

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese defendida pelo aluno  
Giancarlo Queiroz Pellegrino e  
aprovada pela comissão julgadora.

18 de dezembro de 1991

Hilda Cerdeira

## Estudo de caos em junções Josephson

Aluno: Giancarlo Q. Pellegrino  
Orientador: Prof. Hilda A. Cerdeira

UNIDADE IF  
N.º CHAMADA P:64e  
V. \_\_\_\_\_ EX \_\_\_\_\_  
TOMBO BC 15412  
PROC. 215/92  
C  D   
PREÇO ORR 20.000,00  
DATA 21-1-92  
N.º CPD \_\_\_\_\_

INSA N.º / N.  
TM/1997/IF64e

CM 000/9172-6

Tese apresentada no Instituto de  
Física "Gleb Wataghin" da  
Universidade Estadual de Campinas  
como parte dos requisitos  
necessários para obtenção do  
Título de Mestre em Física.

## Resumo

No trabalho faz-se um estudo do comportamento de junções Josephson sob ação de fontes de corrente externas. Este estudo é feito tendo em vista a possibilidade de comportamento caótico da junção, quando as fontes de corrente simulam pulsos de rápida duração. O tratamento, quântico e sem aproximações semiclássicas, incorpora elementos da Teoria de Informação e o uso de um algoritmo para tratar problemas envolvendo férmions, que se baseia no fechamento de uma álgebra de operadores sob a operação comutação com o hamiltoniano. A evolução temporal dos observáveis de interesse do problema (fase de Josephson  $\phi$  e sua derivada  $\dot{\phi}$ , corrente de Josephson  $I$  e sua derivada  $\dot{I}$ ) parece não apresentar comportamento caótico, na forma como este se mostra classicamente para o sistema junção Josephson.

## Agradecimentos

Agradeço a Hilda, por ter aceitado participar de uma troca que, de antemão, sabia-se desigual: tenho recebido mais do que posso oferecer.

Aos pequenos: Gabriela, Dante, Giovana, Cris, Augusto, Mateus, Marília e os que ainda virão; pela alegria que trazem a seus pais e a nós que habitamos as proximidades.

Aos amigos e companheiros de trabalho.

Este trabalho foi realizado sob auxílio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo qual agradeço francamente.

# Conteúdo

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Caos quântico?</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1      | Caos em sistemas clássicos . . . . .  | 3         |
| 1.1.1    | Sistemas hamiltonianos . . . . .  | 3         |
| 1.1.2    | Sistemas dissipativos . . . . .   | 4         |
| 1.1.3    | Métodos de análise . . . . .  | 5         |
| 1.2      | Caos em sistemas quânticos . . . . .  | 8         |
| 1.2.1    | Sistemas quânticos hamiltonianos . . . . .                                      | 9         |
| 1.2.2    | Sistemas quânticos dissipativos . . . . .                                       | 12        |
| 1.3      | Referências . . . . .   | 13        |
| <b>2</b> | <b>O problema e seu contexto</b>  | <b>16</b> |
| 2.1      | O problema . . . . .  | 16        |
| 2.1.1    | Junções Josephson como sistema modelo para estudar caos . . . . .               | 16        |
| 2.1.2    | Especificação do problema . . . . .   | 17        |
| 2.2      | ... e seu contexto . . . . .  | 18        |
| 2.2.1    | Caos em junções Josephson . . . . .   | 18        |
| 2.2.2    | Sistemas quânticos dependentes do tempo . . . . .                               | 20        |
| 2.2.3    | Sistemas quânticos dissipativos . . . . .                                       | 21        |
| <b>3</b> | <b>Tratamento do problema</b>   | <b>23</b> |
| 3.1      | Um hamiltoniano para o sistema . . . . .  | 24        |
| 3.2      | Eliminando operadores do reservatório . . . . .                                 | 26        |
| 3.2.1    | Elementos para uma expansão de $\mathbf{H}$ . . . . .                           | 27        |
| 3.2.2    | Expansão do hamiltoniano para o sistema junção Josephson-reservatório . . . . . | 28        |
| 3.3      | Junção Josephson sob ação de uma interação $g(O)$ “arbitrária”                  | 31        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.3.1    | Evolução temporal dos operadores entre pulsos . . .                     | 31        |
| 3.3.2    | Evolução temporal dos operadores sob ação do pulso<br>em $nT$ . . . . . | 35        |
| 3.3.3    | $\hat{\rho}(t_0)$ . . . . .   | 35        |
| <b>4</b> | <b>Aplicação</b>  | <b>39</b> |
| 4.1      | Mapa gerado por $g(O) = \mu O_6$ . . . . .                              | 40        |

# Capítulo 1

## Caos quântico?

A existência de sistemas clássicos caóticos, fartamente documentada, induz naturalmente a procura de sistemas quânticos caóticos<sup>1</sup>. Mais do que uma atitude induzida pela história ou pela suposta estrutura da teoria quântica, a procura por caos em sistemas quânticos tem seu interesse assegurado, por estar relacionada aos seguintes aspectos da mecânica quântica.

- *Fundamentação.* A existência de caos clássico, os métodos usados para caracterizá-lo e a procura de caos quântico, onde os métodos para tratar os problemas são outros, tocam diretamente a questão do princípio de correspondência e sua realização prática.
- *Generalidade da questão.* A existência de sistemas hamiltonianos *regulares* (ditos *integráveis* no vocabulário da mecânica clássica) é antes exceção do que regra. Realisticamente os sistemas *irregulares*, de comportamento complexo, são suficientemente freqüentes para merecerem atenção.
- *Aplicações.* O entendimento do comportamento de sistemas caóticos encontra um sem número de aplicações, dentre as quais pode-se citar: descrição de estados excitados de átomos e moléculas poliatômicas em campos externos, sobretudo do átomo de hidrogênio em campos

---

<sup>1</sup>O uso do adjetivo *caótico* para sistemas quânticos será algo livre, por enquanto. Mais adiante serão feitas observações e restrições a esse respeito.

com frequência de rádio, elétrons sobre a superfície de um metal num campo magnético, momento magnético num campo magnético oscilante, etc..

Antes de abordarmos a questão de sistemas quânticos caóticos, vejamos rapidamente como o problema é tratado na mecânica clássica. Passaremos, então, aos sistemas quânticos de posse de alguns resultados e indicadores para futuras comparações.

## 1.1 Caos em sistemas clássicos

Sistemas clássicos dividem-se, a grosso modo, em dois grandes blocos: sistemas hamiltonianos e sistemas dissipativos. Essa divisão, que se estendeu ao tratamento de sistemas caóticos e também à literatura que os aborda, deve-se aos conceitos e instrumental matemático utilizados, próprios de cada bloco.

### 1.1.1 Sistemas hamiltonianos

Os sistemas hamiltonianos[1] podem ser descritos pelas equações de movimento, de Hamilton:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1 \leq i \leq N), \quad (1.1)$$

onde  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  é a hamiltoniana do sistema e  $N$ , seu número de graus de liberdade. Para um dado sistema, a quantidade  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , função das variáveis dinâmicas, é dita constante de movimento ( $\frac{dF}{dt} = 0$ ), se  $\{F, H\} = 0$ , onde  $\{, \}$  são parênteses de Poisson. Se o sistema possui  $N$  constantes de movimento independentes  $F_i$  tais que  $\{F_i, F_j\} = 0$  para quaisquer  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , então o sistema é dito *integrável*. Neste caso a hamiltoniana do sistema pode ser escrita como função das variáveis conjugadas ação-ângulo  $(I_i, \theta_i)$ , na forma:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(I_1, I_2, \dots, I_N), \quad (1.2)$$

onde  $\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i}$  são as frequências características do movimento quasi-periódico<sup>2</sup> executado pelo sistema. O que determina a diferença entre movimento *regular* e *irregular* (caótico) é o número de constantes de movimento além da energia  $E$ : movimento completamente regular (quasiperiódico e estável) é próprio de sistemas integráveis. Em geral, os sistemas são não-integráveis e podem executar movimento regular (quasiperiódico) em determinadas regiões do espaço de fase, e caótico em outras regiões. Uma maneira de se distinguir o movimento caótico do regular baseia-se no fato de que aquele é extremamente sensível às condições iniciais; trajetórias inicialmente próximas,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , divergem exponencialmente no tempo:

$$\Delta(t) = |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| = e^{\lambda t} \Delta(t = 0), \quad (1.3)$$

independentemente de quão pequeno seja  $\Delta(t = 0)$ . O expoente de Lyapunov  $\lambda$ , marca desse tipo de instabilidade, torna-se assim um indicador: sistemas caóticos satisfazem a relação  $\lambda > 0$  nas regiões onde se observa caos.

De forma geral, os sistemas hamiltonianos conservativos não-integráveis têm apenas a energia  $E$  como constante de movimento. Assim, as trajetórias no espaço de fase estão restritas à superfície  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$  de dimensão  $2N - 1$ . Como são possíveis regiões de movimento regular e regiões de movimento caótico, pode ser interessante caracterizar o sistema segundo a fração  $\mu(E)$  da superfície  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$  que é ocupada por movimento caótico. Se  $\mu(E) = 1$ , o sistema é dito ergódico e uma trajetória típica preenche densamente a superfície de energia  $E$ .

## 1.1.2 Sistemas dissipativos

Ao contrário dos sistemas conservativos, os sistemas dissipativos[2] não têm a energia como constante de movimento. Além disso, as equações diferenciais que os descrevem não têm, em geral, a forma das equações de Hamilton.

Uma das características dos sistemas dissipativos é que, de uma forma genérica, eles não são descritos por hamiltonianas independentes do tempo;

---

<sup>2</sup>Para uma definição simples de função quasiperiódica, ver, por exemplo, a seção III.3.2 da ref. [2].

com isso, a evolução temporal desses sistemas não é reversível, como acontece com os sistemas hamiltonianos conservativos. Entretanto a característica principal é a contração de áreas no espaço de fase. Assim é que, dada uma energia inicial, a região do espaço de fase acessível às trajetórias do sistema dissipativo contrai-se até uma região final, que pode ser um ponto, um ciclo limite ou mesmo uma região finita desse espaço. Isto cria a noção de atratores para os sistemas dissipativos: dada uma energia inicial, as trajetórias no espaço de fase são atraídas para uma certa região que define o atrator.

Assim como os sistemas hamiltonianos, os sistemas dissipativos caóticos também são caracterizados por extrema sensibilidade às condições iniciais, o que se manifesta na divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas. Por conseguinte vale também para estes a definição de expoentes de Lyapunov.

A divergência de trajetórias, aliada à contração de áreas no espaço de fase, cria uma situação incômoda: as trajetórias divergem e ao mesmo tempo permanecem confinadas numa região finita. Apesar de ser aparentemente paradoxal, esta situação é possível, o que justifica o nome *atratores estranhos* para as correspondentes regiões no espaço de fase.

Dadas as características especiais dos sistemas dissipativos, foram classificadas seqüências especiais de fenômenos ou caminhos que levam ao caos nesses sistemas. São elas:

- i) transição para o caos a partir de movimento quasiperiódico;
- ii) cascata subarmônica de duplicação de períodos;
- iii) intermitência.

Finalmente vale dizer que, assim como podem coexistir regiões de movimento quasiperiódico e caótico no espaço de fase de sistemas hamiltonianos, os sistemas dissipativos podem apresentar janelas de periodicidade dentro de regiões caóticas. A distinção aqui é que não são regiões no espaço de fase que definem essas janelas, mas intervalos dos valores dos parâmetros que comparecem às equações de movimento do sistema.

### 1.1.3 Métodos de análise

A evolução temporal de sistemas clássicos, hamiltonianos ou dissipativos, pode ser descrita pelo conjunto de equações que definem o sistema dinâmico em questão,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.4)$$

um sistema de  $2N$  equações em  $R^{2N}$ , cuja solução  $x(x_0, t)$  satisfaz (1.4) e as condições iniciais  $x(x_0, t = 0) = x_0$ . De modo geral, sistemas do tipo (1.4) não são integráveis analiticamente. Entretanto integração numérica deve ser sempre possível, em princípio; sendo a maneira mais comum de se conhecer as soluções para o movimento. Este modo de ataque ao problema fornece soluções  $x(x_0, t)$  em forma de mapas do tipo

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad (1.5)$$

onde  $x(t)$  é conhecido em tempos espaçados de algum intervalo  $\Delta t$ , escolhido para se fazer a integração. O resultado é que a descrição se faz na forma de uma série temporal  $\{x_n\}$  que caracteriza o movimento.

Dentro desse contexto, alguns métodos de análise da evolução temporal de sistemas dinâmicos clássicos tornaram-se suficientemente poderosos para merecerem atenção especial, quando se procura a caracterização de sistemas caóticos[2].

**Análise de Fourier.** As técnicas de análise de séries temporais  $\{x_n\}$ , usando componentes de Fourier, são bastante conhecidas e fornecem um critério para identificação de sistemas caóticos, que é suficientemente simples para tornar interessante sua utilização: sistemas (quasi)periódicos apresentam espectro de Fourier com picos bem definidos para suas frequências características e combinações delas, enquanto sistemas aperiódicos apresentam espectro de Fourier com bandas contínuas; além disso, as autocorrelações de sistemas caóticos tendem a zero para tempos suficientemente grandes. A limitação desse método está no fato de que a análise de Fourier não distingue se a aperiodicidade provém de caos ou de ruído, sendo necessário um passo a mais no tratamento dos resultados. Neste caso o cálculo do expoente de correlação permite fazer a distinção que a análise de Fourier não consegue. Para tanto, pode-se usar o método descrito por P. Grassberger e I. Procaccia[3], aplicado às séries aperiódicas  $\{x_n\}$  previamente selecionadas através do uso do critério esboçado acima.

**Mapas e Seções de Poincaré[2,4].** Como foi apresentado nas seções 1.1.1 e 1.1.2, as trajetórias no espaço de fase descritas pelas soluções dos

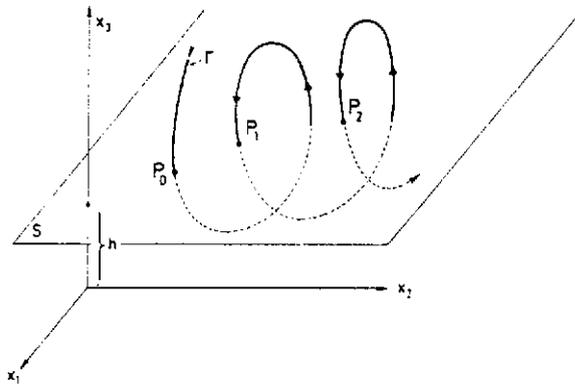


Figura 1.1: Seção de Poincaré em  $R^3$

sistemas hamiltonianos e dissipativos — de forma mais geral, soluções do sistema dinâmico (1.4) — podem ser bastante complexas. Primeiramente pela possível coexistência de regiões em que há movimento (quasi)periódico e regiões densamente preenchidas por trajetórias caóticas, no caso dos sistemas hamiltonianos; e pela presença de estruturas como atratores estranhos no caso dos sistemas dissipativos. Em segundo lugar, pela impossibilidade de visualização dessas trajetórias no caso em que o sistema tem muitos graus de liberdade. Uma maneira bastante eficiente de se reduzir o grau de complexidade das soluções é concentrar a atenção em subespaços do espaço  $R^{2N}$ , onde evolue o sistema dinâmico. Isto é feito em duas etapas. Inicialmente toma-se uma superfície  $S$  de  $R^{2N}$ , escolhida convenientemente de modo que seja sempre transversal ao fluxo associado ao campo vetorial  $f(\mathbf{x}, t)$  do sistema (1.4) e do qual a solução  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  faz parte; desta forma  $S$  tem dimensão  $2N - 1$ .

Sobre esta superfície, chamada superfície de Poincaré, considera-se apenas os pontos definidos pela intersecção da solução  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  com  $S$ , quando a intersecção se dá numa direção previamente escolhida. Assim tem-se um conjunto de pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , constituindo uma seção da superfície  $S$ , a seção de Poincaré associada à solução  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  do sistema dinâmico (1.4). A figura 1.1 mostra uma seção no espaço  $R^3$ .

Devido à unicidade da solução  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  do sistema dinâmico, uma vez dada a condição inicial  $\mathbf{x}_0$ , tem-se que  $P_0$  determina completamente  $P_1$ . Este por sua vez determina completamente  $P_2$  e assim por diante. Com

isso define-se um mapa  $T : S \rightarrow S$  pela regra

$$T(P_k) = P_{k+1} \quad (1.6)$$

que é conhecido como mapa de Poincaré.

Estes dois objetos, o mapa e a seção de Poincaré, são bastante úteis na análise de sistemas dinâmicos hamiltonianos ou dissipativos. Uma das vantagens provém do fato de estarmos trabalhando num espaço de dimensão menor do que a do original, o que simplifica as representações gráficas do movimento, por exemplo. Outra baseia-se na própria construção da seção e mapa de Poincaré: eles conservam propriedades gerais da topologia do fluxo a partir do qual são construídos. Por exemplo, conservação ou contração de volumes no espaço de fase de sistemas conservativos e dissipativos respectivamente são reproduzidas na seção. As estruturas de eventuais atratores de sistemas dissipativos também continuam presentes.

Assim, apesar de não descreverem continuamente o movimento, estas seções e mapas guardam informação suficiente sobre o sistema para permitirem, em muitos casos, a visualização da estrutura das regiões do espaço de fase ocupadas pelas soluções do sistema dinâmico em questão.

## 1.2 Caos em sistemas quânticos

Ao se tratar de sistemas quânticos, perde-se a noção de trajetória no espaço de fase. Com isso, a principal característica de sistemas clássicos caóticos, sensibilidade às condições iniciais, deixa de ser válida e, por extensão, o uso de indicadores como o expoente de Lyapunov  $\lambda$  e a medida  $\mu(E)$ . Se estamos nos guiando pelo princípio de correspondência e tentamos verificar, dentro da mecânica quântica, a manifestação de algo que já temos classicamente, trata-se, então, de: primeiramente encontrar resultados que nos permitam afirmar a existência de caos (ou alguma manifestação correlata) em sistemas quânticos; em segundo lugar, de estabelecer critérios substitutivos que nos permitam distinguir um sistema quântico caótico de um sistema quântico regular.

Os resultados, obtidos em sua grande maioria de cálculos numéricos envolvendo simulações de sistemas dinâmicos, indicam a inexistência de caos em sistemas quânticos. A sugestão dos resultados é tão forte, que tem sido tomada como sendo de natureza fundamental. A razão para a

ausência de caos em sistemas quânticos deve provir da idéia de que, usando a descrição da mecânica quântica, não há sentido em se falar de valores menores do que  $\hbar$ . Tais cálculos numéricos revelam, entretanto, uma rica variedade de características comuns aos sistemas quânticos cujos análogos clássicos são caóticos. A situação é algo curiosa: “um assunto que não existe, inspirando a descoberta de novos aspectos da mecânica quântica” [5]. Observa-se assim, que os objetivos esboçados no final do parágrafo anterior têm suas realizações frustradas já de início. Dentro desse contexto, a maioria dos pesquisadores da área passou a se referir à expressão estudo de *caos quântico* como sendo o *estudo das manifestações de natureza quântica (ou semiclássica), características de sistemas cujos correspondentes clássicos exibem caos* [1,5,6]. Ora, a aceitação da ausência de caos em sistemas quânticos e mesmo de uma razão que a fundamente —  $\hbar$  finito e não nulo — não encerra o assunto, pois coloca a “irritante questão sobre a razão pela qual a teoria geral (mecânica quântica) prediz estabilidade, enquanto a sub-teoria (mecânica clássica) mostra movimento estocástico” [7]. Ou, tentando tornar um pouco mais precisa a questão: Levando-se em conta as descrições clássica e quântica, qual o mecanismo de supressão de caos na passagem mecânica clássica  $\leftrightarrow$  mecânica quântica? Alguns modelos têm sido propostos na tentativa de responder esta questão, mas não há, ainda, uma teoria analítica geral sobre o assunto.

Nas seções seguintes, veremos alguns aspectos e resultados do que tem sido pesquisado com relação a caos quântico.

### 1.2.1 Sistemas quânticos hamiltonianos

Como conseqüência da perda de utilidade dos indicadores usados para sistemas clássicos ( $\lambda$  e  $\mu(E)$ ) e da supressão de caos em sistemas quânticos, surgiu uma variedade de critérios aplicáveis segundo o sistema e a propriedade estudada.

**Sistemas conservativos.** Sistemas quânticos com hamiltoniano independente do tempo e limitados espacialmente têm espectro de energia discreto e, para escalas de tempo bastante grandes, têm movimento quasiperiódico (regular). Por outro lado, seus análogos clássicos podem exibir caos. Assim é “natural” que a atenção seja voltada para o meio termo, o que se faz utilizando-se escalas de tempo suficientemente pequenas e/ou energias

suficientemente grandes para que o espectro pareça contínuo. Em outras palavras, deve-se observar o sistema quântico, com análogo clássico caótico, no limite semiclássico. Em termos de alguma quantidade característica, isto significa tomar o limite  $\hbar \rightarrow 0$ , mas  $\hbar \neq 0$ . De fato, a natureza do sistema no regime clássico afeta fortemente suas propriedades no regime semiclássico. Sobre essas propriedades de sistemas quânticos no limite semiclássico é que se estabeleceram critérios para distinção entre sistemas caóticos<sup>3</sup> e regulares.

*Espectro de energia*[1,6,8]. Dentre outras propriedades (repulsão de níveis, rigidez espectral, etc.) destaca-se aquela que se refere à distribuição do espaçamento  $S$  entre níveis vizinhos. A probabilidade  $P(S)$  de se encontrar dois níveis vizinhos, com diferença de energia  $S$  entre os níveis, parece obedecer ao seguinte critério:

i) se o sistema clássico for regular,  $P(S)$  obedecerá à distribuição de Poisson;

ii) se o sistema clássico for caótico,  $P(S)$  obedecerá à distribuição GOE (ou GUE) da teoria das matrizes aleatórias. A distinção entre GOE (ensemble de matrizes gaussianas ortogonais) e GUE (ensemble de matrizes gaussianas unitárias) faz-se conforme o sistema seja invariante sob reversão temporal (GOE) ou não (GUE).

As curvas da figura 1.2 mostram como se distribuem os níveis na região semiclássica[6]. Note-se que, nos casos GOE e GUE,  $P(S)$  vai a zero quando  $S$  vai a zero, indicando repulsão entre níveis adjacentes.

*Função de onda de estados estacionários*[1,6]. O estudo das funções de onda de estados estacionários de sistemas quânticos proporcionou um critério que, de modo superficial e sem rigor, poderia ser apresentado como: funções de onda de sistemas cujos correspondentes clássicos são caóticos, quando expandidas em termos das autofunções do hamiltoniano, tendem a apresentar contribuições apreciáveis de grande número destas autofunções; para sistemas regulares, ao contrário, as funções de onda tendem a se “localizar” sobre um conjunto finito de autofunções com contribuição apreciável para a expansão.

---

<sup>3</sup>Segundo a redefinição de *caos quântico* apresentada anteriormente

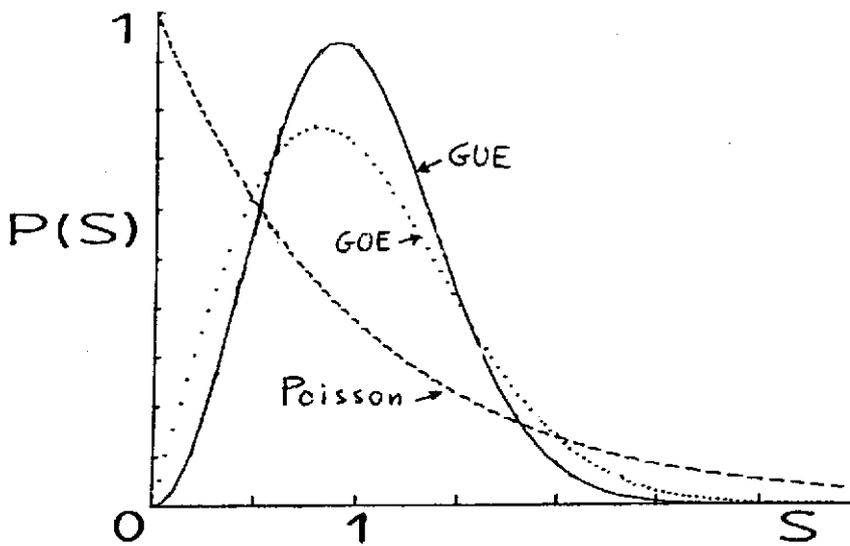


Figura 1.2: Distribuições do espaçamento  $S$  entre níveis de energia adjacentes no limite semiclássico.

*Problemas com os critérios*[1,6]. Os critérios esboçados apresentam, todos, problemas gerais e também relativos aos conceitos e métodos utilizados em cada caso. De forma geral, há as seguintes dificuldades, entre outras:

- i) os critérios são aplicáveis apenas à região semiclássica;
- ii) tem se difundido a impressão de que, apesar de estarem fortemente ligadas aos sistemas caóticos, as propriedades usadas para fazer a distinção regular  $\neq$  caótico não servem para tanto. De maneira geral, elas parecem ser características necessárias de sistemas caóticos, mas não são suficientes para defini-los como tais[9];
- iii) há sempre os incômodos contra-exemplos para cada critério que se apresenta[1].

**Sistemas dependentes do tempo**[10]. Os sistemas quânticos com hamiltoniano dependente do tempo serão abordados com algum detalhe no capítulo 2. Entretanto como este tipo de sistema tem propiciado com vantagem a proposição de um mecanismo de supressão de caos em sistemas quânticos, vamos adiantar algumas de suas características. Grande parte do estudo de sistemas dependentes do tempo refere-se a sistemas forçados periodicamente, cujo hamiltoniano escreve-se como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}f(t), \quad (1.7)$$

onde  $\mathbf{H}_0$  é a parte conservativa,  $\mathbf{V}$  não depende do tempo e  $f(t)$  é periódica:

$f(t + T) = f(t)$ . A atenção sobre sistemas do tipo descrito pela eq. (1.7) deve-se, em grande parte, ao fato de que os sistemas forçados periodicamente são tradicionalmente boas fontes de estudo de caos clássico. Para hamiltonianos do tipo (1.7), estuda-se o espectro de quasienergias, em vista de sua periodicidade; desse estudo resulta que este espectro também é discreto e o movimento, quasiperiódico, como no caso de sistemas conservativos. Há, todavia, algumas indicações de possibilidade de ocorrência de movimento aperiódico; situação que somente será resolvida estendendo-se as investigações a respeito. Até aqui, nada de novo com relação à inexistência de caos em sistemas quânticos. Ocorre que hamiltonianos como (1.7) permitem a derivação de um mecanismo de supressão de caos que atua de forma análoga à localização de Anderson de elétrons em sólidos desordenados. Isto — além da possibilidade de movimento aperiódico — torna interessante o estudo de sistemas dependentes do tempo e em especial dos sistemas forçados periodicamente.

## 1.2.2 Sistemas quânticos dissipativos

Rigorosamente falando, os sistemas dissipativos são dependentes do tempo, já que a energia não se conserva nestes casos. Evidentemente, para que o movimento não se extinga<sup>4</sup>, há que se ter uma força externa agindo sobre o sistema para lhe fornecer energia. Esta combinação de dissipação com termo forçante pode unir o estudo de sistemas dissipativos ao de sistemas hamiltonianos descritos por (1.7)[11]. Como um tratamento deste tipo está fora dos objetivos deste texto, daremos nesta seção uma idéia geral de como se pode tratar o problema da dissipação, e o que resulta desse tratamento. Uma das maneiras mais utilizadas para tratar sistemas dissipativos é tomar o mesmo sistema sem dissipação e escrever um hamiltoniano para a parte conservativa. A seguir a dissipação é introduzida acoplando-se o sistema a um reservatório de osciladores que absorverá energia do sistema, de forma a reproduzir os efeitos dissipativos. Esse modo de atacar o problema[12] pode ser resumido escrevendo-se um hamiltoniano do tipo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{V}, \quad (1.8)$$

---

<sup>4</sup>Classicamente o atrator seria um ponto no espaço de fase, significando que o sistema estaria em estado de repouso.

onde  $H_0$  descreve a parte conservativa,  $R$  é o hamiltoniano para o reservatório e  $V$  dá conta das interações entre sistema e reservatório. Nestes casos é útil usar o operador densidade para descrever o sistema, o que se torna interessante, já que permite que as coordenadas relativas ao reservatório sejam eliminadas do problema, tomando-se médias sobre o reservatório somente. O tratamento desse operador densidade reduzido é feito, então, através da análise de sua equação de movimento.

Aqui também cabe a pergunta sobre um mecanismo de supressão de caos em sistemas quânticos e estudos têm sido feitos recentemente que tocam este ponto de forma a recuperar algumas noções dos sistemas clássicos caóticos, especificamente atratores estranhos[11] e coeficientes de Lyapunov[13] de sistemas quânticos dissipativos.

### 1.3 Referências

Têm sido publicados artigos de revisão mais ou menos completos sobre assunto caos quântico.

*Sistemas hamiltonianos* têm pelo menos três revisões recentes, por P. V. Elyutin[1], A. Voros[6] e B. Eckhardt[14]. O artigo de Eckhardt é tido como bastante completo[6], traz uma extensa bibliografia cobrindo até o ano de 1987, mas trata apenas de sistemas conservativos. A revisão feita por Elyutin é também bastante extensa, cobrindo a literatura até junho de 1986. Diferentemente de Eckhardt, Elyutin guia-se pela distinção entre sistemas autônomos (independentes do tempo) e não-autônomos (dependentes do tempo), cobrindo ambas as partes. É uma revisão bastante ampla e crítica, apresentando muitos critérios para caracterização de caos quântico, bem como suas contradições, falhas e também vantagens. De uma forma geral, antes de apresentarem o seu principal objeto de estudo — caos quântico — todos eles fazem uma pequena revisão de sistemas clássicos.

No que se refere aos *sistemas dissipativos* pode-se citar o livro de P. Bergé, Y. Pomeau e C. Vidal[2] para os sistemas clássicos. É uma introdução acessível e mesmo intuitiva dos conceitos básicos utilizados para aqueles sistemas, fornecendo descrições e exemplos dos caminhos que levam ao caos. Além disso, o livro serve como ferramenta útil de trabalho no estudo de sistemas dissipativos. Para sistemas quânticos, há artigos de revisão por Ackerhalt *et al.* e T. Dittrich e R. Graham[11], além de artigos específicos

espalhados pela literatura e que serão citados oportunamente.

A propósito, em vista do problema que abordaremos e do que será visto mais adiante, as referências indicadas nos parágrafos anteriores cobrem também boa parte do assunto de que trataremos no próximo capítulo.

\* \* \*

Num quadro geral formado a partir da literatura publicada sobre caos quântico, um aspecto seria notado qualquer que fosse o ponto observado: a necessidade premente de resultados experimentais. Até pouco tempo atrás, eles pareciam provir, principalmente, de experimentos com ionização de átomos e moléculas, e estados excitados de átomos e moléculas em campos eletromagnéticos. Espera-se que estas fontes se diversifiquem com as possibilidades oferecidas pela óptica quântica não-linear (masers e lasers), eletrônica quântica (junções Josephson), dinâmica das reações químicas, etc.. A quase totalidade da grande massa de dados que se encontra hoje provém de simulações numéricas. Se, por um lado, estas simulações são completas o bastante para caracterizarem em detalhe os sistemas simulados; por outro, elas não se fazem acompanhar por modelos teóricos suficientemente abrangentes para tratá-las em conjunto. Os modelos propostos até o momento fornecem resultados apenas qualitativos — no máximo semiquantitativos — a respeito das propriedades de sistemas quânticos cujos correspondentes clássicos são caóticos. Daí a importância do experimento, descartando proposições falhas, fundamentando as acertadas, lançando novas questões.

Portanto no que se refere ao estabelecimento de uma teoria geral sobre sistemas quânticos caóticos, o problema continua sem solução. É neste contexto que se insere o trabalho que realizamos e que será descrito nos próximos capítulos. Os objetivos deste trabalho serão detalhados futuramente, mas podemos adiantar sua idéia geral. Superficialmente falando, iremos abordar, a partir de uma formulação hamiltoniana e sem aproximações semiclássicas, o sistema constituído por uma junção Josephson[15], acoplada a um reservatório de elétrons, sobre a qual age um termo forçante periódico. Junções Josephson têm se revelado um interessante objeto de estudo, não apenas pelos resultados que têm fornecido, mas também pela

possibilidade de implementação prática de experimentos envolvendo estes dispositivos. Espera-se que os resultados a serem apresentados possam contribuir para uma melhor caracterização e compreensão do quadro geral em que se insere este projeto.

# Capítulo 2

## O problema e seu contexto

Neste capítulo iremos especificar o problema de que trataremos e caracterizar o contexto em que ele se insere.

### 2.1 O problema . . .

#### 2.1.1 Junções Josephson como sistema modelo para estudar caos

Em um artigo de revisão de 1982, M. R. Beasley e B. A. Huberman[16] se perguntam se o comportamento caótico seria lugar comum entre sistemas da matéria condensada, dado o crescente número de indicações a esse respeito. Apesar da resposta incerta, os autores vêem a junção Josephson como forte candidato a apresentar comportamento caótico. Ainda mais: como sistema a servir de modelo no estudo do caos em geral. De fato, este sistema apresenta boas características para tanto: poucos graus de liberdade, dissipação — controlável — e forte não-linearidade. Não bastassem essas características, há o fato de que o efeito Josephson é um efeito quântico de manifestação macroscópica, já que a fase de Josephson, que caracteriza cada supercondutor da junção, é, ela mesma, um observável físico<sup>1</sup>. Somando-se às qualidades descritas, há também o aspecto prático da questão, que é bastante favorável. Isto devido ao *know how* adquirido pelos físicos experimentais na confecção e manipulação de junções Joseph-

---

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, o artigo de J. Clarke, ref. [15]

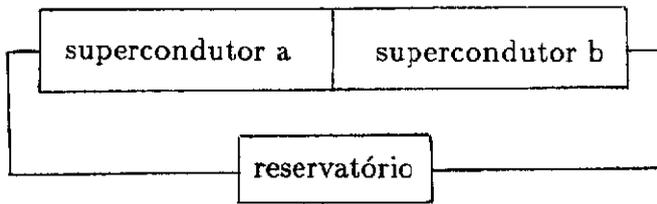


Figura 2.1: Modelo para o sistema junção Josephson sob ação de forças externas.

son; a ponto de se poder fabricar junções suficientemente pequenas para detecção e estudo de flutuações quânticas[17]. Num aspecto um pouco mais geral, estas junções têm seu estudo intimamente ligado ao estudo de pêndulos forçados periodicamente. A ligação é imediata se se observa a eq. (2.3), resultante de um dos modelos mais utilizados para o estudo de caos em junções Josephson. Na seção 2.2.1 faremos uma breve revisão dos estudos e resultados envolvendo caos em junções Josephson e veremos como a sugestão de Beasley e Huberman tinha sua razão de ser.

## 2.1.2 Especificação do problema

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do comportamento de uma junção Josephson forçada periodicamente. O termo forçante externo, que vai nos interessar, é descrito por uma série de funções  $\delta$  e será escrito como

$$\mathbf{H}^t = \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{V}$  não depende explicitamente do tempo. Num arranjo experimental, este termo poderia simular uma fonte de corrente obtida através de uma série de pulsos de rápida duração<sup>2</sup>.

A abordagem inicial do problema far-se-á através do modelo descrito pela figura 2.1. Tal modelo envolve uma junção acoplada a um reservatório de elétrons. O reservatório atuará como fornecedor e receptor de elétrons, podendo simular um termo forçante externo (uma fonte de corrente ou tensão). A idéia é estudar a possibilidade de comportamento

<sup>2</sup>Ver, por exemplo, o artigo de Sobolewski *et al.* relacionado na ref. [20].

caótico da junção sob ação de potenciais do tipo (2.1). Usaremos para isso uma formulação hamiltoniana em que o sistema todo será descrito pela soma de um termo conservativo e outro dependente do tempo; será algo do tipo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{V}$  é independente do tempo. A forma específica do hamiltoniano e o tratamento desenvolvido serão detalhados ao longo do capítulo 3. Para o que pretendemos neste capítulo, basta-nos adiantar que o tratamento — quântico — não incorporará aproximações semiclássicas, e que nosso interesse estará centrado em observáveis diferentes da energia; observaremos sobretudo o comportamento da diferença de fases  $\phi$  e da corrente de Josephson através da junção.

Este problema remete-nos não apenas aos estudos de caos em junções Josephson, mas também ao estudo de caos em sistemas quânticos forçados periodicamente e em sistemas quânticos dissipativos.

## 2.2 ... e seu contexto

Dadas as características do problema, vamos rever os resultados que têm sido obtidos a seu respeito. Esta revisão — rápida — constará de duas partes: a primeira sobre o estudo de caos em junções Josephson e a segunda, sobre os resultados a respeito de sistemas dissipativos e/ou forçados periodicamente. Com estas, poderemos estabelecer algumas diferenças entre nosso problema e o que tem sido feito até o momento. Além disso, dessas revisões poderemos obter idéias para o tratamento do nosso problema e sugestões sobre os resultados que deveremos esperar. Não é demais enfatizar que não se tratará de analisar os modelos citados, mas apenas de colher resultados que forneçam indicações para nosso caso; daí a superficialidade da exposição.

### 2.2.1 Caos em junções Josephson

Junções Josephson têm sido objeto de intenso estudo desde a predição de seus efeitos por B. D. Josephson[15] em 1962. Durante a década de 60, grande parte desse estudo concentrou-se na proposição de modelos que

pudessem testar as previsões feitas. Um modelo particularmente simples foi proposto e estudado por Stewart e McCumber[18] em 1968, onde a junção era simulada por um circuito elétrico equivalente, contendo uma resistência  $R$  e um capacitor  $C$ . Apesar de ser assumidamente fenomenológico e não descrever completamente o comportamento de junções Josephson, o modelo oferecia uma equação diferencial para a evolução temporal da diferença de fases  $\phi$  através da junção, que apresentava resultados qualitativos bastante bons:

$$\beta \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau} + \sin\phi = i_0 + i_1 \sin\Omega\tau, \quad (2.3)$$

onde  $\beta = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}$ ,  $\Omega = \omega\left(\frac{\hbar}{2eI_c R}\right)$ ,  $\tau = t\left(\frac{2eI_c}{\hbar}\right)$ ,  $i_0 = \frac{I_0}{I_c}$ ,  $i_1 = \frac{I_1}{I_c}$ ;  $e$  é a carga do elétron,  $I_c$  é a corrente crítica da junção e  $I_0$  e  $I_1$  são as componentes dc e ac da fonte de corrente<sup>3</sup>.

Em 1980 Huberman *et al.*[19] usaram o modelo de Stewart-McCumber para tentar explicar resultados experimentais da época, que envolviam a presença de ruído. Estes fenômenos eram usualmente associados a flutuações térmicas, mas os autores sugeriram a presença de soluções caóticas na dinâmica da junção. Desse momento em diante foram publicados vários estudos[20], confirmando a sugestão de Huberman *et al.* e caracterizando as regiões dos parâmetros da equação segundo as soluções. Os resultados mostravam a presença de regiões em que se observava comportamento caótico, notadamente dos tipos intermitente ou precedido por duplicação de períodos. Invariavelmente os estudos acima basearam-se no modelo de Stewart-McCumber, devido à sua simplicidade e adequação de resultados.

Ocorre que junções Josephson são sistemas quânticos dissipativos e o tratamento desse tipo de sistema envolve, em geral, seu acoplamento a um reservatório térmico. Este acoplamento traz consigo a idéia de flutuações quânticas, que devem ser levadas em consideração. Em artigos publicados em 1986 e 1987, K. Hida[17] argumentou que o modelo de Stewart-McCumber usado anteriormente descreve *classicamente* o problema e, se se quisesse levar em conta os efeitos quânticos das flutuações, haveria que se utilizar de uma outra equação. Hida usou uma equação de Langevin quântica, parecida com a eq. (2.3), mas contendo um termo de força randômico que representa a influência de flutuações quânticas do banho

<sup>3</sup>Esta equação aparece em formas variadas nas publicações sobre junções Josephson, mas as variações são feitas, em geral, para adequar os parâmetros ao problema tratado.

térmico e que não se anula à temperatura zero:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \eta \frac{d\phi}{dt} + \sin\phi = A \sin \Omega t + \xi(t), \quad (2.4)$$

onde  $t$  é o tempo, normalizado pela frequência de plasma  $\omega_{pl}$  da junção;  $\eta$  é a constante de amortecimento;  $A$  é a amplitude da corrente, normalizada pela corrente crítica  $I_c$ ;  $\Omega$ , a frequência da corrente externa normalizada por  $\omega_{pl}$ ;  $\omega_{pl} = \frac{2eI_c}{\hbar C}$  e  $\eta = \frac{1}{RC\omega_{pl}}$ . Hida estudou o problema em regime *semiclássico* e os resultados indicaram que o comportamento caótico, antes presente, é suprimido sensivelmente pela ação das flutuações quânticas.

## 2.2.2 Sistemas quânticos dependentes do tempo

A maior parte dos estudos envolvendo sistemas quânticos dependentes do tempo trata de sistemas hamiltonianos com interações periódicas, tendo um exemplo já bastante conhecido no rotor quântico forçado periodicamente. Aqui também, vamos nos ater a esse tipo de problema, já que, de fato, é o que vai nos interessar. Sobre hamiltonianos periódicos no tempo, há dois tipos de estudos particularmente interessantes para o nosso caso.

O teorema de Hogg-Huberman[21] que prevê a recorrência da autofunção e da energia para sistemas de espectro de energia discreto e com interações periódicas. A prova do teorema foge do escopo deste texto e pode ser encontrada em detalhe na ref. [21]. O que nos interessa aqui é o resultado sobre a energia. A limitação e recorrência da energia a seus valores iniciais prevê ausência de caos em sistemas quânticos (de espectro discreto) com interações periódicas, o que contrasta com a situação de sistemas clássicos caóticos do mesmo tipo, onde a energia apresenta crescimento difusivo[22]. Apesar de não satisfazerem rigorosamente as condições do teorema, potenciais expressados como séries de funções  $\delta$  foram estudados pelos autores e os resultados sugerem que o teorema pode ter validade mais geral e aplicar-se também a estes casos. Se for assim, sistemas quânticos com interações do tipo

$$\mathbf{H}' = \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (2.5)$$

com  $\mathbf{V}$  independente do tempo, não deverão apresentar comportamento caótico.

*Relação com o modelo de localização, de Anderson*[22]. O estudo da dinâmica de sistemas quânticos com interação periódica permitiu uma interessante ligação do problema da supressão de caos com um dos modelos usados para descrever o comportamento de elétrons em sólidos desordenados. Para sistemas com interações periódicas este modelo propiciaria um mecanismo para a supressão de caos; como no caso do teorema de Hogg-Huberman, não haveria caos nestes sistemas.

### 2.2.3 Sistemas quânticos dissipativos

No que se refere a comportamento caótico, os sistemas quânticos dissipativos não proporcionam situação mais clara que a anterior. Os estudos de R. Graham e seus colaboradores[11,23] têm como ponto de partida, sistemas que no limite clássico apresentam comportamento caótico. Esses sistemas são quantizados e a dissipação é tratada via reservatório, como foi descrito no capítulo 1. Já o trabalho de Cerdeira *et al.*[13] tenta a definição de coeficientes de Lyapunov para uma classe de sistemas quânticos dissipativos fazendo uso de "suspensões" do mapa de Hénon. Não vamos detalhar os trabalhos citados; eles são apresentados aqui para constar como sugestões de métodos alternativos para atacar o problema que estudaremos.

\* \* \*

A descrição do problema e a pequena revisão feitas neste capítulo permitem algumas comparações e o estabelecimento de diferenças entre nossa abordagem do problema e os estudos feitos anteriormente. Essas diferenças referem-se, sobretudo, ao modo de tratar o problema e podem ser simbolizadas pelos binômios que seguem.

*Clássico-quântico.* Como argumentou Hida[17], os trabalhos baseados no modelo de Stewart-McCumber fornecem uma descrição (fenomenológica) clássica das junções Josephson. O próprio autor adverte que usa uma equação que incorpora efeitos quânticos, mas é estudada em regime semiclássico. No nosso caso tentaremos um tratamento quântico sem fazer-

mos uso de aproximações semiclássicas.

*Energia-outros observáveis.* Vamos usar uma formulação hamiltoniana para o problema, mas diferentemente dos estudos com sistemas hamiltonianos, concentraremos nossa atenção em outros observáveis que não a energia. Isto será feito com o uso de procedimentos da Teoria de Informação, conforme detalharemos no capítulo 3. Observaremos principalmente o comportamento da diferença de fases de Josephson através da junção, o que nos aproxima dos trabalhos que fazem uso do modelo de Stewart-McCumber.

Apesar de diferirem nos pontos acima, os trabalhos revisados neste capítulo podem servir de indicadores para o tratamento e resultados esperados no nosso caso. Há uma grande variedade de resultados “positivos” sobre caos em junções Josephson, obtidos tratando-se o problema sob as mais variadas condições. Nestes casos, porém, é invariável o uso de um modelo clássico e, quando aspectos quânticos são considerados, o comportamento caótico parece ser suprimido. O problema de que trataremos compreende interações periódicas descritas por séries de funções  $\delta$ . Com a sugestão advinda do teorema de Hogg-Huberman, este caso pareceria estar entre os que não apresentam comportamento caótico. Em contraposição, nosso hamiltoniano parece pertencer à classe de hamiltonianos estudados por Cerdeira *et al.*[13], sob cujo tratamento, coeficientes de Lyapunov de valor positivo talvez possam ser obtidos. Nestas condições — contrastantes — somente o prosseguimento das investigações pode esclarecer um pouco a situação. Além destes aspectos, os resultados e métodos de Graham[23] e Cerdeira *et al.*[13] poderiam ser usados num tratamento diverso do que faremos, podendo servir de teste uns aos outros.

# Capítulo 3

## Tratamento do problema

Neste capítulo vamos estudar a dinâmica do sistema através da obtenção e caracterização dos mapas gerados para os observáveis de nosso interesse. Os mapas, que serão gerados pelo modelo que adotaremos, apresentam-se na forma geral

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \quad (3.1)$$

e, uma vez obtidos, podem ser vistos e analisados segundo os valores dos parâmetros envolvidos, de maneira idêntica à que se faz com mapas como os de Hénon, Lorenz, etc.. O tratamento será feito em várias passagens, que serão esboçadas a seguir. Dessa forma teremos um pequeno roteiro para nos guiarmos, sem perdermos de vista o objetivo final. São elas:

*i) proposição de um hamiltoniano para sistema junção-reservatório.* Escreveremos o hamiltoniano do sistema como

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{R} + \mathbf{H}', \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{H}_J$  é o hamiltoniano para a junção,  $\mathbf{R}$ , para o reservatório e  $\mathbf{H}'$  dá conta das interações da junção com o reservatório. Este último é justamente o correspondente ao termo forçante externo, conforme foi apresentado no capítulo 2.  $\mathbf{H}_J$  será escrito como

$$\mathbf{H}_J = \sum_{i=1}^r c_i \mathbf{O}_i, \quad (3.3)$$

em que os coeficientes  $c_i$  serão reais, e os  $\mathbf{O}_i$  são operadores a serem definidos;

ii) *eliminação dos operadores de  $\mathbf{H}$  referentes aos elétrons normais do reservatório.* Usando procedimentos da teoria de perturbações, iremos estudar o efeito das interações, com  $\mathbf{H}'$  escrito como função dos  $\mathbf{O}_i$  somente. Veremos que uma expansão do hamiltoniano conterà combinações dos  $\mathbf{O}_i$  de todos os tipos, lineares e não lineares:

iii) *estudo da influência de uma função  $g(O)$  arbitrária.* Como aparecerão diferentes combinações dos operadores de  $\mathbf{H}_J$ , vamos tomar o caso em que o efeito das interações é descrito por

$$\mathbf{H}_{int} = \mu g(O) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (3.4)$$

onde  $g$  é uma função até certo ponto arbitrária do conjunto  $O = \{\mathbf{O}_i\}_{i=1}^r$  dos operadores de  $\mathbf{H}_J$ . Este estudo será baseado na relação para o valor médio de um operador, dada por

$$\langle \mathbf{O}(t) \rangle = Tr(\hat{\rho}(t_0)\mathbf{O}(t)), \quad (3.5)$$

onde  $\hat{\rho}$  é o operador densidade do sistema. Para isso necessitaremos de

iii.1) *cálculo de  $\hat{\rho}(t_0)$ ;*

iii.2) *cálculo da evolução temporal do operador  $\mathbf{O}$ .*

Com os passos esboçados em i)–iii.2) teremos a evolução dos valores médios de cada  $\mathbf{O}_i$  presente em  $\mathbf{H}_J$ . De posse desses valores poderemos escrever expressões para a diferença de fases  $\phi(t)$  através da junção e para a corrente de pares de elétrons  $I(t)$ , ou seja, teremos expressões para a evolução temporal dos observáveis de interesse do problema e que são usualmente medidos e/ou simulados nos trabalhos citados na revisão feita no capítulo 2.

### 3.1 Um hamiltoniano para o sistema

Para o sistema descrito pela figura (2.1), usaremos um hamiltoniano proposto anteriormente por Eckmann e Guenin[24], e estudado por Aliaga et al[25]. É um hamiltoniano simplificado, que leva em conta apenas um

momento eletrônico  $\mathbf{k}$ , mas que conserva as características principais da junção Josephson, como se pode ver nas refs. [24,25]. Como já dissemos, escreveremos o hamiltoniano  $\mathbf{H}$  do sistema como

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{R} + \mathbf{H}' \quad (3.6)$$

Tomemos

$$\mathbf{H}_J = \epsilon_a \mathbf{N}_a + \theta_a \mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_a + \epsilon_b \mathbf{N}_b + \theta_b \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_b + \rho (\mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_a). \quad (3.7)$$

Na expressão para  $\mathbf{H}_J$ ,  $\mathbf{N}$  descreve o número de elétrons normais em cada supercondutor ( $a$  e  $b$ ),  $\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$ , os pares de Cooper, e o termo  $\rho (\mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_a)$  representa o tunelamento de pares através da junção.  $\epsilon_a$  e  $\epsilon_b$  são as energias das quasipartículas, medidas a partir da correspondente superfície de Fermi;  $\theta_a$  e  $\theta_b$  são constantes de acoplamento dos pares e os operadores  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$  são escritos em termos dos operadores criação e aniquilação de partículas de spin  $\sigma$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ):

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}_\uparrow^\dagger \mathbf{a}_\uparrow + \mathbf{a}_\downarrow^\dagger \mathbf{a}_\downarrow \quad (3.8)$$

$$\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{a}_\uparrow^\dagger \mathbf{a}_\downarrow^\dagger \mathbf{a}_\downarrow \mathbf{a}_\uparrow \quad (3.9)$$

O hamiltoniano  $\mathbf{R}$  para o reservatório contém apenas operadores para elétrons, do tipo  $\mathbf{a}_{r\sigma}^\dagger \mathbf{a}_{r\sigma}$ . Para o que faremos não será necessário escrevê-lo explicitamente, já que as coordenadas referentes ao reservatório podem ser eliminadas, como veremos mais adiante.

Já foi antevista a forma de  $\mathbf{H}'$ :

$$\mathbf{H}' = \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (3.10)$$

A interação  $\mathbf{V}$  entre os supercondutores da junção e o reservatório escreve-se como

$$\mathbf{V} = \beta_a (\mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{a}_{r\downarrow} \mathbf{a}_{r\uparrow} - \mathbf{a}_{r\uparrow}^\dagger \mathbf{a}_{r\downarrow}^\dagger \mathbf{S}_a) + \beta_b (\mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{a}_{r\downarrow} \mathbf{a}_{r\uparrow} + \mathbf{a}_{r\uparrow}^\dagger \mathbf{a}_{r\downarrow}^\dagger \mathbf{S}_b), \quad (3.11)$$

onde  $\beta_a$  e  $\beta_b$  são reais. Os operadores  $\mathbf{a}_\sigma^\dagger$  e  $\mathbf{a}_\sigma$  satisfazem as regras de anticomutação usuais para férmions:

$$\left[ \mathbf{a}_\uparrow^\dagger, \mathbf{a}_\downarrow^\dagger \right]_+ = 0$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}_\uparrow, \mathbf{a}_\downarrow]_+ &= 0 \\
[\mathbf{a}_\uparrow^\dagger, \mathbf{a}_\downarrow]_+ &= 0 \\
[\mathbf{a}_\uparrow, \mathbf{a}_\downarrow^\dagger]_+ &= 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}_\uparrow^\dagger, \mathbf{a}_\uparrow]_+ &= \mathbf{1} \\
[\mathbf{a}_\downarrow^\dagger, \mathbf{a}_\downarrow]_+ &= \mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Reescrevemos  $\mathbf{H}_J$  na forma (3.3), fazendo as seguintes associações:

$$\mathbf{O}_1 = \mathbf{N}_a \tag{3.14}$$

$$\mathbf{O}_2 = \mathbf{N}_b \tag{3.15}$$

$$\mathbf{O}_3 = \mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_a \tag{3.16}$$

$$\mathbf{O}_4 = \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_b \tag{3.17}$$

$$\mathbf{O}_5 = \mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_a \tag{3.18}$$

Características do hamiltoniano  $\mathbf{H}_J$  podem ser encontradas nas refs. [24,25]. Para o estudo a que nos propusemos, notamos entre elas que  $\mathbf{H}_J$  não fornece expressões para a corrente dc, de Josephson. Embora diga respeito a um dos observáveis a serem estudados, esta característica tem importância desprezível no nosso caso, já que estaremos interessados na evolução das componentes de corrente dependentes do tempo.

## 3.2 Eliminando operadores do reservatório

Dividiremos esta seção em duas partes. Na primeira, subseção 3.2.1, exibiremos os elementos necessários para uma expansão em série de um hamiltoniano do tipo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'. \tag{3.19}$$

Na segunda parte aplicaremos os resultados obtidos na subseção 3.2.1 ao hamiltoniano proposto anteriormente para o nosso problema.

### 3.2.1 Elementos para uma expansão de $\mathbf{H}$

O procedimento a ser seguido nesta subseção provém da teoria de perturbações[26]. Para um hamiltoniano do tipo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (3.20)$$

uma transformação  $\mathbf{S}$  que diagonaliza  $\mathbf{H}$ , pode ser empregada para obtermos um segundo hamiltoniano  $\tilde{\mathbf{H}}$ , dado por

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT))\mathbf{S} \quad (3.21)$$

tal que, se  $|\psi_n\rangle$  é autoestado de  $\mathbf{H}_0$ , então  $|\psi_n\rangle$  é autoestado de  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

Supomos que a transformação  $\mathbf{S}$  possa ser escrita como

$$\mathbf{S} = e^{i\mathbf{W}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\mathbf{W})^n}{n!}, \quad (3.22)$$

onde  $\mathbf{W}$  é um operador a ser conhecido.

Substituindo a série para a exponencial (3.22) em (3.21), temos:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} (ad\mathbf{W})^n \left[ \mathbf{H}_0 + \mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right], \quad (3.23)$$

em que  $(ad\mathbf{W})\mathbf{A} = [\mathbf{A}, \mathbf{W}]$ , para operadores  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{A}$ .

Escolhemos  $\mathbf{W}$  de forma que satisfaça

$$\mathbf{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) + i[\mathbf{H}_0, \mathbf{W}] = 0, \quad (3.24)$$

resultando que  $\tilde{\mathbf{H}}$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_0 + \left\{ \frac{i}{2!}[\mathbf{V}, \mathbf{W}] + \frac{2i^2}{3!}[[\mathbf{V}, \mathbf{W}], \mathbf{W}] + \dots \right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_0 + \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ni^n}{(n+1)!} (ad\mathbf{W})^n \mathbf{V} \right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Resta saber como conhecer  $\mathbf{W}$ . Isto pode ser feito, ao menos em princípio, usando-se a relação (3.24). Tomamos os autoestados  $|\psi_n\rangle$  de  $\mathbf{H}_0$ , que supomos conhecidos, e calculamos os elementos de matriz

$$\langle \psi_n | \mathbf{V} | \psi_m \rangle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) + i \langle \psi_n | [\mathbf{H}_0, \mathbf{W}] | \psi_m \rangle = 0, \quad (3.26)$$

onde a igualdade decorre de (3.24).

Como  $\mathbf{H}_0 | \psi_n \rangle = \mathcal{E}_n | \psi_n \rangle$ , temos a relação definidora de  $\mathbf{W}$  (portanto de  $\mathbf{S}$ ) em termos de  $\mathbf{V}$

$$i \langle \psi_n | \mathbf{W} | \psi_m \rangle = \frac{\langle \psi_n | \mathbf{V} | \psi_m \rangle}{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (3.27)$$

Na próxima seção aplicaremos os resultados dados pelas eqs. (3.25) e (3.27) ao hamiltoniano do nosso problema. Antes, porém, cabem duas observações a respeito destes resultados.

i) A série (3.25) é normalmente utilizada em teoria de perturbações, para tratar interações  $\mathbf{H}'$  que possam ser consideradas de efeito desprezível frente a  $\mathbf{H}_0$ . Nestes casos, trunca-se a série e calcula-se o efeito dos primeiros termos da expansão. No nosso caso, existem as funções  $\delta$ , e seria difícil argumentar que estas têm efeito desprezível. Por esta razão, não truncaremos a série (3.25) para o nosso caso, mas tentaremos estabelecer um procedimento que nos permita averiguar o efeito de um termo qualquer da expansão, que poderá ser escolhido arbitrariamente.

ii) A técnica mostrada nesta subseção pode ser vantajosa, quando se quer diagonalizar parte do hamiltoniano, eliminando algum tipo de seus operadores. No nosso caso o hamiltoniano apresenta operadores do tipo  $a^\dagger$  ( $\mathbf{a}$ ) e  $\mathbf{S}^\dagger$  ( $\mathbf{S}$ ). Vamos utilizar (3.27) para eliminar os operadores de elétrons normais  $a^\dagger$  e  $\mathbf{a}$ , em favor do conhecimento de  $\tilde{\mathbf{H}}$  como função dos operadores para pares de Cooper  $\mathbf{S}^\dagger$  e  $\mathbf{S}$ .

### 3.2.2 Expansão do hamiltoniano para o sistema junção Josephson— reservatório

Os operadores  $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger$  ( $a^\dagger a$ ) são operadores aniquilação (criação) agindo sobre estados  $|n\rangle$  de elétrons disponíveis para a formação (destruição)

de  $\frac{n}{2}$  pares de Cooper, onde a formação (destruição) do par aparece no hamiltoniano através dos operadores  $S_a^\dagger$  e  $S_b^\dagger$  ( $S_a$  e  $S_b$ ). Deve-se notar que, contrariamente aos operadores do tipo  $a$  e  $a^\dagger$ , os operadores  $S$  e  $S^\dagger$  agem sobre estados de pares de elétrons. Se escrevemos os autoestados de  $H_0 = H_J + R$  como

$$|\psi_j\rangle = |p_j, n_j\rangle, \quad (3.28)$$

onde  $|p_j\rangle$  são estados de  $p$  pares de Cooper e  $|n_j\rangle$  estados de elétrons normais disponíveis para a formação ou destruição de pares, o cálculo de elementos de matriz  $\langle n_j | | n_k \rangle$  resulta, não em números, mas em operadores que agem apenas sobre os estados  $|p_j\rangle$ . A ação dos operadores  $a_\uparrow^\dagger a_\downarrow^\dagger$  e  $a_\downarrow a_\uparrow$  sobre os estados  $|n\rangle$  ocorre da seguinte maneira:

$$a_\downarrow a_\uparrow |n\rangle = \Delta |n-2\rangle \quad (3.29)$$

$$a_\uparrow^\dagger a_\downarrow^\dagger |n\rangle = \Delta^* |n+2\rangle, \quad (3.30)$$

onde  $\Delta$  é constante, pois estamos lidando com apenas um único momento eletrônico; e das observações anteriores conclui-se que  $n$  pode ser somente inteiro par. Para eliminação dos operadores  $a^\dagger$  e  $a$ , avaliamos os elementos de matriz  $\langle 0 | | 0 \rangle$  dos termos de ordem superior da série (3.25) para  $\tilde{H}$  [26]. Como estamos interessados nos operadores que permanecerão após eliminação de  $a$  e  $a^\dagger$ , deixaremos de lado os coeficientes dos termos resultantes, em favor do conhecimento de  $\tilde{H}$  como função de  $S$  e  $S^\dagger$  ou, de outra forma, dos operadores  $O_i$  presentes em  $H_J$ .

*Cálculo do segundo termo de  $\tilde{H}$*

$$\frac{i}{2!} \langle 0 | [V, W] | 0 \rangle = \frac{1}{2!} \sum_n \{ \langle 0 | V | n \rangle i \langle n | W | 0 \rangle - \\ - i \langle 0 | W | n \rangle \langle n | V | 0 \rangle \}. \quad (3.31)$$

Usando (3.29) e (3.30), vemos que a única possibilidade é  $n = 2$ . Os fatores  $\langle 0 | V | 2 \rangle$  e  $\langle 0 | W | 2 \rangle$  envolvidos na expressão acima podem ser calculados usando-se a expressão (3.11) para  $V$  e a relação (3.27) para  $\langle n | W | m \rangle$ . Os cálculos são tediosos e não serão reproduzidos aqui. Escreveremos apenas os resultados em termos dos operadores resultantes.

$$\frac{i}{2!} \langle 0 | [V, W] | 0 \rangle = c_3 S_a^\dagger S_a + c_4 S_b^\dagger S_b + c_5 (S_a^\dagger S_b + S_b^\dagger S_a). \quad (3.32)$$

Portanto

$$\frac{i}{2!} \langle 0 | [\mathbf{V}, \mathbf{W}] | 0 \rangle = c_3 \mathbf{O}_3 + c_4 \mathbf{O}_4 + c_5 \mathbf{O}_5, \quad (3.33)$$

onde cada  $c_i$  é um coeficiente apropriado para cada parcela de (3.32).

*Cálculo do terceiro termo de  $\tilde{\mathbf{H}}$ .* Para o terceiro termo, a inserção da relação  $\sum_n | n \rangle \langle n |$  resulta sempre em algum fator do tipo  $\langle n | a a | n \rangle$  ou  $\langle n | a^\dagger a^\dagger | n \rangle$ , que são nulos. Logo

$$\frac{2i^2}{3!} \langle 0 | [[\mathbf{V}, \mathbf{W}], \mathbf{W}] | 0 \rangle = 0. \quad (3.34)$$

*Cálculo do quarto termo de  $\tilde{\mathbf{H}}$ .*

$$\frac{3i^3}{4!} \langle 0 | [[[ \mathbf{V}, \mathbf{W} ], \mathbf{W} ], \mathbf{W}] | 0 \rangle = \frac{3i^3}{4!} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4), \quad (3.35)$$

onde  $S_i$  são as somatórias obtidas com a relação  $\sum_n | n \rangle \langle n |$ . Nestas somas já se observa o aparecimento de termos não lineares nos  $\mathbf{O}_i$  dados pelas eqs. (3.14)–(3.18). A soma  $S_1$ , por exemplo, apresenta produtos como  $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_3$ ,  $\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$ ,  $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_4$ ,  $\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_4$ , além de termos lineares como  $\mathbf{O}_3$ ,  $\mathbf{O}_4$  e  $\mathbf{O}_5$ . Da mesma maneira ocorre com  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ .

*Termos de ordem superior.* Com os termos de ordem superior a 4 na expansão, os operadores resultantes vão se complicando mais e mais, formando produtos do tipo  $\mathbf{O}_i \mathbf{O}_j \cdots \mathbf{O}_k$ , além dos termos lineares já presentes em  $\mathbf{H}_J$ .

Além de  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{R}$  também contém os operadores  $a$  e  $a^\dagger$ . Ocorre que  $\mathbf{R}$  não apresenta outros operadores e, com isso, o cálculo dos elementos de matriz  $\langle 0 | \mathbf{R} | 0 \rangle$  resulta apenas numa constante a ser adicionada à energia.

Neste ponto faremos uma mudança no tratamento do problema. Ao invés de avaliarmos a influência de cada termo que resulta da expansão (3.25), como calculado acima, vamos tentar estabelecer um procedimento que nos permita avaliar o efeito de um termo qualquer da expansão.

### 3.3 Junção Josephson sob ação de uma interação $g(O)$ “arbitrária”

Nesta seção vamos considerar os efeitos de um ou mais termos da expansão de  $\mathbf{H}$ . A função  $g(O)$  é, até certo ponto, arbitrária, podendo representar qualquer um dos termos de ordem superior da expansão. Até certo ponto, porque embora possa tomar a forma de qualquer produto  $O_i O_j \cdots O_k$  dos operadores de  $\mathbf{H}_J$ , ela tem, necessariamente, apenas os operadores de  $O = \{O_i\}_{i=1}^r$  como argumento <sup>1</sup>. Esta limitação provém da forma como escrevemos as interações  $\mathbf{V}$  que descrevem as fontes externas. Se assim não fosse, isto é, se  $g(O)$  fosse completamente arbitrária, não haveria utilidade no tratamento das coordenadas do reservatório, e estaríamos novamente no ponto inicial. De fato, o hamiltoniano que consideraremos de agora em diante é *formalmente* idêntico ao hamiltoniano de que partimos (eq. (3.2)), dando a impressão de que nada foi feito ainda.

Descrevamos o sistema usando

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_{int}, \quad (3.36)$$

com  $\mathbf{H}_{int}$  na forma

$$\mathbf{H}_{int} = \mu g(O) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (3.37)$$

O hamiltoniano  $\mathbf{H}_J$  foi estudado por Aliaga *et al.*[25] através de um método derivado de um algoritmo proposto por Eckmann e Guenin[27] e da Teoria de Informação[28]. Como entre dois pulsos consecutivos nos tempos  $(n-1)T^+$  e  $nT^-$ , temos  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_J$  ( $\mathbf{H}_{int}$  não age neste intervalo), os resultados de Aliaga *et al.* podem ser aproveitados no nosso problema, necessitando-se fazer as correções nos tempos  $nT$ , onde age a função  $\delta$ . A seguir mostraremos os resultados que são encontrados para o nosso caso.

#### 3.3.1 Evolução temporal dos operadores entre pulsos

O método de resolução da ref. [25] envolve procedimentos da Teoria de Informação e, para o que nos interessa, pode ser resumido como segue.

<sup>1</sup>O índice superior  $r$ , em lugar do número 5, é proposital. Como veremos,  $g$  poderá incluir mais 2 novos operadores, além dos 5 presentes em  $\mathbf{H}_J$ .

<sup>2</sup> $T^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (T + \epsilon)$  e  $T^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (T - \epsilon)$

Dado um conjunto de valores médios  $\{\langle \mathbf{O}_i \rangle_{t_0}\}_{i=1}^L$ , a Teoria de Informação prescreve a forma do operador densidade  $\hat{\rho}$ , que pode ser escrito como:

$$\hat{\rho} = \exp \left\{ -\lambda_0 \mathbf{1} - \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{O}_i \right\}, \quad (3.38)$$

com  $M \geq L$ , devendo satisfazer as condições

$$\text{Tr}(\hat{\rho}(t_0) \mathbf{O}_i(t_0)) = \langle \mathbf{O}_i \rangle_{t_0} \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (3.39)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1 \quad (3.40)$$

A pergunta que se pode fazer é: quais são os operadores  $\mathbf{O}_i$  necessários para que  $\hat{\rho}$  satisfaça a equação de Liouville do sistema? Num contexto diferente, Cerdeira *et al.* [29] mostraram que os operadores relevantes são tais que fecham uma álgebra sob a operação comutação com o hamiltoniano, isto é, tais que

$$[\mathbf{H}, \mathbf{O}_i] = -i\hbar \sum_{j=0}^M g_{ij} \mathbf{O}_j. \quad (3.41)$$

Trata-se, então, de escolher um operador,  $\mathbf{O}_1$  digamos, calcular  $[\mathbf{H}, \mathbf{O}_1]$  e checar se o operador resultante é linearmente independente do conjunto dos  $\mathbf{O}_i$  já existentes; se for, este operador resultante passa a fazer parte do conjunto  $\mathcal{O} = \{\mathbf{O}_i\}_{i=1}^r$ ; caso contrário, repete-se o procedimento com os outros operadores de  $\mathcal{O}$  ( $\mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3, \dots$ ). Fechada a álgebra, pode-se usar a relação acima em conjunto com a equação de movimento para  $\mathbf{O}_i$ :

$$i\hbar \frac{d\mathbf{O}_i}{dt} = [\mathbf{O}_i, \mathbf{H}] \quad (3.42)$$

para se obter o sistema de equações lineares

$$\frac{d\mathbf{O}_i}{dt} = \sum_{j=0}^M g_{ij} \mathbf{O}_j \quad (3.43)$$

que, em princípio, pode ser resolvido<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>O método esboçado aqui não é completamente geral; aplica-se a problemas com um número finito de graus de liberdade e com relações de comutação do tipo (3.12) – (3.13). Ver ref. [27].

No nosso caso, temos que  $\mathbf{H}_{int} = 0$  entre pulsos, e o cálculo dos diferentes  $[\mathbf{H}, \mathbf{O}_i]$  gera

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_1] = 2i\rho\mathbf{O}_6 \quad (3.44)$$

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_2] = -2i\rho\mathbf{O}_6 \quad (3.45)$$

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_3] = i\rho\mathbf{O}_6 \quad (3.46)$$

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_4] = -i\rho\mathbf{O}_6 \quad (3.47)$$

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_5] = i\alpha\mathbf{O}_6 \quad (3.48)$$

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_6] = -i\alpha\mathbf{O}_5 - 2i\rho\mathbf{O}_7 \quad (3.49)$$

$$[\mathbf{H}_J, \mathbf{O}_7] = 2i\rho\mathbf{O}_6 \quad (3.50)$$

com

$$\mathbf{O}_6 = i(\mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_b - \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_a) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{O}_7 = \mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_a (\mathbf{1} - \mathbf{N}_b) + \mathbf{S}_b^\dagger \mathbf{S}_b (\mathbf{1} - \mathbf{N}_a) \quad (3.52)$$

$$\alpha = -[2(\epsilon_a - \epsilon_b) + (\theta_a - \theta_b)] \quad (3.53)$$

Com as relações acima temos todos os  $g_{ij}$  necessários para o nosso sistema, tendo ganhado dois novos operadores:  $\mathbf{O}_6$  e  $\mathbf{O}_7$ , que poderão se unir ao conjunto  $\mathcal{O} = \{\mathbf{O}_i\}_{i=1}^5$  para a formação da função  $g(\mathcal{O})$ . Os operadores  $\mathbf{O}_6$  e  $\mathbf{O}_7$  têm importância no estudo da dinâmica do nosso sistema por motivos distintos.  $\mathbf{O}_6$  está ligado diretamente à corrente  $I$  de pares de Cooper através da junção <sup>4</sup>.  $\mathbf{O}_7$ , que fecha consistentemente uma subálgebra com

---

<sup>4</sup>De fato, o número de pares de Cooper no supercondutor  $a$ , por exemplo, sendo dado por  $\mathbf{S}_a^\dagger \mathbf{S}_a = \mathbf{O}_3$ , temos

$$I = \frac{d \langle \mathbf{O}_3 \rangle}{dt}$$

$$I = \left\langle \frac{-i}{\hbar} [\mathbf{O}_3, \mathbf{H}] \right\rangle;$$

e de (3.46) temos

$$I = \frac{-\rho}{\hbar} \langle \mathbf{O}_6 \rangle.$$

$O_5$  e  $O_6$ , aparece como operador necessário para se dirimir inconsistências anteriores no modelo e que apareciam em virtude de se tomar o operador associado ao balanço de cargas do sistema, ao invés deste  $O_7$ , para o estudo da dinâmica da junção <sup>5</sup>.

Para os  $g_{ij}$  dados pelas eqs. (3.44)–(3.50), o sistema (3.43) fornece a seguinte solução entre os tempos  $(n-1)T^+$  e  $nT^-$ :

$$O_1(nT^-) = O_1((n-1)T^+) - f_{n-1}(\alpha, \rho) - a_{n-1}(\alpha, \rho, T) \quad (3.54)$$

$$O_2(nT^-) = O_2((n-1)T^+) + f_{n-1}(\alpha, \rho) + a_{n-1}(\alpha, \rho, T) \quad (3.55)$$

$$O_3(nT^-) = O_3((n-1)T^+) - \frac{1}{2}f_{n-1}(\alpha, \rho) - \frac{1}{2}a_{n-1}(\alpha, \rho, T) \quad (3.56)$$

$$O_4(nT^-) = O_4((n-1)T^+) + \frac{1}{2}f_{n-1}(\alpha, \rho) + \frac{1}{2}a_{n-1}(\alpha, \rho, T) \quad (3.57)$$

$$O_5(nT^-) = O_5((n-1)T^+) - \frac{\alpha}{2\rho}f_{n-1}(\alpha, \rho) - \frac{\alpha}{2\rho}a_{n-1}(\alpha, \rho, T) \quad (3.58)$$

$$O_6(nT^-) = O_6((n-1)T^+) \cos \omega T + \frac{\hbar\omega}{2\rho}f_{n-1}(\alpha, \rho, T) \sin \omega T \quad (3.59)$$

$$O_7(nT^-) = O_7((n-1)T^+) - f_{n-1}(\alpha, \rho) - a_{n-1}(\alpha, \rho, T) \quad (3.60)$$

onde

$$f_{n-1}(\alpha, \rho) = \frac{2\rho}{(\hbar\omega)^2}(\alpha O_5((n-1)T^+) + 2\rho O_7((n-1)T^+)) \quad (3.61)$$

$$a_{n-1}(\alpha, \rho, T) = \frac{2\rho}{\hbar\omega}O_6((n-1)T^+) \sin \omega T - f_{n-1}(\alpha, \rho) \cos \omega T \quad (3.62)$$

$$(\hbar\omega)^2 = \alpha^2 + 4\rho^2 \quad (3.63)$$

Possuimos, então, um mapa provisório

$$O_i(nT^-) = m(O_j((n-1)T^+)) \quad i, j = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.64)$$

que nos permite conhecer os operadores  $O_i$  no instante imediatamente anterior ao  $n$ -ésimo pulso como uma função  $m$  dos operadores no instante imediatamente posterior ao pulso precedente.

<sup>5</sup>Para maiores detalhes sobre a interpretação e importância dos operadores  $O_6$  e  $O_7$ , ver ref. [25].

### 3.3.2 Evolução temporal dos operadores sob ação do pulso em $nT$

No intervalo entre  $nT^-$  e  $nT^+$ , o termo  $\mathbf{H}_{int}$  predomina sobre  $\mathbf{H}_J$ , assim

$$\mathbf{O}_i(nT^+) = \mathbf{U}^\dagger(nT^+, nT^-) \mathbf{O}_i(nT^-) \mathbf{U}(nT^+, nT^-) \quad (3.65)$$

onde

$$\mathbf{U}(nT^+, nT^-) = \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_{nT^-}^{nT^+} g(O) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - jT) dt \right] \quad (3.66)$$

ou

$$\mathbf{U}(nT^+, nT^-) = \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} g(O) \right] \quad (3.67)$$

Portanto

$$\mathbf{O}_i(nT^+) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} g(O) \right] \mathbf{O}_i(nT^-) \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} g(O) \right] \quad (3.68)$$

Substituindo (3.64) em (3.68), podemos escrever um mapa geral para os operadores, que nos permite acompanhá-los seguindo o número de pulsos:

$$\mathbf{O}_i(nT^+) = \tilde{m} \left( \mathbf{O}_j((n-1)T^+) \right) \quad j = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.69)$$

Como já temos  $\mathbf{O}_i(t)$ , para o cálculo dos valores médios, falta-nos calcular  $\hat{\rho}(t_0)$ .

### 3.3.3 $\hat{\rho}(t_0)$

Para escrevermos  $\hat{\rho}(t_0)$  segundo o procedimento dado pela Teoria de Informação e descrito pela eq. (3.38), vamos supor conhecidos os valores médios iniciais  $\{ \langle \mathbf{O}_i \rangle_{t_0} \}_{i=1}^7$ . Evidentemente isto não seria trivial numa situação real de laboratório, mas para o nosso objetivo de estudar os mapas gerados pelo hamiltoniano proposto para o nosso problema, a hipótese é aceitável.

Como vimos  $\hat{\rho}(t_0)$ , escreve-se como

$$\hat{\rho}(t_0) = \exp \left\{ -\lambda_0 \mathbf{1} - \sum_{i=1}^7 \lambda_i \mathbf{O}_i(t_0) \right\} \quad (3.70)$$

sujeito às condições

$$\text{Tr}(\hat{\rho}(t_0)\mathbf{O}_i(t_0)) = \langle \mathbf{O}_i \rangle_{t_0}, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.71)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}(t_0)) = 1 \quad (3.72)$$

Temos, então um sistema de (7+1) equações para as variáveis  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_7$ . Os sistemas gerados por (3.70)–(3.72) são fortemente não lineares e as soluções (numéricas) nem sempre convergem.

Para os nossos propósitos usaremos o seguinte conjunto de valores médios

$$\langle \mathbf{O}_1 \rangle_{t_0} = 1.0 \quad (3.73)$$

$$\langle \mathbf{O}_2 \rangle_{t_0} = 1.0 \quad (3.74)$$

$$\langle \mathbf{O}_3 \rangle_{t_0} = 0.25 \quad (3.75)$$

$$\langle \mathbf{O}_4 \rangle_{t_0} = 0.25 \quad (3.76)$$

$$\langle \mathbf{O}_5 \rangle_{t_0} = 0.0 \quad (3.77)$$

$$\langle \mathbf{O}_6 \rangle_{t_0} = 0.0 \quad (3.78)$$

$$\langle \mathbf{O}_7 \rangle_{t_0} = 0.0 \quad (3.79)$$

Esta escolha baseia-se no cálculo dos elementos de matriz para os operadores  $\mathbf{O}_i$ , usando-se uma base que contém estados dados por

$$|a_\uparrow a_\downarrow b_\uparrow b_\downarrow\rangle = |a_\uparrow\rangle \otimes |a_\downarrow\rangle \otimes |b_\uparrow\rangle \otimes |b_\downarrow\rangle, \quad (3.80)$$

onde  $a$  e  $b$  tomam valores 0 ou 1. Esta base fornece estados  $|m\rangle$  ( $1 \leq m \leq 16$ ), tendo sido escolhida a ordem dada por

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv |1, 1, 1, 1\rangle, |2\rangle \equiv |1, 1, 1, 0\rangle, \\ |3\rangle &\equiv |1, 1, 0, 1\rangle, \dots, |16\rangle \equiv |0, 0, 0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Os valores médios (3.73)–(3.79) estão normalizados e refletem o fato de que no instante inicial  $t_0$  consideramos a interação  $\mathbf{V}$  “desligada”.

Calculados  $\hat{\rho}(t_0)$  e  $\mathbf{O}_i(nT^+) = \tilde{m}(\mathbf{O}_j((n-1)T^+))$ , podemos obter um mapa para os valores médios de  $\mathbf{O}_i$ :

$$\langle \mathbf{O}_i \rangle_{n+1} \equiv \langle \mathbf{O}_i((n+1)T^+) \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\rho}(t_0)\mathbf{O}_i((n+1)T^+)) \quad (3.82)$$

Isto nos dá, de forma geral

$$\langle \mathbf{O}_i \rangle_{n+1} = M(\langle \mathbf{O}_j \rangle_n) \quad j = 1, 2, \dots, 7, \quad (3.83)$$

onde  $M$  é a transformação que leva  $\langle O_i \rangle_n$  em  $\langle O_i \rangle_{n+1}$ . As iterações (3.83) nos permitirão acompanhar os valores médios de qualquer um dos 7 operadores  $O_i$ . É claro que haverá um mapa diferente para cada  $g(O)$  que tomarmos, mas o procedimento é bastante geral para escolhermos  $g(O)$  à nossa vontade entre os termos que aparecem na expansão (3.25) (eliminados os operadores do reservatório, como foi feito na seção 3.2.2).

Ao longo dos cálculos, alguns parâmetros foram deixados livres: a constante  $\rho$  de interação dos supercondutores da junção; a constante  $\alpha$ , que depende dos supercondutores que formam a junção; a constante  $\mu$  que multiplica  $g(O)$ ; e o período  $T$ . A maneira como os valores médios  $\langle O_i(t) \rangle$ , a corrente  $I(t)$  e a fase  $\phi(t)$  variam com  $\rho, \alpha, \mu$  e  $T$ , não está determinada; há que se fazer um acompanhamento sistemático da variação das quantidades de interesse ( $\langle O_i \rangle, I$  e  $\phi$ ), conforme variam os valores de  $\rho, \alpha, \mu$  e  $T$ , não fixados a priori. Esta varredura sistemática dos parâmetros permitirá a identificação de regiões de valores destes parâmetros que são interessantes para nosso trabalho e, possivelmente, estabelecer a presença ou ausência de caos no mapa gerado pela função  $g(O)$  escolhida.

No nosso caso, o interesse maior está nos operadores que representam a corrente  $I(t)$  de pares de elétrons através da junção e a fase  $\phi(t)$  de Josephson, bem como em suas derivadas. Na ref. [25] pode-se ver que a corrente  $I$  e fase  $\phi$  estão relacionadas de modo simples com alguns dos operadores  $O_i$  que temos estudado:

$$I(t) = -\frac{\rho}{\hbar} \langle O_6(t) \rangle \quad (3.84)$$

$$\phi(t) = \arctan \left( \frac{\langle O_6(t) \rangle}{\langle O_5(t) \rangle} \right) \quad (3.85)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{\alpha\rho}{\hbar^2} \langle O_5(t) \rangle - \frac{2\rho^2}{\hbar^2} \langle O_7(t) \rangle \quad (3.86)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{\langle O_5(t) \rangle^2 + \langle O_6(t) \rangle^2} \left[ \langle O_5(t) \rangle \frac{d\langle O_6(t) \rangle}{dt} - \langle O_6(t) \rangle \frac{d\langle O_5(t) \rangle}{dt} \right]. \quad (3.87)$$

Note-se que estas expressões são válidas para qualquer tempo  $t$  entre dois pulsos, quando  $H_{int}$  não age. Logo não há problemas para se obter  $I, \frac{dI}{dt}, \phi$  e  $\frac{d\phi}{dt}$  a partir dos resultados fornecidos pelo cálculo numérico dos valores médios  $\langle O_i(t) \rangle$ , esboçado na seção anterior.

No próximo capítulo veremos como aplicar o tratamento desenvolvido aos termos obtidos na expansão (3.25).

# Capítulo 4

## Aplicação

Como foi visto no capítulo 3, os operadores  $O_i$ , como função do tempo, apresentam a seguinte forma geral:

$$O_i((n+1)T^+) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}g(O)\right] O_i((n+1)T^-) \exp\left[\frac{-i}{\hbar}g(O)\right], \quad (4.1)$$

onde  $g$  é função do conjunto de operadores  $O$  e  $nT^-$  e  $nT^+$  indicam, respectivamente, antes e depois do  $n$ -ésimo pulso ocasionado pela ação da função  $\delta(t-nT)$ . Dado que  $O_i((n+1)T^-)$  pode ser calculado a partir de  $O_i(nT^+)$ , temos uma relação de recorrência que é afetada pela forma específica da função  $g(O)$  tomada.

Vamos tomar para  $g(O)$  o termo dado por

$$g(O) = \mu O_6 \quad (4.2)$$

A idéia de tomar  $g(O)$  proporcional a  $O_6$  é proposital e aparece por dois motivos:

- i*) como vimos no capítulo anterior, o operador  $O_6$  é justamente aquele que dá o termo de corrente (eq. (3.84)) e que não existia em  $H_J$ ;
- ii*) o mapa para um operador genérico  $O_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle O_i \rangle_{n+1} &= P(\langle O_i \rangle_n) + \\ &+ \langle \frac{1}{i\hbar} \int_{(n+1)T^-}^{(n+1)T^+} [O_i, g(O)] \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t-jT) dt \rangle \\ \langle O_i \rangle_{n+1} &= P(\langle O_i \rangle_n) + \langle \frac{1}{i\hbar} [O_i, g(O)] \rangle_{n+1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $P$  representa o mapa resultante entre dois pulsos, sendo a mesma solução de Aliaga *et al*[25]. Com  $g(O) = \mu O_6$ , o comutador  $[O_i, g(O)]$  acrescenta termos não lineares às equações de movimento (3.42) dos operadores presentes em  $H_J$ .

$$[H_J, O_6] = -i\alpha O_5 - 2i\rho O_7, \quad (4.4)$$

e pela definição de  $O_7$  vemos que

$$O_7 = S_a^\dagger S_a (1 - N_b) + S_b^\dagger S_b (1 - N_a) \quad (4.5)$$

apresenta os produtos  $O_2 O_3$  e  $O_1 O_4$ .

## 4.1 Mapa gerado por $g(O) = \mu O_6$

A inserção de  $g(O) = \mu O_6$  na exponencial que representa o operador evolução temporal fornece

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{\pm i}{\hbar} g(O) \right] &= \exp \left[ \frac{\pm i}{\hbar} \mu O_6 \right] \\ &= \mathbf{1} + \left[ \cos\left(\frac{\mu}{\hbar}\right) - 1 \right] O_6 O_6 \pm i \left[ \sin\left(\frac{\mu}{\hbar}\right) \right] O_6. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Com (4.6), as expressões para  $O_i(nT^-)$  dadas pelas eqs. (3.54)-(3.60) e a solução do sistema para  $\hat{\rho}(t_0)$ , o mapa

$$\langle O_i \rangle_{n+1} = M(\langle O_j \rangle_n) \quad j = 1, 2, \dots, 7 \quad (4.7)$$

pode ser caracterizado segundo as regiões dos parâmetros  $\mu, \alpha, \rho, \hbar$  e  $T$  envolvidos.

No nosso caso usamos as seguintes especificações:

$$\langle O_1 \rangle_{t_0} = 1.0, \quad (4.8)$$

$$\langle O_2 \rangle_{t_0} = 1.0, \quad (4.9)$$

$$\langle O_3 \rangle_{t_0} = 0.25, \quad (4.10)$$

$$\langle O_4 \rangle_{t_0} = 0.25, \quad (4.11)$$

$$\langle O_5 \rangle_{t_0} = 0.0, \quad (4.12)$$

$$\langle O_6 \rangle_{t_0} = 0.0, \quad (4.13)$$

$$\langle O_7 \rangle_{t_0} = 0.0, \quad (4.14)$$

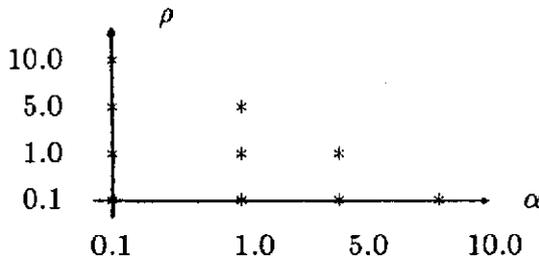


Figura 4.1: Região dos parâmetros estudada.

e

$$\hbar = 1.0, \quad (4.15)$$

$$T = 1.0, \quad (4.16)$$

deixando livres  $\mu$ ,  $\alpha$  e  $\rho$ , inicialmente. Estes valores estão ligados aos seguintes aspectos do problema:  $\mu$  modula o pulso de corrente fornecida ao sistema,  $\alpha$  é interpretado como sendo a voltagem através da junção[25] e  $\rho$  representa o tipo de acoplamento (forte ou fraco) dos supercondutores.

Inicialmente foram observados  $\mu$ ,  $\alpha$  e  $\rho$ , com  $\rho$  e  $\alpha$  assumindo os valores dados pela figura 4.1; em cada um desses pontos foram tomados 4 valores para  $\mu$ : 0.1, 1.0, 5.0 e 10.0.

Na figura 4.1 pode-se observar que procuramos varrer regiões que cobrissem várias situações de acoplamento e corrente fornecida. Os 40 conjuntos de valores observados apresentam sempre figuras que identificam ciclos limites, para os quais tende o sistema após um determinado tempo. As figuras 4.2–4.4 representam curvas típicas obtidas para  $(\phi \times \phi)$  e  $(\dot{I} \times I)$  para um mesmo conjunto de valores dos parâmetros.

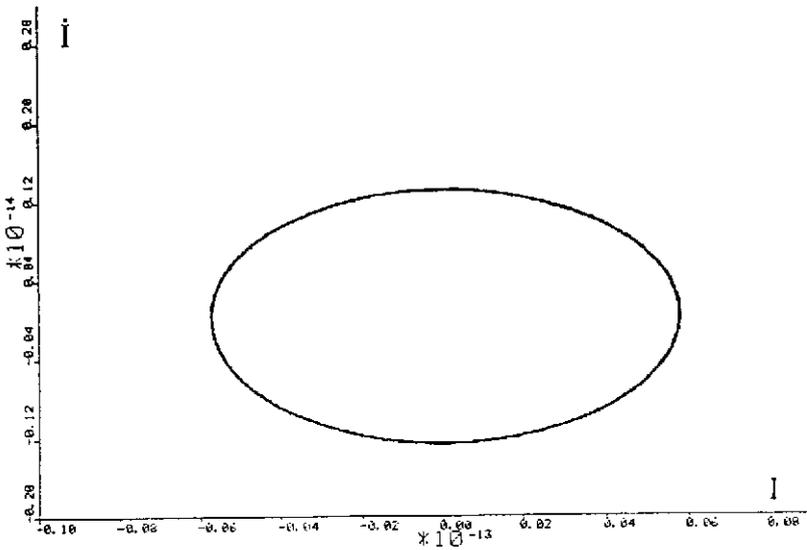
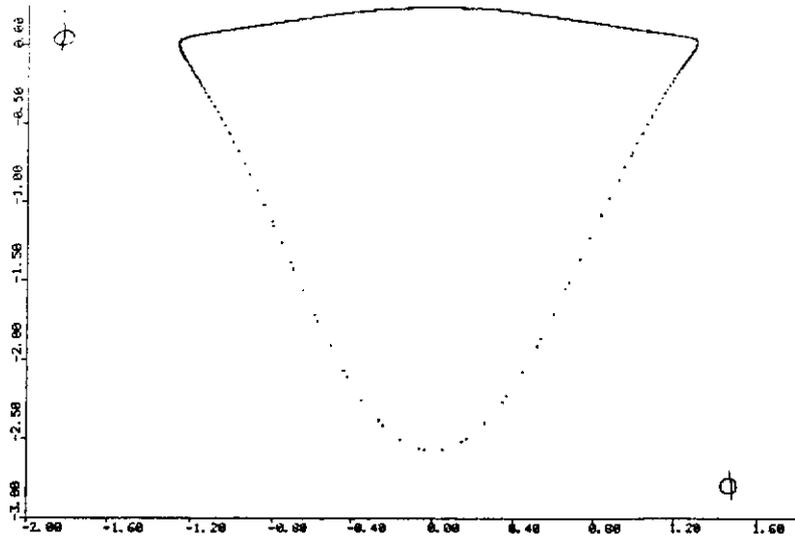


Fig. 4.2:  $(\dot{\phi}x\phi)$  e  $(\dot{I}xI)$  para  $\mu = 1.0, \alpha = 0.1$  e  $\rho = 0.1$ .

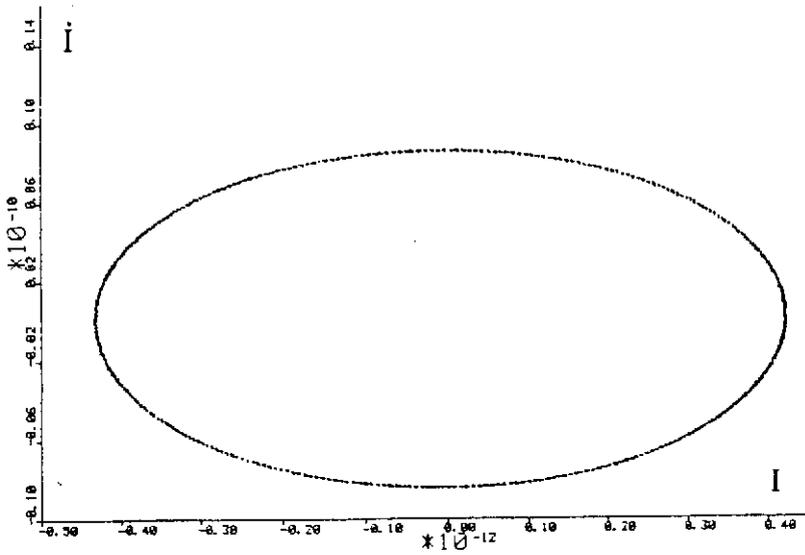
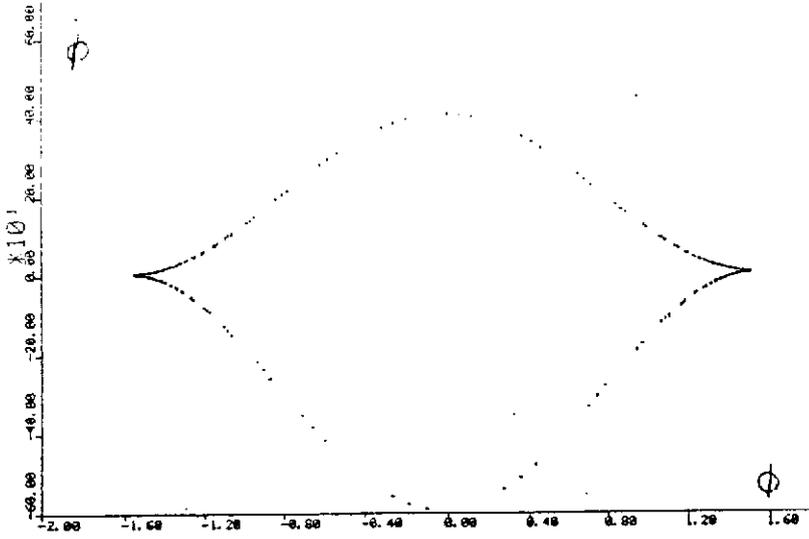


Fig. 4.3:  $(\dot{\phi}x\phi)$  e  $(I \times I)$  para  $\mu = 5.0, \alpha = 0.1$  e  $\rho = 10.0$ .

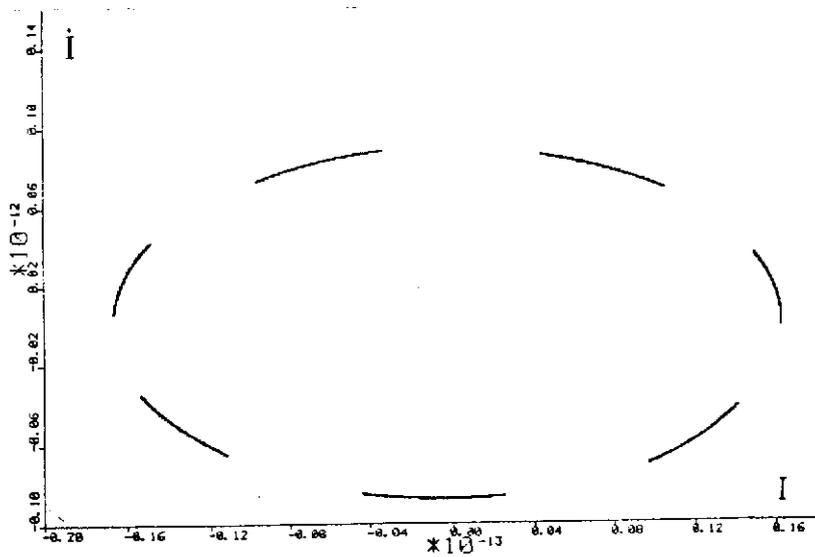


Fig. 4.4:  $(\dot{\phi}x\phi)$  e  $(\dot{I}xI)$  para  $\mu = 10.0$ ,  $\alpha = 5.0$  e  $\rho = 1.0$ .

Além do aspecto representativo de mapas em que se observa apenas contração de áreas, a estrutura destas curvas não apresenta qualquer efeito de autosimilaridade. Veja-se, por exemplo, as figuras 4.5-4.12 para fase e 4.13-4.14 para corrente, em que as áreas delimitadas por retângulos são ampliadas nos gráficos seguintes.

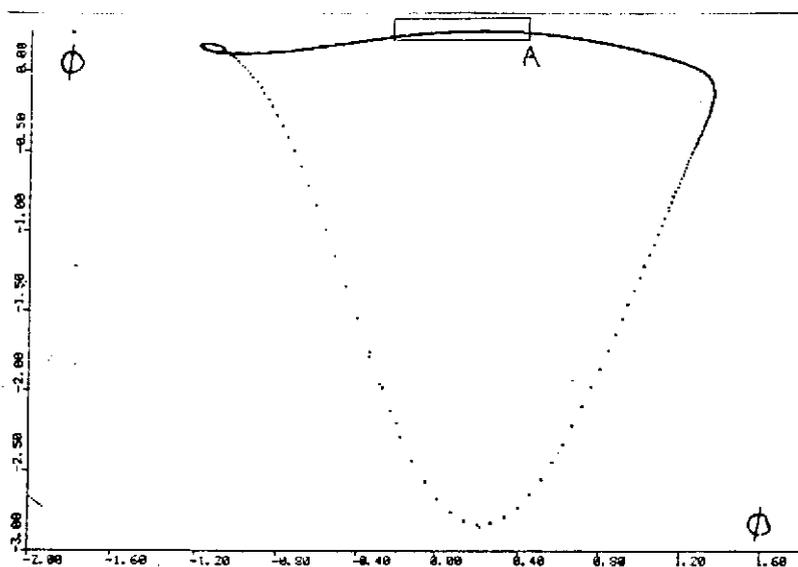


Fig. 4.5:  $(\dot{\phi}x\phi)$  para  $\mu = 1.0, \alpha = 0.1$  e  $\rho = 0.1$ .

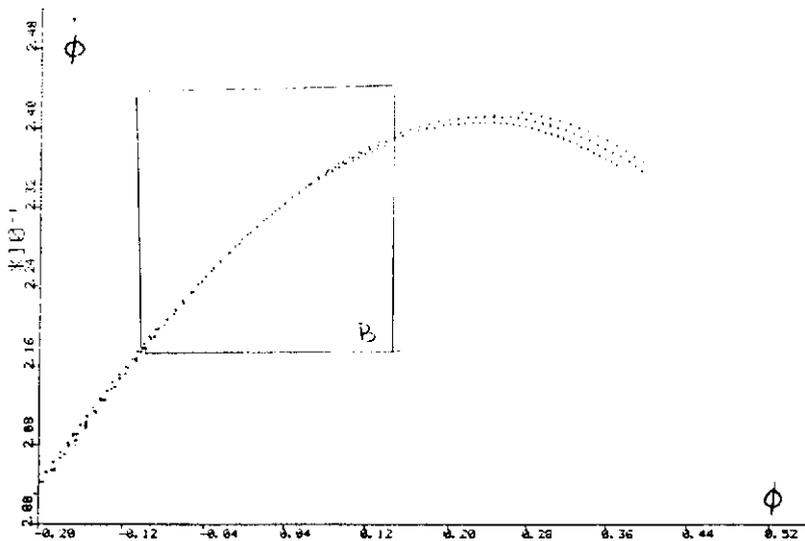


Fig. 4.6: Ampliação da região A da fig. 4.5.

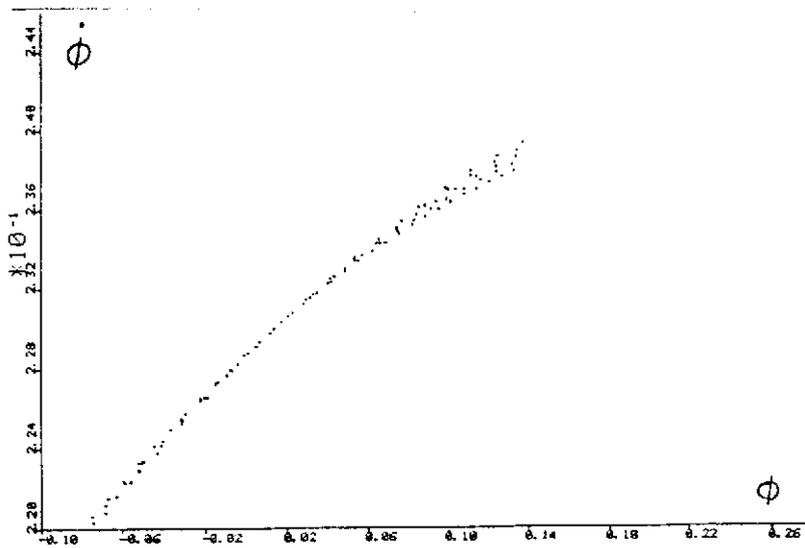


Fig. 4.7: Ampliação da região B da fig. 4.6.

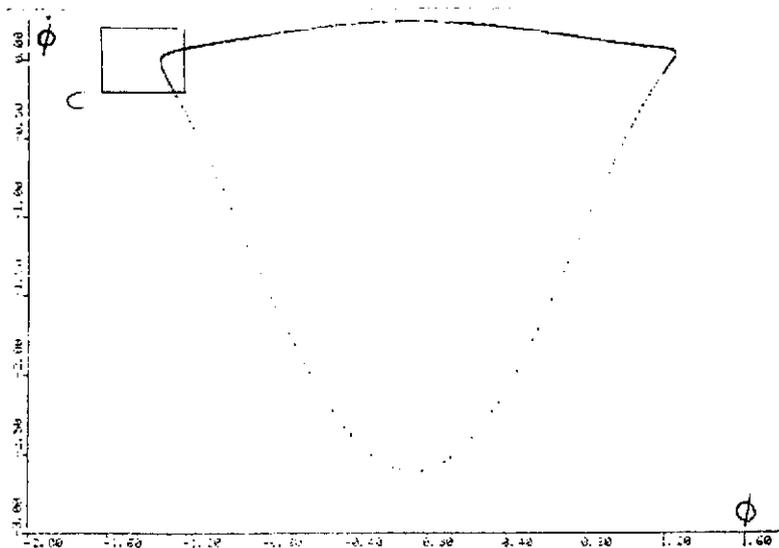


Fig. 4.8:  $(\phi x \phi)$  para  $\mu = 10.0$ ,  $\alpha = 0.1$  e  $\rho = 0.1$ .

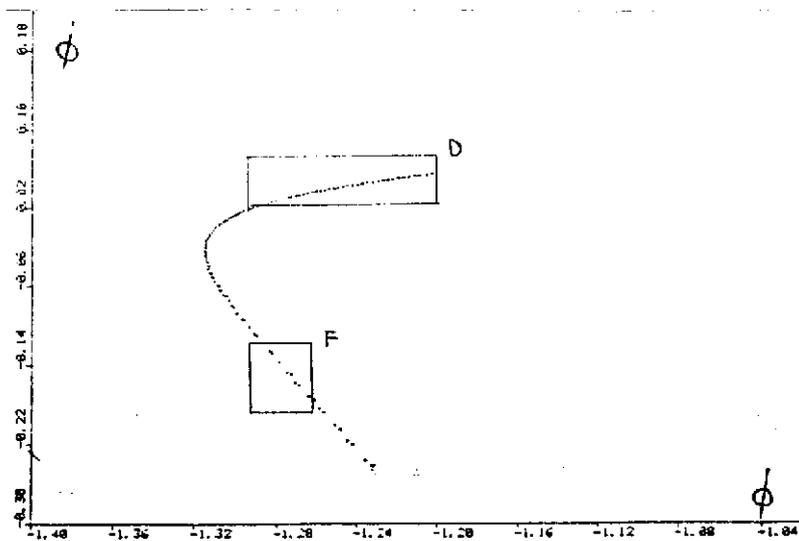


Fig. 4.9: Ampliação da região C da fig. 4.8.

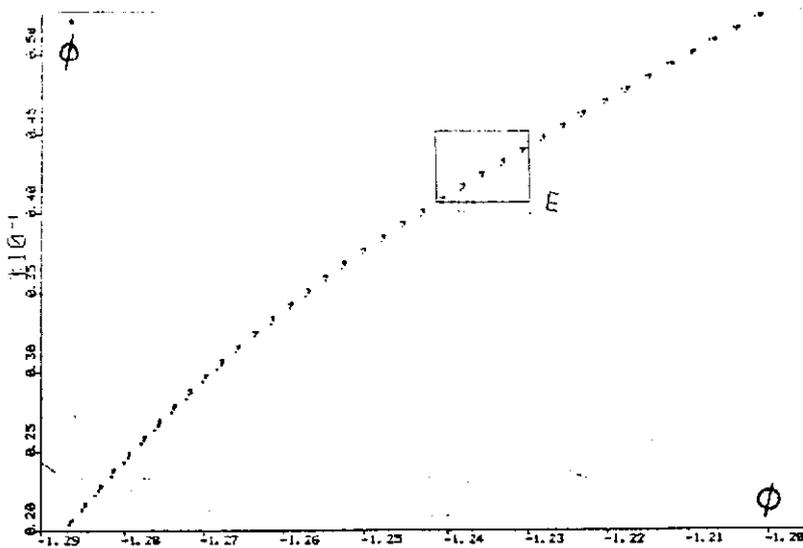


Fig. 4.10: Ampliação da região D da fig. 4.9.

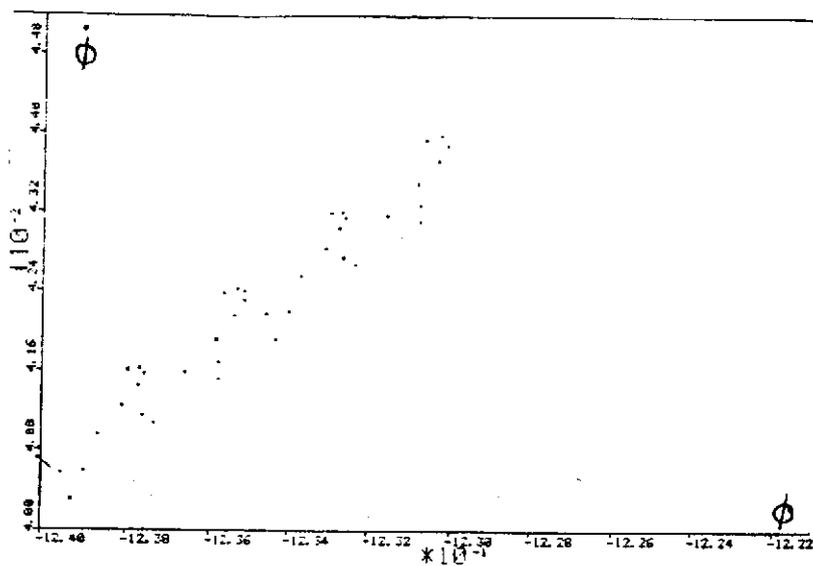


Fig. 4.11: Ampliação da região E da fig. 4.10.

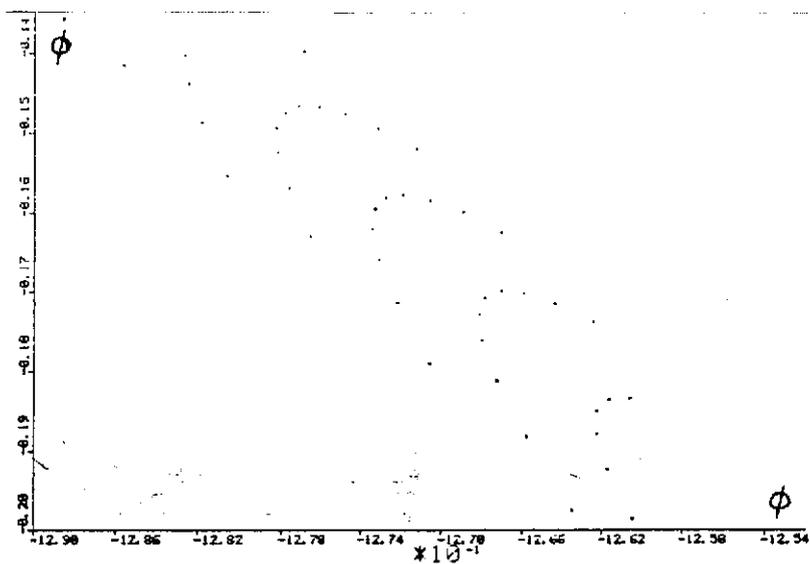


Fig. 4.12: Ampliação da região F da fig. 4.9.

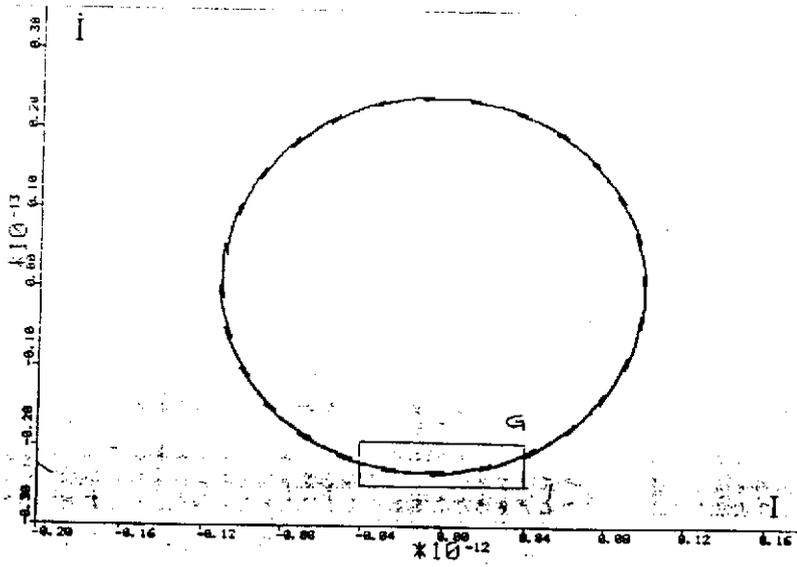


Fig. 4.13:  $(\dot{I} \times I)$  para  $\mu = 1.0$ ,  $\alpha = 0.1$  e  $\rho = 0.1$ .

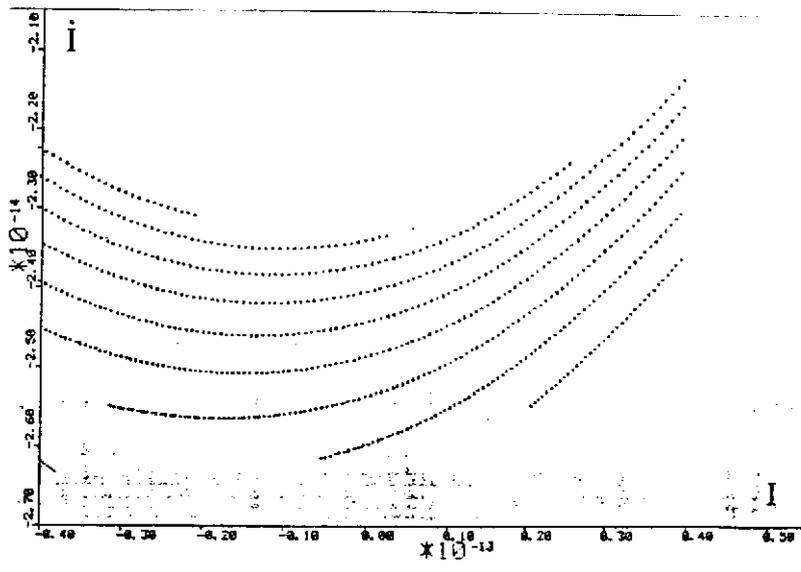


Fig. 4.14: Ampliação da região G da fig. 4.13.

## Comentários finais

Do que se pôde observar nas figuras obtidas, o mapa gerado pelo tratamento desenvolvido ao longo deste trabalho parece não apresentar comportamento caótico, na forma como este se mostra nos estudos feitos sobre o modelo de Stewart-McCumber[20]. Em vista dos trabalhos referentes a sistemas quânticos, nosso resultado não chega a surpreender. A ausência de caos em sistemas quânticos já é bastante aceita atualmente e, neste caso, tratar-se-ia de mais um sistema que, em regime quântico, não apresenta comportamento caótico. É evidente que o estudo de regiões de parâmetros como o que fizemos, é passível da crítica de que a varredura nunca é suficientemente “fina” para se poder dizer que foi coberta toda uma região; ainda assim acredita-se que é um bom método de análise.

Se parecem não apresentar caos, as curvas exibidas revelam a característica da contração de áreas nos espaços  $(\dot{I}xI)$  e  $(\dot{\phi}x\phi)$  dos observáveis de interesse. Contração de áreas é característica de mapas dissipativos, mas deve-se ter cuidado com o uso dos termos. Se é fato que observamos contração de áreas no espaço  $(\dot{\phi}x\phi)$ , é fato também que não estamos lidando com variáveis canonicamente conjugadas. Falamos apenas de mapas que mostram contração de áreas no sentido de que têm jacobiano de módulo menor do que 1. A restrição revela, entretanto, uma variedade de questões interessantes quanto às ligações dos resultados que obtivemos com os mecanismos microscópicos de fluxos de partículas e de energia e que, estes sim, podem deixar transparecer processos de natureza dissipativa[30]. Estas questões ainda não têm explicação muito clara, mas estão fora do escopo deste trabalho.

# Bibliografia

- [1] P. V. Elyutin, *Sov. Phys. Usp.* **31**, 597 (1988).
- [2] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *Order within chaos* (John Wiley & Sons e Herrman, Londres (1986)) e referências ali contidas.
- [3] P. Grassberger e I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346 (1983);  
P. Grassberger e I. Procaccia, *Physica* **9D**, 189 (1983).
- [4] A. M. O. de Almeida, notas de aula apresentadas em *Winter School on Non-linear Physical Phenomena*, C. I. F. M. C., Brasília (1989).
- [5] M. V. Berry, *Phys. Scr.* **40**, 335 (1989).
- [6] A. Voros, *Helv. Phys. Acta* **62**, 595 (1989).
- [7] G. Karner, *Lett. in Math. Phys.* **17**, 329 (1989).
- [8] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.* **A413**, 183 (1987).
- [9] Para um exemplo de resultado envolvendo o critério do espectro de energia, ver:  
M. Lombardi, P. Labastie, M. C. Bordas e M. Broyer, *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.* **92**, 387 (1988);  
M. Lombardi, P. Labastie, M. C. Bordas e M. Broyer, *J. Chem. Phys.* **89**, 3479 (1988).
- [10] S. Fishman, *Phys. Scr.* **40**, 416 (1989).
- [11] T. Dittrich e R. Graham, *Phys. Scr.* **40**, 409 (1989);  
J. R. Ackerhalt, P. W. Milloni e M.-L. Shih, *Phys. Rep.* **128**, 205 (1985).

- [12] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, Londres, 1973), capítulo 6.
- [13] H. A. Cerdeira, K. Furuya e B. A. Huberman, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2511 (1988) e referências ali contidas.
- [14] B. Eckhardt, *Phys. Rep.* **163**, 205 (1988).
- [15] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962);  
 B. D. Josephson, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 216 (1964);  
 B. D. Josephson, *Adv. in Phys.* **14**, 419 (1965);  
 J. Clarke, *Amer. J. Phys.* **38**, 1071 (1970).
- [16] M. R. Beasley e B. A. Huberman, *Comments on Solid State Physics* **10**, 155 (1982).
- [17] K. Hida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55**, 3694 (1986);  
 K. Hida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 2325 (1987).
- [18] D. E. McCumber, *J. Appl. Phys.* **39**, 3113 (1968);  
 W. C. Stewart, *Appl. Phys. Lett.* **12**, 277 (1968).
- [19] B. A. Huberman, J. P. Crutchfield e N. H. Packard, *Appl. Phys. Lett.* **37**, 750 (1980).
- [20] R. L. Kautz, *J. Appl. Phys.* **52**, 6241 (1981);  
 E. Ben-Jacob, I. Goldhirsch, Y. Imry e S. Fishman, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1599 (1982);  
 A. H. MacDonald e M. Plischke, *Phys. Rev.* **B27**, 201 (1983);  
 I. Goldhirsch, Y. Imry, G. Wasserman e E. Ben-Jacob, *Phys. Rev.* **B29**, 1218 (1984);  
 M. Otavio, *Phys. Rev.* **B29**, 1231 (1984);  
 F. M. A. Salam e S. S. Sastry, *IEEE Trans. CAS-32*, 784 (1985);  
 R. L. Kautz e R. Monaco, *J. Appl. Phys.* **57**, 875 (1985);  
 N. F. Pedersen, *Phys. Scr.* **T13**, 129 (1986);  
 G. Cicogna, *Phys. Lett.* **A121**, 403 (1987);  
 B. P. Koch e B. Bruhn, *J. Physique* **49**, 35 (1988);  
 R. Sobolewski, D. R. Dykaar, T. Y. Hsiang, C. Vanneste e C. -C. Chi, *Phys. Rev.* **B37**, 3778 (1988);  
 G. Cicogna, *Phys. Lett.* **A131**, 98 (1988).

- [21] T. Hogg e B. A. Huberman, Phys. Rev. Lett. **48**, 711 (1982);  
T. Hogg e B. A. Huberman, Phys. Rev. **A28**, 22 (1983).
- [22] S. Fishman, D. R. Grempel e R. E. Prange, Phys. Rev. Lett. **49**, 509 (1982);  
D. R. Grempel, R. E. Prange e S. Fishman, Phys. Rev. **A29**, 1639 (1984).
- [23] R. Graham e T. Tél, Z. Phys. **B60**, 127 (1985).
- [24] J.-P. Eckmann e M. Guenin, Il Nuovo Cimento **16B**, 93 (1973).
- [25] J. Aliaga, H. A. Cerdeira, A. N. Proto e D. Otero, Phys. Rev. **B40**, 4375 (1989).
- [26] J. M. Ziman, *Elements of Advanced Quantum Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1969), seção 3.5.
- [27] J.-P. Eckmann e M. Guenin, Il Nuovo Cimento **16B**, 85 (1973).
- [28] Y. Alhassid e R. D. Levine, J. Chem. Phys. **67**, 4321 (1977);  
Y. Alhassid e R. D. Levine, Phys. Rev. **A18**, 89 (1978);  
D. Otero, A. Plastino, A. N. Proto e G. Zannoli, Phys. Rev. **A26**, 1209 (1982);  
D. Otero, A. Plastino, A. N. Proto e G. Zannoli, Z. Phys. **A316**, 323 (1984);  
E. Duering, D. Otero, A. Plastino e A. Proto, Phys. Rev. **A32**, 2455 (1985).
- [29] H. Cerdeira, E. Z. da Silva e B. A. Huberman, Phys. Rev. **A30**, 1752 (1984).
- [30] V. Ambegaokar, U. Eckern e G. Shön, Phys. Rev. Lett. **48**, 1745 (1982);  
A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Ann. Phys. **149**, 374 (1983);  
V. Ambegaokar e U. Eckern, Z. Phys. **B69**, 399 (1987);  
E. V. Thuneberg e V. Ambegaokar, Phys. Rev. Lett. **60**, 365 (1988).