

Este exemplar corresponde à redação final da
tese de doutorado defendida pela aluna Miriam
Batista e aprovada pela comissão julgadora.

10/julho/1996



**Estudo de Processos Inclusivos em Reações
de Aniquilação Elétron-Pósitron através
de um Modelo de Cascatas Partônicas**

Miriam Batista ✓

Orientador: Roberto J. M. Covolan

Tese apresentada ao

Instituto de Física *Gleb Wataghin*

para obtenção do título de Doutor em Física

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
IFGW - UNICAMP

Junho de 1996

UNIDADE	IF
Nº CHAMADA	IF/UNICAMP
V.	532e
Ex.	
T. BOB	28236
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	13/08/96
Nº CPDC	44.0009/113

OK Dine
09/05/98
IF/1029

M
6 ✓

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

Batista, Mirian
B32e Estudo de processos inclusivos em reações de aniquilação elétron pósitron através de um modelo de cascatas partônicas / Mirian Batista. - - Campinas, SP : [s.n.], 1996.

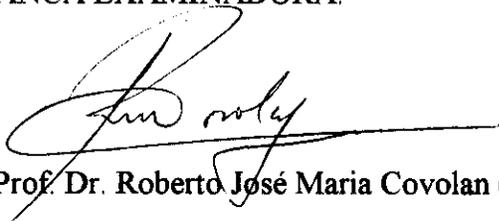
Orientador: Roberto J. M. Covolan.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Modelos a quarks. 2. Hádrons - Multiplicidade. 3. Mésons. I. Covolan, Roberto José Maria. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE
MIRIAN BATISTA

DATA: 28 / 06 / 96

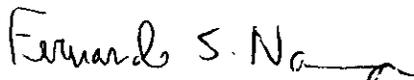
BANCA EXAMINADORA:



- Prof. Dr. Roberto José Maria Covolan (Orientador)



- Profa. Dra. Márcia Begalli



- Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra



- Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato



- Prof. Dr. José Bellandi Filho

Aos meus pais e irmãos

Agradecimentos

Meus mais sinceros agradecimentos.

- *Ao Prof. Roberto Covolan pela disponibilidade e amizade com que me recebeu no Grupo de Teoria, e pela orientação e incentivo durante o trabalho de doutorado.*
- *Ao Prof. Bellandi, por ter contribuído como co-orientador, através das sugestões e discussões ao longo deste trabalho, além de um agradecimento muito especial por ter feito a revisão final desta tese.*
- *À Prof. Carola, pelo incentivo e discussões.*
- *Ao Mario de Castro, pela ajuda com os computadores aqui no departamento.*
- *Ao pessoal da Biblioteca da Física, em especial à Nilza, pela ajuda constante com o material bibliográfico.*
- *Ao pessoal da CPG, Armando, Maria Ignês e Márcia, pelos inúmeros auxílios prestados.*
- *A todos os integrantes do Grupo de Teoria, Mara, Cesar, Conceição, Veríssimo, Juliana, Luiz Américo, Adriana, Gustavo e ao "Prof." Ary, pela amizade e companheirismo ao longo deste trabalho.*
- *Ao amigo Montanha, pelo auxílio constante na solução de problemas computacionais e conceituais deste trabalho, e pela amizade e apoio.*
- *Aos companheiros de Pós-Graduação do Departamento de Raios Cósmicos, Álvaro, Paulo, Cibele, Sérgio, pela amizade.*
- *Às secretárias do departamento, Sandra e Tereza, pela colaboração.*
- *Ao CNPq, cujo apoio financeiro tanto contribuiu para a execução deste trabalho.*

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), FAPESP e FAEP.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	Aspectos gerais dos processos de aniquilação e^+e^-	7
2.1	Características dos jatos em e^+e^-	7
2.2	Compilação de dados experimentais	9
2.3	Fenomenologia dos processos e^+e^-	13
3	Descrição do formalismo	18
3.1	Modelo de cascatas de quarks	18
3.2	Condições de contorno	24
3.2.1	Solução da equação de difusão	26
3.3	Seção de choque para produção de hádrons	36
3.3.1	Distribuição em x_p	40
4	Apresentação dos resultados	43
4.1	Espectro de píons carregados	43
4.2	Espectro dos píons neutros	55
4.3	Espectro dos káons carregados	59
4.4	Espectro dos káons neutros	68
4.5	Cálculo do momento transversal total $\langle p_t \rangle$	69
5	Discussão final	72
	Apêndice	75
	Bibliografia	78

Lista de Figuras

1.1	Hádron produzido com fração de momento x do quark.	5
2.1	Representação dos eventos a dois jatos em e^+e^- : produção do par de quarks.	8
2.2	Representação dos eventos a três jatos: emissão de glúons.	8
2.3	Medidas de seção de choque diferencial (mb) para produção de píons carregados em função da fração de momento total. (a) Escala logaritmica - linear, (b) escala linear - logaritmica, [16], [17] e [18]	10
2.4	Medidas de seção de choque diferencial (mb) para produção de píons carregados em função da variável ξ [14], [17] e [29].	11
2.5	Multiplicidade média das partículas carregadas em aniquilação e^+e^- em função da energia no CM, juntamente com as predições de QCD para $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + q\bar{q}g$ (curva sólida) e $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (curva tracejada) [14].	12
2.6	Medidas do ALEPH [18] para seção de choque diferencial em função da fração de momento total para π^\pm , comparadas com medidas do OPAL [29] e predições do JETSET e HERWIG.	14
2.7	Medidas do ALEPH [18] para seção de choque diferencial em função da fração de momento total para K^\pm , comparadas com medidas do OPAL [29] e predições do JETSET e HERWIG.	15
2.8	Distribuições em ξ para π^\pm , K^\pm e p, \bar{p} , as curvas sólidas foram obtidas através de <i>fits</i> com uma distribuição gaussiana em torno do pico da distribuição [18].	16
2.9	Medidas do TOPAZ [17] para as distribuições em ξ . As curvas sólidas e pontilhadas são predições do MLLA para 58 GeV e 29 GeV, respectivamente.	16

2.10	Medidas do TASSO para as distribuições em ξ de píons carregados, comparadas com predições do MLLA (curvas sólidas) e com distribuições do tipo gaussiana (curvas tracejadas) [20].	17
2.11	Medidas do L3 e JADE para as distribuições em ξ de píons neutros, comparadas com predições do MLLA (curvas sólidas) e com distribuições do tipo gaussiana (curvas tracejadas) [20].	17
3.1	Estágio inicial da cascata de quark.	19
3.2	Diagramas para a produção de mésons. (a) A partir dos quarks de sabor u, d, s , (b) a partir dos quarks $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$	21
3.3	Diagrama de Feynman para os processos e^+e^-	24
3.4	Dados de distribuição em p_t^2 das partículas carregadas; as curvas sólidas foram obtidas com a parametrização dada pela equação 3.95.	41
4.1	A figura (a) corresponde à seção de choque diferencial (mb) para píons carregados em todo intervalo de x_p , A figura (b) mostra somente o que acontece na região de baixíssimos x_p	46
4.2	Seção de choque diferencial (mb) para píons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p	47
4.3	Seção de choque diferencial (mb) para píons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p	48
4.4	Seção de choque diferencial (mb) para píons carregados; (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p	49
4.5	Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons carregados para energias no CM 14 e 22 GeV	51
4.6	Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons carregados para energias no CM 34 e 58 GeV	52
4.7	Seção de choque diferencial para píons carregados (mb) para energia no CM 91.2 GeV e a seguir todas as figuras em um mesmo gráfico.	53
4.8	Multiplicidade média dos píons carregados em função da energia no CM; os pontos teóricos foram obtidos a partir da integração em x_p da seção de choque diferencial escrita em termos da fração de momento total.	54

4.9	Diagramas para a produção do méson π^0 a partir dos quarks de sabor u , d e \bar{u} , \bar{d}	55
4.10	Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons neutros em termos da fração de momento total para energia CM 35 e 44 GeV.	57
4.11	Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons neutros em termos da fração de momento total para 91.2 GeV.	58
4.12	Seção de choque diferencial (mb) em termos da variável ξ de píons neutros para energias no CM 35 e 91.2 GeV.	58
4.13	Multiplicidade média dos píons neutros em função da energia no CM. . .	59
4.14	A figura (a) corresponde a seção de choque diferencial (mb) para káons carregados em todo intervalo de x_p , A figura (b) mostra somente o que acontece na região de baixíssimos x_p	61
4.15	Seção de choque diferencial (mb) para káons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p	62
4.16	Seção de choque diferencial (mb) para káons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p	63
4.17	Seção de choque diferencial (mb) para káons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p	64
4.18	Seção de choque diferencial normalizada (mb) para káons carregados em termos da variável ξ para 14 e 22 GeV	65
4.19	Seção de choque diferencial normalizada (mb) para káons carregados em termos da variável ξ para 34 e 58 GeV	66
4.20	Seção de choque diferencial normalizada para káons carregados em termos da variável ξ para 91.2 GeV e a seguir todas as figuras em um mesmo gráfico.	67
4.21	Multiplicidade média dos káons carregados em função da energia no CM, os pontos teóricos foram calculados por integração da distribuição em x_p	68
4.22	$\langle p_t \rangle$ em função da energia c.m. para píons carregados, káons carregados e píons neutros. As curvas foram obtidas através de <i>fits</i> com os valores da tabela 4.7	70

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros da distribuição em p_t^2 para as partículas carregadas.	42
3.2	Valores de $\langle p_t \rangle$ (GeV/c) das partículas carregadas, (a) calculado com os parâmetros obtidos nos <i>fits</i> , (b) valores experimentais.	42
4.1	Parâmetros do modelo fixados através de <i>fits</i> dos dados de seção de choque diferencial para píons carregados.	44
4.2	Valores de α obtidos por <i>fits</i> da mesma forma que os parâmetros da tabela 4.1.	44
4.3	Parâmetros da distribuição em p_t^2 para píons carregados, o parâmetro a_2 é dado em unidades de $(GeV/c)^{-1}$	45
4.4	Parâmetros da distribuição em p_t^2 para píons neutros.	57
4.5	Parâmetros da distribuição em p_t^2 para káons carregados.	60
4.6	Parâmetros da distribuição em p_t^2 para π^{ch} , K^{ch} e π^0	71
4.7	Valores de $\langle p_t \rangle$ em GeV/c calculados a partir dos parâmetros das distribuições em p_t^2	71

Sumário

Neste trabalho, apresentamos um modelo para descrever a produção inclusiva de mésons em reações do tipo e^+e^- . Este problema é tratado em termos de um formalismo de equação de difusão para três sabores de quarks (u, d, s). Estas equações são resolvidas usando o método de operadores exponenciais, que tem sido aplicado com sucesso na solução de equações de difusão da radiação cósmica na atmosfera. Com estas soluções, obtemos as funções de fragmentação dos quarks u, d e s em hádrons, o que torna possível descrever o espectro inclusivo de alguns mésons pseudoescalares em um vasto range de energia.

Abstract

In this thesis a model is proposed which describes the inclusive production of mesons in e^+e^- reactions. The formalism used is the one of diffusion equations applied to three quark flavors (u, d, s). The equations are solved using the method of exponential operators which has been applied successfully in the solution of diffusion equations for the cosmic radiation in the atmosphere. The fragmentation functions for the quarks u , d and s into hadrons are then obtained from the solutions found and a description of the inclusive spectrum of some pseudoscalar mesons is achieved for a broad range of the energy.

Capítulo 1

Introdução

O estudo de reações hadrônicas e de aniquilação e^+e^- tem sido, por mais de duas décadas, um dos principais instrumentos para a pesquisa a respeito da dinâmica dos processos hadrônicos inelásticos. Em processos hadrônicos, tais reações podem ser divididas basicamente em duas categorias: 1) os chamados processos difrativos, para os quais as partículas são produzidas com baixo p_T (momento transversal); 2) os processos não - difrativos (de grande p_T). Esta componente pode ser concebida como sendo gerada por quarks altamente energéticos, produzidos em colisões duras, que desencadeiam um processo de produção de cascatas através da emissão de hádrons, que só se exaure quando não houver mais energia suficiente para sustentá-lo.

Processos de aniquilação e^+e^- produzindo hádrons também podem ser concebidos em termos de cascatas partônicas e é esse o tema do presente trabalho.

Este processo de formação de cascatas ao nível de partons foi proposto inicialmente por Matsuda [1] e desenvolvido posteriormente por Fukuda e Iso [2], que o reformularam, colocando-o em termos de um formalismo tipo equações de difusão [3].

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um modelo que permita analisar o espectro inclusivo de hádrons em reações de aniquilação e^+e^- . Este problema será tratado dentro desse formalismo de equações de difusão, onde buscamos solucioná-lo através de um método de operadores exponenciais, que tem sido aplicado com sucesso na solução de equações de difusão da radiação cósmica na atmosfera (ver por exemplo [4] e referências lá citadas).

O modelo consiste, basicamente, no cálculo das funções de fragmentação dos

quarks em mésons (ver figura 1.1), que são escritas em termos das soluções da Equação de Difusão. Neste trabalho levamos em conta apenas a contribuição de quarks do tipo u , \bar{u} , d , \bar{d} , s e \bar{s} que são produzidos na aniquilação e^+e^- , e que em seguida desenvolvem o processo de cascatas. Conhecidas as funções de fragmentação, calculamos os espectros inclusivos, ou seja, as seções de choque diferenciais em termos das variáveis x_F , x_p e $\ln(\frac{1}{x_p})$ para a produção de mésons pseudoescalares, tais como: π^\pm , π^0 , K^\pm , K^0 e \bar{K}^0 .

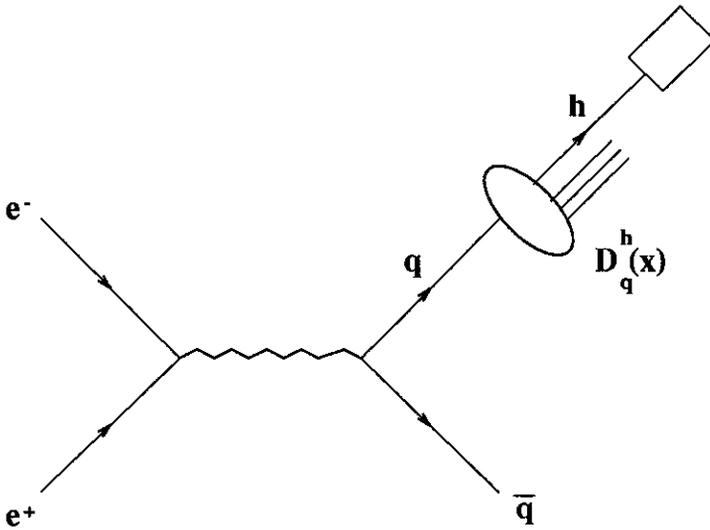


Figura 1.1: Hádron produzido com fração de momento x do quark.

As funções de fragmentação têm uma vasta gama de aplicações que vão desde a Física de Radiação Cósmica (as funções de fragmentação seriam utilizadas nesse caso para a obtenção das funções de produção, que são empregadas como *inputs* no cálculo de cascatas atmosféricas) até o cálculo do espectro inclusivo de partículas produzidas no LEP, passando, também, por experimentos de colisões hadrônicas, recentemente realizados no CERN pela Colaboração UA8.

Um resultado importante deste trabalho é que, com nosso formalismo, podemos calcular a multiplicidade média (inclusiva) dependente da energia, fato já amplamente verificado experimentalmente, além de conseguirmos descrever a produção inclusiva de partículas em e^+e^- para um grande intervalo de energia.

É do desenvolvimento da estrutura deste formalismo que trataremos nos próximos capítulos.

A sequência de apresentação nos vários capítulos é a seguinte: no capítulo 2 apresentamos os aspectos gerais dos processos de aniquilação e^+e^- , juntamente com uma compilação de dados experimentais e um resumo da fenomenologia existente nesta área. No capítulo 3, onde fazemos uma descrição detalhada do modelo, apresentamos os cálculos realizados para se obter as soluções da Equação de Difusão para o problema da cascata de quarks no caso de processos tipo e^+e^- . Finalizamos esse capítulo com o cálculo das funções de fragmentação dos quarks e, em decorrência, dos espectros inclusivos. No capítulo 4 apresentamos os resultados obtidos com o modelo em comparação com os dados experimentais. No capítulo 5 apresentamos as discussões finais e perspectivas futuras. Finalizamos com um apêndice, mostramos algumas passagens fundamentais utilizadas nos cálculos do capítulo 4.

Capítulo 2

Aspectos gerais dos processos de aniquilação e^+e^-

Neste capítulo fazemos uma discussão a respeito das propriedades dos estados hadrônicos finais provenientes dos jatos produzidos em processos do tipo aniquilação e^+e^- . Apresentamos também o perfil dos dados experimentais utilizados nesta tese. Finalizamos com uma breve discussão sobre a fenomenologia existente na área.

2.1 Características dos jatos em e^+e^-

A produção de jatos em e^+e^- e as características de sua fragmentação em hádrons têm sido estudadas através de medidas do espectro inclusivo de partículas carregadas para energias no centro de massa (CM) entre 12 e 91.2 GeV.

Neste intervalo de energia, a aniquilação e^+e^- em hádrons é dominada pela produção de cinco quarks u, d, s, c e b . Além disso, no regime de altas energias observam-se efeitos devidos à Bremsstrahlung forte com emissão de glúons (figura 2.2), efeitos esses que não são observados em baixas energias.

Uma análise dos dados experimentais permite assumir a hipótese de que, para altas energias, a aniquilação e^+e^- em hádrons ocorre predominantemente através da produção do par de quarks. São os chamados eventos a dois jatos do tipo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (figura 2.1), onde os quarks produzidos fragmentam-se e produzem os hádrons. Uma pequena fração dos eventos tem estrutura a três jatos (figura 2.2).

Uma outra característica importante destes processos é que, em uma ani-

quilação e^+e^- , os quarks são produzidos em direções opostas, independentemente um do outro, ao contrário das colisões hádron-hádron que, pela sua própria estrutura, sofrem a interferência dos seus “vizinhos”.

Estas duas características tornam os processos de aniquilação e^+e^- um tipo “limpo” de interação, e conseqüentemente um instrumento poderoso quando se quer investigar os mecanismos que envolvem a fragmentação de quarks em hádrons.

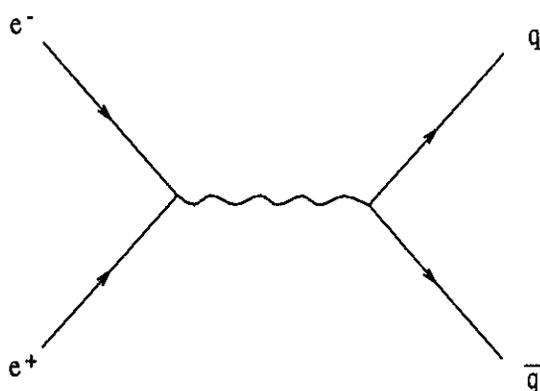


Figura 2.1: Representação dos eventos a dois jatos em e^+e^- : produção do par de quarks.

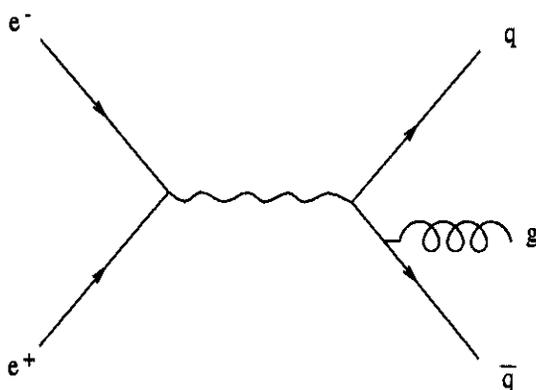


Figura 2.2: Representação dos eventos a três jatos: emissão de glúons.

2.2 Compilação de dados experimentais

Nos estados hadrônicos finais, os observáveis físicos que podem dar informações a respeito da dinâmica que envolve o processo de fragmentação de quarks em hádrons em reações do tipo e^+e^- são:

- multiplicidade média inclusiva das partículas produzidas,
- a seção de choque diferencial para produção de mésons em termos da fração de momento total (x_p),
- a seção de choque diferencial em termos da variável $\xi = \ln(\frac{1}{x_p})$.

Estes resultados experimentais são obtidos em aceleradores tais como o **PE-TRA**, no DESY, com o detector **TASSO** para energias no CM entre 12 e 41.4 GeV, **TRISTAN** (Transposable Ring Intersection Storage Accelerator in Nippon) *eletron-positron collider*, com o detector **TOPAZ** para energias no CM entre 52 e 61.4 GeV, e o **LEP** (Large Eletron-Positron collider) com os detectores **OPAL**, **ALEPH**, **DELPHI** e **L3** que operam na energia correspondente a massa do Z_0 , 91.2 GeV.

Apresentamos a seguir um panorama geral destes dados. Na figura 2.3 têm-se os dados da distribuição em x_p para várias energias e na figura 2.4 apresentamos o perfil das distribuições típicas em ξ .

Pela figura 2.3 observa-se uma quebra de *scaling* com a energia na região de baixos x_p (com uma alteração na escala este efeito é mais visível). Esta violação de *scaling* fica mais evidente nas distribuições em ξ , figura 2.4. Isto implica, a *priori*, que qualquer tentativa no sentido de se descrever estas distribuições deve incorporar uma dependência com a energia.

Os dados que apresentamos nas figuras 2.3 e 2.4 são para os píons carregados. Para os káons tem-se o mesmo comportamento, exceto para as distribuições em ξ que, no casos dos káons, apresentam barras de erros bem maiores.

Na figura 2.5 [14] tem-se o perfil da multiplicidade média das partículas carregadas em função da energia de centro de massa. Nesta figura a multiplicidade média $\langle n_{ch} \rangle$ é comparada com predição da Cromodinâmica Quântica - QCD para eventos do tipo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + q\bar{q}g$ (dois + três jatos) e predição para eventos do tipo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (dois jatos).

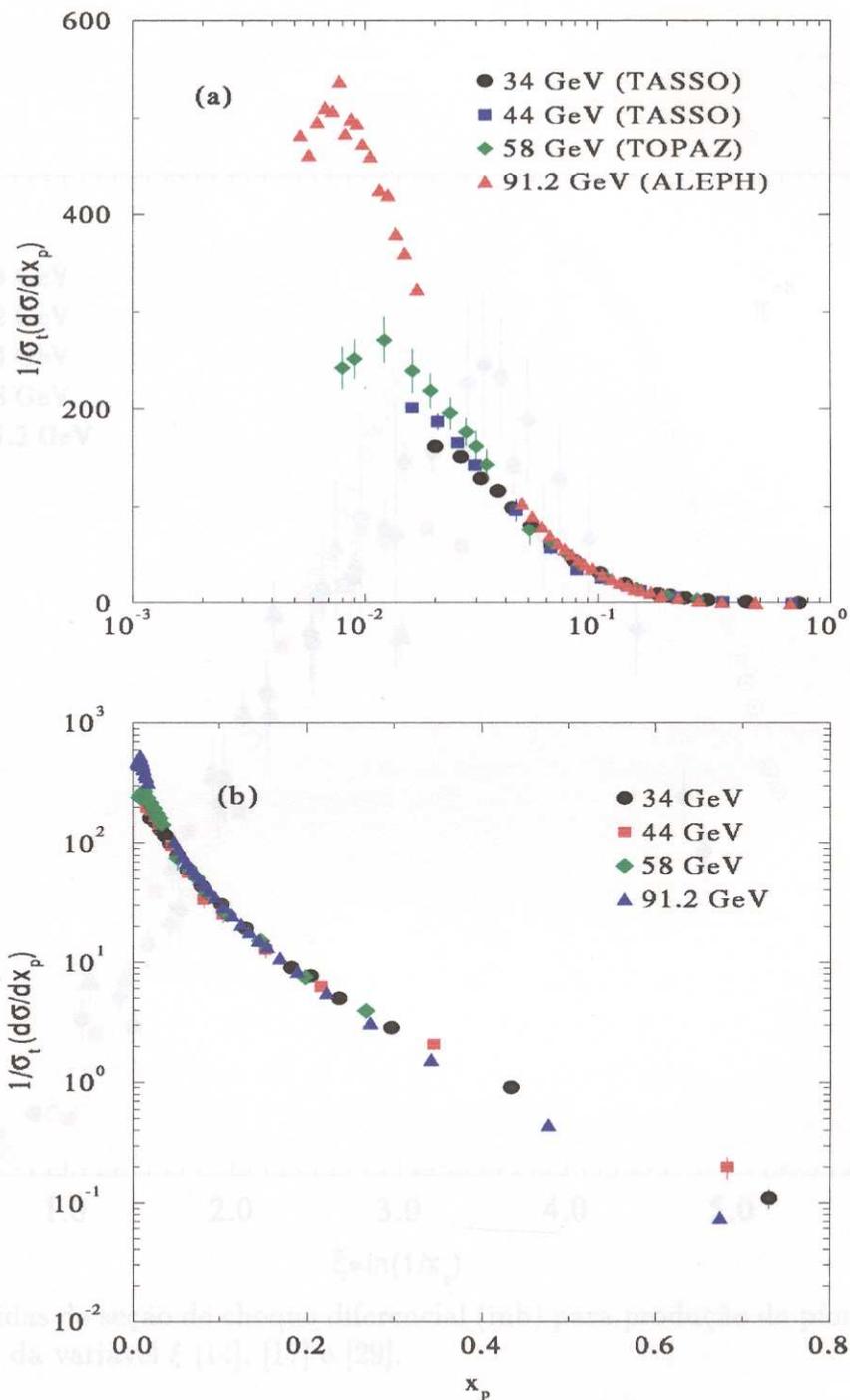


Figura 2.3: Medidas de seção de choque diferencial (mb) para produção de píons carregados em função da fração de momento total. (a) Escala logarítmica - linear, (b) escala linear - logarítmica, [16], [17] e [18]

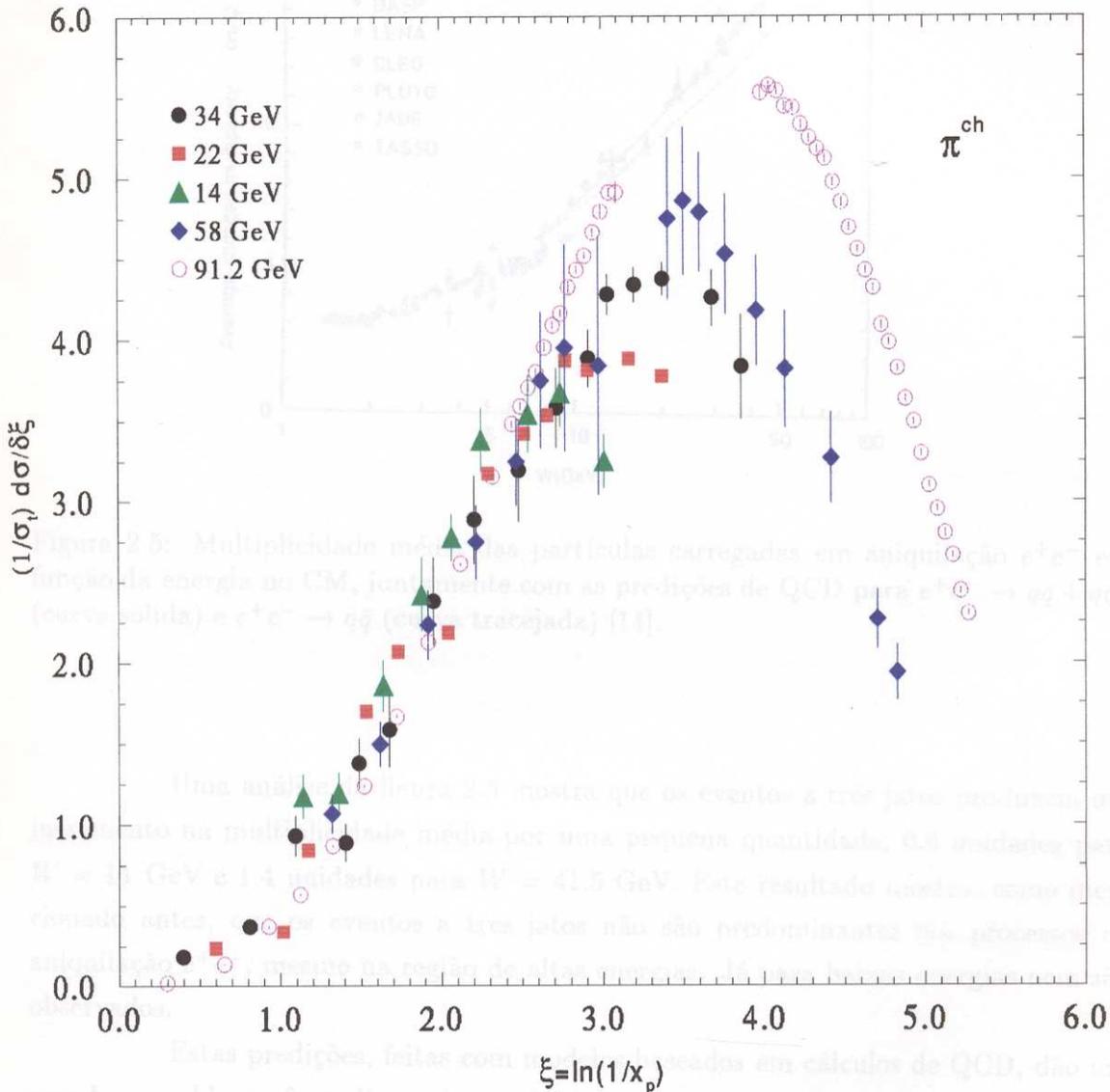


Figura 2.4: Medidas de seção de choque diferencial (mb) para produção de píons carregados em função da variável ξ [14], [17] e [29].

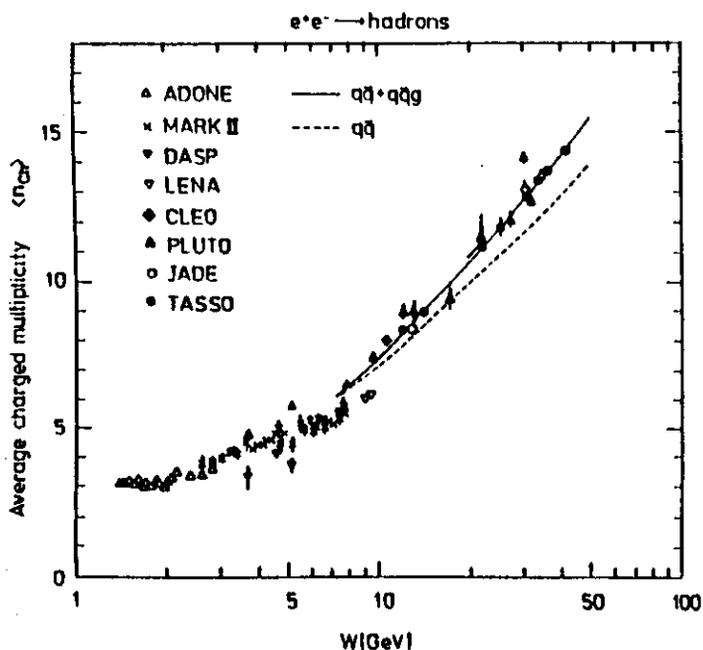


Figura 2.5: Multiplicidade média das partículas carregadas em aniquilação e^+e^- em função da energia no CM, juntamente com as previsões de QCD para $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + q\bar{q}g$ (curva sólida) e $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (curva tracejada) [14].

Uma análise da figura 2.5 mostra que os eventos a três jatos produzem um incremento na multiplicidade média por uma pequena quantidade; 0.6 unidades para $W = 14$ GeV e 1.4 unidades para $W = 41.5$ GeV. Este resultado mostra, como mencionado antes, que os eventos a três jatos não são predominantes nos processos de aniquilação e^+e^- , mesmo na região de altas energias. Já para baixas energias nem são observados.

Estas previsões, feitas com modelos baseados em cálculos de QCD, dão um grande respaldo ao formalismo desenvolvido nesta tese para descrever a produção inclusiva de mésons em e^+e^- , e que tem por base o Modelo de Cascata de Quarks. O fato é que, no modelo a ser aqui apresentado, fizemos todo um desenvolvimento baseado na hipótese de que os eventos que dão a maior contribuição são do tipo em que ocorre apenas a produção de um par inicial de quarks, não tendo sido incorporados os eventos onde há a emissão de glúons. Pelos resultados de outros modelos, esta aproximação não

afetará muito os resultados finais para energias baixas e intermediárias, porém espera-se que isto ocorra para as energias do LEP.

2.3 Fenomenologia dos processos e^+e^-

Até o momento não se tem muito conhecimento a respeito dos mecanismos de fragmentação de quarks em hádrons (hadronização) decorrentes da aniquilação e^+e^- . Não existe um modelo fenomenológico único capaz de explicar, de uma forma abrangente, estes mecanismos. Vários modelos com diferentes graus de sofisticação são usados para descrever os processos de hadronização. À medida que surgem novos resultados experimentais, muitos destes modelos são descartados por não descreverem estes dados. Surge então um cenário “Darwiniano”, onde modelos mal sucedidos são eliminados e os bem sucedidos desenvolvem-se. No entanto, existe ainda muita controvérsia com relação ao sucesso destes modelos na descrição dos processos de hadronização.

Porém, existe hoje uma concepção no sentido de se estabelecer alguns conceitos que representem as idéias centrais de um modelo padrão para descrever os processos de hadronização dos quarks.

Os modelos mais utilizados atualmente são os implementados em termos de programas computacionais e baseados em técnicas de Monte Carlo. Estes programas geram eventos completos, ou seja, desde os estados partônicos perturbativos até os estados finais que, no caso, são as partículas observadas. Os principais modelos implementados através das técnicas de Monte Carlo são:

- *String Fragmentation* ou *Modelo de Lund* → implementado no Lund Monte Carlo para descrever a fragmentação de jatos produzidos em e^+e^- , JETSET. Uma descrição detalhada deste gerador de eventos pode ser encontrada na referência [5].
- *Cluster Fragmentation* → implementado no HERWIG Monte Carlo [6].
- ARIADNE → baseado no modelo de Lund com pequenas modificações, aqui o *string* não é linear, mas tridimensional.

Um outro método utilizado para descrever o espectro hadrônico combina o modelo *QCD jets in a modified leading logarithmic approximation* (MLLA) [7] com conceitos de dualidade local parton - hádron (LPHD) [8].

Uma descrição mais detalhada das características principais destes modelos pode ser encontrada nas referências [9], [10]. Aqui nos limitaremos a mostrar alguns resultados destes modelos.

Nas figuras 2.6 e 2.7 mostramos previsões do JETSET e HERWIG para a seção de choque diferencial de píons e káons carregados, comparadas com os dados experimentais do ALEPH e OPAL, ambos para energia no CM 91.2 GeV.

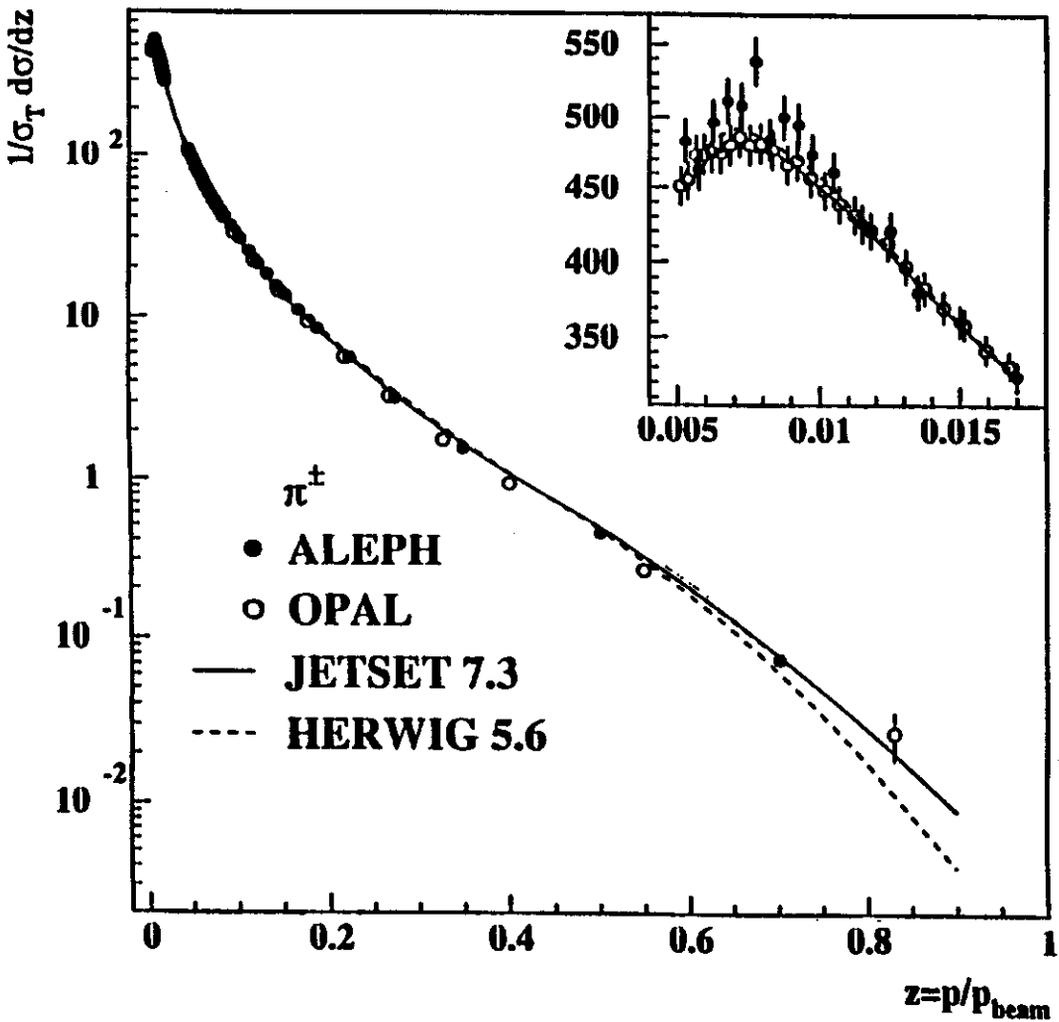


Figura 2.6: Medidas do ALEPH [18] para seção de choque diferencial em função da fração de momento total para π^\pm , comparadas com medidas do OPAL [29] e previsões do JETSET e HERWIG.

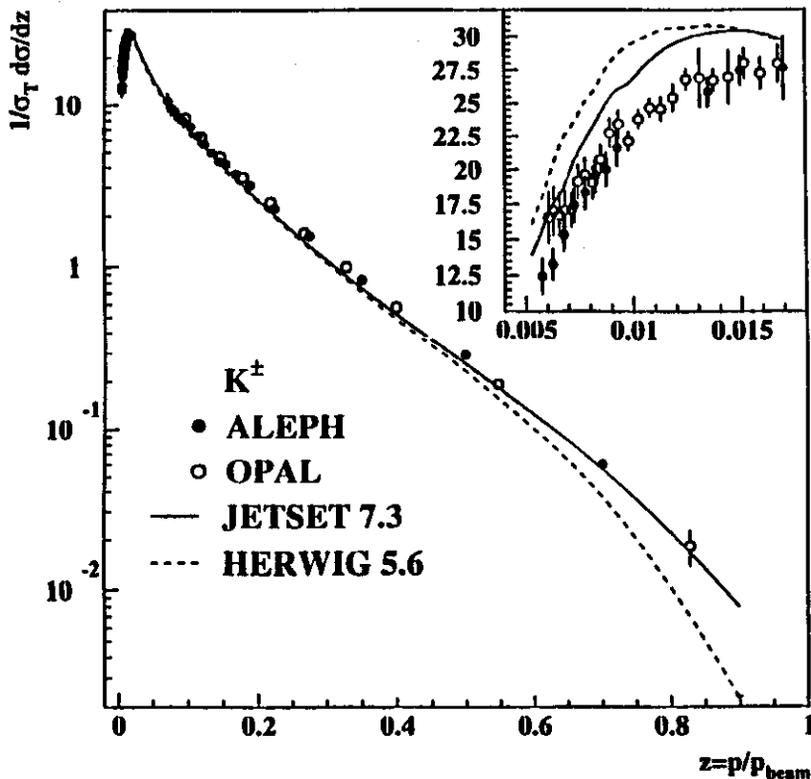


Figura 2.7: Medidas do ALEPH [18] para seção de choque diferencial em função da fração de momento total para K^\pm , comparadas com medidas do OPAL [29] e previsões do JETSET e HERWIG.

Na figura 2.8 têm-se as medidas do ALEPH para as distribuições em $\xi = \ln(1/z)$. As curvas sólidas foram obtidas por *fits* com uma função gaussiana, e a posição do pico (ξ^*) destas distribuições foi determinada. Nas figuras 2.9, 2.10 e 2.11 apresentamos medidas do TOPAZ (58 GeV), TASSO (22 e 34 GeV) e L3 (91.2 GeV), respectivamente, para estas mesmas distribuições, comparadas com previsões do MLLA.

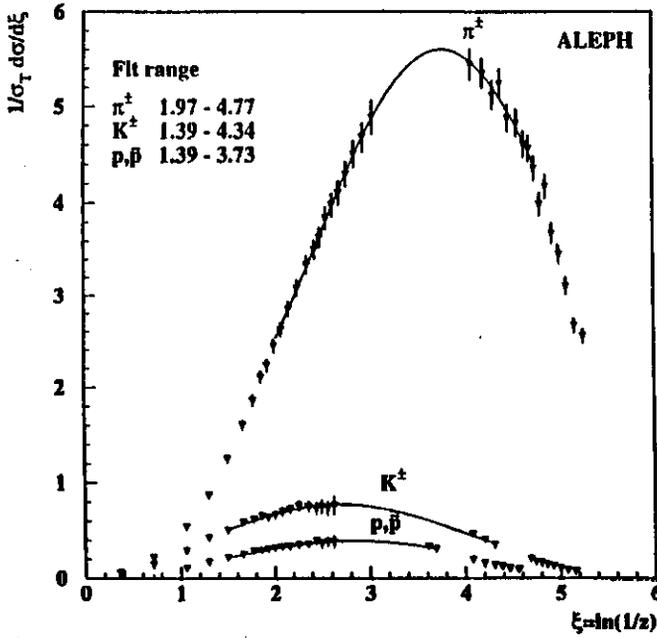


Figura 2.8: Distribuições em ξ para π^\pm , K^\pm e p, \bar{p} , as curvas sólidas foram obtidas através de *fits* com uma distribuição gaussiana em torno do pico da distribuição [18].

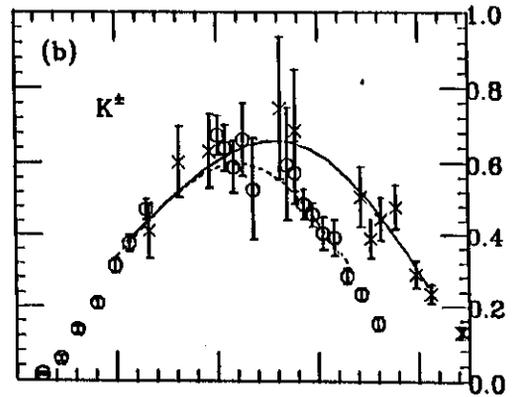
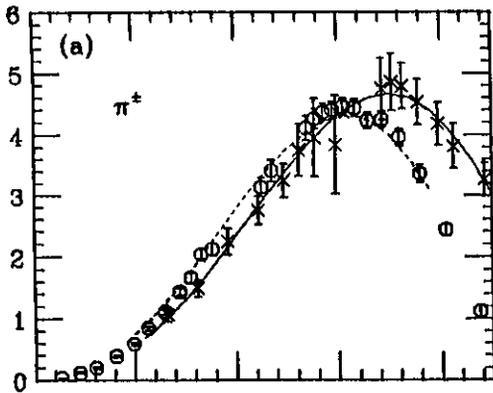


Figura 2.9: Medidas do TOPAZ [17] para as distribuições em ξ . As curvas sólidas e pontilhadas são previsões do MLLA para 58 GeV e 29 GeV, respectivamente.

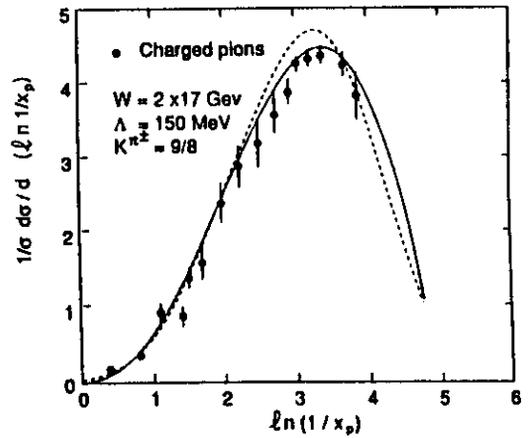
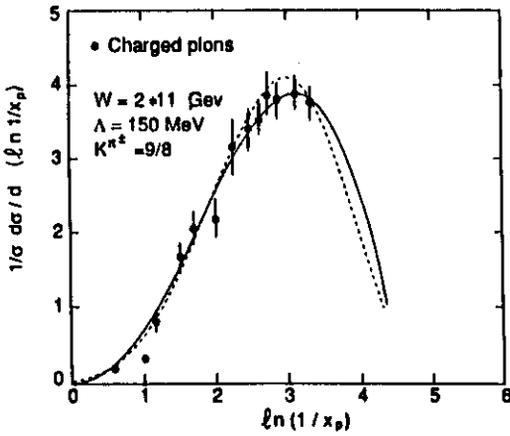


Figura 2.10: Medidas do TASSO para as distribuições em ξ de píons carregados, comparadas com previsões do MLLA (curvas sólidas) e com distribuições do tipo gaussiana (curvas tracejadas) [20].

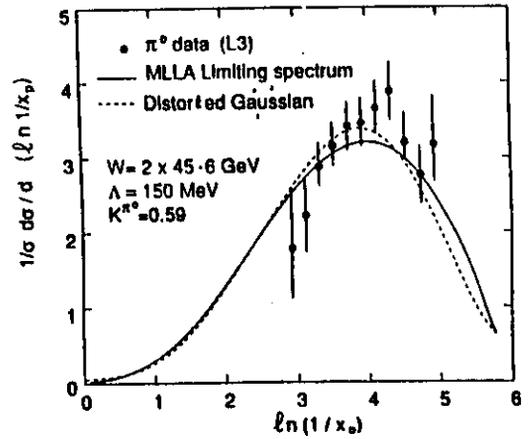
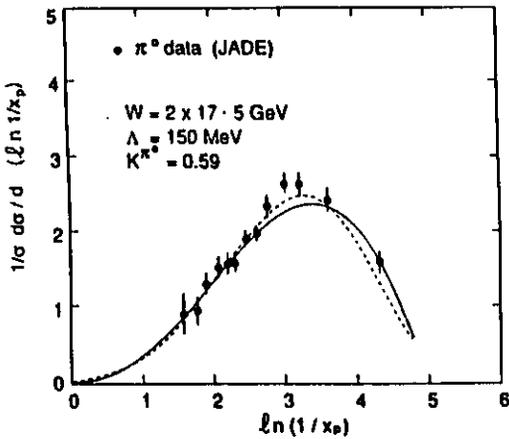


Figura 2.11: Medidas do L3 e JADE para as distribuições em ξ de píons neutros, comparadas com previsões do MLLA (curvas sólidas) e com distribuições do tipo gaussiana (curvas tracejadas) [20].

Capítulo 3

Descrição do formalismo

Apresentamos aqui uma descrição detalhada do formalismo utilizado para descrever o processo de formação de cascatas ao nível de partons em interações do tipo aniquilação e^+e^- . Nosso desenvolvimento teórico consiste em obter as soluções da Equação de Difusão que descrevem a evolução temporal dos quarks na cascata. O método utilizado para resolver essa equação é apresentado em detalhes neste capítulo, e as funções de fragmentação dos quarks em hádrons são construídas a partir das suas soluções.

3.1 Modelo de cascatas de quarks

Vamos considerar uma reação do tipo aniquilação e^+e^- , onde um par quark e anti-quark é formado, ou seja,

$$e^+ + e^- \rightarrow q_i + \bar{q}_i,$$

onde o índice i refere-se ao quark de sabor. Neste trabalho estamos contemplando apenas três sabores, portanto q_i pode ser um quark u , d ou s .

Depois do processo de aniquilação cada quark passa a ter uma energia bem definida e originará uma cascata de quarks por emissão sucessiva de mésons, ou seja, o quark q_i produzido na reação acima emitirá um méson (M) e se transformará em um quark q'_i , que por sua vez, dará continuidade à cascata (figura 3.1). O processo de cascatas só vai se exaurir quando o quark produzido no final não tiver energia suficiente para sustentá-lo.

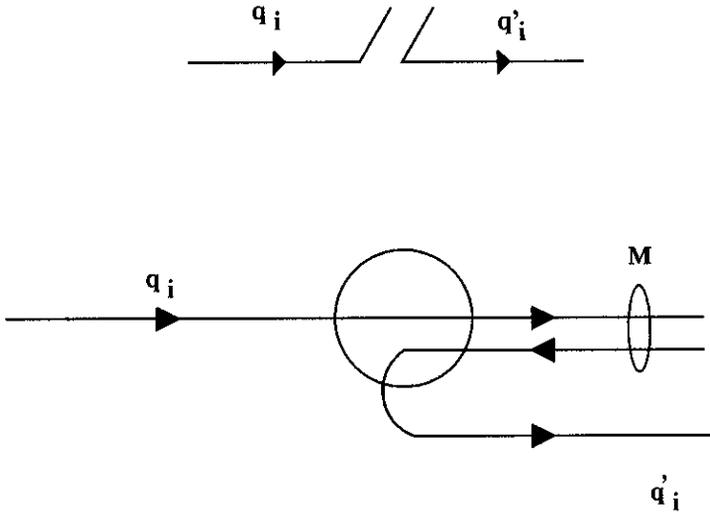


Figura 3.1: Estágio inicial da cascata de quark.

Note-se que, no presente esquema, o quark que inicia a cascata é do tipo q_i , mas existe a possibilidade do mesmo tipo de processo se desenvolver a partir de um quark \bar{q}_i e isto deve ser contemplado.

Para descrever a evolução temporal da cascata de quarks, utilizamos a equação de difusão proposta por Fukuda e Iso, ou seja,

$$\frac{dQ(x, t)}{dt} = -\lambda \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & c \end{pmatrix} Q(x, t) + \lambda \int_x^{x_0} dx' f(x, x') TQ(x', t) \quad (3.1)$$

Na equação de difusão $Q(x, t)$ é um spinor cujas componentes são as funções espectrais dos quarks. Como estamos contemplando apenas três quarks de sabores (u, d, s), então

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} U(x, t) \\ D(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

A função $f(x, x')$ representa a probabilidade do quark inicial, com fração de momento x' , emitir um méson (M) com fração de momento $(x' - x)$ e tornar-se um quark com fração de momento x . Essa função é definida como

$$f(x, x') = \frac{(1 + \alpha)}{x'} \left(\frac{x}{x'}\right)^\alpha, \quad (3.3)$$

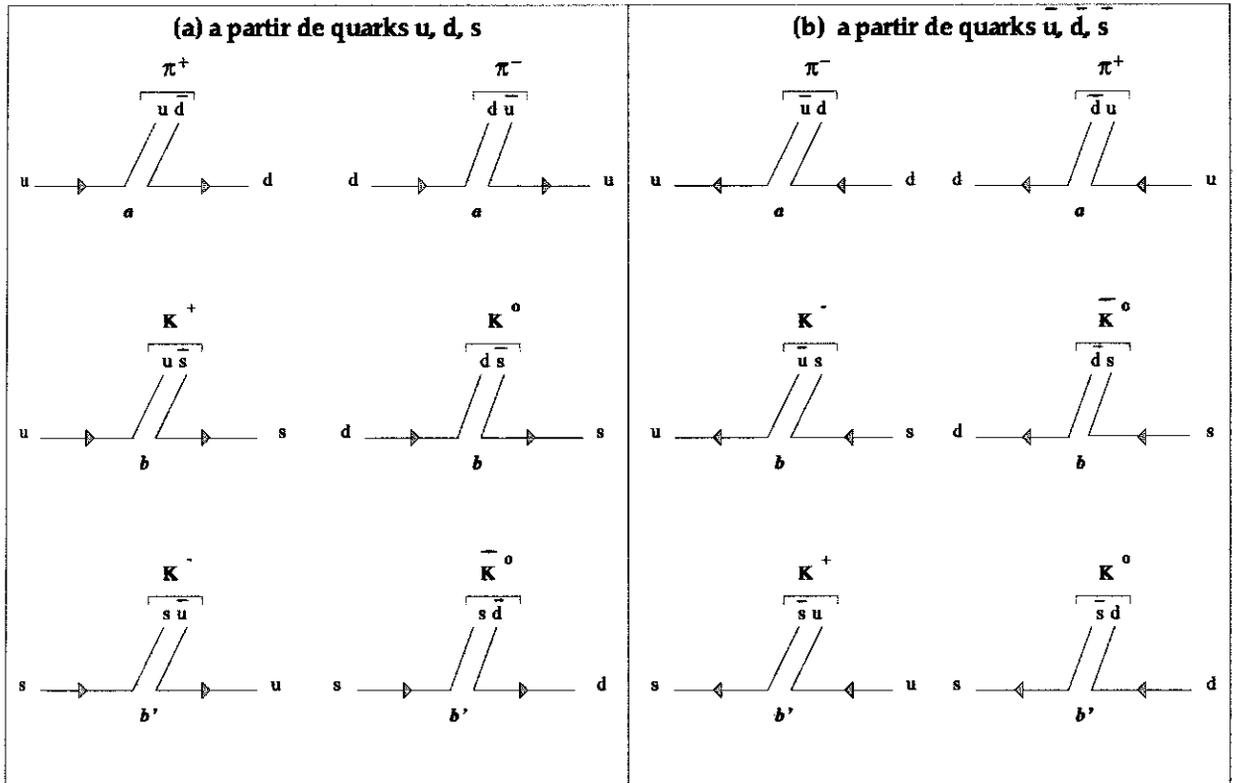
que corresponde aproximadamente a uma distribuição de emissão de partículas tipo *Bremsstrahlung* e, como veremos, no limite de altas energias apresentará um comportamento do tipo $1/x'$.

Na equação 3.1, λ é a frequência de emissão, $x = 2p/\sqrt{s}$ é a variável de Feynman e c é um fator que representa a violação de simetria $SU(3)$.

Uma interpretação mais detalhada de cada termo que aparece na Equação de Difusão é a seguinte. O primeiro termo no lado direito da equação 3.1 refere-se aos quarks que estão inicialmente no intervalo de energia entre x e $x + dx$, e que, em um instante posterior à emissão, passam a ter energia fora deste intervalo. O segundo termo corresponde aos quarks que inicialmente têm energia acima deste intervalo e entram nele depois do processo de emissão. Neste último caso, além da função $f(x, x')$ que representa a distribuição de energia das partículas emitidas, há a necessidade de se computar a probabilidade de variação ou não do estado de sabor do quark remanescente depois do processo de emissão.

Na Equação de Difusão, quem estabelece a variação do sabor do quark é a matriz \mathbf{T} , dada por 3.4. Neste caso, os elementos desta matriz definem probabilidades de troca ou não de sabor no processo de emissão. Estes processos estão representados nas figuras 3.2.

$$T = \begin{pmatrix} 1 - a - b & a & b' \\ a & 1 - a - b & b' \\ b & b & c - 2b' \end{pmatrix} \quad (3.4)$$



Diagramas para produção de mésons

Figura 3.2: Diagramas para a produção de mésons. (a) A partir dos quarks de sabor u, d, s , (b) a partir dos quarks $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$.

$a \rightarrow$ parâmetros relativos aos processos do tipo:

$$u \rightarrow d + \pi^+,$$

$$d \rightarrow u + \pi^-,$$

$$\bar{d} \rightarrow \bar{u} + \pi^+,$$

$$\bar{u} \rightarrow \bar{d} + \pi^-.$$

$b \rightarrow$ corresponde aos processos do tipo

$$\begin{aligned} u &\rightarrow s + K^+, \\ d &\rightarrow s + K^0, \\ \bar{u} &\rightarrow \bar{s} + K^-, \\ \bar{d} &\rightarrow \bar{s} + \bar{K}^0. \end{aligned}$$

$b' \rightarrow$ corresponde aos processos do tipo

$$\begin{aligned} s &\rightarrow u + K^-, \\ s &\rightarrow d + \bar{K}^0, \\ \bar{s} &\rightarrow \bar{u} + K^+, \\ \bar{s} &\rightarrow \bar{d} + K^0. \end{aligned}$$

Aqui, nós associamos os parâmetros a , b e b' com a troca de sabor em uma dada emissão. Como o quark s é mais pesado que os quarks u e d , cujas massas são supostas iguais, o parâmetro a representa a transição quark leve \rightarrow quark leve, b representa a transição quark leve \rightarrow quark pesado, e b' a transição quark pesado \rightarrow quark leve.

Definindo desta forma, nos processos envolvendo produção de káons ocorre uma inversão dos parâmetros b e b' para os casos onde temos anti-quarks iniciando a cascata, como representado na figura 3.2. Isto implica que temos *a priori* uma hierarquia para os valores destes parâmetros, ou seja $b' > a > b$, incorporando desta forma a violação de simetria $SU(3)$. Isto é uma questão importante, porque no modelo original [2] a quebra de simetria foi atribuída apenas ao parâmetro c .

A seguinte decomposição para a função $Q(x, t)$

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} U(x, t) \\ D(x, t) \\ S(x, t) \end{pmatrix} = Q_+(x, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Q_-(x, t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + Q_s(x, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

permite desacoplar uma das componentes do sistema de três equações acopladas, restando uma equação diferencial simples para $Q_-(x, t)$ e um sistema acoplado para as

componentes $Q_+(x, t)$ e $Q_s(x, t)$. Antes de introduzir estas equações vamos fazer uma breve discussão sobre o parametro λ que aparece na Equação de Difusão. O parâmetro λ na equação 3.1 foi introduzido apenas por uma questão de dimensão. As componentes spinoriais $Q(x, t)$ definem a função espectral por unidade de frequência no intervalo de tempo t e $t + dt$. Para calcular a chamada função de fragmentação dos quarks na cascata, o que será feito na próxima seção, temos que fazer a convolução entre $\lambda Q(x, t)$ e a função de probabilidade $f(x, x')$ e integrar sobre a variável t . Desta forma, podemos resolver as equações em termos da função $Q(x, z) = \lambda Q(x, t)$, introduzindo a variável $z = \lambda t$. Em termos desta nova variável, o sistema de equações diferenciais é dado por

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + 1 - (1 - 2a - b)D\right]Q_-(x, z) = 0 \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - A\right)Q_+(x, z) = b'DQ_S(x, z) \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - B\right)Q_S(x, z) = 2bDQ_+(x, z), \quad (3.8)$$

onde:

$$A = -1 + (1 - b)D \quad (3.9)$$

$$B = -c + (c - 2b')D \quad (3.10)$$

sendo D um operador definido pela equação

$$DQ(x, z) = \int_x^{x_0} dx' f(x, x')Q(x', z). \quad (3.11)$$

3.2 Condições de contorno

Neste modelo, o quark q_i (\bar{q}_i) que inicia a cascata (figura 3.1) pode ser um quark u , d ou s (\bar{u} , \bar{d} ou \bar{s}), ou seja, pode-se ter as três possibilidades representadas na figura 3.3.

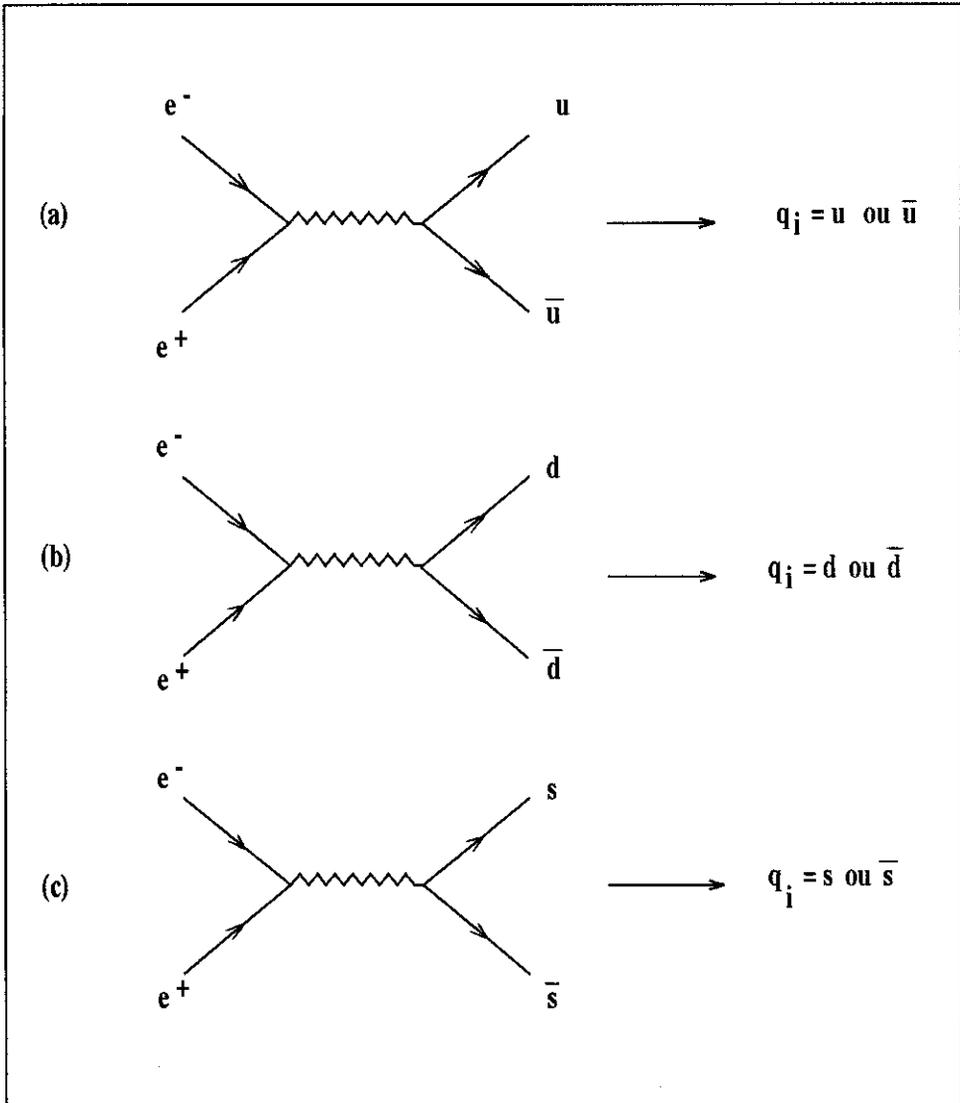


Figura 3.3: Diagrama de Feynman para os processos e^+e^- .

No caso representado na figura (a), temos um quark q_i do tipo u dando início a cascata de quarks, com um certo valor definido de x_0 . Dessa forma, pode-se escolher como condição de contorno uma distribuição do tipo $\delta(x - x_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} U_u(x, 0) &= \bar{U}_{\bar{u}}(x, 0) = \delta(x - x_0), \\ D_u(x, 0) &= \bar{D}_{\bar{u}}(x, 0) = 0, \\ S_u(x, 0) &= \bar{S}_{\bar{u}}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

No caso representado na figura (b) temos que q_i é do tipo d , neste caso teremos:

$$\begin{aligned} D_d(x, 0) &= \bar{D}_{\bar{d}}(x, 0) = \delta(x - x_0), \\ U_d(x, 0) &= \bar{U}_{\bar{d}}(x, 0) = 0, \\ S_d(x, 0) &= \bar{S}_{\bar{d}}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Para o caso representado em (c), temos um quark q_i do tipo s iniciando a cascata, neste caso teremos as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} S_s(x, 0) &= \bar{S}_{\bar{s}}(x, 0) = \delta(x - x_0), \\ U_s(x, 0) &= \bar{U}_{\bar{s}}(x, 0) = 0, \\ D_s(x, 0) &= \bar{D}_{\bar{s}}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Da função espectral dos quarks, temos que $U(x, z)$, $D(x, z)$ e $S(x, z)$ podem ser escritas como combinações lineares das funções $Q_+(x, z)$, $Q_-(x, z)$ e $Q_s(x, z)$, ou seja,

$$\begin{aligned} U_q(x, z) &= Q_+^q(x, z) + Q_-^q(x, z) \\ D_q(x, z) &= Q_+^q(x, z) - Q_-^q(x, z) \\ S_q(x, z) &= Q_s^q(x, z). \end{aligned}$$

Usando as condições de contorno estabelecidas anteriormente para as $U_q(x, 0)$, $D_q(x, 0)$ e $S_q(x, 0)$ e as relações acima, podemos obter as condições de contorno para as funções Q' s em cada um dos casos representados na figura 3.3, ou seja

(a) $q_i = u$

$$Q_+^u(x, 0) = Q_-^u(x, 0) = \frac{\delta(x - x_0)}{2} \quad (3.12)$$

$$Q_s^u(x, 0) = 0 \quad (3.13)$$

(b) $q_i = d$

$$Q_+^d(x, 0) = \frac{\delta(x - x_0)}{2} \quad (3.14)$$

$$Q_-^d(x, 0) = -\frac{\delta(x - x_0)}{2} \quad (3.15)$$

$$Q_s^d(x, 0) = 0 \quad (3.16)$$

(c) $q_i = s$

$$Q_+^s(x, 0) = Q_s^d(x, 0) = 0 \quad (3.17)$$

$$Q_s^s(x, 0) = \delta(x - x_0) \quad (3.18)$$

Para o ramo inferior dos diagramas da figura 3.3, ou seja, para os quarks \bar{u} , \bar{d} e \bar{s} temos exatamente as mesmas condições de contorno, e as equações de difusão são análogas às obtidas para os quarks u , d e s . Há uma inversão nos diagramas de emissão envolvendo partículas estranhas, mas isto não afeta as equações de difusão. Portanto, as soluções que temos para $\bar{U}(x, z)$, $\bar{D}(x, z)$, $\bar{S}(x, z)$ são análogas as soluções para as $U(x, z)$, $D(x, z)$, $S(x, z)$.

3.2.1 Solução da equação de difusão

Para resolvermos o problema da cascata de quarks para o caso de quebra de simetria $SU(3)$ ($c \neq 1$) temos que calcular as soluções das equações diferenciais 3.6, 3.7 e 3.8. A solução da equação 3.6 é trivial e dada por

$$Q_-(x, z) = \exp[-z + (1 - 2a - b)zD]Q_-(x, 0). \quad (3.19)$$

As funções espectrais finais a serem obtidas devem estar integradas em z , que corresponde a integrar na dimensão temporal. Assim, a solução final já integrada em z da equação 3.19 é dada por (ver apêndice).

$$Q_-(x, x_0) = \left\{ \frac{\delta(x - x_0)}{2} + \frac{\Delta_0}{2(\alpha + 1)} f(x, x') \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\Delta_0} \right\} \xi \quad (3.20)$$

onde $\xi = \pm 1$ quando a cascata é iniciada por $u\bar{u}$ ou $d\bar{d}$ respectivamente, $\xi = 0$ quando iniciada por $s\bar{s}$ e $\Delta_0 = (1 - 2b' - b)(\alpha + 1)$

As componentes $Q_s(x, z)$ e $Q_+(x, z)$ satisfazem um sistema de equações de evolução temporal acopladas. Como estamos trabalhando com um sistema de duas equações, podemos aplicar o Método dos Spinores para resolvê-las, utilizando para isto as matrizes de Pauli. Definindo-se um spinor

$$\phi(x, z) = \begin{pmatrix} Q_+(x, z) \\ Q_s(x, z) \end{pmatrix}$$

pode-se reescrever as equações

$$\frac{\partial}{\partial z} Q_+(x, z) = [-1 + (1 - b)D]Q_+(x, z) + b'DQ_s(x, z) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Q_s(x, z) = 2bDQ_+(x, z) + [-c + (c - 2b')D]Q_s(x, z) \quad (3.22)$$

na seguinte forma matricial

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z) = -\Sigma_1 \phi(x, z) + \Sigma D \phi(x, z), \quad (3.23)$$

onde

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 - b & b' \\ 2b & c - 2b' \end{pmatrix}.$$

Em termos do parametro c ,

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2}(1+c)\mathbf{1} + \frac{1}{2}(1-c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Já a matriz Σ pode ser escrita na forma

$$\Sigma = \frac{1}{2}(1-b+c-2b')\mathbf{1} + \begin{pmatrix} \frac{(1-c+2b'-b)}{2} & b' \\ 2b & -\frac{(1-c+2b'-b)}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto, as matrizes Σ_1 e Σ podem ser decompostas em matrizes de Pauli da seguinte forma

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2}(1+c)\mathbf{1} + \frac{1}{2}(1-c)\sigma_3 \quad (3.24)$$

e

$$\Sigma = \chi_1\sigma_1 + \chi_2\sigma_2 + \chi_3\sigma_3 + \chi_0\mathbf{1} = \chi_0\mathbf{1} + \vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}, \quad (3.25)$$

onde

$$\chi_0 = \frac{(1-b+c-2b')}{2} \quad (3.26)$$

$$\chi_1 = \frac{(2b+b')}{2} \quad (3.27)$$

$$\chi_2 = \frac{i}{2}(b'-2b) \quad (3.28)$$

$$\chi_3 = \frac{(1-c+2b'-b)}{2}. \quad (3.29)$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x, z) = [(-\frac{1}{2}(1+c) + \chi_0 D)\mathbf{1} - \frac{1}{2}(1-c)\sigma_3 + (\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma})D]\phi(x, z). \quad (3.30)$$

Como a matriz identidade comuta com as matrizes de Pauli, a solução $\phi(x, z)$ pode ser escrita na forma

$$\phi(x, z) = e^{-\frac{(1+c)}{2}z} e^{z\chi_0 D} \Psi(x, z), \quad (3.31)$$

onde $\Psi(x, z)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi(x, z) = \left[-\frac{(1-c)}{2} \sigma_3 + (\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}) D \right] \Psi(x, z). \quad (3.32)$$

A solução da equação 3.32 é dada por, ver referência [12]

$$\Psi(x, z) = e^{z(\vec{\sigma} \cdot \vec{\chi}) D} \text{Exp} \left[-\frac{(1-c)}{2} \int_0^z d\lambda e^{(z-\lambda)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\chi}) D} \sigma_3 e^{\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{\chi}) D} \right] \psi(x, 0). \quad (3.33)$$

onde o símbolo *Exp* significa a soma infinita de múltiplas integrais ordenadas na variável z . Expandindo-se até primeira ordem, tem-se

$$\Psi(x, z) = \left[e^{z(\vec{\sigma} \cdot \vec{\chi}) D} - \frac{(1-c)}{2} \int_0^z d\lambda e^{(z-\lambda)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\chi}) D} \sigma_3 e^{\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{\chi}) D} \right] \psi(x, 0). \quad (3.34)$$

Se $\frac{(1-c)}{2} \ll 1$, essa expressão corresponde a uma expansão em teoria de perturbação até primeira ordem. Como veremos mais adiante, pela análise numérica dos dados experimentais, $\frac{(1-c)}{2}$ será de fato muito menor que um e termos de ordem maior fornecem contribuições que são desprezíveis para o resultado final.

Portanto, a solução final para $\phi(x, z)$ é dada por

$$\phi(x, z) = e^{-\frac{(1+c)}{2}z} e^{z\chi_0 D} \Psi(x, z) \phi(x, 0). \quad (3.35)$$

• Solução de ordem zero

A solução em ordem zero será dada por

$$\phi_0(x, z) = e^{-\frac{(1+c)}{2}z} e^{z\chi_0 D} e^{(\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}) D} \phi(x, 0). \quad (3.36)$$

Conforme referência [4], tem-se que

$$e^{z(\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma})D} = \cosh(zDw) + \frac{\sinh(zDw)}{w}(\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.37)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\vec{\chi} \cdot \vec{\chi}}$$

Pelas condições de contorno estabelecidas na seção anterior, temos que

$$\phi(x, 0) = \begin{pmatrix} Q_+^q(x, 0) \\ Q_-^q(x, 0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\delta(x - x_0) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\delta(x - x_0)\xi.$$

Quando o quark que inicia a cascata é do tipo u ou d

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quando começa por um quark s

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A ação do operador D sobre a função $\delta(x - x_0)$ (ver apêndice) é

$$D^n \delta(x - x_0) = f(x, x_0) \frac{1}{(n-1)!} [(\alpha + 1) \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)]^{n-1} \quad (3.38)$$

para $n \geq 1$.

As funções hiperbólicas podem ser escritas em termos de exponenciais, que expandidas em série de potências, permitem aplicar de forma simples o operador D^n sobre a condição de contorno $\delta(x - x_0)$. Utilizando-se da equação 3.38, obtém-se a solução de ordem zero $\phi_0(x, z)$, dada por

$$\phi_0(x, x_0, z) = e^{-\frac{(1+c)z}{2}} \left[\frac{1}{2}\delta(x - x_0) + \frac{f(x, x_0)}{4} (\phi_1(x, z)\mathbf{1} + \frac{(\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma})}{\omega} \phi_2(x, z)) \right] \xi \quad (3.39)$$

onde

$$\phi_{1,2} = z(\chi_0 + \omega)I_1(2\sqrt{z(\chi_0 + \omega)\beta}) \pm z(\chi_0 - \omega)I_1(2\sqrt{z(\chi_0 - \omega)\beta}) \quad (3.40)$$

com $\beta = (\alpha + 1)\ln(\frac{x_0}{x})$

No apêndice A apresentamos os cálculos detalhados da aplicação do operador $e^{zx_0D} \cosh(z\omega D)$ sobre a condição de contorno $\delta(x - x_0)$.

Integrando-se em z

$$\phi_0(x, x_0) = \int_0^\infty dz \phi_0(x, z) \quad (3.41)$$

obtém-se

$$\phi_0(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{(1 + c)}\xi + \frac{f(x, x_0)}{2(c + 1)}[U_1\mathbf{1} + \frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{\omega}U_2]\xi. \quad (3.42)$$

onde

$$U_{1,2} = \frac{\Delta_1}{1 + \alpha}(\frac{x_0}{x})^{\Delta_1} \pm \frac{\Delta_2}{1 + \alpha}(\frac{x_0}{x})^{\Delta_2} \quad (3.43)$$

com

$$\Delta_{1,2} = \frac{2(\alpha + 1)}{1 + c}[\chi_0 \pm \omega] \quad (3.44)$$

Fazendo $c=1$ na equação 3.42 obtém-se as soluções exatas para as equações diferenciais acopladas (3.6 a 3.8). A seguir apresentamos explicitamente essas soluções $Q_+^q(x)$, $Q_-^q(x)$ e $Q_s^q(x)$ para os três casos representados nos diagramas da figura 3.3. É conveniente lembrar que as soluções em termos das funções $U_q(x)$, $D_q(x)$ e $S_q(x)$ são obtidas a partir destas soluções (ver equação 3.5). A notação que utilizamos aqui é tal

que o índice superior designa o sabor do quark que dá início a cascata. Como estamos contemplando os três sabores (u, d, s), temos três conjuntos de soluções.

O primeiro conjunto é

$$\begin{aligned}
 Q_+^u(x) &= \frac{\delta(x-x_0)}{2} + \frac{f(x, x_0)}{4} \left[\frac{\Delta_1}{1+\alpha} (1+L) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} + \frac{\Delta_2}{1+\alpha} (1-L) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \right], \\
 Q_-^u(x) &= \frac{\delta(x-x_0)}{2} + \frac{\Delta_0}{2(\alpha+1)} f(x, x_0) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_0}, \\
 Q_s^u(x) &= \frac{b}{2\omega} f(x, x_0) \left[\frac{\Delta_1}{1+\alpha} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} - \frac{\Delta_2}{1+\alpha} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \right],
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

o segundo,

$$\begin{aligned}
 Q_+^d(x) &= Q_+^u(x), \\
 Q_-^d(x) &= -Q_-^u(x), \\
 Q_s^d(x) &= Q_s^u(x),
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

e o terceiro,

$$\begin{aligned}
 Q_+^s(x) &= \frac{b'}{2\omega} f(x, x_0) \left[\frac{\Delta_1}{1+\alpha} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} - \frac{\Delta_2}{1+\alpha} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \right], \\
 Q_-^s(x) &= 0, \\
 Q_s^s(x) &= \frac{\delta(x-x_0)}{2} + \frac{f(x, x_0)}{2} \left[\frac{\Delta_1}{1+\alpha} (1-L) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} + \frac{\Delta_2}{1+\alpha} (1+L) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \right].
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde $L = \frac{(2b'-b)}{(2b'+b)}$.

• Correção em primeira ordem

Vamos determinar a contribuição do termo em primeira ordem em $-\frac{(1-c)}{2}$. Essa contribuição $\phi_p(x, x_0, z)$ é obtida a partir das equações (3.31 e 3.34) e dada por

$$\phi_p(x, z) = -\frac{(1-c)}{2} e^{-\frac{(1+c)}{2}z} e^{zx_0 D} \int_0^z d\lambda e^{(z-\lambda)(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) D} \sigma_3 e^{\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) D} \phi(x, 0). \quad (3.48)$$

Usando-se a equação 3.37, pode-se escrever

$$\begin{aligned} e^{zx_0 \hat{D}} e^{(z-\lambda)(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) \hat{D}} \sigma_3 e^{\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) \hat{D}} &= e^{zx_0 \hat{D}} [\cosh((z-\lambda)\hat{D}\omega) \cosh(\lambda\omega\hat{D}) \sigma_3 + \\ &+ \cosh((z-\lambda)\omega\hat{D}) \sinh(\lambda\omega\hat{D}) \sigma_3 \left(\frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{\omega}\right) + \\ &+ \sinh((z-\lambda)\omega\hat{D}) \cosh(\lambda\omega\hat{D}) \left(\frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{\omega}\right) \sigma_3 + \\ &+ \sinh((z-\lambda)\omega\hat{D}) \sinh(\lambda\omega\hat{D}) \left(\frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{\omega}\right) \sigma_3 \left(\frac{\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}}{\omega}\right)], \end{aligned}$$

Cada contribuição pode ser calculada, escrevendo-se o produto de funções hiperbólicas em somas apropriadas de funções \sinh ou \cosh , como, por exemplo, o termo proporcional a σ_3 , que é dado por

$$\cosh((z-\lambda)D\omega) \cosh(\lambda\omega D) = \frac{1}{2} [\cosh(z\omega D) + \cosh((z-2\lambda)\omega D)]. \quad (3.49)$$

O primeiro termo já foi calculado anteriormente, e integrando-se em λ , será igual a

$$e^{-\frac{(1+c)}{2}z} \frac{z}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(x-x_0) + \frac{f(x, x_0)}{4} \phi_1(x, z) \right] \sigma_3 \xi. \quad (3.50)$$

A determinação de todos os outros termos segue o mesmo princípio (veja Apêndice) e a

solução final, já integrada em z , é dada por

$$\phi_p(x, x_0) = -\frac{(1-c)}{2} \left[\frac{2\chi_3}{\omega} \mathbf{1} + 2I_2\sigma_3 + (I_1 - I_2) \frac{2\chi_3}{\omega^2} (\vec{\chi} \cdot \vec{\sigma}) \right] \xi, \quad (3.51)$$

onde

$$I_1 = \left(\frac{1}{1+c} \right)^2 \delta(x - x_0) + \frac{2}{(1+c)} \frac{f(x, x_0)}{4(c+1)} K_1, \quad (3.52)$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{1+c} \right)^2 \delta(x - x_0) + \frac{2}{(1+c)} \frac{f(x, x_0)}{4\omega(c+1)} K_2, \quad (3.53)$$

$$I_3 = \frac{2}{(1+c)} \frac{f(x, x_0)}{4(c+1)} K_3, \quad (3.54)$$

com

$$K_{1,3} = \frac{8\mu_+}{(1+c)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \Delta_1 \ln\left(\frac{x_0}{x}\right) \right] \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} \pm \frac{8\mu_-}{(1+c)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \Delta_2 \ln\left(\frac{x_0}{x}\right) \right] \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \quad (3.55)$$

e

$$K_2 = \left(\frac{2\mu_+}{1+c} \right)^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} - \left(\frac{2\mu_-}{1+c} \right)^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \quad (3.56)$$

onde $\mu_{\pm} = \chi_0 \pm \omega$ e $\Delta_{1,2}$ é dado pela equação (3.44).

Para calcular as funções de fragmentação dos quarks em termos da fração de momento total, o que será feito em detalhes na próxima seção precisamos fazer algumas considerações a respeito de x_0 que aparece nas soluções das nossas equações, e que representa a fração de momento longitudinal inicial do quark que dá origem a cascata.

Até o momento calculamos as funções de estrutura $Q(x, x_0)$ onde x e x_0 referem-se ao quark que inicia a cascata. Precisamos calcular a função de fragmentação de um quark em um ou mais mésons. Por uma questão de clareza, vamos momentaneamente mudar nossa nomenclatura. Vamos supor que um quark, com fração de momento y , gere um quark com fração y' , produzindo um méson com momento x . Devemos convolucionar $Q(y, x_0)$ com $f(y', y)$ para obter as funções de fragmentação. A função $f(y', y)$ será

$$f(y - x, y)$$

O problema é definir os limites de integração para calcular a integral de convolução. Note-se que o menor valor de y será x , porém o maior valor será x_0 , pois a cascata começou com $y = x_0$. É importante notar que, em todo o processo de produção de méson, a fração de momento longitudinal desta partícula nunca poderá ser maior do que x_0 por questões cinemáticas. A integral de convolução deverá ser

$$D \sim \int_x^{x_0} f(y - x, y) Q_q(y, x_0) dy$$

Note-se agora que x_0 também é o limite superior de x . Em termos do máximo valor da fração de momento total, devemos impor que

$$x_0^2 + x_t^2 = 1 \quad (3.57)$$

que deve ser mantida ao longo de todo o desenvolvimento da cascata. Esta condição pode ser expressa por meio da distribuição $\delta(x_0 - \sqrt{1 - x_t^2})$, e as funções espectrais são calculadas através da relação

$$D(x) \sim \int_x^1 f(y - x, y) dy \int_y^1 Q_q(y, x_0) \delta(x_0 - \sqrt{1 - x_t^2}) dx_0. \quad (3.58)$$

Por simplicidade de notação, daqui para frente, vamos definir

$$Q_q(y) = \int_y^1 Q(y, x_0) \delta(x_0 - \sqrt{1 - x_t^2}) dx_0 \quad (3.59)$$

ficando sub-entendido que em nossa solução x_0 deve sempre ser substituído por $\sqrt{1 - x_t^2}$.

3.3 Seção de choque para produção de hádrons

A seção de choque diferencial normalizada para produção de hádrons pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sigma_h} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow hX) = \frac{1}{\sigma_h} \sum(e^-e^+ \rightarrow hX)[D_q^h(x_p) + D_{\bar{q}}^h(x_p)] \quad (3.60)$$

onde $D_q^h(x_p)$ é uma função que representa a fragmentação dos quarks em hádrons.

Para construir a expressão de $D_q^h(x_p)$ utilizada na análise de dados, vamos primeiro definir o que chamaremos de função de fragmentação longitudinal através da expressão genérica

$$\tilde{D}_q^h(x) = \beta_q^h \int_x^1 f(x' - x, x') Q_q(x') dx', \quad (3.61)$$

que depende apenas das variáveis longitudinais do problema.

A função distribuição $f(x' - x, x')$ representa a probabilidade de produção de um méson com fração de momento x a partir de um quark com fração de momento x' , como definido na referência [2], e é dada por

$$f(x' - x, x') = \frac{(1+\alpha)}{x'} \left(\frac{x'-x}{x'}\right)^\alpha,$$

β_q^h é a probabilidade de troca de sabor em uma dada emissão, $\beta_q^h = (a, b, b')$.

Portanto, as funções de fragmentação longitudinais dos quarks em mésons pseudoescalares serão dadas pelas equações abaixo:

$$\tilde{D}_q^{\pi^+}(x) = a \int_x^1 f(x' - x, x') dx' U_q(x') \quad (3.62)$$

$$\tilde{D}_{\bar{q}}^{\pi^+}(x) = a \int_x^1 \{f(x' - x, x') dx' \bar{D}_{\bar{q}}(x')\} \quad (3.63)$$

$$\tilde{D}_q^{\pi^-}(x) = a \int_x^1 f(x' - x, x') dx' D_q(x') \quad (3.64)$$

$$\tilde{D}_{\bar{q}}^{\pi^-}(x) = a \int_x^1 f(x' - x, x') dx' \bar{U}_{\bar{q}}(x') \quad (3.65)$$

$$\tilde{D}_q^{K^+}(x) = b \int_x^1 f(x' - x, x') dx' U_q(x') \quad (3.66)$$

$$\tilde{D}_{\bar{q}}^{K^+}(x) = b' \int_x^1 f(x' - x, x') dx' \bar{S}_{\bar{q}}(x') \quad (3.67)$$

$$\tilde{D}_q^{K^-}(x) = b' \int_x^1 f(x' - x, x') dx' S_q(x') \quad (3.68)$$

$$\tilde{D}_{\bar{q}}^{K^-}(x, t) = b \int_x^1 f(x' - x, x') dx' \bar{U}_{\bar{q}}(x') \quad (3.69)$$

$$\tilde{D}_q^{\pi^0}(x) = \frac{a}{2} \int_x^1 f(x' - x, x') dx' [U_q(x') + D_q(x')] \quad (3.70)$$

$$\tilde{D}_{\bar{q}}^{\pi^0}(x) = \frac{a}{2} \int_x^1 f(x' - x, x') dx' [\bar{U}_{\bar{q}}(x') + \bar{D}_{\bar{q}}(x')] \quad (3.71)$$

$$\tilde{D}_q^{K_s^0}(x) = \frac{1}{2} \int_x^1 f(x' - x, x') dx' [bD_q(x') + b'S_q(x')] \quad (3.72)$$

$$\tilde{D}_{\bar{q}}^{K_s^0}(x) = \frac{1}{2} \int_x^1 f(x' - x, x') dx' [b'\bar{S}_{\bar{q}}(x') + b\bar{D}_{\bar{q}}(x')] \quad (3.73)$$

onde os índices q e \bar{q} referem-se ao quark de sabor u, d, s , e $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$, respectivamente.

Vamos, agora, obter algumas relações entre as funções de fragmentação dos quarks e anti-quarks, que serão muito úteis para simplificar o cálculo da seção de choque diferencial dos mésons que queremos descrever.

Devido à simetria que há entre o caso de (u, d, s) e $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$, que pode ser vista dos gráficos 3.3 e das condições de contorno estabelecidas na seção 3.2, temos que:

$$\begin{aligned} U_u &= \bar{U}_{\bar{u}}, D_u = \bar{D}_{\bar{u}}, S_u = \bar{S}_{\bar{u}} \\ U_d &= \bar{U}_{\bar{d}}, D_d = \bar{D}_{\bar{d}}, S_d = \bar{S}_{\bar{d}} \\ U_s &= \bar{U}_{\bar{s}}, D_s = \bar{D}_{\bar{s}}, S_s = \bar{S}_{\bar{s}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Por outro lado, das soluções das equações de difusão resulta que

$$\begin{aligned}
U_d(x) &= D_u(x), \\
D_d(x) &= U_u(x), \\
U_s(x) &= D_s(x), \\
S_d(x) &= S_u(x).
\end{aligned}$$

Aplicando esses resultados ao caso dos mésons, equações 3.62 a 3.73, obtemos as seguintes relações [11],

1) Pions carregados

$$\begin{aligned}
a) \quad \tilde{D}_u^{\pi^+} &= \tilde{D}_{\bar{u}}^{\pi^-} = \tilde{D}_d^{\pi^-} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{\pi^+} \\
b) \quad \tilde{D}_u^{\pi^-} &= \tilde{D}_{\bar{u}}^{\pi^+} = \tilde{D}_d^{\pi^+} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{\pi^-} \\
c) \quad \tilde{D}_s^{\pi^+} &= \tilde{D}_s^{\pi^-}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

2) Kaons carregados

$$a) \quad \tilde{D}_u^{K^+} = \tilde{D}_{\bar{u}}^{K^-}, \tilde{D}_d^{K^+} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^-}, \tilde{D}_s^{K^+} = \tilde{D}_{\bar{s}}^{K^-} \tag{3.76}$$

$$b) \quad \tilde{D}_{\bar{u}}^{K^+} = \tilde{D}_u^{K^-}, \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^+} = \tilde{D}_d^{K^-}, \tilde{D}_{\bar{s}}^{K^+} = \tilde{D}_s^{K^-}. \tag{3.77}$$

Usando a relação $S_d(x) = S_u(x)$, obtemos:

$$\tilde{D}_u^{K^-} = \tilde{D}_d^{K^-} \tag{3.78}$$

$$\tilde{D}_{\bar{u}}^{K^+} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^+} \tag{3.79}$$

e, cruzando os dois resultados acima temos:

$$\tilde{D}_{\bar{u}}^{K^+} = \tilde{D}_u^{K^-} = \tilde{D}_d^{K^-} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^+} \tag{3.80}$$

3) Kaons neutros

$$a) \quad \tilde{D}_u^{K^0} = \tilde{D}_{\bar{u}}^{\bar{K}^0}, \tilde{D}_d^{K^0} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{\bar{K}^0}, \tilde{D}_s^{K^0} = \tilde{D}_{\bar{s}}^{\bar{K}^0} \tag{3.81}$$

$$b) \quad \tilde{D}_{\bar{u}}^{K^0} = \tilde{D}_u^{\bar{K}^0}, \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^0} = \tilde{D}_d^{\bar{K}^0}, \tilde{D}_{\bar{s}}^{K^0} = \tilde{D}_s^{\bar{K}^0} \tag{3.82}$$

Usando a relação $S_d(x) = S_u(x)$, obtemos

$$\tilde{D}_u^{K^0} = \tilde{D}_d^{K^0} \tag{3.83}$$

$$\tilde{D}_{\bar{u}}^{K^0} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^0} \tag{3.84}$$

e, cruzando os dois resultados acima temos,

$$\tilde{D}_u^{K^0} = \tilde{D}_{\bar{u}}^{K^0} = \tilde{D}_d^{K^0} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{K^0} \quad (3.85)$$

4) Pions neutros

$$a) \quad \tilde{D}_u^{\pi^0} = \tilde{D}_{\bar{u}}^{\pi^0}, \tilde{D}_d^{\pi^0} = \tilde{D}_{\bar{d}}^{\pi^0}, \tilde{D}_s^{\pi^0} = \tilde{D}_{\bar{s}}^{\pi^0} \quad (3.86)$$

$$b) \quad \tilde{D}_u^{\pi^0} = \tilde{D}_d^{\pi^0} = \frac{1}{2}[\tilde{D}_u^{\pi^+} + \tilde{D}_d^{\pi^+}] \quad (3.87)$$

$$c) \quad \tilde{D}_s^{\pi^0} = 2\tilde{D}_s^{\pi^+} \quad (3.88)$$

Uma vez estabelecidas essas relações, temos condições de proceder uma análise da seção de choque normalizada, dada pela equação (3.60). Por esta equação temos para cada gráfico representado na figura 3.3, um peso que vamos chamar de p_q , definido como

$$p_q = \frac{\sigma_q}{\sigma_h} \quad (3.89)$$

onde

$$\bullet \sigma_q = \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3e_q^2\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

$$\bullet \sigma_h = \sum \sigma_q$$

$e_q \rightarrow$ a carga do quark.

Para os três quarks (u, d, s) esses pesos dependem do sabor, de forma que p_u é diferente dos outros dois, mas $p_d = p_s$. Uma observação importante é que σ_h é uma soma sobre os cinco sabores (u, d, s, c, b).

Escrita em termos da definição acima, a seção de choque fica

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow hX) = \sum_q p_q [D_q^h(x_p) + D_{\bar{q}}^h(x_p)] \quad (3.90)$$

onde $p_u = \frac{4}{11}$ e $p_d = p_s = \frac{1}{11}$.

3.3.1 Distribuição em x_p

Na equação 3.61, temos a função de fragmentação longitudinal escrita em termos da variável de Feynman (x). Vamos agora escrevê-la em termos da variável $x_p = \frac{2|\vec{p}|}{\sqrt{s}}$, onde $|\vec{p}|$ é o momento total da partícula produzida inclusivamente, ou seja,

$$\vec{p} = p_{||}\vec{i} + p_{tj}\vec{j}, \quad (3.91)$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{\frac{sx^2}{4} + \frac{sx_t^2}{4}}, \quad (3.92)$$

e, portanto,

$$x_p = \sqrt{x^2 + \frac{4p_t^2}{s}}. \quad (3.93)$$

Tomando como base a definição de Osamu Sawada [13], podemos escrever a função de fragmentação em termos da variável x_p como

$$D_q^h(x_p) = \int_{x_i}^{x_p} \int_0^\infty \tilde{D}_q^h(x) \rho(p_t^2) \delta(x_p - \sqrt{x^2 + \frac{4p_t^2}{s}}) dp_t^2 dx \quad (3.94)$$

onde $\rho(p_t^2)$ é a distribuição em p_t^2 das partículas produzidas.

Analisando a forma dos dados experimentais [14], podemos assumir a seguinte forma polar para a distribuição em p_t^2

$$\rho(p_t^2) = \frac{a_1}{(1 + a_2\sqrt{p_t^2})^n}, \quad (3.95)$$

onde a_2 e n são parâmetros dependentes da energia e a_1 é uma constante de normalização global.

Pela distribuição em p_t^2 dada pela equação 3.95, podemos obter uma relação para p_t médio das partículas produzidas, que é dada por

$$\langle p_t \rangle = \frac{2}{a_2(n-3)}. \quad (3.96)$$

Na figura 3.4 apresentamos os dados experimentais de p_t^2 para três energias, juntamente com as curvas obtidas com a distribuição dada por 3.95. Os dados que fitamos com esta distribuição referem-se às partículas carregadas. Como estamos interessados em descrever o espectro inclusivo de mésons, o parâmetro a_2 obtido com este *fit* para várias energias não é o mesmo que utilizamos nos cálculos dos píons e káons.

O que nos interessa mostrar, nesse momento, é que a forma polar para a distribuição em p_t^2 descreve bem os dados experimentais e produz valores de $\langle p_t \rangle$ das partículas carregadas que estão em perfeito acordo com os dados experimentais (ver tabela 3.2).

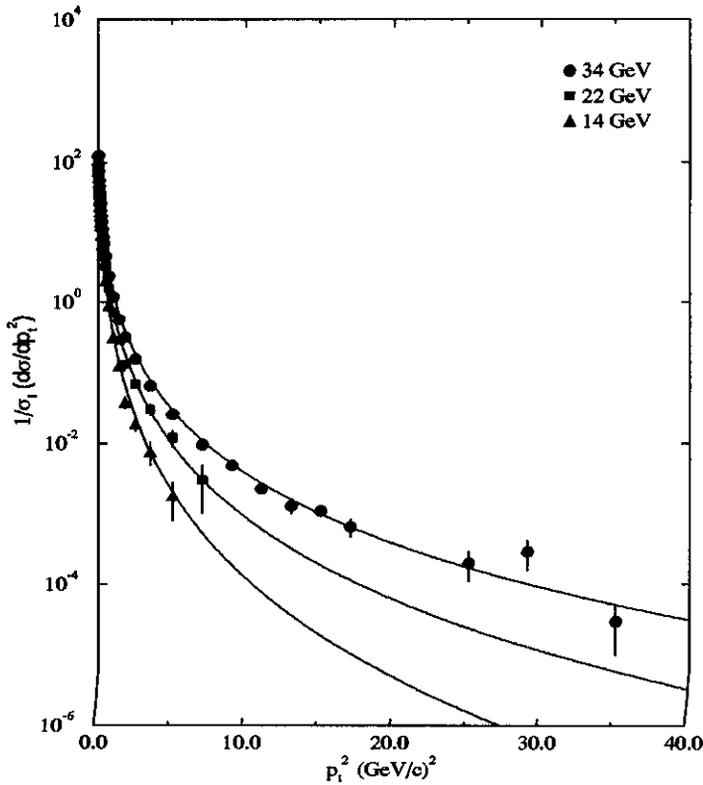


Figura 3.4: Dados de distribuição em p_t^2 das partículas carregadas; as curvas sólidas foram obtidas com a parametrização dada pela equação 3.95.

\sqrt{s} (GeV)	a_1	a_2 (GeV/c) ⁻¹	n
14	219	0.6468	12.967
22	219	0.711	10.567
34	219	0.771	8.9

Tabela 3.1: Parâmetros da distribuição em p_t^2 para as partículas carregadas.

\sqrt{s} (GeV)	$\langle p_t \rangle_a$	$\langle p_t \rangle_b$
14	0.310	0.334 ± 0.002
22	0.372	0.377 ± 0.003
34	0.439	0.422 ± 0.001

Tabela 3.2: Valores de $\langle p_t \rangle$ (GeV/c) das partículas carregadas, (a) calculado com os parâmetros obtidos nos *fits*, (b) valores experimentais.

Capítulo 4

Apresentação dos resultados

4.1 Espectro de píons carregados

a) Distribuição em x_p

O espectro dos píons carregados é obtido a partir da equação 3.90. Por esta equação temos para os π^+ e π^- as seguintes expressões

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \pi^+X) = p_u[D_u^{\pi^+} + D_{\bar{u}}^{\pi^+}] + p_d[D_d^{\pi^+} + D_{\bar{d}}^{\pi^+}] + p_s[D_s^{\pi^+} + D_{\bar{s}}^{\pi^+}]$$

e

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \pi^-X) = p_u[D_u^{\pi^-} + D_{\bar{u}}^{\pi^-}] + p_d[D_d^{\pi^-} + D_{\bar{d}}^{\pi^-}] + p_s[D_s^{\pi^-} + D_{\bar{s}}^{\pi^-}],$$

Somando as duas contribuições e fazendo uso das relações 3.94 e 3.75, obtemos a seção de choque diferencial para produção de píons carregados, que é dada a seguir,

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \pi^{ch}X) = 2(p_u + p_d)D_u^{\pi^+}(x_p) + 2(p_u + p_d)D_d^{\pi^+}(x_p) + 4p_s D_s^{\pi^+}(x_p). \quad (4.1)$$

Pela equação 4.1 temos que para o cálculo dos píons carregados, bastam apenas três funções de fragmentação, que são obtidas a partir da expressão 3.94.

Nos nossos cálculos utilizamos para a distribuição em p_t^2 a mesma forma funcional da equação 3.95, mantido para a_1 e n os mesmos valores da tabela 3.1 e deixando a_2 como parâmetro livre.

Fitando os dados experimentais de seção de choque diferencial (em termos da variável ξ) para produção de píons carregados, fixamos todos os parâmetros livres de nosso modelo, que são dados nas tabelas 4.1 e 4.2.

a	0.07263
b	0.013
b'	0.1797
c	0.957

Tabela 4.1: Parâmetros do modelo fixados através de *fits* dos dados de seção de choque diferencial para píons carregados.

\sqrt{s} (GeV)	α
14	2.5
22	2.2
34	2.0
44	1.4
58	1.15
91.2	0.92

Tabela 4.2: Valores de α obtidos por *fits* da mesma forma que os parâmetros da tabela 4.1.

\sqrt{s} GeV	a_1	a_2	n
14	219	0.58	12.967
22	219	0.69	10.567
34	219	0.79	8.9
44	219	0.81	8.2
58	219	0.9	7
91.2	219	0.91	6.3

Tabela 4.3: Parâmetros da distribuição em p_t^2 para píons carregados, o parâmetro a_2 é dado em unidades de $(GeV/c)^{-1}$.

Os resultados dos *fits* são apresentados nas figuras 4.1 a 4.4 juntamente com os dados experimentais para 34 e 44 GeV obtidos da referência [16], 58 GeV [17] e 91.2 GeV [18]. Deve-se notar que, para $\sqrt{s} > 34$ GeV, somente o parâmetro de normalização a_1 é o mesmo da tabela 3.1 e que a_2 e n são parâmetros livres determinados pelo ajuste numérico de seção de choque. Isto porque não há dados experimentais para distribuição em p_t^2 ($\rho(p_t^2)$) para energias acima de 34 GeV.

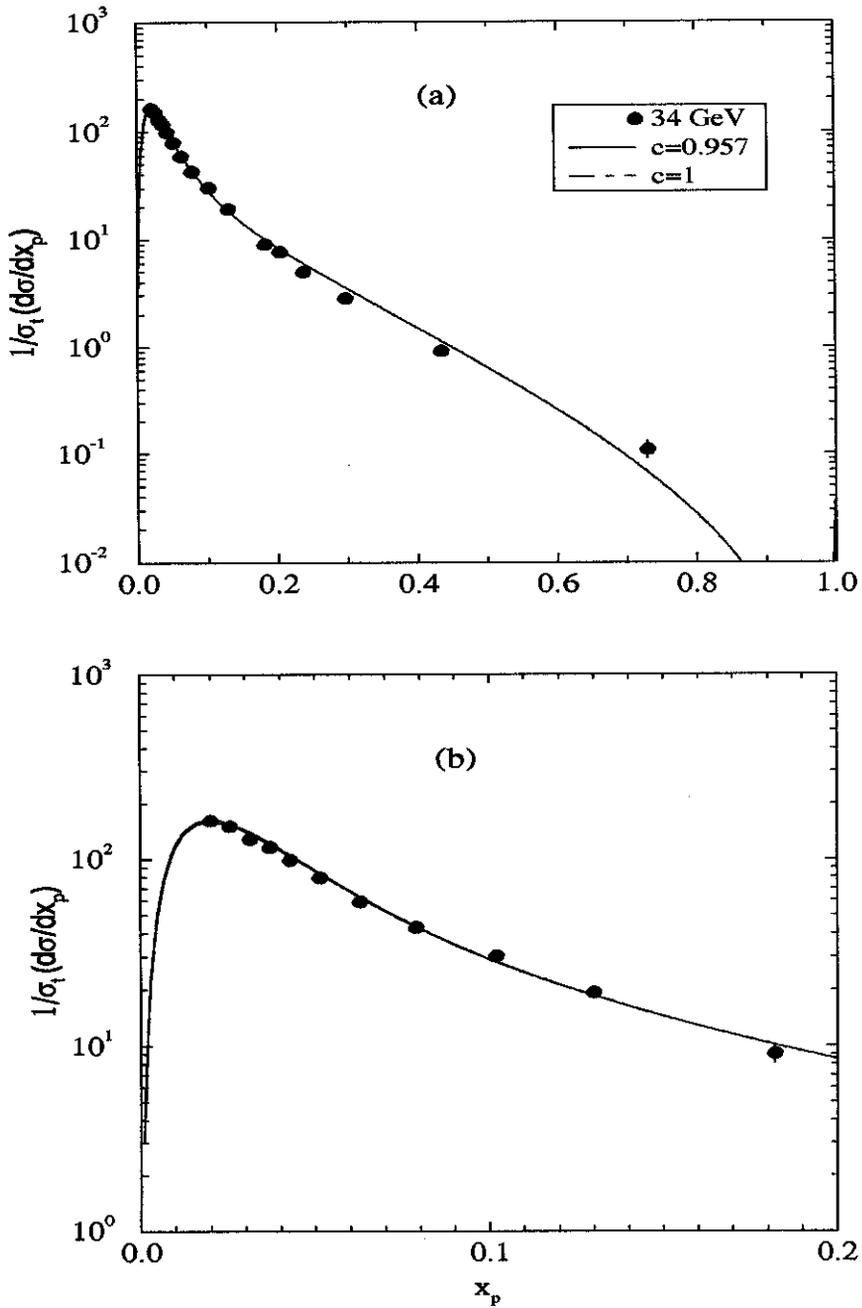


Figura 4.1: A figura (a) corresponde à seção de choque diferencial (mb) para píons carregados em todo intervalo de x_p . A figura (b) mostra somente o que acontece na região de baixíssimos x_p .

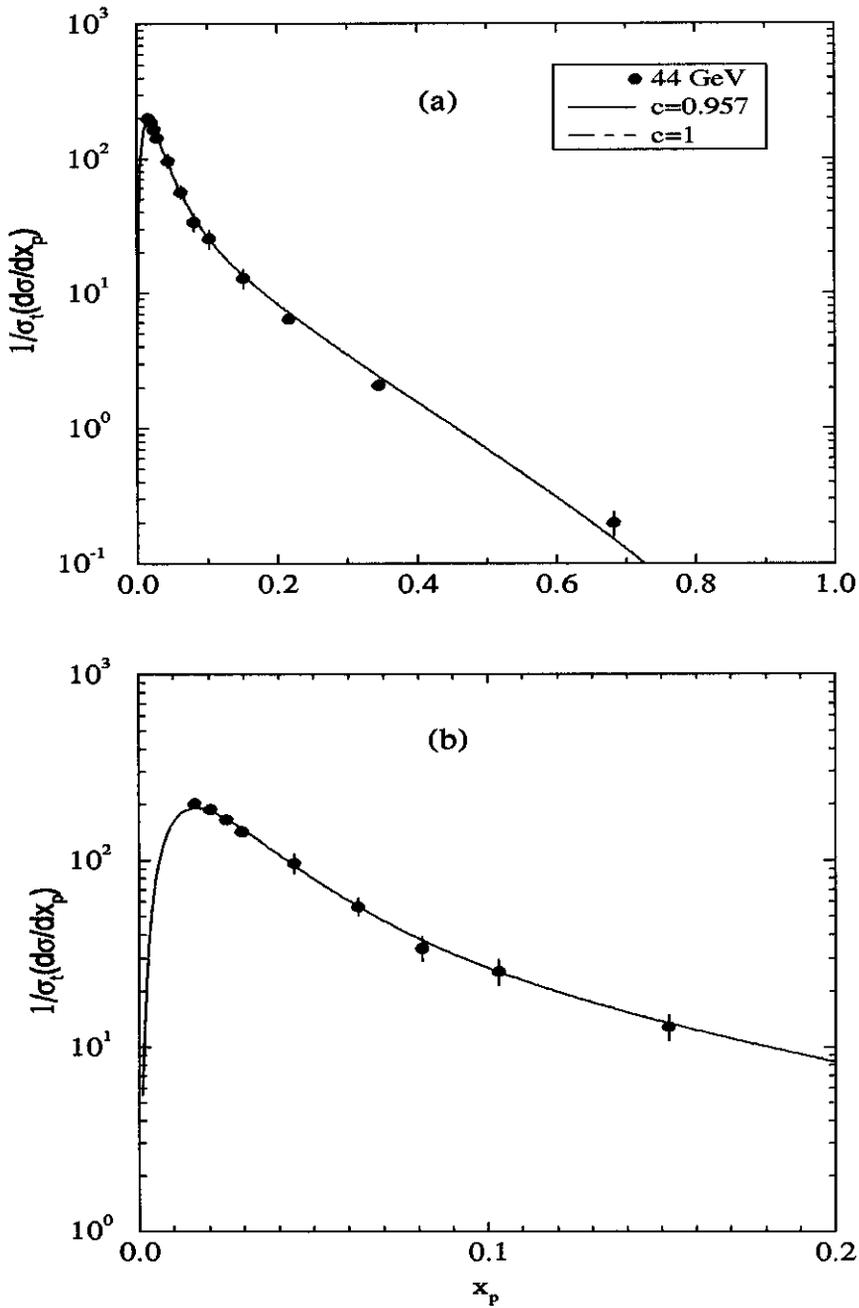


Figura 4.2: Seção de choque diferencial (mb) para píons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p .

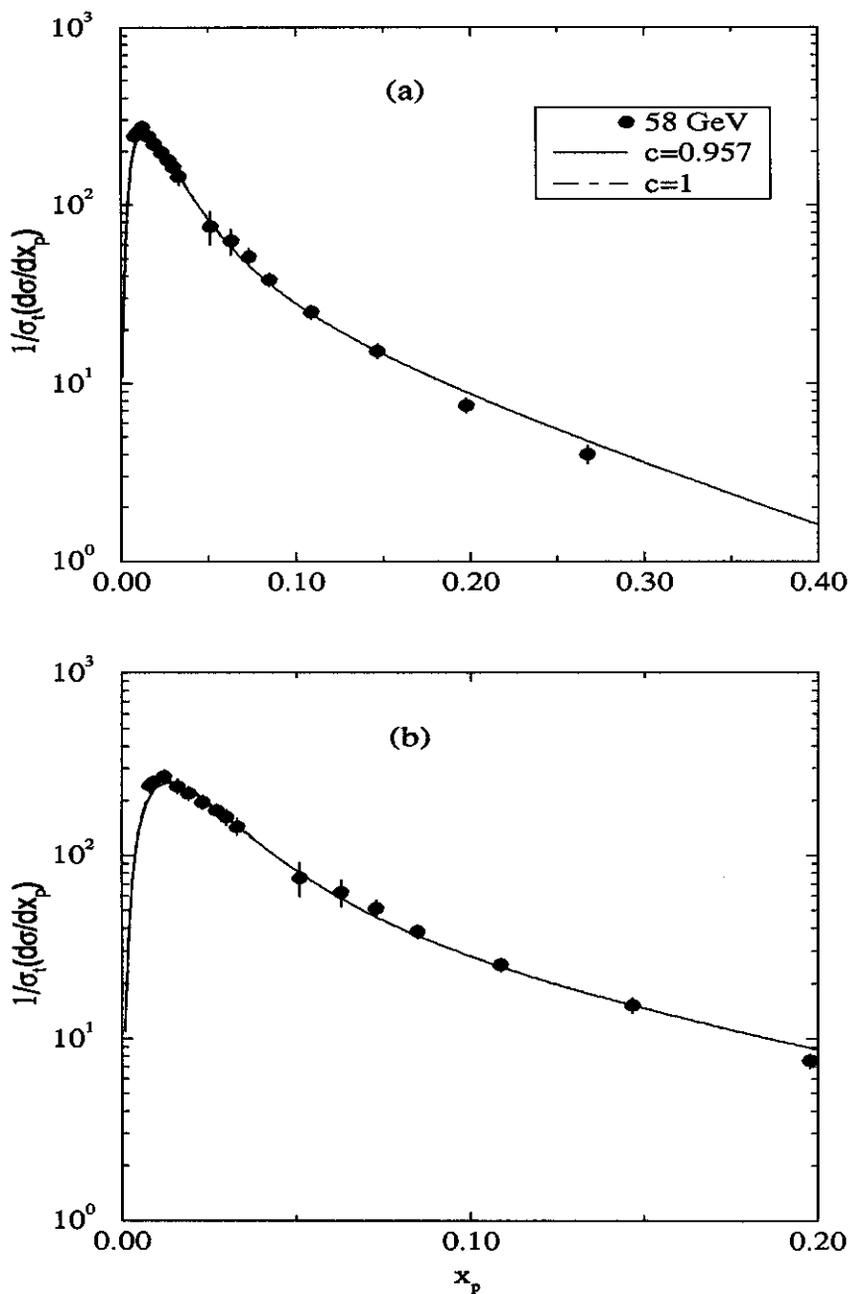


Figura 4.3: Seção de choque diferencial (mb) para píons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p .

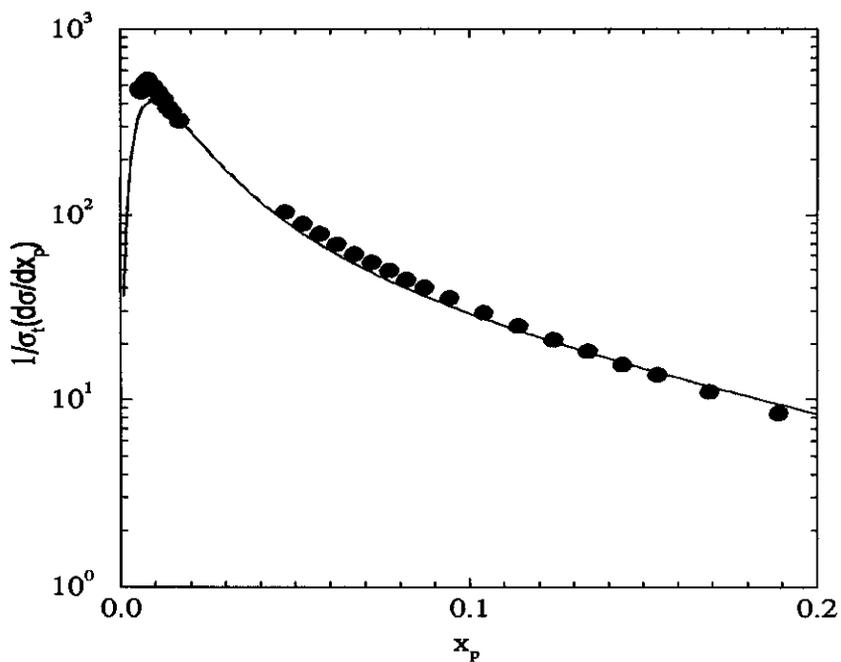
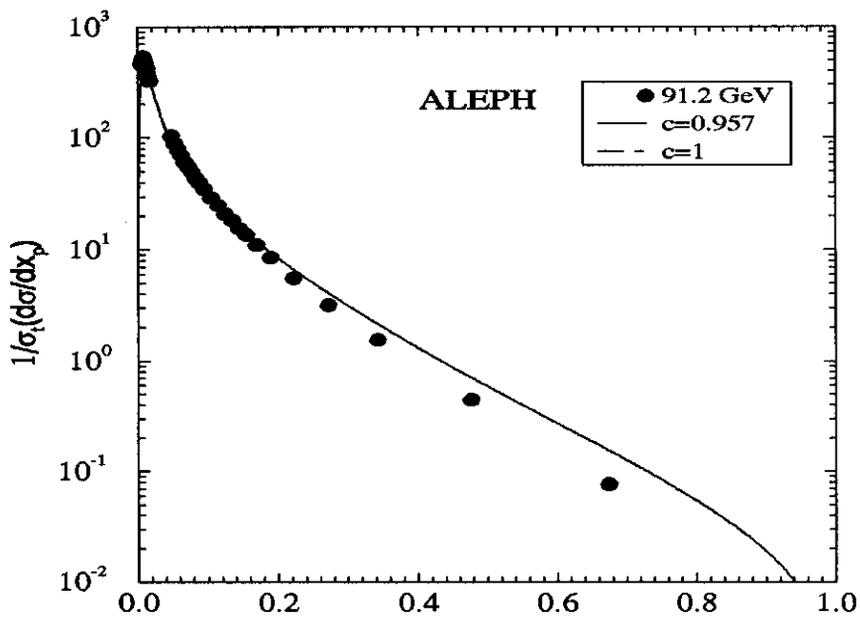


Figura 4.4: Seção de choque diferencial (mb) para píons carregados; (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p .

b) Distribuição em ξ

Existem outros modelos que descrevem a seção de choque diferencial inclusiva $\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{d\xi}$, onde $\xi = \ln \frac{1}{x_p}$. A maioria deles são modelos baseados em cálculos de QCD, como, por exemplo, o apresentado na referência [20]. Neste trabalho a distribuição em ξ é obtida a partir da distribuição em x_p derivada do modelo de cascatas de quarks, ou seja;

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{d\xi} = x_p \frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}. \quad (4.2)$$

Uma característica importante deste tipo de distribuição é a quebra de *scaling* com a energia, verificada sobretudo na região de baixos x_p . Nesta região as partículas produzidas são caracterizadas pelo alto momento transversal (p_t). Os cálculos feitos para os píons carregados demonstram um perfil gaussiano, com o pico da distribuição aumentando com a energia, o que concorda com os dados experimentais para 14 GeV [22], resultados do TASSO para as energias 22 e 44 GeV [23, 24], TOPAZ para energia 58 GeV [17] e OPAL para 91.2 GeV [29]. Nas figuras 4.5 a 4.7 apresentamos estes resultados, onde foram usados os parâmetros das tabelas 4.1 e 4.2.

A maior dificuldade encontrada aqui, foi no sentido de se descrever as distribuições para energia do LEP (91.2 GeV). Isto, no nosso entender, ocorre porque no modelo atual, desenvolvido até o momento, não contemplamos a contribuição dos quarks pesados c e b , que são produzidos na região de altas energias. Além disso, não incorporamos os eventos a três jatos, que para energias do LEP correspondem a dez por cento dos eventos.

Note-se que nas distribuições em x_p para esta energia, figuras 4.4, verifica-se um comportamento não muito satisfatório, e isto fica mais evidente quando tentamos descrever as distribuições em $\ln \frac{1}{x_p}$. O fato é que, além dos eventos a três jatos, temos novos canais para produção de quarks pesados c e b que também são relevantes na região de altas energias.

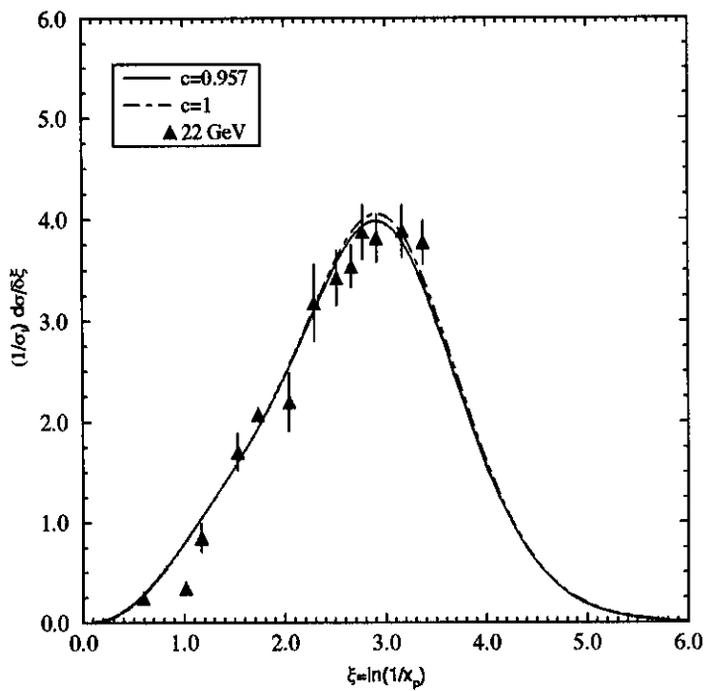
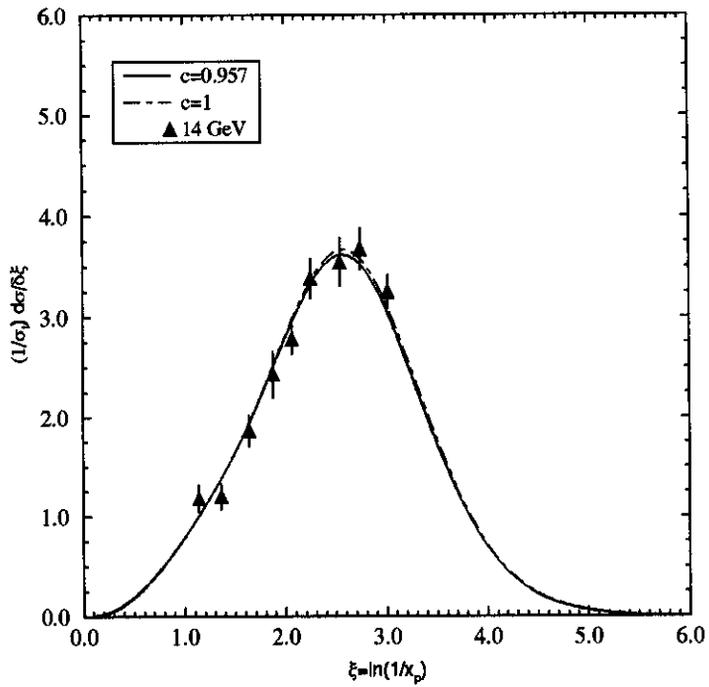


Figura 4.5: Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons carregados para energias no CM 14 e 22 GeV

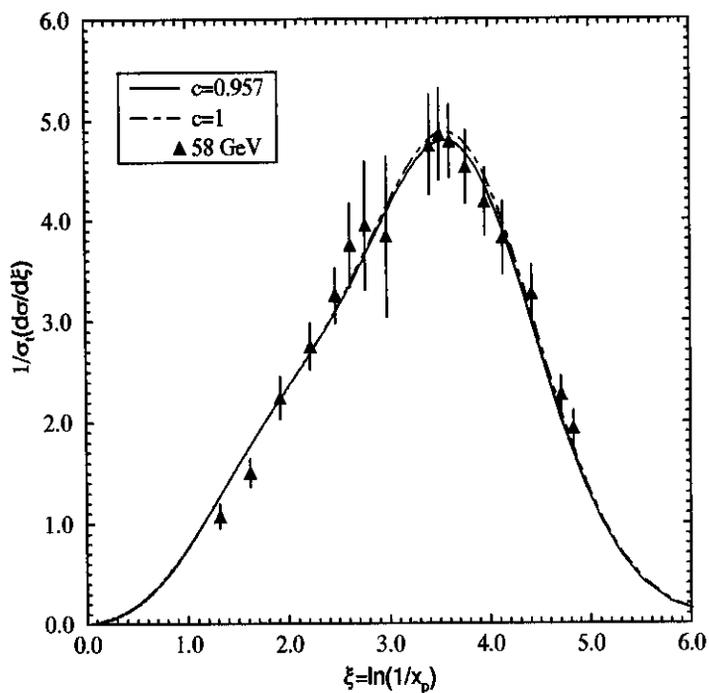
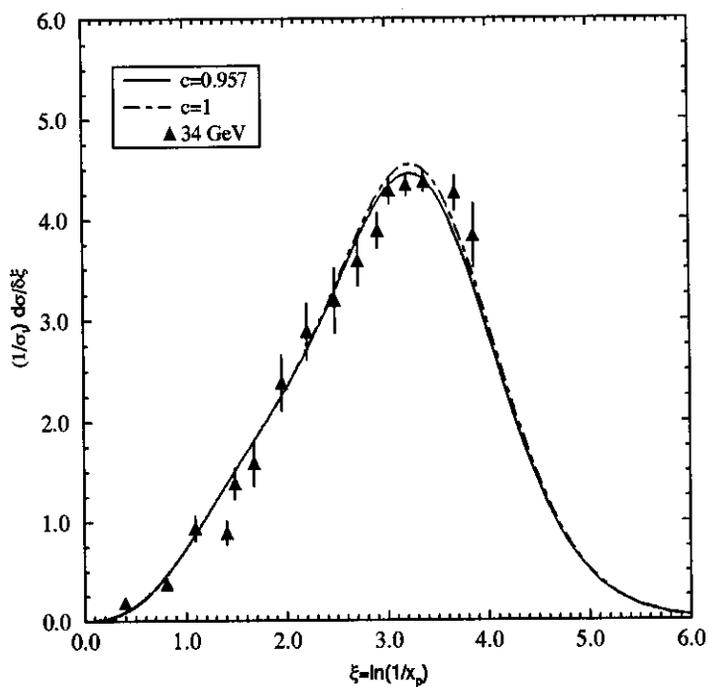


Figura 4.6: Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons carregados para energias no CM 34 e 58 GeV

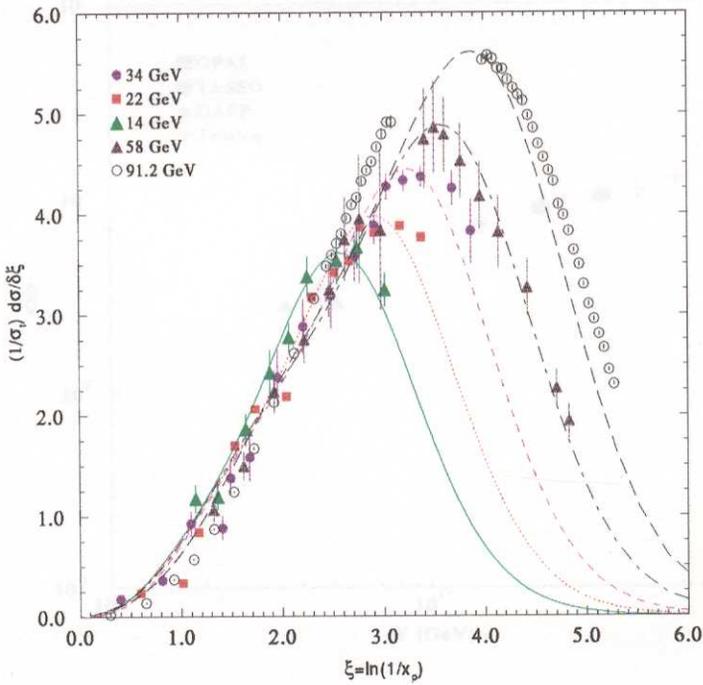
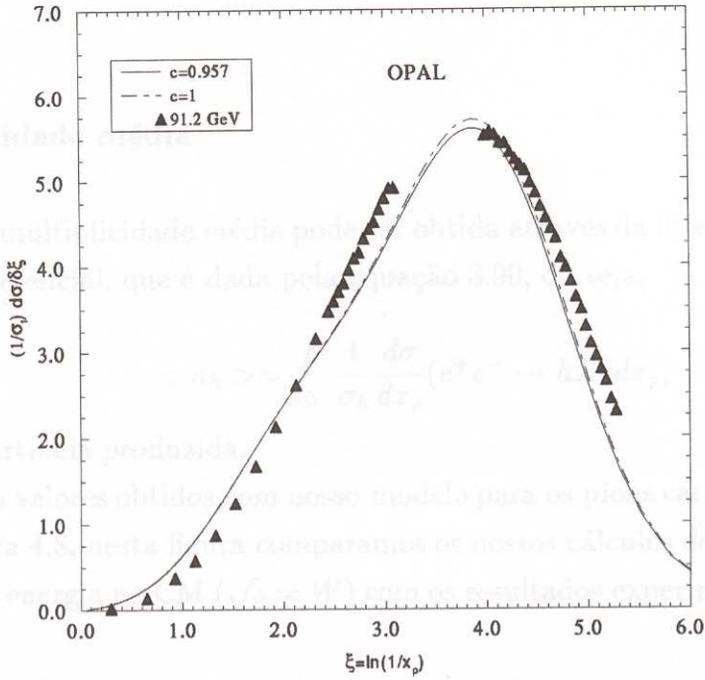


Figura 4.7: Seção de choque diferencial para pions carregados (mb) para energia no CM 91.2 GeV e a seguir todas as figuras em um mesmo gráfico.

c) Multiplicidade média

A multiplicidade média pode ser obtida através da integração em x_p da seção de choque diferencial, que é dada pela equação 3.90, ou seja,

$$\langle n_h \rangle = \int_0^1 \frac{1}{\sigma_h} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^+e^- \rightarrow hX) dx_p, \quad (4.3)$$

onde h é a partícula produzida.

Os valores obtidos com nosso modelo para os píons carregados estão apresentados na figura 4.8, nesta figura comparamos os nossos cálculos de multiplicidade média em função da energia no CM ($\sqrt{s} = W$) com os resultados experimentais das referências [25] e [29].

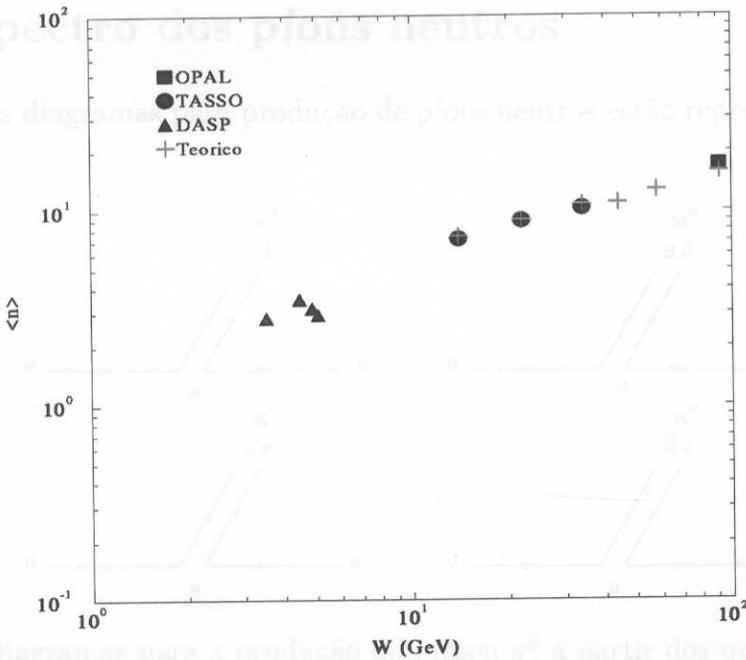


Figura 4.8: Multiplicidade média dos píons carregados em função da energia no CM; os pontos teóricos foram obtidos a partir da integração em x_p da seção de choque diferencial escrita em termos da fração de momento total.

$$\frac{1}{\sigma_h} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^+e^- \rightarrow \pi^+X) = \rho_u |D_u^{\pi^+} + D_s^{\pi^+}| + \rho_d |D_d^{\pi^+} + D_s^{\pi^+}| + \rho_l |D_l^{\pi^+} + D_s^{\pi^+}|$$

No capítulo 4 fizemos uma discussão a respeito dos parâmetros a , b , b' e c que aparecem na Equação de Difusão. Na nossa interpretação, eles estão associados a probabilidades de transição de um quark de um determinado estado de sabor para outro. Analisando desta forma, estes parâmetros estão diretamente relacionados com as massas dos quarks envolvidos no processo, e, em consequência, devem assumir valores que obedeçam uma certa hierarquia.

Os valores obtidos para os parâmetros do modelo, tabelas 4.1 e 4.2, mostram que a relação $b' > a > b$ é satisfeita, como discutido antes, e $1 - c \ll 1$. O parâmetro α da distribuição $f(x, x')$ decresce à medida que a energia aumenta e no limite de altas energias tende a zero. Neste caso, $f(x, x') \rightarrow 1/x'$, que é o comportamento de *Bremsstrahlung*.

4.2 Espectro dos píons neutros

Os diagramas para produção de píons neutros estão representados na figura 4.9.

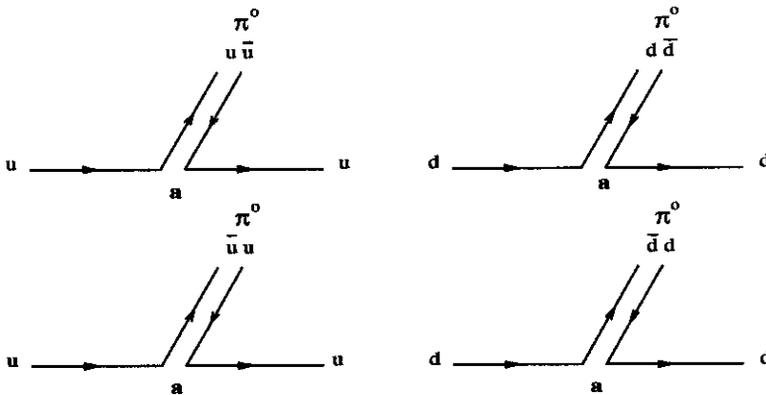


Figura 4.9: Diagramas para a produção do méson π^0 a partir dos quarks de sabor u , d e \bar{u} , \bar{d} .

A seção de choque para produção destas partículas é dada por

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \pi^0 X) = p_u [D_u^{\pi^0} + D_{\bar{u}}^{\pi^0}] + p_d [D_d^{\pi^0} + D_{\bar{d}}^{\pi^0}] + p_s [D_s^{\pi^0} + D_{\bar{s}}^{\pi^0}]$$

Aplicando as relações 3.94 e 3.86 a 3.88, obtemos para os pions neutros

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \pi^0 X) = 2(p_u + p_d)D_u^{\pi^0} + 2p_s D_s^{\pi^0}, \quad (4.4)$$

que pode ser escrita em termos das funções de fragmentação dos π^+ da seguinte forma

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \pi^0 X) = (p_u + p_d)D_u^{\pi^+}(x_p) + (p_u + p_d)D_d^{\pi^+}(x_p) + 2p_s D_s^{\pi^+}(x_p). \quad (4.5)$$

A expressão acima é a própria seção de choque para produção de pions carregados, a menos de um fator dois, ou seja,

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx}(e^-e^+ \rightarrow \pi^0 X) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx}(e^-e^+ \rightarrow \pi^{ch} X) \quad (4.6)$$

Analogamente, podemos obter as distribuições em x_p , $\ln \frac{1}{x_p}$ e calcular a multiplicidade média dos π^0 a partir dos π^{ch} . Nas figuras 4.10 e 4.11 apresentamos os cálculos das distribuições em x_p , com os dados experimentais para 35 GeV [27], 44 GeV [16, 27] e 91.2 GeV [28], na figura 4.12 as distribuições em ξ [28], e na figura 4.13 a multiplicidade média, juntamente com resultados experimentais da referência [28]. O conjunto de parâmetros utilizados é o mesmo das tabelas 4.1 e 4.2, exceto o parâmetro a_2 que para os pions neutros é dado na tabela a seguir

\sqrt{s} (GeV)	a_1	a_2 (GeV/c) $^{-1}$	n
35	219	0.74	8.9
44	219	0.8	8.2
91.2	219	0.85	6.3

Tabela 4.4: Parâmetros da distribuição em p_t^2 para píons neutros.

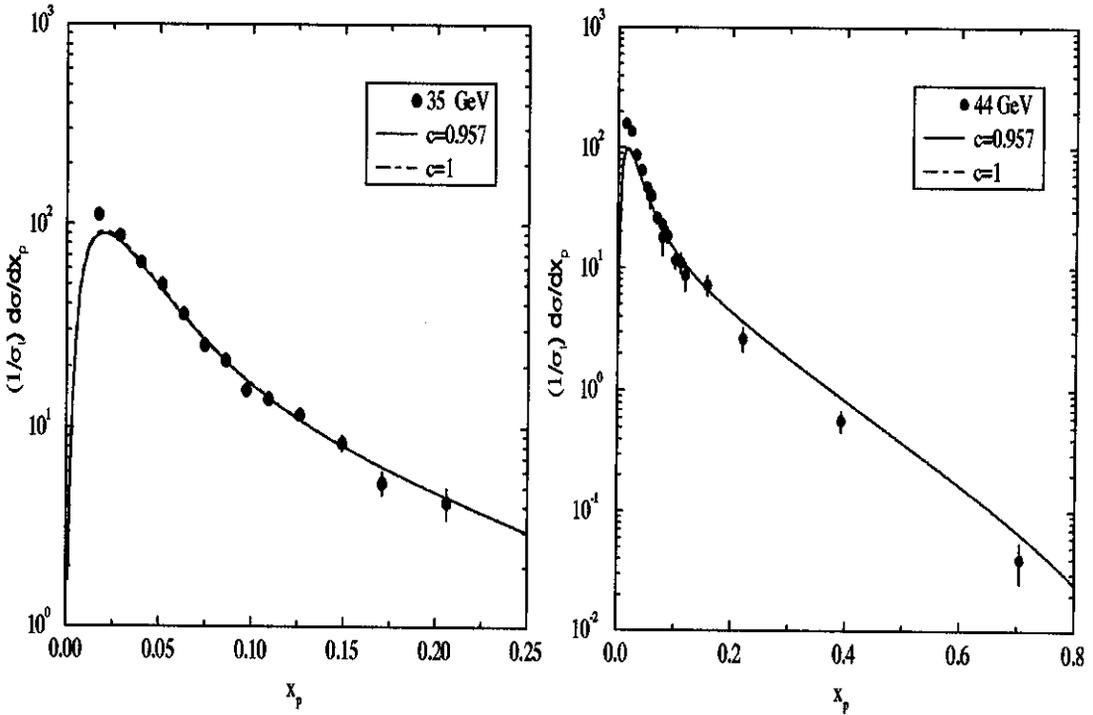


Figura 4.10: Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons neutros em termos da fração de momento total para energia CM 35 e 44 GeV.

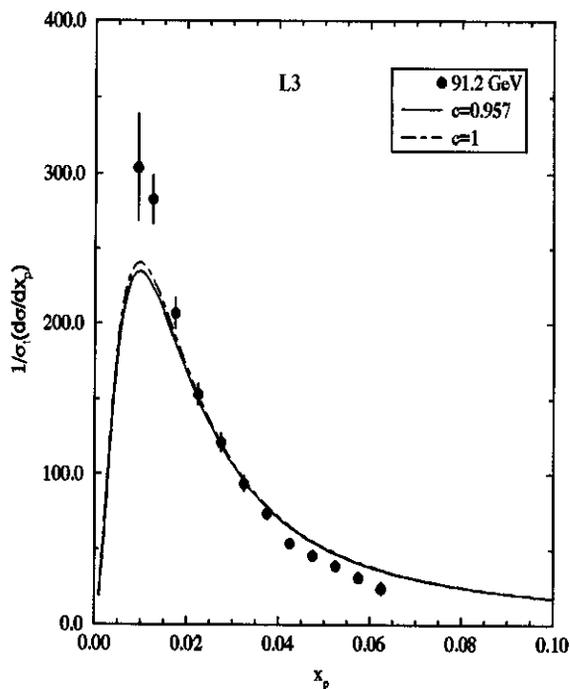


Figura 4.11: Seção de choque diferencial normalizada (mb) de píons neutros em termos da fração de momento total para 91.2 GeV.

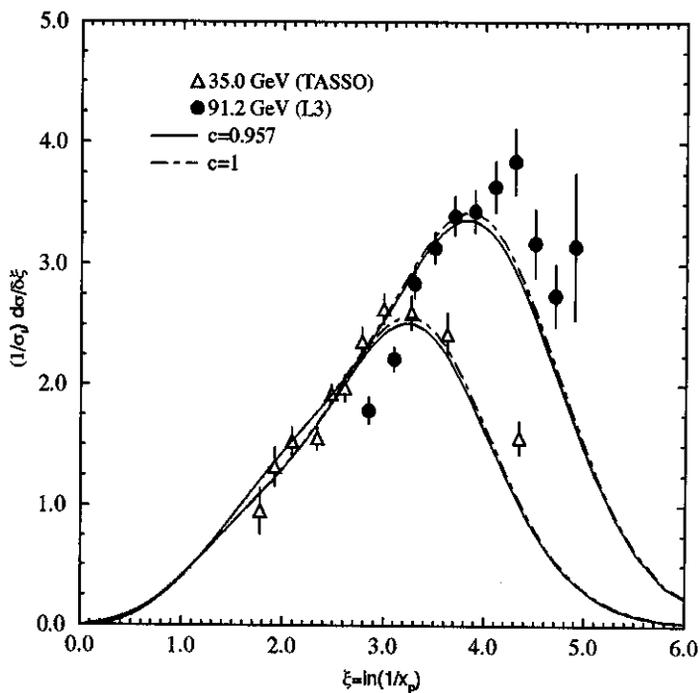


Figura 4.12: Seção de choque diferencial (mb) em termos da variável ξ de píons neutros para energias no CM 35 e 91.2 GeV.

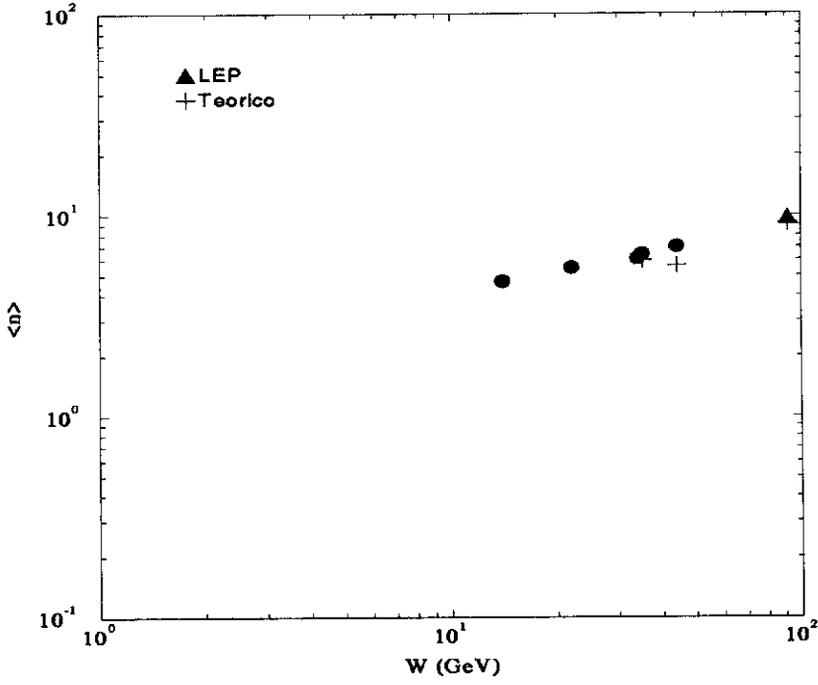


Figura 4.13: Multiplicidade média dos píons neutros em função da energia no CM.

4.3 Espectro dos káons carregados

a) Distribuições em x_p , ξ e cálculo da multiplicidade média

O espectro dos káons carregados em termos das funções de fragmentação (equação 3.90) é dado por

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow K^+X) = p_u[D_u^{K^+} + D_{\bar{u}}^{K^+}] + p_d[D_d^{K^+} + D_{\bar{d}}^{K^+}] + p_s[D_s^{K^+} + D_{\bar{s}}^{K^+}],$$

e

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow K^-X) = p_u[D_u^{K^-} + D_{\bar{u}}^{K^-}] + p_d[D_d^{K^-} + D_{\bar{d}}^{K^-}] + p_s[D_s^{K^-} + D_{\bar{s}}^{K^-}].$$

Somando as duas contribuições e usando as relações 3.76 a 3.80, obtemos para os káons carregados

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow K^{ch}X) = 2p_u[D_u^{K^+} + D_u^{K^-}] + 2p_d[D_d^{K^+} + D_d^{K^-}] + 2p_s[D_s^{K^+} + D_s^{K^-}], \quad (4.7)$$

onde as funções de fragmentação dos quarks em K^+ e K^- são obtidas a partir da equação 3.94.

A partir da equação acima, podemos calcular as distribuições em x_p e ξ , utilizando para isto as equações 3.94 e 4.2, respectivamente. Os resultados são apresentados nas figuras 4.14 a 4.20, juntamente com os dados experimentais das distribuições em x_p para 34 e 44 GeV [16], 58 GeV [17], 91.2 GeV do ALEPH [18] e do DELPHI [19] e das distribuições em ξ para 34 GeV [22], 58 GeV [17] e 91.2 GeV [18]. Na figura 4.21 apresentamos nosso cálculo para a multiplicidade média dos káons carregados confrontado com os dados experimentais para 14 GeV e 22 GeV [21], 29 GeV [26], 34 GeV [16] e 91.2 GeV [29]. É conveniente salientar que, de uma forma unificada, descrevemos os espectros inclusivos de píons e káons com o mesmo conjunto de parâmetros, tabelas 4.1 e 4.2, exceto o parâmetro a_2 que para os káons carregados é dado na tabela 4.5.

\sqrt{s} GeV	a_1	a_2	n
14	219	0.6	12.967
22	219	0.71	10.567
34	219	0.8	8.9
44	219	0.84	8.2
58	219	0.96	7
91.2	219	1.0	6.3

Tabela 4.5: Parâmetros da distribuição em p_t^2 para káons carregados.

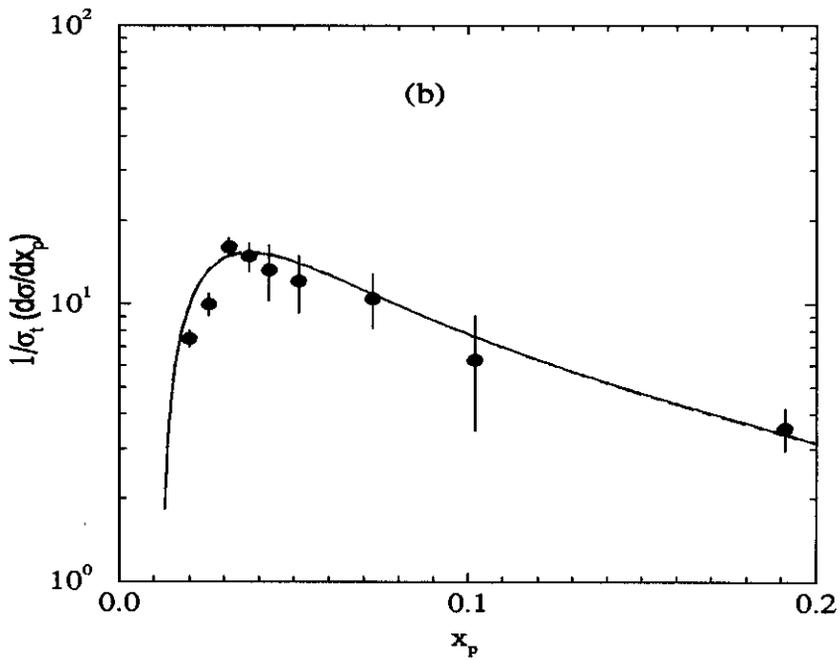
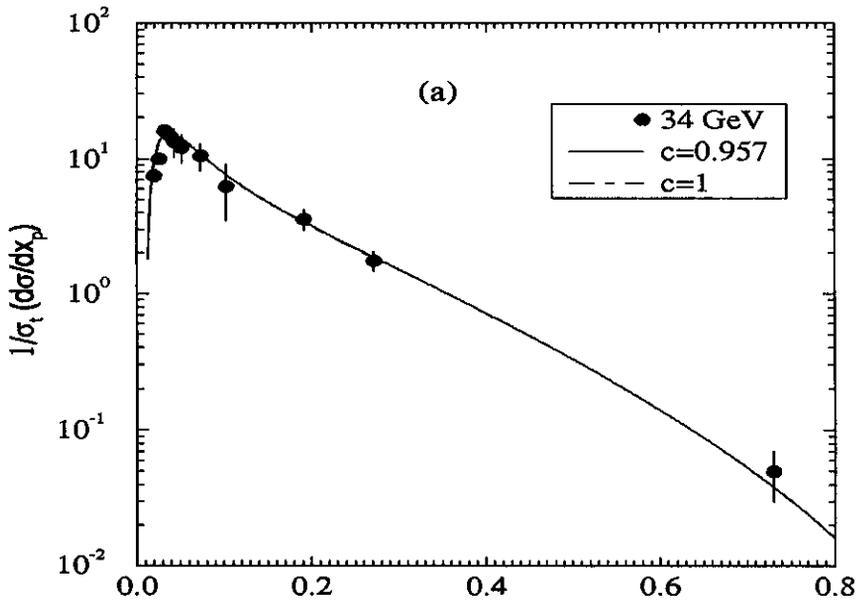


Figura 4.14: A figura (a) corresponde a seção de choque diferencial (mb) para káons carregados em todo intervalo de x_p . A figura (b) mostra somente o que acontece na região de baixíssimos x_p .

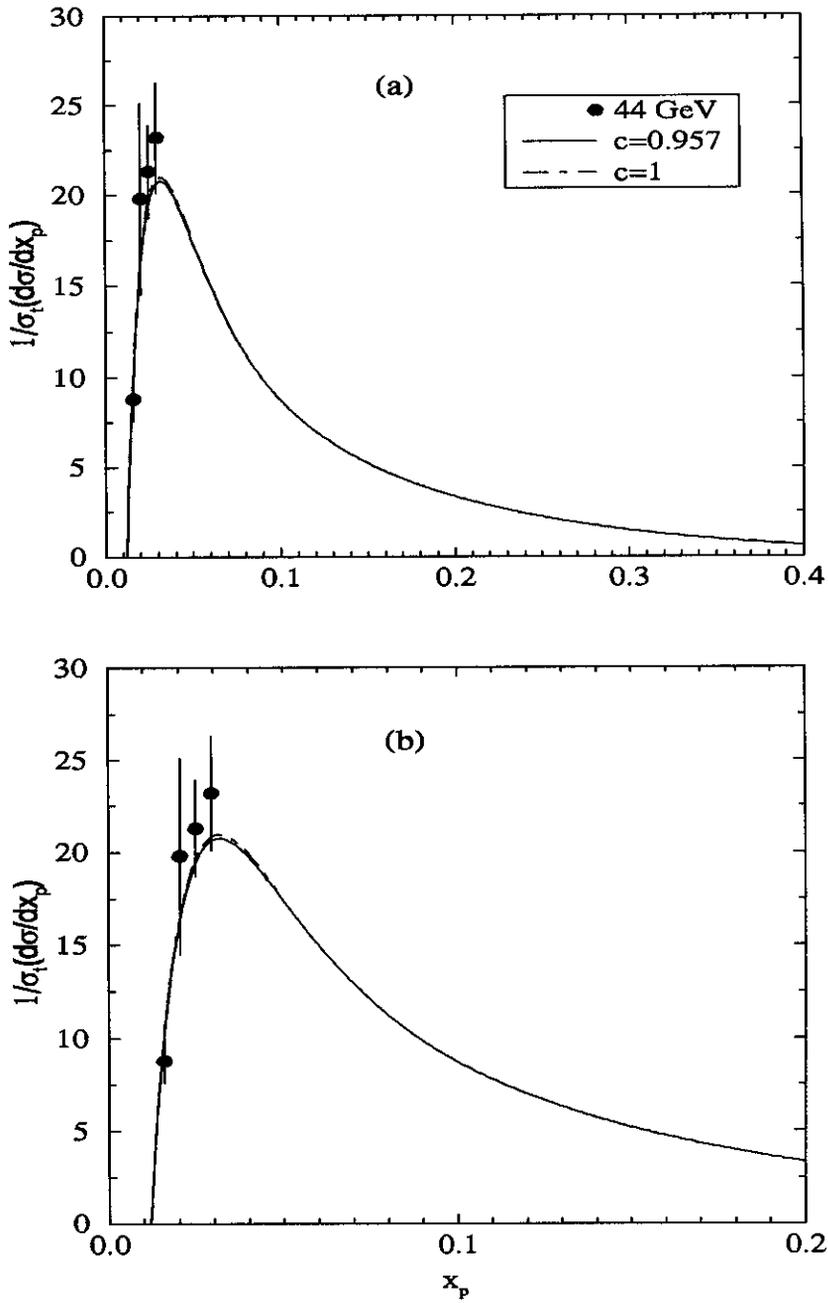


Figura 4.15: Seção de choque diferencial (mb) para káons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p .

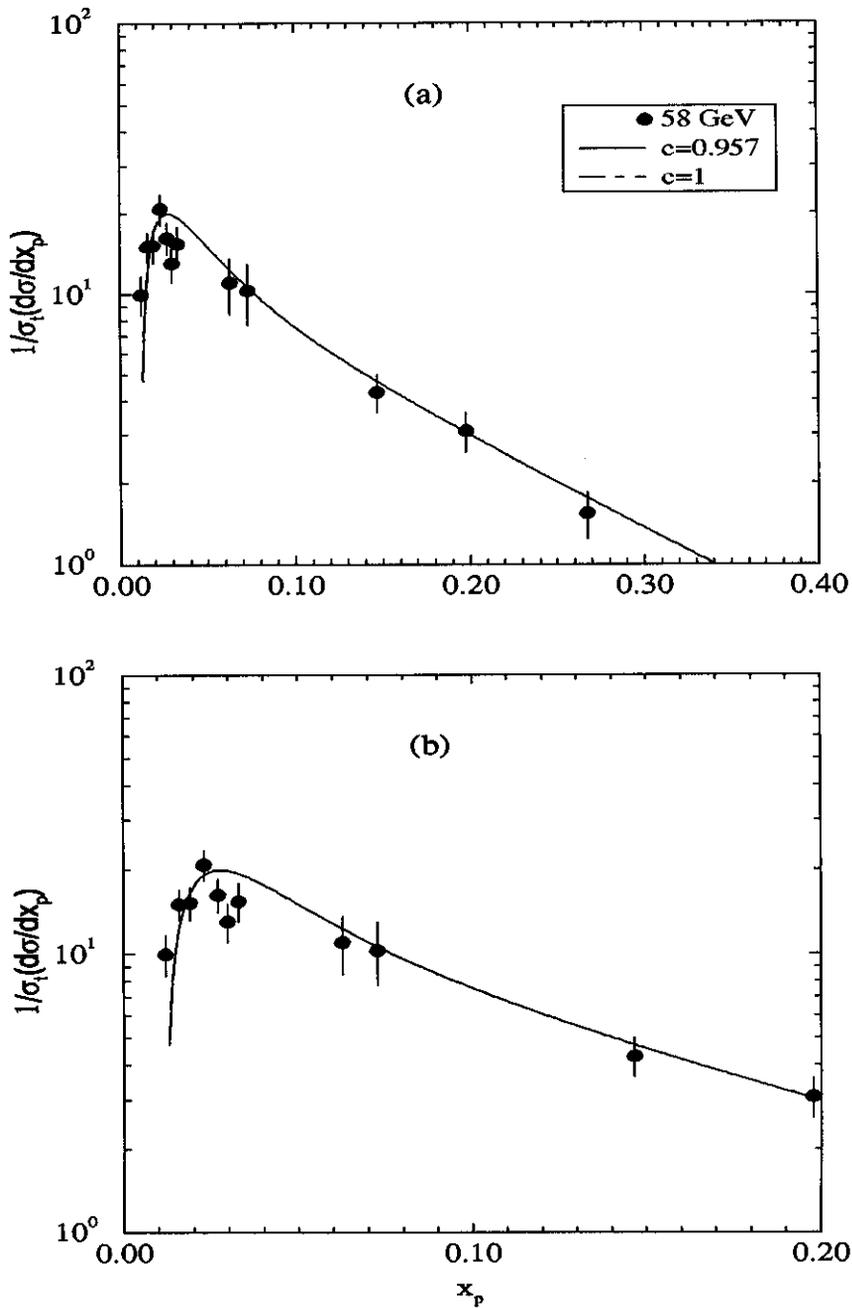


Figura 4.16: Seção de choque diferencial (mb) para káons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p .

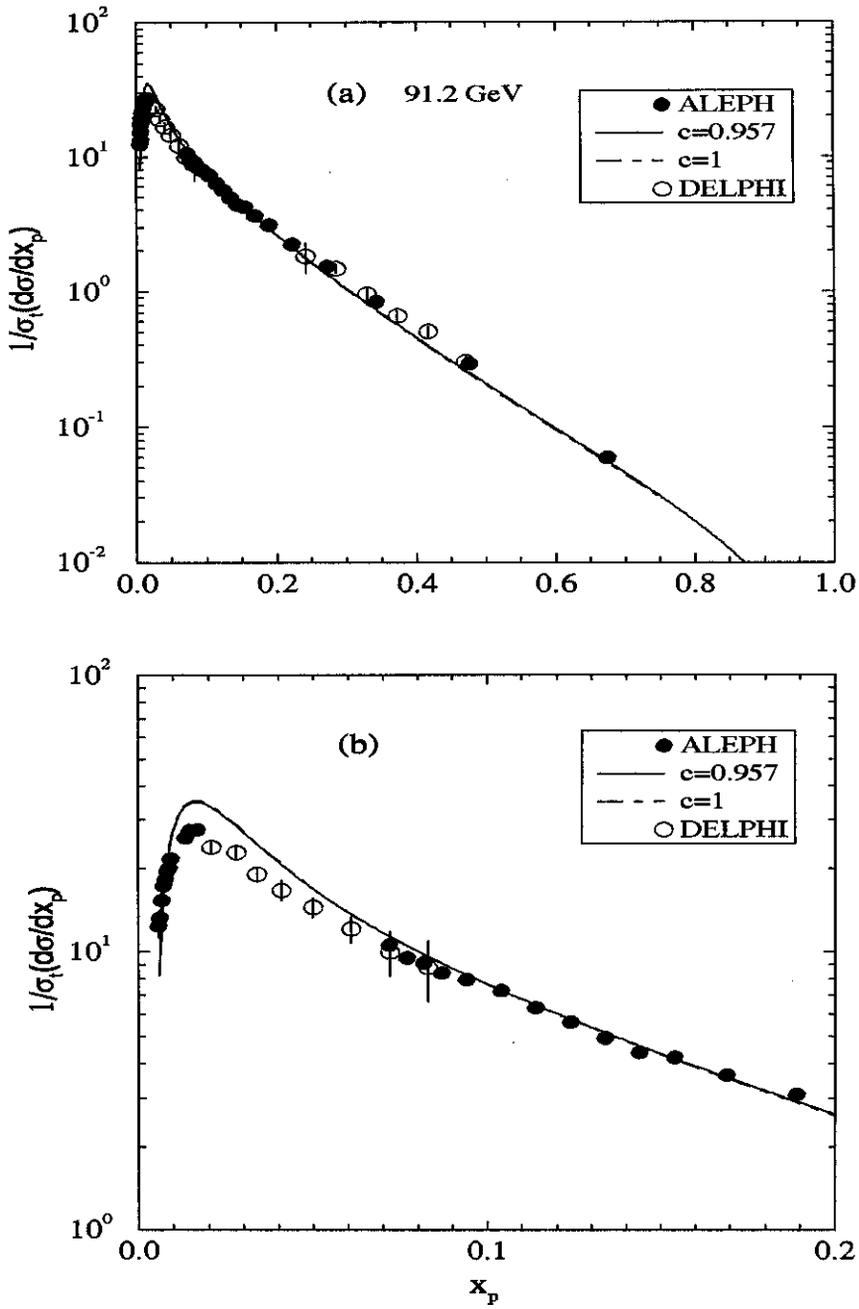


Figura 4.17: Seção de choque diferencial (mb) para káons carregados. (a) para todo intervalo de x_p , (b) somente na região de baixos x_p .

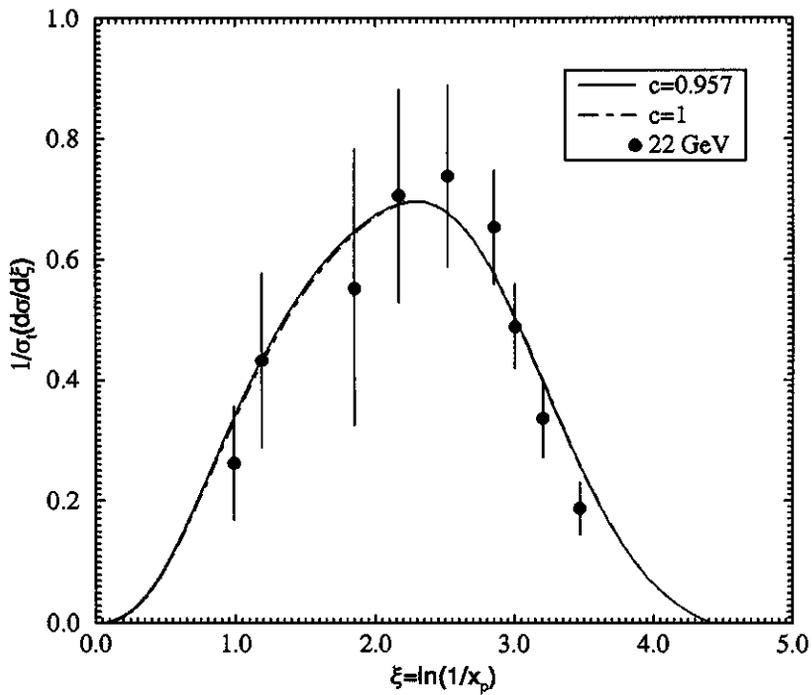
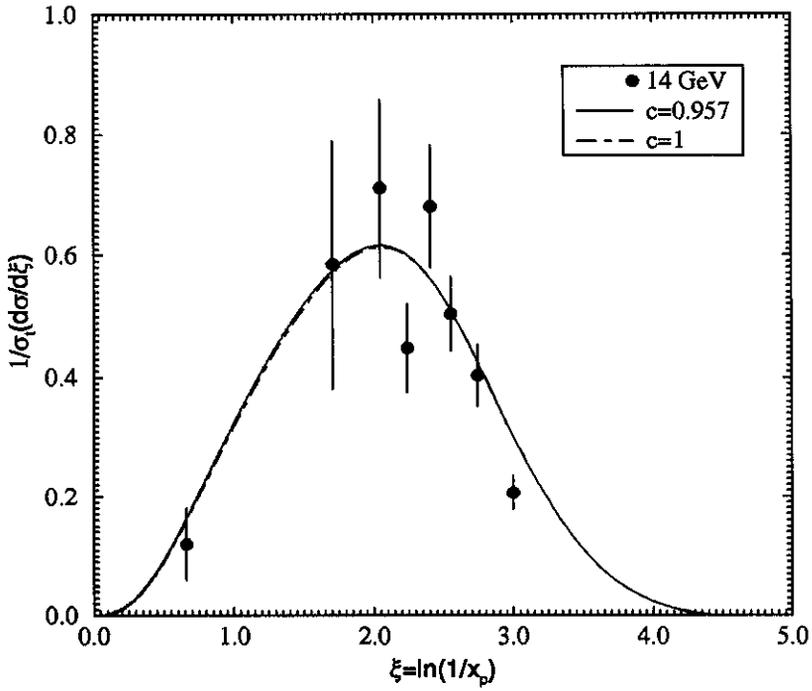


Figura 4.18: Seção de choque diferencial normalizada (mb) para káons carregados em termos da variável ξ para 14 e 22 GeV

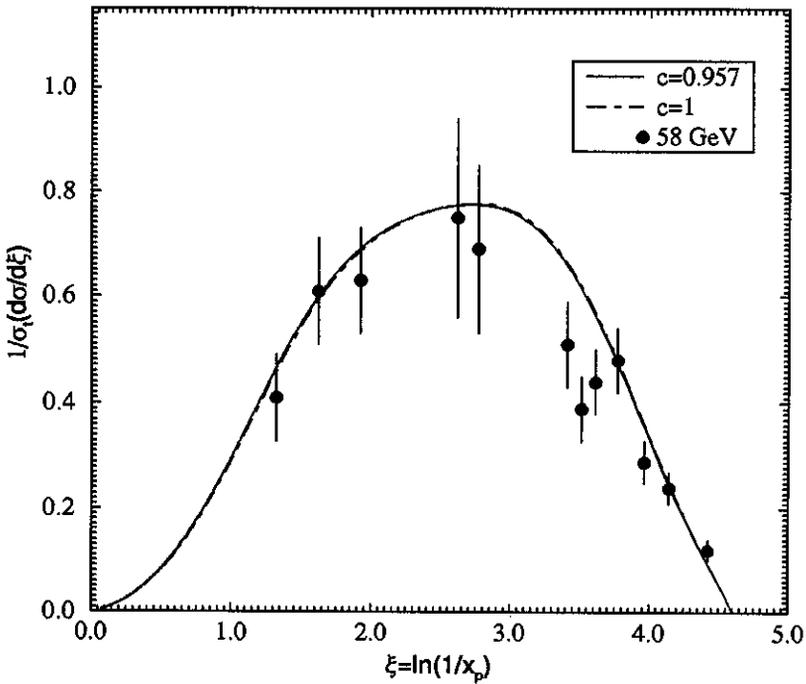
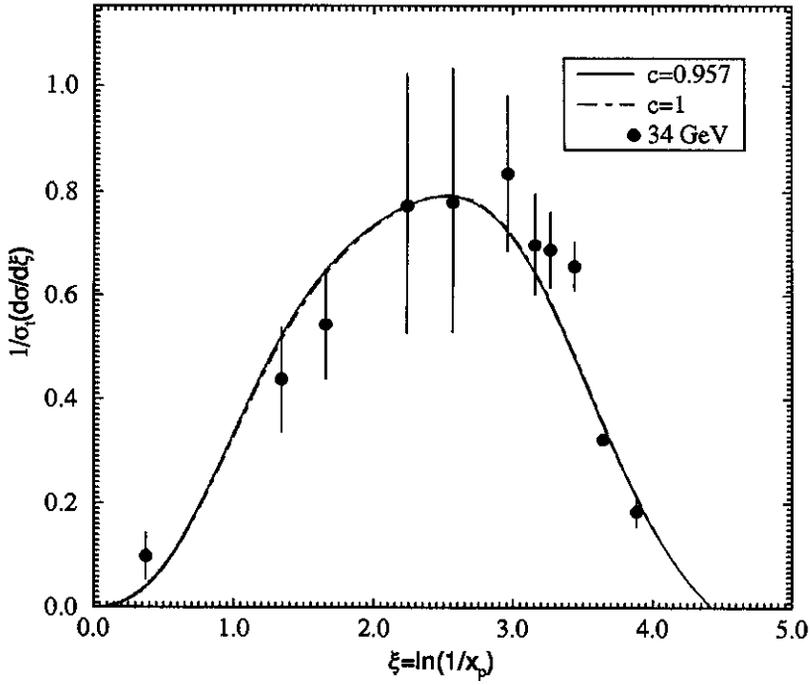


Figura 4.19: Seção de choque diferencial normalizada (mb) para káons carregados em termos da variável ξ para 34 e 58 GeV

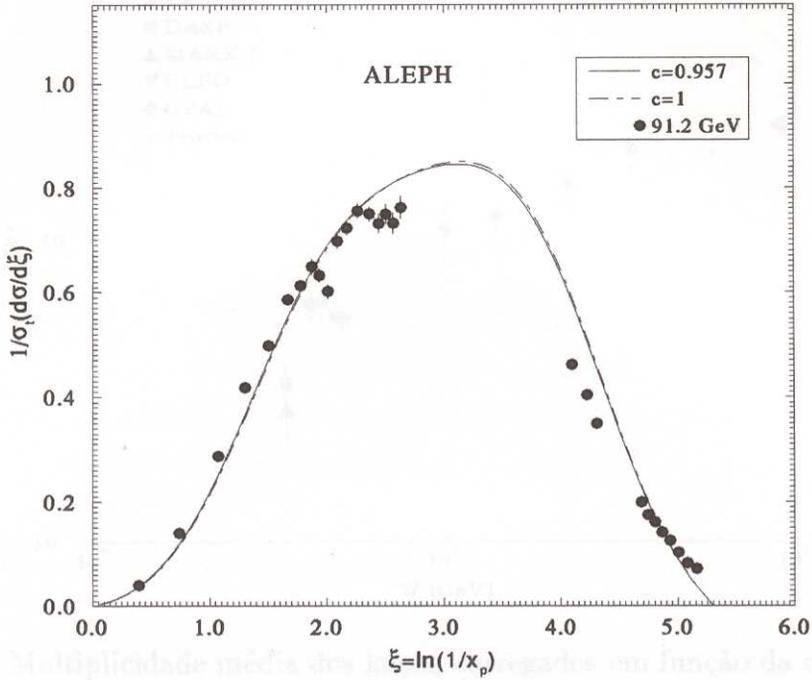


Figura 4.19: Multiplicidade média dos k^0 gerados em função da energia no CM. Os pontos teóricos foram calculados por integração da distribuição em x_p .

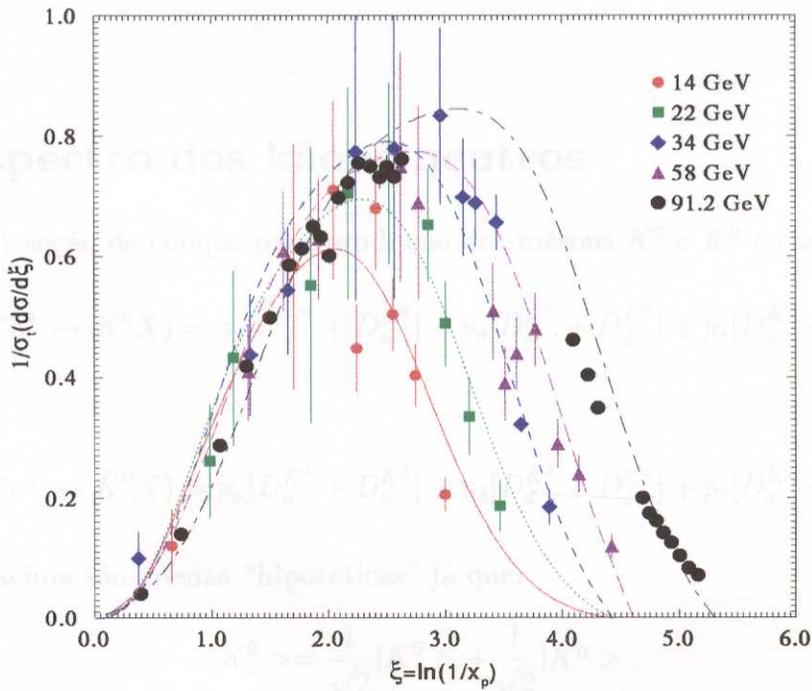


Figura 4.20: Seção de choque diferencial normalizada para k^0 carregados em termos da variável ξ para 91.2 GeV e a seguir todas as figuras em um mesmo gráfico.

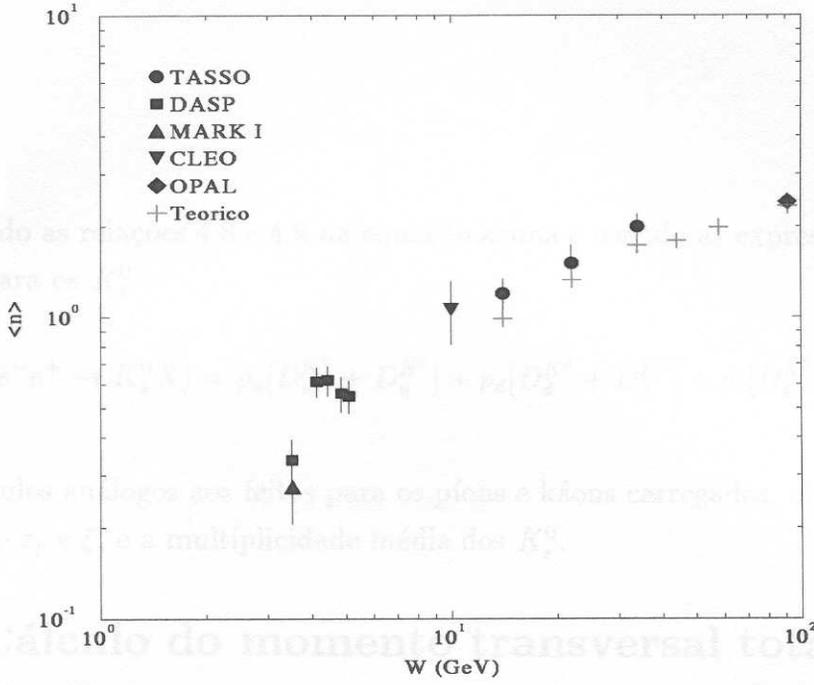


Figura 4.21: Multiplicidade média dos káons carregados em função da energia no CM, os pontos teóricos foram calculados por integração da distribuição em x_p .

4.4 Espectro dos káons neutros

A seção de choque para produção dos mésons K^0 e \bar{K}^0 é dada por:

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow K^0 X) = p_u[D_u^{K^0} + D_{\bar{u}}^{K^0}] + p_d[D_d^{K^0} + D_{\bar{d}}^{K^0}] + p_s[D_s^{K^0} + D_{\bar{s}}^{K^0}] \quad (4.8)$$

e

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \bar{K}^0 X) = p_u[D_u^{\bar{K}^0} + D_{\bar{u}}^{\bar{K}^0}] + p_d[D_d^{\bar{K}^0} + D_{\bar{d}}^{\bar{K}^0}] + p_s[D_s^{\bar{K}^0} + D_{\bar{s}}^{\bar{K}^0}] \quad (4.9)$$

As relações acima são apenas “hipotéticas” já que:

$$|K_s^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle. \quad (4.10)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \bar{K}_s^0 X) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow K^0 X) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_t} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow \bar{K}^0 X) \quad (4.11)$$

Substituindo as relações 4.8 e 4.9 na equação acima e usando as expressões 3.81 a 3.85, obtemos para os K_s^0

$$\frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma}{dx_p}(e^-e^+ \rightarrow K_s^0 X) = p_u[D_u^{K^0} + D_u^{\bar{K}^0}] + p_d[D_d^{K^0} + D_d^{\bar{K}^0}] + p_s[D_s^{K^0} + D_s^{\bar{K}^0}] \quad (4.12)$$

e com cálculos análogos aos feitos para os píons e káons carregados, obtém-se as distribuições em x_p e ξ , e a multiplicidade média dos K_s^0 .

4.5 Cálculo do momento transversal total $\langle p_t \rangle$

Na tabela 4.6 apresentamos os parâmetros da distribuição em p_t^2 de píons carregados, káons carregados e píons neutros para várias energias. Note que, como mencionado anteriormente, para as energias de 14, 22 e 34 GeV, o parâmetro n foi obtido através do *fit* representado na figura 3.4. Já para as energias 44, 58 e 91.2 GeV estabelecemos os valores deste parâmetro pelo *fit* com os dados das distribuições em ξ para píons carregados.

Pela equação 3.96 e os parâmetros da tabela 4.6 pode-se obter os valores de $\langle p_t \rangle$ dos píons e káons para as várias energias. Os valores calculados são dados na tabela 4.7.

Uma análise dos valores da tabela 4.7 nos leva a assumir uma dependência linear muito suave do momento transversal com a energia, figura 4.22, o que é esperado uma vez que no modelo atual não incorporamos os eventos a três jatos, ou seja, os processos do tipo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ (emissão de glúons) [14]. Espera-se que com a inclusão destes eventos no modelo, os valores de $\langle p_t \rangle$ apresentem um crescimento linear com a energia mais acentuado, como mostram os resultados experimentais [14].

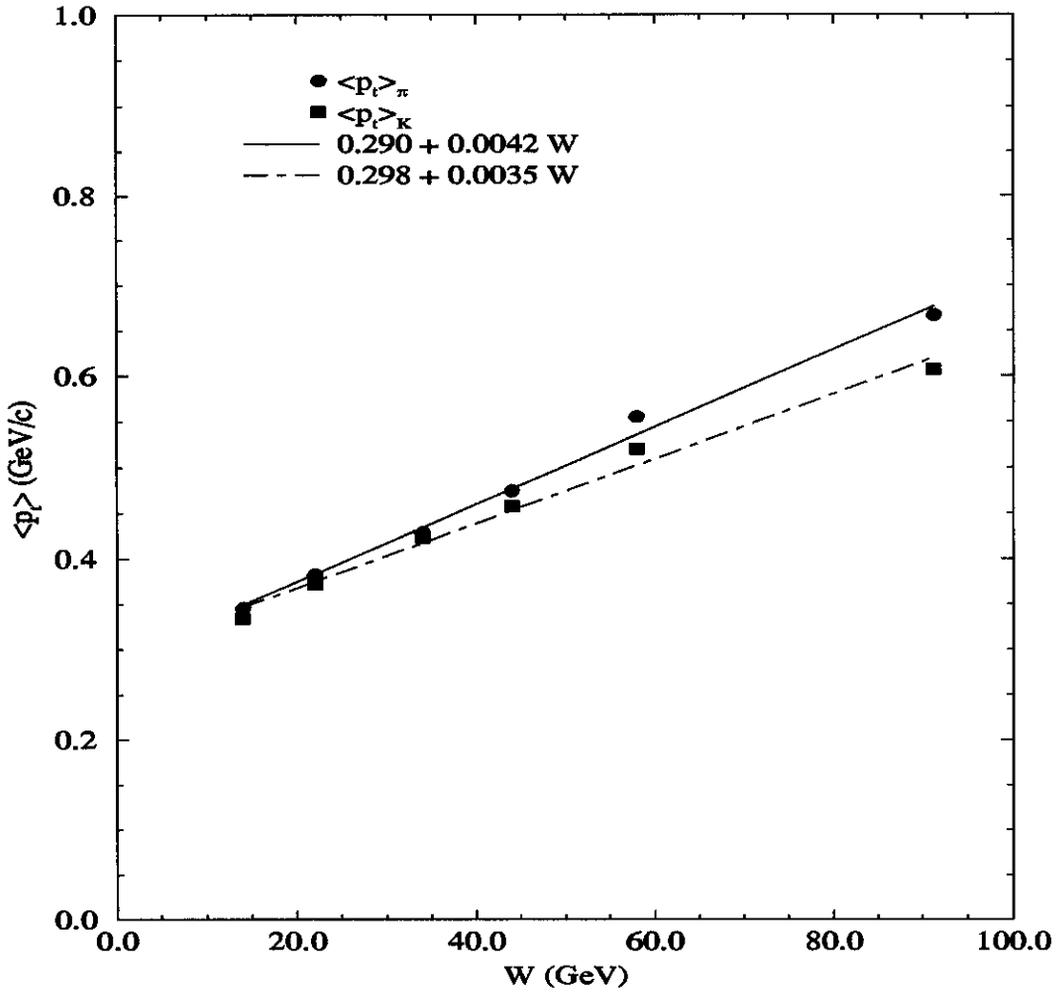


Figura 4.22: $\langle p_t \rangle$ em função da energia c.m. para píons carregados, káons carregados e píons neutros. As curvas foram obtidas através de *fits* com os valores da tabela 4.7.

H	\sqrt{s} GeV	a_1	a_2	n
π^{ch}	14	219	0.58	12.967
	22	219	0.69	10.567
	34	219	0.79	8.9
	44	219	0.81	8.2
	58	219	0.9	7
	91.2	219	0.91	6.3
K^{ch}	14	219	0.6	12.967
	22	219	0.71	10.567
	34	219	0.8	8.9
	44	219	0.84	8.2
	58	219	0.96	7
	91.2	219	1.0	6.3
π^0	35	219	0.74	8.9
	44	219	0.8	8.2
	91.2	219	0.85	6.3

Tabela 4.6: Parâmetros da distribuição em p_t^2 para π^{ch} , K^{ch} e π^0

\sqrt{s} (GeV)	$\langle p_t \rangle_{\pi^{ch}}$	$\langle p_t \rangle_{K^{ch}}$	$\langle p_t \rangle_{\pi^0}$
14	0.3459	0.3344	-
22	0.3830	0.3722	-
34	0.4290	0.4237	-
35	-	-	0.4580
44	0.4748	0.4578	-
58	0.5555	0.5208	-
91.2	0.6666	0.6060	0.7130

Tabela 4.7: Valores de $\langle p_t \rangle$ em GeV/c calculados a partir dos parâmetros das distribuições em p_t^2

Capítulo 5

Discussão final

Apresentou-se neste trabalho um estudo das seções de choque inclusivas para a aniquilação e^+e^- em hádrons, via soluções analíticas da equação de difusão. Esse processo pode ser visto como a aniquilação $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Após a aniquilação cada quark tem uma energia definida, gerando uma cascata de quarks com emissão sucessiva de mésons. O processo de cascata se exaure quando o quark remascente não tiver mais energia suficiente para continuar o processo. Dessa forma, escreve-se uma equação de difusão para as funções espectrais dos quarks. A equação de difusão para essa cascata é idêntica, em sua forma, a equação de difusão que descreve o desenvolvimento de uma cascata eletromagnética na atmosfera terrestre [4].

O modelo usado neste trabalho foi inspirado no modelo proposto por Fukuda e Iso [2]. A equação de difusão é essencialmente a mesma, porém dá-se uma interpretação diferente aos parâmetros do modelo, como discutido no Capítulo 3.

As soluções dessas equações de difusão acopladas foram determinadas através de um método desenvolvido para solução de uma cascata eletromagnética [4]: o método de ordenação de operadores exponenciais, que permite obter soluções simples e analíticas para as funções espectrais dos quarks.

A hipótese utilizada para a obtenção das soluções analíticas, foi assumir uma expressão simples para a função que define a probabilidade de emissão de um méson durante o processo de cascata de quarks, inspirada no modelo de *Bremsstrahlung*.

Tendo-se determinado as funções espectrais para os quarks, calculou-se as funções de fragmentação e, conseqüentemente, as seções de choque inclusivas. Para tal,

foi necessário assumir uma parametrização para a distribuição de momento transversal. Uma análise dos dados experimentais de distribuição em p_t^2 , permite assumir uma parametrização tipo polar para essa distribuição, com normalização constante para todas as energias. Fazendo-se um ajuste numérico dos dados experimentais, fixou-se a normalização (a_1) e o expoente (n) da distribuição polar. Deixou-se livre o parâmetro (a_2) que adimensionaliza a distribuição em p_t^2 , posteriormente determinado pelo ajuste numérico das seções de choque inclusivas para os diferentes mésons, respectivamente.

O nosso modelo, dessa forma, apresentou seis parâmetros livres, determinados por ajustes numéricos. Quatro desses parâmetros correspondem à violação de simetria SU(3): três deles (a, b, b') se referem à troca de sabores de quark durante o desenvolvimento das cascatas e o quarto (c) à uma quebra de SU(3) devido a uma diferença implícita entre o dubleto (u, d) e o singlete (s). Os valores das probabilidades de troca de sabores, obtidos por ajustes numéricos, estão de acordo com a hierarquia esperada para eles, como discutido no Capítulo 3

Os valores obtidos para o parâmetro (α) mostram um comportamento decrescente com a energia. No limite de altíssimas energias esse parâmetro tende a zero, mostrando claramente o comportamento tipo *Bremsstrahlung* para a função de probabilidade de emissão de um méson durante o desenvolvimento da cascata.

O parâmetro de adimensionalização (a_2) da distribuição de p_t^2 é diferente para cada tipo de méson considerado, mostrando que, como acontece nas interações hadrônicas, os valores médios de p_t são diferentes para os pions e kaons, respectivamente. Mostrou-se também que, no contexto de nosso modelo, os valores médios de p_t para as partículas carregadas, bem como as multiplicidades médias estão de acordo com os valores experimentais.

Com este modelo simples de cascata de quarks foi possível obter uma boa descrição dos dados experimentais de seção de choque inclusiva em processos do tipo aniquilação $e^+e^- \rightarrow$ mésons, num grande intervalo de energia, principalmente quando se compara com resultados obtidos por complicados processos de simulação tipo Monte Carlo, como discutidos no Capítulo 2.

Apesar dos bons resultados aqui obtidos, particularmente na região de baixas energias, para se aceitar este promissor modelo como uma real alternativa para descrição dos processos inclusivos de aniquilação e^+e^- , algumas modificações são necessárias ao

modelo. Uma simples análise de nossos resultados para a energia do LEP já nos mostra uma clara necessidade de incorporação de outras contribuições ao desenvolvimento pleno da cascata de quarks.

Uma modificação que faremos no modelo atual visando obter uma melhor descrição dos dados experimentais para as energias do LEP, sobretudo na região de baixos x_p , é incorporar a contribuição dos eventos a três jatos, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$. Uma análise dos resultados experimentais comparados com previsões de QCD, mostra que, no regime de altas energias estes processos dão uma contribuição de 10% para a seção de choque diferencial, já para baixas energias eles sequer são observados. Note que, com este resultado, pode-se afirmar que, mesmo no regime de altas energias, os eventos a três jatos (emissão de glúons) não são predominantes. A maior contribuição vem dos eventos a dois jatos, $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, que é a fundamentação teórica do modelo atual, desenvolvido nesta tese.

Outra possibilidade é incorporar ao processo de cascata mais dois quarks de sabores c e b . Evidentemente o sistema de equações de difusão acopladas torna-se mais complicado, porém de solução analítica viável [33] quando se utiliza o método de ordenação de operadores exponenciais. Nesta tese, desenvolvemos uma versão do modelo em que apenas os três quarks de sabor são importantes (u , d e s). O objetivo é estender o modelo incluindo outros sabores (c e b). Desta forma, estaremos contemplando, no regime de altas energias, novos canais que são abertos para produção de quarks pesados do tipo (c e b). Como consequência, teremos condições de descrever a produção de mésons pesados tais como: D^+ , D^- , D^0 , \bar{D}^0 , D_s , B^+ , B^- , B^0 e \bar{B}^0 .

Estas modificações, tanto a inclusão dos eventos a três jatos como a dos quarks c e b , implicam em uma reformulação analítica bastante significativa do modelo atual, mas indispensáveis no sentido de tornar o Modelo de Cascatas de Quarks uma forma alternativa de se descrever a produção hadrônica inclusiva, tanto de mésons pseudoescalares como de pseudovetoriais, em todo range de energia.

Apêndice

Neste apêndice vamos apresentar a demonstração de alguns resultados fundamentais utilizados neste trabalho.

Consideremos primeiramente a atuação do operador D^n , $n \geq 1$, sobre a função $\delta(x - x_0)$, que define a condição de contorno das equações de evolução temporal.

O operador D é definido pela seguinte relação

$$Dg(x) = \int_x^{x_0} dx' f(x, x')g(x') \quad (5.1)$$

onde

$$f(x, x') = \frac{(1 + \alpha)}{x'} \left(\frac{x}{x'}\right)^\alpha \quad (5.2)$$

Para $n=1$, tem-se que

$$D\delta(x - x_0) = f(x, x_0) \quad (5.3)$$

Para $n=2$

$$D^2\delta(x - x_0) = \int_x^{x_0} dx' f(x, x')f(x', x_0) \quad (5.4)$$

que integrando, obtém-se

$$D^2\delta(x - x_0) = f(x, x_0)(1 + \alpha)\ln\left(\frac{x_0}{x}\right) \quad (5.5)$$

Para $n=3$

$$D^3\delta(x - x_0) = \int_x^{x_0} dx' f(x, x')f(x', x_0)(1 + \alpha)\ln\left(\frac{x_0}{x'}\right) \quad (5.6)$$

$$= f(x, x_0)(1 + \alpha)^2 \int_x^{x_0} \frac{dx'}{x'} \ln\left(\frac{x_0}{x'}\right)$$

portanto

$$D^3 \delta(x - x_0) = f(x, x_0) \frac{1}{2!} [(1 + \alpha) \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)]^2 \quad (5.7)$$

Termos de ordem superior são calculados da mesma forma, obtendo-se para qualquer $n \geq 1$

$$D^n \delta(x - x_0) = f(x, x_0) \frac{1}{(n-1)!} [(1 + \alpha) \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)]^{n-1} \quad (5.8)$$

Consideremos, agora, a determinação da aplicação do operador

$$e^{zx_0 D} \cosh(z\omega D) \quad (5.9)$$

sobre a condição de contorno $\delta(x - x_0)$.

Pode-se escrever

$$\cosh(z\omega D) = \frac{1}{2} [e^{z\omega D} + e^{-z\omega D}]$$

Assim, tem-se

$$\frac{1}{2} [e^{z(\chi_0 + \omega)D} + e^{z(\chi_0 - \omega)D}] \delta(x - x_0) \quad (5.10)$$

Por simplicidade de cálculo, vamos definir

$$\mu_{\pm} = \chi_0 \pm \omega \quad (5.11)$$

Expandindo-se as exponenciais em série de potências, tem-se

$$\frac{1}{2} [2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^n \mu_+^n + z^n \mu_-^n) D^n] \delta(x - x_0) \quad (5.12)$$

Usando a equação 5.8, tem-se

$$\begin{aligned} & \delta(x - x_0) + \frac{1}{2} f(x, x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)!} (z^n \mu_+^n + z^n \mu_-^n) [(1 + \alpha) \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)]^{n-1} \\ = & \delta(x - x_0) + \frac{f(x, x_0)}{2} [z\mu_+ \sum_{n=0}^{\infty} [z\mu_+(1 + \alpha) \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)]^n \frac{1}{n!(n+1)!} \\ & + [z\mu_- \sum_{n=0}^{\infty} [z\mu_-(1 + \alpha) \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)]^n \frac{1}{n!(n+1)!}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lembrando que

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

e definindo

$$u_1 = 2\sqrt{z\mu_-(1+\alpha)\ln\left(\frac{x_0}{x}\right)}$$

$$u_2 = 2\sqrt{z\mu_+(1+\alpha)\ln\left(\frac{x_0}{x}\right)}$$

a equação 5.13 pode ser escrita na forma

$$\delta(x-x_0) + \frac{f(x, x_0)}{2} \left[z\mu_+ \frac{2}{u_1} I_1(u_1) + z\mu_- \frac{2}{u_2} I_1(u_2) \right]$$

Contribuições desse tipo devem ser multiplicadas por $e^{-\frac{(1+c)}{2}z}$ e integradas em z . Para calcular essas integrais, pode-se usar diretamente a equação 5.13, pois

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(1+c)}{2}z} z^n dz = n! \left(\frac{2}{1+c}\right)^{n+2}$$

Assim,

$$I = \int_1^{\infty} e^{-\frac{(1+c)}{2}z} e^{zx_0 D} \cosh(z\omega D) dz \delta(x-x_0) \quad (5.14)$$

$$= \left(\frac{2}{1+c}\right)^2 \delta(x-x_0) + \frac{f(x, x_0)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\mu_+^n + \mu_-^n] \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{2}{1+c}\right]^{n+2} \left[(1+\alpha)\ln\left(\frac{x_0}{x}\right)\right]^{n-1} \quad (5.15)$$

$$= \left(\frac{2}{1+c}\right)^2 \left[\delta(x-x_0) + \frac{f(x, x_0)}{2} \left(\frac{2\mu_+}{(1+c)} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{2\mu_+(1+\alpha)}{1+c}} + \frac{2\mu_-}{(1+c)} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{2\mu_-(1+\alpha)}{1+c}} \right) \right]$$

Definindo

$$\Delta_1 = \frac{2(\alpha+1)}{1+c} \mu_+$$

$$\Delta_2 = \frac{2(\alpha+1)}{1+c} \mu_-$$

obtem-se

$$I = \left(\frac{2}{1+c}\right)^2 \left[\delta(x-x_0) + \frac{f(x, x_0)}{2(1+\alpha)} \left(\Delta_1 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_1} + \Delta_2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\Delta_2} \right) \right] \quad (5.16)$$

Bibliografia

- [1] S. Matsuda, "Particle composition and quark cascade in energetic hadron collisions.", **Physical Review D**, 12 (7): 1940-1951, 1975.
- [2] H. Fukuda, C. Iso, " Unified analysis of inclusive spectra of mesons and baryons in high energy pp , πp and e^+e^- collisions by Quark Cascade Model.", **Progress of Theoretical Physics**, 57 (2): 483-499, 1977.
- [3] T.Kanki et al., **Prog.Theor.Phys.**, 97A: 1, 1988.
- [4] J. Bellandi, R.J.M. Covoian, et al., " Eletromagnetic cascades: an alternative solution.", **J. Phys. A: Math. Gen.**, 25: 877-883, 1992.
- [5] T. Sjostrand **Computer Phys. Comm.**, 39: 347, 1986; T. Sjostrand, M. Bengtsson, **Computer Phys. Comm.**, 43: 367, 1987.
- [6] G. Marchesini, B. Webber, **Nucl. Phys.**, B310: 461, 1988; G. Marchesini, et al., **Computer Phys. Comm.**, 67: 465, 1992.
- [7] Y. I. Azimov, Y. L. Dokshitzer, V. A. Khoze, S. I. Troyan, **Z. Phys. c**, 27: 65, 1985.
- [8] D. Amati, G. Veneziano, **Phys. Lett. b**, 83: 87, 1979; Y. I. Azimov et al., **Phys. Lett. B**, 165: 147, (1985).
- [9] T. Sjöstrand, **Int. J. Mod. Phys.**, A3: 757, 1988.
- [10] Hofmann, Werner, **Annual Rev. Nucl.**, 38: 279, 1988.

- [11] Francis Halzen e Alan D. Martin , **Quarks e Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**, John Wiley & Sons, 1984.
- [12] J. Bellandi, “Funções de Green - Notas de Física 1 - IFGW 1992.”
- [13] O. Sawada, “Quark Cascade Model; hadronization of quarks after a hard collision.”, **Progress of Theoretical Physics**, 58 (6): 1815-1829, 1977.
- [14] TASSO Coll., “Jet production and fragmentation in e^+e^- annihilation at 10-43 GeV.”, **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 22:307-340, 1984.
- [15] J. Bellandi, R..M. Covolán, et al, “Partial and total inelasticities obtained from inclusive reaction data.”, **Physical Review D**, , 1994.
- [16] TASSO Coll., “Pion, Kaon and proton cross section in e^+e^- annihilation at 34 GeV and 44 GeV c.m. energy.”, **Z. Phys. C - Particle and Fields**, 42: 189-197,1989.
- [17] TOPAZ Coll., “Measurement of inclusive particle spectra and test of MLLA prediction in e^+e^- annihilation at $W=58$ GeV.”, **Physics Letters B**,
- [18] ALEPH Coll., “Inclusive π^{ch} , K^{ch} and (p, \bar{p}) differential cross-section at the Z resonance. ”, **Z. Physics C - Particles and Fields**, 66: 355-365, 1995.
- [19] DELPHI Coll., “Inclusive measurements of the K^\pm and p/\bar{p} production in hadronic Z^0 decays”, **Nuclear Physics B**, 444: 3-26, 1995.
- [20] Yu.L. Dokshitzev, V.A. Khoze, S.I. Troyan, “ Phenomenology of the particle spectra in QCD jets in a modified leading logarithmic approximation.”, **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 55: 107-114, 1992.
- [21] TASSO Coll., M. Althoff et al, “ A detailed study of strange particles production in e^+e^- annihilation at high energy”, **Z. Phys. C - Particle and Fields**, 27: 27-37, 1985.
- [22] TASSO Coll., R.Brandelik et al, **Phys. Lett.**, 94B: 444, 1980; 113B, 98, 1982; TASSO Coll., M. Althoff et al,**Z. Phys. C - Particle and Fields**, 17, 5, 1983.
- [23] TASSO Coll., M. Althoff et al., **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 17, 5, 1983.

- [24] JADE Coll., W. Bartel et al., **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 20: 187, 1983;
 JADE Coll., W. Bartel et al., **Z. Phys. C - Particles and Fields** 28: 343, 1985;
 JADE Coll., W. Bartel et al, **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 46: 1, 1990.
- [25] TASSO Coll., M. Althoff et al., **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 17: 5, 1983.
- [26] T. Sjostrand, "Status of fragmentation models", **International Journal of Modern Physics**, A3: 757, 1988.
- [27] JADE Coll., D.D. Pitzl, "A study of photon production in hadronic events from e^+e^- annihilation.", **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 46: 1-7,1990.
- [28] L3 Coll., B. Adeva, "Measurement of the inclusive production of neutral pions and charged particles on the Z^0 resonance.", **Physics Letters B**, 259: 199-209, 1991.
- [29] OPAL Coll., "Measurement of the production rates of charged hadrons in e^+e^- annihilation at the Z^0 .", **Z. Phys. C**, 63: 181-195, 1994.
- [30] CELLO Coll., H.J.Behrend, " Inclusive strange particle production in e^+e^- annihilation", **Z. Phys. C - Particles and Fields**, 46: 397-403, 1990.
- [31] H.Aihara, " K^{*0} and K_s^0 meson production in e^+e^- annihilation at 29 GeV", **Physical Review Letters**, 53, n.25: 2378-2381, 1984.
- [32] L3 Coll., "Measurement of inclusive production of neutral hadrons from Z decay.", **Physics Letters B**, 328: 222-233, 1994.
- [33] J. Bellandi, M. M. Guzzo, J. R. Fleitas e V. M. de Aquino, "On the Matricial Representations of Exponential Operators.", **Int. Journal of Mathematics Education Science and Techn.**, 1996.