrica oca, condutora e finita, de comprimento ℓ e raio a centrada em $z = \ell/2$, com z sendo seu eixo de simetria. A casca é tampada em $z = 0$ e em $z = \ell$ por condutores. Existe uma carga puntual q localizada em $(\rho, \varphi, z) = (\rho' < a, \varphi', 0 < z' < \ell)$.

Pelo método da função de Green padrão, a solução da equação de Poisson para este caso, com condições de contorno de Dirichlet (potencial especificado em uma superfície fechada) é dada por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}'') G(\vec{r}, \vec{r}'') d\vec{r}'' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\vec{r}'') \frac{\partial G}{\partial n''} da'', \quad (3.2)$$

onde V é o volume da caixa cilíndrica, S é sua superfície e $\partial/\partial n''$ é a derivada normal à superfície S da caixa direcionada para fora. Aqui $G(\vec{r}, \vec{r}'')$ é a função de Green que satisfaz a equação:

$$\nabla_{\vec{r}''}^2 G(\vec{r}, \vec{r}'') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}''). \quad (3.3)$$

Como a superfície do cilindro, em equilíbrio eletrostático, está em um potencial constante ϕ_0 , impomos que $G(\vec{r}, \vec{r}'') = 0$ nesta superfície.

Podemos expandir a função delta de Dirac em coordenadas cilíndricas, dada por:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}'') = \delta(\rho - \rho'') \frac{\delta(\varphi - \varphi'')}{\rho} \delta(z - z''). \quad (3.4)$$

As funções delta para φ e z podem ser escritas em termos de funções ortonormais:

$$\delta(z - z'') = \frac{2}{\ell} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{\ell} \sin \frac{n\pi z''}{\ell} \right], \quad (3.5)$$

$$\delta(\varphi - \varphi'') = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi'')} \right]. \quad (3.6)$$

Note nossa escolha particular de expansão para z , Eq. (3.5). Esta escolha satisfaz a condição $G(\vec{r}, \vec{r}'') = 0$ nas tampas da caixa cilíndrica localizadas em $z = 0$ e $z = \ell$. A função de Green pode ser expandida em uma maneira similar:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{\pi\ell} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi'')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{\ell} \sin \frac{n\pi z''}{\ell} g_m(k, \rho, \rho'') \right] \right\}, \quad (3.7)$$

onde $k = n\pi/\ell$ e $g_m(k, \rho, \rho'')$ é a função radial de Green a ser determinada. Substituindo esta expressão na Eq. (3.3) e usando (3.4) a (3.6) obtemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dg_m}{d\rho} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho''). \quad (3.8)$$

Para $\rho \neq \rho''$ o lado direito da Eq. (3.8) é igual a zero. Isto significa que g_m é uma combinação linear de funções de Bessel modificadas, $I_m(k\rho)$ e $K_m(k\rho)$. Suponha que $\psi_1(k\rho)$ satisfaz às condições de contorno para $\rho < \rho''$ e que $\psi_2(k\rho)$ satisfaz às condições de contorno para $\rho > \rho''$:

$$\psi_1(k\rho_{<}) = AI_m(k\rho_{<}) + BK_m(k\rho_{<}), \quad (3.9)$$

$$\psi_2(k\rho_{>}) = CI_m(k\rho_{>}) + DK_m(k\rho_{>}). \quad (3.10)$$

Aqui A , B , C e D são coeficientes a serem determinados. A simetria da função de Green em ρ e ρ'' requer que:

$$g_m(k, \rho, \rho'') = \psi_1(k\rho_{<})\psi_2(k\rho_{>}), \quad (3.11)$$

onde $\rho_{>}$ e $\rho_{<}$ são, respectivamente, o maior e o menor valor de ρ e ρ'' . O potencial não deve divergir para $\rho \rightarrow 0$, de modo que devemos ter $B = 0$. A função de Green deve se anular em $\rho = a$, isto é, $\psi_2(ka) = 0$. Disto resulta que $C = -DK_m(ka)/I_m(ka)$. A função g_m pode então ser escrita como:

$$g_m(k, \rho, \rho'') = HI_m(k\rho_{<}) \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right]. \quad (3.12)$$

O coeficiente de normalização $H = AC$ é determinado pela descontinuidade implicada pela função delta de Dirac na Eq. (3.8):

$$\left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_+ - \left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_- = -\frac{4\pi}{\rho''} = kW[\psi_1, \psi_2], \quad (3.13)$$

onde os sinais $\pm$ significam que devemos calcular $\rho = \rho'' \pm \epsilon$ e tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Na última igualdade, $W[\psi_1, \psi_2]$ é o wronskiano de ψ_1 e ψ_2 . Substituindo g_m na Eq. (3.13) e usando que $W[I_m(k\rho''), K_m(k\rho'')] = -1/(k\rho'')$, encontramos que $H = 4\pi$. A função de Green para o problema de um cilindro condutor finito com uma carga puntual dentro dele pode ser finalmente escrita como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{4}{\ell} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi'')} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(kz) \sin(kz'') I_m(k\rho_{<}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] \right\} \right\}. \quad (3.14)$$

3.2.1 Cilindro finito (com carga dentro) mantido a um potencial nulo

Considere que o cilindro esteja mantido a um potencial nulo, ou seja, $\phi(\vec{r}'') = 0$:

$$\phi(a, \varphi, 0 \leq z \leq \ell) = \phi(\rho \leq a, \varphi, \ell) = \phi(\rho \leq a, \varphi, 0) = 0. \quad (3.15)$$

Substituindo as Eqs. (3.14) e (3.15) na Eq. (3.2) obtém-se o potencial dentro do cilindro como dado por (com $\rho(\vec{r}'') = q\delta(\vec{r}' - \vec{r}'')$):

$$\phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q}{\pi\epsilon_0\ell} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{\ell}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times I_m\left(\frac{n\pi\rho_{<}}{\ell}\right) \left[K_m\left(\frac{n\pi\rho_{>}}{\ell}\right) - I_m\left(\frac{n\pi\rho_{>}}{\ell}\right) \frac{K_m\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)} \right] \right\} \right\}. \quad (3.16)$$

Aqui $\rho_{>}$ ($\rho_{<}$) é o maior (menor) valor de ρ e ρ' .

3.3 Cilindro condutor infinito com carga puntual dentro dele

Expandimos agora a solução de Jackson para o caso de uma casca cilíndrica de comprimento infinito.

A solução para um cilindro infinito difere da solução para o cilindro finito mudando essencialmente a expansão da função de delta na Eq. (3.5). No cilindro infinito não existe restrição de escolha para n (ou para k):

$$\delta(z - z'') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-z'')} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(z - z'')] dk. \quad (3.17)$$

A função de Green pode ser escrita como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi'')} \int_0^{\infty} \cos[k(z - z'')] I_m(k\rho_{<}) \times \right. \\ \left. \times \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] dk \right\}. \quad (3.18)$$

Note que podemos passar da Eq. (3.5) para a Eq. (3.17) transformando a série de Fourier em uma transformada de Fourier. Ou seja, fazendo $\ell \rightarrow \infty$, tomando $n\pi/\ell = k$, $dk = \pi/\ell$, $z \rightarrow z + \ell/2$, $z'' \rightarrow z'' + \ell/2$ e substituindo a soma infinita pela integral sobre k .

3.3.1 Cilindro infinito (com carga dentro) mantido a um potencial nulo

Considere que o cilindro esteja mantido a potencial nulo, ou seja, $\phi(a, \varphi, z) = 0$. Substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.2), o potencial dentro do cilindro pode ser escrito como (com $\rho(\vec{r}'') = q\delta(\vec{r}' - \vec{r}'')$):

$$\phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} \cos[k(z - z')] I_m(k\rho_{<}) \times \right. \\ \left. \times \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] dk \right\}. \quad (3.19)$$

Novamente $\rho_{>}$ ($\rho_{<}$) é o maior (menor) valor de ρ e ρ' .

O campo elétrico é dado por $\vec{E} = -\nabla\phi$, com componentes:

$$E_\rho(\rho < \rho') = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z - z')] \times \right. \\ \left. \times I_m'(k\rho) \left[K_m(k\rho') - I_m(k\rho') \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] dk \right\}, \quad (3.20)$$

$$E_\rho(\rho > \rho') = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z - z')] \times \right. \\ \left. \times I_m(k\rho') \left[K_m'(k\rho) - I_m'(k\rho) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] dk \right\}, \quad (3.21)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{q}{\pi^2 \varepsilon_0 \rho} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m \sin[m(\varphi - \varphi')] \int_0^{\infty} \cos[k(z - z')] I_m(k\rho_{<}) \times \right. \\ \left. \times \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] dk \right\}, \quad (3.22)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \int_0^{\infty} k \sin[k(z - z')] I_m(k\rho_{<}) \times \right. \\ \left. \times \left[K_m(k\rho_{>}) - I_m(k\rho_{>}) \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} \right] dk \right\}. \quad (3.23)$$

A força $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}')$ agindo sobre a carga q é dada pela Eq. (3.20) em $\vec{r} = \vec{r}'$ sem o primeiro termo entre colchetes (que é o campo gerado pela própria carga q). Existe apenas uma componente radial quando o cilindro tem comprimento infinito:

$$\vec{F}(\vec{r}') = \frac{q^2}{2\pi^2 \varepsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k I_m(k\rho') I_m'(k\rho') \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} dk \right\} \hat{\rho} \\ = -\frac{q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 \rho'^2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I_m^2(x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{K_m(xa/\rho')}{I_m(xa/\rho')} \right] dx \right\} \hat{\rho}. \quad (3.24)$$

Na última passagem da equação acima integramos por partes. Graficamos na Figura 3.2 a força da Eq. (3.24), normalizada por $F_0 \equiv q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2$, como função de ρ'/a . Esta força se anula quando $\rho'/a = 0$ e diverge quando $\rho' \rightarrow a$, como esperado.

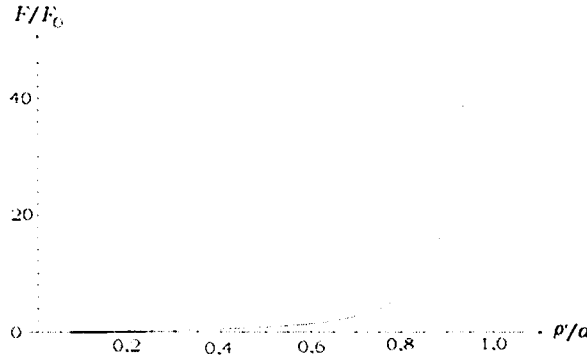


Figura 3.2: Força F entre um cilindro condutor infinito e aterrado, de raio a com eixo de simetria ao longo do eixo z e uma carga puntual q a uma distância $\rho' < a$ do eixo z , normalizada por $F_0 = q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2$.

As cargas superficiais podem ser calculadas usando a lei de Gauss, resultando:

$$\sigma(a, \varphi, z) = \varepsilon_0 E_\rho(a, \varphi, z) \\ = -\frac{q}{2\pi^2 a} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \int_0^{\infty} \cos[k(z - z')] \frac{I_m(k\rho')}{I_m(ka)} dk \right]. \quad (3.25)$$

A carga por unidade de comprimento $\lambda(a, z)$ é dada por:

$$\lambda(a, z) = \int_0^{2\pi} \sigma(a, \varphi, z) a d\varphi = -\frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(z - z')] \frac{I_0(k\rho')}{I_0(ka)} dk. \quad (3.26)$$

A carga total induzida pelo cilindro supondo $z' = 0$ pode ser obtida integrando a Eq. (3.26) de $z = -\infty$ até ∞ . Utilizando

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kz) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kz) dz, \quad (3.27)$$

obtem-se:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(a, z) dz = -q. \quad (3.28)$$

3.4 Cilindro condutor infinito com carga puntual fora dele

Estamos agora capacitados a explorar um terreno novo. Consideramos aqui o caso de uma carga puntual fora de uma casca cilíndrica condutora de comprimento infinito e sem corrente.

Suponha que a carga puntual q esteja localizada em $\vec{r}' = (\rho' > a, \varphi', z')$, fora do cilindro. A função de Green pode ser escrita analogamente neste caso como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi'')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z'')] g_m(k, \rho, \rho'') dk \right]. \quad (3.29)$$

A função g_m pode ser escrita como o produto de $\psi'_1(\rho < \rho'')\psi'_2(\rho > \rho'')$. As funções ψ'_1 e ψ'_2 satisfazem à equação modificada de Bessel. Elas podem ser escritas como combinações lineares das soluções possíveis:

$$\psi'_1(k\rho_{<}) = A'I_m(k\rho_{<}) + B'K_m(k\rho_{<}), \quad (3.30)$$

$$\psi'_2(k\rho_{>}) = C'I_m(k\rho_{>}) + D'K_m(k\rho_{>}). \quad (3.31)$$

Para $\rho \rightarrow \infty$ a função de Green deve permanecer finita. Isto significa que $C' = 0$. Adicionalmente, a função de Green deve se anular na superfície de contorno. Isto é, $G = 0$ na superfície do cilindro $\rho = a$. Disto resulta:

$$\psi'_1(a) = A'I_m(ka) + B'K_m(ka) = 0 \quad \rightarrow \quad B' = -A' \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)}. \quad (3.32)$$

Para obter a função g_m ainda devemos encontrar a constante H' :

$$g_m(k, \rho, \rho'') = H' \left[I_m(k\rho_{<}) - K_m(k\rho_{<}) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho_{>}), \quad (3.33)$$

onde $\rho_{>}$ ($\rho_{<}$) é o maior (menor) valor de ρ e ρ'' .

Da Eq. (3.13) temos que $H' = 4\pi$:

$$g_m(k, \rho, \rho'') = 4\pi \left[I_m(k\rho_{<}) - K_m(k\rho_{<}) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho_{>}). \quad (3.34)$$

A função de Green é dada por:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi'')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z'')] \times \left[I_m(k\rho_{<}) - K_m(k\rho_{<}) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho_{>}) dk \right\}. \quad (3.35)$$

3.4.1 Cilindro infinito (com carga fora) mantido a um potencial nulo

Suponha que a superfície do cilindro esteja mantida a potencial nulo, ou seja:

$$\phi(a, \varphi, z) = 0. \quad (3.36)$$

Aplicando as Eqs. (3.35) e (3.36) na Eq. (3.2) com $\rho(\vec{r}'') = q\delta(\vec{r}' - \vec{r}'')$ resulta:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho_{<}) - K_m(k\rho_{<}) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho_{>}) dk \right\}. \quad (3.37) \end{aligned}$$

Aqui $\rho_{>}$ ($\rho_{<}$) é o maior (menor) valor de ρ e ρ' .

Longe da origem, $\rho \gg \rho'$, podemos aproximar a Eq. (3.37). O primeiro termo que aparece entre colchetes é $I_m(k\rho_{<})K_m(k\rho_{>})$, com $\rho_{<} = \rho'$ e $\rho_{>} = \rho$. Note a presença do termo $K_m(k\rho)$, com $\rho \gg \rho'$, que decai rapidamente quando k aumenta. Isto implica que a principal contribuição do integrando está na região $0 < k < 1/\rho$. Então podemos aproximar $I_m(k\rho')$ para pequenos argumentos, $I_m(k\rho') \approx (k\rho'/2)^m/m!$. Disto podemos ver que o termo mais relevante é o primeiro, $m = 0$. A integral do primeiro termo entre colchetes da Eq. (3.37) é então dada por:

$$\phi_1(\rho \gg \rho') \approx \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] K_0(k\rho) dk = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}}, \quad (3.38)$$

onde usamos na última equação a identidade: $(2/\pi) \int_0^{\infty} \cos(xt) K_0(yt) dt = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, [AW95, Prob. 11.5.11]. O segundo termo que aparece entre colchetes na Eq. (3.37) pode ser tratado de maneira similar. A principal contribuição do integrando está na região $0 < k < 1/\rho$. Novamente, o termo mais relevante é o primeiro, $m = 0$. Nesse sentido, aproximamos a função $K_0(k\rho')$ para pequenos argumentos: $K_0(k\rho') \approx -\ln(k\rho')$. A integral do segundo termo entre colchetes da Eq. (3.37) resulta em:

$$\phi_2(\rho \gg \rho') \approx -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \frac{\ln(k\rho')}{\ln(ka)} K_0(k\rho) dk. \quad (3.39)$$

Podemos obter da Eq. (3.37) o campo elétrico dado por $\vec{E} = -\nabla\phi$, com componentes:

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho < \rho') = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m'(k\rho) - K_m'(k\rho) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho') dk \right\}, \quad (3.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho > \rho') = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho') - K_m(k\rho') \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m'(k\rho) dk \right\}, \quad (3.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\varphi = \frac{q}{\pi^2\epsilon_0\rho} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m \sin[m(\varphi-\varphi')] \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho_{<}) - K_m(k\rho_{<}) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho_{>}) dk \right\}, \quad (3.42) \end{aligned}$$

$$E_z = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \sin[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho_{<}) - K_m(k\rho_{<}) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} \right] K_m(k\rho_{>}) dk \right\}. \quad (3.43)$$

A força $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}')$ agindo sobre a carga q é dada pela Eq. (3.40) em $\vec{r} = \vec{r}'$ sem o primeiro termo entre colchetes (que é o campo gerado pela própria carga q). Existe apenas uma componente radial:

$$\vec{F}(\vec{r}') = \frac{q^2}{2\pi^2\epsilon_0} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k K_m(k\rho') K_m'(k\rho') \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} dk \right] \hat{\rho} \\ = -\frac{q^2}{4\pi^2\epsilon_0\rho'^2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} K_m^2(x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{I_m(ax/\rho')}{K_m(ax/\rho')} \right] dx \right\} \hat{\rho}. \quad (3.44)$$

Na última passagem da equação acima integramos por partes. Graficamos a força da Eq. (3.44) na Figura 3.3, normalizada por $F_0 \equiv q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$, como função de ρ'/a . Esta força se anula para $\rho'/a \rightarrow \infty$ e diverge para $\rho' \rightarrow a$, como esperado.

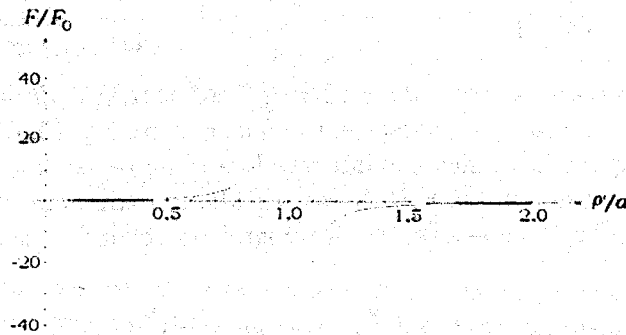


Figura 3.3: Força F entre um cilindro condutor infinito e aterrado, de raio a cujo eixo de simetria está ao longo do eixo z e uma carga puntual q a uma distância ρ' do eixo z , normalizada por $F_0 = q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. Para $\rho' < a$ a força vem da Eq. (3.24), enquanto que para $\rho' > a$ ela é dada pela Eq. (3.44).

As cargas superficiais podem ser calculadas usando a lei de Gauss, resultando:

$$\sigma(a, \varphi, z) = \epsilon_0 E_\rho(a, \varphi, z) \\ = -\frac{q}{2\pi^2 a} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \frac{K_m(k\rho')}{K_m(ka)} dk \right]. \quad (3.45)$$

A carga por unidade de comprimento $\lambda(a, z)$ é dada por:

$$\lambda(a, z) = \int_0^{2\pi} \sigma(a, \varphi, z) a d\varphi = -\frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \frac{K_0(k\rho')}{K_0(ka)} dk. \quad (3.46)$$

É interessante obter o comportamento de λ para um fio fino, longe de z' ($|z-z'| \gg \rho' \gg a$). Utilizando a Eq. (3.150) de [Jac99] obtemos:

$$\lambda \approx -\frac{q}{2 \ln(|z|/a)} \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}}. \quad (3.47)$$

A carga total induzida no cilindro pode ser obtida integrando a Eq. (3.46) de $z = -\infty$ a ∞ . Utilizando a Eq. (3.27) obtém-se:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(a, z) dz = -q. \quad (3.48)$$

Um gráfico de $\lambda(a, z)$ como função de z , com $z' = 0$ e normalizado por q/ρ' , é dado na Figura 3.4. O valor máximo de $\lambda(a, z)$ é encontrado em $z = z'$, como esperado. Na Figura 3.5 graficamos $\lambda_{\text{máx}}$ como função de ρ'/a , normalizada por q/ρ' . Desta Figura podemos ver que $\lambda_{\text{máx}} \rightarrow 0$ para $\rho'/a \rightarrow \infty$, isto é, para um cilindro condutor de raio nulo, uma simples linha condutora.

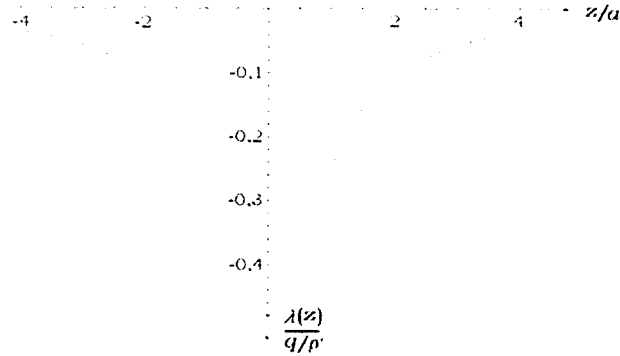


Figura 3.4: Densidade linear de carga induzida no cilindro condutor infinito, λ , com uma carga puntual fora dele, Eq. (3.46), como função de z/a . Utilizamos $z' = 0$, $\rho'/a = 2$ e normalizamos por q/ρ' .

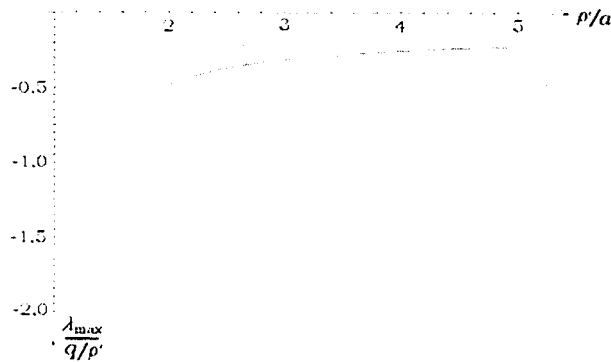


Figura 3.5: Densidade linear de carga induzida máxima, $\lambda_{\text{máx}}(z = z')$, no cilindro condutor infinito com uma carga puntual fora dele, Eq. (3.46), como função de ρ'/a . Normalizamos o gráfico por q/ρ' .

3.4.2 Cilindro infinito fino (com carga fora) mantido a um potencial nulo

Considere que o cilindro condutor aterrado seja muito fino, isto é, $a \ll \rho'$. As funções modificadas de Bessel podem ser aproximadas para pequenos argumentos por, [GR63, Seção 8.44]:

$$I_m(y \ll 1) \approx \frac{1}{m!} \frac{y^m}{2^m}, \quad (3.49)$$

$$K_0(y \ll 1) \approx -\ln \frac{y}{2} - \gamma, \quad (3.50)$$

$$K_m(y \ll 1) \approx \frac{(m-1)! 2^{m-1}}{y^m}, \quad m > 0. \quad (3.51)$$

Aqui $\gamma = 0.577$ é a constante de Euler-Mascheroni.

O termo entre colchetes na Eq. (3.44) para $m = 0$ e para $m > 0$ pode ser aproximado por, respectivamente:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{1}{-\ln \frac{ax}{2\rho'} - \gamma} \right] \approx -\frac{1}{\ln(a/\rho')}, \quad (3.52)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{1}{m!} \frac{(ax/\rho')^m}{2^m} \frac{(ax/\rho')^m}{(m-1)! 2^{m-1}} \right] \approx \frac{(2m+1)x^{2m}(a/\rho')^{2m}}{m!(m-1)! 2^{2m-1}}. \quad (3.53)$$

O termo mais relevante para $\rho' \gg a$ é, portanto, $m = 0$. Usando a identidade $\int_0^\infty K_0^2(x) dx = \pi^2/4$ temos a força agindo sobre a carga q como sendo dada por:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\rho' \gg a) &\approx -\frac{q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho'^2} \int_0^\infty K_0^2(x) \frac{\ln(2\rho'/xa) - \gamma + 1}{[\gamma - \ln(2\rho'/xa)]^2} dx \hat{\rho} \\ &\approx -\frac{q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho'^2 \ln(\rho'/a)} \int_0^\infty K_0^2(x) dx \hat{\rho} = -\frac{q^2}{16\epsilon_0 \rho'^2 \ln(\rho'/a)} \hat{\rho}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Alternativamente, outra expressão para a força pode ser encontrada integrando a força exercida pela densidade linear de carga de um cilindro fino, $\lambda(a, z)$ da Eq. (3.46), agindo sobre a carga puntual q . Utilizando que $\int_{-\infty}^\infty \rho' \cos[k(z-z')] dz / [\rho'^2 + (z-z')^2]^{3/2} = 2kK_1(k\rho')$ obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}') &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \frac{\lambda(a, z)}{\rho'^2 + z^2} dz \hat{\rho} \\ &= -\frac{q^2}{2\pi^2 \epsilon_0 \rho'^2} \int_0^\infty x \frac{K_0(x)K_1(x)}{K_0(xa/\rho')} dx \hat{\rho}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para comparar as Eqs. (3.54) e (3.55) podemos expandir o último termo no integrando da Eq. (3.55) usando a aproximação $\rho' \gg a$. Utilizando que $K_1(x) = -dK_0/dx$, integramos por partes e usando que $K_0(xa/\rho') \approx -\ln(xa/2\rho') - \gamma \approx \ln(\rho'/a)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{q^2}{2\pi^2 \epsilon_0 \rho'^2} \int_0^\infty x \frac{K_0(x)(dK_0/dx)}{K_0(xa/\rho')} dx \hat{\rho} \\ &\approx -\frac{q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho'^2} \int_0^\infty K_0^2(x) \frac{\ln(2\rho'/xa) - \gamma + 1}{[\gamma - \ln(2\rho'/xa)]^2} dx \hat{\rho} \\ &\approx -\frac{q^2}{16\epsilon_0 \rho'^2 \ln(\rho'/a)} \hat{\rho}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

que é exatamente a Eq. (3.54).

3.4.3 Cilindro infinito mantido a um potencial constante qualquer

Suponha que o cilindro condutor está mantido a um potencial constante qualquer, $\phi(a, \varphi, z) = \phi_0$. Da Eq. (3.35) obtemos (com $n'' = \rho_< e \rho_> = \rho$):

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n''} \right|_{\rho''=a} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi'')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z-z'')] \frac{K_m(k\rho)}{K_m(ka)} \times \right. \\ \left. \times [I_m'(k\rho'')K_m(ka) - I_m(ka)K_m'(k\rho'')] dk \right\}_{\rho''=a} \quad (3.57)$$

$$= \frac{2}{\pi a} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi'')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z'')] \frac{K_m(k\rho)}{K_m(ka)} dk \right\}. \quad (3.58)$$

Na última igualdade usamos o wronskiano $W[I_m(k\rho''), K_m(k\rho'')] = -1/(k\rho'')$.

O segundo termo dado pela Eq. (3.2) pode ser escrito como um termo adicional ϕ^+ dado por:

$$\phi^+ = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\vec{r}'') \frac{\partial G}{\partial n''} da'' \\ = \frac{\phi_0}{2\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} a dz'' \int_0^{2\pi} d\varphi'' \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi'')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z'')] \frac{K_m(k\rho)}{K_m(ka)} dk \right\} \\ = \frac{\phi_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz'' \int_0^{\infty} \cos[k(z-z'')] \frac{K_0(k\rho)}{K_0(ka)} dk \\ = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^{\infty} dz'' \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \frac{K_0(k\rho)}{K_0(ka)} dk. \quad (3.59)$$

Na última igualdade mudamos os limites da integral sobre z'' .

Para calcular a última integral, utilizamos a Eq. (3.17). Mudando variáveis, temos:

$$\int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] dz' = \pi \delta(k).$$

A aproximação para pequenos argumentos de $K_0(y)$, dada por $K_0(y) \approx -\ln y$, é neste caso inapropriada, porque o termo $\lim_{k \rightarrow 0} K_0(k\rho)/K_0(ka) \rightarrow 1$ para qualquer ρ . Isto é válido para um cilindro infinito, mas não dá nenhuma idéia física sobre o comportamento do potencial como função de ρ . Devemos usar a aproximação $k \ll 1/\rho < 1/a$, resultando:

$$\phi^+ \approx \phi_0 \frac{\ln(k\rho)}{\ln(ka)}, \quad \text{para} \quad k \ll 1/\rho < 1/a. \quad (3.60)$$

O potencial fora de um cilindro condutor infinito com uma carga fora, mantido a um potencial constante ϕ_0 , é então dado pela soma das Eqs. (3.37) e (3.60).

Podemos encontrar o potencial de um cilindro mantido a um potencial constante ϕ_0 por um método distinto. Suponha uma linha reta e longa, de comprimento ℓ ao longo do eixo z , uniformemente carregada com uma densidade linear de carga λ . O potencial a uma distância ρ do eixo z , para $\ell \gg \rho$, é dado por:

$$\phi_{\text{linha}} \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\ell}{\rho}. \quad (3.61)$$

A uma distância $\rho = a$ do eixo z , temos um potencial constante $\phi_0 = 2\lambda \ln(\ell/a)$, que é a mesma condição de contorno de antes. Isto implica que a solução é a mesma. Substituindo λ , obtemos o potencial como sendo dado por:

$$\phi_{\text{linha}} = \phi_0 \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)}. \quad (3.62)$$

Note que a Eq. (3.60) com $k \ll 1/\rho < 1/a$ e a Eq. (3.62) com $\ell \gg a > \rho$ são essencialmente as mesmas. Utilizamos de agora em diante a Eq. (3.62) como a solução para um cilindro comprido mantido a um potencial constante.

A solução final para o potencial do problema de um cilindro condutor comprido mantido a um potencial constante ϕ_0 com uma carga q fora é dada por:

$$\phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] K_m(k\rho_>) \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho_<) - \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} K_m(k\rho_<) \right] dk \right\} + \phi_0 \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)}. \quad (3.63)$$

O campo elétrico, a força exercida sobre q , a densidade superficial de carga e a densidade linear de carga são dados por, respectivamente:

$$E_\rho(\rho < \rho') = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m'(k\rho) - \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} K_m'(k\rho) \right] K_m(k\rho') dk \right\}, \quad (3.64)$$

$$E_\rho(\rho > \rho') = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho') - \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} K_m(k\rho') \right] K_m'(k\rho) dk \right\} + \frac{\phi_0}{\rho \ln(\ell/a)}, \quad (3.65)$$

$$E_\varphi = \frac{q}{\pi^2\epsilon_0\rho} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m \sin[m(\varphi-\varphi')] \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho_<) - \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} K_m(k\rho_<) \right] K_m(k\rho_>) dk \right\}, \quad (3.66)$$

$$E_z = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \sin[k(z-z')] \times \right. \\ \left. \times \left[I_m(k\rho_<) - \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} K_m(k\rho_<) \right] K_m(k\rho_>) dk \right\}, \quad (3.67)$$

$$\vec{F}(\vec{r}') = -\frac{q^2}{4\pi^2\epsilon_0\rho'^2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} K_m^2(x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{I_m(ax/\rho')}{K_m(ax/\rho')} \right] dx \right\} \hat{\rho} + \frac{q\phi_0}{\rho' \ln(\ell/a)} \hat{\rho}, \quad (3.68)$$

$$\sigma(a, \varphi, z) = -\frac{q}{2\pi^2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_0^{\infty} k \cos[k(z-z')] \frac{K_m(k\rho')}{K_m(ka)} dk \right\} + \frac{\epsilon_0\phi_0}{a \ln(\ell/a)}, \quad (3.69)$$

$$\lambda(a, z) = -\frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \frac{K_0(k\rho')}{K_0(ka)} dk + \frac{2\pi\epsilon_0\phi_0}{\ln(\ell/a)}. \quad (3.70)$$

Da Eq. (3.70) podemos calcular a carga total no cilindro:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(a, z) dz = -\frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \cos[k(z - z')] \frac{K_0(k\rho')}{K_0(ka)} dk + \frac{2\pi\ell\epsilon_0\phi_0}{\ln(\ell/a)} \\ &= -q \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(k\rho')}{\ln(ka)} + \frac{2\pi\ell\epsilon_0\phi_0}{\ln(\ell/a)} = -q + \frac{2\pi\ell\epsilon_0\phi_0}{\ln(\ell/a)}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Para um cilindro neutro, isto é, com carga total $Q = 0$, podemos relacionar o potencial constante ϕ_0 com a carga q por:

$$\phi_0 = \frac{q \ln(\ell/a)}{2\pi\epsilon_0\ell}. \quad (3.72)$$

3.5 Discussão

Podemos expressar a força exercida pelo cilindro condutor infinito e aterrado, de raio a , sobre a carga puntual externa q a uma distância $\rho' > a$ do eixo do cilindro como sendo dada por:

$$\vec{F} = -\alpha_L \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\rho'^2} \hat{\rho}, \quad (3.73)$$

onde α_L é um parâmetro adimensional. Neste trabalho obtivemos três diferentes expressões para esta força, dadas pelas Eqs. (3.44), (3.54) e (3.55). O parâmetro α_L para estes três casos é dado por, respectivamente:

$$\alpha_L = \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} K_m^2(x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{I_m(ax/\rho')}{K_m(ax/\rho')} \right] dx \right\}, \quad (3.74)$$

$$\alpha_L \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_0^2(x) \frac{\ln(2\rho'/xa) - \gamma + 1}{[\gamma - \ln(2\rho'/xa)]^2} dx \approx \frac{\pi}{4 \ln(\rho'/a)}, \quad (3.75)$$

$$\alpha_L = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x \frac{K_0(x)K_1(x)}{K_0(xa/\rho')} dx. \quad (3.76)$$

Graficamos estes três valores de α_L como função de a/ρ' nas Figuras 3.6 e 3.7. Vemos que estes três valores de α_L convergem entre si conforme $a/\rho' \rightarrow 0$. Isto era esperado porque a Eq. (3.44) é válida para um cilindro de raio finito com valor arbitrário de a/ρ' , enquanto que as Eqs. (3.54) e (3.55) são válidas apenas para um cilindro fino, isto é, para $a \ll \rho'$.

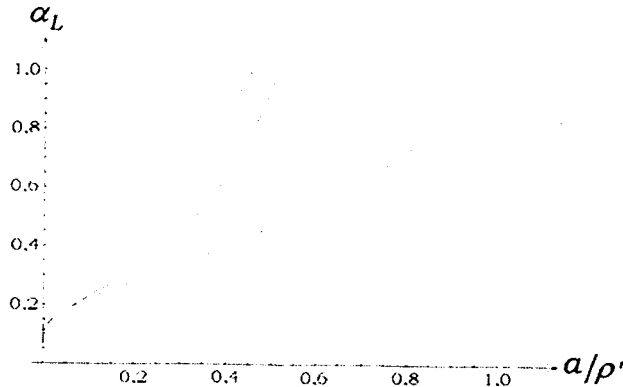


Figura 3.6: Parâmetro adimensional α_L dado pela Eq. (3.73) como função de a/ρ' . A linha contínua representa o parâmetro advindo da Eq. (3.74); a linha com traços juntos representa o parâmetro da Eq. (3.75); e a linha com traços espaçados representa o parâmetro da Eq. (3.76).

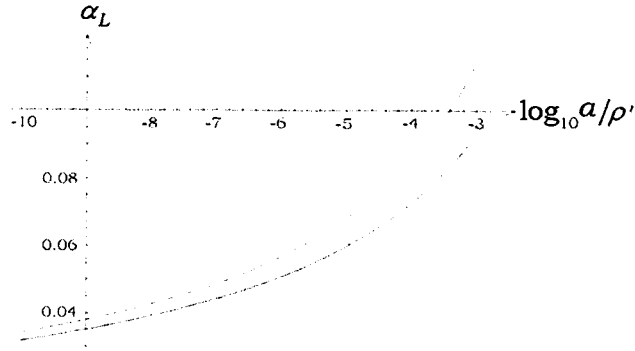


Figura 3.7: Parâmetro adimensional α_L dado pela Eq. (3.73) como função de a/ρ' , para a região $a/\rho' \ll 1$. A linha contínua representa o parâmetro advindo da Eq. (3.74); a linha com traços juntos representa o parâmetro da Eq. (3.75); e a linha com traços espaçados (que neste intervalo de a/ρ' está sobreposta à linha contínua) representa o parâmetro da Eq. (3.76).

Da Eq. (3.75) vemos que para $a/\rho' \ll 1$, o parâmetro α_L se comporta como $\pi/[4 \ln(\rho'/a)]$. Isto é, anula-se para $a/\rho' \rightarrow 0$. De acordo com estes cálculos concluímos que não existe força entre uma carga puntual e uma linha condutora aterrada ideal (de raio nulo). Já foi suposto que $0 < \alpha_L < 1$, [ARM99], não especificamente para uma linha condutora aterrada, mas para uma linha condutora com carga total nula. Em particular, se esperava que $0,1 < \alpha_L < 0,9$, conjecturando o resultado com base na análise dimensional e em analogia com o caso de uma carga puntual q a uma distância ρ' de um plano condutor infinito. Neste último caso, a força resultante sobre a carga teste é dada por $\alpha_P q^2 / 4\pi\epsilon_0 \rho'^2$, com $\alpha_P = 1/4 = 0,25$. Os resultados do cálculo apresentado aqui, por outro lado, indicam que $\alpha_L = 0$ para $a/\rho' = 0$ (no caso de uma linha infinita aterrada). Este é um resultado interessante que indica que a existência de uma força sobre uma carga teste externa a um condutor requer não apenas que ela esteja a uma distância finita do condutor, mas também a existência de uma superfície não nula no condutor com o qual ela interage.

Podemos comparar nosso resultado com a indução eletrostática em uma esfera condutora inicialmente descarregada (carga total Q nula). Suponha uma carga q colocada a uma distância ρ' do centro da esfera de raio a . A força eletrostática entre a esfera condutora e a carga externa pode ser escrita como:

$$\vec{F} = -\alpha_E \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \rho'^2} \hat{\rho}. \quad (3.77)$$

O parâmetro α_E da força sobre a carga é dado por, [Jac75, pág. 59]:

$$\alpha_E = \frac{a}{\rho'} \left[1 - \frac{1}{(1 - a^2/\rho'^2)^2} \right]. \quad (3.78)$$

A Figura 3.8 mostra este parâmetro em função de a/ρ' comparado ao α_L do cilindro condutor com carga perto dele.

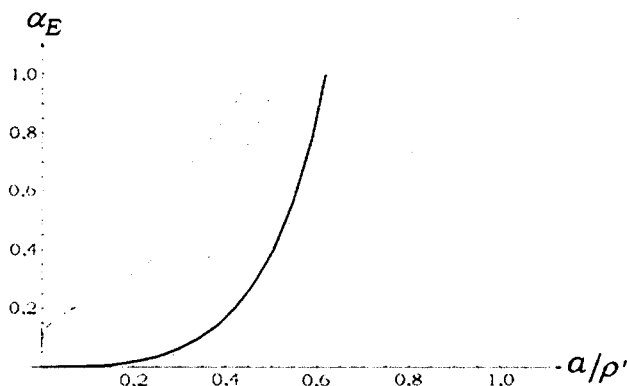


Figura 3.8: Parâmetro adimensional α_E dado pela Eq. (3.78) como função de a/ρ' (linha grossa contínua). Este gráfico está sobreposto à Figura 3.6.

3.6 Comparação com as experiências de Sansbury, Bartlett e Maglic

Podemos agora comparar o resultado teórico que encontramos com a experiência de Sansbury, [San85], discutida na Seção 1.3. Sansbury não mediu especificamente o valor da força eletrostática (que move a chapa metálica de a para b na Figura 1.13). Ainda assim, é importante que tenhamos uma idéia da ordem de grandeza desta força, comparada com a força de primeira ordem (proporcional à corrente) que ele obteve.

A chapa metálica se encontrava a uma distância de aproximadamente $\rho' = 3,5$ cm do condutor metálico em forma de U, enquanto o fio tinha um raio de $a = 4,25$ mm. Isto fornece $a/\rho' = 0,121$. O fator α_L calculado a partir da Eq. (3.74) fornece $\alpha_L \approx 0,247$. A carga que ele estimou na chapa metálica é de 5×10^{-10} C, de modo que a força eletrostática resulta de acordo com as Eqs. (3.73) e (3.74) em $F_{\text{Sansbury}} = 4,5 \times 10^{-7}$ N. Para comparação, calculamos também a mesma força sobre um elétron ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C) e sobre uma carga de fricção ($Q_{\text{fricção}} = 10^{-6}$ C), respectivamente: $F_e = 4,6 \times 10^{-26}$ C e $F_{\text{fricção}} = 1,8$ N. Note a diferença nas ordens de grandeza pois a força (3.73) depende do quadrado da carga teste.

Podemos concluir que a força eletrostática presente na experiência de Sansbury é da mesma ordem de grandeza que a força de primeira ordem que ele mediu (maior que $1,7 \times 10^{-7}$ N). Porém, devemos lembrar que o efeito de indução eletrostática não deve ter interferido na medida da força de primeira ordem, pois Sansbury eliminou este efeito deixando o sistema entrar em equilíbrio estático antes de ligar a corrente.

Para comparar com a força de primeira ordem teórica que apresentamos no Capítulo 2, usamos o campo elétrico fora do cilindro, Eq. (2.7). Suponha que o fio tenha um comprimento total $\ell = 1,20$ m, formado por dois braços de 50 cm e dois segmentos de 10 cm, veja a Figura 1.12. Estamos supondo, simplificada, que o fio esteja todo esticado e não em forma de U. O fio de Sansbury era de cobre com um diâmetro de 0,95 cm. O cobre tem condutividade de $5,7 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, resistividade de $1,8 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ e número de partículas livres portadoras de carga por unidade de volume dado por $8,5 \times 10^{28} \text{m}^{-3}$. Logo estimamos a resistência total de seu fio como sendo de $3,0 \times 10^{-4} \Omega$. Com uma corrente de 900 A a diferença de potencial entre as extremidades do fio é de 0,27 V. A componente longitudinal do campo elétrico, E_z , independente de z , obtida da Eq. (2.7) com $\phi_L - \phi_R = 0,27$ V, $\ell = 1,20$ m, $a = 4,75$ mm e $\rho = 3,9$ cm (a distância da placa metálica à superfície do fio era de 3,5 cm, e adicionamos o valor de um raio) tem valor $|E_z| = 0,14$ V/m. A força sobre $q = 5 \times 10^{-10}$ C é de $|F_z| = 7,1 \times 10^{-11}$ N. A componente radial, E_ρ , depende da soma e da diferença dos potenciais nas extremidades, e da posição z , veja a Eq. (2.7). Podemos supor inicialmente que os potenciais sejam simétricos, ou

seja, $\phi_L = -\phi_R$. Assim, em $z = 0$ temos $E_\rho(\rho, z = 0) = 0$ V/m. O valor máximo de E_ρ será em $z = \pm \ell/2$, ou seja: $|E_\rho(\rho, z = \pm \ell/2)| = 0,69$ V/m. A componente radial da força para $q = 5 \times 10^{-10}$ C é de $|F_\rho| = 3,5 \times 10^{-10}$ N. Note que, neste caso da componente de primeira ordem, a força que age sobre a carga teste é diretamente proporcional à magnitude desta carga. Nestes exemplos numéricos encontramos uma força teórica três ordens de grandeza inferior à medida por Sansbury.

Sansbury não especificou se os potenciais eram de fato simétricos ($\phi_L = -\phi_R$). Podemos supor, por exemplo, que $\phi_L = 0,27$ V e $\phi_R = 0$ V. Neste caso, $|E_\rho(\rho, z = 0)| = 1,2$ V/m ($|F_\rho| = 5,8 \times 10^{-10}$ N). A força em $z = 0$ é proporcional à soma dos potenciais nas extremidades. Entretanto, este efeito vem do fato do fio não ser neutro (e não por causa de indução eletrostática) e não depende da corrente. Note que nos cálculos teóricos não consideramos quaisquer efeitos que apareçam devido às dobras em ângulo reto no fio. As cargas que se acumulam nestas dobras, [Ros70], podem contribuir significativamente nesta experiência. Apesar disto, não nos parece, a partir de nossa comparação teórica, que a força medida por Sansbury seja esta força de primeira ordem discutida aqui, Eq. (2.7), nem devido ao fato do fio estar carregado (ou seja, com potenciais assimétricos nas extremidades).

Bartlett e Maglic, [BM90], realizaram uma experiência semelhante à de Sansbury. Entretanto, enquanto Sansbury usou um único fio de cobre, eles utilizaram uma bobina retangular de cobre, com diâmetro de $1/8$ de polegada (raio de cada fio = $1,6 \times 10^{-3}$ m), com 30 cm de lado e 60 cm de comprimento para cada volta, com um total de 16 voltas. Em cada volta fluía uma corrente de 50 A, dando um total de 800 A. O comprimento total da bobina esticada era de 28,8 m. Os potenciais nas extremidades da bobina eram de $-8,65$ V e $-3,35$ V, com um valor médio de $-6,0$ V no meio da bobina. Desconsiderando a blindagem, a força que eles mediram foi de $(0,27 \pm 0,27) \times 10^{-7}$ N. A geometria da placa carregada era semelhante à de Sansbury. Aqui vamos considerar, simplificada, que cada volta da bobina corresponde a um pedaço de fio reto com $\ell = 1,8$ m, com uma diferença de potencial de $6/16 = 0,375$ V entre as extremidades. Com estes valores, cada volta da bobina gera um campo elétrico radial eletrostático de $|E_\rho(\rho, z = 0)| = 0,85$ V/m. A força total das 16 voltas sobre a placa (com uma carga $q = 5 \times 10^{-10}$ C) seria de $|F_\rho| = 6,8 \times 10^{-9}$ N, atrativa. Esta força é pelo menos uma ordem de grandeza menor do que a que eles mediram.

Mas como mencionamos na Seção 1.3, a blindagem metálica que colocaram ao redor do circuito altera as forças internas em relação ao caso sem blindagem. Como é muito difícil estimar o efeito causado pela blindagem que utilizaram, fica praticamente inviável comparar suas medidas com nossos cálculos teóricos.

Capítulo 4

Fio Cilíndrico com Bateria

4.1 Introdução

O problema apresentado no Capítulo 2 trata de um fio cilíndrico longo conduzindo uma corrente constante. No entanto, não se menciona onde deve se localizar a fonte de tensão constante (por exemplo, uma bateria) que alimenta o sistema.

Queremos estender o tratamento e analisar o comportamento do potencial, campo elétrico e cargas superficiais próximas à bateria. Ou seja, para completar a análise do caso representado pela Figura 2.1 queremos calcular a força de primeira ordem, proporcional à corrente, atuando sobre a carga q externa ao circuito mas próxima do centro do segmento DA contendo a bateria. Com este objetivo, analisamos o problema de uma casca cilíndrica longa, oca e resistiva, conduzindo uma corrente estacionária, mas colocamos a bateria no centro do cilindro. Existe agora uma descontinuidade no potencial no centro do cilindro. Supomos que a bateria seja ideal. Ela é considerada um círculo, de raio igual ao da casca, sem espessura e mantendo uma diferença de potencial constante entre as duas metades do cilindro que ela separa.

Os resultados deste Capítulo encontram-se em um artigo aceito para publicação (2004), [HOA04a]

Supomos que a casca cilíndrica vazia tenha raio a e comprimento ℓ com $\ell \gg a$. A casca tem uma resistividade uniforme e transporta uma corrente estacionária I ao longo da direção positiva de z , que coincide também com seu eixo. Supomos que a bateria idealizada esteja em $(\rho, \varphi, z) = (a, \varphi, 0)$, veja a Figura 4.1. Isto é uma analogia com o tratamento de Heald, que considerou uma linha de bateria em $(\rho, \varphi, z) = (a, \pi, z)$ fazendo com que a casca cilíndrica transportasse uma corrente na direção azimutal, [Hea84]. Supomos vácuo dentro e fora da casca.

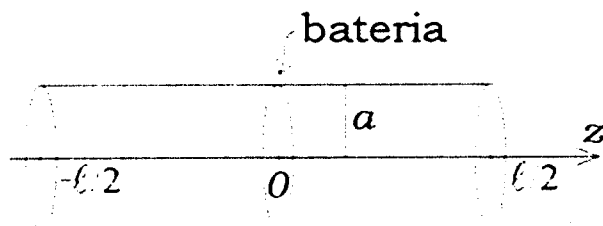


Figura 4.1: Uma casca cilíndrica resistiva de raio a e comprimento $\ell \gg a$ conduzindo uma corrente estacionária ao longo do eixo z . Existe uma bateria em forma de círculo centrada em $z = 0$ mantendo uma diferença de potencial de $2\phi_0$ em $z = 0$.

A lei de Ohm pode ser escrita como $\vec{J} = g\vec{E}$, onde $\vec{J} = (I/2\pi at)\hat{z}$ é a densidade volumétrica de corrente ($t \ll a$ é a espessura da casca), g a condutividade do fio e $\vec{E}$ o campo elétrico.

Supomos g e $\vec{J}$ constantes. Ou seja, independentes de φ , de z e do tempo. Assim, o mesmo deve se aplicar para $\vec{E}$. Como $\vec{E} = -\nabla\phi$, onde ϕ é o potencial, isto implica que ϕ ao longo da casca ($\rho = a$) deve ser uma função linear de z . Supondo que a bateria gera uma diferença de potencial de $2\phi_0$ entre seus dois terminais localizados em $z \rightarrow 0^-$ e $z \rightarrow 0^+$, o potencial linear em $\rho = a$ pode ser escrito como (Figura 4.2):

$$\phi(a, \varphi, z < 0) = (\phi_R - \phi_L)\frac{z}{\ell} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2} - \phi_0, \quad (4.1)$$

$$\phi(a, \varphi, z > 0) = (\phi_R - \phi_L)\frac{z}{\ell} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2} + \phi_0. \quad (4.2)$$

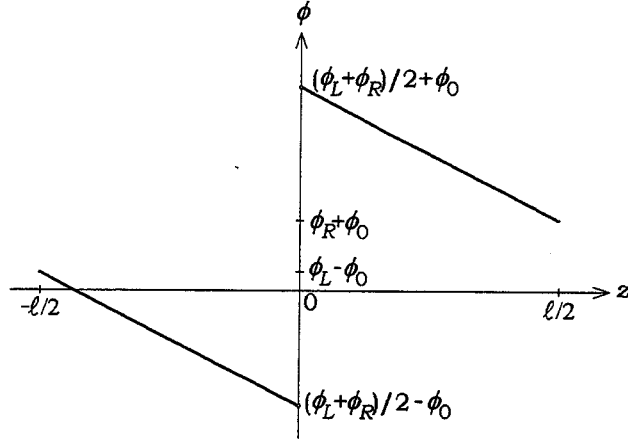


Figura 4.2: Potencial ao longo da casca cilíndrica.

Nosso objetivo é encontrar o potencial e o campo elétrico em $\rho < a$ e em $\rho > a$ dadas as condições de contorno acima. Então podemos obter as densidades superficiais de carga nas superfícies interna e externa da casca cilíndrica.

Este problema pode ser separado em duas partes: a) o problema eletrostático de uma casca cilíndrica separada em $z = 0$ por uma fina barreira isolante mantida em $-\phi_0$ para $z < 0$ e em ϕ_0 para $z > 0$; e b) um potencial linear contínuo $\phi(a, \varphi, z) = (\phi_R - \phi_L)z/\ell + (\phi_R + \phi_L)/2$ para $-\ell/2 \leq z \leq \ell/2$, veja a Figura 4.3. A primeira parte já foi parcialmente resolvida em [But68, pág. 403] e a segunda parte em [ARM99]. Nosso intento é aprofundar estes estudos para conseguir entender o comportamento próximo à bateria.

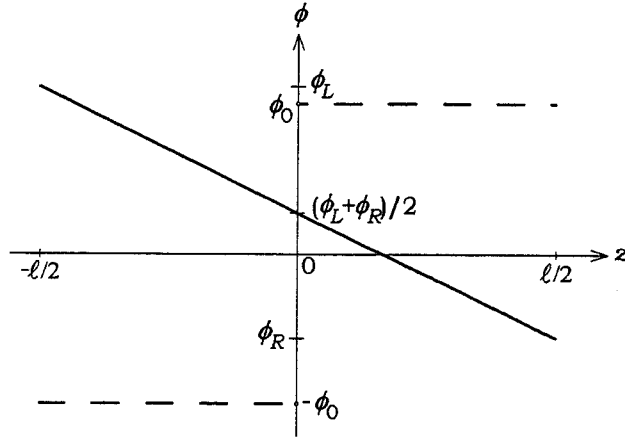


Figura 4.3: O potencial da Figura 4.2 pode ser decomposto em duas partes: a casca mantida em potenciais constantes mas descontínuos (linhas tracejadas) e a casca com um potencial contínuo variando linearmente com a coordenada longitudinal (linha contínua).

4.2 Solução eletrostática da casca cilíndrica com suas duas metades mantidas em potenciais constantes e opostos

Suponha duas cascas cilíndricas semi-infinitas, localizadas em $z < 0$ e $z > 0$, veja a Figura 4.1. A casca em $z < 0$ é mantida no potencial constante $-\phi_0$ para todo z , enquanto que a casca em $z > 0$ é mantida em ϕ_0 para todo z , [But68, pág. 403]. Podemos resolver a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$, em coordenadas cilíndricas usando separação de variáveis na forma $\phi_{jk}(\rho, \varphi, z) = R_{jk}(\rho)\Phi_j(\varphi)Z_k(z)$, onde as funções R_{jk} , Φ_j e Z_k obedecem às equações:

$$\frac{d^2 R_{jk}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_{jk}}{d\rho} - \left(k^2 + \frac{j^2}{\rho^2}\right) R_{jk} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2 \Phi_j}{d\varphi^2} + j^2 \Phi_j = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} + k^2 Z_k = 0. \quad (4.5)$$

A solução final $\phi(\rho, \varphi, z)$ é uma combinação linear de todas as soluções possíveis $\phi_{jk}(\rho, \varphi, z)$.

Devido à simetria rotacional do sistema, a solução não dependerá da variável φ . Isto significa que $j = 0$ e Φ_j é constante.

Nesta situação, as condições de contorno em $\rho = a$ são antissimétricas na coordenada z , $\phi(a, \varphi, -z) = -\phi(a, \varphi, z)$, de modo que a solução deve também ser antissimétrica em todos os pontos: $\phi(\rho, \varphi, -z) = -\phi(\rho, \varphi, z)$ e $\phi(\rho, \varphi, 0) = 0$. Adicionalmente, devemos ter uma solução limitada nas coordenadas ρ e z , $|\phi(\rho, \varphi, |z| \rightarrow \infty)| \leq \phi_0 < \infty$ e $|\phi(|\rho| \rightarrow \infty, \varphi, z)| \rightarrow 0$. Isto leva à solução para Z_k na forma: $Z_k(z) = \text{sen}(kz)$. A equação para R_{jk} é a equação modificada de Bessel, cujas soluções são $I_j(k\rho)$ (regular para $\rho \rightarrow 0$ e irregular para $\rho \rightarrow \infty$) e $K_j(k\rho)$ (regular para $\rho \rightarrow \infty$ e irregular para $\rho \rightarrow 0$), [AW95, Capítulo 11].

A solução geral tem então a forma:

$$\phi(\rho \leq a, \varphi, z) = \int_0^\infty A_k I_0(k\rho) \text{sen}(kz) dk, \quad (4.6)$$

$$\phi(\rho \geq a, \varphi, z) = \int_0^\infty B_k K_0(k\rho) \text{sen}(kz) dk, \quad (4.7)$$

onde os coeficientes A_k e B_k devem ser determinados pelas condições de contorno. As Eqs. (4.6) e (4.7) podem ser vistas como uma transformada em seno de Fourier de uma função Φ , [But68,

pág. 278]:

$$\Phi(\rho \leq a, \varphi, k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \phi(\rho, \varphi, z) \operatorname{sen}(kz) dz = \sqrt{\pi/2} A_k I_0(k\rho), \quad (4.8)$$

$$\Phi(\rho \geq a, \varphi, k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \phi(\rho, \varphi, z) \operatorname{sen}(kz) dz = \sqrt{\pi/2} B_k K_0(k\rho). \quad (4.9)$$

Calculando as Eqs. (4.8) e (4.9) em $\rho = a$ e aplicando as condições de contorno $\phi(a, \varphi, z < 0) = -\phi_0$ e $\phi(a, \varphi, z > 0) = \phi_0$ obtêm-se os coeficientes A_k e B_k :

$$A_k = \frac{2\phi_0}{\pi k I_0(ka)}, \quad B_k = \frac{2\phi_0}{\pi k K_0(ka)}. \quad (4.10)$$

A solução final pode ser escrita como (veja o Apêndice A):

$$\phi(\rho \leq a, \varphi, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{\operatorname{sen}(kz)}{k} dk \quad (4.11)$$

$$= 2\phi_0 \frac{z}{|z|} \left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(x_n \rho/a)}{J_1(x_n)} \frac{e^{-x_n |z|/a}}{x_n} \right], \quad (4.12)$$

$$\phi(\rho \geq a, \varphi, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(k\rho)}{K_0(ka)} \frac{\operatorname{sen}(kz)}{k} dk. \quad (4.13)$$

Na Eq. (4.12), x_n são os zeros da função de Bessel de ordem zero, $J_0(x_n) = 0$, com $n = 1, 2, \dots$

4.3 Solução para a casca cilíndrica com corrente estacionária e bateria

As Eqs. (2.4) e (2.5) dão a solução para o fio condutor com raio a , comprimento $\ell \gg a$ e conduzindo uma corrente estacionária:

$$\phi(\rho \leq a, \varphi, z) = (\phi_L - \phi_R) \frac{z}{\ell} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2}, \quad (4.14)$$

$$\phi(\rho \geq a, \varphi, z) = (\phi_L - \phi_R) \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)} \frac{z}{\ell} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2} \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)}. \quad (4.15)$$

A solução do problema com a bateria é a soma das Eqs. (4.11) e (4.14) para a região dentro da casca, assim como a soma das Eqs. (4.13) e (4.15) para a região fora da casca. Ou seja:

$$\phi(\rho \leq a, \varphi, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{\operatorname{sen}(kz)}{k} dk + (\phi_L - \phi_R) \frac{z}{\ell} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2}, \quad (4.16)$$

$$\phi(\rho \geq a, \varphi, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(k\rho)}{K_0(ka)} \frac{\operatorname{sen}(kz)}{k} dk + (\phi_L - \phi_R) \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)} \frac{z}{\ell} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2} \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)}. \quad (4.17)$$

A Figura 4.4 mostra as equipotenciais com $\phi_L = \phi_0$, $\phi_R = -\phi_0$ e $\ell/a = 10$.

O campo elétrico $\vec{E}$ pode ser obtido do potencial utilizando a relação $\vec{E} = -\nabla\phi$. Disto resulta:

$$\vec{E}(\rho < a, \varphi, z) = -\frac{2\phi_0}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{I_1(k\rho)}{I_0(ka)} \operatorname{sen}(kz) dk \hat{\rho} + \int_0^\infty \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \cos(kz) dk \hat{z} \right] + \frac{\phi_L - \phi_R}{\ell} \hat{z}, \quad (4.18)$$

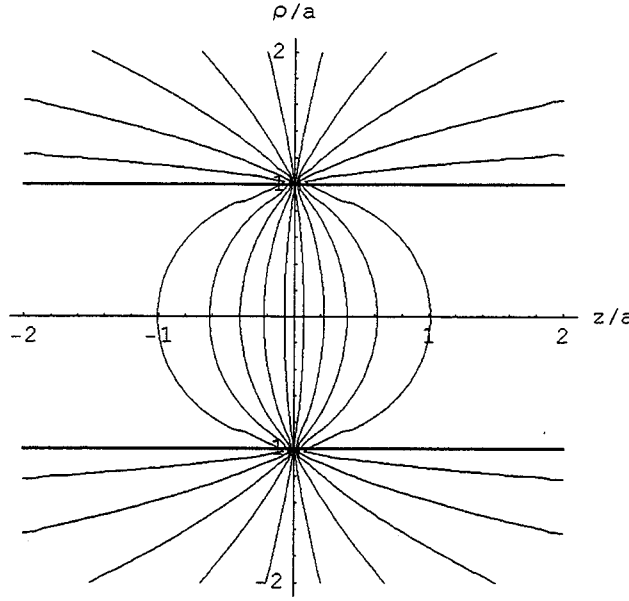


Figura 4.4: Equipotenciais de uma casca cilíndrica oca e resistiva próximas a $z = 0$. Este é um gráfico das Eqs. (4.16) e (4.17) com $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell/a = 10$. Existe uma corrente estacionária fluindo ao longo da direção positiva do eixo z , sendo a bateria idealizada como um anel de raio a localizada em $z = 0$.

$$\vec{E}(\rho > a, \varphi, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{K_1(k\rho)}{K_0(ka)} \text{sen}(kz) dk \hat{\rho} - \int_0^\infty \frac{K_0(k\rho)}{K_0(ka)} \cos(kz) dk \hat{z} \right] + \left\{ \frac{-1}{\ln(\ell/a)} \left[(\phi_L - \phi_R) \frac{z}{\ell} - \frac{\phi_L + \phi_R}{2} \right] \frac{\hat{\rho}}{\rho} + \frac{\phi_L - \phi_R}{\ell} \frac{\ln(\ell/\rho)}{\ln(\ell/a)} \hat{z} \right\}. \quad (4.19)$$

A distribuição superficial de carga $\sigma(a, \varphi, z)$ pode ser encontrada aplicando a lei de Gauss e escolhendo uma superfície gaussiana envolvendo uma pequena parte da superfície condutora. No limite de uma superfície infinitesimal resultam as densidades de carga interna e externa dadas por, respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{int}}(a^-, \varphi, z) &= - \lim_{\rho \rightarrow a} \varepsilon_0 E_\rho(\rho < a, \varphi, z) \\ &= \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} \text{sen}(kz) dk \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$= \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{a} \frac{z}{|z|} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x_n |z|/a}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ext}}(a^+, \varphi, z) &= \lim_{\rho \rightarrow a} \varepsilon_0 E_\rho(\rho > a, \varphi, z) \\ &= \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1(ka)}{K_0(ka)} \text{sen}(kz) dk - \frac{\varepsilon_0(\phi_L - \phi_R)}{a \ln(\ell/a)} z + \frac{\varepsilon_0(\phi_R + \phi_L)}{2a \ln(\ell/a)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A Figura 4.5 mostra estas densidades superficiais de carga normalizadas como uma função de z/a . Ambas divergem quando $|z|/a \ll 1$. Para $|z|/a \gg 1$ a densidade superficial de carga interna se anula mais rápido do que a externa.

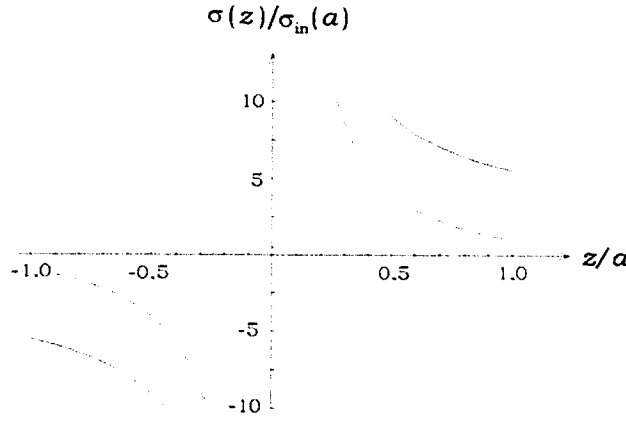


Figura 4.5: Densidades superficiais de carga como função da coordenada longitudinal z para uma casca cilíndrica resistiva e oca conduzindo uma corrente estacionária. A linha tracejada (contínua) é a densidade superficial de carga interna (externa) normalizada. Ambas as densidades estão normalizadas pela densidade interna ($\rho = a^-$) em $z = a$.

4.4 Discussão

Jefimenko, Heald e Griffiths consideraram uma geometria similar (casca cilíndrica resistiva de raio a , coaxial com o eixo z), mas conduzindo uma corrente azimutal estacionária, [Jef66, Problema 9.33 e Figura 14.7], [Hea84], [Jef89, págs. 509–511] e [Gri89, pág. 279]. Uma bateria em forma de linha localizada $(\rho, \varphi, z) = (a, \pi, z)$ tinha seus terminais nos potenciais $\pm\phi_0$. Eles encontraram densidades superficiais de carga dadas por (discutimos este caso na Seção 8.1):

$$\sigma_{\text{int}} = \sigma_{\text{ext}} = \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{\pi a} \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (4.23)$$

Para ângulos próximos à bateria, $\varphi = (\pi \pm \delta)$ rad, com $0 < \delta \ll \pi$, σ se reduz a $\sigma_{\text{int}} = \sigma_{\text{ext}} \approx \pm 2\varepsilon_0 \phi_0 / \pi a \delta$. Isto indica que σ diverge inversamente proporcional à distância $d = a\delta$ até a bateria.

Um ajuste numérico da Eq. (4.20) com a função:

$$\sigma_{\text{int}}(|z| \ll a) = \frac{2\varepsilon_0 \phi_0 \alpha}{\pi z}, \quad (4.24)$$

na região $10^{-5} < |z|/a < 10^{-3}$ dá o valor da constante adimensional $\alpha = 0,999975$. Isto indica que α deve ser exatamente igual a 1, como esperado.

Podemos também aproximar a somatória da Eq. (4.20) supondo que os zeros x_n da função de Bessel de ordem zero, $J_0(x_n) = 0$, estão igualmente espaçados. Isto é, supondo $x_n \approx nx_0$, onde $x_0 = 3,12988$ e $n = 1, 2, \dots$. Usando a série conhecida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1, \quad (4.25)$$

obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x_n |z|/a} \approx \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx_0 |z|/a} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x_0 |z|/a})^n = \frac{1}{e^{x_0 |z|/a} - 1} \approx \frac{a}{x_0 |z|}, \quad (4.26)$$

onde na última aproximação utilizamos que o ponto de observação está próximo à bateria, $|z|/a \ll 1$. A Eq. (4.20) pode ser escrita nesta aproximação como:

$$\sigma_{\text{int}}(a^-, \varphi, |z| \ll a) \approx \frac{2\varepsilon_0 \phi_0}{x_0 z}. \quad (4.27)$$

As Eqs. (4.24) e (4.27) diferem percentualmente em 0,6%.

Um resultado similar pode ser obtido aproximando as integrais que aparecem nas Eqs. (4.20) e (4.22) na região $|z|/a \ll 1$. Para a Eq. (4.20), dividimos a integral em duas partes, $0 < k < 1/a$ e $1/a < k < \infty$. Definindo $ka \equiv x$ e utilizando $\sin \alpha \approx \alpha$ para $\alpha \ll 1$ rad resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} \sin(kz) dk &= \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \sin\left(\frac{xz}{a}\right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \sin\left(\frac{xz}{a}\right) dx + \frac{1}{a} \int_1^\infty \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \sin\left(\frac{xz}{a}\right) dx \\ &\approx \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \frac{xz}{a} dx + \frac{1}{a} \int_1^\infty \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \sin\left(\frac{xz}{a}\right) dx. \end{aligned} \quad (4.28)$$

As funções $I_\nu(x \ll 1)$ e $I_\nu(x \gg 1)$ podem ser aproximadas por, [AW95, págs. 664-671]:

$$I_\nu(x \ll 1) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \left(\frac{x}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \right], \quad (4.29)$$

$$I_\nu(x \gg 1) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1-4\nu^2}{8x} \right). \quad (4.30)$$

Com estes resultados, podemos desprezar a primeira integral da Eq. (4.28) e aproximar o resultado como:

$$\int_0^\infty \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} \sin(kz) dk \approx \frac{1}{a} \int_1^\infty \sin\left(\frac{xz}{a}\right) dx \approx \frac{1}{a} \int_0^\infty \sin\left(\frac{xz}{a}\right) dx = \frac{1}{z}, \quad (4.31)$$

onde na última aproximação estendemos a integral de 0 a ∞ , porque a integral de 0 a 1 também é desprezível na aproximação $|z|/a \ll 1$. Para chegar no valor final de $1/z$ utilizamos que a sequência $\int_0^N \sin(kx) dx = (1 - \cos(kN))/k$ diverge para $N \rightarrow \infty$, mas é fracamente convergente para um conjunto apropriado de funções-teste $g(k)$ definidas por $0 \leq k \leq \infty$, [But68, pág. 312].

Analogamente para a Eq. (4.22), a aproximação da integral resulta em:

$$\int_0^\infty \frac{K_1(ka)}{K_0(ka)} \sin(kz) dk \approx \frac{1}{z}. \quad (4.32)$$

As Eqs. (4.20) e (4.22) podem ser escritas nesta aproximação como:

$$\sigma_{\text{int}}(a^-, \varphi, |z| \ll a) \approx \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{\pi z}, \quad (4.33)$$

$$\sigma_{\text{ext}}(a^+, \varphi, |z| \ll a) \approx \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{\pi z} - \frac{\varepsilon_0(\phi_L - \phi_R)}{2a \ell \ln(\ell/a)} z + \frac{\varepsilon_0(\phi_R + \phi_L)}{2a \ln(\ell/a)}. \quad (4.34)$$

Para um cilindro condutor comprido ($\ell \gg a$), as Eqs. (4.33) e (4.34) mostram que as cargas superficiais divergem na vizinhança da bateria da forma a/z quando $z \rightarrow 0$. Adicionalmente, na vizinhança da bateria a contribuição eletrostática é maior que a contribuição dos termos que mantêm a corrente fluindo. Isto implica que as situações com e sem corrente têm pequena diferença na distribuição superficial de cargas, embora elas correspondam a diferentes fenômenos, como já foi observado por Jackson, [Jac96].

As cargas superficiais totais do caso simétrico $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \sigma(a, z) &= \sigma_{\text{int}}(a, z) + \sigma_{\text{ext}}(a, z) \\ &= \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} + \frac{K_1(ka)}{K_0(ka)} \right] \sin(kz) dk - \frac{2\phi_0 \varepsilon_0}{a \ell \ln(\ell/a)} z. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Queremos encontrar a posição z_0 onde a distribuição superficial de carga é nula, $\sigma(a, z_0) = 0$. No intervalo $1 \leq \ell/a \leq 100$, igualando a Eq. (4.35) a zero obtém-se $z_0/a = 0,0890 + 0,5068\ell/a$, ou $z_0 \approx 0,507\ell$ para $\ell/a \gg 1$. Embora nossa solução seja válida apenas para $z \ll \ell/2$ (negligenciamos efeitos de borda), encontramos que as cargas superficiais são nulas nas extremidades da casca cilíndrica. Isto pode ser interpretado da seguinte forma: se dobrarmos o fio, de modo que as extremidades em $z = \pm\ell/2$ se toquem, as cargas superficiais naquela posição devem ser nulas. Isto é bastante razoável.

As Eqs. (4.14) a (4.22) fornecem então a solução completa para uma região próxima ao centro do segmento AD na Figura 2.1. Elas complementam as Eqs. (2.1) a (2.7), válidas nas regiões próximas aos centros de AB , BC e CD . Juntando tudo isto, os resultados do Capítulo 3 (força sobre uma carga próxima a um longo cilindro condutor sem corrente) completam essencialmente a análise teórica representada pela Figura 2.1.

Capítulo 5

Placas Condutoras

5.1 Solução conhecida na literatura

Em [Her01, Capítulo 7] e [AHL01] foi tratado o caso de placas condutoras conduzindo correntes constantes. O trabalho citado foi um dos resultados da dissertação de mestrado deste mesmo autor.

Consideramos uma placa retangular condutora bidimensional (ou seja, sem espessura) de dimensões ℓ_y e ℓ_z nos eixos y e z , respectivamente, localizada em $x = 0$. Consideramos uma densidade superficial de carga linear com o eixo z , [Rus68]. Com isto obtinha-se uma corrente constante fluindo sobre a placa resistiva, veja a Figura 5.1.

A partir desta densidade,

$$\sigma(z) = \sigma_A + \sigma_B \frac{z}{\ell_z}, \quad (5.1)$$

calculamos o potencial elétrico por integração direta. Na aproximação $\ell_y \gg \ell_z \gg \sqrt{y^2 + z^2}$ obtivemos o potencial:

$$\phi(x, 0, z) \approx \frac{\sigma(z)}{\varepsilon_0} \left(\frac{\ell_y}{\pi} \ln \frac{\ell_z}{\ell_y} - |x| \right) + \frac{\sigma_A \ell_y}{2\varepsilon_0 \pi}. \quad (5.2)$$

A partir do potencial, pudemos encontrar o campo elétrico:

$$\vec{E}(x, 0, z) \approx \pm \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{\sigma(z)}{2} \hat{x} - \frac{\sigma_B}{\ell_z} \left(\frac{\ell_y}{\pi} \ln \frac{2\ell_z}{\ell_y} - \frac{|x|}{2} \right) \hat{z} \right]. \quad (5.3)$$

Usando a lei de Gauss, obtivemos novamente a densidade superficial de cargas, $\sigma(z) = \sigma_A + \sigma_B z/\ell_z$, comprovando a coerência de nosso procedimento. A Figura 5.2 mostra as linhas de campo elétrico no plano $y = 0$.

Pela combinação de duas e quatro destas placas, pudemos esboçar as Figuras 5.3 a 5.5. Estas figuras mostram o plano $y = 0$.

Nosso objetivo neste trabalho das placas foi encontrar um primeiro modelo simples que pudesse ser comparado com os resultados experimentais de Jefimenko. Assim, obtivemos uma primeira aproximação teórica mostrada na Figura 5.3 que podia ser comparada com um dos resultados experimentais de Jefimenko, Figura 1.7, [Jef62] e [Jef89, Placa 6]. O mesmo pode ser dito de nosso resultado teórico mostrado na Figura 5.4, que foi comparado com outro resultado experimental de Jefimenko apresentado na Figura 1.8, [Jef62] e [Jef89, Placa 6]. O mesmo para nossa Figura 5.5 comparada com a Figura 1.9 de [Jef62].

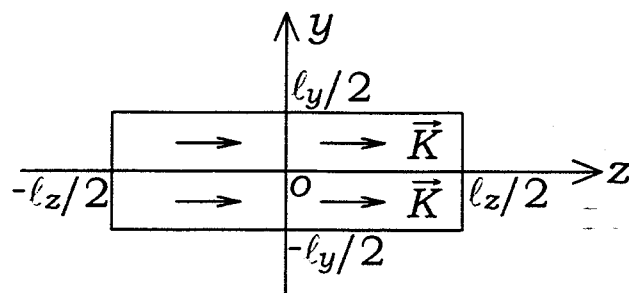


Figura 5.1: Uma placa resistiva no plano $x = 0$ com uma densidade superficial de corrente constante e uniforme $\vec{K}$ ao longo da direção positiva de z .

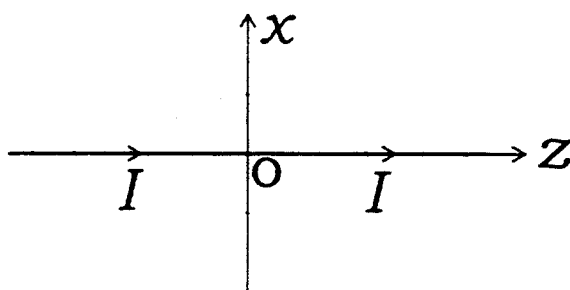


Figura 5.2: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para uma placa condutora com corrente constante.

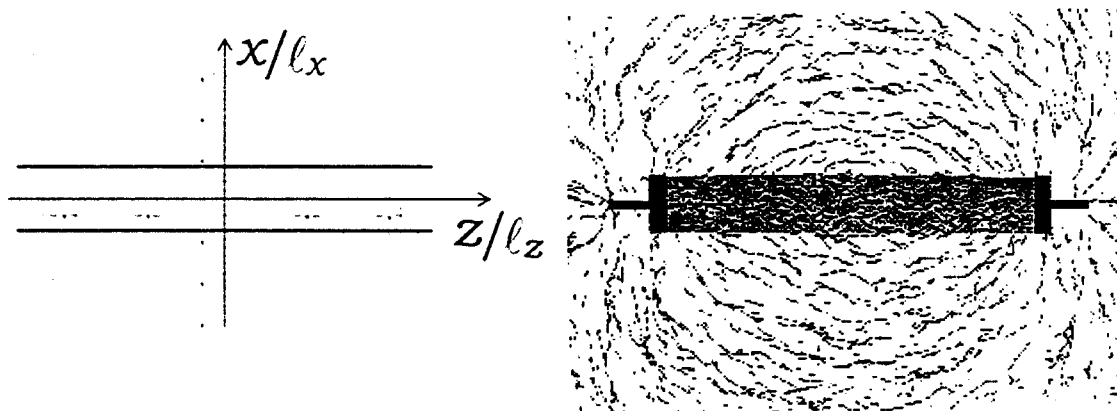


Figura 5.3: À esquerda: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para duas placas paralelas ortogonais ao plano desta figura conduzindo corrente na mesma direção z . As placas estão localizadas em $y/l_z = \pm 1/12 = \pm 0,0833$. À direita: Reprodução da Figura 1.7.

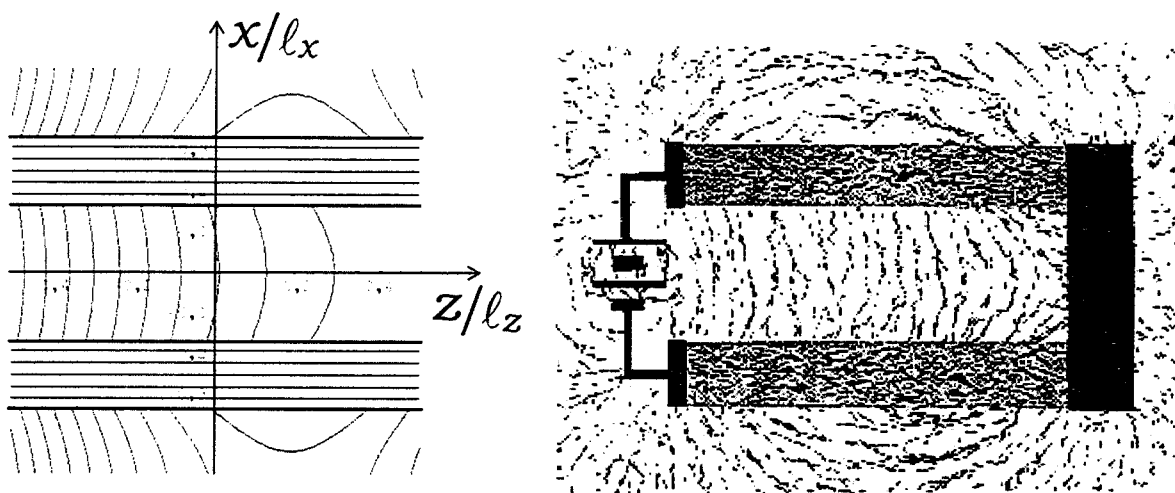


Figura 5.4: À esquerda: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para quatro placas paralelas ortogonais ao plano desta figura conduzindo correntes em direções opostas. As duas placas superiores (inferiores) transportam correntes na direção $+z$ ($-z$). As placas com mesma resistividade estão localizadas em $y/l_z = \pm 1/6 = \pm 0,167$ e $y/l_z = \pm 1/3 = \pm 0,333$. À direita: Reprodução da Figura 1.8.

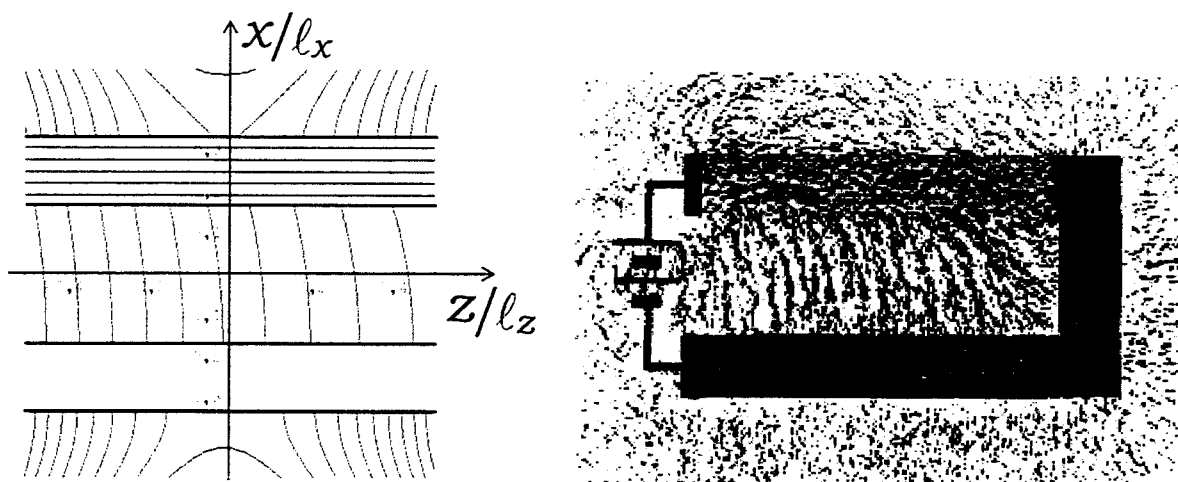


Figura 5.5: À esquerda: Linhas de campo elétrico no plano $y = 0$ para quatro placas paralelas ortogonais ao plano desta figura conduzindo correntes em direções opostas. Foi feita uma modelagem teórica na qual as placas inferiores foram tratadas como supercondutoras. As duas placas superiores (inferiores) transportam correntes na direção $+z$ ($-z$). As placas estão localizadas em $y/l_z = \pm 1/6 = \pm 0,167$ e $y/l_z = \pm 1/3 = \pm 0,333$. À direita: Reprodução da Figura 1.9.

Capítulo 6

Placas com Bateria

6.1 Introdução

Apresentamos no Capítulo 5 o problema de uma ou duas placas resistivas conduzindo uma corrente estacionária na mesma direção. A solução apresentada era válida longe da bateria. Em analogia com o que fizemos no caso de um fio reto de seção reta circular, Capítulo 4, consideramos agora a região próxima à bateria, veja a Figura 6.1. Consideramos uma bateria linear ortogonal à direção da corrente no meio das placas. Estudamos o comportamento das cargas superficiais próximas à bateria. Calculamos o potencial e o campo elétrico no espaço fora das placas. Também consideramos o caso de uma única placa resistiva conduzindo uma corrente estacionária.

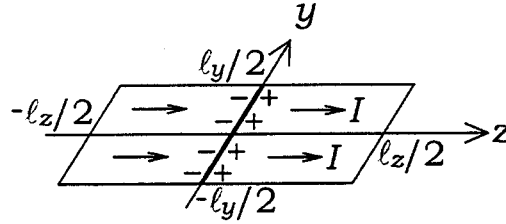


Figura 6.1: Uma placa conduz uma corrente constante uniforme I na direção z . Existe uma bateria em forma de linha ao longo de $z = 0$.

Nosso objetivo é analisar o potencial, campo elétrico e cargas superficiais próximo à bateria em uma geometria simples. Neste sentido nosso trabalho é algo similar ao tratamento feito por Jefimenko, Heald, Griffiths e Jackson em outras geometrias, [Jef66, Prob. 9.33 e Figura 14.7], [Jef89, pág. 318], [Hea84], [Gri89, pág. 279] e [Jac96]. Os resultados deste Capítulo encontram-se em um artigo aceito para publicação (2004), [HOA04b].

6.2 Descrição do problema

Consideramos dois planos paralelos, separados por uma distância $2a$, localizados em $x = a$ e $x = -a$, conduzindo uma corrente estacionária na mesma direção ao longo do eixo z , veja a Figura 6.2. As placas têm dimensões ℓ_y e ℓ_z nos eixos y e z , respectivamente, com $\ell_z \gg a$ e $\ell_y \gg a$. Supomos ar ou vácuo entre as placas e também fora delas. Existem duas baterias lineares idênticas localizadas em $z = 0$ em ambas as placas, suprimindo uma diferença de potencial entre seus terminais em $z \rightarrow 0^+$ e $z \rightarrow 0^-$ de $2\phi_0$. As placas têm potenciais $\phi(z = -\ell_z/2) = \phi_L - \phi_0$ e $\phi(z = \ell_z/2) = \phi_R + \phi_0$ nas extremidades esquerda e direita, respectivamente. O potencial ao

longo das placas é descrito por, veja a Figura 6.3:

$$\phi(x, y = \pm a, z < 0) = (\phi_R - \phi_L) \frac{z}{\ell_z} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2} - \phi_0, \quad (6.1)$$

$$\phi(x, y = \pm a, z > 0) = (\phi_R - \phi_L) \frac{z}{\ell_z} + \frac{\phi_R + \phi_L}{2} + \phi_0. \quad (6.2)$$

Ou seja, existe uma descontinuidade em $z = 0$ devida à presença da bateria.

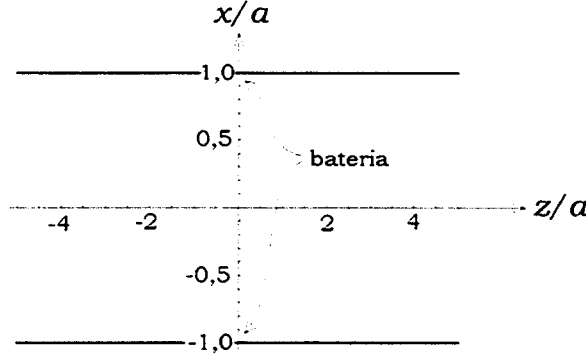


Figura 6.2: Duas grandes placas paralelas resistivas localizadas nos planos $x = a$ e $x = -a$. As duas transportam correntes constantes na mesma direção, $+\hat{z}$. Há uma bateria linear em cada placa, localizada em $z = 0$, fornecendo uma diferença de potencial $2\phi_0$ entre $z \rightarrow 0^-$ e $z \rightarrow 0^+$.

Em seguida, consideramos o caso de uma placa simples. Isto é análogo ao nosso presente caso com a distância entre as placas indo a zero ($a \rightarrow 0$). Consideramos inicialmente o caso de duas placas porque ele é mais geral que o caso da placa simples, sendo que a dificuldade matemática é essencialmente a mesma em ambos os casos.

Este problema pode ser claramente separado em duas partes: (a) o problema eletrostático de placas mantidas a potenciais constantes ($-\phi_0$ para a região $z < 0$ e ϕ_0 para $z > 0$); e (b) o problema de uma corrente estacionária sem a descontinuidade (com potenciais $\phi(z = -\ell_z/2) = \phi_L$ e $\phi(z = \ell_z/2) = \phi_R$ nas extremidades e $\phi(z = 0) = (\phi_L + \phi_R)/2$, veja a Figura 6.4. Isto é, $\phi(x, y = \pm a, z) = (\phi_R - \phi_L)z/\ell_z + (\phi_R + \phi_L)/2$. Ambos os problemas já foram resolvidos separadamente na literatura. Parte do problema (a) está tratado em [But68, págs. 309–313]. O problema (b) é tratado por [AHL01]. Discutimos em mais detalhes cada solução e principalmente a combinação de ambos os casos nas seções seguintes.

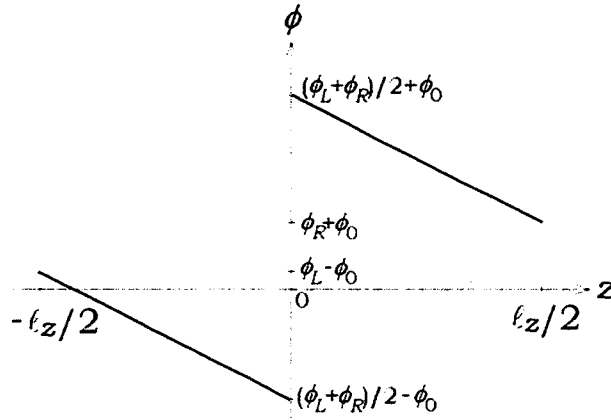


Figura 6.3: Potencial ao longo das placas. A descontinuidade do potencial e, $z = 0$ se deve à presença da bateria.

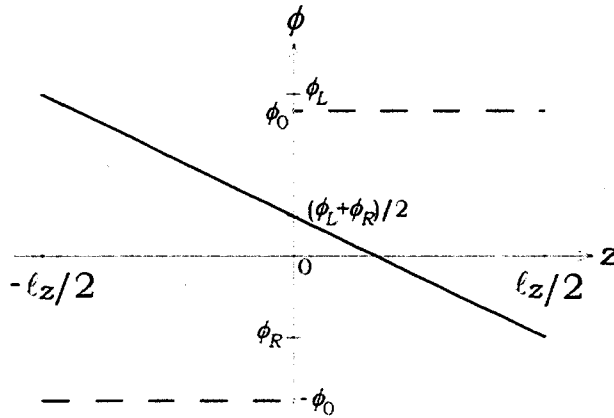


Figura 6.4: O potencial da Figura 6.3 pode ser decomposto em duas partes. (a) As placas mantidas a potenciais constantes $-\phi_0$ para $z < 0$ e $+\phi_0$ para $z > 0$, linhas tracejadas. (b) As placas com um potencial contínuo variando linearmente com a coordenada longitudinal z , linha contínua.

6.3 Solução eletrostática de placas mantidas a potenciais constantes

Suponha quatro placas paralelas semi-infinitas, localizadas em $(x = a, z < 0)$, $(x = a, z > 0)$, $(x = -a, z < 0)$ e $(x = -a, z > 0)$, veja a Figura 6.2. Existe uma fina barreira isolante em $(x, z) = (\pm a, 0)$. As placas em $z < 0$ estão mantidas no potencial constante $-\phi_0$, enquanto que as placas em $z > 0$ estão mantidas em ϕ_0 , [But68, págs. 309–313]. Podemos resolver a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$, em coordenadas cartesianas usando separação de variáveis na forma $\phi_k(x, z) = X_k(x)Z_k(z)$, onde as funções X_k e Z_k obedecem às equações (k sendo uma constante arbitrária):

$$\frac{d^2 X_k}{dx^2} = k^2 X_k, \quad \frac{d^2 Z_k}{dz^2} = -k^2 Z_k. \quad (6.3)$$

As soluções destas equações são $X_k(y) = c_k e^{kx} + d_k e^{-kx}$ e $Z_k(z) = a_k \sin(kz) + b_k \cos(kz)$, com a_k , b_k , c_k e d_k sendo constantes. A solução final $\phi(x, z)$ é uma combinação linear de todas as possíveis soluções $\phi_k(x, z)$.

Como as condições de contorno são antissimétricas em torno da coordenada z , $\phi(\pm a, -z) = -\phi(\pm a, z)$, a solução também deve ser antissimétrica em todos os pontos: $\phi(x, -z) = -\phi(x, z)$

e $\phi(x, 0) = 0$. O mesmo raciocínio se aplica à coordenada x , mas neste caso as condições de contorno (e também a solução) são simétricas: $\phi(-x, z) = \phi(x, z)$. Adicionalmente, devemos ter uma solução limitada tanto na coordenada x quanto em z , $|\phi(x, |z| \rightarrow \infty)| \leq \phi_0 < \infty$ e $|\phi(|x| \rightarrow \infty, z)| \rightarrow 0$. Isto significa que nossas soluções possíveis se reduzem a $X_k(x) = c_k(e^{kx} + e^{-kx}) \equiv e_k \cosh(kx)$ e $Z_k(z) = a_k \sin(kz)$ na região entre as placas, com $e_k = 2c_k$. Para $x > a$ ($x < -a$) devemos ter $c_k = 0$ ($d_k = 0$). Como $\phi(-x, z) = \phi(x, z)$, isto implica que na região fora das placas nossas soluções se reduzem a $X_k(x) = f_k e^{-k|x|}$ e $Z_k(z) = a_k \sin(kz)$, com f_k e a_k sendo constantes. As soluções particulares são então dadas por (com A_k e B_k sendo constantes):

$$\phi_k(|x| \leq a, z) = A_k \cosh(kx) \sin(kz), \quad (6.4)$$

$$\phi_k(|x| \geq a, z) = B_k e^{-k|x|} \sin(kz). \quad (6.5)$$

A solução geral que é uma combinação de todas as possíveis soluções particulares. Tem então a forma:

$$\phi(|x| \leq a, z) = \int_0^\infty A_k \cosh(kx) \sin(kz) dk, \quad (6.6)$$

$$\phi(|x| \geq a, z) = \int_0^\infty B_k e^{-k|x|} \sin(kz) dk, \quad (6.7)$$

onde os coeficientes A_k e B_k devem ser determinados pelas condições de contorno. As Eqs. (6.6) e (6.7) podem ser interpretadas como transformadas em seno de Fourier de uma função Φ :

$$\Phi(k, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \phi(x, z) \sin(kz) dz = \begin{cases} \sqrt{\pi/2} A_k \cosh(kx), & |x| \leq a, \\ \sqrt{\pi/2} B_k e^{-k|x|}, & |x| \geq a. \end{cases} \quad (6.8)$$

Calculando a Eq. (6.8) em $x = a$ e aplicando as condições de contorno $\phi(\pm a, z > 0) = \phi_0$ e $\phi(\pm a, z < 0) = -\phi_0$ obtém-se os seguintes valores para os coeficientes A_k e B_k :

$$A_k = \frac{2\phi_0}{\pi k \cosh(ka)}, \quad B_k = \frac{2\phi_0 e^{ka}}{\pi k}. \quad (6.9)$$

A solução final pode ser escrita como (veja o Apêndice B):

$$\phi(|x| \leq a, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cosh(kx) \sin(kz)}{\cosh(ka) k} dk = \frac{2\phi_0}{\pi} \operatorname{arccot} \left[\frac{\cos(\pi x/2a)}{\sinh(\pi z/2a)} \right], \quad (6.10)$$

$$\phi(|x| \geq a, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(|x|-a)} \sin(kz)}{k} dk = \frac{2\phi_0}{\pi} \arctan \left[\frac{z}{|x| - a} \right]. \quad (6.11)$$

6.4 Solução de placas com corrente estacionária e bateria

A Eq. (5) de [AHL01] dá a solução de placas paralelas separadas por uma distância $2a$, com dimensões ℓ_z e ℓ_y , com $\ell_y \gg \ell_z \gg a$ e conduzindo uma corrente estacionária na direção $+\hat{z}$:

$$\phi(x, z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[(\alpha z + \beta) \left(\frac{\ell_z}{\pi} - \frac{|x-a| + |x+a|}{2} \right) + \frac{\beta \ell_z}{\pi} \ln \frac{2\ell_y}{\ell_z} \right], \quad (6.12)$$

onde as constantes α e β devem ser determinadas pelas condições de contorno. Neste caso:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0(\phi_R - \phi_L)}{\ell_z(\ell_z/\pi - a)}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_0(\phi_R + \phi_L)}{2[\ell_z/\pi + (\ell_z/\pi) \ln(2\ell_y/\ell_z) - a]}. \quad (6.13)$$

A solução do problema com a bateria é a soma das Eqs. (6.10) e (6.12) para a região entre as placas, assim como a soma das Eqs. (6.11) e (6.12) para a região fora das placas:

$$\phi(|x| \leq a, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \operatorname{arccot} \left[\frac{\cos(\pi x/2a)}{\sinh(\pi z/2a)} \right] + \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z} x + \frac{\phi_R + \phi_L}{2}, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \phi(|x| \geq a, z) = & \frac{2\phi_0}{\pi} \arctan \left(\frac{z}{|x| - a} \right) + \frac{\ell_z/\pi - |y|}{\ell_z/\pi - a} \times \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z} z \\ & + \frac{\ell_z/\pi + (\ell_z/\pi) \ln(2\ell_y/\ell_z) - |x|}{\ell_z/\pi + (\ell_z/\pi) \ln(2\ell_y/\ell_z) - a} \times \frac{\phi_R + \phi_L}{2}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Quando $x = \pm a$ os potenciais se reduzem às condições de contorno dadas pelas Eqs. (6.1) e (6.1), como esperado.

O campo elétrico $\vec{E}$ pode ser obtido do potencial utilizando a relação $\vec{E} = -\nabla\phi$. Isto resulta em:

$$\begin{aligned} \vec{E}(|x| < a, z) = & -\frac{2\phi_0}{a} \frac{\sin(\pi x/2a) \sinh(\pi z/2a)}{\cos(\pi x/a) + \cosh(\pi z/a)} \hat{x} \\ & - \left[\frac{2\phi_0 \cos(\pi x/2a) \cosh(\pi z/2a)}{a \cos(\pi x/a) + \cosh(\pi z/a)} + \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z} \right] \hat{z}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(|x| > a, z) = & \frac{x}{|x|} \left[\frac{2\phi_0}{\pi} \frac{z}{[z^2 + (|x| - a)^2]} + \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z(\ell_z/\pi - a)} z + \frac{\phi_R + \phi_L}{2(\ell_z/\pi + (\ell_z/\pi) \ln(2\ell_y/\ell_z) - a)} \right] \hat{x} \\ & - \left[\frac{2\phi_0}{\pi} \frac{|x| - a}{z^2 + (|x| - a)^2} + \frac{\ell_z/\pi - |x|}{\ell_z/\pi - a} \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z} \right] \hat{z}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Podemos ver que este campo elétrico satisfaz às equações de Maxwell para correntes constantes pois $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = 0$ entre as placas ($|x| < a$) e fora delas ($|x| > a$), como esperado.

As linhas de campo elétrico podem ser obtidas por um procedimento similar àquele dado por Sommerfeld, [Som64, pág. 128]. Isto é, procuramos por uma função $\xi(x, z)$ tal que $\nabla\xi \cdot \nabla\phi = 0$. Isto resulta em:

$$\xi(|x| < a, y) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sin(\pi x/2a)}{\cosh(\pi z/2a)} \right) - \pi \frac{x}{\ell_z} \frac{\phi_L - \phi_R}{2\phi_0}, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \xi(|x| > a, z) = & \frac{1}{2} \ln \left(4 \frac{z^2 + (|x| - a)^2}{\ell_z^2} \right) - \pi \frac{z^2 - x^2}{\ell_z^2} \frac{\phi_L - \phi_R}{2\phi_0} - \frac{|x|}{\ell_z/\pi - a} \frac{\phi_L - \phi_R}{2\phi_0} \\ & + \frac{z}{\ell_z/\pi [1 + \ln(2\ell_y/\ell_z)] - a} \frac{\pi}{2} \frac{\phi_R + \phi_L}{2\phi_0}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

A Figura 6.5 mostra as equipotenciais e linhas de campo elétrico utilizando as Eqs. (6.14), (6.15), (6.18) e (6.19) com $\phi_L = \phi_0$, $\phi_R = -\phi_0$ e $\ell_y/\ell_z = \ell_z/2a = 10$.

A distribuição de cargas superficiais $\sigma(x = \pm a, z)$ pode ser encontrada aplicando a lei de Gauss e escolhendo um volume gaussiano envolvendo uma pequena parte da superfície condutora. No limite de uma superfície infinitesimal temos as densidades interna e externa de cargas superficiais nas placas superiores dadas por, respectivamente:

$$\sigma(a^-, z) = -\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_0 E_x(0 < x < a, z) = \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{a \sinh(\pi z/2a)}, \quad (6.20)$$

$$\sigma(a^+, z) = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_0 E_x(x > a, z) = \frac{2\varepsilon_0 \phi_0}{\pi z} + \frac{\varepsilon_0(\phi_R - \phi_L)}{\ell_z(\ell_z/\pi - a)} x + \frac{\varepsilon_0(\phi_R + \phi_L)}{2[(\ell_z/\pi)(1 + \ln(2\ell_y/\ell_z)) - a]}. \quad (6.21)$$

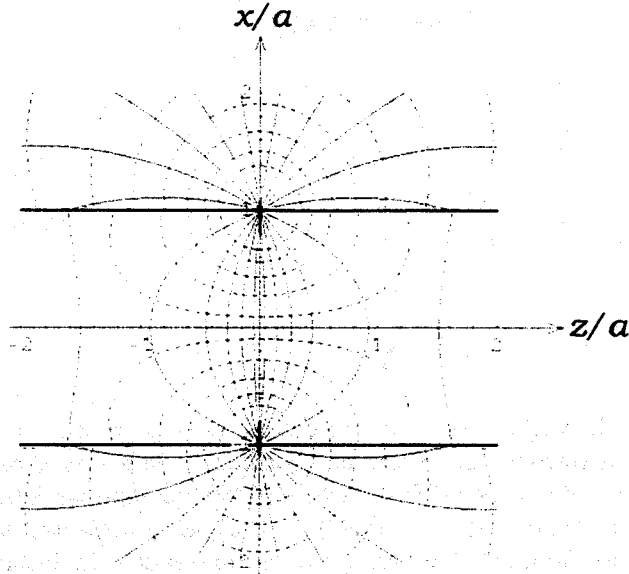


Figura 6.5: Equipotenciais (linhas contínuas) e linhas de campo elétrico (linhas tracejadas) para duas placas resistivas paralelas localizadas nos planos $x = \pm a$ e transportando correntes constantes na direção $+\hat{z}$. Há uma bateria linear em $z = 0$ nas duas placas. Este é um gráfico das Eqs. (6.14), (6.15), (6.18) and (6.19) com $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell_y/\ell_z = \ell_z/2a = 10$.

E similarmente para as placas inferiores:

$$\sigma(-a^-, z) = \lim_{x \rightarrow -a} \varepsilon_0 E_x(-a < x < 0, z) = \sigma(a^-, z), \quad (6.22)$$

$$\sigma(-a^+, z) = \lim_{x \rightarrow -a} \varepsilon_0 E_x(x < -a, z) = \sigma(a^+, z). \quad (6.23)$$

Quando $|z|/a \gg 1$ os termos proporcionais a ϕ_0 podem ser desprezados e recuperamos o comportamento linear encontrado antes, [AHL01]. Para $|z|/a \ll 1$ os termos proporcionais a ϕ_0 são os dominantes e as densidades superficiais de carga se reduzem a:

$$\sigma(\pm a^\pm, z) \approx \frac{2\varepsilon_0\phi_0}{\pi z}. \quad (6.24)$$

A Figura 6.6 mostra as densidades superficiais de carga normalizadas dadas pelas Eqs. (6.20) a (6.23) como funções de z/a . A Figura 6.7 mostra as Eqs. (6.20) e (6.21) normalizadas por (6.21).

Podemos ver destas expressões que, para $|z| \ll \ell_z$, a solução eletrostática é a principal contribuição no valor do potencial, campo elétrico e cargas superficiais. Já foi apontado antes [Jac96] que a diferença nas cargas superficiais é pequena entre a situação eletrostática e seu equivalente com corrente estacionária. Mesmo assim, estas situações físicas são completamente diferentes.

Quando $a \rightarrow 0$ estas soluções se reduzem à de uma placa resistiva simples no plano $x = 0$ conduzindo uma corrente estacionária ao longo da direção positiva z , dada por:

$$\phi(x, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{|x|}\right) + \frac{\ell_z/\pi - |x|}{\ell_z/\pi} \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z} z + \frac{\ell_z/\pi + (\ell_z/\pi) \ln(2\ell_y/\ell_z) - |x|}{\ell_z/\pi + (\ell_z/\pi) \ln(2\ell_y/\ell_z)} \frac{\phi_R + \phi_L}{2}, \quad (6.25)$$

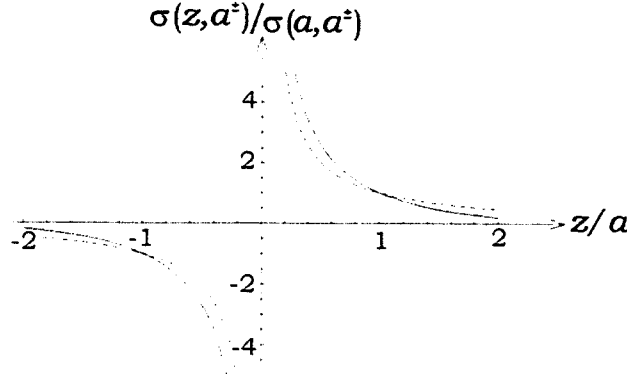


Figura 6.6: Distribuições de carga superficiais normalizadas, como função da coordenada longitudinal z para duas placas resistivas transportando correntes constantes na mesma direção $+\hat{z}$. As distribuições de carga superficiais internas dadas pelas Eqs. (6.20) e (6.22) são representadas pelas linhas contínuas. Já as distribuições externas dadas pelas Eqs. (6.21) e (6.23) são representadas pelas linhas tracejadas. A densidade de carga superficial interna (externa) está normalizada pela densidade de carga superficial interna (externa) em $z = a$. Utilizamos $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell_z/2a = 10$.

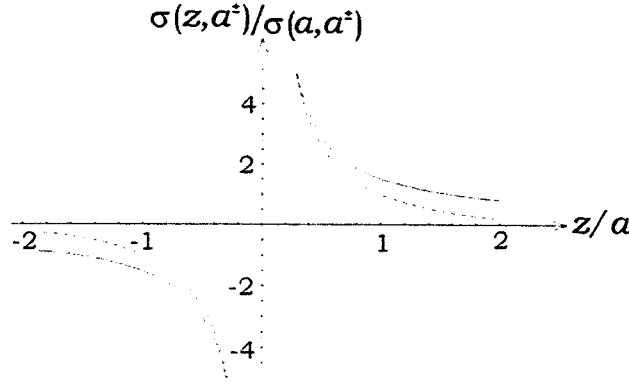


Figura 6.7: Distribuições de carga superficial externa ($x \rightarrow a^+$, linhas contínuas) e interna ($x \rightarrow a^-$, linhas tracejadas). As duas distribuições foram normalizadas pela densidade de carga superficial interna ($x \rightarrow a^-$) em $z = a$. Utilizamos $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$ e $\ell_z/2a = 10$.

$$\vec{E}(x, z) = \frac{x}{|x|} \left[\frac{2\phi_0 z}{\pi(z^2 + x^2)} \frac{\pi(\phi_R - \phi_L)}{\ell_z^2} z + \frac{\pi(\phi_R + \phi_L)}{\ell_z(1 + \ln(2\ell_y/\ell_z))} \right] \hat{x} + \left[\frac{2\phi_0 |y|}{\pi(z^2 + x^2)} - \frac{\ell_z/\pi - |x|}{\ell_z/\pi} \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell_z} \right] \hat{z}, \quad (6.26)$$

$$\sigma(0^\pm, z) = \frac{2\varepsilon_0\phi_0}{\pi z} + \frac{\varepsilon_0\pi(\phi_R - \phi_L)}{\ell_z^2} z + \frac{\varepsilon_0\pi(\phi_R + \phi_L)}{\ell_z(1 + \ln(2\ell_y/\ell_z))}. \quad (6.27)$$

As linhas de campo elétrico são dadas por:

$$\xi(x, z) = \frac{1}{2} \ln \left(4 \frac{z^2 + x^2}{\ell_z^2} \right) + \frac{x^2 - z^2}{\ell_z^2} \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2\phi_0} \right) - \pi \frac{|x|}{\ell_z} \frac{\phi_L - \phi_R}{2\phi_0} + \frac{z}{\ell_z} \frac{\pi^2}{2[1 + \ln(2\ell_y/\ell_z)]} \left(\frac{\phi_R + \phi_L}{2\phi_0} \right). \quad (6.28)$$

A Figura 6.8 é um gráfico das Eqs. (6.25) e (6.28) com $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$.

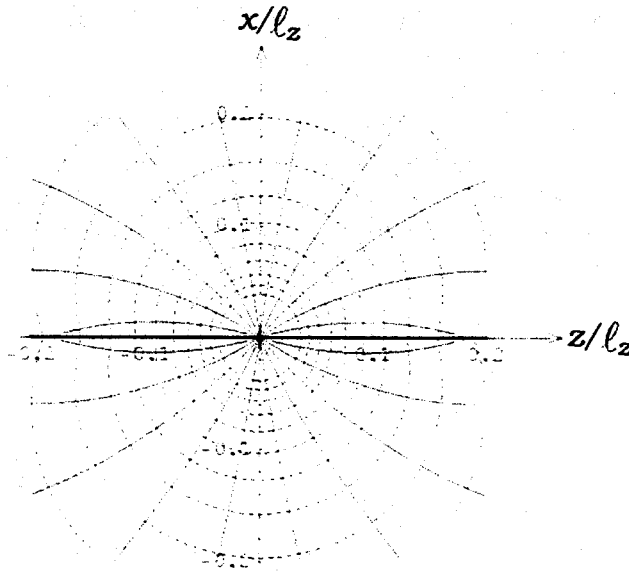


Figura 6.8: Equipotenciais (linhas contínuas) e linhas de campo elétrico (linhas tracejadas) de uma única placa resistiva localizada no plano $x = 0$ e transportando uma corrente constante na direção $+\hat{z}$. Há uma linha de bateria em $z = 0$ mantendo uma diferença de potencial $2\phi_0$ em $z \rightarrow 0^-$ e $z \rightarrow 0^+$. Utilizamos $\phi_L = -\phi_R = \phi_0$.

6.5 Discussão

Jefimenko, [Jef66, Problema 9.33 e Figura 14.7] e [Jef89, págs. 509–511], Heald, [Hea84], e Griffiths, [Gri89, pág. 279], estudaram o problema de uma casca cilíndrica infinita e resistiva, de raio R , centrada no eixo z e conduzindo uma corrente azimutal estacionária. Discutimos este caso na Seção 8.1. Eles supuseram uma bateria linear infinita, localizada em $\varphi = \pm\pi$ rad, em coordenadas cilíndricas. Supondo que os terminais da bateria estivessem com potenciais $\pm\phi_0$ eles encontraram que o potencial em todos os pontos no espaço era dado por (com $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$):

$$\phi(x, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{R+z}\right), \quad \text{para } \rho \leq R, \quad (6.29)$$

$$\phi(x, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \arctan\left(\frac{Rx}{z^2 + Rz + x^2}\right), \quad \text{para } \rho \geq R. \quad (6.30)$$

Quando tomamos $R \gg \sqrt{x^2 + z^2}$ nas Eqs. (6.29) e (6.30), obtemos o mesmo resultado que nas Eqs. (6.14) e (6.15) com $a \rightarrow 0$ e $\ell_z \gg a, |x|, |z|$. Algo similar ocorre com a distribuição superficial de carga próximo à bateria, dada por Heald como:

$$\sigma(\varphi) = \frac{\epsilon_0 \phi_0}{\pi R} \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (6.31)$$

Para ângulos próximos à bateria, $\varphi = (\pi \pm \delta)$ rad com $0 < \delta \ll \pi$, temos $\sigma \approx \pm 2\epsilon_0 \phi_0 / \pi R \delta$. O mesmo ocorre com a Eq. (6.24) próximo à bateria, observando que $R\delta$ é análogo a z em nosso caso linear.

Estes resultados provam que a descontinuidade no potencial devido à bateria cria uma divergência não linear nas densidades superficiais de carga próximo à bateria. Isto ocorre mesmo em condutores retos muito longos, como vimos aqui.

As Eqs. (6.10) e (6.11) são válidas para placas semi-infinitas. A Eq. (6.12), por outro lado, é válida para pontos (x, y, z) tais que $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ll \ell_z \ll \ell_y$, [AHL01]. Isto significa que

a combinação de ambas as soluções dada pelas Eqs. (6.14) e (6.15) é válida apenas próximo à bateria, mas não perto das extremidades $z = \pm \ell_z/2$.

Para placas compridas e largas ($\ell_y \gg \ell_z \gg a$), as Eqs. (6.14) a (6.23) mostram que próximo à bateria a contribuição da solução eletrostática é maior que a contribuição vinda dos termos que mantêm a corrente fluindo. Isto significa que existe pequena diferença entre as situações com e sem corrente, o que já foi apontado por Jackson, [Jac96]. Apesar deste fato, estas duas situações são completamente diferentes: placas mantidas a potenciais constantes e placas transportando uma corrente estacionária.

Capítulo 7

Fita Reta

7.1 Introdução

A desvantagem da abordagem do Capítulo 5 é que as placas condutoras no lado esquerdo da Figura 5.3 são normais ao plano da Figura. Já os resultados experimentais no lado direito desta Figura são devidos a fitas de corrente bidimensionais fluindo neste mesmo plano $y = 0$. Neste Capítulo apresentamos uma modelagem teórica mais apropriada para a situação da Figura 5.3. Nosso trabalho foi discutido em [HA02b] e publicado em [HA03b].

Podemos considerar o que apresentamos aqui como uma continuação do trabalho envolvendo placas condutoras, resultante do mestrado deste mesmo autor, apresentado no Capítulo 5. Por um lado, no caso das placas, abordamos o problema supondo uma densidade linear de cargas ao longo da coordenada longitudinal z , e integramos para obter o potencial e campo elétrico em todo o espaço à volta das placas. Por outro lado, no caso da fita tratada neste capítulo, encontramos a solução da equação de Laplace, em um sistema de coordenadas conveniente e a partir daí obtivemos o campo elétrico e a distribuição superficial de cargas.

7.2 Descrição do problema

Consideramos um caso que não foi tratado na literatura: uma corrente constante fluindo uniformemente sobre a superfície de uma fita reta estacionária e resistiva. Nosso objetivo é calcular o potencial elétrico ϕ e o campo elétrico $\vec{E}$ em todo o espaço e também a distribuição superficial de cargas σ ao longo da fita. Estas cargas superficiais criam os campos elétricos em volta e dentro do condutor, mantendo a corrente fluindo. Esta distribuição de cargas só pode existir e se manter constante no tempo devido à presença de uma bateria que gera uma corrente elétrica estacionária fluindo pelo condutor.

Seja uma fita no plano $x = 0$, localizada na região $-a < y < a$ e $-\ell/2 < z < \ell/2$, tal que $\ell \gg a > 0$. O meio em volta da fita é tomado como sendo ar ou vácuo. A corrente constante I flui uniformemente ao longo da direção positiva de z com uma densidade de corrente superficial dada por $\vec{K} = I\hat{z}/2a$ (veja a Figura 7.1). Pela lei de Ohm esta distribuição de corrente uniforme está relacionada a um campo elétrico constante na superfície da fita, $\vec{E}(x, z) = E_0\hat{z}$ para $-a < x < a$ e $-\ell/2 < z < \ell/2$. No equilíbrio, este campo elétrico pode ser relacionado ao potencial por $\vec{E} = -\nabla\phi$. Esta relação significa que, ao longo da fita, o potencial é uma função linear de z e independente de y . O problema pode então ser resolvido encontrando a solução para a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, no espaço vazio e aplicando as condições de contorno.

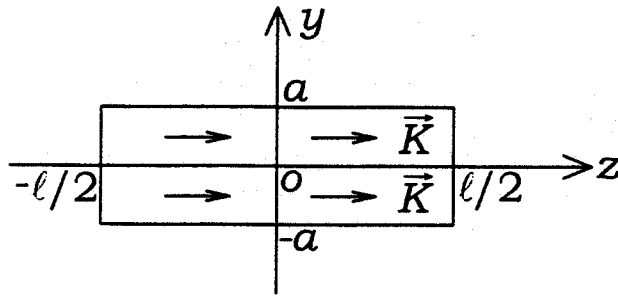


Figura 7.1: Uma corrente constante I flui ao longo da direção z de uma fita reta e longa de comprimento $2l$ e largura $2a$ localizada no plano $x = 0$, com uma densidade superficial de corrente $\vec{K} = I\hat{z}/2a$.

7.3 Solução

Devido à simetria do problema, é conveniente utilizar coordenadas elíptico-cilíndricas (ζ, ϑ, z) , [MS88, pág. 17], veja a Figura 7.2.

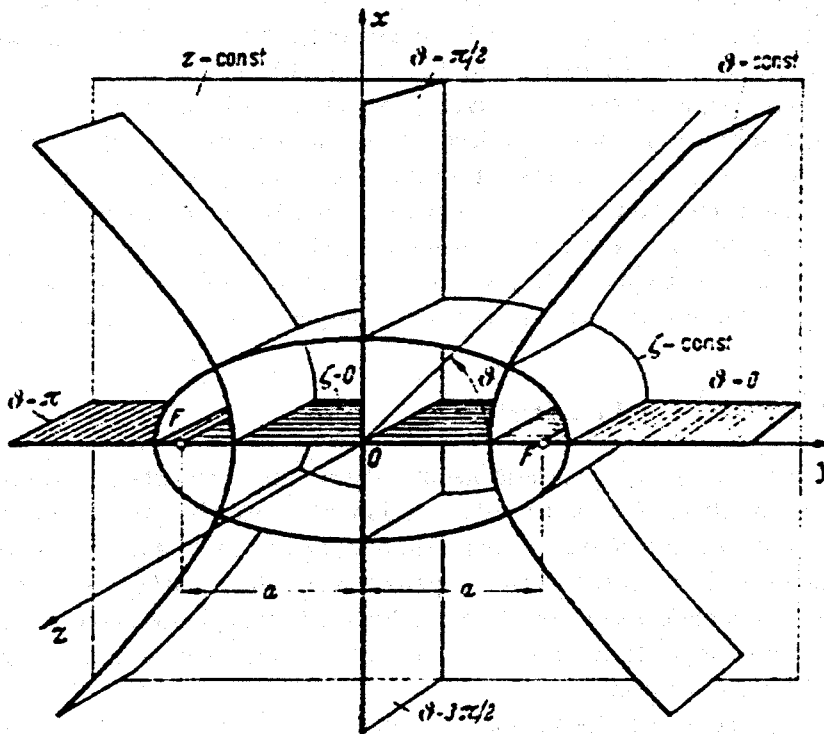


Figura 7.2: Coordenadas elíptico-cilíndricas (ζ, ϑ, z) , [MS88, pág. 17].

Estas variáveis podem tomar os seguintes valores: $0 \leq \zeta < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ rad, e $-\infty < z < \infty$. As relações entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas elíptico-cilíndricas são dadas por (com $\sinh \zeta = (e^\zeta - e^{-\zeta})/2$ e $\cosh \zeta = (e^\zeta + e^{-\zeta})/2$):

$$x = a \sinh \zeta \sin \vartheta, \quad (7.1)$$

$$y = a \cosh \zeta \cos \vartheta, \quad (7.2)$$

$$z = z, \quad (7.3)$$

onde a constante a é a semi-largura da fita. As relações inversas são dadas por:

$$\zeta = \tanh^{-1} \sqrt{\frac{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}{2y^2}}, \quad (7.4)$$

$$\vartheta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{a^2 + x^2 - y^2 + \Omega}{2y^2}}, \quad (7.5)$$

$$z = z, \quad (7.6)$$

onde $\Omega = \sqrt{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2y^2}$.

A equação de Laplace neste sistema de coordenadas é dada por:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2(\cosh^2 \zeta - \cos^2 \vartheta)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (7.7)$$

Uma solução da Eq. (7.7) pode ser obtida utilizando separação de variáveis na forma $\phi(\zeta, \vartheta, z) = H(\zeta)\Phi(\vartheta)Z(z)$, tal que as funções H , Φ e Z obedecem às equações:

$$H'' - (\alpha_2 + \alpha_3 a^2 \cosh^2 \zeta)H = 0, \quad (7.8)$$

$$\Phi'' + (\alpha_2 + \alpha_3 a^2 \cos^2 \vartheta)\Phi = 0, \quad (7.9)$$

$$Z'' + \alpha_3 Z = 0, \quad (7.10)$$

onde α_2 e α_3 são constantes.

Para a fita comprida que estudamos, é possível desprezar efeitos de borda perto de $z = \pm \ell/2$. Já foi provado que neste caso o potencial deve ser uma função linear em z , não apenas na fita, mas também em todo o espaço, [Rus68]. Esta condição implica que $\alpha_3 = 0$. Existem então duas soluções possíveis para $\Phi(\vartheta)$. Se $\alpha_2 = 0$, então $\Phi = C_1 + C_2 \vartheta$; se $\alpha_2 \neq 0$, então $\Phi = C_3 \sin(\sqrt{\alpha_2} \vartheta) + C_4 \cos(\sqrt{\alpha_2} \vartheta)$, onde C_1 a C_4 são constantes. Ao longo da fita temos que $x = 0$ e $y^2 \leq a^2$. Isto significa que $\Omega = a^2 - y^2$, $\zeta = 0$ e $\vartheta = \tan^{-1} \sqrt{(a^2 - y^2)/y^2}$. Como o potencial não depende de y ao longo da fita, isto significa que o potencial também não deve depender de ϑ . Assim, uma solução não trivial para Φ existe apenas se $\alpha_2 = 0$, $C_2 = 0$, e $\Phi = \text{constante}$ para todo ϑ . A solução para $H(\zeta)$ com $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ será então uma função linear de ζ . A solução geral do problema é, portanto, dada por:

$$\begin{aligned} \phi &= (A_1 \zeta - A_2)(A_3 z - A_4) \\ &= \left[A_1 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}{2y^2}} - A_2 \right] (A_3 z - A_4), \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde $A_1, \dots, A_4$ são constantes.

O campo elétrico $\vec{E} = -\nabla \phi$ toma a forma:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -A_1 \left(\frac{x|y|\sqrt{2}}{\Omega\sqrt{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}} \hat{x} + \frac{|y|\sqrt{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}}{y\sqrt{2}\Omega} \hat{y} \right) (A_3 z - A_4) \\ &\quad - A_3 \left(A_1 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}{2y^2}} - A_2 \right) \hat{z}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ao longo da fita ($x = 0$, $|y| < a$ e $|z| < \ell$) estas expressões se reduzem a:

$$\phi = -A_2(A_3 z - A_4), \quad (7.13)$$

$$\vec{E} = A_2 A_3 \hat{z}. \quad (7.14)$$

Para encontrar a densidade superficial de carga, utilizamos a aproximação próxima à fita ($|x| \ll a$ e $|y| < a$):

$$\vec{E} \approx -A_1 \left[\frac{x}{|x|\sqrt{a^2 - y^2}} \hat{x} + \frac{|x|y}{(a^2 - y^2)^{3/2}} \hat{y} \right] (A_3 z - A_4) - A_3 \left[A_1 \tanh^{-1} \frac{|x|}{\sqrt{a^2 - y^2}} - A_2 \right] \hat{z}. \quad (7.15)$$

A densidade superficial de carga $\sigma(x, z)$ pode ser obtida pelo procedimento padrão utilizando a lei de Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q/\epsilon_0$, onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, $d\vec{a}$ é o elemento infinitesimal de área com direção normal à superfície em cada ponto e Q é a carga total dentro da superfície fechada S . A densidade superficial de carga é então obtida considerando o limite em que $|x| \rightarrow 0$ na Eq. (7.15) e um volume cilíndrico pequeno com sua altura muito menor que seu diâmetro. Isto resulta em $\sigma = \epsilon_0[\vec{E}(x > 0) \cdot \hat{x} - \vec{E}(x < 0) \cdot (-\hat{x})]$. Utilizando a Eq. (7.15), a densidade superficial de carga é obtida como:

$$\sigma = -\frac{2\epsilon_0 A_1 (A_3 z - A_4)}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (7.16)$$

7.4 Fita carregada mas sem corrente

Quando não há corrente na fita, o potencial ao longo de seu comprimento é constante para todo z . Da Eq. (7.13) esta condição implica que $A_3 = 0$. Com isto as Eqs. (7.11), (7.12) e (7.16) se reduzem a, respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= -A_1 A_4 \zeta + A_2 A_4 \\ &= -A_1 A_4 \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}{2y^2}} + A_2 A_4, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = A_1 A_4 \left(\frac{x|y|\sqrt{2}}{\Omega \sqrt{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}} \hat{x} + \frac{|y|\sqrt{-x^2 + y^2 - a^2 + \Omega}}{y\sqrt{2}\Omega} \hat{y} \right), \quad (7.18)$$

$$\sigma(0, |y| < a, z) = \frac{2\epsilon_0 A_1 A_4}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (7.19)$$

Estes já eram resultados conhecidos na literatura, ver [Smy89, Seção 4.22] e [GL96].

No plano da fita, $x = 0$, vem que o potencial e o campo elétrico são dados por:

$$\phi(0, y, z) = \begin{cases} A_2 A_4, & \text{para } |y| \leq a, \\ A_2 A_4 - A_1 A_4 \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{y^2}}, & \text{para } |y| \geq a, \end{cases} \quad (7.20)$$

$$\vec{E}(0, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{para } |y| < a, \\ \frac{A_1 A_4}{\sqrt{y^2 - a^2}} \hat{y}, & \text{para } y > a, \\ -\frac{A_1 A_4}{\sqrt{y^2 - a^2}} \hat{y}, & \text{para } y < -a. \end{cases} \quad (7.21)$$

A carga por unidade de comprimento na fita é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\ell} &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-a}^a \sigma(|y| < a, 0, z) dy dz = \frac{2\epsilon_0 A_1 A_4}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-a}^a \frac{dy dz}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ &= 2\pi\epsilon_0 A_1 A_4. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Consideramos o potencial a uma distância $\ell/2$ do eixo da fita como sendo nulo. Isto é, $\phi(0, \ell/2, z) = 0$. Com isto vem da Eq. (7.20) que:

$$A_1 = \frac{A_2}{\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\ell^2 - 4a^2}{\ell^2}}}. \quad (7.23)$$

A capacitância do condutor por unidade de comprimento é dada por $C/\ell = (Q/\ell)/\phi_0$, onde $\phi_0 = A_2 A_4$ é o potencial na fita. Com os resultados anteriores vem:

$$\frac{C}{\ell} = 2\pi\epsilon_0 \frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\ell^2 - 4a^2}{\ell^2}}}. \quad (7.24)$$

Com $\ell \gg a$ vem então:

$$\frac{C}{\ell} \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\ell/a)}. \quad (7.25)$$

A auto-indutância por unidade de comprimento desta fita é dada por, [BA95], [Ass97, Eq. (22)], [BA98, págs. 52–53]:

$$\frac{L}{\ell} \approx \frac{\mu_0}{2} \ln \frac{\ell}{a}. \quad (7.26)$$

Vemos então que é válida neste caso a relação:

$$\frac{LC}{\ell} = \frac{1}{c^2}, \quad (7.27)$$

onde $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo. Esta relação é válida para condutores retilíneos de seção reta arbitrária, ver [Jac75, pág. 262].

Com (7.22) a (7.25) vem que:

$$\phi(|x| < a, 0, z) = \frac{Q/\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\ell}{a}. \quad (7.28)$$

Isto mostra que mesmo mantendo a densidade linear de carga Q/ℓ constante vem que o potencial sobre a fita diverge logaritmicamente no limite em que $\ell/a \rightarrow \infty$.

7.5 Análise da fita com corrente estacionária

No plano $x = 0$ a corrente na fita cria um campo magnético $\vec{B}$ que aponta ao longo da direção x positiva (negativa) para $y > 0$ ($y < 0$). Este campo magnético age nos elétrons de condução que estão se movendo com velocidade de deriva $\vec{v}_d$ com uma força dada por $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ (veja a Figura 7.3).

Esta força causa uma redistribuição de cargas ao longo da direção y , com cargas negativas se concentrando ao longo do centro da fita e cargas positivas nas extremidades $y = \pm a$. No equilíbrio esta redistribuição de cargas cria um campo elétrico ao longo da fita ($x = 0$, $|y| < a$, $|z| < \ell$) na direção y , E_y , que equilibra a força magnética. Ou seja, $|qE_y| = |qv_d B|$.

Desprezamos este campo elétrico do efeito Hall porque ele é geralmente muito menor que o campo elétrico que mantém a corrente fluindo, como vimos na Seção 2.2.

Agora, analisamos alguns casos particulares. Primeiramente, supomos dois limites ao compararmos a com a distância do ponto de observação até o eixo z , $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se $a^2 \gg \rho^2$, temos que $\Omega \approx a^2 + x^2 - y^2 + 2x^2y^2/a^2$ e $\zeta \approx |x|/a$, tal que:

$$\phi \approx \left(A_1 \frac{|x|}{a} - A_2 \right) (A_3 z - A_4). \quad (7.29)$$

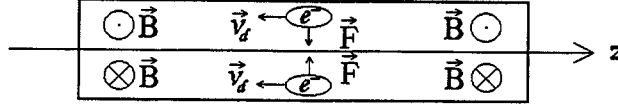


Figura 7.3: A força magnética $\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$ direcionada ao centro da fita, agindo sobre um elétron de condução que se desloca com velocidade de deriva v_d . Esta força é devida ao campo magnético $\vec{B}$ gerado pela corrente elétrica I fluindo ao longo da direção z .

Combinando isto com a Eq. (7.16) quando $a^2 \gg y^2$ vem que:

$$\phi \approx (aA_2 - |x|) \frac{\sigma(z)}{2\epsilon_0}. \quad (7.30)$$

Como esperado, este resultado coincide com a Eq. (5.2), com $aA_2 = (\ell_y/\pi) \times \ln(2\ell_y/\ell_z)$.

Por outro lado, se $a^2 \ll \rho^2$, temos que $\Omega \approx \rho^2 + a^2 - 2a^2y^2/\rho^2$ e $\zeta \approx \ln(\rho/a)$, tal que:

$$\phi \approx \left(A_1 \ln \frac{\rho}{a} - A_2 \right) (A_3 z - A_4). \quad (7.31)$$

Este resultado coincide com a Eq. (2.5), [ARM99, Eq. (8)] com $A_2/A_1 = \ln(2\ell/a)$, onde ℓ é o comprimento típico de um fio ou fita, com $\ell \gg a$. Esta coincidência é razoável porque a Eq. (2.5) corresponde ao potencial fora de um fio cilíndrico longo e reto conduzindo uma corrente constante. Em um ponto longe do eixo da fita, ambos resultados coincidem, como deveriam.

7.6 Comparação com os resultados experimentais

A Eq. (7.12) indica que existe um campo elétrico não apenas ao longo do fio resistivo conduzindo uma corrente constante, mas também no espaço à sua volta. Jefimenko realizou alguns experimentos que mostram a existência de um campo elétrico externo, [Jef62] e [Jef89, Placa 6]. A geometria de seu primeiro experimento, reproduzida em nossa Figura 1.7, é equivalente ao que foi proposto aqui. Ou seja, uma fita bidimensional condutora pintada sobre uma placa de vidro, usando tinta transparente condutora. Para comparar nossos cálculos com seus resultados experimentais, necessitamos dos valores de A_2/A_1 e A_4/A_3 . Tomamos $A_2/A_1 = 3,6$ e $A_4/A_3 = 0$. A condição $A_4/A_3 = 0$ corresponde ao caso simétrico proposto por Jefimenko em que o campo elétrico é paralelo ao condutor imediatamente fora dele em $z = 0$ (densidade de cargas superficiais nula em $z = 0$).

Primeiro supomos o plano ortogonal à fita, $y = 0$. Neste caso o potencial se reduz a:

$$\phi = \left(A_1 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + a^2}} - A_2 \right) (A_3 z - A_4). \quad (7.32)$$

As linhas de campo elétrico ortogonais às equipotenciais podem ser obtidas pelo procedimento apresentado por Sommerfeld, [Som64, págs. 125–133]. Estas linhas são representadas pela função ξ tal que $\nabla \xi \cdot \nabla \phi = 0$. Esta equação, junto com o valor de ϕ obtido acima, resulta no valor de ξ

dado por:

$$\xi = A_1 A_3 z^2 - 2A_1 A_4 z + \frac{A_1 A_3}{2} x^2 - A_1 A_3 |x| \sqrt{x^2 + a^2} \cosh^{-1} \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{a^2}} - \frac{A_1 A_3}{2} a^2 \left(\cosh^{-1} \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{a^2}} \right)^2 - \frac{A_2 A_3}{4} \left(|x| \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \frac{|x| + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right). \quad (7.33)$$

As equipotenciais e linhas de campo elétrico obtidas das Eqs. (7.32) e (7.33) estão na Figura 7.4.

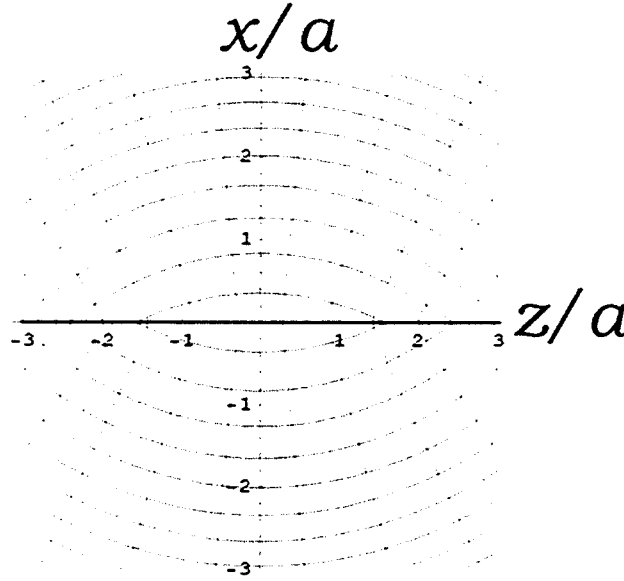


Figura 7.4: Linhas equipotenciais (tracejadas) e linhas de campo elétrico (contínuas) no plano $y = 0$. A linha horizontal grossa representa a interseção com o plano da fita. Usamos os valores $A_2/A_1 = 3,6$ e $A_4/A_1 = 0$.

Agora supomos o plano da fita, $x = 0$. O potencial se reduz a:

$$\phi(0, |y| \leq a, z) = -A_2(A_3 z - A_4), \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \phi(0, |y| \geq a, z) &= \left(A_1 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{y^2}} - A_2 \right) (A_3 z - A_4) \\ &= \left(A_1 \cosh^{-1} \frac{|y|}{a} - A_2 \right) (A_3 z - A_4). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Por um procedimento similar ao anterior, as linhas de campo elétrico no plano $x = 0$ são dadas por:

$$\xi(0, |y| \leq a, z) = A_2 A_3 a y, \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \xi(0, |y| \geq a, z) &= A_1 A_3 z^2 - 2A_1 A_4 a + \frac{A_1 A_3}{2} y^2 \\ &\quad - A_1 A_3 |y| \sqrt{y^2 - a^2} \cosh^{-1} \frac{|y|}{a} + \frac{A_1 A_3}{2} a^2 \left(\cosh^{-1} \frac{|y|}{a} \right)^2 \\ &\quad - \frac{A_2 A_3}{4} \left(|y| \sqrt{y^2 - a^2} - a^2 \ln \frac{|y| + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} \right). \end{aligned} \quad (7.37)$$

As equipotenciais e linhas de campo elétrico obtidas das Eqs. (7.34) até (7.37) estão representadas na Figura 7.5.

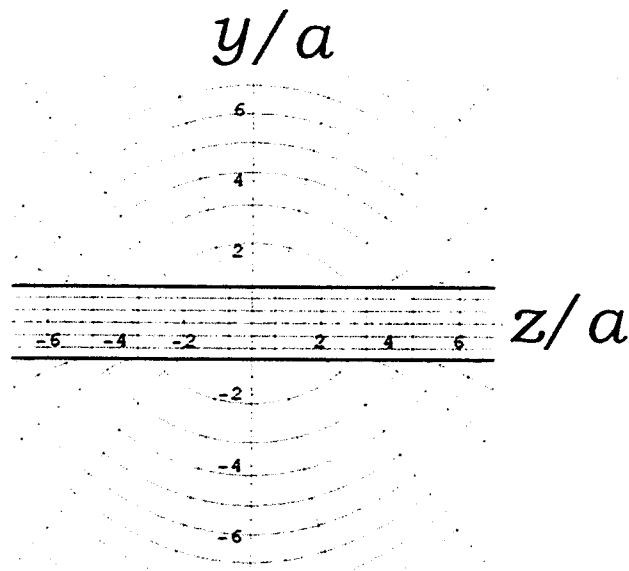


Figura 7.5: Linhas equipotenciais (tracejadas) e linhas de campo elétrico (contínuas) no plano $x = 0$. As linhas horizontais grossas representam as extremidades da fita em $y/a = 1$ e $y/a = -1$. Usamos $A_2/A_1 = 3,6$ e $A_4/A_4 = 0$.

Na Figura 7.6 as linhas de campo elétrico da Figura 7.5 estão sobrepostas aos resultados experimentais de Jefimenko. Deve ser mencionado que as sementes de grama são corpos dielétricos e elas mesmas mudam o campo elétrico em sua vizinhança, de modo que o mapeamento de campo experimental não pode ser exato. Apesar disto, a correspondência encontrada aqui é muito boa.

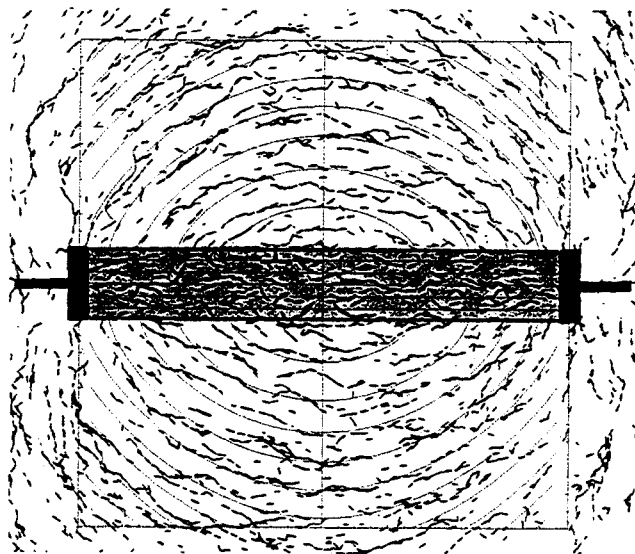


Figura 7.6: Linhas de campo elétrico da Figura 7.5 sobrepostas na Figura 1.7.

Na Figura 7.7 o resultado experimental de [JBK62], Figura 1.11, está sobreposto às linhas equipotenciais calculadas utilizando as Eqs. (7.34) e (7.35) com $A_2/A_1 = 3,0$ e $A_4/A_3 = 0$. A concordância não é tão boa quanto em nossa figura anterior 7.6 por duas razões. A primeira

razão é que nossos cálculos são para uma geometria bidimensional, enquanto o experimento em [JBK62] foi realizado em uma câmara retangular oca tridimensional. A segunda razão é que no experimento das sementes de grama, [Jef62], a razão entre o comprimento e a largura do condutor era de 7, enquanto que no segundo experimento, [JBK62], esta razão era apenas de 2,3. Isto significa que efeitos de borda perto de $z = \ell/2$ e de $z = -\ell/2$ são mais importantes neste segundo caso. Estes efeitos de borda não foram considerados em nossos cálculos.

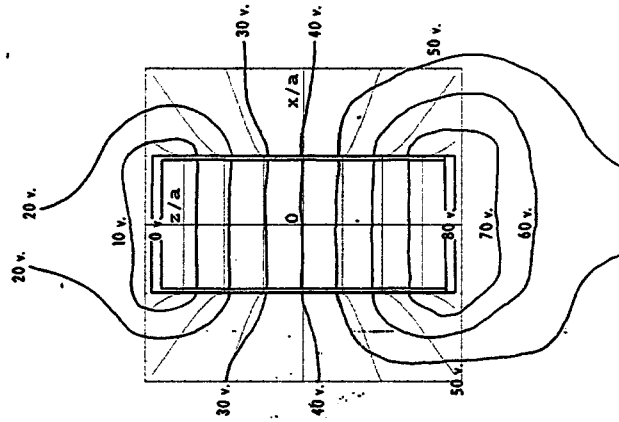


Figura 7.7: Linhas equipotenciais no plano $x = 0$ sobrepostas à Figura 1.11. Usamos $A_2/A_1 = 3,0$ e $A_4/A_3 = 0$.

Parte II

Condutores Curvos

Nesta parte tratamos problemas onde a corrente estacionária percorre trajetórias curvas. O sistema de referência é sempre o laboratório, em relação ao qual os condutores, a carga teste e o observador estão parados. Consideramos que os condutores tenham resistividade uniforme e que o meio em torno dos condutores seja ar ou vácuo.

Capítulo 8

Circuito Azimutal

8.1 Solução conhecida na literatura

O problema de uma casca cilíndrica condutora resistiva de comprimento infinito e raio a , sem espessura, com uma corrente superficial azimutal constante foi tratado por Jefimenko, [Jef66, Problema 9.33 e Figura 14.7] e [Jef89, págs. 509–511], Heald, [Hea84], e Griffiths, [Gri89, pág. 279]. A geometria considerada aqui é apresentada na Figura 8.1. Heald supôs que a bateria fosse uma linha paralela ao eixo do cilindro, alimentando o circuito com uma diferença de potencial ϕ_0 ($\phi_0/2$ e $-\phi_0/2$ em cada extremidade da bateria). Fazendo uma expansão de Fourier do potencial na superfície do condutor em termos da coordenada φ em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) temos:

$$\phi(a, \varphi, z) = \phi_0 \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\phi_0}{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin(k\varphi)}{k} \right]. \quad (8.1)$$

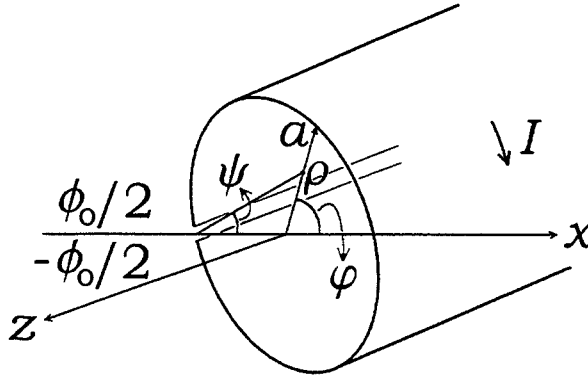


Figura 8.1: Geometria do problema considerado por Heald. Há uma densidade de corrente superficial K fluindo uniformemente na direção azimutal sobre a superfície do cilindro.

A partir da equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ em coordenadas polares, ele encontrou o potencial em todo o espaço (dentro e fora do cilindro), assim como o campo elétrico e as cargas superficiais,

dados por, respectivamente:

$$\phi(\rho \leq a, \varphi, z) = \frac{\phi_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{\rho \sin \varphi}{a + \rho \cos \varphi} = \frac{\phi_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{a + x} = \frac{\phi_0}{\pi} \psi, \quad (8.2)$$

$$\phi(\rho \geq a, \varphi, z) = \frac{\phi_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{a \sin \varphi}{\rho + a \cos \varphi} = \frac{\phi_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{ay}{x^2 + ax + y^2} = \frac{\phi_0}{\pi} \psi, \quad (8.3)$$

$$\vec{E}(\rho < a, \varphi, z) = -\frac{\phi_0}{\pi} \frac{a \sin \varphi \hat{\rho} + (\rho + a \cos \varphi) \hat{\varphi}}{a^2 + \rho^2 + 2a\rho \cos \varphi} = -\frac{\phi_0}{\pi} \frac{\hat{\psi}}{\rho'}, \quad (8.4)$$

$$\vec{E}(\rho > a, \varphi, z) = \frac{\phi_0}{\pi} \frac{a \rho \sin \varphi \hat{\rho} - (a + \rho \cos \varphi) \hat{\varphi}}{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \cos \varphi}, \quad (8.5)$$

$$\sigma_{\text{int}}(a, \varphi, z) = \sigma_{\text{ext}}(a, \varphi, z) = \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{2\pi a} \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{2\pi a} \tan \psi, \quad (8.6)$$

onde ψ é o ângulo azimutal medido a partir da bateria e ρ' o raio medido a partir da bateria.

Pela Eq. (8.6) vemos que Heald encontrou a mesma densidade superficial de carga tanto na superfície interna da casca, $\rho \rightarrow a^-$, quanto na superfície externa, $\rho \rightarrow a^+$. A carga total σ_t é dada por:

$$\sigma_t(a, \varphi, z) = \sigma_{\text{int}}(a, \varphi, z) + \sigma_{\text{ext}}(a, \varphi, z) = \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{\pi a} \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{\pi a} \tan \psi. \quad (8.7)$$

Podemos aproximar as expressões de σ para longe ($\varphi \ll 1$ rad) e perto da bateria ($\varphi = (\pi \pm \delta)$ rad, onde $0 < \delta \ll 1$):

$$\sigma_{\text{int}}(\varphi \ll 1 \text{ rad}) = \sigma_{\text{ext}}(\varphi \ll 1 \text{ rad}) \approx \frac{\varepsilon_0 \phi_0 \varphi}{4\pi a} = \frac{\varepsilon_0 \phi}{2a}, \quad (8.8)$$

$$\sigma_{\text{int}}(\varphi = \pi \pm \delta \text{ rad}) = \sigma_{\text{ext}}(\varphi = \pi \pm \delta \text{ rad}) \approx \mp \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{\pi a \delta} = \mp \frac{\varepsilon_0 \phi_0}{\pi s}, \quad (8.9)$$

onde $s = a\delta$ é a distância à bateria em forma de linha. Como vimos nos Capítulos 4 e 6, este é um comportamento que também aparece nas cargas superficiais de condutores longos, com correntes estacionárias.

Na Figuras 8.2 e 8.3 apresentamos as figuras encontradas por Heald para as equipotenciais e linhas de campo elétrico, respectivamente, num plano perpendicular ao eixo do cilindro. A bateria está representada pelo disquinho preto. Analiticamente, as linhas de campo elétrico dentro e fora do cilindro são círculos.

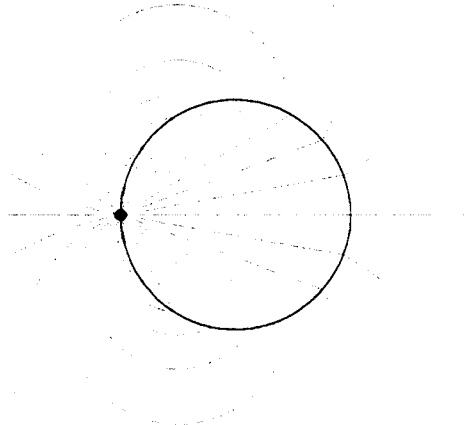


Figura 8.2: Resultado teórico encontrado por Heald para as linhas equipotenciais no circuito azimutal.

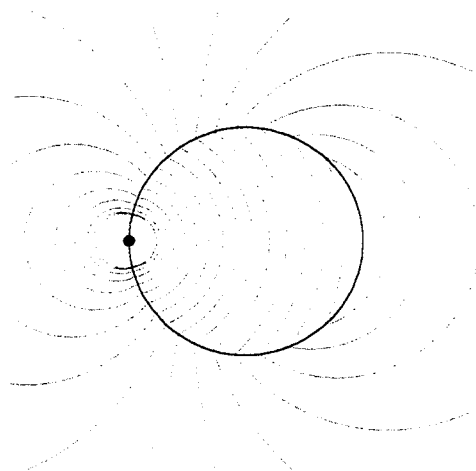


Figura 8.3: Resultado teórico encontrado por Heald para as linhas de campo elétrico no circuito azimutal.

Na Figura 8.4 apresentamos distribuição superficial de carga ao longo do cilindro em função do ângulo φ . Note que ela tem um comportamento aproximadamente linear próximo de $\varphi = 0$ rad, no ponto mais distante da bateria, e explode conforme se aproxima da bateria, em $\varphi = \pm\pi$ rad.

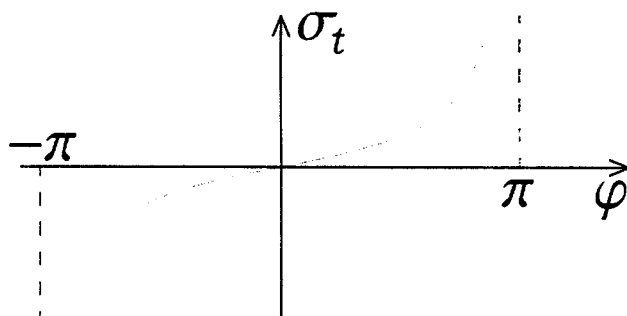


Figura 8.4: Resultado teórico encontrado por Heald para a distribuição superficial de carga total.

Capítulo 9

Casca Esférica Resistiva Transportando Corrente Azimutal Constante

9.1 Introdução

Aqui consideramos uma corrente azimutal estacionária fluindo em uma casca resistiva esférica. A dificuldade matemática está em um grau intermediário entre a casca cilíndrica infinita, tratada no Capítulo 8, e o condutor toroidal tratado no Capítulo 10. Este caso é importante porque podemos obter soluções analíticas para o potencial elétrico, para o campo elétrico e para as distribuições de cargas superficiais, tanto dentro quanto fora da casca esférica. Estas soluções não são tão complicadas como no caso do toróide condutor. Apesar disto elas mostram claramente a existência de um campo elétrico fora de um condutor resistivo de volume finito. Não temos conhecimento de ninguém que tenha tratado deste caso antes.

9.2 Descrição do problema

Suponha uma casca esférica resistiva de raio a , centrada na origem. Supomos uma bateria ideal em forma de linha localizada ao longo de um meridiano da casca (como o Meridiano de Greenwich) e mantendo uma diferença de potencial constante entre os seus lados esquerdo e direito, Figura 9.1. Isto é, a bateria é uma semi-circunferência no plano $y = 0$ com suas extremidades em $(x, y, z) = (0, 0, \pm a)$ e seu centro em $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$. Utilizando coordenadas esféricas (r, θ, φ) a bateria linear está então localizada em (a, θ, π) . Supomos que a diferença de potencial gerada pela bateria não dependa do ângulo polar θ . A bateria gera uma corrente estacionária fluindo ao longo da casca na direção azimutal, veja as Figuras 9.1 e 9.2. O meio dentro e fora da casca esférica é suposto como sendo ar ou vácuo. De acordo com a lei de Ohm, o potencial ϕ ao longo da superfície é dado por:

$$\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_A + \phi_B \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (9.1)$$

Nosso objetivo é encontrar soluções para a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$, dentro e fora da casca esférica utilizando a Eq. (9.1) como uma condição de contorno. Adicionalmente, o potencial deve ter valor finito no centro da casca e a uma distância infinita (não há cargas nestas posições). O campo elétrico é então encontrado por $\vec{E} = -\nabla \phi$. Por último, a densidade superficial de carga σ é obtida pelo procedimento padrão de tomar as componentes radiais do campo elétrico externo e interno para $r \rightarrow a$.

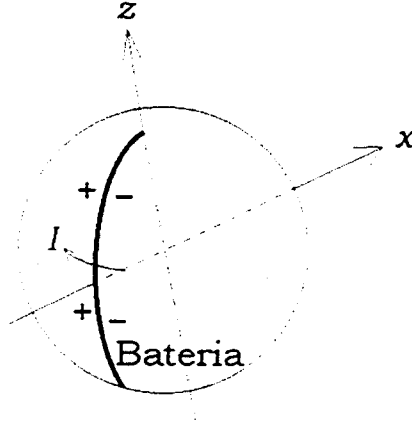


Figura 9.1: Uma casca esférica resistiva de raio a está centrada na origem. Uma bateria linear idealizada, localizada em $(r, \theta, \varphi) = (a, \theta, \pi)$ mantém uma corrente estacionária I fluindo ao longo da superfície da casca na direção azimutal. A linha escura representa a bateria semi-circular.

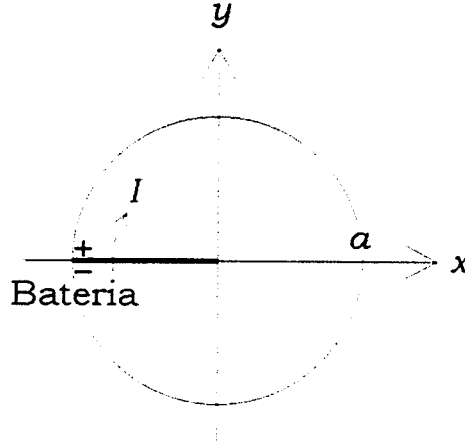


Figura 9.2: Geometria da casca esférica resistiva com raio a projetada no plano $z = 0$. Note que a bateria, representada pela linha escura, é vista como uma linha reta para $-a \leq x \leq 0$.

9.3 Solução geral

A equação de Laplace em coordenadas esféricas pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (9.2)$$

O potencial elétrico ϕ pode ser resolvido utilizando o método de separação de variáveis, $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Isto resulta nas seguintes equações para as funções R , Θ e Φ , [MS88, págs. 24–27]:

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{\alpha_2}{r^2} R = 0, \quad (9.3)$$

$$\Theta'' + \Theta' \cot \theta + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (9.4)$$

$$\Phi'' + \alpha_1 \Phi = 0, \quad (9.5)$$

onde α_1 e α_2 são constantes. A função $\Phi(\varphi)$ deve ser periódica em φ , isto é, $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Isto implica que $\alpha_1 = q^2$, onde $q = 0, 1, 2, \dots$. As soluções da Eq. (9.5) são então $\Phi_q^{(1)} = \sin(q\varphi)$

e $\Phi_q^{(2)} = \cos(q\varphi)$. A Eq. (9.4) é a equação de Legendre associada, [AW95, Seção 12.5]. Para que a solução seja finita em $\theta = 0$ rad e em $\theta = \pi$ rad a constante α_2 deve ter a forma $\alpha_2 = p(p+1)$, com $p = 0, 1, 2, \dots$. As soluções da Eq. (9.4) são as funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécie, respectivamente, $\Theta_{pq}^{(1)} = P_p^q(\cos \theta)$ e $\Theta_{pq}^{(2)} = Q_p^q(\cos \theta)$. Para $q = 0$ elas se reduzem aos polinômios de Legendre, $P_p(\cos \theta)$, e às funções de Legendre de segunda espécie, $Q_p(\cos \theta)$, respectivamente. As soluções da Eq. (9.3) com $\alpha_2 = p(p+1)$ são dadas por $R_p^{(1)} = r^p$ e $R_p^{(2)} = r^{-p-1}$.

O potencial deve permanecer finito em todo ponto do espaço. A solução $R_p^{(1)} = r^p$ diverge para $r \rightarrow \infty$ com $p \geq 1$. Por esta razão ela não participa da solução fora da casca. Se impusermos que o potencial se anula para $r \rightarrow \infty$, podemos também eliminar a função com $p = 0$. Analogamente, eliminamos a solução $R_p^{(2)} = r^{-p-1}$ dentro da casca porque ela diverge para $r \rightarrow 0$. A função $P_p^q(\cos \theta)$ é finita para $0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$. Por outro lado, $Q_p^q(\cos \theta)$ diverge em $\theta = 0$ rad e em $\theta = \pi$ rad. Portanto, ela também não participa da solução tanto dentro quanto fora da casca. As soluções finitas para o potencial fora e dentro da casca são assim dados pela combinações de todos os possíveis valores de $R_p(r)$, $\Theta_{pq}(\theta)$ e $\Phi_q(\varphi)$, respectivamente:

$$\phi_{\text{ext}}(r \geq a, \theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} r^{-(p+1)} \left\{ A_p P_p(\cos \theta) + \sum_{q=1}^{\infty} [B_{pq} \sin(q\varphi) + C_{pq} \cos(q\varphi)] P_p^q(\cos \theta) \right\}, \quad (9.6)$$

$$\phi_{\text{int}}(r \leq a, \theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} r^p \left\{ D_p P_p(\cos \theta) + \sum_{q=1}^{\infty} [E_{pq} \sin(q\varphi) + F_{pq} \cos(q\varphi)] P_p^q(\cos \theta) \right\}. \quad (9.7)$$

Para obter os coeficientes A_p , B_{pq} , C_{pq} , D_p , E_{pq} e F_{pq} aplicamos as condições de contorno na superfície da casca, em $r = a$. Expandindo a Eq. (9.1) em série de Fourier, [Hea84]:

$$\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_A + \phi_B \frac{\varphi}{2\pi} = \phi_A + \frac{\phi_B}{\pi} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \sin(q\varphi) \right]. \quad (9.8)$$

Como não existem termos de $\cos(q\varphi)$ na Eq. (9.8) obtemos imediatamente que $C_{pq} = F_{pq} = 0$.

Em primeiro lugar, encontramos os coeficientes A_p e B_{pq} para esta região fora da casca ($r \geq a$). A Eq. (9.6), calculada em $r = a$, combinada com a Eq. (9.8) resulta nas seguintes equações:

$$\phi_A = \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} A_p P_p(\cos \theta), \quad (9.9)$$

$$\frac{\phi_B}{\pi} \frac{(-1)^{q-1}}{q} = \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} B_{pq} P_p^q(\cos \theta). \quad (9.10)$$

Para obter os coeficientes A_p e B_{pq} multiplicamos ambos os lados da Eq. (9.9) por $P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$, ambos os lados da Eq. (9.10) por $P_\ell^q(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ e integramos de 0 rad até π rad. Usamos então a relação de ortogonalidade das funções associadas de Legendre, [AW95, Eq. (12.104)]:

$$\int_0^\pi P_p^q(\cos \theta) P_\ell^q(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2p+1} \frac{(p+q)!}{(p-q)!} \delta_{p\ell}, \quad (9.11)$$

onde $\delta_{p\ell}$ é o delta de Kronecker, que vale 1 para $p = \ell$ e 0 para $p \neq \ell$. Isto resulta em:

$$A_p = a \phi_A \delta_{p0}, \quad (9.12)$$

e

$$B_{pq} = \frac{\phi_B}{\pi} a^{p+1} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \frac{2p+1}{2} \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq}, \quad (9.13)$$

onde definimos

$$I_{pq} \equiv \int_0^\pi P_p^q(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (9.14)$$

Note que $I_{pq} = 0$ para $p + q$ ímpar devido à propriedade de paridade das funções de Legendre associadas, [AW95, pág. 725].

Podemos mudar o limite superior da somatória sobre q na Eq. (9.6) de ∞ para p , pois $P_p^q(\cos \theta) = 0$ para $q > p$. A solução final para o potencial fora de uma casca esférica conduzindo uma corrente estacionária azimutal é dada por:

$$\phi_{\text{ext}}(r \geq a, \theta, \varphi) = \phi_A \frac{a}{r} + \frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{a^{p+1}}{r^{p+1}} \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times \right. \\ \left. \times I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right]. \quad (9.15)$$

Repare que a ordem das somatórias pode ser invertida, de $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p$ para $\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=q}^{\infty}$.

Para a região longe da origem, $r \gg a$, os dois termos mais relevantes da Eq. (9.15) são:

$$\phi_{\text{ext}}(r \gg a, \theta, \varphi) \approx \phi_A \frac{a}{r} + \phi_B \frac{3a^2}{8r^2} \sin \theta \sin \varphi. \quad (9.16)$$

Isto pode ser entendido como o potencial de uma carga pontual $q_{\text{esfera}} = 4\pi\epsilon_0\phi_A a$ no centro de uma casca, adicionado ao potencial de um dipolo elétrico de momento $\vec{p}_{\text{esfera}}$ localizado na origem, com $\vec{p}_{\text{esfera}} = (3\pi\epsilon_0\phi_B a^2/2)\hat{y}$, ou seja:

$$\phi_{\text{ext}}(r \gg a, \theta, \varphi) = \frac{q_{\text{esfera}}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}_{\text{esfera}} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (9.17)$$

A solução para o potencial dentro da esfera ($r \leq a$), ϕ_{int} , pode ser encontrada substituindo $(a/r)^{p+1} \rightarrow (r/a)^p$, [Jac75, pág. 91]:

$$\phi_{\text{int}}(r \leq a, \theta, \varphi) = \phi_A + \frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{r^p}{a^p} \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times \right. \\ \left. \times I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right], \quad (9.18)$$

onde I_{pq} é dado pela Eq. (9.14).

Como pode ser visto multiplicando ambos os lados da Eq. (9.19) por $P_\ell^q(\cos \theta) \sin \theta d\theta$, integrando de $\theta = 0$ rad até $\theta = \pi$ rad e finalmente aplicando as Eqs. (9.14), (9.13) e (9.8), podemos utilizar que:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) = \varphi, \quad (9.19)$$

e obtemos das Eqs. (9.15) e (9.18), no limite $r \rightarrow a$, que $\phi_{\text{ext}}(a, \theta, \varphi) = \phi_{\text{int}}(a, \theta, \varphi) = \phi_A + \phi_B \varphi / 2\pi$, como esperado.

9.4 Campo elétrico e cargas superficiais

O campo elétrico em coordenadas esféricas é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}. \quad (9.20)$$

Isto resulta nas seguintes componentes fora e dentro da casca, respectivamente:

$$E_{r,\text{ext}} = \phi_A \frac{a}{r^2} + \frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{a^{p+1}}{r^{p+2}} \frac{(-1)^{q-1}}{q} (p+1)(2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times \right. \\ \left. \times I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right], \quad (9.21)$$

$$E_{\theta,\text{ext}} = \frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{a^{p+1}}{r^{p+2}} \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times I_{pq} P_p^{q'}(\cos \theta) \sin \theta \sin(q\varphi) \right], \quad (9.22)$$

$$E_{\varphi,\text{ext}} = -\frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{a^{p+1}}{r^{p+2}} (-1)^{q-1} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times I_{pq} \frac{P_p^q(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(q\varphi) \right], \quad (9.23)$$

$$E_{r,\text{int}} = -\frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{r^{p-1}}{a^p} \frac{(-1)^{q-1}}{q} p(2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right], \quad (9.24)$$

$$E_{\theta,\text{int}} = \frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{r^{p-1}}{a^p} \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times I_{pq} P_p^{q'}(\cos \theta) \sin \theta \sin(q\varphi) \right], \quad (9.25)$$

$$E_{\varphi,\text{int}} = -\frac{\phi_B}{2\pi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{r^{p-1}}{a^p} (-1)^{q-1} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} \times I_{pq} \frac{P_p^q(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(q\varphi) \right]. \quad (9.26)$$

Nas Eqs. (9.22) e (9.25), $P_p^{q'}(\cos \theta)$ é a derivada da função de Legendre associada $P_p^q(\cos \theta)$ em relação ao seu argumento $\cos \theta$.

Das Eqs. (9.22), (9.25) e (9.19) obtemos, no limite $r \rightarrow a$, que:

$$E_{\theta,\text{ext}}(a, \theta, \varphi) = E_{\theta,\text{int}}(a, \theta, \varphi) \\ = \frac{\phi_B}{2\pi a} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^{q'}(\cos \theta) \sin \theta \sin(q\varphi) \right] \\ = \frac{\phi_B}{2\pi a} \frac{d}{d\theta} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right] \\ = \frac{\phi_B}{2\pi a} \frac{d}{d\theta} \varphi = 0. \quad (9.27)$$

Das Eqs. (9.23), (9.26) e (9.19) obtemos, no limite $r = a$, que:

$$E_{\varphi,\text{ext}}(a, \theta, \varphi) = E_{\varphi,\text{int}}(a, \theta, \varphi) \\ = -\frac{\phi_B}{2\pi a \sin \theta} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \cos(q\varphi) \right] \\ = -\frac{\phi_B}{2\pi a \sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q-1}}{q} (2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right] \\ = -\frac{\phi_B}{2\pi a \sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \varphi = -\frac{\phi_B}{2\pi a \sin \theta}. \quad (9.28)$$

A Eq. (9.27) indica que o campo elétrico e a densidade superficial de corrente na superfície da casca estão apenas na direção azimutal, como esperado da Eq. (9.1). O comprimento de um círculo azimutal no ângulo polar θ ao longo da superfície da casca é dado por $2\pi a \sin \theta$. A

Eq. (9.28) indica que $E_\varphi(a, \theta, \varphi)$ para cada ângulo polar θ é dado pela diferença de potencial total $\phi(a, \pi, \varphi) - \phi(a, -\pi, \varphi) = \phi_B$, dividida pelo comprimento do circuito correspondente no ângulo polar θ , como esperado. Pela lei de Ohm, a mesma proporcionalidade inversa com $\sin \theta$ será válida para a densidade superficial de corrente. Ou seja, $\vec{K}$ deve ser proporcional a $\phi_B / \sin \theta$. Isto é, a corrente diverge nos pólos (em $\theta = 0$ rad e em $\theta = \pi$ rad). Esta é uma limitação do modelo teórico que utilizamos. Ela surge do fato de utilizarmos uma casca esférica condutora com uma bateria ideal na forma de um meridiano. Em um experimento real esta divergência não deve acontecer, de modo que nossa solução analítica não deve ser válida próximo a estes dois pólos. O motivo de utilizarmos o modelo teórico de uma bateria linear na forma de um meridiano é que ele permite a obtenção de uma solução analítica para este importante problema de uma corrente fechada fluindo em um volume finito.

As distribuições superficiais de carga fora e dentro da casca estão relacionadas ao campo elétrico através da lei de Gauss:

$$\sigma_{\text{ext}}(a, \theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow a} \varepsilon_0 \vec{E}_o(r, \theta, \varphi) \cdot \hat{r} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{\phi_A}{a} + \frac{\phi_B}{2\pi a} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q-1}}{q} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (p+1)(2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right] \right\}, \quad (9.29)$$

$$\sigma_{\text{int}}(a, \theta, \varphi) = - \lim_{r \rightarrow a} \varepsilon_0 \vec{E}_i(r, \theta, \varphi) \cdot \hat{r} \\ = \varepsilon_0 \frac{\phi_B}{2\pi a} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^{q-1}}{q} p(2p+1) \frac{(p-q)!}{(p+q)!} I_{pq} P_p^q(\cos \theta) \sin(q\varphi) \right]. \quad (9.30)$$

A densidade superficial de carga total é a soma destas duas expressões, ou seja, $\sigma_t = \sigma_{\text{ext}} + \sigma_{\text{int}}$.

Na Figura 9.3 graficamos as equipotenciais no plano $z = 0$ da casca esférica com $\phi_A = 0$ (com carga total nula na casca). A corrente está na direção anti-horária e a circunferência escura representa a interseção com a casca. As linhas de campo elétrico, que são perpendiculares a estas equipotenciais, também estão contidas no plano $z = 0$. Isto pode ser visto se notarmos que para $\theta = \pi/2$ rad temos que $P_p^q(\cos \theta) = 0$ quando $p+q$ for par (veja [AW95, pág. 733], combinado com a relação de recorrência (12.87) de [AW95]). Usando a propriedade $I_{pq} = 0$ para $p+q$ ímpar, temos que $E_\theta = 0$ para $r < a$ e para $r > a$.

Na Figura 9.4 graficamos as equipotenciais no plano $x = 0$. A corrente está entrando no plano do papel à esquerda da circunferência escura e saindo do plano do papel à direita. Utilizamos $\phi_A = 0$. Neste caso as linhas de campo elétrico não estão contidas neste plano (E_φ ou E_x não são nulas em todo o plano).

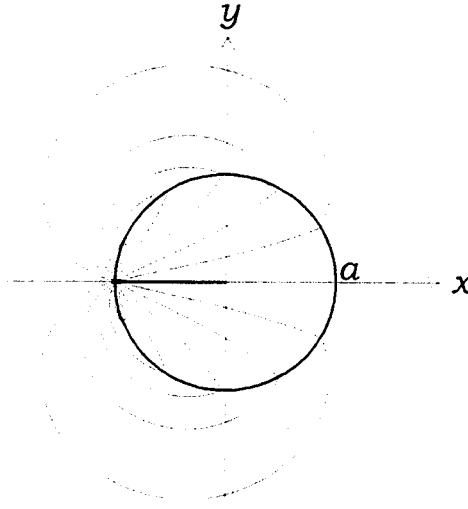


Figura 9.3: Equipotenciais no plano $z = 0$. A casca esférica resistiva conduz uma corrente estacionária no sentido horário. A cicunferência escura representa a casca. A projeção da bateria é representada pela linha reta escura que vai de $x = -a$ para $x = 0$. O campo elétrico não tem componente z , de modo que as linhas de campo elétrico são ortogonais às equipotenciais neste plano.

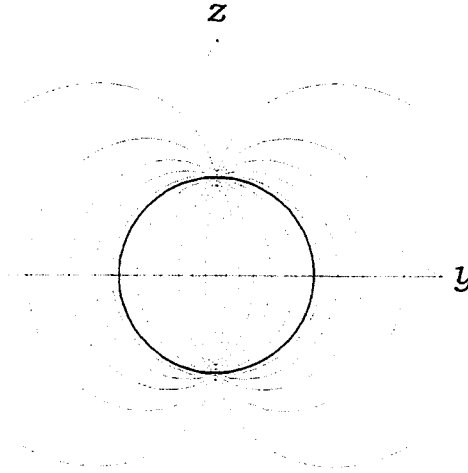


Figura 9.4: Equipotenciais no plano $x = 0$ da casca esférica com $\phi_A = 0$. A cicunferência escura representa a casca. A corrente entra no plano do papel no lado esquerdo da cicunferência e sai do papel no lado direito.

Na Figura 9.5 graficamos a densidade superficial total de carga σ_t no plano equatorial como uma função do ângulo azimutal φ , normalizado pelo valor de σ_t em $\varphi = \pi/4$ rad. A presença do termo $(-1)^q \sin(q\varphi)$ nas Eqs. (9.29) e (9.30) causa uma variação rápida no cálculo de σ_t . Isto pode ser visto na oscilação da Figura 9.5.

O mesmo efeito pode ser observado na análise de Heald de uma casca cilíndrica resistiva infinita, de raio a , conduzindo uma corrente azimutal estacionária, [Hea84]. Começando com um potencial na superfície da casca dado pela Eq. (9.1) com $\phi_A = 0$, ele obteve a densidade superficial total de carga ao longo da casca dada pela Eq. (8.7):

$$\sigma_t^{\text{cilindro}}(a, \varphi, z) = \frac{\epsilon_0 \phi_B}{\pi a} \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (9.31)$$

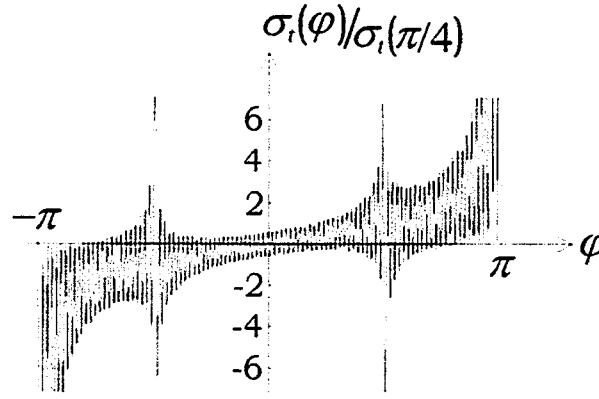


Figura 9.5: Densidade superficial total de carga $\sigma_t(\varphi)$ como função do ângulo azimutal φ no plano equatorial $z = 0$ de uma casca esférica resistiva conduzindo uma corrente azimutal estacionária, normalizada pelo seu valor em $\varphi = \pi/4$ rad. Utilizamos as Eqs. (9.29) e (9.30) com a somatória em p indo de $p = 1$ a $p = 100$.

Esta solução pode ser expandida em série de Fourier, dada por:

$$\sigma_t^{\text{cilindro}}(a, \varphi, z) = \frac{2\varepsilon_0\phi_B}{\pi a} \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \sin(q\varphi). \quad (9.32)$$

Na Figura 9.6 graficamos estas duas expressões. A linha escura é dada pela Eq. (9.31), enquanto que a curva oscilante é um gráfico da Eq. (9.32), incluindo 100 termos na somatória. Aumentando o número de termos não melhora significativamente o gráfico, nem diminui a amplitude de oscilação em torno de cada valor de φ . Uma maneira de suavizar esta oscilação é calcular para cada ângulo φ_i o valor médio de σ_t , $\overline{\sigma_t(\varphi_i)}$, ou seja:

$$\overline{\sigma_t(\varphi_i)} \equiv \frac{1}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_i - \Delta\varphi/2}^{\varphi_i + \Delta\varphi/2} \sigma_t(\varphi) d\varphi. \quad (9.33)$$

A Figura 9.7 é um gráfico da Eq. (9.31) sobreposta a um gráfico de $\overline{\sigma_t(\varphi_i)}$ obtido das Eqs. (9.32) e (9.33). Neste caso consideramos um número inteiro de oscilações de $\sigma_t(\varphi_i)$ em torno de cada ângulo φ_i . Ambos os gráficos coincidem entre si (as duas curvas são indistinguíveis na Figura 9.7), indicando que este procedimento está correto.

Não conseguimos colocar as soluções em série dadas pelas Eqs. (9.29) e (9.30) em forma analítica fechada. Mas utilizando o procedimento de média acima obtivemos a Figura 9.8. As oscilações perto de $\varphi = \pm\pi/2$ rad devem ser devidas a aproximações numéricas sem significado físico. A curva real deve ser suave como a Figura 9.8. A Figura 9.8 indica que $\sigma_t(\varphi)$ é linear com φ longe da bateria (isto é, perto de $\varphi = 0$ rad), divergindo perto dela (onde $\varphi \rightarrow \pm\pi$ rad). Este é o resultado físico significativo.

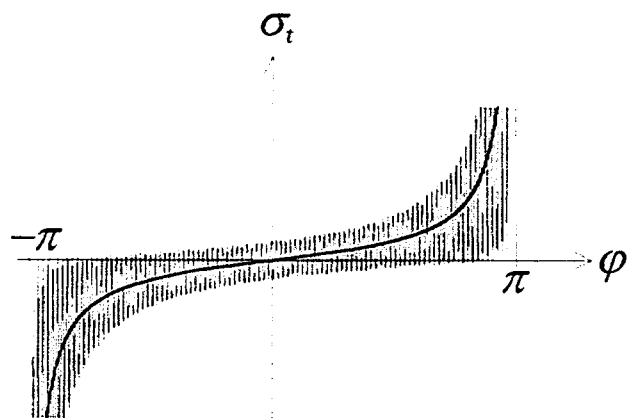


Figura 9.6: Densidade superficial total de carga σ_t de uma casca cilíndrica resistiva e infinita conduzindo uma corrente azimutal estacionária, como função do ângulo φ , Eq. (8.7). A linha escura é um gráfico da forma fechada da solução de $\sigma_t(\varphi)$, Eq. (9.31), enquanto que a linha oscilatória é um gráfico de $\sigma_t(\varphi)$ expresso na forma de série de Fourier, Eq. (9.32).

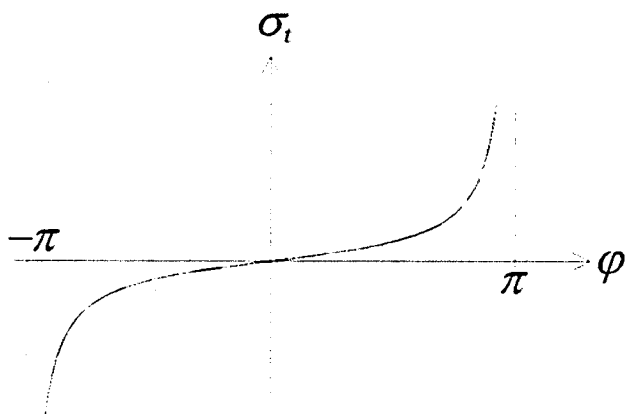


Figura 9.7: Densidade superficial total de carga dada pela Eq. (8.7). A somatória que aparece como uma oscilação na Figura 9.6, dada pela Eq. (9.32), está suavizada tomando o valor médio de cada ponto em suas vizinhanças (neste caso, utilizamos uma oscilação inteira em torno de cada ponto), utilizando a Eq. (9.33). A forma analítica fechada, Eq. (9.31), está sobreposta a ela. Os gráficos coincidem entre si, indicando que este procedimento de tomar a média está correto.

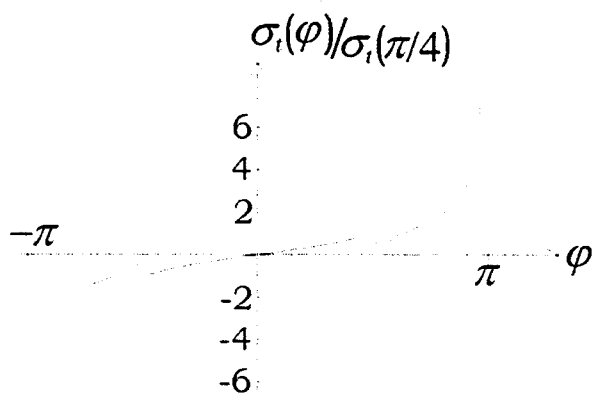


Figura 9.8: Gráfico suavizado da Figura 9.5.

9.5 Conclusão

Obtivemos a densidade superficial de carga, σ , o potencial, ϕ , e o campo elétrico, $\vec{E}$, fora e dentro de uma casca esférica resistiva conduzindo uma corrente azimutal estacionária. Graficamos a densidade superficial total de carga σ_t como uma função do ângulo azimutal φ . Obtivemos que σ_t é linear com φ longe da bateria, divergindo ao infinito perto dela. A grandes distâncias da casca esférica o potencial é o mesmo que o potencial de uma carga pontual adicionado ao potencial de um dipolo elétrico, Eq. (9.17). A carga total q e o momento de dipolo $\vec{p}$ deste sistema são dados pela Eq. (9.17). Alternativamente, eles também podem ser encontrados por $q = \int \int \sigma_t da$ e $\vec{p} = \int \int \sigma_t \vec{r} da$, onde da é um elemento de área e a integração se dá em toda a superfície do sistema. Ambas as abordagens concordam entre si, como esperado.

Capítulo 10

Condutor Toroidal

10.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o tratamento teórico com uma geometria apropriada para a modelagem de outra experiência de Jefimenko, [Jef62, Figura 3], reproduzida aqui na Figura 1.10. Também não temos conhecimento de nenhuma autor que tenha trabalhado com esta geometria específica. Nosso trabalho foi discutido em [HA02a] e publicado em [HA03a].

Aqui supomos o caso de um condutor toroidal resistivo conduzindo uma corrente constante na direção azimutal. Calculamos o potencial elétrico no espaço à volta do condutor, utilizando para isso o sistema de coordenadas toroidais. Embora pouco usual, este sistema leva a uma solução da equação de Laplace no caso de um condutor toroidal. A partir do potencial elétrico, calculamos o campo elétrico à volta e dentro do condutor e a distribuição de cargas na superfície do condutor. Estas cargas superficiais geram não apenas o campo elétrico dentro do condutor que mantém a corrente fluindo, mas também um campo elétrico fora do condutor. A bateria ligada ao condutor e gerando a corrente elétrica mantém esta distribuição de cargas superficiais constante no tempo.

Embora existam vários casos que estudam este campo elétrico (veja, por exemplo, o Capítulo 7), todos os trabalhos em nosso conhecimento apresentam algum tipo de limitação: consideram condutores de comprimento infinito ou então condutores de retorno (no caso de cabos coaxiais) com resistividade nula. A consequência de se considerar cabos coaxiais conduzindo corrente constante mas com resistividade nula no condutor de retorno, é que o campo elétrico vai a zero fora do cabo coaxial. Nosso objetivo principal aqui é estudar um problema com geometria finita que apresenta uma região fora do condutor com um campo elétrico não nulo.

10.2 Descrição do problema

Supomos um condutor toroidal estacionário conduzindo uma corrente constante ao longo da seção reta do condutor (raio maior R_0 e raio menor r_0). O condutor está centrado no plano $z = 0$, sendo z o eixo de simetria do toróide. Existe uma bateria localizada em $\varphi = \pi$ rad mantendo potenciais constantes em suas extremidades, veja a Figura 10.1. Idealizamos inicialmente a bateria como sendo de espessura desprezível. Consideramos que o meio fora do condutor é ar ou vácuo.

Nosso objetivo é encontrar o potencial elétrico ϕ em todo o espaço usando o potencial na superfície do condutor como uma condição de contorno. O problema tratado aqui pode ser aplicado a dois casos distintos: (a) o condutor é um sólido homogêneo e cheio e a bateria é um disco, veja a Figura 10.2a; (b) o condutor é oco e a bateria é uma circunferência, veja a Figura 10.2b. A simetria de nosso problema sugere a abordagem de coordenadas toroidais (η, χ, φ) [MS88, pág. 112], [Fen75] e [LKT94], veja a Figura 10.3.

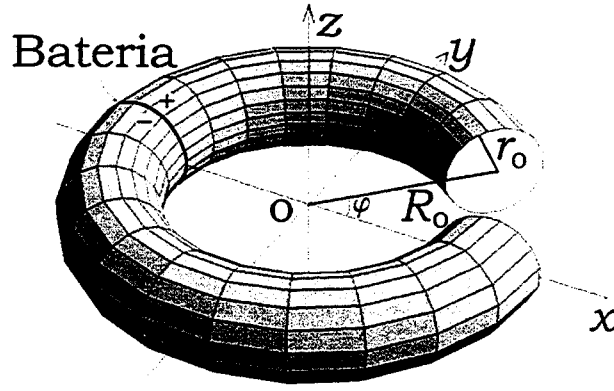


Figura 10.1: Um condutor toroidal uniformemente resistivo com eixo de simetria em z , raio menor r_0 e raio maior R_0 . Uma bateria fina está localizada em $\varphi = \pi$ rad mantendo potenciais constantes (representados pelos sinais “+” e “-”) em suas extremidades.

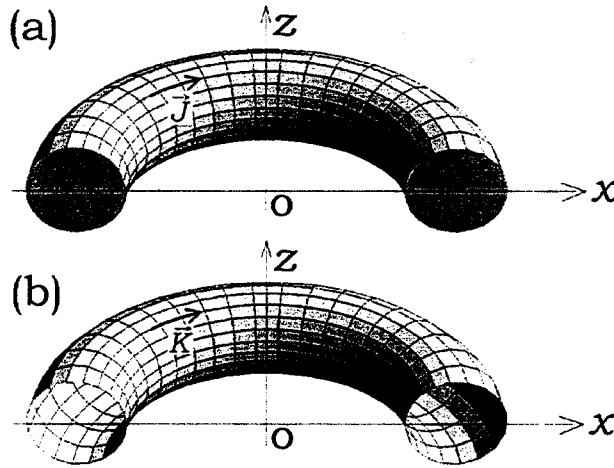


Figura 10.2: Os dois casos considerados aqui: (a) um condutor sólido cheio, com uma densidade de corrente volumétrica $\vec{J}$ em sua seção reta; (b) um condutor oco, com uma densidade de corrente superficial $\vec{K}$ fluindo através do perímetro $2\pi r_0$ de sua seção reta.

As coordenadas toroidais são definidas por:

$$x = a \frac{\sinh \eta \cos \varphi}{\cosh \eta - \cos \chi}, \quad y = a \frac{\sinh \eta \sin \varphi}{\cosh \eta - \cos \chi}, \quad z = a \frac{\sin \chi}{\cosh \eta - \cos \chi}, \quad (10.1)$$

onde a é uma constante que dá o raio da circunferência no plano $z = 0$ descrito por $\eta \rightarrow \infty$ (ou seja, quando $\eta \rightarrow \infty$ temos que $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ e $z = 0$). Os valores possíveis que as coordenadas toroidais podem abranger são: $0 \leq \eta < \infty$, $-\pi \text{ rad} \leq \chi \leq \pi \text{ rad}$ e $-\pi \text{ rad} \leq \varphi \leq \pi \text{ rad}$. As transformações inversas são dadas por:

$$\eta = \operatorname{arctanh} \left(\frac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2} \right), \quad \chi = \arctan \left(\frac{2za}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} \right),$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (10.2)$$

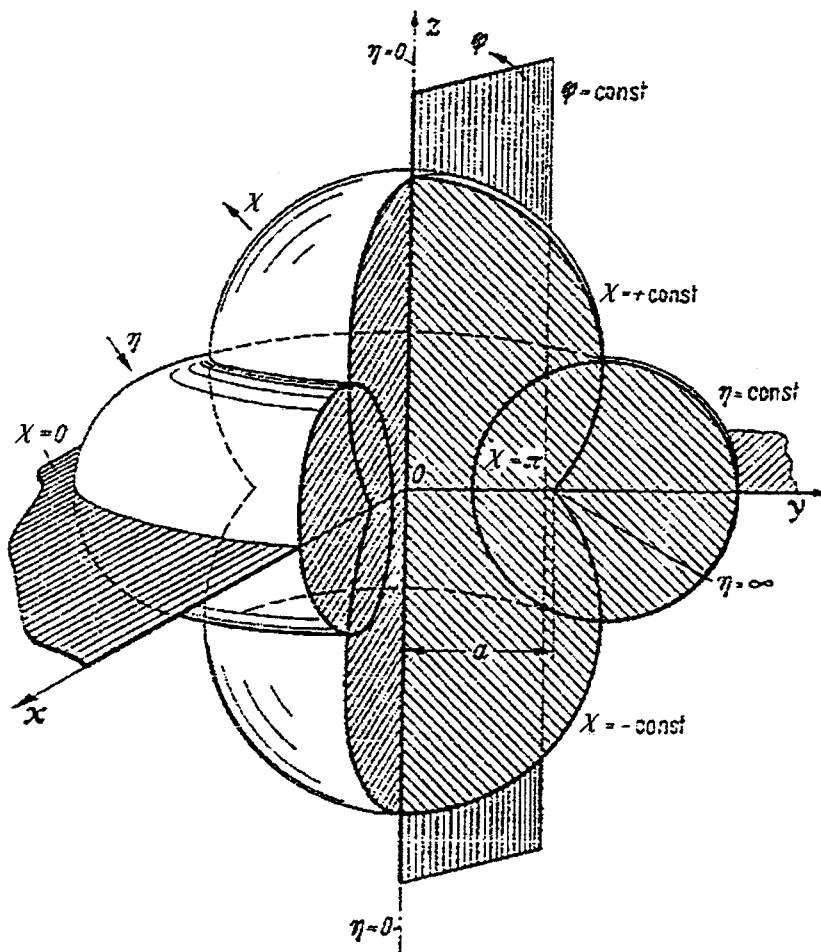


Figura 10.3: Coordenadas toroidais (η, χ, ϕ) , [MS88, pág. 113].

Para o presente trabalho, é conveniente apresentar também as expressões para $\sinh \eta$, $\cosh \eta$ e $\cos \chi$:

$$\sinh \eta = \frac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}}, \quad (10.3)$$

$$\cosh \eta = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}}, \quad (10.4)$$

$$\cos \chi = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}}. \quad (10.5)$$

A superfície do condutor é descrita por uma constante η_0 . A região interna (externa) do toróide é caracterizada por $\eta > \eta_0$ ($\eta < \eta_0$). O raio maior R_0 e o raio menor r_0 estão relacionados com η_0 e com a pelas relações $R_0 = a \cosh \eta_0 / \sinh \eta_0$ e $r_0 = a / \sinh \eta_0$, veja a Figura 10.1.

A equação de Laplace para o potencial elétrico ϕ , $\nabla^2 \phi = 0$, em coordenadas toroidais tem a forma:

$$\nabla^2 \phi = \frac{(\cosh \eta - \cos \chi)^2}{a^2 \sinh \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \chi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \sinh \eta \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{\cosh \eta - \cos \chi} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \right) \right] + \frac{(\cosh \eta - \cos \chi)^2}{a^2 \sinh^2 \eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2}. \quad (10.6)$$

Ela pode ser resolvida nestas coordenadas pelo método de separação de variáveis (por um procedimento conhecido como separação-R), o que leva a uma solução da forma, [MS88, pág. 112]:

$$\phi(\eta, \chi, \varphi) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} H(\eta) X(\chi) \Phi(\varphi), \quad (10.7)$$

onde as funções H , X e Φ satisfazem às seguintes equações ordinárias (com $\Upsilon = \cosh \eta$, sendo p e q constantes):

$$(\Upsilon^2 - 1)H'' + 2\Upsilon H' - [(p^2 - 1/4) + q^2/(\Upsilon^2 - 1)]H = 0, \quad (10.8)$$

$$X'' + p^2 X = 0, \quad (10.9)$$

$$\Phi'' + q^2 \Phi = 0. \quad (10.10)$$

10.3 Solução geral

As soluções das Eqs. (10.9) e (10.10) para $p \neq 0$ e $q \neq 0$ são combinações lineares das formas gerais $X_p(\chi) = C_{p\chi} \cos(p\chi) + D_{p\chi} \sin(p\chi)$ e $\Phi_q(\varphi) = C_{q\varphi} \cos(q\varphi) + D_{q\varphi} \sin(q\varphi)$, respectivamente, onde $C_{p\chi}$, $D_{p\chi}$, $C_{q\varphi}$ e $D_{q\varphi}$ são constantes. Quando $p = q = 0$ as soluções se reduzem a, respectivamente, $X_0(\chi) = C_{0\chi} + D_{0\chi}\chi$ e $\Phi_0(\varphi) = C_{0\varphi} + D_{0\varphi}\varphi$. A Eq. (10.8) é a equação associada de Legendre, cujas soluções são funções de Legendre associadas $P_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon)$ e $Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon)$, conhecidas como polinômios toroidais de Legendre, [Bat53, pág. 173].

A solução tem de ser periódica em φ , $\phi(\eta, \chi, \varphi + 2\pi) = \phi(\eta, \chi, \varphi)$, e em χ , $\phi(\eta, \chi + 2\pi, \varphi) = \phi(\eta, \chi, \varphi)$. Isto implica que $D_{0\varphi} = 0$, $D_{0\chi} = 0$, $q = 1, 2, 3, \dots$ e $p = 1, 2, 3, \dots$.

As funções $Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon)$ são irregulares em $\eta = 0$ (o que corresponde ao plano z , ou para grandes distâncias do condutor). Por esta razão não as incluímos entre as soluções físicas para este problema na região fora do toróide (ou seja, $\eta < \eta_0$). Nossa solução geral consiste de uma combinação linear de todas as soluções regulares possíveis de $P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta)$, $X_p(\chi)$ e $\Phi_q(\varphi)$:

$$\phi(\eta \leq \eta_0, \chi, \varphi) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} [C_{q\varphi} \cos(q\varphi) + D_{q\varphi} \sin(q\varphi)] \times \left[\sum_{p=0}^{\infty} [C_{p\chi} \cos(p\chi) + D_{p\chi} \sin(p\chi)] P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta) \right] \right\}. \quad (10.11)$$

Utilizamos o fato de que $\sin 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$ para podermos começar as somatórias em p e q do valor $p = q = 0$, indo até ∞ . Aqui $P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta) \equiv P_{p-\frac{1}{2}}^0(\cosh \eta)$ são as funções de Legendre, [AW95, pág. 724].

10.4 Solução particular para corrente constante

A superfície do condutor é descrita por uma constante η_0 . Aqui estudamos o caso de uma corrente constante fluindo na direção φ ao longo do condutor. Por esta razão supomos que o potencial ao longo da superfície do condutor seja linear em φ , $\phi(\eta_0, \chi, \varphi) = \phi_A + \phi_B \varphi / 2\pi$. Este potencial pode ser expandido em série de Fourier na variável φ :

$$\phi(\eta_0, \chi, \varphi) = \phi_A + \phi_B \frac{\varphi}{2\pi} = \phi_A + \frac{\phi_B}{\pi} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \sin(q\varphi) \right]. \quad (10.12)$$

A Figura 10.4 mostra a expansão de Fourier do potencial ao longo da superfície condutora como função de φ com $\phi_A = 0$ e $\phi_B = \phi_0$. As oscilações próximas a $\phi = \pm \pi$ rad são devidas a uma

série de Fourier com um número finito de termos. O fato da representação em série de Fourier ultrapassar o valor da função $\phi = \pm\phi_0/2$ em $\varphi = \pm\pi$ rad é conhecido como fenômeno de Gibbs, uma peculiaridade da série de Fourier em uma descontinuidade simples, [AW95, págs. 783–7].

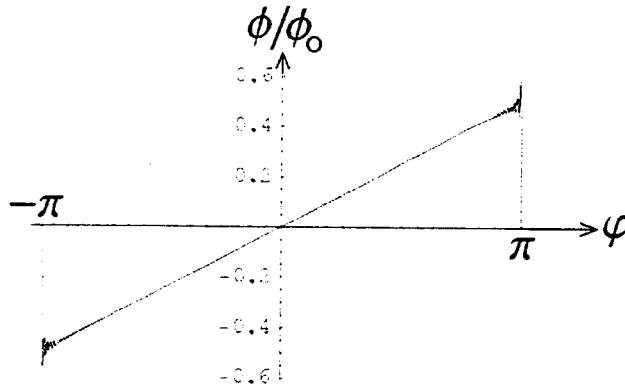


Figura 10.4: Expansão de Fourier do potencial ao longo da superfície condutora como função do ângulo azimutal φ expresso em radianos.

Supomos que o potencial dentro do condutor toroidal resistivo sólido cheio (isto é, para $\eta > \eta_0$) também é dado pela Eq. (10.12), isto é:

$$\phi(\eta > \eta_0, \chi, \varphi) = \phi_A + \phi_B \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (10.13)$$

O campo elétrico dentro do toróide sólido pode ser expresso em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) simplesmente como:

$$\vec{E}(\eta > \eta_0, \chi, \varphi) = -\nabla\phi = -\frac{\phi_B}{2\pi\rho}\hat{\varphi}. \quad (10.14)$$

Este campo elétrico não leva a qualquer acumulação de cargas dentro de um condutor sólido cheio pois $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Estes resultados são razoáveis. O potencial satisfaz à equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, como esperado. O campo elétrico é inversamente proporcional à distância $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ao eixo z . Isto era esperado pois estamos supondo um condutor com resistividade uniforme. A diferença de potencial $\Delta\phi$ gerada pela bateria em $\varphi = \pi$ rad pode ser relacionada ao campo elétrico azimutal por uma integral de linha:

$$\Delta\phi = -\int_{\varphi=\pi}^{-\pi} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E_\varphi 2\pi\rho. \quad (10.15)$$

Aqui ρ é o raio de uma trajetória circular centrada no eixo z e passando dentro ou ao longo da superfície do toróide. Isto mostra que E_φ deve ser inversamente proporcional a ρ , como obtido em (10.14). Comparando as Eqs. (10.14) e (10.15) obtém-se:

$$\phi_B = \Delta\phi. \quad (10.16)$$

Pela lei de Ohm, $\vec{J} = g\vec{E}$, onde g é a condutividade uniforme do fio, pode-se ver que também $\vec{J}$ será inversamente proporcional à distância ρ até o eixo z no caso de um condutor toroidal cheio e homogêneo.

Consideramos agora a solução fora do condutor.

Calculamos a Eq. (10.11) para $\eta = \eta_0$ e usamos a Eq. (10.12) como uma condição de contorno para nosso problema. Como não temos termos em $\cos(q\varphi)$ na Eq. (10.12), isto significa que

$C_{q\varphi} = 0$ para $q = 1, 2, 3, \dots$. Comparando a Eq. (10.11) calculada em $\eta = \eta_0$ com a Eq. (10.12) resultam duas equações conectando ϕ_A e ϕ_B aos C 's e D 's, ou seja:

$$\phi_A = C_{0\varphi} \sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} [C_{p\chi} \cos(p\chi) + D_{p\chi} \sin(p\chi)] P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0) \right\}, \quad (10.17)$$

$$\phi_B = \frac{\pi q D_{q\varphi}}{(-1)^{q-1}} \sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} [C_{p\chi} \cos(p\chi) + D_{p\chi} \sin(p\chi)] P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0) \right\}. \quad (10.18)$$

Agora isolamos o termo $1/\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi}$ nas Eqs. (10.17) e (10.18), expandindo-o em série de Fourier, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi}} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} (2 - \delta_{0p}) \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(p\chi') d\chi'}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi'}} \right] \cos(p\chi) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} (2 - \delta_{0p}) Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0) \cos(p\chi) \right\}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Aqui δ_{wp} é o delta de Kronecker, que é nulo para $w \neq p$ e igual à unidade para $w = p$. Na última passagem utilizamos a representação das funções $Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)$ na forma integral, [Bat53, pág. 156, Eq. (10)]:

$$Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(p\chi') d\chi'}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi'}}. \quad (10.20)$$

Como na Eq. (10.19) não temos os termos de $\sin(p\chi)$, isto significa que $D_{p\chi} = 0$ nas Eqs. (10.17) e (10.18). Usando a Eq. (10.19) com (10.17) temos (para $p = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} A_p \equiv C_{0\varphi} C_{p\chi} &= \frac{\phi_A (2 - \delta_{0p})}{2\pi P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(p\chi') d\chi'}{\sqrt{\cosh \eta - \cos \chi'}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \phi_A (2 - \delta_{0p})}{\pi} \frac{Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)}{P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Usando a Eq. (10.19) com (10.18) temos (para $q = 1, 2, 3, \dots$ e $p = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} B_{pq} \equiv D_{q\varphi} C_{p\chi} &= \frac{\phi_B (-1)^{q-1} (2 - \delta_{0p})}{2q\pi^2 P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(p\chi') d\chi'}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi'}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \phi_B (-1)^{q-1} (2 - \delta_{0p})}{q\pi^2} \frac{Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)}{P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)}. \end{aligned} \quad (10.22)$$

A solução final é dada por:

$$\begin{aligned} \phi(\eta, \chi, \varphi) &= \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\chi) P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=1}^{\infty} \sin(q\varphi) \left[\sum_{p=0}^{\infty} B_{pq} \cos(p\chi) P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.23)$$

onde os coeficientes A_p e B_{pq} são dados pelas Eqs. (10.21) e (10.22), respectivamente.

Para a região dentro do toróide oco (ou seja, $\eta > \eta_0$), Figura 10.2b, temos que $P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, enquanto que $Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Por esta razão, eliminamos as funções

$P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta)$ como soluções físicas para a região dentro do toróide oco e o potencial pode ser dado por:

$$\phi(\eta \geq \eta_0, \chi, \varphi) = \phi_A + \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \text{sen}(q\varphi) \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{p=0}^{\infty} B'_{pq} \cos(p\chi) Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta) \right] \right\}, \quad (10.24)$$

onde os coeficientes B'_{pq} são definidos por:

$$B'_{pq} \equiv \frac{\phi_B (-1)^{q-1} (2 - \delta_{0p})}{2q\pi^2 Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(p\chi') d\chi'}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \chi'}} \\ = \frac{\sqrt{2} \phi_B (-1)^{q-1} (2 - \delta_{0p})}{q\pi^2} \frac{Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)}{P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)}. \quad (10.25)$$

Note que o potencial dentro do toróide sólido, Eq. (10.13), e o potencial dentro do toróide oco, Eq. (10.24), são diferentes. Isto acontece porque a condição de contorno descontínua, Eq. (10.12), aplica-se para qualquer $\eta > \eta_0$ dentro do toróide sólido, particularmente para $\varphi \rightarrow \pi$ ($\phi \rightarrow \phi_A + \phi_B/2$) e $\varphi \rightarrow -\pi$ ($\phi \rightarrow \phi_A - \phi_B/2$), onde a bateria em forma de disco está localizada, veja a Figura 10.2a. O mesmo não acontece para o toróide oco, onde a bateria é uma circunferência e o potencial deve ser contínuo em todo o interior do condutor, veja a Figura 10.2b.

Apresentamos as equipotenciais de um condutor toroidal sólido cheio no plano $z = 0$ na Figura 10.5 com $\phi_A = 0$ e $\phi_B = \phi_0$. Tomamos uma superfície toroidal descrita por $\eta_0 = 2,187$ para comparar com valores experimentais, veja a Seção 10.10.

A Figura 10.6 mostra as equipotenciais do toróide no plano $x = 0$ (perpendicular à corrente), também com $\phi_A = 0$ e $\phi_B = \phi_0$.

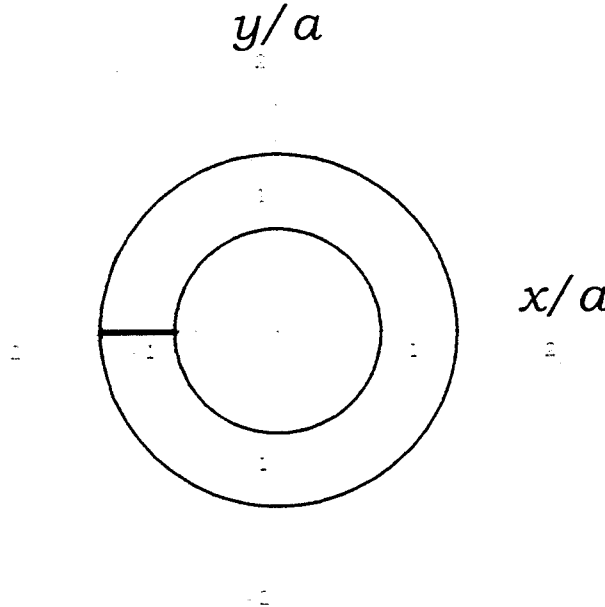


Figura 10.5: Equipotenciais no plano $z = 0$ para um condutor toroidal cheio. A bateria está localizada à esquerda ($\varphi = \pi$ rad). Usamos $R_0 = 1$ e $\eta_0 = 2,187$.

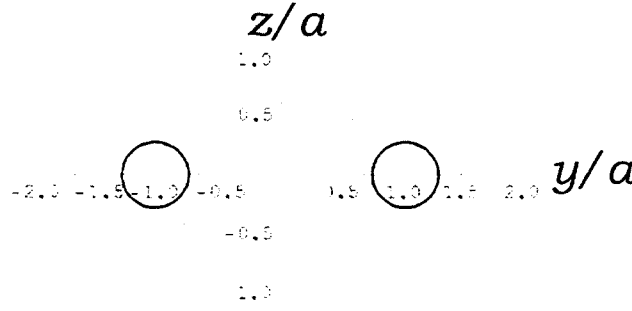


Figura 10.6: Equipotenciais no plano $x = 0$ de um condutor toroidal cheio com corrente. As linhas tracejadas representam a superfície do condutor. Usamos $R_0 = 1$ e $\eta_0 = 2,187$.

10.5 Casos particulares do potencial

Analizamos agora o potencial fora do toróide, Eq. (10.23), em três situações: (a) para regiões distantes do condutor, (b) perto da origem e (c) no eixo z .

Para grandes distâncias do toróide (ou seja, para $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a$), as Eqs. (10.2) a (10.5) fornecem:

$$\eta \approx \frac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} \ll 1, \quad (10.26)$$

$$\cosh \eta \approx 1 + \frac{2a^2(x^2 + y^2)}{r^4} \rightarrow 1, \quad (10.27)$$

$$\cos \chi \approx 1 - \frac{2a^2 z^2}{r^4} \rightarrow 1, \quad (10.28)$$

$$\chi \approx \frac{2az}{r^2} \ll 1, \quad (10.29)$$

$$\sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \approx \frac{a\sqrt{2}}{r} \ll 1. \quad (10.30)$$

Para $\cosh \eta \approx 1 + \epsilon$, onde $0 < \epsilon \ll 1$, temos a expansão, [Bat53, págs. 163 e 173]:

$$P_{p-\frac{1}{2}}^q(1 + \epsilon) \approx \frac{2^{-q/2}\Gamma(p + q + \frac{1}{2})}{q!\Gamma(p - q + \frac{1}{2})}\epsilon^{q/2} \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{p^2 - \frac{1}{4}}{2(1 + q)} - \frac{q}{4} \right] \right\}, \quad (10.31)$$

de modo que, para $q = 0$ e para $q = 1, 2, 3, \dots$, temos, respectivamente:

$$P_{p-\frac{1}{2}}(1 + \epsilon) \approx 1 + \epsilon \left(\frac{p^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \rightarrow 1, \quad (10.32)$$

$$P_{p-\frac{1}{2}}^q(1 + \epsilon) \approx \frac{2^{-q/2}\Gamma(p + q + \frac{1}{2})}{q!\Gamma(p - q + \frac{1}{2})}\epsilon^{q/2} \ll 1. \quad (10.33)$$

Assim, os termos que aparecem no potencial para $\eta \ll 1$, até a ordem $\epsilon^{1/2}$, são aqueles que têm os polinômios com $q = 0$ e com $q = 1$, ou seja, $P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta \approx 1 + \epsilon) \approx 1$ e $P_{p-\frac{1}{2}}^1(\cosh \eta \approx 1 + \epsilon) \approx (p^2 - 1/4)\sqrt{\epsilon/2}$. O potencial ϕ , Eq. (10.23), a grandes distâncias da origem, é dado em coordenadas esféricas (r, θ, φ) por (onde $\epsilon = 2a^2 \sin^2 \theta / r^2$):

$$\phi(r \gg a, \theta, \varphi) \approx \frac{a\sqrt{2}}{r} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \cos \left(p \frac{2a \cos \theta}{r} \right) \left[A_p + B_{p1} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{a}{r} \sin \varphi \sin \theta \right] \right\}, \quad (10.34)$$

de tal modo que $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, como esperado.

O potencial próximo à origem, ou seja, para $r \ll a$, pode ser calculado da mesma forma. Nesta aproximação temos que:

$$\eta \approx \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \ll 1, \quad (10.35)$$

$$\cosh \eta \approx 1 + \frac{2(x^2 + y^2)}{a^2} \rightarrow 1, \quad (10.36)$$

$$\cos \chi \approx -1 + \frac{2z^2}{a^2} \rightarrow -1, \quad (10.37)$$

$$\chi \approx \pi - \frac{2z}{a} \rightarrow \pi, \quad (10.38)$$

$$\sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \approx \sqrt{2} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{2}a^2} \rightarrow \sqrt{2}. \quad (10.39)$$

O potencial (10.23) pode ser expresso como (com $\epsilon = 2r^2 \sin^2 \theta / a^2$):

$$\phi(r \ll a, \theta, \varphi) \approx \sqrt{2} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \cos \left(p \frac{2r \cos \theta}{a} \right) \left[A_p + B_{p1} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{r}{a} \sin \varphi \sin \theta \right] \right\}. \quad (10.40)$$

Ao longo do eixo z temos $x^2 + y^2 = 0$. Das Eqs. (10.2) a (10.5) vem que:

$$\eta = 0, \quad (10.41)$$

$$\cosh \eta = 1, \quad (10.42)$$

$$\cos \chi = \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}, \quad (10.43)$$

$$\sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} = a \sqrt{\frac{2}{z^2 + a^2}}. \quad (10.44)$$

Logo o potencial (10.23) ao longo do eixo z fica:

$$\phi \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |z|, \theta, \varphi \right) = a \sqrt{\frac{2}{z^2 + a^2}} \left[\sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos \left(p \arccos \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2} \right) \right]. \quad (10.45)$$

Na circunferência descrita por $x^2 + y^2 = a^2$ em $z = 0$ temos $\eta \rightarrow \infty$. As funções de Legendre associadas, $P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta)$ e $Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta)$, para $\eta \gg 1$ (e, portanto, $\cosh \eta \gg 1$), podem ser aproximadas utilizando [Bat53, pág. 164]:

$$Q_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta \gg 1) \approx \frac{(-1)^q \sqrt{\pi} \Gamma \left(p + q + \frac{1}{2} \right)}{2^{p+\frac{1}{2}} p! \cosh^{p+\frac{1}{2}} \eta}, \quad \text{para qualquer } p, \quad (10.46)$$

$$P_{p-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta \gg 1) \approx \frac{2^{p-\frac{1}{2}} (p-1)! \cosh^{p-\frac{1}{2}} \eta}{\sqrt{\pi} \Gamma \left(p - q + \frac{1}{2} \right)}, \quad \text{para } p > 0, \quad (10.47)$$

onde Γ é a função gama, [AW95, pág. 591]. O potencial dentro do toróide oco, Eq. (10.24), nesta circunferência fica na forma:

$$\phi(\eta \rightarrow \infty, \chi, \varphi) = \phi_A - \frac{\phi_B}{\pi^{3/2}} Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0) \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\sin(q\varphi) \Gamma \left(q + \frac{1}{2} \right)}{q Q_{-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)} \right]. \quad (10.48)$$

10.6 Campo elétrico e cargas superficiais

Em coordenadas toroidais o gradiente é escrito como:

$$\nabla\phi = \frac{1}{a}(\cosh\eta - \cos\chi) \left(\hat{\eta} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \hat{\chi} \frac{\partial\phi}{\partial\chi} + \frac{\hat{\varphi}}{\sinh\eta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right). \quad (10.49)$$

O campo elétrico pode então ser calculado por $\vec{E} = -\nabla\phi$, cujas componentes para a região fora do toróide ($\eta < \eta_0$) são dadas por (com $\Upsilon \equiv \cosh\eta$):

$$E_\eta = -\frac{\sinh\eta\sqrt{\Upsilon - \cos\chi}}{a} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\chi) \left[\frac{1}{2} P_{p-\frac{1}{2}}(\Upsilon) + (\Upsilon - \cos\chi) P'_{p-\frac{1}{2}}(\Upsilon) \right] \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{\infty} \sin(q\varphi) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} B_{pq} \cos(p\chi) \left[\frac{1}{2} P_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon) + (\Upsilon - \cos\chi) P_{p-\frac{1}{2}}^{q'}(\Upsilon) \right] \right\} \right\}, \quad (10.50)$$

$$E_\chi = -\frac{\sqrt{\Upsilon - \cos\chi}}{a} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} A_p P_{p-\frac{1}{2}}(\Upsilon) \left[\frac{\sin\chi \cos(p\chi)}{2} - p(\Upsilon - \cos\chi) \sin(p\chi) \right] \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{\infty} \sin(q\varphi) \sum_{p=0}^{\infty} B_{pq} P_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon) \left[\frac{\sin\chi \cos(p\chi)}{2} - p(\Upsilon - \cos\chi) \sin(p\chi) \right] \right\}, \quad (10.51)$$

$$E_\varphi = -\frac{(\Upsilon - \cos\chi)^{\frac{3}{2}}}{a \sinh\eta} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} q \cos(q\varphi) \left[\sum_{p=0}^{\infty} B_{pq} \cos(p\chi) P_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon) \right] \right\}, \quad (10.52)$$

onde $P_{p-\frac{1}{2}}^{q'}(\Upsilon)$ são as derivadas de $P_{p-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon)$ relativas ao argumento Υ . O campo elétrico dentro do toróide sólido ($\eta > \eta_0$) é dado simplesmente por:

$$E_\eta = 0, \quad E_\chi = 0, \quad E_\varphi = -\frac{\Upsilon - \cos\chi}{a \sinh\eta} \frac{\phi_B}{2\pi} = -\frac{\phi_B}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (10.53)$$

Repare que a componente φ do campo elétrico tem a mesma forma que a Eq. (10.14), como esperado.

A distribuição superficial de carga que gera o campo elétrico dentro (e fora) do condutor, mantendo a corrente fluindo, pode ser obtida pela lei de Gauss (escolhendo uma superfície gaussiana que envolva uma pequena porção da superfície condutora) para o toróide sólido:

$$\sigma(\eta_0, \chi, \varphi) = \varepsilon_0 \left[\vec{E}(\eta < \eta_0) \cdot (-\hat{\eta}) + \vec{E}(\eta > \eta_0) \cdot \hat{\eta} \right]_{\eta_0} \\ = \frac{\varepsilon_0 \sinh\eta_0}{a} \left\{ \frac{\phi_A + \phi_B \varphi / 2\pi}{2} + (\cosh\eta_0 - \cos\chi)^{3/2} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \cos(p\chi) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[A_p P'_{p-\frac{1}{2}}(\cosh\eta_0) + \sum_{q=1}^{\infty} \sin(q\varphi) B_{pq} P_{p-\frac{1}{2}}^{q'}(\cosh\eta_0) \right] \right\} \right\}. \quad (10.54)$$

10.7 Aproximação de toróide fino

Suponha que o condutor toroidal seja muito fino, com seus raios descritos por um raio maior $R_0 = a \cosh\eta_0 / \sinh\eta_0 \approx a$ e um raio menor $r_0 = a / \sinh\eta_0$, tal que $r_0 \ll R_0$, veja a Figura 10.1. A superfície do anel é descrita por $\eta_0 \gg 1$ e, conseqüentemente, $\cosh\eta_0 \gg 1$.

Nesta aproximação, o potencial dentro dos toróides finos sólido e oco é dado pela mesma expressão, Eq. (10.13).

As funções de Legendre da segunda espécie, calculadas em $\eta = \eta_0$, $Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)$, aparecem nos coeficientes A_p e B_{pq} do potencial fora do toróide, Eqs. (10.21) e (10.22), respectivamente. Como a Eq. (10.46), calculada em $\eta = \eta_0$ e para $q = 0$, tem um fator de $\cosh^{-p-\frac{1}{2}} \eta_0 \ll 1$, podemos desprezar todos os termos com $p > 0$ na Eq. (10.23) comparados com o termo de $p = 0$. O potencial fora do toróide fino ($\eta_0 \gg 1$) pode então ser escrito como:

$$\phi(\eta \leq \eta_0, \chi, \varphi) = \sqrt{\frac{\cosh \eta - \cos \chi}{\cosh \eta_0}} \left\{ \phi_A \frac{P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)}{P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\pi} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \operatorname{sen}(q\varphi) \frac{P_{-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta)}{P_{-\frac{1}{2}}^q(\cosh \eta_0)} \right] \right\}. \quad (10.55)$$

É interessante encontrar as expressões para o potencial e campo elétrico fora mas na vizinhança do condutor (ou seja, $\eta_0 > \eta \gg 1$). Os termos mais relevantes das funções $P_{-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon)$ e $P_{-\frac{1}{2}}^{q'}(\Upsilon)$ quando $\Upsilon \rightarrow \infty$ são dados por, [Bat53, pág. 173]:

$$P_{-\frac{1}{2}}^q(\Upsilon) \approx \frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-q)} \frac{\ln(2\Upsilon) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma}{\sqrt{\Upsilon}}, \quad (10.56)$$

$$P_{-\frac{1}{2}}^{q'}(\Upsilon) \approx \frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-q)} \frac{1}{\Upsilon^{3/2}} \left[1 - \frac{\ln(2\Upsilon) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma}{2} \right], \quad (10.57)$$

onde $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ é a função digama e $\gamma \approx 0,577216$ é a constante de Euler, [AW95, Seção 10.2].

O potencial nas proximidades do anel pode ser reescrito nesta aproximação como:

$$\phi(\eta_0 > \eta \gg 1, \chi, \varphi) = \phi_A \frac{\ln(8 \cosh \eta)}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\pi} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \operatorname{sen}(q\varphi) \frac{\ln(2 \cosh \eta) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma}{\ln(2 \cosh \eta_0) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma} \right], \quad (10.58)$$

válido para qualquer φ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Se estivermos longe da bateria o potencial pode ser ajustado numericamente por uma função com dependência linear em φ , (para $9 < \eta_0 < 12$ e $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$) dada por:

$$\phi(\eta_0 \geq \eta \gg 1, \chi, \varphi) = \phi_A \frac{\ln(8 \cosh \eta)}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \phi_B \frac{\varphi}{2\pi} \frac{\ln(1,70 \cosh \eta)}{\ln(1,70 \cosh \eta_0)}. \quad (10.59)$$

O potencial dentro do toróide oco, Eq. (10.24), pode ser escrito nesta aproximação como:

$$\phi(\eta > \eta_0 \gg 1, \chi, \varphi) = \phi_A + \phi_B \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (10.60)$$

O campo elétrico próximo à superfície do toróide fino, obtido da Eq. (10.58), é dado por:

$$E_\eta = -\frac{\sinh \eta}{a} \left\{ \frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\pi} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \frac{\operatorname{sen}(q\varphi)}{\ln(2 \cosh \eta_0) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma} \right] \right\}, \quad (10.61)$$

$$E_\chi = 0, \quad (10.62)$$

$$E_\varphi = -\frac{\phi_B}{\pi a} \left[\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \cos(q\varphi) \frac{\ln(2 \cosh \eta) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma}{\ln(2 \cosh \eta_0) - \psi(\frac{1}{2}-q) - \gamma} \right]. \quad (10.63)$$

Note que $E_\varphi(\eta_0) = -(\phi_B/\pi a) \left[\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \cos(q\varphi) \right] = -\phi_B/2\pi a$. Ou seja, coincide exatamente com o campo elétrico dentro de um toróide sólido, Eq. (10.14). O campo elétrico longe da bateria obtido da Eq. (10.59) é dado por:

$$E_\eta = -\frac{\sinh \eta}{a} \left[\frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\ln(1,70 \cosh \eta_0)} \frac{\varphi}{2\pi} \right], \quad (10.64)$$

$$E_\chi = 0, \quad (10.65)$$

$$E_\varphi = -\frac{\phi_B}{2\pi a} \frac{\ln(1,70 \cosh \eta)}{\ln(1,70 \cosh \eta_0)}. \quad (10.66)$$

A partir da Eq. (10.61) vem que a distribuição de cargas nesta aproximação de toróide fino é dada por:

$$\sigma(\eta_0 \gg 1, \chi, \varphi) = -\varepsilon_0 E_\eta(\eta_0) = \frac{\varepsilon_0 \sinh \eta_0}{a} \left\{ \frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\pi} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \frac{\sin(q\varphi)}{\ln(2 \cosh \eta_0) - \psi\left(\frac{1}{2} - q\right) - \gamma} \right] \right\}. \quad (10.67)$$

Na Figura 10.7 apresentamos a densidade de cargas superficiais σ em função do ângulo azimutal φ dado pela Eq. (10.67). Vemos que σ é linear com φ longe da bateria (isto é, para φ pequeno) mas que σ diverge perto da bateria ($\varphi \rightarrow \pm\pi$ rad).

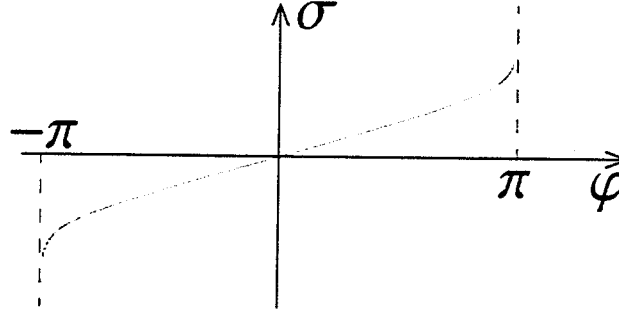


Figura 10.7: Densidade de cargas σ como função do ângulo azimutal φ no caso de um toróide resistivo fino conduzindo uma corrente estacionária dado pela Eq. (10.67). Utilizamos $\eta_0 = 10$.

Longe da bateria (ou seja, para $|\varphi| \ll 1$ rad) a Eq. (10.67) pode ser ajustada numericamente por uma função com dependência linear em φ dada por:

$$\begin{aligned} \sigma(\eta_0, \chi, \varphi) &= \frac{\varepsilon_0 \sinh \eta_0}{a} \left[\frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\ln(1,70 \cosh \eta_0)} \frac{\varphi}{2\pi} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{r_0} \left[\frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{\ln(1,70 \cosh \eta_0)} \frac{\varphi}{2\pi} \right] \\ &\equiv \sigma_A + \sigma_B \frac{\varphi}{2\pi}. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Definimos σ_A e σ_B por esta última equação. Obtivemos então que a densidade superficial de carga longe da bateria é linear no ângulo azimutal φ no caso de um toróide fino.

Podemos calcular a quantidade total de carga q_A no anel fino em função da constante ϕ_A . Para isso, integramos a densidade de carga em χ e em φ (lembrando que estamos na aproximação $\cosh \eta_0 \gg 1$). Para isto usamos $\sigma_A(\eta_0, \chi, \varphi)$ dado pela Eq. (10.68):

$$q_A = \int_{-\pi}^{\pi} h_\chi d\chi \int_{-\pi}^{\pi} h_\varphi \sigma_A(\eta_0, \chi, \varphi) d\varphi = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 \phi_A a}{\ln(8 \cosh \eta_0)} \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 \phi_A a}{\ln(8a/r_0)}, \quad (10.69)$$

onde $h_\eta = h_\chi = a/(\cosh \eta - \cos \chi)$ e $h_\varphi = a \sinh \eta/(\cosh \eta - \cos \chi)$ são os fatores de escala nas coordenadas toroidais, [LKT94]. Repare que da Eq. (10.69) podemos imediatamente obter o valor da capacitância do anel fino:

$$C = \frac{q_A}{\phi_A} = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 a}{\ln(8 \cosh \eta_0)} = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 a}{\ln(8a/r_0)}. \quad (10.70)$$

Podemos também calcular a partir da Eq. (10.68) a carga advinda da densidade linear de carga $\sigma_B \varphi/2\pi$ na região $0 < \varphi < \pi$ rad, q_B , em função de ϕ_B :

$$q_B = \int_{-\pi}^{\pi} h_\chi d\chi \int_0^\pi h_\varphi \sigma_B(\eta_0, \chi, \varphi) \frac{\varphi}{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2 \epsilon_0 \phi_B a}{2 \ln(1,70 \cosh \eta_0)} \approx \frac{\pi^2 \epsilon_0 \phi_B a}{2 \ln(1,70a/r_0)}. \quad (10.71)$$

Repare que na região $-\pi$ rad $< \varphi < 0$ rad existe uma carga $-q_B$.

O momento de dipolo elétrico gerado por esta distribuição de carga, $\vec{p} = \iint \sigma \vec{r} da$, pode ser calculado e o resultado é:

$$\vec{p} = \frac{4q_B a}{\pi} \hat{y}. \quad (10.72)$$

Nesta aproximação de anel fino, o potencial longe da origem, Eq. (10.34), e o potencial próximo à origem, Eq. (10.40), são, respectivamente (em coordenadas esféricas (r, θ, φ)):

$$\begin{aligned} \phi(r \gg a, \theta, \varphi) &\approx \frac{a\pi}{r} \left\{ \frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{2\pi[\ln(8 \cosh \eta_0) - 2]} \frac{a}{r} \sin \varphi \sin \theta \right\} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[q_A + \frac{4q_B}{\pi} \frac{a}{r} \sin \varphi \sin \theta \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(q_A + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (10.73)$$

$$\begin{aligned} \phi(r \ll a, \theta, \varphi) &\approx \pi \left\{ \frac{\phi_A}{\ln(8 \cosh \eta_0)} + \frac{\phi_B}{2\pi[\ln(8 \cosh \eta_0) - 2]} \frac{r}{a} \sin \varphi \sin \theta \right\} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \left[q_A + \frac{4q_B}{\pi} \frac{r}{a} \sin \varphi \sin \theta \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(q_A + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (10.74)$$

onde escrevemos as constantes ϕ_A e ϕ_B em termos das cargas q_A e q_B para evidenciar os termos de monopolo e dipolo elétrico nas equações acima. Das Eqs. (10.73) e (10.74) vem que o momento de dipolo obtido das expansões do potencial coincide com a expressão vindo da integração das cargas, Eq. (10.72), como esperado.

O potencial ao longo do eixo z , Eq. (10.45), na aproximação de toróide fino é dado por:

$$\phi(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |z|, \theta, \varphi) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \quad (10.75)$$

que coincide com o resultado coulombiano de um toróide fino de raio maior a (circunferência de raio a) carregado com carga total q_A no plano $z = 0$.

Podemos definir uma densidade linear de carga λ_B , dada por (a partir da Eq. (10.68)):

$$\lambda_B \equiv \int_{-\pi}^{\pi} h_\chi \sigma_B d\chi = \frac{2\pi\epsilon_0 \phi_B}{\ln(1,70 \cosh \eta_0)}. \quad (10.76)$$

Com isto uma quantidade de carga dq contida no ângulo $d\varphi$ ao longo do toróide fino pode ser escrita como:

$$dq = q_A \frac{d\varphi}{2\pi} + \lambda_B \frac{\varphi}{2\pi} a d\varphi. \quad (10.77)$$

A componente longitudinal do campo elétrico E_φ que mantém a corrente fluindo, para um toróide fino e longe da bateria, Eq. (10.66) calculada em $\eta = \eta_0$, pode ser escrita em termos de λ_B como:

$$E_\varphi(\eta_0, \chi, \varphi) = -\frac{\lambda_B}{4\pi^2 \epsilon_0 a} \ln(1,70 \cosh \eta_0). \quad (10.78)$$

10.8 Comparação do toróide fino com fio cilíndrico com corrente

É útil definir um novo sistema de coordenadas:

$$s' = a\varphi, \quad \rho' = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2}. \quad (10.79)$$

Podemos interpretar s' como uma distância ao longo da superfície do anel na direção φ e ρ' como a menor distância até a circunferência $x^2 + y^2 = R_0^2 = a^2$ em $z = 0$. Quando $\eta_0 > \eta \gg 1$ (ou seja, $r_0 < \rho' \ll a$), as Eqs. (10.79) e (10.4) resultam em $\cosh \eta \approx a/\rho'$ e $\cosh \eta_0 \approx a/r_0$, de tal modo que o potencial logo fora do toróide fino, Eq. (10.59), pode ser expresso como:

$$\phi(\eta_0 > \eta \gg 1, \varphi) = \phi_A \frac{\ln(8a/\rho')}{\ln(8a/r_0)} + \frac{\phi_B s' \ln(1, 70a/\rho')}{2\pi a \ln(1, 70a/r_0)}. \quad (10.80)$$

A Eq. (10.80) pode ser reescrita numa forma ligeiramente diferente. Consideramos uma seção do anel entre os ângulos φ_0 e $-\varphi_0$, com potenciais nestas extremidades dados por $\phi_R = \phi_A + \phi_B \varphi_0/2\pi$ e $\phi_L = \phi_A - \phi_B \varphi_0/2\pi$, respectivamente. Este pedaço tem um comprimento $\ell = 2a\varphi_0$. O potencial pode então ser escrito como:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_A \frac{\ln(\ell/\rho') - \ln(\ell/8a)}{\ln(\ell/r_0) - \ln(\ell/8a)} + \phi_B \frac{\varphi_0 s' \ln(\ell/\rho') - \ln(\ell/1, 70a)}{\pi \ell \ln(\ell/r_0) - \ln(\ell/1, 70a)} \\ &\approx \left[\frac{\phi_R + \phi_L}{2} + (\phi_R - \phi_L) \frac{s'}{\ell} \right] \frac{\ln(\ell/\rho')}{\ln(\ell/r_0)}, \end{aligned} \quad (10.81)$$

sendo que na última aproximação acima desprezamos os termos $\ln(\ell/8a)$ e $\ln(\ell/1, 70a)$ em comparação com os termos $\ln(\ell/\rho')$ e $\ln(\ell/r_0)$ utilizando a aproximação $r_0 < \rho' \ll a$ (tal que $\ell/r_0 > \ell/\rho' \gg \ell/a$). O campo elétrico pode ser expresso nesta aproximação como:

$$\vec{E} = - \left[\frac{\phi_R + \phi_L}{2} + (\phi_R - \phi_L) \frac{s'}{\ell} \right] \frac{\hat{\eta}}{\rho' \ln(\ell/r_0)} - \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell} \frac{\ln(\ell/\rho')}{\ln(\ell/r_0)} \hat{\varphi}. \quad (10.82)$$

As Eqs. (10.81) e (10.82) podem ser comparadas com as Eqs. (2.5) e (2.7) reproduzidas abaixo como (10.83) e (10.84), respectivamente, do caso de um condutor cilíndrico reto de raio r_0 conduzindo uma corrente constante, em coordenadas cilíndricas (ρ', φ, z) (note que as conversões dos versores unitários das coordenadas toroidais para as cilíndricas nesta aproximação são $\hat{\eta} \approx -\hat{\rho}'$ e $\hat{\varphi} \approx \hat{z}$). O cilindro reto tem comprimento ℓ e raio $r_0 \ll \ell$, com potenciais ϕ_L e ϕ_R nas extremidades do condutor, e $RI = \phi_L - \phi_R$:

$$\phi(r \geq a) = \left[\frac{\phi_R + \phi_L}{2} + (\phi_R - \phi_L) \frac{z}{\ell} \right] \frac{\ln(\ell/\rho')}{\ln(\ell/r_0)}, \quad (10.83)$$

$$\vec{E}(r \geq a) = \left[\frac{\phi_R + \phi_L}{2} + (\phi_R - \phi_L) \frac{z}{\ell} \right] \frac{\hat{\rho}'}{\rho' \ln(\ell/r_0)} - \frac{\phi_R - \phi_L}{\ell} \frac{\ln(\ell/\rho')}{\ln(\ell/r_0)} \hat{z}. \quad (10.84)$$

Nosso resultado do potencial na região próxima ao anel fino concorda com a solução cilíndrica, como esperado.

10.9 Condutor carregado sem corrente

Suponha um condutor toroidal (sólido cheio ou oco) descrito por η_0 , sem corrente mas carregado até um potencial constante ϕ_0 . Usando $\phi_A = \phi_0$ e $\phi_B = 0$ nas Eqs. (10.12) e (10.23) temos o

potencial eletrostático dentro e fora do condutor, respectivamente:

$$\phi(\eta \geq \eta_0, \chi, \varphi) = \phi_0, \quad (10.85)$$

$$\phi(\eta \leq \eta_0, \chi, \varphi) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \left[\sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\chi) P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right], \quad (10.86)$$

onde $P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)$ são as funções de Legendre e os coeficientes A_p são dados pela Eq. (10.21). Esta solução já era conhecida na literatura, [Smy89, pág. 239] e [MF53, pág. 1304].

É possível obter a capacitância exata do toróide ao comparar o potencial eletrostático a uma grande distância da origem, componente em monopolo de A_p da Eq. (10.34) junto com a Eq. (10.21), com o potencial dado por uma carga pontual q , a saber, $\phi = q/4\pi\epsilon_0 r$:

$$\begin{aligned} \phi(r \gg a, \theta, \varphi) &\approx \frac{a\sqrt{2}}{r} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\phi_A(2 - \delta_{0p})}{\pi} \frac{Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)}{P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (10.87)$$

A capacitância do toróide mantido a um potencial constante ϕ_A pode ser escrito como $C = q/\phi_A$. Com a Eq. (10.87) obtém-se, [Smy89, pág. 239], [Gra72, págs. 5–13], [Sno54, pág. 9] e [MS61, pág. 375]:

$$C = 8\epsilon_0 a \left[\sum_{p=0}^{\infty} (2 - \delta_{0p}) \frac{Q_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)}{P_{p-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)} \right]. \quad (10.88)$$

Utilizando a aproximação de toróide fino, $\eta_0 \gg 1$ e $\cosh \eta_0 \gg 1$, obtém-se a capacitância de um anel circular, Eq. (10.70).

É interessante fazer, para este toróide carregado mas sem corrente, a mesma aproximação de toróide fino como na Seção 10.7, ou seja, $\cosh \eta_0 \gg 1$ (tal que $R_0 \approx a$). Obtemos então o potencial eletrostático de um anel fino:

$$\phi(\eta \leq \eta_0, \chi, \varphi) = \phi_0 \sqrt{\frac{\cosh \eta - \cos \chi}{\cosh \eta_0}} \frac{P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)}{P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_0)}. \quad (10.89)$$

Podemos expressar o potencial eletrostático do anel fino, Eq. (10.89), em termos da carga total q_A , Eq. (10.69):

$$\phi(\eta, \chi, \varphi) = \frac{q_A}{4\pi\sqrt{2}\epsilon_0 a} \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta). \quad (10.90)$$

Ou, em termos das coordenadas esféricas (r, θ, φ) :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2 + a^2}{\sqrt{(r^2 - a^2)^2 + 4a^2 r^2 \cos^2 \theta}}\right)}{[r^4 + 2a^2 r^2 (2 \cos^2 \theta - 1) + a^4]^{1/4}}. \quad (10.91)$$

Das Eqs. (10.85) e (10.69) podemos obter que o potencial eletrostático constante ao longo do toróide fino expresso em termos de sua carga total q_A é dado por:

$$\phi(\eta_0 \gg 1, \theta, \varphi) = \frac{q_A/2\pi a}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{8a}{r_0}. \quad (10.92)$$

Mesmo quando a densidade linear de carga $q_A/2\pi a$ permanece constante podemos perceber desta expressão que o potencial diverge logaritmicamente quando $a/r_0 \rightarrow \infty$. O mesmo havia acontecido com a Eq. (7.28).

Apresentamos por conveniência uma expansão da Eq. (10.91) em termos de $r_</r_>$, onde $r_<$ ($r_>$) é o menor (maior) valor de a e r (onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância até a origem):

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_>} - \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{8} \frac{r_<^2}{r_>^3} + \frac{3}{512} [9 + 20 \cos(2\theta) + 35 \cos(4\theta)] \frac{r_<^4}{r_>^5} \right\}. \quad (10.93)$$

No eixo z , ou seja, para $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, o potencial (10.91) é dado por:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (10.94)$$

Este é o mesmo resultado que se obtém integrando diretamente o potencial eletrostático de Coulomb, ou seja, uma carga q_A distribuída num anel filiforme de raio a no plano $z = 0$, centrada no eixo z , [AW95, Exemplo 12.3.3].

As Eqs. (10.89) ou (10.90) a (10.93) podem ser comparadas com aquela dada por Jackson, [Jac75, pág. 93]. Jackson apresenta a solução eletrostática exata do problema de um fio circular carregado (ou seja, um anel com raio menor $r_0 = 0$), em coordenadas esféricas (r, θ, φ) :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n}(\cos \theta) \right], \quad (10.95)$$

onde $r_<$ ($r_>$) é o menor (maior) valor de r e a , a é o raio da circunferência e q_A sua carga total. A Eq. (10.95) expandida até $n = 2$ fornece exatamente a Eq. (10.93). Verificamos que as Eqs. (10.91) e (10.95) coincidem até pelo menos $n = 30$.

Graficamos ambas as Eqs. (10.90) e (10.95) na Figura 10.8. Elas dão o mesmo resultado, como esperado. É também válido notar que em coordenadas esféricas temos uma soma infinita, Eq. (10.95), enquanto que em coordenadas toroidais a solução é dada por um único termo, Eq. (10.90). A concordância mostra que as Eqs. (10.90) e (10.95) são soluções idênticas da equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ apenas expressas em formas diferentes.

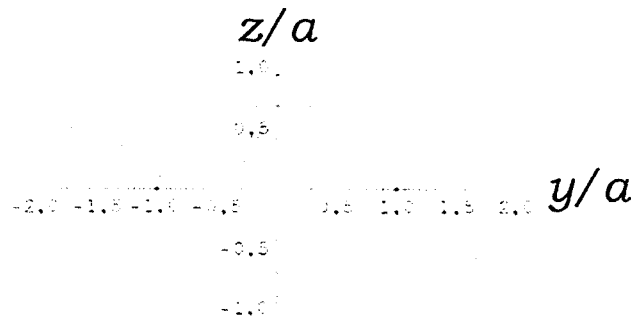


Figura 10.8: Linhas equipotenciais no plano $x = 0$ (perpendicular ao toróide) para um anel fino carregado e sem corrente. As Eqs. (10.90) e (10.95) coincidem entre si. Utilizamos $\eta_0 = 38$ ($\cosh \eta_0 = 1,6 \times 10^{16}$). Perceba a diferença entre esta Figura e a Figura 10.6: os lados à esquerda e à direita do condutor têm o mesmo sinal de cargas, enquanto que na Figura 10.6 eles têm sinais opostos.

A Figura 10.9 mostra o potencial como função de r (das coordenadas cilíndricas) no plano $z = 0$. As Eqs. (10.90) e (10.95) dão novamente o mesmo resultado.

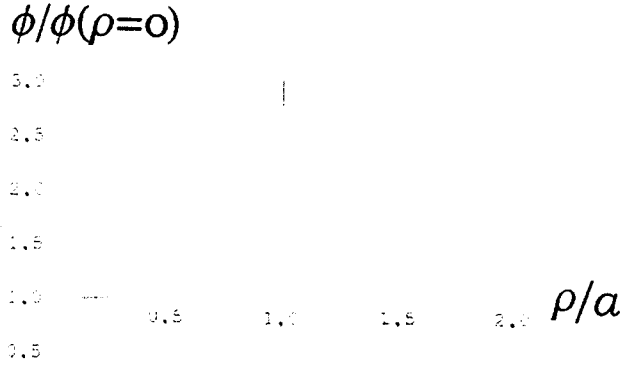


Figura 10.9: O potencial normalizado como função de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distância do eixo z) no plano $z = 0$. As Eqs. (10.89) e (10.95) dão o mesmo resultado. Utilizamos $\eta_0 = 38$ ($\cosh \eta_0 = 1,6 \times 10^{16}$).

10.10 Comparação com os resultados experimentais

A Figura 10.5 pode ser comparada com o resultado experimental encontrado por Jefimenko, [Jef62, Figura 3], nossa Figura 1.10. Ela está reproduzida aqui na Figura 10.10 com a Figura 10.5 sobreposta a ela. Existe uma ótima concordância entre nosso resultado teórico e o experimental.

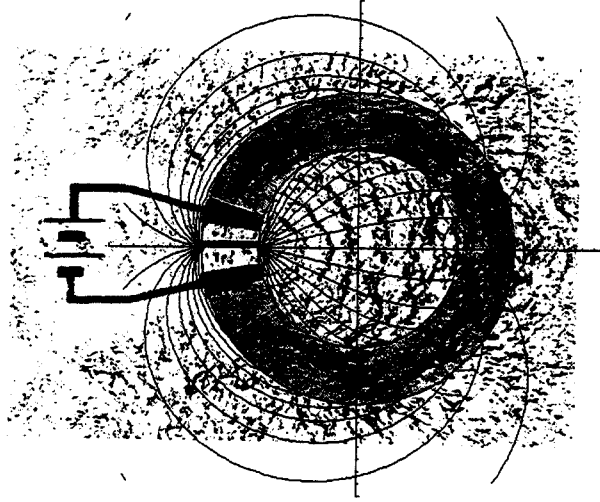


Figura 10.10: Experimento de Jefimenko [Jef62] no qual linhas de campo elétrico foram mapeadas usando sementes de grama espalhadas sobre uma placa de vidro. Existe uma fita circular condutora conduzindo uma corrente constante. A Figura 10.5 foi sobreposta a ela – as linhas equipotenciais são normais às linhas de campo elétrico.

Para obter um resultado ainda mais coerente com o problema de Jefimenko, supomos o potencial ao longo do anel como dado pela Eq. (10.96):

$$\phi = \begin{cases} -\phi_B \frac{\varphi_i(\pi+\varphi)}{2\pi(\pi-\varphi_j)}, & \text{para } -\pi \leq \varphi \leq -\varphi_j, \\ -\phi_B \frac{\varphi_i}{2\pi}, & \text{para } -\varphi_j \leq \varphi \leq -\varphi_i, \\ \phi_B \frac{\varphi}{2\pi}, & \text{para } -\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_i, \\ \phi_B \frac{\varphi_i}{2\pi}, & \text{para } \varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_j, \\ \phi_B \frac{\varphi_i(\pi-\varphi)}{2\pi(\pi-\varphi_j)}, & \text{para } \varphi_j \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (10.96)$$

Agora o potencial não é mais descontínuo. A bateria ocupa neste caso um volume finito. O potencial cresce linearmente entre $\varphi = -\varphi_i$ e $\varphi = +\varphi_j$, é constante para $\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_j$ e para $-\varphi_j \leq \varphi \leq -\varphi_i$, variando novamente linearmente de $\varphi_j \leq \varphi \leq \pi$ rad e de $-\pi$ rad $\leq \varphi \leq -\varphi_j$. Este perfil de potencial representa melhor a situação experimental de Jefimenko, Figura 1.10 [Jef62, Figura 3], do que o potencial descontínuo anterior. Os valores de φ_i e φ_j correspondendo à experiência de Jefimenko são $\varphi_i = 9\pi/10$ rad = 2,83 rad e $\varphi_j = 17\pi/18$ rad = 2,97 rad. Na Figura 10.11 temos a representação em série de Fourier deste potencial. O fenômeno de Gibbs que ocorreu na Figura 10.4 deixa de ocorrer aqui pois o potencial agora é contínuo.

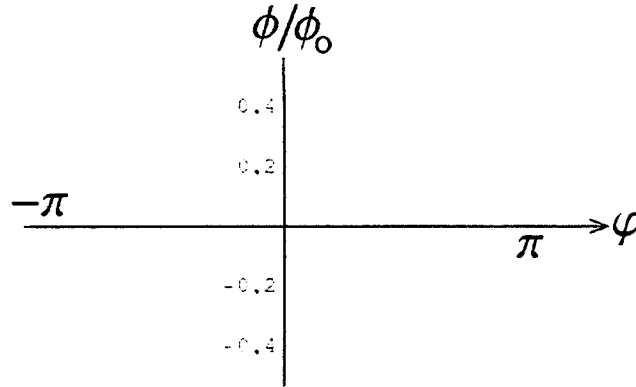


Figura 10.11: Representação em série de Fourier do potencial dado pelas Eqs. (10.96) e (10.97). Este potencial representa mais fielmente a experiência de Jefimenko, [Jef62, Figura 3], do que o potencial descontínuo da Eq. (10.12). Usamos $\varphi_i = 9\pi/10$ rad = 2,83 rad e $\varphi_j = 17\pi/18$ rad = 2,97 rad.

A expansão em série de Fourier da Eq. (10.96) é dada por:

$$\phi(\eta_0, \chi, \varphi) = \frac{\phi_B}{2\pi^2} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\sin(q\varphi)}{q^2} \left[\frac{\sin(q\varphi_j)}{\pi - \varphi_j} + \frac{\sin(q\varphi_i)}{\varphi_i} \right] \right\}. \quad (10.97)$$

Com este potencial, substituindo a condição de contorno, Eq. (10.97), obtivemos as equipotenciais apresentadas na Figura 10.12. Na Figura 10.13 temos as equipotenciais da Figura 10.12 sobrepostas à figura experimental de Jefimenko, Figura 1.10. Há uma concordância muito boa entre nossas curvas teóricas e os resultados experimentais de Jefimenko.

O campo elétrico e as distribuições de carga provenientes do efeito Hall radial também foram desprezadas neste problema do anel, veja a Seção 7.5. Basicamente, este campo elétrico é muito menor (10^{-5}) que o campo elétrico que mantém a corrente fluindo, em um condutor típico de cobre com 1 mm de diâmetro e 4×10^{-3} m/s de velocidade de deriva, veja a Seção 2.2. Por este motivo este campo elétrico foi desprezado no presente trabalho.

Nossa solução dentro e ao longo da superfície do toróide tem apenas um campo elétrico azimutal, a saber, $E_\varphi = \Delta\phi/2\pi\rho$. Mas mesmo no caso de corrente constante tem de haver uma componente de $\vec{E}$ se afastando do eixo z , E_ρ , devido à curvatura do fio. É esta componente que vai gerar a força centrípeta sobre os elétrons que os permitem realizar uma trajetória circular com módulo da velocidade de migração ou de deriva constantes. Estamos desprezando esta componente por seu valor ser extremamente pequeno comparado com E_φ . Para ver isto considere um elétron de condução com carga $-e$ e massa m com uma velocidade de migração azimutal v_d ao longo de uma circunferência de raio ρ ao redor do eixo z . Numa situação estacionária vai ocorrer uma redistribuição de cargas ao longo da seção reta do condutor toroidal que vai gerar uma componente E_ρ do campo elétrico. Esta componente vai exercer uma força centrípeta sobre os elétrons de condução. Pela segunda lei do movimento de Newton a força eE_ρ vai resultar

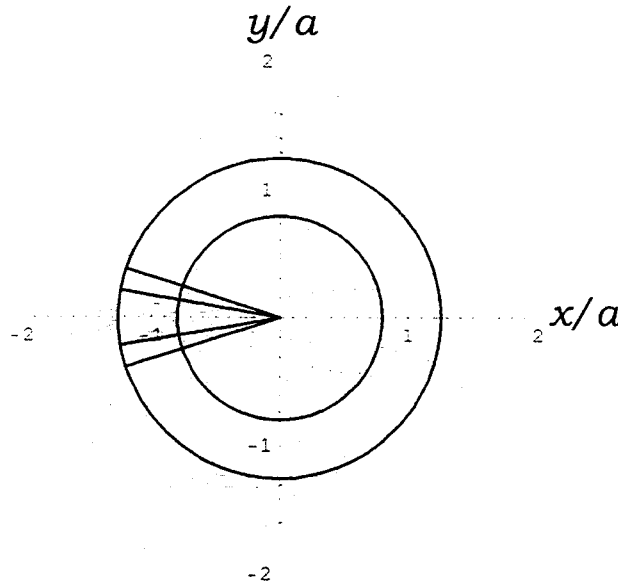


Figura 10.12: Linhas equipotenciais teóricas obtidas quando a condição de contorno é dada pela Eq. (10.96).

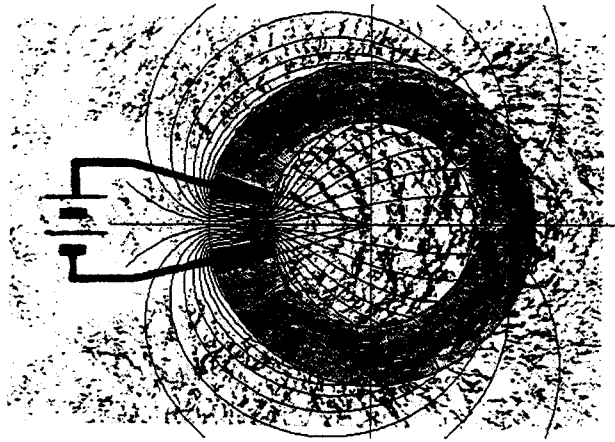


Figura 10.13: Figura experimental de Jefimenko para uma fita circular bidimensional, Figura 1.10, conduzindo uma corrente constante, com a Figura 10.12 sobreposta a ela. As equipotenciais são normais às linhas de campo elétrico.

numa aceleração centrípeta tal que $eE_\rho = mv_d^2/\rho$. Para obter ordens de grandeza para E_ϕ e E_ρ supomos um fio de cobre de calibre 14 ($r_0 = 8,14 \times 10^{-4}$ m) com 1 metro de comprimento, curvo na forma de uma circunferência de raio $R_0 = \rho = (1/2\pi)$ m = $1,59 \times 10^{-1}$ m, com uma corrente constante de 1 A. A velocidade de migração é de $v_d = 3,55 \times 10^{-5}$ m/s, a resistência do fio é de $8,13 \times 10^{-3} \Omega$ e a diferença de potencial gerada pela bateria é $\Delta\phi = 8,13 \times 10^{-3}$ V. Isto fornece $E_\phi = 8,13 \times 10^{-3}$ V/m e $E_\rho = 4,5 \times 10^{-20}$ V/m. Isto é, $E_\rho \ll E_\phi$, o que justifica desprezarmos a componente E_ρ do campo elétrico.

Este capítulo representa o principal trabalho da tese e suas partes principais foram publicadas no Physical Review E, [HA03a]. Em muitos casos anteriores tínhamos condutores de comprimento infinito: fios retos, cabos coaxiais, linhas de transmissão, placas, fitas e solenóides. Já neste caso temos um condutor resistivo ocupando uma região finita de espaço. Esta geometria é muito importante na prática pois um condutor toroidal ou anel transportando uma corrente azi-

mutal se encontra muito freqüentemente em situações comuns. Apesar da dificuldade matemática do problema conseguimos resolvê-lo analiticamente de forma completa, obtendo também representações gráficas de todas as grandezas envolvidas. E ainda por cima pudemos comparar nossos cálculos com uma experiência de Jefimenko encontrando uma concordância muito boa entre os dois resultados, como pode ser observado pela Figura 10.13.

Parte III

Conclusão

Conclusões Gerais

Tratamos aqui de várias geometrias de circuitos resistivos conduzindo correntes estacionárias: fio cilíndrico reto (Capítulos 2 e 4), placa (Capítulos 5 e 6), fita (Capítulo 7), casca cilíndrica com corrente azimutal (Capítulo 8), casca esférica (Capítulo 9) e toróide com corrente azimutal (Capítulo 10). Demonstramos que para todos estes casos existe um campo elétrico fora do condutor, proporcional à corrente. Analisamos também o comportamento das cargas superficiais.

Para condutores retos e longos, longe da bateria, as cargas superficiais são lineares com a coordenada longitudinal z . Isto justifica a abordagem em alguns problemas em que supõe-se inicialmente a densidade de cargas linear ao longo do condutor e integra-se para encontrar o potencial, Capítulos 2 e 5. Com uma bateria colocada no centro de condutores retos e longos, encontramos que a distribuição das cargas diverge com um comportamento do tipo $1/z$, próximo à bateria situada em $z = 0$, devido à descontinuidade do potencial. Este é o resultado advindo dos modelos matemáticos que utilizamos para descrever os problemas. Em situações reais, esta divergência não deve acontecer (antes disso ocorreria o efeito corona, por exemplo). Mas espera-se que haja um crescimento não linear da distribuição de cargas conforme nos aproximamos da bateria. A divergência que encontramos vem do fato de lidarmos com baterias ideais sem espessura, na forma de linhas ou de discos. Utilizamos estes modelos para conseguir encontrar soluções analíticas para os problemas que tratamos. Modelos mais aprimorados e realísticos podem ser desenvolvidos no futuro por outros pesquisadores tais que cheguem a resultados mais confiáveis para a distribuição de cargas superficiais próximas a baterias. Seguimos aqui o procedimento adotado por Jefimenko e Heald para o caso da casca cilíndrica, aplicando-o a outras geometrias (fio reto e placa no caso de condutores retos; casca esférica e toróide no caso de condutores curvos). Dentro desta limitação apontada aqui podemos dizer que concluímos com sucesso o estudo do comportamento dos campos, potenciais e cargas próximas às baterias nestas geometrias.

Para condutores curvos, longe da bateria, também temos um comportamento aproximadamente linear com o ângulo azimutal para a densidade de carga superficial. Entretanto, de maneira geral, a distribuição de cargas cresce em direção à bateria de maneira mais rápida do que um crescimento linear. Além disso, ela também diverge próximo à bateria (pelo mesmo motivo apontado acima). Junto com os resultados para condutores retos (com e sem a análise da bateria), podemos concluir que este é o comportamento esperado para circuitos fechados.

O problema de indução eletrostática de um cilindro condutor sem corrente, com uma carga próxima, tratado no Capítulo 3, nunca foi publicado na literatura. O resultado mais próximo é o de Jackson, [Jac99, pág. 143], que resolveu o problema de uma casca cilíndrica condutora finito com uma carga pontual dentro da casca. Aqui estendemos seu tratamento para uma casca cilíndrica infinita com carga pontual dentro e fora da casca, assim com calculamos analiticamente a força de atração entre a casca e a carga em todos os casos. Uma conclusão importante que obtivemos deste trabalho foi que um condutor filiforme infinito não exerce força sobre uma carga pontual parada próxima ao fio unidimensional ideal.

Um dos aspectos mais importantes do trabalho da fita condutora, Capítulo 7, é que conseguimos encontrar um modelo teórico que fornece resultados razoáveis que puderam ser comparados com dois experimentos diferentes já publicados na literatura, [Jef62] e [JBK62]. Uma das experiências de Jefimenko é caracterizada exatamente pela geometria considerada aqui: uma

longa fita retangular condutora transportando uma corrente elétrica estacionária. Como discutido acima, estes experimentos mapearam as linhas de campo elétrico e as linhas equipotenciais dentro e fora das regiões com corrente estacionária nos condutores. A geometria considerada aqui nunca foi trabalhada antes neste tipo de problema. Para obter este resultado foi necessário utilizar coordenadas elíptico-cilíndricas (ζ, ϑ, z) . A solução geral para o potencial em termos destas variáveis é razoavelmente simples, dado por $\phi = (A_1\zeta - A_2)(A_3z - A_4)$. Quando expresso em termos das coordenadas cartesianas usuais (x, y, z) a solução toma a forma complicada da Eq. (7.11). Seria difícil obter esta solução trabalhando somente com coordenadas cartesianas. As coordenadas cilíndricas usuais (ρ, φ, z) também não são muito úteis para obter a solução deste problema. A situação descrita aqui mostra um exemplo importante da utilidade das coordenadas elíptico-cilíndricas para tratar com problemas razoavelmente simples da física.

O problema da casca esférica conduzindo uma corrente estacionária azimutal, Capítulo 9, é novo e não tem publicações na literatura. Utilizamos coordenadas esféricas (r, θ, φ) . A solução da equação de Laplace faz uso das funções associadas de Legendre, que são bastante conhecidas e estudadas em vários livros-texto de funções especiais. A solução para o potencial em termos destas funções, dentro e fora da casca esférica, Eqs. (9.15) e (9.18), respectivamente, é bastante complicado e difícil de trabalhar. Apesar disto, podemos comparar a figura das equipotenciais no plano $z = 0$, Figura 9.3, com aquela encontrada por Heald no caso de um cilindro com corrente azimutal, Figura 8.2, e com aquela encontrada por Jefimenko experimentalmente, Figura 1.10. Disto concluímos que nosso resultado é consistente. Entretanto, estas comparações são qualitativas, informando-nos que nossas soluções têm um comportamento correto. Comparando-se as Figs. 8.2, 9.3 e 10.5, teóricas, com a placa experimental correspondente, Fig. 1.10, percebemos que todas elas são semelhantes visualmente. Apesar disto, a geometria de cada uma delas é diferente: uma casca cilíndrica, uma casca esférica, um toróide e um anel bidimensional pintado sobre uma placa de vidro, respectivamente. O mesmo tipo de comparação qualitativa é feito com o problema das placas condutoras, Fig. 5.3, o fio cilíndrico, Fig. 2.4, a fita, Fig. 7.5, e as placas experimentais correspondentes, Figs. 1.5 e 1.7. Apesar da geometria da fita e das placas experimentais ser essencialmente a mesma (desprezando-se os efeitos de borda nas extremidades longitudinais do circuito), a comparação ainda deve ser considerada qualitativa. Isto porque apenas mostra a semelhança de comportamento entre as linhas de campo elétrico calculadas teoricamente e medidas experimentalmente (ou entre as linhas equipotenciais teóricas e experimentais, por exemplo, entre as Figs. 7.5 e 1.11). Não pudemos fazer comparações quantitativas conclusivas porque não há na literatura experimentos suficientes medindo a força entre uma carga e um condutor com corrente constante mostrando, por exemplo, que a força é de fato linear com a corrente etc.

O problema de um condutor toroidal com corrente estacionária, Capítulo 10, também nunca havia sido resolvido na literatura. Portanto, esta é a primeira vez que o potencial elétrico, o campo elétrico e as cargas superficiais, Eqs. (10.23) e (10.50) a (10.54), respectivamente, foram obtidas. O importante resultado experimental de Jefimenko mostrando o campo elétrico fora de condutores curvos é complementado pelo presente trabalho teórico, com concordância excelente, veja as Figuras 10.10 e 10.13. O potencial elétrico e o campo elétrico perto do condutor na aproximação de um anel fino com corrente estacionária, Eqs. (10.81) e (10.82), respectivamente, concordam com o caso conhecido de um condutor cilíndrico longo e reto conduzindo uma corrente estacionária. O potencial elétrico na aproximação de anel fino sem corrente concorda com o resultado conhecido de um fio circular carregado, [Jac75, pág. 93].

As outras soluções teóricas conhecidas na literatura consideram usualmente alguma dimensão infinita (um condutor muito comprido com corrente longitudinal ou então um longo cabo coaxial), [Som64, págs. 125–33], [Gri89, págs. 336–7], [ARM99], [AC00], [AHL01]. O único caso de solução analítica de condutor curvo na literatura é o do solenóide com corrente azimutal, Capítulo 8. Neste caso também temos um condutor de comprimento infinito, [Hea84]. O único caso conhecido de potencial devido a uma corrente estacionária fluindo em um condutor fechado ocupando um

volume finito é do Jackson, [Jac96], que considerou um cabo coaxial de comprimento finito. Entretanto, como ele considerou o condutor externo de retorno como tendo resistividade nula, o campo elétrico fora de seu cabo coaxial foi encontrado como sendo nulo. Aqui, por outro lado, obtivemos uma solução teórica para o potencial devido a uma corrente fluindo em um condutor resistivo toroidal que fornece um campo elétrico não apenas dentro do condutor mas também no espaço à sua volta. Nossa solução mostra uma concordância razoável com o experimento de Jefimenko que prova a existência deste campo elétrico externo devido a uma corrente resistiva estacionária.

Apêndice A

Cálculo da Integral da Eq. (4.11)

Nesta seção apresentamos o cálculo da integral da Eq. (4.11). Como esta integral é uma função par de k , ela pode ser escrita como:

$$\int_0^\infty \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{\text{sen}(kz)}{k} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{\text{sen}(kz)}{k} dk = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{e^{ikz}}{k} dk. \quad (\text{A.1})$$

A integral acima é parte de uma integral de contorno sobre a variável complexa k :

$$I = \oint_C \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{e^{ikz}}{k} dk, \quad (\text{A.2})$$

com um contorno apropriado C . O integrando tem um pólo simples em $k_0 = 0$ e infinitos pólos simples em k_n , tal que:

$$I_0(k_n a) = 0 \rightarrow J_0(x_n) = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde $x_n = -ik_n a$ são os zeros da função de Bessel $J_0(x)$: $x_1 = 2,4048$, $x_2 = 5,5201$, ... e $n = 1, 2, \dots$. Como $e^{ikz} = e^{i\alpha z - \beta z}$, para $k = \alpha + i\beta$ (α e β sendo números reais), a integral converge para $z\beta > 0$. Escolhemos um contorno do tipo mostrado na Figura A.1 para $z > 0$. A integral de contorno pode, portanto, ser dividida em três partes: ao longo do eixo real de k , ao longo do caminho menor C_r e ao longo do caminho maior C_R . A integral ao longo do caminho menor C_r é dada por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{e^{ikz}}{k} dk = \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{I_0(re^{i\varphi}\rho)}{I_0(re^{i\varphi}a)} \frac{\exp(ikre^{i\theta})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = -i\pi. \quad (\text{A.4})$$

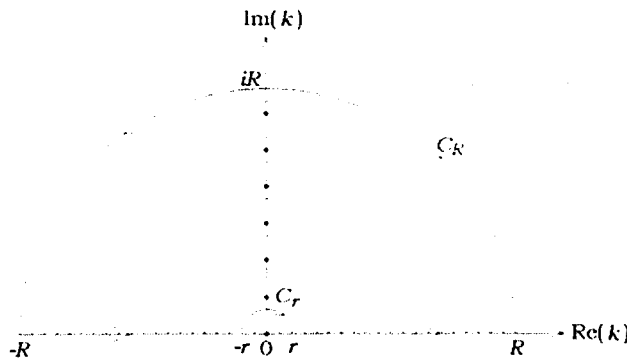


Figura A.1: Contorno no qual se calcula a integral da Eq. (4.11) para $z > 0$. Para $z < 0$ escolhemos um contorno simetricamente refletida no eixo horizontal (eixo real de k).

A integral ao longo do caminho C_R é limitada e tende a zero quando $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{e^{ikz}}{k} dk \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \left| \frac{e^{ikz}}{k} \right| dk = 0. \quad (\text{A.5})$$

Usando o teorema de Cauchy, a integral I é dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{e^{ikz}}{k} dk &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{e^{ikz}}{k} dk - \pi i = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(k_n) \\ &= 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(k_n\rho)}{I_1(k_na)} \frac{e^{ik_n z}}{ak_n}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde $\text{Res}(k_n)$ é o resíduo do integrando em $k = k_n = ix_n/a$. Na equação acima utilizamos a relação $I'_0(x) = I_1(x)$ envolvendo funções de Bessel modificadas, onde $I'_0(x) \equiv dI_0(x)/dx$. Portanto, a integral da Eq. (4.11) para $z > 0$ é dada por:

$$\int_0^{\infty} \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{\text{sen}(kz)}{k} dk = \frac{\pi}{2} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_n\rho/a)}{J_1(x_n)} \frac{e^{-x_n z/a}}{x_n}. \quad (\text{A.7})$$

Analogamente, a integral da Eq. (4.11) para $z < 0$ é dada por:

$$\int_0^{\infty} \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \frac{\text{sen}(kz)}{k} dk = -\frac{\pi}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_n\rho/a)}{J_1(x_n)} \frac{e^{x_n z/a}}{x_n}. \quad (\text{A.8})$$

Aqui foi usada a relação $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, e x_n são os zeros da função de Bessel de ordem zero, $J_0(x_n) = 0$.

Apêndice B

Cálculo da integral da Eq. (6.10)

Aqui apresentamos o cálculo da integral que aparece na Eq. (6.10). Neste apêndice utilizamos a variável real s em vez da variável real longitudinal z na Eq. (6.10) para evitar confusões com a variável complexa $z = x + iy$. Como a integral é uma função par de k , ela pode ser escrita como:

$$\int_0^\infty \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{\sen(ks)}{k} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{\sen(ks)}{k} dk = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{e^{iks}}{k} dk. \quad (\text{B.1})$$

A integral acima é parte de uma integral de contorno I sobre a variável complexa z :

$$I = \oint_C \frac{\cosh(yz)}{\cosh(az)} \frac{e^{izs}}{z} dz, \quad (\text{B.2})$$

com um contorno apropriado C . O integrando tem um pólo simples em $z_0 = 0$ e infinitos pólos simples em z_n de modo que:

$$\cosh(az_n) = 0 \quad \rightarrow \quad z_n = \frac{2n+1}{2a} \pi i, \quad (\text{B.3})$$

para n inteiro. Como temos o termo $e^{izs} = e^{i\alpha s - \beta s}$, para $z = \alpha + i\beta$ (α e β sendo números reais), a integral converge para $s\beta > 0$. Escolhemos um contorno do tipo mostrado na Figura B.1 para $s > 0$. A integral I pode então ser dividida em três termos: ao longo do eixo real de z , ao longo do caminho C_r e ao longo do caminho C_R . A integral ao longo do caminho C_r é dada por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{\cosh(zy)}{\cosh(za)} \frac{e^{izs}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{\cosh(re^{i\theta}y)}{\cosh(re^{i\theta}a)} \frac{\exp(i re^{i\theta}s)}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = -i\pi. \quad (\text{B.4})$$

A integral ao longo do caminho C_R é limitada e se anula para $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{\cosh(zy)}{\cosh(za)} \frac{e^{izs}}{z} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \left| \frac{e^{izs}}{z} \right| dz = 0. \quad (\text{B.5})$$

Usando o teorema de Cauchy, a integral I é dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} I &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{e^{iks}}{k} dk - \pi i = 2\pi i \sum_{n=1}^\infty \text{Res}(z_n) \\ &= 2\pi i \sum_{n=0}^\infty \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)} e^{-\pi s(2n+1)/2a} \cos \left[\frac{\pi y}{2a} (2n+1) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde $\text{Res}(z_n)$ é o resíduo do integrando em $z = z_n$. Portanto, temos a integral da Eq. (6.10) para $s > 0$ como:

$$\int_0^\infty \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{\sen(ks)}{k} dk = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} e^{-\pi s(2n+1)/2a} \cos \left[\frac{\pi y}{2a} (2n+1) \right]. \quad (\text{B.7})$$

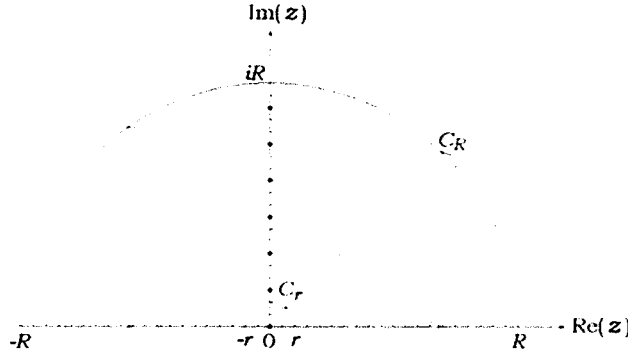


Figura B.1: Contorno para calcular a integral da Eq. (6.10), para $s > 0$. Aqui usamos s real em vez da variável longitudinal z real para evitar confusões com a variável complexa $z = x + iy$. Para $s < 0$ escolhemos um contorno simétrico refletido no eixo horizontal (s real).

Usando a série:

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \quad (\text{B.8})$$

podemos escrever a integral acima como:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{\sin(ks)}{k} dk &= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} e^{-\pi s(2n+1)/2a} \cos \left[\frac{\pi y}{2a} (2n+1) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\pi(s-iy)(2n+1)/2a} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\pi(s+iy)(2n+1)/2a} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan \left[e^{-\pi(s-iy)/2a} \right] - \arctan \left[e^{-\pi(s+iy)/2a} \right] = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{\cos(\pi y/2a)}{\sinh(\pi s/2a)} \right] \\ &= \operatorname{arccot} \left[\frac{\cos(\pi y/2a)}{\sinh(\pi s/2a)} \right]. \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Para $s < 0$, a integral da Eq. (6.10) é analogamente dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(ky)}{\cosh(ka)} \frac{\sin(ks)}{k} dk &= -\frac{\pi}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} e^{\pi s(2n+1)/2a} \cos \left[\frac{\pi y}{2a} (2n+1) \right] \\ &= \operatorname{arccot} \left[\frac{\cos(\pi y/2a)}{\sinh(\pi s/2a)} \right]. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [AC00] A. K. T. Assis and J. I. Cisneros. Surface charges and fields in a resistive coaxial cable carrying a constant current. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 47:63–66, 2000.
- [AH99] A. K. T. Assis and J. A. Hernandez. Cargas superficiais em placas condutoras com correntes constantes. In *Anais do XX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, São Lourenço, MG, 25–29 de Outubro de 1999. Ver também <http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xx/procs/res224>.
- [AHL01] A. K. T. Assis, J. A. Hernandez, and J. E. Lamesa. Surface charges in conductor plates carrying constant currents. *Foundations of Physics*, 31:1501–1511, 2001.
- [AHR92] J. M. Aguirregabiria, A. Hernandez, and M. Rivas. An example of surface-charge distribution on conductors carrying steady currents. *American Journal of Physics*, 60:138–141, 1992.
- [AM99] A. K. T. Assis and A. J. Mania. Surface charges and electric field in a two-wire resistive transmission line. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 21:469–475, 1999.
- [ARM99] A. K. T. Assis, W. A. Rodrigues Jr., and A. J. Mania. The electric field outside a stationary resistive wire carrying a constant current. *Foundations of Physics*, 29:729–753, 1999.
- [Ass97] A. K. T. Assis. Circuit theory in Weber electrodynamics. *European Journal of Physics*, 18:241–246, 1997.
- [AW95] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego, 4 edition, 1995.
- [BA95] M. A. Bueno and A. K. T. Assis. A new method of inductance calculations. *Journal of Physics D*, 28:1802–1806, 1995.
- [BA98] M. A. Bueno and A. K. T. Assis. Deriving force from inductance. *IEEE Trans. Magn.*, 34:317–319, 1998.
- [Bat53] H. Bateman. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [BC91a] U. Bartocci and M. M. Capria. Some remarks on classical electromagnetism and the principle of relativity. *American Journal of Physics*, 59:1030–1032, 1991.
- [BC91b] U. Bartocci and M. M. Capria. Symmetries and asymmetries in classical and relativistic electrodynamics. *Foundations of Physics*, 21:787–801, 1991.
- [BM90] D. F. Bartlett and S. Maglic. Test of an anomalous electromagnetic effect. *Review of Scientific Instruments*, 61:2637–2639, 1990.

- [BS50] L. Bergmann and C. Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, volume 2: Elektrizitätslehre. Walter de Gruyter, Berlin, 1950.
- [BS87] L. Bergmann and C. Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, volume 2: Elektrizität und Magnetismus. Walter de Gruyter, Berlin, seventh edition, 1987.
- [But68] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1968.
- [CS95] R. W. Chaday and B. A. Sherwood. *Electric and Magnetic Interactions*. Wiley, New York, 1995.
- [EKL76] W. F. Edwards, C. S. Kenyon, and D. K. Lemon. Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents. *Physical Review D*, 14:922–938, 1976.
- [FdF03] G. F. Leal Ferreira and Mariângela T. de Figueiredo. A eletrostática na corrente elétrica em fios. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:374–377, 2003.
- [Fen75] S. Fenster. Torus topology of the static current loop field. *American Journal of Physics*, 43:683–688, 1975.
- [FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1964.
- [GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.
- [GL96] D. J. Griffiths and Y. Li. Charge density on a conducting needle. *American Journal of Physics*, 64:706–714, 1996.
- [GR63] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, San Diego, 4 edition, 1963.
- [Gra72] D. E. Gray (editor). *American Institute of Physics Handbook*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1972.
- [Gri89] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2 edition, 1989.
- [HA02a] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Electric potential for a toroidal ring carrying a constant current, P-115. In *Anais do XXIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Águas de Lindóia, SP, 15–19 de Outubro de 2002. Ver também <http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxiii/procs/>.
- [HA02b] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Potential, electric field and surface charges for a resistive long straight strip carrying a constant current, P-163. In *Anais do XXIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Águas de Lindóia, SP, 15–19 de Outubro de 2002. Ver também <http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxiii/procs/>.
- [HA03a] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Electric potential for a resistive toroidal conductor carrying a steady azimuthal current. *Physical Review E*, 68:046611, 2003.
- [HA03b] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. The potential, electric field and surface charges for a resistive long straight strip carrying a steady current. *American Journal of Physics*, 71:938–942, 2003.

- [Hay90] H. Hayden. Possible explanation for the Edwards effect. *Galilean Electrodynamics*, 1:33–35, 1990.
- [Hea84] M. A. Heald. Electric fields and charges in elementary circuits. *American Journal of Physics*, 52:522–526, 1984.
- [Her01] J. A. Hernandez. *Cargas Superficiais e Propagação de Sinais em Condutores*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física “Gleb Wataghin” – Universidade Estadual de Campinas, 2001.
- [HOA04a] J. A. Hernandez, E. Capelas de Oliveira, and A. K. T. Assis. Potential, electric field and surface charges close to the battery for a resistive cylindrical shell carrying a steady longitudinal current. Aceito para publicação na *Revista de la Facultad de Ingeniería*, 2004.
- [HOA04b] J. A. Hernandez, E. Capelas de Oliveira, and A. K. T. Assis. Resistive plates carrying a steady current: electric potential and surface charges close to the battery. Aceito para publicação no *Foundations of Physics Letters*, 2004.
- [Ive91] T. Ivezić. Electric fields from steady currents and unexplained electromagnetic experiments. *Physical Review A*, 44:2682–2685, 1991.
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, 2 edition, 1975.
- [Jac96] J. D. Jackson. Surface charges on circuit wires and resistors play three roles. *American Journal of Physics*, 64:855–870, 1996.
- [Jac99] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, 3 edition, 1999.
- [JBK62] O. D. Jefimenko, T. L. Barnett, and W. H. Kelly. Confinement and shaping of electric fields by current-carrying conductors. *Proceedings of the West Virginia Academy of Science*, 34:163–167, 1962.
- [Jef62] O. D. Jefimenko. Demonstration of the electric fields of current-carrying conductors. *American Journal of Physics*, 30:19–21, 1962.
- [Jef66] O. D. Jefimenko. *Electricity and Magnetism*. Plenum, New York, 1966.
- [Jef89] O. D. Jefimenko. *Electricity and Magnetism*. Electret Scientific Company, Star City, 2 edition, 1989.
- [Kir49] G. Kirchhoff. Ueber eine Ableitung der Ohm’schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. *Annalen der Physik*, 78:506–513, 1849.
- [Kir50] G. Kirchhoff. On a deduction of Ohm’s law in connection with the theory of electrostatics. *Philosophical Magazine*, 37:463–468, 1850.
- [Kir57a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, 13:393–412, 1857.
- [Kir57b] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Drähten. *Annalen der Physik*, 100:193–217, 1857.
- [Kir57c] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der elektricität in Leitern. *Annalen der Physik*, 102:529–544, 1857.

- [LKT94] E. Ley-Koo and A. Góngora T. Desarrollo armónico del potencial de Coulomb en coordenadas toroidales. *Revista Mexicana de Física*, 40:805–813, 1994.
- [MF53] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume 2. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [MR68] M. A. Matzek and B. R. Russell. On the transverse electric field within a conductor carrying a steady current. *American Journal of Physics*, 36:905–907, 1968.
- [MS61] P. Moon and D. E. Spencer. *Field Theory for Engineers*. Van Nostrand, Princeton, 1961.
- [MS88] P. Moon and D. E. Spencer. *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 1988.
- [Par70] S. Parker. Electrostatics and current flow. *American Journal of Physics*, 38:720–723, 1970.
- [Pre00] N. W. Preyer. Surface charges and fields of simple circuits. *American Journal of Physics*, 68:1002–1006, 2000.
- [RG93] R. C. Ritter and G. T. Gillies. Torsion balances, torsion pendulums, and related devices. *Review of Scientific Instruments*, 64:283–309, 1993.
- [RMC82] J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 3ª edição, 1982.
- [Ros70] W. G. V. Rosser. Magnitudes of surface charge distributions associated with electric current flow. *American Journal of Physics*, 38:265–266, 1970.
- [Rus68] B. R. Russell. Surface charges on conductors carrying steady currents. *American Journal of Physics*, 36:527–529, 1968.
- [San85] R. Sansbury. Detection of a force between a charged metal foil and a current-carrying conductor. *Review of Scientific Instruments*, 56:415–417, 1985.
- [Sin93] A. K. Singal. The charge neutrality of a conductor carrying a steady current. *Physics Letters A*, 175:261–264, 1993.
- [Smy68] W. R. Smythe. *Static and Dynamic Electricity*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1968.
- [Smy89] W. R. Smythe. *Static and Dynamic Electricity*. Hemisphere, New York, 1989.
- [Sno54] C. Snow. *Formulas for computing capacitance and inductance*, volume 544. National Bureau of Standards Circular, 1954.
- [Som64] A. Sommerfeld. *Electrodynamics*. Academic Press, New York, 1964.
- [Web52] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 1:199–381, 1852. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 301–471.
- [Wes90] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part II. Unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters*, 3:581–605, 1990.

- [Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.
- [Whi73] E. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: The Classical Theories. Humanities Press, New York, 1973.
- [Whi88] C. K. Whitney. Current elements in relativistic field theory. *Physics Letters A*, 128:232–234, 1988.