

Estudo das Propriedades
da Fase do Campo
Eletromagnético Quantizado
Através de Estados de Fase

Daniela de Andrade Manoel ✓

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco
Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa (IF. UFSCar)
Prof. Dr. Guillermo G. Cabrera Oyarzún

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física Gleb Wataghin
para a obtenção do título de mestre.

*Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação de mestrado defendida pela aluna
Daniela de Andrade Manoel e aprovada pela
Comissão julgadora.*

Campinas, 17 de julho de 1999

JP/1186 711

UNIDADE IFGW

N.º CHAMADA:

V. _____ Ex. _____

TOMBO BC/38833

PROD. 229199

C D

PREÇO R\$ 11,00

DATA 30/09/99

N.º CPD _____

CM-00126201-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

M317e

Manoel, Daniela de Andrade

Estudo das propriedades da fase do campo eletro - magnético quantizado através de estados de fase. - Campinas, SP : [s. n.], 1999.

Orientador: Antonio Vidiella Barranco.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Heisenberg, Princípio de incerteza de. 2. Ótica quântica. 3. Mecânica quântica. 4. Campos eletromagnéticos. I. Vidiella-Barranco, Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Secretaria de Pós-Graduação

CAIXA POSTAL 6165

CEP 13083-970 - Campinas-SP - Brasil

Tel: (019) 788-5305

Fax: (019) 289-2424

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE DANIELA DE ANDRADE MANOEL APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 29/03/99.

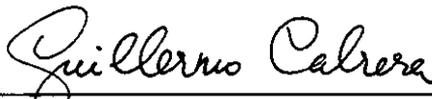
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (Orientador do Candidato) –
IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa – DF/UFSCar



Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzún – IFGW/UNICAMP

Resumo

Estudos da fase do campo eletromagnético quantizado, em geral, são voltados à procura de um operador para a fase. Apesar de não haver um consenso sobre esses operadores, estados com fase bem definida existem sem maiores problemas e, neste trabalho, mostramos que se pode estudar a fase do campo utilizando estes estados. Após uma breve introdução a alguns dos formalismos que tentam construir o operador de fase, voltamos nosso interesse para um estado em especial que é o Estado de Fase Coerente. Apresentamos algumas propriedades dos estados de fase e analisamos a relação entre as dispersões da fase e número de fótons com estes estados. Em seguida, estudamos as “distribuições de fase” obtidas da integração radial da função de quasi-probabilidade generalizada parametrizada em s e as comparamos com a distribuição de fase de Pegg-Barnett, que é considerada a mais apropriada. Notamos que para certos valores dos parâmetros envolvidos, ocorre uma coincidência quase que completa entre as duas distribuições, no caso do estado coerente e do altamente não-clássico estado “gato de Schrödinger”.

Abstract

Studies on the phase of the quantized electromagnetic field are in general aimed at seeking a proper phase operator. Even though there is no consensus on these operators, states with a well-defined phase do exist, and in our work we show that the field phase can be studied by using these states. After a brief introduction to some of the formalisms that try to build the phase operator, we focus on the Coherent Phase States. We present some of their phase properties and analyse the product of variances of phase and photon number using those states. We then study the “phase distributions” obtained from the radial integration of the generalized s parametrized quasiprobability function and compare them with the Pegg-Barnett phase distribution, which is considered the most appropriate one. We find that for certain values of the parameters involved, there is an almost complete agreement between both distributions, in the case of a coherent state as well as for the highly nonclassical “Schrödinger cat state”.

A minha mãe.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a meu orientador e, agora, amigo, Antonio Vidiella Barranco, por ter sugerido este tema e ter me orientado e apoiado durante estes dois anos. Além dos papos sobre tudo e das ótimas risadas.

À Prof. Dra. Kyoko Furuya por estar sempre presente nas minhas bancas com excelentes questões.

Aos professores que algum dia me deram aulas ou com quem tive a oportunidade de discutir física (ou simplesmente conversar) e aos membros da banca examinadora.

Agradeço também a meus colegas Roma, Renato, Júlio, Varlei, Carol, Caetano, Alessandra, Sandro e Daniel pelo apoio, conversas e por terem me recebido tão bem no grupo.

Ao Claudio, por seu carinho, atenção e paciência.

E à CAPES pelo financiamento sem o qual este trabalho não seria possível.

Conteúdo

Introdução	8
1 A Fase na Mecânica Quântica	10
1.1 O Tratamento Clássico para Fase	10
1.2 O Formalismo de Dirac	11
1.2.1 A Quantização Canônica	11
1.2.2 O Operador de Fase de Dirac	13
1.2.3 Problemas com o Formalismo	14
1.3 O Formalismo de Susskind-Glogower	16
1.3.1 Os Operadores de Fase de Susskind-Glogower	16
1.3.2 O Auto-Estado do Operador	17
1.4 O Formalismo de Pegg-Barnett	18
1.4.1 Os Estados de Fase de Pegg-Barnett	18
1.4.2 O Operador de Fase Hermitiano	19
2 O Estado de Fase Coerente	23
2.1 Propriedades dos Estados de Fase Coerentes	25
2.2 Estados com Perfeito Aprisionamento de População	28
2.2.1 O Modelo de Jaynes-Cummings	29
3 Distribuições de Probabilidade	39
3.1 O Operador Densidade	39
3.2 Funções de Quasi-Probabilidade	40
3.3 As Distribuições de Fase	45
3.4 Coincidência das Distribuições de Fase	49
Conclusões	55

A Estados do Campo Quantizado	57
A.1 Estados Coerentes	57
A.2 Estados Comprimidos	58
A.3 Estados de Número Deslocado	59
A.4 Estados “Gato de Schrödinger”	59

Introdução

Para descrevermos o campo eletromagnético, na eletrodinâmica clássica, necessitamos determinar sua amplitude de oscilação e fase. Para tratarmos este campo no formalismo da mecânica quântica, devemos, de acordo com a quantização canônica, associar um operador à amplitude e outro à fase. De fato, há um operador bem definido associado à amplitude: o operador número de fótons, \hat{n} . No que concerne à fase, entretanto, não existe um único e bem definido operador. Existem algumas tentativas de construção deste operador, contudo, sem termos uma palavra final sobre o assunto.

A primeira tentativa de se tratar a fase dentro do formalismo da mecânica quântica foi feita por Dirac, em 1927, [1], quando propôs um operador de fase, que seria canonicamente conjugado ao operador número de fótons e construído a partir da decomposição o polar do operador aniquilação de fótons. Passaram anos até que se notou este operador apresentava sérios problemas: não era hermitiano, como supunha Dirac, e a relação de comutação entre o número de fótons e a fase se mostrou inconsistente para este operador. E foi somente em 1964 que Susskind e Glogower [2], propuseram um formalismo para a fase, alternativo ao de Dirac. Neste formalismo, eles aceitavam a não hermiticidade do operador de fase e, com esse novo operador, a relação de comutação de fase e número de fótons não era mais inconsistente. A partir daí, muitos formalismos e operadores para a fase foram propostos. Um deles merece destaque porque apresenta um operador hermitiano para a fase: o formalismo de Pegg-Barnett, [3]. Eles apresentam um operador, hermitiano que só é definido no sub-espaço de Hilbert de dimensão r . O operador de Pegg-Barnett é hoje em dia o mais aceito e utilizado para se tratar a fase dentro da mecânica quântica. Contudo, há críticas a este formalismo, [5], [6] e [7], principalmente no que se refere ao fato do operador não ser válido no espaço de Hilbert de dimensão infinita.

Os operadores existentes para a fase apresentam problemas e os resultados

obtidos com cada um não concordam entre si. Por outro lado, os estados de fase que são apresentados pelos dois últimos formalismos (de Susskind-Glogower e de Pegg-Barnett) levam à mesma distribuição para a fase. Isso nos chamou a atenção para os estados com fase bem definida. Nos perguntamos, então, se seria possível investigar a fase do campo a partir de estados de fase, como os estados acima citados e também o estado de fase coerente. É a isto que se propõe este trabalho.

Apresentamos, no capítulo 1, um breve resumo dos três formalismos citados para o operador de fase: de Dirac, de Susskind-Glogower e de Pegg-Barnett, apontando os progressos e falhas de cada um.

No capítulo 2, veremos algumas propriedades dos estados de fase coerentes que são auto-estados do operador de fase de Susskind-Glogower. Neste capítulo ainda, analisamos, dentro da teoria de Pegg-Barnett, o produto das variâncias da fase e do número de fótons para estes estados em dois casos particulares: estado de vácuo e estado de fase de Susskind-Glogower.

Vemos, no capítulo 3, que através das funções de quasi-probabilidades generalizadas parametrizadas por s também podemos estudar a fase do campo quantizado. Quando fazemos a integração radial destas funções, obtemos “distribuições de fase” para um determinado estado. Comparamos estas “distribuições” com aquelas provenientes dos estados de fase de Pegg-Barnett (que são consideradas as mais apropriadas) para dois estados do campo: os estados coerentes, $|\alpha\rangle$, e os estados “gato de Schrödinger”, $|\alpha\rangle + e^{i\phi}|\alpha\rangle$. Variando o parâmetro s e $|\alpha|^2$, obtivemos coincidência quase total da distribuição de fase para o estado coerente e uma boa aproximação para o estado “gato de Schrödinger”. Estes resultados representam um avanço frente a outros trabalhos que fizeram comparações semelhantes e não obtiveram coincidência das distribuições.

Terminamos com um apêndice que introduz e discute alguns dos estados do campo quantizado aqui citados ou utilizados.

Capítulo 1

A Fase na Mecânica Quântica

1.1 O Tratamento Clássico para Fase

Consideremos o campo eletromagnético livre contido numa cavidade cúbica com lado L . Podemos expandir o campo elétrico em modos normais de vibração caracterizados pelos vetores de onda \vec{k} e pelos versores de polarização $\hat{\epsilon}_k$. Cada modo se comporta como se fosse um oscilador harmônico. Com o intuito de simplificar, somente consideraremos campos linearmente polarizados,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \sum_k \left[\alpha_k e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \alpha_k^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right] \hat{\epsilon}_k, \quad (1.1)$$

onde ω é a frequência angular e $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-2} F/m$ deve-se à utilização do sistema MKS.

No caso do campo em um dimensão e apenas com um único modo ($k = k_0$), teremos então

$$E(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \left[\alpha e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \alpha^* e^{-i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (1.2)$$

Ao utilizarmos a decomposição polar para os coeficientes $\alpha = r e^{i\phi}$, o campo se reduz a

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi), \quad (1.3)$$

onde

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} r. \quad (1.4)$$

Obtemos então a decomposição do campo elétrico em dois termos, sendo um referente à amplitude e outro à fase.

Vimos que classicamente essa decomposição do campo elétrico é realizada de maneira simples, basta escrever os coeficientes, α , dos modos como $re^{i\phi}$ com $r = \sqrt{\alpha^*\alpha}$. Dentro do formalismo da mecânica quântica, essa decomposição apresenta alguns problemas.

1.2 O Formalismo de Dirac

1.2.1 A Quantização Canônica

Na mecânica quântica, as grandezas físicas são descritas por operadores, os quais são associados às grandezas em analogia com sua forma clássica, [8], [9]. As grandezas que classicamente são canonicamente conjugadas¹, quanticamente, serão associados operadores que devem obedecer a uma certa relação de comutação. Por exemplo, à posição x , de uma partícula livre, em uma dimensão, é associado um operador de posição \hat{x} ; e ao momento p_x desta partícula, será associado o operador \hat{p}_x . Como classicamente x e p_x são grandezas canônicas conjugadas, quanticamente elas devem obedecer à relação de comutação canônica

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar. \quad (1.5)$$

Se uma quantidade física, A , é expressa em termos de x e p_x , para obtermos o operador correspondente, \hat{A} , devemos substituir, na expressão $A(x, p_x, t)$, as variáveis canônicas pelos respectivos operadores

$$\hat{A} = A(\hat{x}, \hat{p}_x, t). \quad (1.6)$$

Esta é a chamada quantização canônica.

Ao campo elétrico, então, estaria associado um *operador campo elétrico*. O campo elétrico pode ser escrito em termos de modos normais de vibração de osciladores harmônicos. Os coeficientes destes modos é que passarão a ser operadores. Podemos escrever estes coeficientes da seguinte maneira

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \quad (1.7)$$

$$\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy), \quad (1.8)$$

¹Duas grandezas, a e b , serão canonicamente conjugadas quando seu Parênteses de Poisson for igual a um, $\{a, b\} = 1$.

sendo que

$$x = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} q \quad (1.9)$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{\omega\hbar}} p \quad (1.10)$$

onde q e p são as coordenadas canônicas de posição e momento, respectivamente.

Agora substituímos x e y pelos operadores \hat{q} e \hat{p} cuja relação de comutação é $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Teremos então o operador associado ao coeficiente, $\alpha \rightarrow \hat{a}$, que é conhecido como operador aniquilação de fótons; o operador associado ao complexo conjugado, $\alpha^* \rightarrow \hat{a}^\dagger$ é o operador criação de fótons,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{q} + i\hat{p}], \quad (1.11)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{q} - i\hat{p}]. \quad (1.12)$$

Os operadores criação e aniquilação de fótons, então, obedecem à relação de comutação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (1.13)$$

O operador campo elétrico, no espírito da quantização canônica, será construído a partir da substituição dos coeficientes α e α^* na eq.(1.2) pelos respectivos operadores \hat{a} eq.(1.11) e \hat{a}^\dagger eq.(1.12) e passa a ser

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L^3}}[\hat{a}e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}]. \quad (1.14)$$

A quantização dos coeficientes α e α^* permite escrever operadores para outras grandezas, como a hamiltoniana por exemplo. Se classicamente a hamiltoniana do campo eletromagnético é escrita em termos das variáveis conjugadas de momento e posição como

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2, \quad (1.15)$$

que é a mesma forma da hamiltoniana de um oscilador harmônico com massa unitária. Podemos escrever a hamiltoniana acima substituindo as coordenadas do espaço de fase q e p pelos coeficientes α e α^* , eqs.(1.7 e 1.8),

$$H = \hbar\omega|\alpha|^2, \quad (1.16)$$

de modo que a quantização da eq.(1.16) se resume à quantização dos coeficientes α e α^* . Obteremos a hamiltoniana quantizada

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (1.17)$$

Cujos auto-estados são os estados de número de fótons, ou estados de Fock, $|n\rangle$, os quais formam uma base no espaço de Hilbert. Os operadores de criação e aniquilação fótons atuam sobre os estados de Fock da seguinte maneira

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.18)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (1.19)$$

Podemos, com isso, escrever o operador número de fótons \hat{n} em termos dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} ,

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

A hamiltoniana da eq.(1.17) será usada no capítulo seguinte, onde estudaremos o *Modelo de Jaynes-Cummings*. Por ora, basta saber que é a hamiltoniana do campo eletromagnético sem fontes quantizado.

1.2.2 O Operador de Fase de Dirac

Em 1927, Dirac [1] propôs um operador para a fase baseado na decomposição do operador de aniquilação \hat{a} em duas partes: uma referente à amplitude e outra à fase numa analogia direta com a decomposição polar dos coeficientes α . Associando a ϕ um operador de fase $\hat{\phi}$ e à amplitude r um operador \hat{V} , a decomposição quântica seria

$$\hat{a} = \hat{V}e^{i\hat{\phi}}. \quad (1.20)$$

Assumindo que $\hat{\phi}$ e \hat{V} são operadores hermitianos

$$\hat{a}^\dagger = e^{-i\hat{\phi}} \hat{V}, \quad (1.21)$$

vemos que \hat{V} está associado ao operador número de fótons

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{V}e^{i\hat{\phi}}e^{-i\hat{\phi}}\hat{V} = \hat{V}^2 \equiv \hat{n} + 1 \quad (1.22)$$

ou seja

$$\hat{V} = \sqrt{\hat{n} + 1} \quad (1.23)$$

Ainda que o operador de fase apareça de forma natural, veremos a seguir que existem sérios problemas com este formalismo.

1.2.3 Problemas com o Formalismo

A relação de comutação entre os operadores de fase e de número de fótons será, [10],

$$[\hat{n}, e^{i\hat{\phi}}] = -e^{i\hat{\phi}}. \quad (1.24)$$

Usando a relação de Baker-Hausdorff para a expansão da exponencial

$$\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (1.25)$$

e

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = e^{-i\hat{\phi}}(\hat{n} + 1)e^{i\hat{\phi}} = \hat{n}, \quad (1.26)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \hat{n} - 1 &= e^{-i\hat{\phi}}\hat{n}e^{i\hat{\phi}} \\ &= \hat{n} - i[\hat{\phi}, \hat{n}] + \frac{(-i)^2}{2!}[\hat{\phi}, [\hat{\phi}, \hat{n}]] + \dots \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde vemos que

$$[\hat{\phi}, \hat{n}] = i. \quad (1.28)$$

Aparentemente $\hat{\phi}$ e \hat{n} se comportam como observáveis canonicamente conjugadas. Quando duas observáveis são conjugadas, segundo a mecânica quântica, não é possível se determinar precisamente o valor de ambas ao mesmo tempo. Ao se determinar sem erro o valor de uma delas, na outra a *incerteza* será total, ou seja, existe um limite máximo de precisão para estas grandezas. Este limite é dado pela *relação de mínima incerteza*. Se este é o caso de fase e número de fótons, deve existir então uma relação de mínima incerteza entre essas duas grandezas

$$\sqrt{\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\langle(\Delta\hat{\phi})^2\rangle} \geq \frac{1}{2}. \quad (1.29)$$

A princípio, as duas relações anteriores parecem razoáveis, contudo, há problemas com a eq.(1.28) e conseqüentemente com a eq.(1.29). Ao calcularmos os elementos de matriz do comutador $[\hat{\phi}, \hat{n}]$ na base dos estados de número, obtemos

$$\langle n|[\hat{\phi}, \hat{n}]|m\rangle = \langle n|i|m\rangle \quad (1.30)$$

$$(n - m)\langle n|\hat{\phi}|m\rangle = i\delta_{n,m}. \quad (1.31)$$

Vemos que a eq.(1.31) é inconsistente: para $n = m \Rightarrow 0 = i$. Ainda que os passos para sua derivação sejam consistentes, há algum erro com a relação. O problema está no fato do operador $\hat{\phi}$ não ser um operador hermitiano e, conseqüentemente, os operadores $e^{i\hat{\phi}}$ e $e^{-i\hat{\phi}}$ não serem unitários, como vemos a seguir.

Seja

$$\hat{a} = \sqrt{(\hat{n} + 1)} e^{i\hat{\phi}} \quad (1.32)$$

$$e^{i\hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{(\hat{n} + 1)}} \hat{a} \quad (1.33)$$

$$e^{-i\hat{\phi}} = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{(\hat{n} + 1)}}. \quad (1.34)$$

Temos então que

$$e^{i\hat{\phi}} e^{-i\hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{(\hat{n} + 1)}} \hat{a} \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{(\hat{n} + 1)}} = \hat{I}. \quad (1.35)$$

Entretanto, quando calculamos

$$e^{-i\hat{\phi}} e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}^\dagger \frac{1}{(\hat{n} + 1)} \hat{a}, \quad (1.36)$$

e tomamos o valor médio da eq.(1.36) com os estados de Fock,

$$\langle n | e^{-i\hat{\phi}} e^{i\hat{\phi}} | n \rangle = 1 - |0\rangle\langle 0|, \quad (1.37)$$

vemos de imediato que para $n = 0$

$$\langle 0 | e^{-i\hat{\phi}} e^{i\hat{\phi}} | 0 \rangle = 0 \quad \neq \quad \langle 0 | e^{i\hat{\phi}} e^{-i\hat{\phi}} | 0 \rangle = 1.$$

Assim, fica claro que $e^{i\hat{\phi}}$ e $e^{-i\hat{\phi}}$ não são unitários.

Há duas fontes de problemas com o formalismo de Dirac, [11]. A primeira, é devida ao espectro de \hat{n} não conter valores negativos, há somente valores inteiros de 0 a ∞ , isso faz com que $e^{i\hat{\phi}}$ não seja unitário. O outro ponto problemático está ligado ao domínio de $\hat{\phi}$ ser restrito ao intervalo $[-\pi, \pi]$, o que, por sua vez, causa a inconsistência na relação de comutação, eq.(1.28). Pode-se solucionar este último problema tratando o operador de fase de outra forma.

1.3 O Formalismo de Susskind-Glogower

O problema do domínio do operador de fase pode ser solucionado como sugeriu Louisell [12], ou seja, trabalhando-se com funções periódicas de $\hat{\phi}$ ao invés do próprio operador. Por exemplo, operadores seno e cosseno.

$$\widehat{\text{sen}}\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\hat{\phi}} - e^{-i\hat{\phi}}) \quad (1.38)$$

$$\widehat{\text{cós}}\phi = \frac{1}{2}(e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}) \quad (1.39)$$

cujas relações de comutação são

$$[\widehat{\text{cós}}\phi, \hat{n}] = i \widehat{\text{sen}}\phi, \quad (1.40)$$

$$[\widehat{\text{sen}}\phi, \hat{n}] = -i \widehat{\text{cós}}\phi. \quad (1.41)$$

Esta idéia foi seguida por Susskind e Glogower, em 1964 [2], que introduziram operadores seno e cosseno para a fase.

1.3.1 Os Operadores de Fase de Susskind-Glogower

Susskind e Glogower [2] consideram os operadores de fase

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} \quad \hat{V}^\dagger = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}$$

sem assumir que sejam unitários. Como \hat{V} e \hat{V}^\dagger são análogos a $e^{(\pm i\hat{\phi})}$

$$\hat{V} = \hat{e}^{i\hat{\phi}} \quad \hat{V}^\dagger = (\hat{e}^{i\hat{\phi}})^\dagger,$$

podemos definir os operadores seno e cosseno

$$\hat{C} \equiv \frac{1}{2}(\hat{V} + \hat{V}^\dagger) \quad \hat{S} \equiv \frac{1}{2i}(\hat{V} - \hat{V}^\dagger)$$

e suas relações de comutação

$$[\hat{C}, \hat{N}] = i\hat{S} \quad (1.42)$$

$$[\hat{S}, \hat{N}] = -i\hat{C} \quad (1.43)$$

$$[\hat{C}, \hat{S}] = \frac{1}{2} i|0\rangle\langle 0|. \quad (1.44)$$

\hat{V} e \hat{V}^\dagger podem ser escritos na base de número. Usando as representações de $\sqrt{\hat{n}+1}$, \hat{a} e \hat{a}^\dagger

$$\sqrt{\hat{n}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n+1| \quad (1.45)$$

$$\hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1| \quad (1.46)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n| \quad (1.47)$$

chegamos a

$$\hat{V} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1| \quad (1.48)$$

$$\hat{V}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \quad (1.49)$$

De fato, \hat{V} e \hat{V}^\dagger não são unitários e não comutam

$$\hat{V}\hat{V}^\dagger = \hat{I} \quad \hat{V}^\dagger\hat{V} = \hat{I} - |0\rangle\langle 0| \quad [\hat{V}, \hat{V}^\dagger] = |0\rangle\langle 0|.$$

O que impede que os operadores \hat{V} e \hat{V}^\dagger sejam unitários e comutem é a presença do projetor do estado de vácuo. Todavia, para estados cujo número médio de fótons é grande, o peso da componente do vácuo pode ser desprezado frente ao peso dos outros estados de fótons, podemos, neste caso, tratar \hat{V} e \hat{V}^\dagger como aproximadamente unitários.

1.3.2 O Auto-Estado do Operador

Uma vez determinado um operador \hat{V} para a fase, passamos à procura de seus auto-estados. Estes estados devem satisfazer

$$\hat{V}|\Phi\rangle = e^{i\Phi}|\Phi\rangle. \quad (1.50)$$

Ao serem expandidos na base de número tomam a seguinte forma

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle, \quad (1.51)$$

sendo que $b_n = b_0 e^{in\Phi}$

$$|\Phi\rangle = \frac{b_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle. \quad (1.52)$$

Os auto-estados são estados de fase não-normalizáveis e cumprem as condições de periodicidade e translação

$$|\Phi + 2\pi\rangle = |\Phi\rangle \quad (1.53)$$

$$\hat{U}(t)|\Phi\rangle = |\Phi - \omega t\rangle. \quad (1.54)$$

Susskind e Glogower fornecem uma teoria razoavelmente consistente para o operador de fase. O que acabou tornando-a, por algum tempo, uma espécie de formalismo padrão para discussões sobre a fase, bem como uma base para medidas do sucesso de teorias posteriores sobre a fase.

1.4 O Formalismo de Pegg-Barnett

Pegg e Barnett [3], em 1988, mostraram que, ao contrário do que se acreditava, a construção de um operador de fase hermitiano é possível, desde que se observem certas condições. Este operador possibilita a construção de operadores unitários e a decomposição polar que Dirac havia previsto.

1.4.1 Os Estados de Fase de Pegg-Barnett

Apesar das dificuldades existentes para se definir um operador para a fase, estados com fase definida existem. No formalismo de Pegg-Barnett, o operador de fase surge naturalmente após a definição dos estados de fase.

O estado de fase de Pegg-Barnett $|\theta\rangle_{PB}$ é definido como

$$|\theta\rangle_{PB} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{n=0}^r e^{in\theta} |n\rangle \quad (1.55)$$

onde $|n\rangle$ são os $(r+1)$ estados de número do subespaço de dimensão $(r+1)$. $|\theta\rangle_{PB}$ é um estado formado pela superposição normalizada de todos os estados de fótons do subespaço $(r+1)$ pesados por um fator de fase $e^{in\theta}$.

Existem distintos estados de fase $|\theta\rangle_{PB}$ para cada θ no intervalo θ_0 a $\theta_0 + 2\pi$, sendo θ_0 uma fase de referência. Pode-se construir uma base discreta que consiste em um estado de fase de referência

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{n=0}^r e^{in\theta_0} |n\rangle \quad (1.56)$$

junto dos r estados de fase que são ortogonais a $|\theta_0\rangle$ e entre eles. Os estados da base são

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{n=0}^r e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (1.57)$$

onde

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{r+1} \quad m = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Os estados de fase de Pegg-Barnett, $|\theta_m\rangle$ devem evoluir no tempo de acordo com a eq.(1.54) e satisfazer a condição de periodicidade eq.(1.53), assim como todo estado de fase.

O valor de θ_0 pode ser qualquer número real e a sua escolha determina uma base particular.

Os estados $|\theta_m\rangle$ são ortonormais

$$\langle \theta_m | \theta_n \rangle = \delta_{m,n} \quad (1.58)$$

e formam um conjunto completo

$$\sum_{m=0}^r |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = \hat{I}. \quad (1.59)$$

Sendo que $|\theta_m\rangle$ formam uma base, podemos expandir qualquer estado em termos deste estado. Por exemplo os estados de Fock $|n\rangle$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{m=0}^r e^{-in\theta_m} |\theta_m\rangle. \quad (1.60)$$

1.4.2 O Operador de Fase Hermitiano

No subespaço de Hilbert de dimensão $(r+1)$, é introduzido um operador de fase hermitiano cujos auto-estados são os estados de fase $|\theta_m\rangle$ e os auto-valores são as fases dos estados. O operador é construído com os estados de fase [3].

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{PB} &\equiv \sum_{m=0}^r \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \\ &= \hat{I}\theta_0 + \sum_{m=0}^r \frac{2\pi m}{r+1} |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \end{aligned} \quad (1.61)$$

o operador $\hat{\theta}_{PB}$ satisfaz a equação de auto-valor

$$\hat{\theta}_{PB}|\theta_m\rangle = \theta_m|\theta_m\rangle. \quad (1.62)$$

Todas as definições dentro do formalismo de Pegg-Banrett são válidas para o subespaço de Hilbert de dimensão $(r+1)$. É preciso alguma cautela para se tomar o limite $r \rightarrow \infty$, o que se tem a fazer é realizar todos os cálculos no subespaço $(r+1)$ e somente depois é que se toma $r \rightarrow \infty$.

O valor médio de $\hat{\theta}_{PB}$ para estados de Fock pode ser calculado

$$\langle n|\hat{\theta}_{PB}|n\rangle = \sum_{m=0}^r \theta_m |\langle \theta_m|n\rangle|^2 = \sum_{m=0}^r \theta_m P_n(\theta_m), \quad (1.63)$$

sendo $P_n(\theta_m)$ a distribuição de fótons para o estado $|\theta_m\rangle$

$$P_n(\theta_m) = |\langle \theta_m|n\rangle|^2 = \frac{1}{r+1}, \quad (1.64)$$

temos finalmente

$$\langle \hat{\theta}_{PB} \rangle = \theta_0 + \frac{\pi r}{r+1}. \quad (1.65)$$

Com um cálculo parecido, podemos encontrar o valor esperado de $\hat{\theta}_{PB}^2$

$$\langle n|\hat{\theta}_{PB}^2|n\rangle = \sum_{m=0}^r \theta_{PB}^2 P_n(\theta_m) = \theta^2 + \frac{2\pi\theta_0 r}{r+1} + \frac{4\pi^2 r(r+1/2)}{3(r+1)^2}. \quad (1.66)$$

Agora é hora de tomarmos o limite $r \rightarrow \infty$. O valor médio de $\hat{\theta}_{PB}$ fica

$$\langle \hat{\theta}_{PB} \rangle = \theta_0 + \pi \quad (1.67)$$

e a variância do operador de fase

$$\langle (\Delta\hat{\theta}_{PB})^2 \rangle = \sqrt{\langle \hat{\theta}_{PB}^2 \rangle - \langle \hat{\theta}_{PB} \rangle^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \quad (1.68)$$

O comutador da fase e do número de fótons para o operador de fase de Pegg-Barnett é diferente daquele obtido por Dirac e que se mostrou inconsistente. Para obtermos o comutador de Pegg-Barnett, partimos da eq.(1.60) e escrevemos \hat{n} na base dos estados de fase como

$$\hat{n} = \sum_{n=0}^r n|n\rangle\langle n| = \frac{r}{2} + \sum_{m \neq m'} \frac{|\theta_{m'}\rangle\langle \theta_m|}{\exp[-i(m'-m)\frac{2\pi}{r+1}] - 1}. \quad (1.69)$$

A relação de comutação de Pegg-Barnett para fase e número de fótons, no subespaço de Hilbert, é [4]

$$[\hat{\theta}_m, \hat{n}] = \frac{2\pi}{r+1} \sum_{n \neq n'} \frac{(n-n') \exp[i(n-n')\theta_0] |n\rangle \langle n'|}{\exp[-i(n-n')\frac{2\pi}{r+1}] - 1} \quad (1.70)$$

cujo traço é zero. Então o valor médio do comutador, para os estados de Fock, é nulo. Para estados físicos do campo, como os estados coerentes, pode-se aproximar a eq.(1.70) fazendo r muito maior que o número n associado a qualquer componente $|n\rangle$ significativa do estado em questão. O comutador assim obtido é uma aproximação válida somente para quando for aplicado em estados físicos

$$\begin{aligned} [\hat{\theta}_m, \hat{n}]_f &= -i + i \sum_{n'} \exp[in'\theta_0] |n'\rangle \sum_n \exp[-in\theta_0] \langle n| \\ &= -i[1 - (r+1)|\theta_0\rangle \langle \theta_0|]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Os elementos de matriz diagonais deste comutador para os estados de Fock e para os estados de fase são zero [3]

$$\langle n | [\hat{n}, \hat{\theta}_{PB}] | n \rangle = 0 = \langle \theta_m | [\hat{n}, \hat{\theta}_{PB}] | \theta_m \rangle. \quad (1.72)$$

Os elementos fora da diagonal são não-nulos

$$\langle n' | [\hat{n}, \hat{\theta}_{PB}] | n \rangle = \frac{2\pi}{r+1} \frac{(n-n') \exp[i(n'-n)\theta_0]}{\exp[\frac{2\pi i(n'-n)}{r+1}] - 1} \quad (1.73)$$

$$(1.74)$$

$$\langle \theta_{m'} | [\hat{n}, \hat{\theta}_{PB}] | \theta_m \rangle = \frac{2\pi}{r+1} \frac{m' - m}{1 - \exp[\frac{2\pi i(m-m')}{r+1}]}. \quad (1.75)$$

Para os estados físicos, $|f\rangle$, podemos usar a aproximação

$$\langle f | [\hat{n}, \hat{\theta}_{PB}] | f \rangle = -i[1 - (r+1)|\langle f | \theta_0 \rangle|^2] \quad (1.76)$$

sendo $|\langle f | \theta_0 \rangle|^2$ a probabilidade da fase do estado ser θ_0 .

Com o operador de fase $\hat{\theta}_{PB}$, podem ser construídos operadores exponenciais unitários $e^{i\hat{\theta}_{PB}}$ e $e^{-i\hat{\theta}_{PB}}$ e assim realizar a decomposição polar do operador de aniquilação \hat{a} [3]. Os operadores exponenciais compartilham os mesmos auto-estados

$$e^{\pm i\hat{\theta}_{PB}} |\theta_m\rangle = e^{\pm i\theta_m} |\theta_m\rangle. \quad (1.77)$$

Sabendo que a ação de $e^{i\hat{\theta}_{PB}}$ nos estados de Fock é

$$e^{i\hat{\theta}_{PB}}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{m=0}^r \exp[-i(n-1)\theta_m]|\theta_m\rangle, \quad (1.78)$$

E que a representação na base de estados de número do operador $e^{i\hat{\theta}_{PB}}$ é

$$e^{i\hat{\theta}_{PB}} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + \dots + |r-1\rangle\langle r| + \exp[i(r+1)\theta_0]|r\rangle\langle 0|, \quad (1.79)$$

onde $|r\rangle$ corresponde a $|n-1\rangle$ para $n=0$, define-se então o operador aniquilação, atuando no subespaço de Hilbert de dimensão $(r+1)$, em termos dos operadores hermitianos de fase, $\hat{\theta}_{PB}$ e de número, \hat{n}

$$\hat{a} = e^{i\hat{\theta}_{PB}}\hat{n} = |0\rangle\langle 1| + \sqrt{2}|1\rangle\langle 2| + \dots + \sqrt{r}|r-1\rangle\langle r|. \quad (1.80)$$

Quando r tende a infinito, \hat{a} se torna o operador de aniquilação convencional.

A teoria de Pegg-Barnett se desenvolve num subespaço finito do espaço de Hilbert e nesse espaço, é possível solucionar problemas que apareciam nas teorias para a fase precedentes. Por exemplo, é apresentado um operador de fase hermitiano e a relação de comutação fase-número de fótons é consistente. Dentro da teoria, um dos pontos importantes é o processo de passar do subespaço finito para o espaço com infinitas dimensões, ou seja, tomar o limite $r \rightarrow \infty$: os cálculos devem ser efetuados no subespaço, e só então tomar o limite $r \rightarrow \infty$. Desta forma, não se exige a existência do operador de fase no espaço de dimensão infinita, onde ele não está definido.

Capítulo 2

O Estado de Fase Coerente

Até agora vimos formalismos centrados na construção de um operador de fase. Contudo, os próprios estados com fase bem definida podem ser pontos de partida para várias análises da fase.

Os estados de fase vistos até agora foram:

1) Os estados de fase de Susskind-Glogower eq.(1.52)

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Phi} |n\rangle \quad (2.1)$$

não-normalizáveis, cujos valores esperados de grandezas como número de fótons serão infinitos, e que portanto não são estados físicos.

2) Os estados de fase de Pegg-Barnett, eq.(1.57), que são definidos num subespaço de Hilbert com dimensão finita

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{n=0}^r e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (2.2)$$

e, como já vimos, são utilizados na construção do operador de fase hermitiano.

A despeito destes estados apresentarem propriedades de fase, podemos levantar a seguinte questão: Existiriam estados normalizáveis, no espaço de Hilbert de dimensão *infinita*, que também apresentassem essas propriedades?

Com esta questão em mente, chegamos aos *Estados de Fase Coerentes*

$$|\Theta\rangle = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\Theta}}{b^n} |n\rangle, \quad (2.3)$$

onde b é um parâmetro real e $|b| > 1$. Para cada valor de b teremos um estado de fase coerente diferente, vejamos o que acontece com $|\Theta\rangle$ em dois limites de b :

Quando b tende a infinito, temos o estado de vácuo

$$b \rightarrow \infty \quad |\Theta\rangle \rightarrow |0\rangle.$$

Ao fazermos $|b|$ igual à unidade, e tomarmos o devido cuidado com a normalização, recuperamos o estado de fase de Susskind-Glogowert

$$|b| = 1 \quad |\Theta\rangle = |\Phi\rangle.$$

Os estados de fase de Susskind-Glogowert podem ser vistos, então, como um caso particular dos estados de fase coerentes.

O estado $|\Theta\rangle$, sendo estado de fase, satisfaz as condições de periodicidade, eq.(1.53),

$$|\Theta + 2\pi\rangle = |\Theta\rangle, \quad (2.4)$$

e de translação, eq.(1.54),

$$\hat{U}(t)|\Theta\rangle = |\Theta - \omega t\rangle. \quad (2.5)$$

Os estados de fase coerentes foram introduzidos em 1991 por J. Shapiro e S. Shepard [13] e se mostraram de grande utilidade pois são estados de fase normalizáveis no espaço de Hilbert com dimensão infinita e os valores médios calculados com estes estados são finitos. Estes estados podem ser considerados *estados de fase físicos*, [14]. Em 1998, G.M. D'Ariano e colaboradores, [15], propuseram um esquema para se gerar os estados de fase coerentes envolvendo meios não lineares, $\chi^{(2)}$.

Podemos ver os estados de fase coerentes também como um caso particular de uma classe mais geral de estados, os chamados *estados geométricos generalizados* parametrizados por um número complexo y e um inteiro positivo M , [16]

$$|y, M\rangle = \sqrt{\frac{1 - |y|^2}{1 - |y|^{2(M+1)}}} \sum_{n=0}^M y^n |n\rangle. \quad (2.6)$$

Bastando fazer $M \rightarrow \infty$ e $|y| < 1$ para recuperarmos os estados de fase coerentes.

Os estados de fase coerentes possuem propriedades interessantes e este capítulo é dedicado a elas.

2.1 Propriedades dos Estados de Fase Coerentes

O Estado de Fase Coerente como Auto-Estado

O estado de fase coerente também é auto-estado do operador de fase de Susskind-Glogower eq.(1.48)

$$\hat{V}|\Theta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|\Theta\rangle = \frac{e^{i\Theta}}{b}|\Theta\rangle. \quad (2.7)$$

O estado $|\Theta\rangle$ é normalizado e tem número médio de fótons finito

$$\langle\Theta|\hat{n}|\Theta\rangle = \frac{b^2-1}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{b^{2n}} = \frac{1}{b^2-1}, \quad (2.8)$$

assim como a variância de \hat{n}

$$\langle\Theta|\hat{n}^2|\Theta\rangle = \frac{b^2-1}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{b^{2n}} = \frac{b^2+1}{(b^2-1)^2}, \quad (2.9)$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \sqrt{\langle\Theta|\hat{n}^2|\Theta\rangle - \langle\Theta|\hat{n}|\Theta\rangle^2} = \frac{b^2}{(b^2-1)^2}. \quad (2.10)$$

A Distribuição de Número de Fótons

Outra propriedade básica deste estado que podemos calcular é a distribuição de número de fótons, $P_n(\Theta)$

$$P_n(\Theta) = |\langle n|\Theta\rangle|^2 = \frac{b^2-1}{b^{2(n+1)}} = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}. \quad (2.11)$$

Na figura 2.1 vemos plotado $P_n(\Theta)$ vs n , a distribuição de fótons para o estado de fase coerente é exatamente aquela obtida com o *estado térmico*¹, ainda que o estado de fase coerente seja um estado puro². Portanto, no que

¹o estado térmico também é um estado do campo quantizado. No entanto, ele é um estado do tipo mistura estatística, ou seja, é um estado que não admite ser descrito apenas por um vetor de estado normalizado, se faz necessária a utilização do operador densidade $\hat{\rho}_T$. Para um único modo do campo, o operador densidade do estado térmico numa cavidade, a temperatura T , em termos dos estados de número, é $\hat{\rho}_T = \sum_n p_n^T |n\rangle\langle n|$. Veremos um pouco mais sobre o operador densidade no capítulo 3.

²Estados puros são aqueles descritos por um vetor de estado normalizado $|\Psi\rangle$.

se refere à contagem de fótons, o estado de fase coerente não difere do estado térmico.

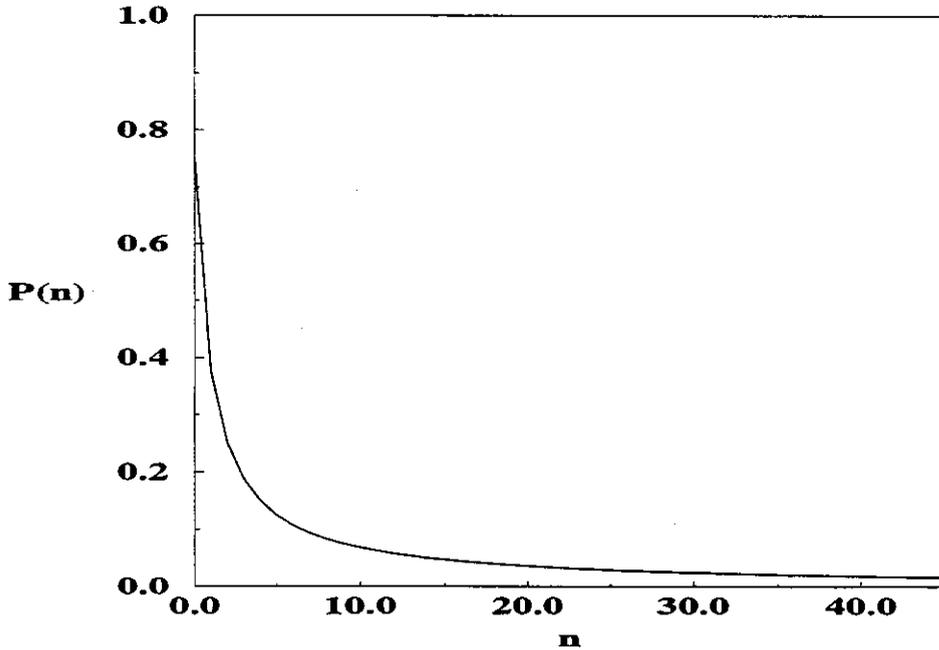


Figura 2.1: Distribuição de número de fótons para o estado de fase coerente com $b = 2.0$, $\langle \hat{n} \rangle = 1/3$, a mesma curva obtida com o estado térmico.

“A relação de incerteza” entre fase e número de fótons

Quando Dirac propôs o seu operador de fase, considerou que fase e número de fótons eram grandezas canonicamente conjugadas, contudo, o comutador destes operadores se mostrou inconsistente. Desde então, a existência de uma relação de incerteza entre ambas vem sendo discutida. Estudaremos, agora, o produto das variâncias do operador número de fótons e do operador de fase de Pegg-Barnett para os estados de fase coerentes.

Passemos ao cálculo da variância da fase, primeiramente precisamos calcular o valor médio de $\hat{\theta}_{PB}$

$$\langle \hat{\theta}_{PB} \rangle = \langle \Theta | \sum_{m=0}^r \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m | \Theta \rangle = \sum_{m=0}^r \theta_m |\langle \theta_m | \Theta \rangle|^2, \quad (2.12)$$

sendo que a distribuição de fase do estado de fase coerente projetado no estado de fase de Pegg-barnett eq.(1.57)

$$\begin{aligned} P_{\theta_m}(\Theta) &= |\langle \theta_m | \Theta \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{r+1} + \frac{2}{r+1} \sum_{n>n'}^r b_n b_{n'} \cos[(n-n')(\Theta - \theta_m)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O contador no somatório indica que serão somados valores de n no intervalo $[0, r]$ e valores de n' no intervalo $[0, n-1]$. Após substituir a eq.(2.13) em (2.12) e tomar o limite $r \rightarrow \infty$, o valor médio de $\hat{\theta}_{PB}$ será

$$\langle \hat{\theta}_{PB} \rangle = \Theta. \quad (2.14)$$

A variância do operador de fase pode ser calculada com os estados de fase coerentes da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\theta}_{PB})^2 \rangle &= \sum_m^r (\theta_m - \langle \hat{\theta}_{PB} \rangle) |\langle \theta_m | \Theta \rangle|^2 \\ &= \frac{4\pi^2}{(r+1)^2} \sum_{\mu=-r/2}^r |\langle \theta_m | \Theta \rangle|^2 \mu^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\mu \equiv m - r/2$. Depois de tomado o limite $r \rightarrow \infty$, obtemos finalmente a expressão para a variância da fase

$$\langle (\Delta \hat{\theta}_{PB})^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} + 4 \frac{b^2 - 1}{b^2} \sum_{n>n'}^{\infty} \frac{(-1)^{n-n'}}{b^{(n+n')}(n-n')^2}. \quad (2.16)$$

Ao multiplicarmos as eqs.(2.10) e (2.16), poderemos verificar os limites nas dispersões da fase e no número de fótons. O resultado pode ser visto na figura(2.2), onde também são mostrados os comportamentos de $\langle (\Delta \hat{\theta}_{PB})^2 \rangle$, $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ além de $\sqrt{\langle (\Delta \hat{\theta}_{PB})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle}$ em função do parâmetro b do estado de fase coerente. Vemos que para

$$b \geq 2.5 \Rightarrow \sqrt{\langle (\Delta \hat{\theta}_{PB})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle} < 1/2,$$

que é o limite imposto pelas relações de incerteza fenomenológicas entre número e fase, [4]. Na teoria de Pegg-Barnett, entretanto, a relação de incerteza entre fase e número de fótons é

$$\Delta \hat{n} \Delta \hat{\theta}_{PB} \geq \frac{1}{2} |1 - 2\pi P(\theta_0)| \quad (2.17)$$

que depende da escolha da fase de referência θ_0 [4]. Vejamos o que ocorre para dois casos particulares do estado de fase coerente:

1) Estado de vácuo, $|0\rangle$, $b \rightarrow \infty$. Neste caso, $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 0$ e $\langle(\Delta\hat{\theta}_{PB})^2\rangle = \frac{\pi^2}{3}$ e portanto, o produto das variâncias tende a zero.

2) Estado de Susskind-Glogower, $|\Phi\rangle$, $b \rightarrow 1$. Temos $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \infty$ e $\langle(\Delta\hat{\theta}_{PB})^2\rangle = 0$ e neste caso, o produto $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\langle(\Delta\hat{\theta}_{PB})^2\rangle \rightarrow \infty$.

Porém, para os estados de fase coerentes, $|\Theta\rangle$, de uma maneira geral, produto $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle\langle(\Delta\hat{\theta}_{PB})^2\rangle$ é finito e diferente de zero.

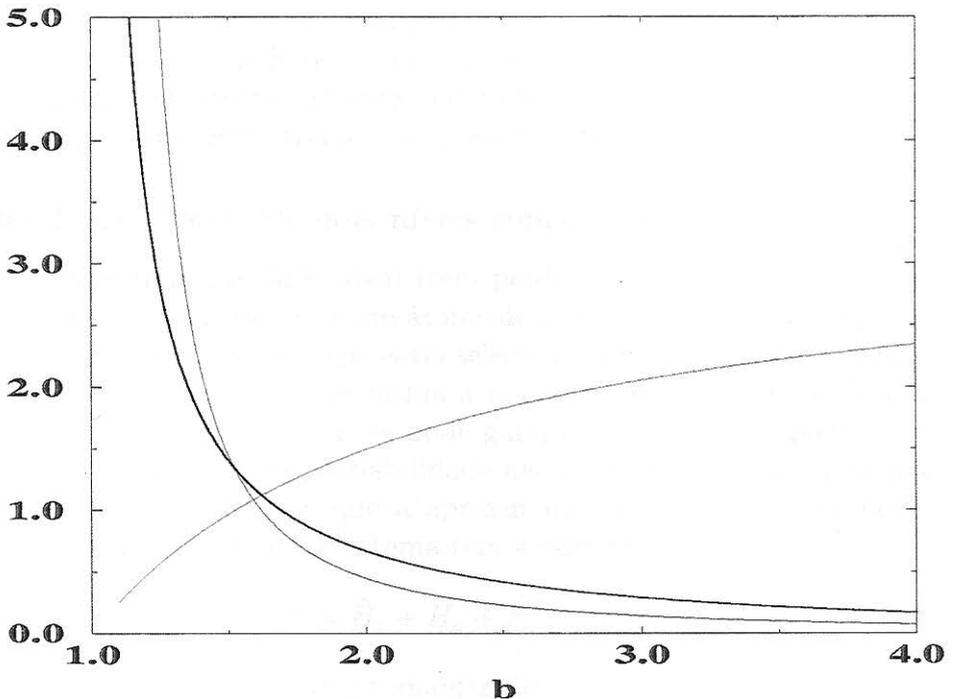


Figura 2.2: Variância $\langle(\Delta\hat{\theta}_{PB})^2\rangle$ (linha vermelha), $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle$ (linha azul) e a relação $\sqrt{\langle(\Delta\hat{\theta}_{PB})^2\rangle\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle}$ (linha preta).

2.2 Estados com Perfeito Aprisionamento de População

Até agora vimos somente propriedades dos estados de fase coerentes do campo eletromagnético. Contudo, quando um campo preparado neste estado

interage com a matéria quantizada, ocorre um fenômeno bastante interessante: o aprisionamento perfeito da população atômica. Para podermos entender esta propriedade dos estados de fase coerentes precisamos de uma breve introdução a um modelo bastante usado no formalismo da Óptica Quântica: *O Modelo de Jaynes-Cummings*.

2.2.1 O Modelo de Jaynes-Cummings

A forma mais simples de descrever a interação da radiação com a matéria é através do Modelo de Jaynes-Cummings (MJC), [17]. Este modelo considera a interação de um modo do campo quantizado com um átomo de dois níveis. Aqui apresentaremos as características mais relevantes do modelo para analisarmos uma propriedade dos estados de fase coerentes.

Interação de um átomo de dois níveis com o campo

Consideremos uma cavidade ideal (sem perdas) que contém apenas um modo do campo eletromagnético e um átomo de dois níveis. Isso é, obviamente, uma aproximação. Todavia, é possível selecionar a frequência de transição entre dois níveis atômicos, ω_0 , de forma a mantê-la próxima da frequência de um dos modos do campo, ω ; e, se pode garantir que apenas aqueles dois níveis do átomo tenham uma probabilidade não desprezível de estarem populados, de forma a fazer com que a aproximação seja muito próxima da realidade. A hamiltoniana deste sistema tem a seguinte forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_a + \hat{H}_i \quad (2.18)$$

onde \hat{H}_c é a hamiltoniana do campo quantizado sem o átomo, \hat{H}_a a hamiltoniana do átomo sem o campo e \hat{H}_i é a hamiltoniana que descreve a interação entre campo e átomo.

A hamiltoniana do campo é dada pela eq.(1.17). Passaremos agora à procura das hamiltonianas atômica e de interação, é válido ressaltar que estaremos trabalhando na representação de Schrödinger.

Vamos considerar o átomo de dois níveis cujos auto-valores e auto-vetores são $E_g < E_e$ e $|g\rangle, |e\rangle$, respectivamente. $|g\rangle$ é chamado de estado fundamental (ground state) e $|e\rangle$ de estado excitado (excited state), ainda que não se refiram necessariamente aos estados fundamental e primeiro excitado do átomo. $|g\rangle, |e\rangle$ formam uma base no espaço de Hilbert de dimensão 2, então

obedecem às seguintes regras

$$\langle e|e\rangle = \langle g|g\rangle = 1 \quad (2.19)$$

$$\langle g|e\rangle = \langle e|g\rangle = 0 \quad (2.20)$$

$$|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \hat{I}. \quad (2.21)$$

A representação de $|g\rangle$ e $|e\rangle$ na forma de matrizes é

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sendo que $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são auto-vetores da hamiltoniana atômica com auto-valores E_g e E_e

$$\hat{H}_a|e\rangle = E_e|e\rangle \quad \hat{H}_a|g\rangle = E_g|g\rangle,$$

a hamiltoniana atômica é definida como

$$\hat{H}_a = E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_g\hat{\sigma}_{gg}, \quad (2.22)$$

onde

$$\hat{\sigma}_{ee} = |e\rangle\langle e| \quad \hat{\sigma}_{gg} = |g\rangle\langle g|.$$

Podemos reescrever esta hamiltonina na base dos vetores de estado do átomo de dois níveis, $|e\rangle, |g\rangle$. Vamos considerar que o zero da energia está entre $|g\rangle$ e $|e\rangle$, de tal forma que

$$E_g = \frac{-\hbar\omega_0}{2} \quad E_e = \frac{\hbar\omega_0}{2},$$

a hamiltoniana atômica se torna

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z, \quad (2.23)$$

onde $\hat{\sigma}_z$ é a matriz de Pauli para a componente z do momento angular de uma partícula com spin $1/2$.

Uma vez que já temos a hamiltoniana do campo e do átomo, só nos resta encontrar a hamiltoniana de interação. Para tanto, vamos nos valer de uma aproximação, a chamada aproximação de dipolo, que consiste basicamente em considerar o átomo como um dipolo. Isso faz sentido primeiro porque estamos interessados em campos com um comprimento de onda muito maior

que as dimensões atômicas, de forma que este campo não se altere dentro das dimensões do átomo; segundo, porque o átomo é neutro, então o campo estará essencialmente acoplado ao dipolo atômico. A hamiltoniana de interação, desta forma, descreve a interação do dipolo atômico com o modo do campo elétrico

$$\hat{H}_i = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (2.24)$$

onde $\hat{\mathbf{D}} = e\hat{\mathbf{r}}$ é o operador de dipolo.

Para o átomo de dois níveis o dipolo atômico é

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{k}\hat{\sigma}_- + \mathbf{k}^*\hat{\sigma}_+, \quad (2.25)$$

onde

$$\mathbf{k} = \langle g|\hat{\mathbf{D}}|e\rangle, \quad (2.26)$$

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (2.27)$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|. \quad (2.28)$$

Podemos definir a *constante de acoplamento* g , como

$$g = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \quad (2.29)$$

a qual foi escolhida como sendo real para simplificar. Então escrevemos a hamiltoniana de interação

$$\hat{H}_i = g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+). \quad (2.30)$$

Estamos, agora, aptos a escrever a hamiltoniana total para o sistema composto por um átomo interagindo com um modo do campo, dentro da aproximação de dipolo e próximo da região de ressonância da frequência de transição atômica com a frequência do modo do campo, bastando somar as eqs.(1.17, 2.23 e 2.30)

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+). \quad (2.31)$$

Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são operadores de aniquilação e criação de um fóton; $\hat{\sigma}_-$ passa o átomo do estado excitado para o estado fundamental e $\hat{\sigma}_+$ passa o átomo do estado fundamental para o estado excitado.

A Aproximação de Onda Girante e a Hamiltoniana de Jaynes-Cummings

Na eq.(2.31), ao efetuarmos a multiplicação no último termo vamos obter

$$\hbar g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a} \hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+). \quad (2.32)$$

Notamos que o primeiro termo equivale à criação de um fóton no campo e ao decaimento do átomo para o estado fundamental; o segundo, à destruição de um fóton, no campo, e à excitação do átomo. Estes dois termos são ditos *girantes*. O terceiro termo corresponde à destruição de um fóton no campo e ao decaimento do átomo, enquanto o quarto termo descreve a criação de um fóton no campo e a excitação do átomo. Estes termos são ditos *contra-girantes*. Próximo à condição de ressonância, $\omega \approx \omega_0$, os termos *contra-girantes* podem ser desprezados frente aos termos *girantes* [18]. Esta é a chamada *aproximação de onda girante*. Usando esta aproximação, podemos escrever, na representação de Schrödinger, a hamiltoniana da eq.(2.31) como

$$\hat{H} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+), \quad (2.33)$$

que é conhecida como *Hamiltoniana de Jaynes-Cummings*. Uma das principais vantagens desta hamiltoniana é que ela pode ser resolvida exatamente.

Na condição de ressonância, $\omega = \omega_0$, os auto-estados e as respectivas auto-energias da hamiltoniana de Jaynes-Cummings são

$$|n\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle), \quad (2.34)$$

$$E_n^\pm = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \pm g \hbar \sqrt{n+1}. \quad (2.35)$$

Os auto-estados não podem ser separados (fatorados) em componentes atômicas e do campo, por isso, são chamados de estados emaranhados.

Vejamos agora um estado puro, inicialmente fatorável, do sistema átomo+campo,

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_c \otimes |\phi(0)\rangle_a, \quad (2.36)$$

onde

$$|\psi(0)\rangle_c = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n |n\rangle \quad (2.37)$$

descreve o estado inicial do campo, sendo Q_n sua distribuição inicial de fótons; e $|\phi(0)\rangle_a = |e\rangle$ descreve o estado inicial do átomo que neste caso, é o estado excitado. O estado $|\Psi(0)\rangle$ evolui no tempo para

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \exp(-i\omega t(n+1)) \left[\cos(gt\sqrt{n+1}) |e, n\rangle - i \operatorname{sen}(gt\sqrt{n+1}) |g, n+1\rangle \right]. \quad (2.38)$$

A Inversão de população

Com este vetor podemos calcular valores esperados de quantidades físicas, em particular, estamos interessados em saber como o átomo se excita e se desexcita com o campo com o passar do tempo. Com este intuito, devemos calcular a chamada *evolução da inversão da população atômica*, que nada mais é do que a probabilidade do átomo estar no estado excitado, menos a probabilidade dele estar no estado fundamental num dado instante de tempo

$$W(t) = |\langle\Psi(t)|e\rangle|^2 - |\langle\Psi(t)|g\rangle|^2. \quad (2.39)$$

No caso particular de um sistema cuja parte atômica foi inicialmente preparada no estado excitado e a parte da radiação como eq.(2.37) podemos descrever a evolução da inversão da população no tempo como

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(2gt\sqrt{n+1}), \quad (2.40)$$

onde

$$P_n = |Q_n|^2. \quad (2.41)$$

Se o campo inicialmente está preparado no estado de Fock $|m\rangle$, $Q_n = \delta_{n,m}$, a eq.(2.40) se torna

$$W_m(t) = \cos(2gt\sqrt{m+1}). \quad (2.42)$$

A inversão da população é periódica com uma frequência de oscilação $\Omega_R = 2g\sqrt{m+1}$ (frequência de Rabi), como vemos na figura (2.3).

Quando $W(t) = 1$, a população atômica está toda no estado excitado; quando $W(t) = -1$, a população está no estado fundamental, outros valores entre estes indicam populações em ambos níveis com um certo peso para cada.

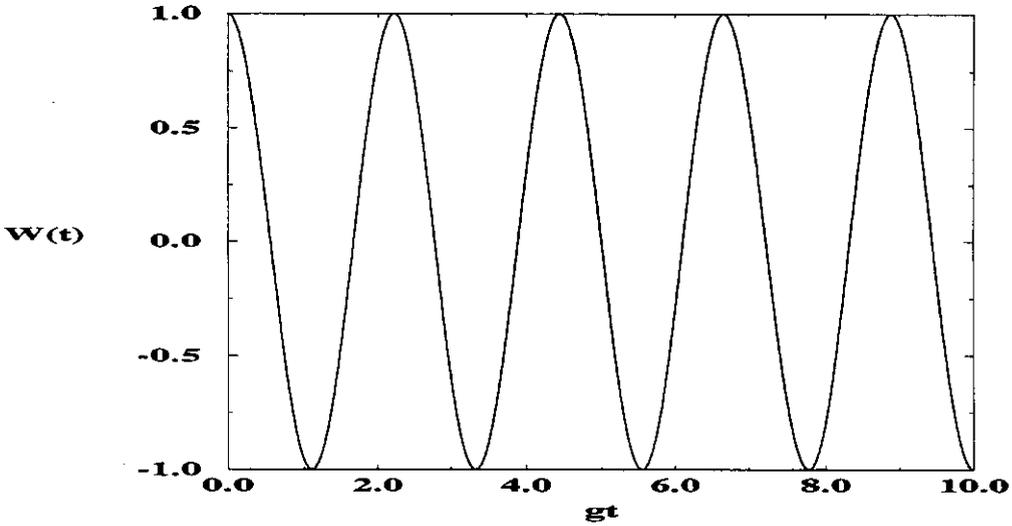


Figura 2.3: Inversão da população atômica para um sistema átomo-campo cujo estado inicial do campo é um estado de Fock, com $n = 1$, e o estado inicial do campo é $|e\rangle$.

Colapso e Ressurgimento

Agora, se o campo inicialmente está preparado no estado coerente, eq.(A.3), e o átomo no estado excitado, a evolução da inversão de população fica bem diferente. Neste caso, $P_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!}$ e, conseqüentemente, a eq.(2.40) passa a ser

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \cos(2gt\sqrt{n+1}). \quad (2.43)$$

Podemos ver na figura(2.4) um comportamento de $W(t)$ bastante interessante: o *colapso e ressurgimento* da inversão de população. As oscilações de Rabi saem de fase e passa a haver interferência destrutiva entre oscilações de diferentes frequências o que acaba por *colapsar* a inversão de população, ou seja, os níveis permanessem com a mesma população sem haver a inversão. Após algum tempo, no chamado *tempo de ressurgimento*, t_r , as oscilações voltam a entrar em fase e a inversão de população volta a acontecer

$$t_r = 2\pi \left[2g\sqrt{\bar{n}+1} - 2g\sqrt{\bar{n}} \right]^{-1} \approx \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g}. \quad (2.44)$$

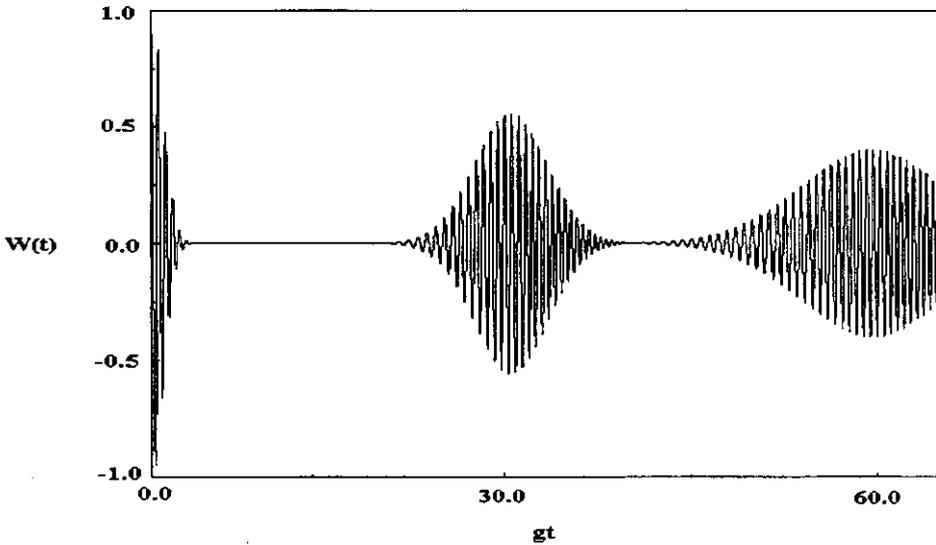


Figura 2.4: Colapso e ressurgimento da inversão de população atômica para um átomo de dois níveis inicialmente preparado no estado excitado e o campo, num estado coerente com $|\alpha|^2 = 25$.

O Aprisionamento da população

Zaheer e Zubairy, 1989, [19], consideram inicialmente o átomo preparado numa superposição,

$$|\phi\rangle_a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle + e^{-i\Phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|g\rangle, \quad (2.45)$$

e o campo num estado coerente $|\alpha\rangle$, sendo $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$. Notaram que quando faziam $\Phi = \phi$ obtinham aprisionamento da população, ou seja, as oscilações da inversão da população eram suprimidas quase por completo como vemos na figura(2.5). Isto se daria, segundo eles, devido à “interferência destrutiva” entre o dipolo atômico e o modo do campo na cavidade o que inibiria as transições entre os dois níveis, por isso seria necessário que as fases atômica Φ e do campo ϕ fossem iguais.

O Aprisionamento Perfeito da População

Chamamos de aprisionamento perfeito da população o resultado obtido ao se calcular a inversão da população usando um estado do átomo-campo

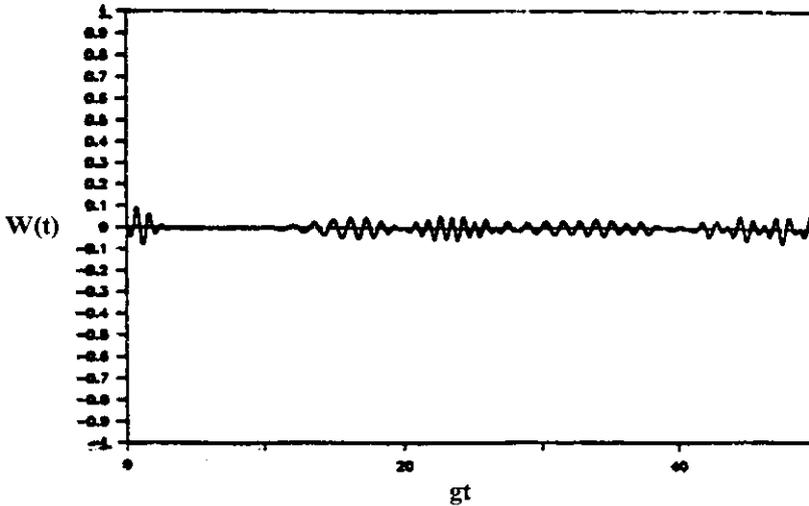


Figura 2.5: O chamado aprisionamento da população para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\Phi = \phi$

inicialmente fatorável cuja parte atômica e a parte do campo estiverem preparadas numa superposição coerente e este resultado for constante, ou seja, não houver oscilação alguma. Diferindo daquele aprisionamento obtido por Zaheer e Zubairy que apresentava oscilações, ainda que com uma amplitude muito pequena.

Para sistemas cuja parte atômica inicialmente é preparada numa superposição coerente dos estados excitado e fundamental,

$$|\phi(0)\rangle_a = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \left(\frac{e^{i\Theta}}{b} |e\rangle + |g\rangle \right), \quad (2.46)$$

e o estado inicial do campo é o estado de fase coerente,

$$|\psi(0)\rangle_c = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\Theta}}{b} \right)^n |n\rangle, \quad (2.47)$$

a evolução da inversão de população será nula, a população atômica está *aprisionada*. Cirac e Sánchez-Soto, 1990, foram os primeiros a notar este comportamento [20], eles observaram que para o aprisionamento perfeito ocorrer é necessário que as fases relativas das superposições coerentes atômica e do campo sejam as mesmas. Uma explicação para o aprisionamento perfeito da população é dada em termos dos “estados vestidos”, auto-estados

da hamiltoniana de Jaynes-Cummings, em [21]. A idéia geral é: 1) tratar átomo e campo de início como um sistema só; 2) escrever o estado inicial do sistema átomo-campo em termos dos estados vestidos; 3) assim descobrir o quão próximo está o estado inicial de um estado vestido. Quando o estado inicial do sistema átomo-campo é um estado vestido, não há inversão da população e assim, conseqüentemente, quanto mais próximo estiver o estado inicial do sistema de um estado vestido, menos inversão de população vai ocorrer. Ao fazermos estes passos usando as eq.(2.46 e 2.47) como estado inicial do sistema,

$$|\Phi(0)\rangle = |\phi(0)\rangle_a \otimes |\psi(0)\rangle_c, \quad (2.48)$$

veremos que $|\Phi(0)\rangle$ é um estado vestido e, portanto, ocorrerá aprisionamento total da população. Na figura(2.6) podemos ver o aprisionamento perfeito da população atômica e o comportamento da inversão de população para o caso em que as fases relativas entre o dipolo e o campo não são as mesmas, que é um comportamento similar ao que apresentaria um estado térmico inicial. O aprisionamento perfeito da população se mostra claramente como um efeito decorrente da existência de estados com fase bem definida, pois é a coincidência da fase relativa do dipolo e do átomo que determina a existência ou não do aprisionamento. Mais que isso, apenas para valores específicos, justamente a fase do estado de fase coerente, é que se observa o aprisionamento.

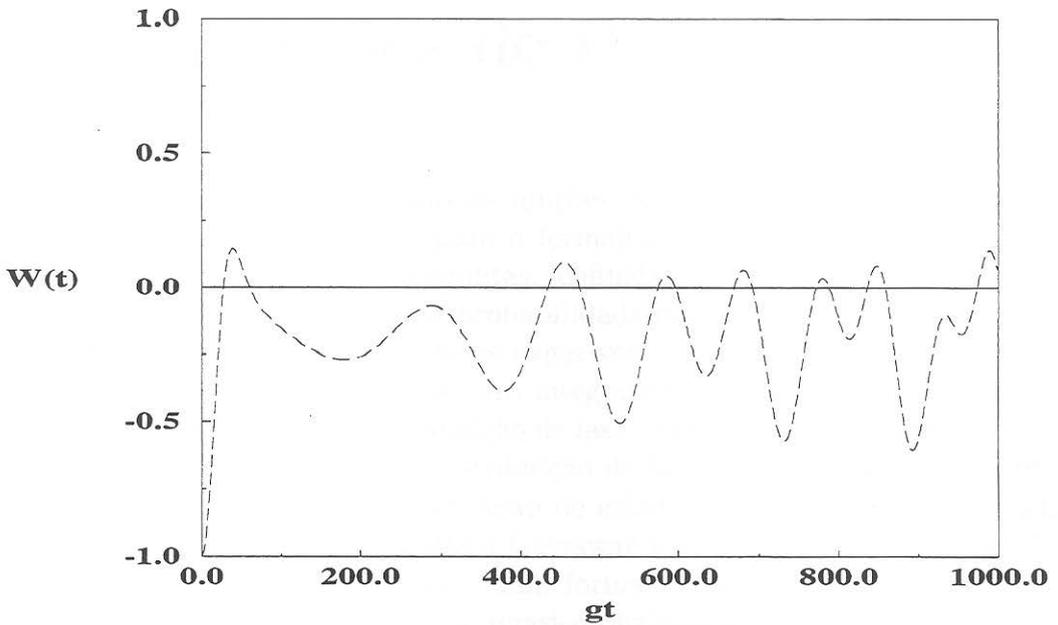


Figura 2.6: Aprisionamento perfeito da população atômica (linha sólida). Inversão de população (linha tracejada) para o átomo inicialmente preparado no estado fundamental, $|g\rangle$, e o campo do estado de fase coerente, $b = 1, 1$ e $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

Capítulo 3

Distribuições de Probabilidade

Estudaremos neste capítulo as funções de quasi-probabilidade que são uma tentativa de transcrição para o formalismo quântico das distribuições clássicas de probabilidade conjuntas, definidas no espaço de fase. Estas funções são chamadas de quasi-probabilidade porque, em alguns casos, elas são singulares, apresentam valores negativos, ou, ainda, não possuem distribuições marginais adequadas. Ao integrarmos radialmente estas funções devemos encontrar uma “distribuição de fase” para um dado estado quântico do sistema. Comparamos a “distribuição de fase” assim obtida com a distribuição de fase obtida pela projeção do estado em questão sobre o estado de fase de Pegg-Barnett, seguindo Garraway e Knight, [22], e Tanaš e Miranowicz, [23]. Usamos, porém, uma forma mais geral para a função de quasi-probabilidade: a função de quasi-probabilidade parametrizada por s , que nada mais é que um parâmetro livre. Com este parâmetro podemos “ajustar” a distribuição que obtivemos a partir das quasi-probabilidades à distribuição obtida com os estados de fase de Pegg-Barnett.

3.1 O Operador Densidade

Existe uma maneira geral de se descrever o estado de um sistema que permite tratar tanto estados puros como estados do tipo mistura estatística. Através do chamado operador densidade, $\hat{\rho}$, definido como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (3.1)$$

onde $|\Psi_i\rangle$ são os estados em que é possível se encontrar o sistema e p_i é a probabilidade do sistema estar em um dos estados $|\Psi_i\rangle$, tal que $\sum_i p_i = 1$ e $1 \geq p_i \geq 0$; e $\hat{\rho}$ obedece as propriedades: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ e $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$. O valor médio de uma observável, \hat{A} , calculado com o operador densidade é

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}[\hat{A}|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|] = \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}]. \quad (3.2)$$

Se o estado que estamos descrevendo é um estado puro, $p_i = \delta_{ij}$, $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ e

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1. \quad (3.3)$$

Para $1 < p_i < 0$, a eq.(3.3) passa a ser $\text{Tr}\hat{\rho}^2 < 1$ e teremos o caso de um estado do tipo mistura estatística. Podemos então usar as relações acima para termos uma medida do grau de “pureza” de um estado. Definimos então o parâmetro ζ como

$$\zeta = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}^2], \quad (3.4)$$

se $\zeta = 0$ temos um estado puro; para $\zeta > 0$, o sistema está num estado do tipo mistura estatística.

Não estaremos interessados em tratar estados do tipo mistura estatística, mas sim, vamos querer apresentar as funções de quasi-probabilidade da maneira mais geral e intuitiva possível.

3.2 Funções de Quasi-Probabilidade

Teoria de Probabilidade Clássica

Seja u uma variável que pode assumir M valores,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_M.$$

Associados aos M valores de u estão as M respectivas distribuições de probabilidade

$$P(u_1), P(u_2), P(u_3), \dots, P(u_M),$$

tal que

$$1 \geq P(u_i) \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^M P(u_i) = 1. \quad (3.6)$$

O valor médio de u é definido como

$$\bar{u} \equiv \sum_{i=1}^M P(u_i)u_i. \quad (3.7)$$

Se quisermos agora calcular o valor médio de uma grandeza $F(q, p)$ que é função de duas variáveis p e q do espaço de fase, devemos usar a média estatística

$$\langle F \rangle_{cl} = \int dq \int dp P_{cl}(q, p) F(q, p) \quad (3.8)$$

$P(q, p)$ é a *distribuição de probabilidade conjunta*, que tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} P_{cl}(q, p) &\geq 0 \\ \int dq \int dp P_{cl}(q, p) &= 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ao integrarmos a distribuição de probabilidade conjunta numa das variáveis obteremos a distribuição de probabilidade da outra variável (*distribuição marginal*).

Será conveniente, a partir de agora, passarmos ao plano complexo onde as variáveis, adimensionais, são $\beta = x + iy$ e $\beta^* = x - iy$, sendo que x e y são variáveis de posição e momento, respectivamente, eqs.(1.9 e 1.10). Ao calcularmos, no plano complexo, a transformada de Fourier da distribuição de probabilidade conjunta, $P_{cl}(\beta, \beta^*)$, obteremos a chamada função característica

$$\begin{aligned} C_{cl}(\xi) &= \int d^2\beta \exp(\xi\beta^* - \xi^*\beta) P(\beta, \beta^*) \\ &= \langle \exp(\xi\beta^* - \xi^*\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Uma propriedade útil das funções características é que podemos calcular momentos de variáveis do espaço de fase simplesmente pela sua diferenciação

$$\langle \beta^{*m} \beta^n \rangle = \frac{\partial^{m+n}}{\partial \xi^m \partial (-\xi^*)^n} C_{cl}(\xi) \Big|_{\xi=0}. \quad (3.11)$$

As funções características serão bastante úteis na definição das quasi-probabilidades quânticas como veremos a seguir.

A Função de Quasi-probabilidade Parametrizada por s

Quanticamente podemos associar o operador densidade à distribuição de probabilidade clássica, $P_c(q, p)$, pois ele também deve ser positivo e normalizado, [24],

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle &\geq 0, \\ \text{Tr} \hat{\rho} &= 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A forma como são calculados os valores médios de operadores usando o operador densidade, eq.(3.2), é semelhante àquela usada pela estatística clássica para o cálculo de médias de grandezas físicas, eq.(3.8). As distribuições (marginais) de probabilidade nas representações de momento e posição associadas ao operador densidade são

$$P(q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \geq 0, \quad (3.13)$$

$$P(p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle \geq 0. \quad (3.14)$$

Não é trivial definir quanticamente uma distribuição de probabilidade conjunta, $P(q, p)$, como no caso clássico, devido ao fato dos operadores \hat{q} e \hat{p} não comutarem. É mais simples definirmos a função característica quântica, $C(\xi)$, análoga à clássica, eq.(3.10).

$$C(\xi) = \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a})]. \quad (3.15)$$

Devido também a \hat{q} e \hat{p} não comutarem, devemos ter o cuidado de usar a relação de Baker-Hausdorff, eq.(1.25), para manipular as exponenciais. A eq.(3.15) pode ser reescrita de forma mais geral como

$$C(\xi) = \text{Tr}[\rho \exp(\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a} + s \frac{|\xi|^2}{2})], \quad (3.16)$$

sendo s um parâmetro que indica o ordenamento dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger . Teremos então, infinitas funções características, uma para cada s . Contudo, três valores de s levam a ordenamentos dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger conhecidos; são eles os ordenamentos

- normal, $s = 1$, todos os operadores \hat{a}^\dagger ficam à esquerda dos operadores \hat{a} ;
- anti-normal, $s = -1$, todos os operadores \hat{a} estão à esquerda dos operadores \hat{a}^\dagger ;
- simétrico, $s = 0$, é a soma de todas as permutações dos operadores.

Podemos agora, novamente em analogia com o caso clássico, definir a função de quasi-probabilidade como a transformada de Fourier da função característica parametrizada em s , [25],

$$\mathcal{P}(\beta, s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi C(\xi, s) \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi). \quad (3.17)$$

As distribuições de quasi-probabilidade são definidas unicamente pelo operador densidade e , nesse sentido, caracterizam o estado quântico de um sistema.

De acordo com os valores de s teremos diferentes funções de quasi-probabilidade a seguir apresentamos os três casos mais conhecidos.

A Função P de Glauber-Sudarshan

Associada ao ordenamento normal dos operadores na função característica parametrizada, eq.(3.16), correspondente a $s = 1$, a Função P , foi introduzida por Glauber e Sudarshan, em 1963, [26], e para um sistema descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$, é escrita como

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\xi\hat{a}^\dagger) \exp(-\xi^*\hat{a})] \exp(\beta\xi^* - \beta^*\beta). \quad (3.18)$$

A Função P , para o estado coerente, $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, é uma função delta. Para outros estados, em geral, ela apresentará uma singularidade ainda maior do que a função delta, [27]. Por isso não pode ser considerada uma função de probabilidade conjunta no sentido em que esta foi definida. A Função P pode ser usada para calcular valores esperados de produtos de operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger ordenados normalmente

$$\langle(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n\rangle = \int d^2\beta \beta^{*m} \beta^n P(\beta). \quad (3.19)$$

A Função Q

Correspondente ao ordenamento anti-normal dos operadores na eq.(3.16), $s = -1$, a Função Q de um sistema com operador densidade $\hat{\rho}$ é dada por

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\xi\hat{a}) \exp(-\xi^*\hat{a}^\dagger)] \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi), \quad (3.20)$$

sendo $\beta = x + iy$. A Função Q pode ser escrita de uma forma mais compacta, usando-se a relação para o estado coerente,

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}, \quad (3.21)$$

teremos,

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho} | \beta \rangle. \quad (3.22)$$

Diferentemente da Função P , a Função Q não apresenta singularidades, e só apresenta valores positivos. Parece, então que a Função Q é uma ferramenta muito útil, lembrando muito as distribuições de probabilidade verdadeiras. No entanto, nem sempre as Funções Q levam a distribuições marginais corretas e, assim, também não podem ser consideradas funções de probabilidade usuais. A Função Q pode ser usada para calcular valores médios de produtos de operadores ordenados anti-normalmente

$$\langle \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \rangle = \int d^2\beta \beta^{*m} \beta^n Q(\beta). \quad (3.23)$$

A Função Q também é usada no estudo da dinâmica da interação do campo de uma cavidade com um átomo de dois níveis (Modelo Jaynes-Cummings), [27].

A Função de Wigner

Se fizermos $s = 0$ na função característica, eq.(3.16), estaremos escolhendo o ordenamento simétrico dos operadores; a função de quasi-probabilidade que corresponde a este ordenamento é a Função de Wigner. Para um sistema representado pelo operador $\hat{\rho}$ podemos escrever a Função de Wigner, $W(\beta)$ como

$$W(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a})] \exp(\beta \xi^* - \beta^2 \xi). \quad (3.24)$$

Além de ser sempre real e normalizada,

$$\int d^2\beta W(\beta) = \text{Tr} \hat{\rho} = 1, \quad (3.25)$$

a Função de Wigner existe para todos os operadores densidade $\hat{\rho}$. Todavia, não pode ser considerada uma função de probabilidade verdadeira porque ela pode assumir valores negativos dependendo do estado quântico do sistema em questão. A Função de Wigner pode ser utilizada para calcular valores esperados de produtos de operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} simetricamente ordenados

$$\langle \{ (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \} \rangle = \int d^2\beta \beta^{*m} \beta^n W(\beta), \quad (3.26)$$

onde $\{\hat{a}^\dagger \hat{a}\} = \frac{1}{2}(\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a})$.

A Função de Wigner é também utilizada no estudo de interferências quânticas que surgem da superposição de estados, [27], mais recentemente na reconstrução de estados quânticos por tomografia, [28] e [29], e em diversos estudos de propriedades do campo eletromagnético quantizado.

3.3 As Distribuições de Fase

Nesta seção integraremos “radialmente” a função de quasi-probabilidade parametrizada $\mathcal{P}(\beta, s)$, encontrando assim a “distribuição de fase” para alguns estados do campo quantizado e comparamos as “distribuições de fase” assim obtidas com as distribuições de fase obtidas com os estados de fase de Pegg-Barnett.

A Integração da Função de Quasi-Probabilidade Parametrizada

Podemos escrever a função de quasi-probabilidade eq.(3.17) como, [25],

$$\mathcal{P}(\beta, s) = \frac{1}{\pi} \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{T}(\beta, s)] \quad (3.27)$$

onde

$$\hat{T}(\beta, s) = \frac{1}{\pi} \int d^2\xi \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi) \exp(\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a} + s\frac{|\xi|^2}{2}), \quad (3.28)$$

o operador $\hat{T}(\beta, s)$ pode ser escrito, na base discreta dos estados de Fock da seguinte maneira

$$\hat{T}(\beta, s) = \frac{2}{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{D}(\beta)|n\rangle\langle n|\hat{D}^\dagger(\beta) \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n. \quad (3.29)$$

A função de quasi-probabilidade parametrizada escrita na base dos estados de Fock se torna, então,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\beta, s) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \rho_{m,n} \langle n|\hat{T}(\beta, s)|m\rangle \\ &= \sum_{m,n} \rho_{m,n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \left(\frac{2}{1-s}\right)^{m-n+1} \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n e^{-i(m-n)} |\beta|^{m-n} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{2|\beta|^2}{1-s}\right) \mathcal{L}_n^{m-n} \left(\frac{4|\beta|^2}{1-s^2}\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $\mathcal{L}_n^{m-n}(|\beta|^2)$ são os polinômios associados de Laguerre. Em (3.30), foi feita a decomposição polar de $\beta \rightarrow \beta = |\beta|e^{i\theta}$. A fase θ representará a fase do campo quando integrarmos a função de quasi-probabilidade $\mathcal{P}(\beta, s)$, eq.(3.30), na variável “radial”, $|\beta|$. Obteremos então a “distribuição de fase” parametrizada por s ,

$$\begin{aligned} P(\theta, s) &= \int_0^\infty \mathcal{P}(\beta, s) |\beta| d\beta \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \rho_{m,n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \left(\frac{2}{1-s}\right)^{m-n+1} \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n e^{-i(m-n)\theta} \\ &\quad \times \int_0^\infty |\beta| d\beta |\beta|^{m-n} \exp\left(-\frac{2|\beta|^2}{1-s}\right) \mathcal{L}_n^{m-n}\left(\frac{4|\beta|^2}{1-s^2}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A integração pode ser feita usando-se a definição dos polinômios associados de Laguerre,

$$\mathcal{L}_p^q(\rho) = \frac{d^q}{d\rho^p} \mathcal{L}_p(\rho), \quad (3.32)$$

obteremos a “distribuição de fase” parametrizada,[23],

$$P(\theta, s) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2\text{Re} \sum_{m>n} \rho_{m,n} \exp(-i(m-n)\theta) G^s(m, n) \right\}, \quad (3.33)$$

onde

$$\begin{aligned} G^s(m, n) &= \left(\frac{2}{1-s}\right)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{l=0}^{\text{Min}[m,n]} \left(-\frac{1+s}{2}\right)^l \\ &\quad \times \frac{\sqrt{n! m!} \Gamma\left(\frac{m+n}{2} - l + 1\right)}{l!(m-l)!(n-l)!}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A Função Q como as outras funções de quasi-probabilidade é função de duas variáveis do espaço de fase, devemos plotá-la então no espaço tridimensional $Q(x, y) \times x \times y$, podemos, no entanto, olhar apenas para o plano $x \times y$, sendo x e y definidos pelas eqs.(1.9 e 1.10), e visualizar a projeção bidimensional da Função Q , eq.(3.2). Na figura(3.1), temos uma versão ilustrativa da projeção da Função Q no plano $x \times y$, círculo vermelho, para o estado coerente $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Ao integrarmos a Função Q na variável radial $r = |\beta|$, obteremos a distribuição de probabilidade para a fase θ que é, na verdade, um valor médio da fase pois essa apresenta incerteza no seu valor que é determinada pelo diâmetro do círculo.

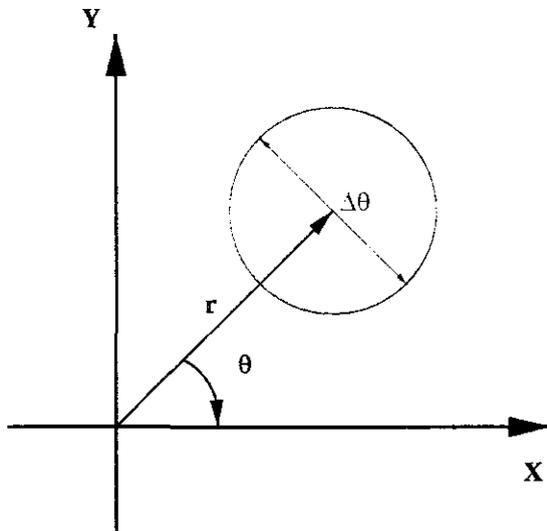


Figura 3.1: Representação da Função Q, círculo vermelho, para o estado coerente $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, $r = |\beta|$ é a variável radial e θ é a fase média.

A eq.(3.33) permite calcular a “distribuição de fase” para qualquer estado, desde que se conheça $\rho_{m,n} = \langle n|\hat{\rho}|m\rangle$. A seguir, calcularemos a distribuição de fase de Pegg-Barnett para podermos comparar com a eq.(3.33).

A Distribuição de Fase com os Estados de Fase de Pegg-Barnett

A distribuição de fase que obtemos ao projetar um estado do campo eletromagnético quantizado, $|\Psi\rangle = \sum_n c^n |n\rangle$, sobre o estado de fase de Pegg-Barnett eq.(1.57) é dada por

$$\begin{aligned} P(\theta) &= |\langle \theta_m | \Psi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \{1 + 2\text{Re} \sum_{m>n} c_m c_n^* \exp[i(m-n)\theta]\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se estivermos descrevendo o campo com o operador densidade $\hat{\rho}$, devemos generalizar a eq.(3.35), que se torna

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \{1 + 2\text{Re} \sum_{m>n} \rho_{m,n} \exp[i(m-n)\theta]\}, \quad (3.36)$$

onde $\rho_{m,n} = \langle n|\hat{\rho}|m\rangle$ e o contador no somatório indica que serão somados m e $n = m - 1$ valores. Somente em poucos casos os somatórios da distribuição

de fase podem ser resolvidos de outra forma que não numericamente. A distribuição de fase é normalizada e definida positiva.

Cabem dois comentários sobre as distribuições de fase calculadas com os estados de Pegg-Barnett. Primeiramente, ao calcularmos estas distribuições de fase com os estados de Pegg-Barnett, tomamos o limite $r \rightarrow \infty$ na eq.(1.57), ao fazermos isso, a variável discreta θ_m passa a assumir qualquer valor $\theta_m \rightarrow \theta$, de forma que podemos variar θ continuamente. Em segundo lugar, as distribuições de fase de Pegg-Barnett, desde que calculadas para estados físicos¹ do campo eletromagnético, são as mesmas que as encontradas com os estados de fase de Susskind-Glogower, isso nos chamou atenção para os estados de fase, pois mesmo advindo de formalismos diferentes, estes estados levam à mesma distribuição de fase. Além disso, parece não ser necessário, ao trabalhar com os estados de fase, o procedimento de tomar o limite $r \rightarrow \infty$ somente no final dos cálculos, podemos trabalhar sem restrições no espaço de dimensão infinita.

A comparação entre as eqs.(3.33 e 3.36) fica simples uma vez que as “distribuições de fase” só diferem entre si pelos fatores $G^{(s)}(m, n)$. Estaremos interessados, a partir de agora, nesta comparação para alguns estados do campo quantizado. Apresentaremos dois trabalhos que fazem esta comparação usando distribuições de fase provenientes de funções de quasi-probabilidade específicas como a Função Q e a Função de Wigner.

Garraway e Knight

Garraway e Knight, [22], compararam a distribuição de fase obtida com os estados de fase de Pegg-Barnett com a distribuição de fase obtida a partir da integração radial da Função de Wigner, $s = 0$, para dois estados do campo quantizado: o estado coerente $|\alpha\rangle$ e o estado “gato de Schrödinger”, eq.(A.13). Em nenhum dos casos obtiveram coincidência das duas distribuições, as curvas possuem a mesma forma, contudo, para o estado coerente, a distribuição proveniente da Função de Wigner é mais estreita e mais alta que a de Pegg-Barnett, figura 3.2. Para o estado “gato” o resultado obtido foi ainda pior, pois além de não haver coincidência a distribuição de Wigner apresentava valores negativos para o caso de estado “gato par”², como podemos observar

¹Estados físicos, vale lembrar, são estados que podem ser excitados a partir do vácuo com energia finita, os valores médios do número de fótons calculado com estes estados são finitos.

²Ver Apêndice.

na figura 3.3.

Tanaś, Miranowicz e Gantsog

Tanaś e colaboradores, [23], comparam a distribuição de fase de Pegg-Barnett com a “distribuição de fase” proveniente da integração radial da função de quasi-probabilidade para $s = -1$, Função Q e para $s = 0$ Função de Wigner, para três estados do campo: estado coerente, eq.(A.3), estado comprimido, eq.(A.7), e estado de número deslocado, eq.(A.9). Para o estado coerente, figura 3.4, vemos que a distribuição de Wigner é mais estreita que a de Pegg-Barnett, como haviam notado Garraway e Knight; mas a “distribuição de fase” da Função Q é mais larga. O mesmo observamos no caso dos estados de número deslocado, figura 3.5.

Estamos considerando correta a distribuição de Pegg-Barnett, uma vez que ela vem de um formalismo consistente e coincide com outra distribuição (a de Susskind-Glogower), esperamos, então que uma distribuição de fase calculada por qualquer outra maneira, deva estar de acordo com ela. Desta forma, podemos considerar problemático o fato de não se haver encontrado coincidência das distribuições de fase nestes trabalhos.

3.4 Coincidência das Distribuições de Fase

No trabalho de Tanaś e colaboradores, notamos que, ao menos para o estado coerente e de número deslocado, a “distribuição” proveniente da Função Q , $s = -1$, era mais larga do que a de Pegg-Barnett enquanto que a de Wigner, $s = 0$ era mais estreita. Nos perguntamos então, se para algum valor de s entre $[-1, 0]$ ³ poderíamos obter a mesma curva para as duas distribuições de fase e passamos a procurar esta coincidência para dois estados do campo: o coerente e o “gato de Schrödinger”.

Como havíamos apontado, a diferença entre as duas distribuições são os coeficientes $G^s(m, n)$ e para as distribuições serem iguais teríamos que fazer $G^s(m, n) = 1$. Contudo, esta tarefa não é simples dada a complexidade destes coeficientes e por sua dependência com os índices dos somatórios. Verificamos numericamente como se comportam estes coeficientes para os dois

³Na verdade, não existe um intervalo fixo para s , contudo, pelo que vimos nos trabalhos anteriores, este intervalo se mostra mais conveniente para tentarmos encontrar a coincidência das distribuições.

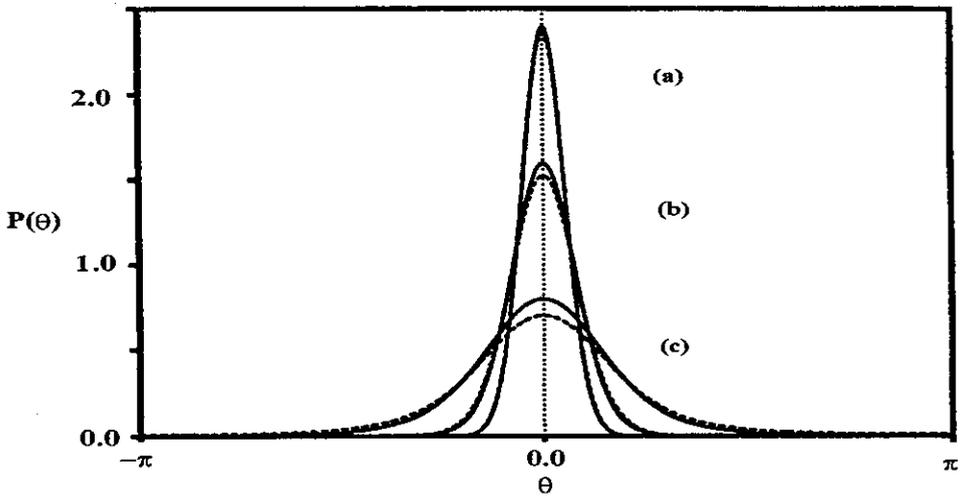


Figura 3.2: Distribuição de Wigner (linha cheia) e de Pegg-Barnett (linha tracejada) para três estados coerentes: (a) $\alpha = 3$, (b) $\alpha = 2$ e (c) $\alpha = 1$.

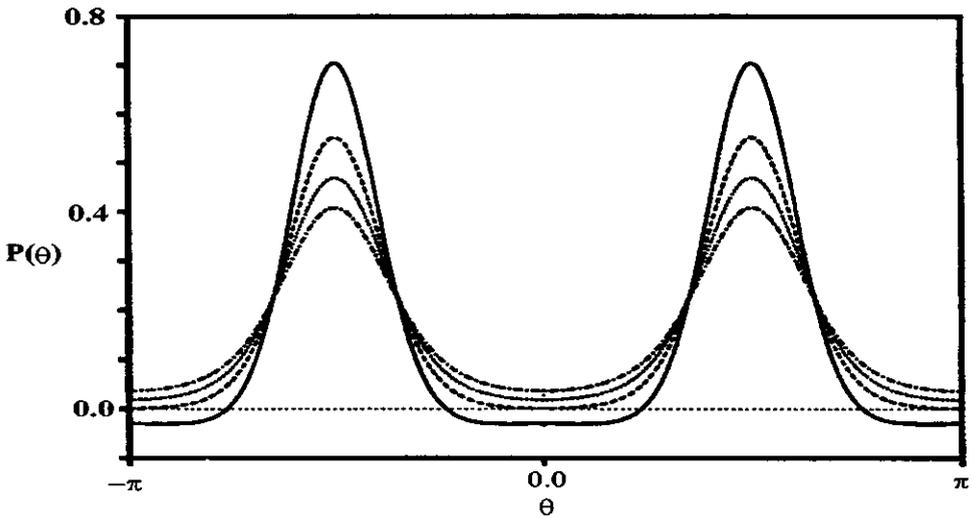


Figura 3.3: Distribuição de Wigner e Pegg-Barnett para o estado “gato de Schrödinger” com $\alpha = 1.4$. “Gato par” (linha cheia: Wigner; linha tracejada: Pegg-Barnett). “Gato ímpar” (linha tracejada e pontilhada: Wigner; linha pontilhada: Pegg-Barnett). Somente a distribuição de Wigner para o “gato par” apresenta valores negativos.

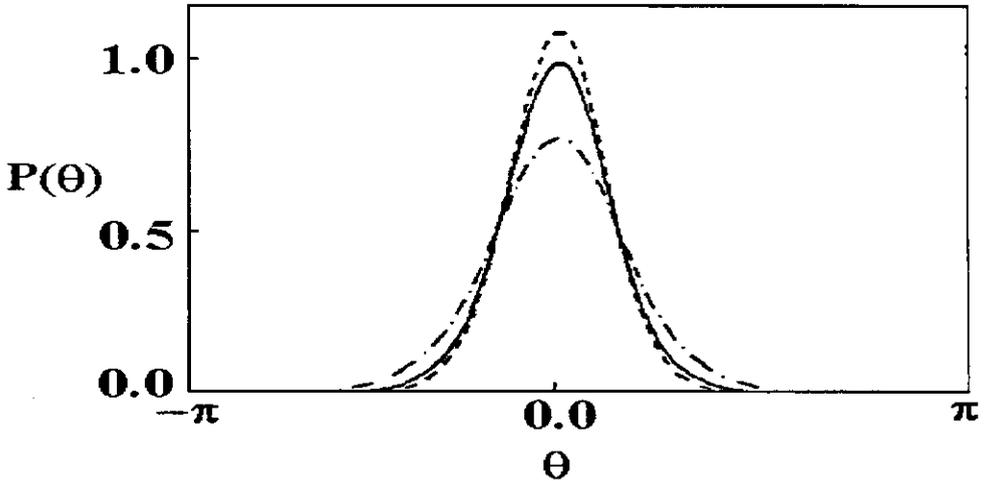


Figura 3.4: Distribuição de fase para o estado coerente, com $|\alpha|^2 = 2$, de Pegg-Barnett (linha cheia), $P(\theta, 0)$ (linha tracejada), $P(\theta, -1)$ (linha tracejada e pontilhada).

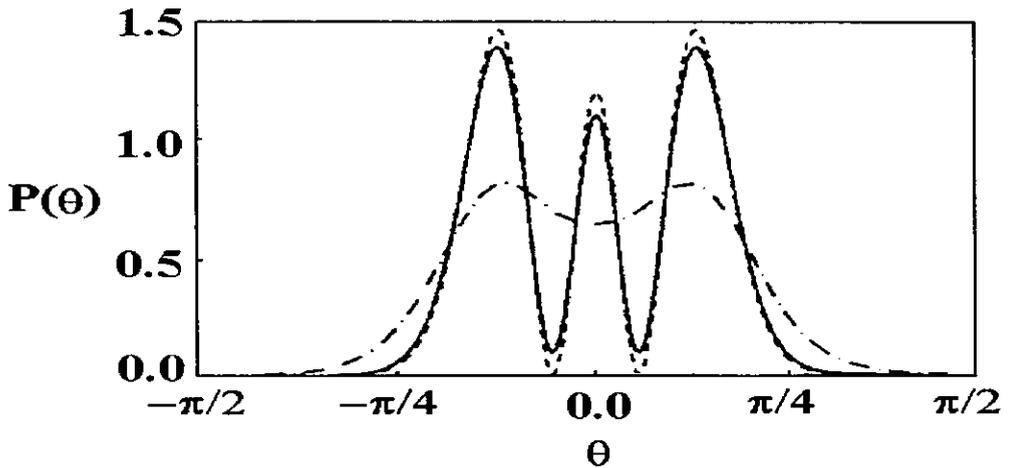


Figura 3.5: Distribuição de fase para o estado de número deslocado com $n = 2$ e $\alpha = 3$, de Pegg-Barnett (linha cheia), $P(\theta, 0)$ (linha tracejada), $P(\theta, -1)$ (linha tracejada e pontilhada).

valores de s que levam á coincidência das distribuições, $s = -0.2$ e $s = -0.33$, e podemos vê-los na figura(3.6). Outro ponto que deve ser ressaltado é que estes coeficientes estão “pesados” nas distribuições de fase pelos elementos de matriz $\rho_{n,m}$ que dependem de $|\alpha|$, então, não basta olhar apenas para $G^s(m, n)$, devemos olhar simultaneamente para $|\alpha|$ quando vamos procurar a coincidência das distribuições o que torna esta tarefa bastante mais complicada.

Estado Coerente

Calculamos as distribuições de fase de Pegg-Barnett e de quasi-probabilidade para o estado coerente para alguns valores de $|\alpha|^2$ e s e as comparamos. Conseguimos, como podemos ver na figura(3.7), para $|\alpha|^2 = 2$ e para $s = -0.2$, uma concordância bastante boa da distribuição de Pegg-Barnett com a da função de quasi-probabilidade, ainda que a distribuição de quasi-probabilidade seja um pouco mais estreita que a de Pegg-Barnett.

Estado “Gato de Schrödinger”

Procedemos da mesma maneira para os estados de “gato de Schrödinger”, nos restringimos, entretanto, ao caso do “gato par” pois este apresenta regiões negativas para alguns valores de s , como visto no trabalho de Garraway e Knight. Notamos, porém, que para alguns valores de s e $|\alpha|^2$ a distribuição de quasi-probabilidade deixa de apresentar regiões negativas. Como vemos na figura(3.8), as duas distribuições de fase, para o “gato par” com $|\alpha| = 1.1$, não são iguais para este estado, contudo, se aproximam bastante e, o que é mais importante, $P(\theta, s)$ sendo $s = -0.33$ não tem ponto algum negativo.

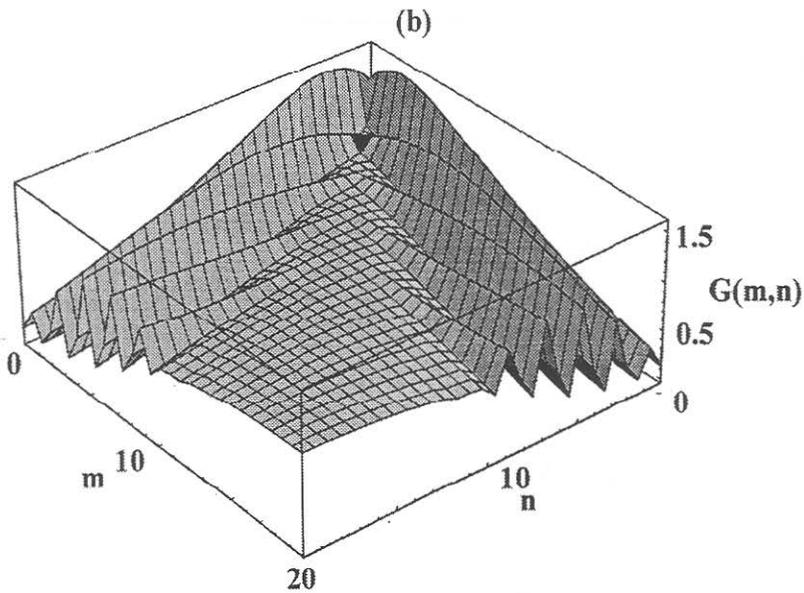
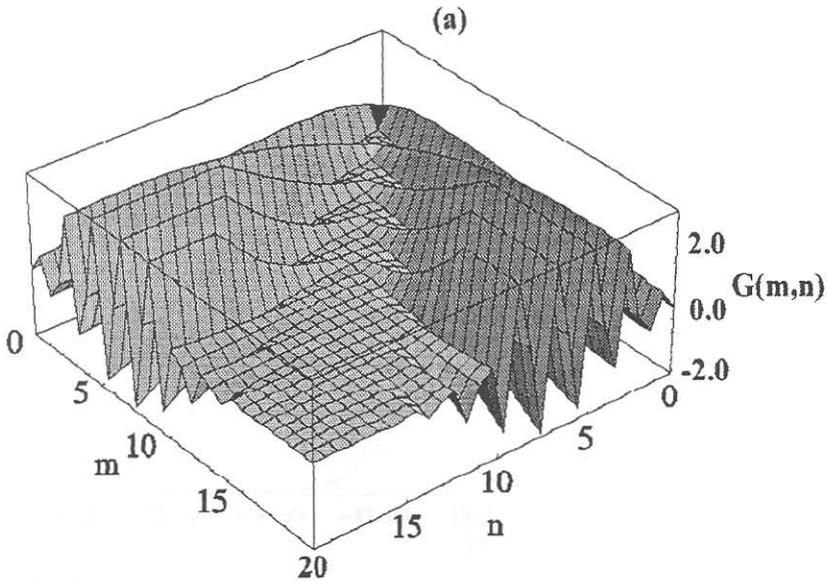


Figura 3.6: $G^s(m,n)$ para: (a) $s = -0.2$, (b) $s = -0.33$

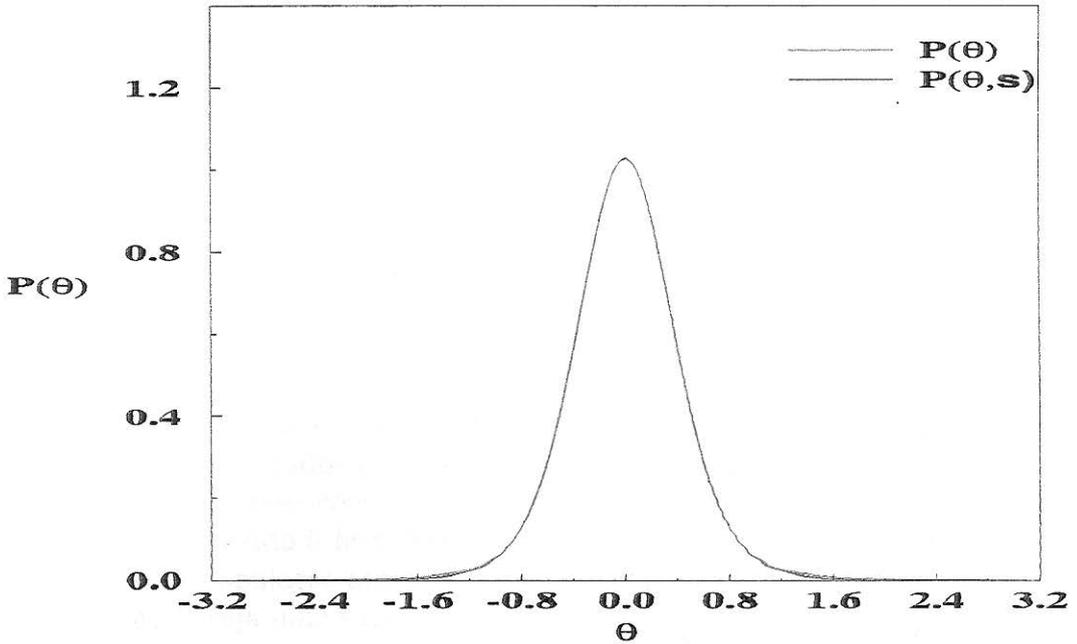


Figura 3.7: Distribuição de fase para o estado coerente com $|\alpha|^2 = 2$: Pegg-Banett (linha vermelha), quasi-probabilidade para $s = -0.2$ (linha azul).

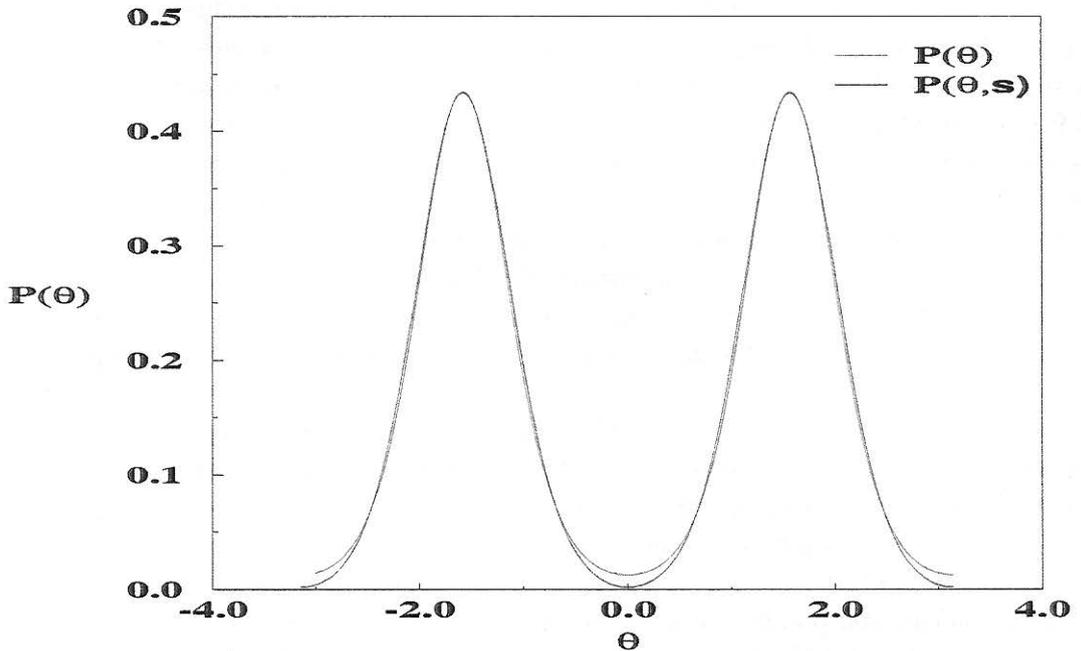


Figura 3.8: Distribuições de fase para o estado “gato de Schrödinger” com $|\alpha| = 1.1$: de Pegg-Barnett (linha vermelha) e $P(\theta, s)$ para $S = -0.33$ (linha azul).

Conclusões

Mostramos que é possível estudar propriedades de fase do campo quantizado usando estados com fase bem definida, ou mais especificamente, com os estados de fase coerentes. Apresentamos um efeito interessante que é claramente devido à fase destes estados ser bem definida: o aprisionamento perfeito da população atômica. O qual se obtém fazendo interagir um átomo, cujo estado seja uma superposição dos estado excitado e fundamental, pesada por uma fase Θ , com um modo do campo quantizado no estado de fase coerente. Se a fase do estado do campo for exatamente Θ , veremos que a população atômica não irá oscilar.

Dois pontos, no entanto, merecem especial atenção:

1) No capítulo 2, calculamos as incertezas dos operadores de fase de Pegg-Barnett $\hat{\theta}_{PB}$ e de número de fótons \hat{n} , para os estados de fase coerentes e notamos que o produto destas incertezas para valores do parâmetro $b \geq 2.5$ assume valor menor que $1/2$, ou seja, está abaixo do valor previsto pelas relações de incertezas fenomenológicas. Isso está de acordo com a teoria de Pegg-Barnett. Vimos também que para o limite $b \rightarrow \infty$ o estado de fase coerente se transforma no estado de vácuo, para o qual o número de fótons é bem definido. Para $b \rightarrow 1$, recuperamos o estado de fase de Susskind-Glogower cuja fase é bem definida e temos incerteza total no número de fótons.

2) No capítulo 3, nos interessamos pelas “distribuições de fase” provenientes da integração radial das funções de quasi-probabilidade parametrizadas. Para cada valor de s , temos uma “distribuição de fase” diferente, $P(\theta, s)$. Procuramos, então, saber para quais valores de s obteríamos uma distribuição apropriada, ou seja, a mesma distribuição de um estado de fase. Calculamos as distribuições, para os estados coerentes, a partir das quasi-probabilidades e as comparamos com as obtidas com os estados de fase coerentes. Variamos os parâmetros s e b conjuntamente com $|\alpha|^2$, entretanto, para nenhum

valor destes parâmetros conseguimos fazer as distribuições de fase coincidirem. Notamos, todavia, que as curvas se aproximavam mais quando $b \rightarrow 1$, ou seja, quando o estado de fase coerente se aproxima dos estados de fase de Susskind-Glogower. Passamos então a buscar valores de s e $|\alpha|^2$ para os quais a distribuição de Susskind-Glogower (ou de Pegg-Barnett) $P(\theta)$ coincidissem com $P(\theta, s)$. Para $s = -0.2$ e $|\alpha|^2 = 2$, encontramos uma concordância bastante boa das duas distribuições $P(\theta)$ e $P(\theta, s = -0.2)$.

Dois trabalhos anteriores, de Garraway-Knight, [22] e Tanaš e colaboradores, [23], já haviam feito comparação semelhante a esta, em ambos casos, eram usados apenas dois valores de s , $s = 0$ e/ou $s = -1$, ainda que não hajam restrições aos valores de s . Nenhum destes trabalhos conseguiu obter a coincidência das distribuições para os estados coerentes. Garraway e Knight fizeram ainda a comparação das distribuições para o estado “gato de Schrödinger” que no caso dos estados “gatos pares”, $P(\theta, s = 0)$ apresentavam regiões negativas. Nós também fizemos a comparação para estes estados todavia, não fixamos de antemão um valor para s . Notamos que para alguns valores de s e $|\alpha|^2$ $P(\theta, s)$ não tinha mais pontos negativos e, em particular, para $s = -0.33$ e $|\alpha|^2 = 1.21$, as duas distribuições eram quase iguais. Nestes trabalhos, há sempre uma preocupação em não usar valores de s diferentes daqueles que correspondem aos ordenamentos conhecidos dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} na função característica quântica, ou seja $s = \pm 1, 0$. Procedendo assim, ainda que se restrinja somente a casos bem conhecidos e estudados das funções de quasi-probabilidade, não é possível se obter uma distribuição satisfatória para a fase. Sob este ponto de vista, nosso trabalho representa um avanço pois conseguimos encontrar, para o estado coerente, e muito aproximadamente para o altamente não clássico estado “gato de Schrödinger”, uma distribuição de fase a partir das quasi-probabilidades, por assim dizer, coincidente com aquela que é considerada apropriada.

Apêndice A

Estados do Campo Quantizado

No decorrer deste trabalho, apenas nos referimos a alguns estados do campo quantizado. O objetivo deste apêndice é apresentar e descrever, ainda que brevemente, estes estados.

A.1 Estados Coerentes

São os estados que mais se aproximam do campo clássico, no sentido que os valores esperados do campo calculados com estes estados são os mesmos que os obtidos, para ondas estáveis, com o eletromagnetismo clássico. Os estados coerentes foram introduzidos por Schrödinger em 1926, [30], para o caso do oscilador harmônico.

Um estado coerente $|\alpha\rangle$ possui uma amplitude complexa $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ e é auto-estado do operador aniquilação de fótons \hat{a} ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (\text{A.1})$$

A expansão de $|\alpha\rangle$ em termos dos estados de Fock é dada por

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Podemos gerar os estados coerentes a partir do estado de vácuo pela aplicação do operador deslocamento de Glauber, [31], $\hat{D}(\alpha)$,

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (\text{A.3})$$

A variância de \hat{n} para este estado é igual ao número médio de fótons,

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = |\alpha|^2. \quad (\text{A.4})$$

A distribuição de fótons para os estados coerentes é poissoniana, ou seja, os fótons são distribuídos aleatoriamente ao se gerar este estado. Estes estados são de grande importância para a Óptica Quântica. Podemos considerar que um laser monomodo, operando acima do limiar, produz um estado coerente.

A.2 Estados Comprimidos

Os estados comprimidos, introduzidos por Takahashi em 1965, [32], são uma outra classe de estados do campo eletromagnético de grande interesse para a Óptica Quântica. Este interesse se dá principalmente porque o estado apresenta ruído abaixo do limite do vácuo, sem contudo, violar o princípio da incerteza.

Apresentaremos agora a definição de Stoler, [34], dos estados comprimidos, há, todavia, outra definição, completamente equivalente a esta, dada por Yuen, [33]. Segundo Stoler, um estado comprimido $|\alpha, \zeta\rangle$ pode ser gerado a partir do vácuo pela aplicação do operador de compressão $\hat{S}(\zeta)$, seguida da aplicação do operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$,

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left[\frac{1}{2}(\zeta^*(\hat{a})^2 - \zeta(\hat{a}^\dagger)^2)\right] \quad (\text{A.5})$$

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle, \quad (\text{A.6})$$

sendo que o número complexo $\zeta = re^{i\theta}$ é chamado de parâmetro de compressão, porque ele é que controla quanto o ruído da quadratura estará abaixo do ruído do vácuo. A expansão de $|\alpha, \zeta\rangle$ em termos dos estados de Fock é

$$\begin{aligned} |\alpha, \zeta\rangle = \sum_n \frac{\left(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh r\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n! \cosh r}} \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2 e^{-i\theta} \tanh r)\right] \\ \times \mathcal{H}_n \left[\frac{\alpha + \alpha^* e^{i\theta} \tanh r}{\sqrt{2e^{i\theta} \tanh r}} \right] |n\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde $\mathcal{H}_n[z]$ são polinômios de Hermite de ordem n . O valor médio do número de fótons para este estado fica então

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r. \quad (\text{A.8})$$

Para o caso específico $r = 0$, $\hat{S}(\zeta) = 1$ e recuperamos o estado coerente. Estes estados, por apresentarem ruído reduzido, são utilizados em medidas de alta precisão e telecomunicações.

A.3 Estados de Número Deslocado

Os estados de número deslocado (END) aparecem inicialmente no trabalho de Cahill e Glauber, [25], em 1969. Todavia, somente em 1990, [35], de Oliveira e colaboradores dão atenção a este estado.

Para se gerar os END o que se tem a fazer é aplicar o operador deslocamento de Glauber, $\hat{D}(\alpha)$, num estado de número, ou estado de Fock,

$$|\alpha, n\rangle = \hat{D}(\alpha)|n\rangle = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}|n\rangle. \quad (\text{A.9})$$

A expansão de $|\alpha, n\rangle$ em termos dos estados de Fock é, [35],

$$|\alpha, n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \alpha^{m-n} \mathcal{L}_n^{m-n}(|\alpha|^2)|m\rangle, \quad (\text{A.10})$$

onde $\mathcal{L}_n^{m-n}(|\alpha|^2)$ são os polinômios de Laguerre de ordem n . O número médio de fótons e a variância de \hat{n} para este estado são

$$\langle \hat{n} \rangle = n + |\alpha|^2, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle = (2n + 1)|\alpha|^2, \quad (\text{A.12})$$

ao fazermos $n = 0$, recuperamos os estados coerentes.

A.4 Estados “Gato de Schrödinger”

São uma superposição de dois estados coerentes, $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$, com a mesma intensidade ($|\alpha|^2$), porém com uma defasagem de 180° um em relação ao outro.

$$|\text{gato}\rangle = \frac{1}{N} [|\alpha\rangle + e^{i\phi}|-\alpha\rangle] \quad (\text{A.13})$$

onde

$$|N|^2 = 2(1 + \cos \phi e^{-2|\alpha|^2}). \quad (\text{A.14})$$

A expansão destes estados em termos dos estados de Fock é dada pela expressão

$$|gato\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{A.15})$$

e o número médio de fótons para estes estados é

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2} \cos \phi}{1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \phi}. \quad (\text{A.16})$$

Eles são auto-estados do quadrado do operador de aniquilação de fótons

$$\hat{a}^2 |gato\rangle = \alpha^2 |gato\rangle. \quad (\text{A.17})$$

Na eq.(A.13), ao fazermos $\phi = 0$, teremos o chamado “gato par”, ou estado coerente par, cuja superposição contém somente estados de Fock pares. Por outro lado, se fizermos $\phi = \pi$, teremos uma superposição de estados de número ímpares, o “gato ímpar”, ou estado coerente ímpar. Estes estados são uma versão óptica, [36], do problema do “gato de Schrödinger”: uma superposição de estados macroscopicamente distinguíveis. Para maiores detalhes das propriedades de estados do tipo “gato de Schrödinger”, ver [37].

Bibliografia

- [1] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy.Soc. (London)A*, 114 (1927)
- [2] L. Susskind e J. Glogower, *J. Physics***1**, 49 (1964)
- [3] D.T. Pegg e S.M. Barnett, *Europhys. Lett.***6**, 483 (1988) e S.M. Barnett e D.T.Pegg *J. Mod. Opt.***36**, 7 (1989)
- [4] D.T. Pegg e S. M. Barnett, *Phys. Rev. A***39**, 1665 (1989)
- [5] J.W. Noh, A. Fougères e L. Mandel, *Phys. Rev. A***43**, 2576 (1991); J.W. Noh, A. Fougères e L. Mandel, *Phys. Rev. A***45**, 424 (1992); J.W. Noh, A. Fougères e L. Mandel, *Phys. Rev. A***46**, 2840 (1992)
- [6] J. R. Torgerson e L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.***76**, 3939 (1996)
- [7] X. Ma e W. Rhodes, *Phys. Rev. A***43**, 2576 (1991)
- [8] C. Cohen-Tannoudji; B. Diu e F. Lalöe, *Quantum Mechanics*, vol.1 (John Wiley Inc. e Hermann) (1977)
- [9] L.E. Ballentine, *Quantum Mecanics* (Prentice-Hall) (1990)
- [10] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press) (1995)
- [11] R. Lynch, *Phys. Reports***256**, 367 (1995)
- [12] W.H. Louisell, *Phys. Lett.***7**, 60 (1963)
- [13] J.H. Shapiro e S.R. Shepard, *Phys. Rev. A***43**, 3795 (1991)

- [14] D.A. Manoel e A. Vidiella-Barranco, *Estados de Fase Físicos XXI Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada*, Caxambu, Anais de Óptica, 32 (1998)
- [15] G.M. D'Ariano, M.G.A. Paris e M.F. Sacchi, *Phys. Rev.* **A57**, 4894 (1998)
- [16] A.-S.F. Obada, S.S. Hassan, R.R. Puri e M.S. Abdalla, *Phys. Rev.* **A48**, 3174 (1993) e A.-S.F. Obada; O.M Yassin e S.M Barnett, *J. Mod. Opt.***44**, 149 (1997)
- [17] E.T. Jaynes e F.W.Cummings, *IEEE***51**, 89 (1963); B.W. Shore e P.L. Knight, *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993)
- [18] A.P.S. de Moura, Dissertação de Mestrado *Efeito dos Termos Contra-Girantes no Modelo de Jaynes-Cummings* apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp (1997)
- [19] K. Zaheer e M.S. Zubairy, *Phys. Rev.* **A39**, 2000 (1989)
- [20] J.I. Cirac e L.L. Sánchez-Soto, *Phys. Rev.* **A42**, 2851 (1990)
- [21] D. Jonathan, K. Furuya e A. Vidiella-Barranco, aceito para publicação em *J.Mod. Opt.*
- [22] B. M. Garraway e P. L. Knight, *Phys. Rev.* **A46**, 5346 (1992). B. M. Garraway e P. L. Knight, *Phys. Scripta***T48**, 66 (1993)
- [23] R. Tanaś, B.K. Murzakhmetov, Ts. Gantsog e A.V. Chizhov, *Quantum Opt.***4**, 1 (1991); R. Tanaś, Ts. Gantsog, A. Miranowicz e S. Kielich, *J. Optic. Soc. Am.* **B8**, 1576 (1991); R. Tanaś, A. Miranowicz e Ts. Gantsog, *Phys. Scripta***T48**, 53 (1993)
- [24] W. Vogel e D.-G. Welsh, *Lectures on Quantum Optics* (Akademie Verlag) (1994)
- [25] K. E. Cahill e R. J. Glauber, *Phys. Rev.***177**, 1857 (1969); *Phys. Rev.***177**, 1883 (1969)
- [26] R. J. Glauber, *Phys. Rev.***131**, 2766 (1963) e E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.***10**, 277 (1963)

- [27] A. Vidiella-Barranco, Tese de Doutorado *Quantum Superpositions os Coherent States of Light*, apresentada a University of London Imperial College of Science, Technology and Medicine (1992)
- [28] L. G. Lutterbach e L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.***78**, 2547 (1997)
- [29] H. Moya-Cessa, S. M. Dutra, J. A. Roversi e A. Vidiella-Barranco, aceito para publicação em *J. Mod. Opt.*
- [30] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften***14**, 664 (1926)
- [31] R. J. Glauber, *Phys. Rev.***130**, 2529 (1963)
- [32] H. Takahashi, *Adv. Comm. System***1**, 227 (1965)
- [33] H. P. Yuen, *Phys. Rev. A***13**, 2226 (1976)
- [34] D. Stoler, *Phys. Rev. D***1**, 3217 (1970)
- [35] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P.L. Knight, *Phys. Rev. A***41**, 2645 (1990)
- [36] A. J. Leggett, *Comtemp. Phys.***25**, 583 (1984)
- [37] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco, P. L. Knight, *Phys. Rev. A***45**, 6570 (1992)