

A Geometria e os Instantons da Teoria de Yang & Mills $SU(2)$

Marcelo de Oliveira Terra-Cunha

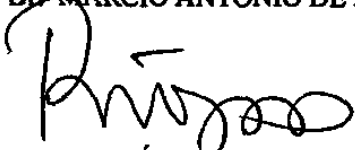
PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE MESTRADO
MARCELO DE OLIVEIRA TERRA CUNHA

DATA: 26.05.97

BANCA EXAMINADORA:



- Prof. Dr. MÁRCIO ANTÔNIO DE FARIA ROSA (Orientador)



- Prof. Dr. ALCIBÍADES RIGAS



- Prof. Dr. GUILLERMO GERARDO CABRERA OYÁRZUN

A Geometria e os Instantons da Teoria de Yang & Mills $SU(2)$

Autor: Marcelo de Oliveira Terra-Cunha
Orientador: Márcio Antonio de Faria Rosa

Este exemplar corresponde à versão final da Tese apresentada por Marcelo de Oliveira Terra Cunha ao IFGW-Unicamp como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Física.

Instituto de Física Gleb Wataghin
Unicamp
1997

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Mestrado defendida pelo aluno Marcelo de Oliveira Terra Cunha e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06/08/97

Márcio Antonio F. R.

... Mas eis o que eu queria dizer: - já fizeram o elogio da loucura e ninguém se lembrou ainda de fazer o elogio, muito mais procedente, da burrice. Vejam vocês: - o Sexo tem o seu Freud, a Economia tem o seu Marx. E ninguém observou o óbvio, ou seja: - que a burrice influi mais no comportamento humano do que o fator sexual, ou econômico ou outro qualquer.

Dai se conclui que o gênio é um vencido e um miserando. Só o imbecil decide, só ele faz os costumes, as leis, as guerras, a moral e, numa palavra, as civilizações passadas, presentes e futuras. Ao passo que o gênio é o marginal das grandes decisões. Enquanto o gênio rosna de impotência e frustração, eis o cretino a fazer a História.

Nelson Rodrigues

Retrato de Erasmo de Roterdam

Santidade de escrever,
insanidade de escrever
equivalem-se. O sábio
equilibra-se no caos.

Carlos Drummond de Andrade

Comparo um trabalho de Mestrado aos primeiros passos,
ainda meio bambos, de uma criança.
Portanto, dedico este a meus pais e à Flávia,
que guiaram meus primeiros passos na vida,
e à Mimi,
que a meu lado guia os passos,
cada vez mais firmes, da Tatá.

Agradecimentos

É hora de agradecer. Como é difícil não esquecer de ninguém, nem cometer injustiças... assim, antes de mais nada, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu agora possa agradecer, e me desculpo com aqueles que eu venha a esquecer de relacionar.

Aos meus pais e à Flávia, cabe o agradecimento pelas primeiras lições. Tá certo que família a gente não escolhe, e claro que vocês não são perfeitos, mas não sei se eu pudesse escolher como vocês deviam ser, se seriam melhores do que são. Em tempos mais recentes, agradeço pelo apoio e pelo clima de casa, não só a vocês, como ao Alexandre.

À Mimi, pela coragem e afetos sempre presentes. Por encarar de frente a dureza que é viver e formar uma família, e ainda ser estudante e idealista. Eu te amo!

À Tatá, que me fez responsável, agradeço pela existência e por mostrar-me a beleza da simplicidade e a simplicidade de sua beleza. Filhota, perdoe meus erros.

Ao Márcio, grande figura, por fazer ciência como um romântico. Que os sábios lhe iluminem!

Aos companheiros do (e de) grupo: Japa, Adilson, Ricardo... que preenchiam a sala com inteligência e algo mais.

Aos amigos, alguns mais perto, alguns mais longe... com quem discutir física, futebol, política ou seja lá o que for sempre foi um prazer. Vale citar alguns para que se sintam felizes em ler seus nomes: Marcelo (seria mais íntimo chamar de Celinho), Daniel¹, Claudio, Alessandro (digo, Mané), Eduardo, Rodrigo (ou seria Boial?), Marcos...

À “velha guarda”, Bajay, Marquinho, Sieg, Mané, Ivan..., pelos ensinamentos.

Aos “Guardiões do Templo Sagrado” pela valentia e bravura demonstradas na guarda e nas celebrações, e ao Templo Sagrado por nos ter permitido guardá-lo.

Às “meninas da dança” que, cada uma com suas peculiaridades, são pessoas sensacionais e uma galera divertida e interessante. Também àqueles que elas aglutinam ao seu redor, justamente por se enquadrarem na descrição acima.

À galera da antiga, fica o agradecimento ao “povo da bio” e à “galera do identidade”, com as exceções óbvias que nem preciso citar. Destaques para Celi, “Andréas”, Valinhos, Miguel, Juquinha, Helinho, Helinha, Bárbara, Flávia, Tiago, Jarrinho... no primeiro time, Claudinho, Luís Alex e Luísa no segundo.

¹ Agradeço ainda o fator $\frac{1}{2}$, a ajuda estilística nos agradecimentos e outras correções ao longo da dissertação.

Aos bons vizinhos, que o destino deixou por perto e a afinidade trouxe pra dentro de casa.

Cabe ainda o agradecimento àqueles que tornam o mundo, antiteticamente, menos mundano: Chico, Caetano, Gil... (haja reticências).

Ao Fluminense cabe agradecer (enquanto é tempo) pelas alegrias, mesmo que entremeadas de tristezas. Mais que isso, fica minha torcida que as três cores que traduzem tradição possam vencer o câncer que nelas se instalou há tempos...

Dentre aqueles que o acaso fez meus professores, agradeço aos que verdadeiramente o foram.

Aos funcionários da Unicamp cabe meu agradecimento, não a todos, mas aos que fazem esta Universidade funcionar. Em especial meu carinho ao pessoal das bibliotecas.

À Unicamp agradeço (com algumas reservas) por ter me permitido estudar, crescer e ser pai, não necessariamente nesta ordem.

Finalmente agradeço ao CNPq e à FAEP pelos primórdios e à FAPESP pela seriedade com que trata o bolsista, talvez a classe mais bem preparada dentre os subempregados deste país...

Resumo

Introduzimos a Teoria de Yang & Mills clássica com um enfoque geométrico. Vários argumentos são apresentados em favor da “realidade física” dos potenciais, mesmo no nível clássico. Especializamos para o caso do grupo $SU(2)$ sobre espaço-tempo euclidiano. Definimos os Instantons desta teoria e apresentamos um método para sua obtenção.

Como subsídio ao leitor, apresentamos o conceito de Homotopia, incluindo as seqüências exatas de fibração e alguns resultados da homotopia das esferas.

Apresentamos a construção de [Rigas] de representantes de S^3 -fibrados sobre S^4 , que mostramos ser o ambiente matemático natural das soluções instantônicas desta teoria.

Finalmente, adaptamos tal construção e apresentamos um novo método de construção do instanton e do anti-instanton fundamentais e apresentamos caminhos que podem levar à generalização deste método.

Abstract

Classical Yang & Mills Theory is presented from a geometrical viewpoint. Many arguments leading to the “physical reality” of Yang & Mills potentials are given. Further, we specialize to $SU(2)$ Lie group theory over Euclidean space-time. Instantons of this theory are defined and a way to compute them is shown.

It is also given an introduction to Homotopy theory, starting from the very basic concepts and leading to exact sequences of fiber spaces and to some important results about the homotopy of spheres.

The construction of S^3 -bundles over S^4 representants given in [Rigas] is presented. Such mathematical objects are shown to be the natural place of instanton solutions of this theory.

We adapt this construction and show how to find the fundamental instanton and anti-instanton solutions and also we give some possible ways to obtain the generalizations of this result to find multi-instantons.

ÍNDICE

1	A Teoria de Yang & Mills e seus Instantons	1
1.1	Potenciais e Campos	1
1.1.1	Definições	1
1.1.2	Interpretação Geométrica	2
1.1.3	Escolha de <i>Gauge</i>	5
1.1.4	Fibrados Principais $\times$ Fibrados Vetoriais	6
1.2	As Equações de Campo de Yang & Mills	7
1.2.1	As Equações de Campo	7
1.2.2	A Lagrangeana de Yang & Mills	8
1.3	Instantons	9
1.3.1	Definição	9
1.3.2	Classificação Topológica dos Instantons	10
1.3.3	Estabilidade dos Instantons	11
1.4	Cálculo de Instantons	11
1.4.1	Nota Histórica	11
1.4.2	Quatérnios	12
1.4.3	O (Anti-)Instanton Fundamental	14
1.4.4	Os Multi-Instantons	15
2	Homotopia	17
2.1	Homotopia, Grupo Fundamental e outros Grupos de Homotopia	17
2.2	Fibrações	21
2.3	Homotopia de Esferas	24
3	S^3-Fibrados	26
3.1	Os Grupos Simpléticos	26
3.1.1	Ações de $Sp(m)$ sobre $Sp(n)$	26
3.2	Construção dos Fibrados X_n	27
3.3	Construção dos Fibrados $\underline{P}_n$	28
3.4	Construção dos Fibrados $\overline{P}_n$	28
3.5	Classificação dos $\overline{P}_n$	29
3.6	Obtenção Explícita de Representantes de $\overline{P}_n$	31
3.6.1	Representantes de $\underline{P}_3$	31
3.6.2	Representantes de $\underline{P}_4$	32
3.6.3	O Método Recursivo de Rigas	33

4	Novo Método para o Cálculo de Instantons	35
4.1	Instantons Fundamentais e $Sp(2)$	35
4.1.1	$Sp(2)$ como $(S^3 \times S^3)$ -Fibrado sobre S^4	35
4.1.2	A Conexão em $Sp(2) \rightarrow S^4$	36
4.1.3	A Conexão em $S^7 \rightarrow S^4$	37
4.1.4	Transformações de Gauge	39
4.2	Os Multi-instantons	39
4.2.1	Generalização a la Rigas	39
4.2.2	Generalização Formal	40
4.2.3	Generalização por Substituição dos Quatérnios	41

Apresentação

Aqui apresentamos as razões que nos levaram a este trabalho, justificando sua escolha de tema. Naturalmente é um texto bastante pessoal, onde o autor não pode exigir que o leitor concorde com as convicções aqui apresentadas, mas também não pode se desculpar com ele por apresentá-las. Deve ser ressaltado que tal apresentação não é de forma alguma necessária para a leitura do restante do trabalho.

A dissertação que aqui apresentamos é fruto de um projeto Fapesp² na área de Geometria e Topologia, realizado por um estudante de Mestrado em Física. Este caráter híbrido caracterizou toda sua formação, desde o primeiro semestre do curso de Física, quando, junto com outros colegas, foi selecionado para participar da Turma Especial de Matemática.

De lá até aqui, o caminho foi acidentado, mas, ainda assim, permitiu uma formação consistente, com carências que se pretende suprir ao longo dos anos, claro.

A escolha do tema começou quase que por um desses acidentes. Ao estudar os textos padrões de aplicações de Teoria de Grupos à Mecânica Quântica fica patente ao estudante com algum conhecimento da Teoria de Grupos de Lie que esta deveria ser utilizada com mais carinho. Nestes textos, usualmente, prefere-se considerar um grupo de transformações e um espaço de parâmetros. Como em geral interessam integrais sobre os grupos, identificações de conjuntos de medida nula desse espaço de parâmetros são feitas de uma maneira descompromissada, sem dar conta em quanta topologia há em tais identificações. Era necessário então aprofundar conhecimentos em Grupos e Álgebras de Lie, mas também era tempo de se pensar em escrever uma dissertação para o Mestrado.

Veio a proposta instigante do orientador: estudar Grupos e Álgebras de Lie, um trabalho profundo do professor Rigas e a Construção de Instantons e então procurar relacionar tudo isso. É o que foi feito, da maneira melhor que foi possível.

Se há certo atraso na confecção deste trabalho - e há - deve-se a vários motivos, se não todos louváveis, ao menos justificáveis. Primeiro a convicção que o estudo de pós-graduação é muito mais que a produção de uma tese ou dissertação, assim, mesmo longe de quanto gostaria e de quanto seria possível, o estudante sempre procurou manter suas antenas abertas a outras áreas da Física, fazendo cursos, assistindo e promovendo seminários... muitas vezes (ou quase sempre) sobre assuntos sem qualquer relação direta com seu trabalho de tese. Além disso, a escolha tardia deste tema, em substituição a outro que não deixou de ser trilhado, sendo tema da monografia apresentada para o Exame de Qualificação, bem como a escolha de um tema "fora

²Processo 95/09819-2. Agradecemos também pela prorrogação.

de moda”, onde o estudante e o orientador tinham como companhia para discussões livros e artigos, muito mais que colegas.

Finalmente é necessário comentar que a escolha dos capítulos foi feita de maneira a tornar possível ao leitor médio (estudantes de Física ou Matemática, em fim de graduação ou já graduados) acessar o capítulo 4. Assim, temas que não nos pareceram extremamente necessários foram retirados, com o leitor sendo referido à literatura daquela área específica. Um exemplo é a própria Teoria de Álgebras de Lie.

Por fim, resta torcer para que esta dissertação consiga um fim mais nobre do que o de muitas outras: dar um título ao autor e empoeirar nas estantes de bibliotecas...

Introdução

Tratamos neste trabalho dos Instantons da Teoria de Yang & Mills sobre $\mathbb{R}^4$ euclidiano. Como é de se esperar, apresentamos a Teoria de Yang & Mills, seus Instantons e o porquê da escolha de $\mathbb{R}^4$ euclidiano. Tudo isso é feito no capítulo 1, que apresenta também a construção dos Instantons seguindo [Atiyah]. Aproveitamos para apresentar tal teoria sob um ponto de vista geométrico, começando de uma formulação mais próxima aos físicos, introduzindo a geometria passo a passo, evitando o *approach* árido muitas vezes encontrado nos livros que tomam este caminho. Apresentamos ainda vários argumentos em favor da realidade física dos potenciais, e mesmo de sua primazia, sob o ponto de vista geométrico.

O capítulo 2 trata do conceito de Homotopia, cada vez mais presente em áreas cada vez mais diversas da Física. A apresentação é sucinta, como convém à natureza deste trabalho, mas inclui problemas interessantes como a homotopia das esferas. Destinado a leitores que desconhecem o assunto, também deve ser útil àqueles que dele têm um conhecimento difuso, podendo ser saltado pelos que já se sintam a vontade com conceitos como grupos de homotopia e seqüências exatas de fibrações.

Já no capítulo 3, apresentamos da maneira que nos pareceu mais adequada alguns dos resultados de [Rigas]. Trata-se da construção explícita de S^3 -fibrados sobre S^4 (também sobre S^7) que no capítulo 1 mostramos ser o objeto matemático central no cálculo dos Instantons.

Finalmente chegamos ao capítulo 4 que é o desfecho deste trabalho. Embora os outros capítulos tenham algo de original na maneira de apresentar os assuntos, eles são totalmente fruto do aprendizado obtido nas fontes lá citadas. Já o capítulo 4 é de total responsabilidade do autor, fruto de uma *caça* guiada pelos autores já citados e pelo seu instinto. O resultado desta *caça* ainda não foi o esperado. O (anti-)instanton fundamental foi encontrado, mas as demais classes de soluções ainda permanecem escondidas.

Vale esclarecer que tais soluções já foram obtidas nos anos setenta, como é apresentado no capítulo 1, e uma interpretação geométrica lhes foi dada. Mas aqui buscamos um novo caminho, com uma interpretação geométrica mais direta.

Tal problema pode ser visto como um excelente exercício de física-matemática. Aqui não se está buscando uma teoria fundamental, nem tão pouco o entendimento de um sistema físico em particular. Busca-se sim o entendimento formal de uma teoria que nesta segunda metade de século ganhou *status* de teoria fundamental, através do estudo de um caso particular simples, mas extremamente rico.

O trabalho se encerra com algumas conclusões que resultaram dele e uma lista

de referências, que não é nem extensiva nem completa. Qualquer omissão deve ser encarada como esquecimento ou ignorância do autor, pelo que já se inclui um pedido de desculpas.

1. A TEORIA DE YANG & MILLS E SEUS INSTANTONS

Neste capítulo apresentamos o problema físico abordado. Trata-se dos instantons da teoria de *gauge* clássica com simetria $SU(2)$ pura (i.e.: sem campos de matéria) sobre espaço-tempo euclidiano (uma escolha a primeira vista inusitada, mas que será posteriormente justificada). A apresentação seguirá de perto o enfoque geométrico de [Atiyah, Chaps 1,2]. Apresentamos a teoria de Yang & Mills pura, com grupo de Lie G , mantendo sempre em mente que trata-se da generalização do Eletromagnetismo.

1.1. Potenciais e Campos

Começamos por definir potenciais e campos, o que é feito de várias maneiras e notações para permitir que o leitor reconheça alguma delas, pelo menos, e se familiarize com as demais. Em seguida, apresentamos uma interpretação geométrica e definimos transformações de *gauge* neste contexto. A secção se encerra com uma rápida formalização dos conceitos de fibrados principal e vetorial.

1.1.1. Definições

Potenciais e Campos de *gauge* são definidos de maneira muito próxima à encontrada nos livros padrão de teoria de campos ([Ramond], [Itzykson-Zuber] ...).

O conceito mais fundamental de uma teoria de *gauge* é o potencial A_μ (mais adiante ainda defenderemos esta afirmação). É dele que partimos. Os potenciais A_μ são definidos como aplicações do espaço-tempo a valores em $\mathfrak{g}$ (a álgebra de Lie do grupo G). Dado um potencial temos o operador

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu \tag{1.1}$$

referido como a *derivada covariante*¹. Uma rápida inspeção no sentido desta expressão deixa claro que tal operador age sobre funções $f = (f_1, \dots, f_n)$ do espaço-tempo a valores em um espaço de representação n -dimensional de $\mathfrak{g}$, com a ação de $A_\mu(x)$ dada pela representação escolhida.

¹ A construção de tal operador é chamada *prescrição do acoplamento mínimo*.

O campo de gauge $F_{\mu\nu}$ é o operador² definido por:

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = (\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.2)$$

com o último comutador sendo o comutador de $\mathfrak{g}$. No caso do eletromagnetismo, o grupo de gauge é $U(1)$, um grupo abeliano, logo, o último comutador é trivial e o campo $F_{\mu\nu}$ depende linearmente do potencial A_μ . Nesse sentido vemos que a não-comutatividade do grupo de gauge está diretamente ligada à não-linearidade de seu campo. Essa não-linearidade traz problemas e riqueza às teorias de Yang & Mills.

Dada uma situação física sabemos que seu potencial não é bem definido; que escolhido um potencial, transformações de gauge levam a outros potenciais que descrevem tal situação tão bem quanto aquele. Nessa formulação as transformações de gauge são dadas por uma função³ $g : M \rightarrow G$ transformando os potenciais segundo

$$A_\mu \mapsto g^{-1} A_\mu g + g^{-1} (\partial_\mu g) \quad (1.3)$$

mais claramente escrita como

$$\nabla_\mu \mapsto g^{-1} \nabla_\mu g$$

Para entender tais expressões podemos considerar G como um grupo de matrizes. O primeiro termo de (1.3) faz uma operação de similaridade em A_μ . O segundo calcula a derivada de g na direção μ (portanto um vetor do espaço tangente a G no ponto g) e traz seu resultado para a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, vista aqui como o espaço tangente à identidade do grupo G .

Por esta transformação temos

$$F_{\mu\nu} \mapsto g^{-1} F_{\mu\nu} g \quad (1.4)$$

Notamos então que $F_{\mu\nu}$ transforma-se linearmente, enquanto A_μ sofre uma transformação afim, ou seja, A_μ não tem um zero definido.

1.1.2. Interpretação Geométrica

Vamos interpretar a construção acima em termos de uma partícula-teste com graus de liberdade internos e externos.

Consideremos G como o espaço interno de estados (i.e.: espaço de configurações não translacionais) de uma partícula que se move no espaço-tempo. Em geral, não podemos identificar os espaços internos G_x e G_y sobre dois pontos distintos $x \neq y$ do espaço-tempo. Podemos visualizar o espaço de configurações desta partícula como um conjunto de “fibras” G_x sobre os pontos x do espaço-tempo M , como esquematizado na figura 1.1.

No caso de não haver qualquer campo em M , podemos fazer uma identificação das fibras, como que definindo linhas horizontais que chamaremos de secções (figura 1.2).

²Muito cuidado deve ser tomado com essa notação de operadores, lembrando que

$$\partial_\mu (A_\nu f) = (\partial_\mu A_\nu) f + A_\nu (\partial_\mu f)$$

³ M aqui denota o espaço-tempo. Os exemplos mais comuns são o $\mathbb{R}^4$ euclidiano ou o espaço de Minkovski, porém, qualquer variedade (pseudo-)riemanniana é permitida, matematicamente.

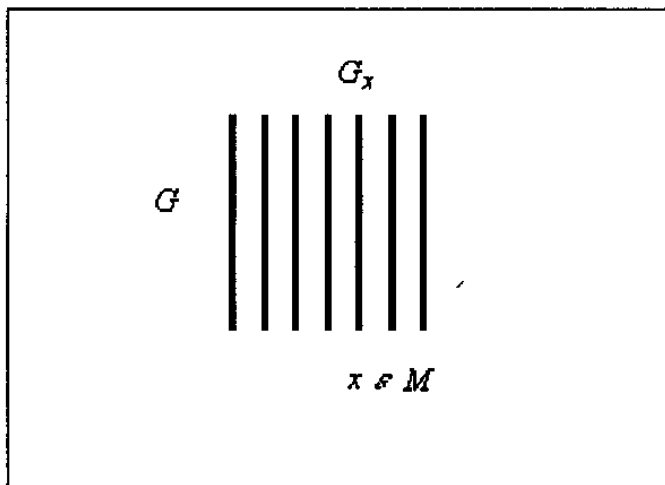


Figura 1.1: Espaço de Configurações sem qualquer identificação das fibras.

Mas quando há campos, podemos visualizá-los como distorcendo o espaço interno da partícula diferentemente ponto a ponto. Assim, não é mais possível se escolher secções coerentemente. Porém, ainda é possível transportar o espaço interno de uma partícula ao longo de seu movimento. É o que chamamos *transporte paralelo*. Mas notemos que se dois pontos forem ligados por dois caminhos diferentes, não há qualquer razão para que os dois transportes paralelos coincidam. Em geral não coincidem!

Trabalhemos uma analogia para visualizar esta diferença: seja uma esfera S^2 , p e p' pontos de seu equador, e u um de seus pólos; seja v um vetor tangente à esfera no ponto p , apontando também na direção equatorial; sejam duas curvas: α que liga p e p' através do equador, e β que liga p a u e u a p' , sempre por meridianos; o transporte paralelo de v por estas duas curvas difere pelo ângulo subtendido pelos meridianos traçados. Michael Berry, em seu famoso trabalho que originou as *fases de Berry*, ilustra este exemplo pedindo para se colocar a mão abaixo da orelha, com o indicador apontando para frente; em seguida, primeiro desloca-se a mão diretamente em direção à boca: o indicador aponta para o lado; depois desloca-se a mão até o alto da cabeça e em seguida até a boca: o indicador aponta para baixo!

Podemos assumir que os transportes paralelos por dois caminhos diferentes estão relacionados pela multiplicação por um elemento $g \in G$. Este elemento pode ser interpretado como um “fator de fase” generalizado. Geometricamente este fator de fase é visto como resultante da curvatura gerada pelo campo na região determinada pela curva fechada (ou pelas duas curvas, como vínhamos considerando). O efeito Aharonov-Bohm pode ser utilizado aqui como argumento em favor da primazia dos potenciais sobre os campos: também é possível haver um tal “fator de fase” sem curvatura. Para isso precisamos trabalhar em uma região não-simplesmente-conexa do espaço-tempo (ou, mais simplesmente, precisamos que a curva fechada sobre a

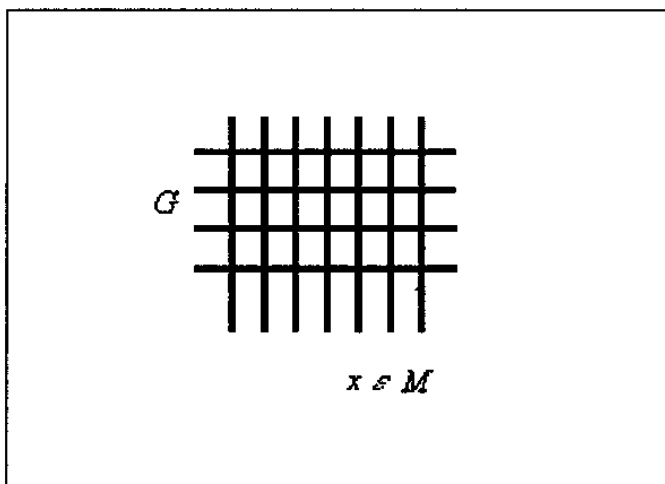


Figura 1.2: Espaço de Configuração com seções.

qual transportamos a fibra não possa ser deformada a um único ponto). Neste caso, podemos ter uma curva em uma região de campo zero, mas com “fator de fase” não trivial. Em resumo, distorções por caminhos infinitesimais são relacionadas a campos, mas distorções por caminhos finitos podem ser de caráter topológico.

Quando passamos a uma imagem infinitesimal da situação acima obtemos um *transporte paralelo infinitesimal* A da fibra G_x para a fibra vizinha. É o que chamamos *conexão*. Além disso, temos a *curvatura infinitesimal* F , que dependerá de duas direções⁴, e pode ser vista como um “fator de fase infinitesimal”. Como sempre, esta imagem infinitesimal pode ser integrada para dar a anterior; assim, é a integral da conexão ao longo de um caminho fechado (ou de dois caminhos distintos) que dá o “fator de fase”.

Podemos agora comparar com a versão sem campo. Em cada ponto x podemos ver que a conexão dá, para cada direção μ , um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, assim temos $A_\mu(x)$ e estabelecemos a identificação entre potenciais e conexões. Do mesmo modo a curvatura, que depende de duas direções em cada ponto x , e toma valores em $\mathfrak{g}$ é dada na forma $F_{\mu\nu}(x)$. Essa curvatura pode ser pensada como o efeito de um campo externo, ou por outro lado podemos identificá-los, considerando que classicamente⁵ um campo não é mais que os efeitos que ele causa. Assim temos a identificação entre

⁴Essas duas direções definem um paralelogramo infinitesimal e a curvatura infinitesimal calculada sobre vetores que definem estas direções é o “fator de fase” desse paralelogramo. Deve-se notar que tal paralelogramo pode ser visto como o comutador desses vetores, e assim relacionar o conceito de curvatura à definição (1.2).

⁵É sempre bom reforçar que este trabalho só apresenta a teoria de *gauge clássica*. No processo de quantização (ou de segunda quantização) o campo “ganha identidade própria” e esse esquema precisa ser repensado. Por outro lado vale lembrar que o bom entendimento da teoria clássica revela-se de grande valor para a compreensão da quântica.

campos de *gauge* e curvaturas. Tal identificação de campo e curvatura é a base da Teoria Geométrica da Gravitação de Einstein, ou da *Geometrodinâmica*, como diz Wheeler; porém, aqui não se trata da curvatura do próprio espaço-tempo, mas da de uma estrutura criada sobre ele. Tal estrutura é o que chamamos *Fibrado Principal*: uma variedade de base M , a fibra G sendo um grupo de Lie compacto que age sobre um espaço total P - o espaço fibrado, propriamente dito - que se projeta sobre M por uma aplicação $\pi : P \rightarrow M$. Para mais detalhes pode-se consultar [Bleecker], [Nakahara] ou [Nash-Sen] ou ainda 1.1.4.

Sejamos um pouco mais cuidadosos com as definições do parágrafo anterior: da maneira como a obtivemos, a conexão $A(x)$ associa "a cada direção" um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. De outra maneira, para $p \in P$ com $\pi(p) = x$, $A(p)$ é uma aplicação do espaço tangente $T_p P$ em $\mathfrak{g}$, sujeita ainda a algumas restrições⁶. Tal aplicação $A(p)$ é linear e depende diferenciavelmente de p . Mas isso é exatamente o que definimos como uma 1-forma de P a valores em $\mathfrak{g}$. Denotamos o conjunto de todas as 1-formas diferenciais de P a valores em $\mathfrak{g}$ por $\Lambda^1(P, \mathfrak{g})$. Uma análise semelhante nos permite perceber que F é uma 2-forma a valores em $\mathfrak{g}$, ou seja, um funcional bi-linear alternado de $T_p P \times T_p P$ em $\mathfrak{g}$. O conjunto destas 2-formas é denotado $\Lambda^2(P, \mathfrak{g})$. Mais adiante nos aprofundaremos mais neste tópico.

Finalmente, com a identificação de potenciais com conexões e de campos com curvaturas, temos um novo argumento para a realidade física dos potenciais, agora de caráter geométrico: conexões são objetos geométricos mais primitivos que curvatura!

1.1.3. Escolha de *Gauge*

Para se trabalhar com potenciais em física, é essencial se ter uma expressão para eles. Mas para isso é necessário se escolher um *gauge*. Isso é o que abordamos agora.

Voltamos a comparar as situações com campo e sem campo. Já vimos que sem campo podemos escolher secções. Uma vez escolhidas estas secções, podemos escrever o potencial em cada ponto usando algo parecido com o "fator de fase" já discutido. Utilizamos $g \in G$ que representa a diferença entre o transporte infinitesimal feito pela conexão A e a identificação coerente representada pela secção. Mas a escolha da secção é realmente uma escolha, e, se outra secção fosse escolhida, outra expressão seria obtida para A . É essa escolha de secção que chamamos *escolha de gauge*, e a mudança de uma escolha a outra é dada pelas *transformações de gauge*.

Assim podemos perceber que o valor de um potencial realmente não tem significado físico próprio, dependendo da escolha de *gauge* realizada. Mas de forma alguma isto pode ser confundido com o potencial não ter significado físico próprio. Para isto podemos comparar com o conceito de relatividade de Galileu: o valor da velocidade de um corpo não tem significado próprio, dependendo da escolha do referencial inercial adotado. Já a aceleração é um invariante de Galileu. No caso do eletromagnetismo temos a mesma relação: o valor do potencial depende da escolha de *gauge*, enquanto o valor do campo é invariante de *gauge*. No caso de uma teoria de *gauge* geral, com

⁶ A passagem a P permite que se defina globalmente a 1-forma de conexão A . Nem sempre isto é possível em M , como ficará claro mais adiante.

grupo não-abeliano⁷, nem mesmo o campo é invariante de *gauge*, transformando-se segundo (1.4). Podemos perceber a similaridade entre a escolha de *gauge* e a escolha de referenciais para o espaço-tempo; a diferença reside que a escolha de *gauge* deve ser encarada como uma escolha de referenciais nas fibras, tendo portanto uma interpretação menos direta para nossa intuição moldada ao espaço-tempo.

1.1.4. Fibrados Principais $\times$ Fibrados Vetoriais

Aqui formalizamos o conceito de fibrado principal e introduzimos os fibrados vetoriais, que serão importantes no cálculo de instantons. Apenas apresentaremos a definição como encontrada em [Bleeker], relacionando com os itens anteriores. Mais detalhes podem ser encontrados na bibliografia já citada.

Definição: Um fibrado principal é dado por $\pi : P \rightarrow M$, P e M variedades (pseudo-)riemannianas, e um grupo de Lie G tais que:

1. G age⁸ diferenciável e livremente em P , pela direita. Denotamos esta ação por $R_g(p) = pg$.
2. A fibra sobre $x \in M$, dada por $\pi^{-1}(x)$, é difeomorfa a G .
3. Para qualquer $x \in M$, existe um aberto $U \subset M$ e uma trivialização local, dada por $T_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, com $T_U(p) = (\pi(p), s_U(p))$, onde $s_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ obedece a $s_U(pg) = s_U(p)g$, para todo $p \in P$ e $g \in G$.

Tal definição sistematiza tudo o que já discutimos sobre o espaço de configuração de uma partícula (no caso do espaço interno ser dado por G). O item 3 nos mostra que as figuras 1.1 e 1.2 devem realmente ser imaginadas localmente. Cada pedaço do fibrado é trivial, e em cada pedaço é possível escolher uma secção s_U . Porém, em geral não há secção global, o que indica a impossibilidade de identificação coerente das fibras ao longo de todo o espaço tempo. A analogia que pode ser feita aqui é com a própria definição de variedades: cada “pedaço” é como um aberto de $\mathbb{R}^n$, porém, globalmente, uma variedade é, em geral, bastante diferente de $\mathbb{R}^n$.

Já os fibrados vetoriais têm como fibras espaços vetoriais. A estrutura é a mesma: temos uma projeção $\pi : P \rightarrow M$, a fibra $\pi^{-1}(x)$ é isomorfa a $\mathbb{E}^n$, um espaço vetorial de dimensão n . Para cada $x \in M$, existe aberto $U \subset M$ e uma trivialização local dada por $T_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{E}^n$, com $T_U(p) = (\pi(p), v(p))$.

Podemos notar que há uma forte ligação entre fibrados vetoriais e fibrados principais: grupos de Lie compactos podem sempre ser pensados como grupos de matrizes agindo sobre espaços vetoriais, e, por outro lado, dado um grupo de Lie, sua álgebra de Lie é um espaço vetorial. Desse modo, dado um fibrado principal podemos sempre construir um fibrado vetorial. A recíproca também vale, caso seja dado um fibrado vetorial e uma métrica em $\mathbb{E}^n$. Neste caso podemos obter um fibrado principal com G as transformações ortogonais de $\mathbb{E}^n$. Muito mais sobre vários espaços fibrados e suas inter-relações do ponto de vista matemático pode ser encontrado em [Steenrod].

⁷É a comutatividade de $U(1)$ que trivializa a transformação (1.4), fazendo o campo eletromagnético invariante de *gauge*.

⁸Para definições de ação diferenciável e livre, ver capítulo de Homotopia.

1.2. As Equações de Campo de Yang & Mills

As equações de campo são apresentadas e discutidas. Como de costume, as equações dinâmicas são obtidas de uma lagrangeana⁹.

1.2.1. As Equações de Campo

Apresentamos as equações de campo de Yang & Mills, que generalizam as equações de Maxwell. Aproveitamos a grande miscelânea de notações e definições encontradas na literatura especializada, para apresentar vários enfoques de certa maneira complementares.

Começamos pelo enfoque de operadores, usado em [Atiyah, 1.3]. As equações de campo no vácuo podem ser dadas por:

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]] + [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] = 0 \quad (1.5)$$

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] = 0 \quad (1.6)$$

Tais equações, apesar de sua forma muito semelhante, são bastante diferentes: enquanto (1.5) são identidades automaticamente satisfeitas devido às definições de ∇_μ e de $F_{\mu\nu}$, conhecidas em geometria diferencial por *identidades de Bianchi*¹⁰; as (1.6) são equações dinâmicas (que restringem as conexões possíveis). Fisicamente podemos considerar as (1.5) como uma consequência do fato de considerarmos os campos como derivados de potenciais, enquanto as (1.6) relacionam entes potenciais com a situação física a ser descrita.

Quando consideramos cargas e correntes, as (1.5) dão as equações homogêneas, enquanto as (1.6) dão as equações inhomogêneas de campo.

Mais uma vez reforçamos a importância dos potenciais na teoria de Yang & Mills. A equação (1.6) só pode ser escrita como uma equação para $F_{\mu\nu}$ (sem qualquer menção ao potencial A_μ) no caso de grupo de *gauge* abeliano, como $U(1)$ do eletromagnetismo.

Lembramos agora que já interpretamos A como 1-formas em P , assim como F como 2-formas em P (na 1.1.2). Com efeito, na linguagem de formas (ver [Nash-Sen] ou [Bleecker]), temos

$$F = DA = dA + A \wedge A \quad (1.7)$$

D é dito a *derivada exterior covariante* (é importante notar a semelhança dos operadores D e ∇ , definido pela (1.1). O primeiro age em 1-formas e o segundo em funções, que identificamos com 0-formas.). Seguem então as equações homogêneas¹¹:

$$DF = 0 \quad (1.8)$$

Já as equações inhomogêneas são dadas na forma

$$D * F = 0 \quad (1.9)$$

⁹É sempre bom ter em mente a máxima: "Dar uma Teoria de Campos é dar uma Lagrangeana".

¹⁰Em verdade, o segundo grupo das identidades de Bianchi.

¹¹Por definição do operador D tem-se $DF = dF + A \wedge F - F \wedge A$.

onde $*$ é o operador estrela de Hodge, que faz a dualidade $\Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{n-k}(M)$, com M uma variedade n -dimensional. Expressas dessa maneira as equações de campo (no vácuo) dizem que F é uma dois forma covariantemente fechada ($\mathbf{D}F = 0$) e cofechada¹² ($\mathbf{D} * F = 0$).

Formas que são fechadas (i.e.: $d\omega = 0$) e cofechadas ($d * \omega = 0$) são ditas *harmônicas*. As formas harmônicas são o objeto de estudo da *teoria de Hodge*, um belo capítulo da matemática [Warner]. As teorias de Yang & Mills no vácuo podem ser vistas como uma generalização da teoria de Hodge para fibrados principais.

Apresentadas como (1.8) e (1.9) as equações de campo tomam uma forma mais compacta e, num certo sentido, de mais fácil interpretação.

1.2.2. A Lagrangeana de Yang & Mills

Apresentamos aqui a lagrangeana que gera as equações de campo (1.6) ou (1.9). Uma vez mais apresentamos em mais que um padrão de notação, procurando aproveitar as vantagens de cada um deles em particular.

A maneira mais usual de definir a lagrangeana é escrever a ação como¹³

$$S = \frac{-1}{4} \int_M \text{tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^4x \quad (1.10)$$

onde usamos o levantamento de índices do cálculo tensorial e d^4x é um elemento de volume no espaço-tempo. Essa ação é invariante por transformações de *gauge*, devido à propriedade cíclica do traço.

Para obter a equação de campo devemos ter $\delta S = 0$. Para isso é mais prático reescrever tal ação por

$$S(A_\mu, g^{\mu\nu}) = \frac{-1}{4} \int \text{tr} (F_{\rho\sigma} g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu}) d^4x$$

e fazendo variações arbitrárias de A_μ obter (1.6).

Mas novamente a notação de formas se mostra muito interessante, e podemos reescrever tal ação como

$$S = \frac{-1}{2} \int_M \text{tr} (F \wedge *F) \quad (1.11)$$

Lembremos que F é uma 2-forma em M , e $*F$ é também 2-forma; logo $F \wedge *F$ é uma 4-forma proporcional ao elemento de volume. Mais uma vez devemos realizar variações em A . Realizemos variações numa “direção” bem definida, embora arbitrária: $A \mapsto A + tB$. Temos então $F^t = d(A + tB) + A \wedge (A + tB)$. Obtemos

$$\frac{d}{dt} F^t \big|_{t=0} = dB + A \wedge B = DB$$

¹²Mais precisamente, o operador $\mathbf{D}*$ é conjugado hermitiano do operador $\mathbf{D}$, por isso chamado *codiferencial exterior covariante* [Bleecker, 4.2.8].

¹³No caso do Eletromagnetismo, escolhido um referencial e um *gauge* essa densidade de ação (i.e.: o integrando de 1.10) é proporcional a $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$.

notemos então que $\text{tr}(F \wedge *F) = \langle F, F \rangle \nu$ com ν a n -forma de volume. Com isso:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \text{tr}(F \wedge *F) \right) = \langle F, DB \rangle \nu$$

agora fazemos uso do fato de $*D*$ ser o hermitiano conjugado de D , com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Com isso

$$\frac{d}{dt} S = - \int_M \langle F, DB \rangle \nu = - \int_M \langle *D * F, B \rangle \nu$$

devido à arbitrariedade de B obtemos (1.9).

1.3. Instantons

Finalmente apresentamos os instantons da teoria de Yang & Mills, embora a sua obtenção explícita ainda vá esperar a próxima secção.

1.3.1. Definição

Definimos instantons no contexto da teoria de Yang & Mills e apresentamos um argumento que impede a obtenção de instantons assim definidos no espaço de Minkowski.

Em resumo, nosso problema em teoria de Yang & Mills no vácuo é achar potenciais A_μ (ou conexões, como já foi explicado) tais que as duas equações abaixo sejam obedecidas:

$$DF = 0 \tag{1.12}$$

$$D * F = 0 \tag{1.13}$$

Polyakov então sugere (em [Polyakov]) que procuremos soluções do tipo

$$F = \lambda * F \tag{1.14}$$

com λ constante, de modo a assegurar que (1.12) e (1.14) impliquem (1.13).

Notemos a restrição a que λ está sujeito: o funcional estrela de Hodge obedece $** = g$, $g = \det g^{\mu\nu}$, então temos

$$F = \lambda * F = \lambda^2 **F = \lambda^2 g F$$

assim $\lambda^2 = g^{-1}$. No caso de $\mathbb{R}^4$ euclideano temos $\lambda = \pm 1$, enquanto no caso do espaço de Minkowski $\lambda = \pm i$. Mas notemos que se F toma valores em $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, iF não pode também tomar valores em $\mathfrak{su}(2)$. Ficamos restritos então ao caso euclideano. Tal restrição torna difícil uma interpretação física imediata do significado (ou da utilidade) de tais instantons. Porém, com alguns “malabarismos teóricos” (passagem a tempo imaginário) podem-se obter resultados interessantes como uma descrição do fenómeno de tunelamento entre dois estados de vácuo degenerados, porém separados por uma “barreira de potencial”. Este tema está fora do escopo do presente trabalho, podendo ser encontrado em [Rajaraman] ou em outros trabalhos da literatura especializada.

1.3.2. Classificação Topológica dos Instantons

A topologia do fibrado principal obtido quando calculamos um instanton define o número instantônico, ou carga topológica, Q . Vamos entender tal afirmação.

Uma exigência natural de se fazer em teorias de *gauge* é que as soluções tenham ação finita. Para isso precisamos ter $F \rightarrow 0$ em algum limite, por exemplo $|x| \rightarrow \infty$, de modo que possamos calcular as integrais (1.10) ou (1.11). Com isso temos $A \rightarrow g^{-1}dg$, neste mesmo limite.

Essa regularidade exigida em F permite que estendamos a conexão de $\mathbb{R}^4$ a S^4 , pelo processo chamado compactificação¹⁴. Com isso nosso instanton é um S^3 -fibrado sobre S^4 . Tais fibrados são classificados por $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Podemos apresentar dois argumentos equivalentes para que haja tal classificação:

Primeiro consideremos o limite $A \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} g^{-1}dg$. Tal limite $|x| \rightarrow \infty$ pode ser visto como uma esfera S^3 de raio arbitrariamente grande em $\mathbb{R}^4$. Duas aplicações $g : S^3 \rightarrow S^3$ que não sejam homotópicas geram duas conexões que não podem ser levadas uma à outra por transformações infinitesimais. Isso acontece justamente porque os fibrados principais nos quais elas “vivem” são topologicamente distintos.

Outra maneira de ver a mesma coisa é já considerarmos a teoria feita sobre S^4 . S^4 é coberta por dois abertos triviais (dois hemisférios), colados ao longo do equador, que deve ser visualizado como uma esfera S^3 . Fibrados diferentes são obtidos por colagens diferentes. Como cada hemisfério é retrátil, a restrição do fibrado a estes é trivial. Toda a topologia então fica dada por uma *função de transição* que a cada ponto do equador associa um difeomorfismo $g(x) : S^3 \rightarrow S^3$. Tal difeomorfismo é dado por um elemento do grupo $SU(2)$ e dois fibrados assim construídos são equivalentes se suas funções de transição $g : S^3 \rightarrow S^3$ são homotópicas. A classificação é feita então por $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$.

(Note que tais argumentos podem ser generalizados para qualquer G -fibrado sobre S^{n+1} , com a classificação dada por $\pi_n(G)$).

Mas há uma vantagem a mais, dada pelo primeiro número de Pontrjagin. Tal número é um invariante topológico obtido pela integral da primeira classe de Pontrjagin, que é um elemento de $H^4(M, \mathbb{Z})$, isto é, da quarta classe de homologia com coeficientes inteiros [Milnor-Stasheff]. Tal número, no caso de S^3 -fibrados sobre S^4 coincide com a classe de homotopia, sendo assim uma maneira de se conhecer a topologia (i.e.: a classe de homotopia a que ele está associado) do fibrado a partir das expressões

¹⁴ Aqui podemos apresentar um novo argumento - agora topológico - para que não haja soluções como as aqui descritas no espaço de Minkowski: *não existe S^4 de Minkowski!*

Tal afirmação pode ser assim demonstrada: para cada ponto de S^4 com métrica de assinatura (1,3) toma-se o vetor tipo tempo unitário e ortogonal a todos vetores tipo espaço (escolha de orientação subentendida). Como S^4 é orientável, tal escolha define um campo global não-nulo em S^4 . É bem sabido que não existe um tal campo (não se pode “pentear” S^n com n par - a existência de um tal campo impõe que a característica de Euler-Poincaré $\chi = 0$, mas S^n com n par tem $\chi = 2$); logo não podemos impor uma métrica lorentziana a S^4 .

Como vemos não é possível fazer uma compactificação do espaço de Minkowski mais um ponto a S^4 . Podemos conjecturar que uma razão física para isso seja que os infinitos espaciais e temporais sejam necessariamente distintos, só sendo permitidas compactificações como $S^1 \times S^3$.

Agradecemos ao professor Francesco Mercuri por chamar nossa atenção a este argumento.

locais do campo. Ele é dado por ¹⁵:

$$Q = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) = \frac{-1}{32\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) d^4x \quad (1.15)$$

1.3.3. Estabilidade dos Instantons

Mostramos a estabilidade de soluções instantônicas para qualquer Q .

A análise acima refere-se apenas à inequivalência de certas soluções, porém, ela não garante a existência de soluções instantônicas para todos os fibrados. Usando as 2-formas $G_{\pm} = F \pm *F$, obtemos

$$S \geq 4\pi^2 |Q| \quad (1.16)$$

que mostra que dado um fibrado (topologicamente dado Q), a ação de qualquer campo é pelo menos igual à do instanton daquele fibrado. Mais que isso, mostramos que tal desigualdade é estrita, ou seja, a ação apenas admite este valor quando $F = \pm *F$. Isso mostra que os instantons são as soluções de mais baixa ação, portanto as mais importantes quando se faz quantização por integral de trajetórias; e estáveis, no sentido que a segunda variação da ação é não negativa [Lawson Jr].

1.4. Cálculo de Instantons

Apresentamos aqui o método desenvolvido no final da década de 1970 para a construção dos instantons. Partimos da construção do instanton e do anti-instanton fundamentais e depois generalizamos tal procedimento para obter os multi-instantons. Novamente a referência principal é [Atiyah, Chap 2].

1.4.1. Nota Histórica

Embora tal trabalho não pretenda ser um trabalho de revisão completa do tema, apresentamos aqui um pouco da história dos instantons.

Tal história começa com [Polyakov] que propõe a busca de soluções (anti-)auto-duais¹⁶, ou seja, potenciais tais que $F = \pm *F$, que por isso chamamos esta de *equação de Polyakov*. Nas páginas seguintes do mesmo periódico o trabalho [Belavin et al] apresenta a primeira solução instantônica para as equações de Yang & Mills sobre o espaço-tempo euclídeo. É curioso notar que já neste trabalho Polyakov agradece a S.P. Novikov por ter-lhe explicado conceitos topológicos.

Rapidamente o assunto ganhou o ocidente. Contribuições importantes foram dadas por G. 't Hooft, E. Witten, R. Jackiw, C. Nohl, C. Rebbi, R.S. Ward, M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, I.M. Singer, V.G. Drinfeld e Yu.I. Manin, entre outros, ainda na década de setenta.

¹⁵ Novamente vale a comparação com o Eletromagnetismo. Neste caso, escolhidos um referencial e um *gauge*, este integrando é proporcional a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$. Vemos então que aqui faz-se uso da generalização dos dois invariantes do Campo Eletromagnético, um para a ação, outro para a *carga topológica*

¹⁶ Este é o termo usual, o qual adotaremos, embora auto-(anti-)dual nos pareça mais adequado.

Logo foram encontradas soluções para qualquer número instantônico e o problema passou a ser saber qual a degenerescência de tais soluções. Os cinco graus de liberdade da solução mais simples foram primeiro generalizados a $5|k|$ e depois a $8|k| - 3$, com o teorema do índice de Atiyah-Hitchin-Singer. O passo seguinte foi mostrar que estas eram realmente todas as soluções possíveis, o que foi obtido com a construção de Horrock no *twistor space* de R. Penrose.

1.4.2. Quatérnios

Números e formas quaterniônicos mostram-se ferramentas muito úteis na obtenção de instantons. Passamos a uma rápida apresentação de suas propriedades.

Números Quaterniônicos

Os números quaterniônicos foram criados por Hamilton como uma extensão dos números complexos. Apresentamos aqui definições básicas e algumas propriedades que nos serão muito úteis.

Ao invés de uma unidade imaginária i , Hamilton propôs-se a trabalhar com três: i, j, k , tais que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Para fechar a álgebra quaterniônica, que denotamos por $\mathbb{H}$, Hamilton usou as multiplicações cíclicas $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Segue então que os quatérnios não são comutativos.

Um número quaterniônico geral q é dado por quatro números reais x_i :

$$q = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$$

A exemplo dos números complexos, podemos associar um quatérnio conjugado

$$\bar{q} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k$$

É importante notar que $\overline{(ab)} = \bar{b}\bar{a}$. Também podemos definir uma norma positiva definida¹⁷, com quadrado dado por:

$$|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q$$

e podemos notar que todo quatérnio não nulo tem seu inverso dado por

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

Com tudo isso, os quatérnios de norma¹⁸ unitária formam um grupo pela multiplicação quaterniônica, denotado $Sp(1)$. Geometricamente este grupo é S^3 .

Também a exemplo dos números complexos, x_1 é dita a parte real de q e $q - x_1$ sua parte imaginária. Por vezes esta parte imaginária também é chamada parte vetorial e q pode ser denotado $x_1 + \vec{X}$, identificando os números i, j, k com os respectivos versores de $\mathbb{R}^3$.

¹⁷Que coincide com a norma euclidiana ao identificarmos $\mathbb{H}$ e $\mathbb{R}^4$.

¹⁸Também chamada módulo.

$\mathbb{H}$ pode também ser identificado com $\mathbb{C}^2$, o espaço dos pares de números complexos. Fazemos:

$$q = z_1 + z_2 j, \text{ com } z_1 = x_1 + x_2 i \text{ e } z_2 = x_3 + x_4 i$$

e podemos então interpretar a multiplicação quaterniônica como um operador linear sobre vetores de $\mathbb{C}^2$. Com efeito:

$$(w_1 + w_2 j)(z_1 + z_2 j) = w_1 z_1 - w_2 \bar{z}_2 + (w_1 z_2 + w_2 \bar{z}_1) j$$

e assim, o produto por q à direita pode ser visto como a matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

agindo sobre vetores linha. Assim, a álgebra dos quaternions $\mathbb{H}$ pode ser identificada com uma subálgebra das matrizes 2×2 complexas, $Sl(2, \mathbb{C})$. Em particular temos as identificações:

$$i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que por esta inclusão a norma dos quaternions vai no determinante das matrizes. Com isso $Sp(1)$ fica identificado com $SU(2)$. A álgebra de Lie deste grupo pode então ser identificada com a álgebra dos quaternions imaginários puros, gerada por i, j, k .

Formas Quaterniônicas

Mostramos como formas (anti-)auto-duais aparecem naturalmente em $\mathbb{H}$. Com isso passaremos então a procurar conexões em $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Identificamos o espaço-tempo euclídeo $\mathbb{R}^4$ com os quaternions $\mathbb{H}$. Também identificamos a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ com os quaternions imaginários puros. Vamos então procurar uma conexão A sobre os quaternions a valores nos quaternions imaginários puros. Uma tal conexão pode ser escrita como

$$A(q) = A_\mu(q) dx^\mu$$

com $A_\mu(q)$ quaternion imaginário puro.

Mas até aí, não usamos em nada a álgebra quaterniônica. Vamos começar a fazê-lo agora. Primeiro notemos que podemos definir

$$dq = dx^1 + dx^2 i + dx^3 j + dx^4 k$$

bem como

$$d\bar{q} = dx^1 - dx^2 i - dx^3 j - dx^4 k$$

a exemplo do que fazemos com os complexos. Dada qualquer função $f(q)$ a valores quaterniônicos, temos uma maneira canônica de obter um potencial de Yang & Mills $SU(2)$, fazendo:

$$A(q) = \text{Im} \{ f(q) dq \} = \frac{1}{2} \{ f(q) dq - d\bar{q} \overline{f(q)} \} \quad (1.17)$$

Podemos notar desde já que

$$dq \wedge d\bar{q} = -2 \left\{ \begin{aligned} &(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) i + (dx^1 \wedge dx^3 + dx^4 \wedge dx^2) j \\ &+ (dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3) k \end{aligned} \right\}$$

é auto-dual, enquanto $d\bar{q} \wedge dq$ é auto-anti-dual. Além disso, ambas são 2-formas quaterniônicas imaginárias puras. É exatamente isso que buscamos para os instantons! Assim, já sabemos que qualquer conexão cuja curvatura se escreva como

$$F(q) = r(q) dq \wedge d\bar{q} \text{ (ou } F(q) = r(q) d\bar{q} \wedge dq \text{)}$$

será um (anti-)instanton! Notemos que na expressão acima $r(q)$ é uma função a valores reais.

Lembrando então da expressão (1.7):

$$F = dA + A \wedge A$$

para A como em (1.17) temos

$$F = \text{Im} \{ df \wedge dq + f dq \wedge f dq \}$$

1.4.3. O (Anti-)Instanton Fundamental

Apresentamos o anti-instanton e o instanton fundamentais e discutimos algumas de suas propriedades.

Vamos então buscar um *ansatz* baseado na discussão anterior. Seja

$$A(q) = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{q} dq}{1 + |q|^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{q} dq - d\bar{q} q}{1 + |q|^2} \right\} \quad (1.18)$$

um pouco de manipulação algébrica leva a

$$F(q) = \frac{d\bar{q} \wedge dq}{(1 + |q|^2)^2}$$

que mostra que F é anti-auto-dual, portanto A como em (1.18) é uma conexão anti-instantônica. Vamos estudá-la melhor.

Primeiro vamos decompor $A(q)$ para melhor compreendê-la:

$$\begin{aligned} A_1(q) &= \frac{-x_2 i - x_3 j - x_4 k}{1 + |q|^2} \\ A_2(q) &= \frac{x_1 i - x_4 j + x_3 k}{1 + |q|^2} \\ A_3(q) &= \frac{x_4 i + x_1 j - x_2 k}{1 + |q|^2} \\ A_4(q) &= \frac{-x_3 i + x_2 j + x_1 k}{1 + |q|^2} \end{aligned}$$

Agora vamos estudar a condição assintótica de (1.18). Temos

$$A(q) \xrightarrow{|q| \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\bar{q} dq}{|q|^2} \right\} = \operatorname{Im} \{ q^{-1} dq \}$$

Podemos notar que na notação de (1.17) temos $f(q) \xrightarrow{|q| \rightarrow \infty} q^{-1}$. Computando diretamente o número instantônico de (1.17) obtemos $Q = -1$. Tornamos assim explícita a relação entre a classificação homotópica dos fibrados, dada por Q , e a classe de homotopia da função $f : S^3 \rightarrow S^3$.

A distinção entre dualidade e anti-dualidade vem de uma escolha de orientação no espaço-tempo, que define o sinal do funcional $*$. A transformação $q \mapsto \bar{q}$ inverte a orientação de S^3 . Assim, basta aplicá-la para obtermos o instanton fundamental, dado por:

$$A(q) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{q d\bar{q}}{1 + |q|^2} \right\} \quad (1.19)$$

É evidente que a transformação $q \mapsto \mu(q - b)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{H}$ mantém a (anti-)auto-dualidade de (1.18) e (1.19). Tal transformação, que deve ser interpretada como um deslocamento por b e uma mudança de escala por μ , dá a degenerescência de dimensão 5 destas soluções. Por razões que depois serão entendidas, preferimos inverter¹⁹ a transformação acima, usando

$$q \mapsto \lambda(b - q)^{-1} \quad (1.20)$$

Mas não haveria outras transformações que também mantivessem a estrutura instantônica? De fato, qualquer transformação conforme própria mantém tal estrutura. Porém, muitas delas levam o (anti-)instanton em “outro” *gauge*-equivalente ao primeiro. Ao desconsiderar tais transformações, resta como quociente apenas as aqui apresentadas (para detalhes, ver [Atiyah, pp. 23-4]).

1.4.4. Os Multi-Instantons

Mostramos a construção de instantons com qualquer número instantônico Q .

Passamos agora a $\mathbb{H}^k$, o produto cartesiano de k cópias de $\mathbb{H}$. Usamos a conhecida expressão (1.18) generalizada para

$$A(q) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{u^* du}{1 + \|u\|^2} \right\}$$

com u um vetor coluna de $\mathbb{H}^k$, u^* seu transposto conjugado e $\|u\|$ a sua norma euclidiana ($\|u\|^2 = u^* u$).

Agora consideramos

$$u(q) = \left[\lambda (B - qI)^{-1} \right]^*$$

que para ser a generalização certa de (1.20) precisa que o vetor linha $\lambda \in \mathbb{H}^k$ e a matriz B obedeçam às condições:

¹⁹E trocar o sinal.

1. $B^*B + \lambda^*\lambda$ é uma matriz real.

2. A matriz $\begin{pmatrix} B - qI \\ \lambda \end{pmatrix}$ tem posto máximo (igual a k).

2. HOMOTOPIA

Neste capítulo apresentamos o conceito de homotopia e os invariantes topológicos diretamente ligados a ele. A primeira secção é introdutória; as demais tratam de temas um pouco mais avançados. Para os nossos intuitos a apresentação aqui fornecida deve ser suficiente mesmo para o leitor que desconheça o tema. Muito mais porém pode ser encontrado em [Hu] ou em [Mercuri, Cap 1], ou ainda em [Nash-Sen, Chap 3,5].

2.1. Homotopia, Grupo Fundamental e outros Grupos de Homotopia

Nesta secção discutimos o conceito de *homotopia*, partindo de *homotopia de funções*, passando pelo *grupo fundamental de um espaço topológico* e chegando aos diversos *grupos de homotopia*.

O primeiro conceito importante é o de homotopia de funções. Dadas duas funções contínuas $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$, X, Y espaços topológicos¹, estas funções são ditas homotópicas (e denotamos $f_0 \sim f_1$) se existe $H : X \times I \rightarrow Y$ contínua tal que $H(x, 0) = f_0(x)$ e $H(x, 1) = f_1(x)$, onde $I = [0, 1]$. H é dita uma homotopia entre f_0 e f_1 e pode ser vista como um caminho ligando as duas funções no espaço de funções $C^0(X, Y)$.

A relação de *ser homotópica* a é claramente uma relação de equivalência, induzindo um quociente em $C^0(X, Y)$. Muitas vezes, porém, tal relação é muito fraca e o quociente é trivial (para X ou Y convexo, por exemplo, pois nesse caso toda função $f : X \rightarrow Y$ é homotópica a uma função constante). Mostra-se necessário então o conceito de homotopia relativa.

Embora não seja necessário, vamos nos restringir à homotopia de curvas $c : I \rightarrow X$. Aqui o conceito que se mostra mais útil é o de homotopia de caminhos, um caso particular de homotopia relativa: sejam $c_0, c_1 : I \rightarrow X$ dois caminhos ligando x e y (i.e.: $c_0(0) = c_1(0) = x$ e $c_0(1) = c_1(1) = y$). Tais caminhos são ditos homotópicos relativos a x e y se existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = c_0(s)$, $H(s, 1) = c_1(s)$, $H(0, t) = x$ e $H(1, t) = y$ (ver figura 2.1). Não é difícil ver que tal relação de equivalência é muito mais restritiva que a anterior. Seja X , por exemplo, o “plano furado” $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dos três caminhos mostrados na figura 2.2 não há dois que sejam homotópicos! Percebemos então que a homotopia de caminhos é capaz de “perceber o buraco” do plano, já que em $\mathbb{R}^2$ não apenas estes três como quaisquer dois caminhos ligando x a y são homotópicos.

¹Podem ser variedades diferenciáveis ou qualquer outra categoria também. Nestes casos é conve-

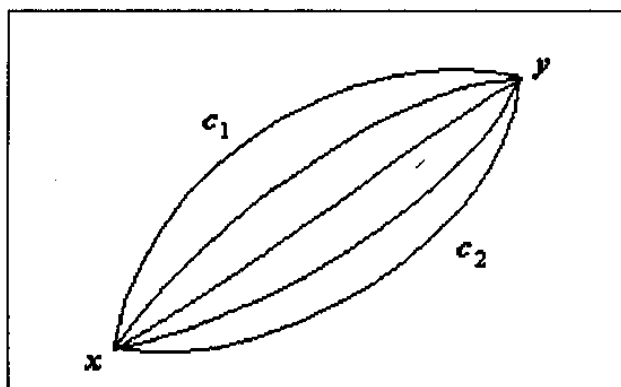


Figura 2.1: Esquema de Homotopia entre os caminhos c_1 e c_2 .

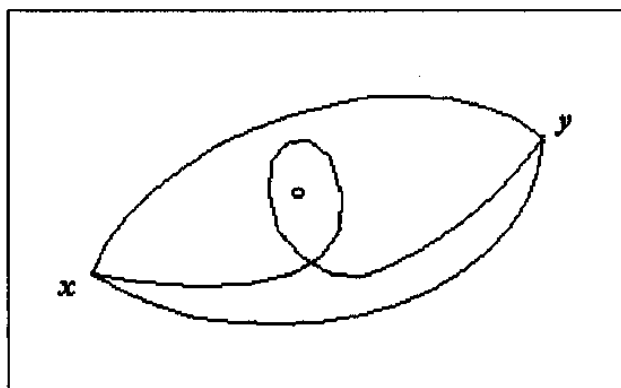


Figura 2.2: Três caminhos não homotópicos em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

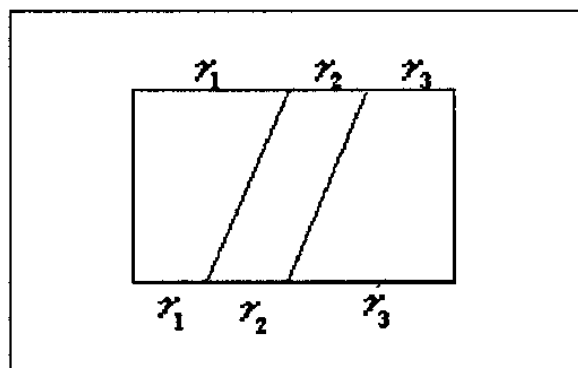


Figura 2.3: Representação esquemática de Homotopia entre $(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$ e $\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3)$.

Passamos agora para a homotopia de laços. Um laço² é um caminho ligando um ponto a ele mesmo, ou seja, é o caso $y = x$. A vantagem de trabalharmos com laços é que mantemos toda a riqueza da homotopia de caminhos e ainda ganhamos a possibilidade de compor laços: sejam dois laços $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$, com $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = x$, podemos definir o laço $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2$ dado por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2s-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

que pode ser pensado como primeiro percorrer γ_1 e depois γ_2 . É fácil ver que com a definição dada tal composição de laços não é associativa, ou seja, $\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3) \neq (\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$, porém é muito fácil mostrar que $\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3) \sim (\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$ (ver figura 2.3). É fácil verificar ainda que se $a_1 \sim a_2$ e $b_1 \sim b_2$ então $(a_1 \star b_1) \sim (a_2 \star b_2)$, ou seja, $\star$ induz um produto entre as classes de equivalência por homotopia (relativa a x)³. O laço constante $\gamma_e(s) = x$ é dito trivial e a sua classe de equivalência é um elemento neutro em relação ao produto $\star$: $(\gamma \star \gamma_e) \sim (\gamma_e \star \gamma) \sim \gamma$. Finalmente, se γ é um laço, temos $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1-s)$ tal que $(\gamma^{-1} \star \gamma) \sim (\gamma \star \gamma^{-1}) \sim \gamma_e$. Assim, as classes de equivalência dos laços sobre um espaço topológico com o produto induzido por $\star$ formam um grupo chamado *grupo fundamental* desse espaço ou ainda *primeiro grupo de homotopia*, denotado $\pi_1(X)$, ou $\pi_1(X, x)$ para enfatizar o ponto base x (porém, para X conexo por caminhos todos $\pi_1(X, y)$ são conjugados - logo isomorfos - o que nos permite falar de $\pi_1(X)$).

O esquema da figura 2.3 é uma maneira muito prática de representar homotopias e composições de laços. Nele podemos ver na horizontal inferior a composição $(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$, na horizontal superior $\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3)$ e na vertical a representação de uma homotopia entre estes dois laços. Vale notar que as linhas verticais são inteiramente mapeadas no ponto base x .

niente exigir mais sobre as homotopias, como homotopias diferenciáveis...

²É comum também a utilização do termo inglês *loop*.

³É muito comum omitir-se o termo relativa a ... que deve ser subentendido quando necessário.

Essencial no conceito de homotopia é o seu comportamento com relação a aplicações $f : X \rightarrow Y$. Laços de X são levados a laços de Y , assim como homotopias entre laços de X são levadas em homotopias entre laços de Y . Dessa forma, f induz $f_{\#1} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$. É imediato que se f é um homeomorfismo então $f_{\#1}$ é isomorfismo de grupos. Neste sentido o grupo fundamental é um invariante topológico do espaço: espaços com grupos fundamentais não isomorfos não podem ser homeomorfos! Esse é o papel principal da topologia algébrica: criar invariantes que permitam classificar os espaços topológicos.

Se X tem grupo fundamental trivial (ou seja, todos os laços são homotópicos ao laço trivial) - o que denotamos por $\pi_1(X) = 0$ - então X é dito *simplesmente conexo*, ou *1-conexo*.

É importante notar que, embora o ponto base seja formalmente importante nas definições⁴, ele não desempenha papel importante algum (trabalhamos com X conexo por caminhos). Com isso, podemos visualizar os laços como aplicações do círculo S^1 no espaço X . Tal visualização permite obter os demais grupos de homotopia de maneira heurística.

Podemos então definir o segundo grupo de homotopia do espaço X , $\pi_2(X)$, como o grupo formado pelas classes de equivalência por homotopia das aplicações $S^2 \rightarrow X$. Para entendermos o produto neste grupo, porém, precisamos da definição formal um pouco mais abstrata.

Denotamos por $\Omega^1(X)$ o espaço dos laços de X . $\Omega^1(X)$ é um espaço topológico. Faz sentido então falarmos de laços em $\Omega^1(X)$. Podemos então definir $\pi_2(X) = \pi_1(\Omega^1(X))$.

Um pouco de topologia nos permitirá relacionar as duas definições apresentadas. Para visualizarmos os laços como aplicações do círculo S^1 em verdade fizemos uso da seguinte construção: seja o intervalo $I = [0, 1]$. Identifiquemos os pontos da fronteira (ou seja, consideremos 0 e 1 como o mesmo ponto). O espaço obtido após tal identificação é homeomorfo a S^1 . Podemos visualizar isto se considerarmos um barbante e unirmos seus extremos. Do mesmo modo fazemos com o quadrado $I^2 = I \times I$. Ao identificarmos todos os pontos de sua fronteira como um único ponto, obtemos um espaço homeomorfo à esfera S^2 . Esta construção também pode ser visualizada com ajuda da figura 2.4 ou se imaginarmos como possível unirmos todos os pontos da extremidade de uma folha de papel. É interessante notar que na visualização nos utilizamos de uma dimensão a mais, na qual imaginamos o "movimento" para a identificação dos pontos da fronteira.

Embora a visualização se torne muito mais abstrata, tal construção pode ser continuada indefinidamente com I^n tendo todo seu bordo identificado a um único ponto sendo homeomorfo a S^n , a esfera n dimensional (que pode ser pensada com a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Com esta construção em mente, os mapas $S^2 \rightarrow X$ que constituem $\pi_2(X)$ podem ser vistos como mapas $I^2 \rightarrow X$ tais que todo o bordo ∂I^2 é mapeado em um único ponto. Mas tais mapas podem ser vistos como homotopias entre o laço trivial e ele mesmo, que são os laços de $\Omega^1(X)$ tendo como ponto base o laço trivial. Assim temos

⁴ É a existência do ponto base que permite definir o produto $\star$.

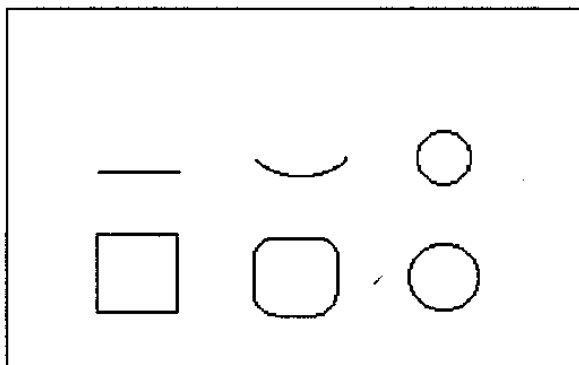


Figura 2.4: Visualização do Homeomorfismo $I^n / \partial I^n \cong S^n$ para $n = 1, 2$.

a equivalência das duas definições de $\pi_2(X)$ que apresentamos. Todo espaço 1-conexo com π_2 trivial é dito *2-conexo*.

Da mesma forma podemos definir $\pi_n(X)$ ou como as classes de equivalências dos mapas $S^n \rightarrow X$ ou como $\pi_{n-1}(\Omega^1(X))$. Se um espaço X tem $\pi_k(X) = 0$ para $k \leq n$, X é dito *n-conexo*. Segue também que dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ temos a aplicação $f_{\#n} : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ induzida por f . $\pi_n(X)$ também são invariantes topológicos no sentido que se $\pi_n(X)$ não é isomorfo a $\pi_n(Y)$ então X não pode ser homeomorfo a Y .

2.2. Fibrações

Grupos de homotopia não são fáceis de calcular. Uma arma muito poderosa são as seqüências exatas de fibrações, largamente usadas em [Rigas]. Descrevemos de forma simplificada tal conceito e aproveitamos para apresentar dois exemplos importantes: os espaços de revestimento e as fibrações de Hopf.

Existem diversas definições de fibrações, mas como foi notado por J. P. Serre, o conceito central é o de levantamento de homotopia. Podemos então definir uma fibração $E \xrightarrow{p} B$ exigindo a propriedade de levantamento de homotopias: dadas uma homotopia $H : I^n \rightarrow B$ e uma função contínua $H_0 : I^{n-1} \rightarrow E$ tal que $p \circ H_0(x) = H(x, 0)$ existe o levantamento $\tilde{H} : I^n \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H}(x, 0) = H_0(x)$.

E é dito espaço total, B espaço de base e p projecção. Para $x \in B$, $E_x = p^{-1}(x)$ é dita a fibra sobre x . A propriedade de levantamento pode ser entendida como dada uma homotopia na base e uma condição inicial no espaço total, podemos levantar toda a homotopia a E .

Com tal definição temos um conjunto muito grande de fibrações. É importante notar mesmo que a fibra pode variar de ponto a ponto. Porém, trabalharemos com um conjunto muito mais restrito onde as fibrações serão dadas por quocientes de ações diferenciáveis livres de grupos de Lie sobre variedades diferenciáveis.

Lembremos então o conceito de ação de um grupo G sobre um espaço topológico

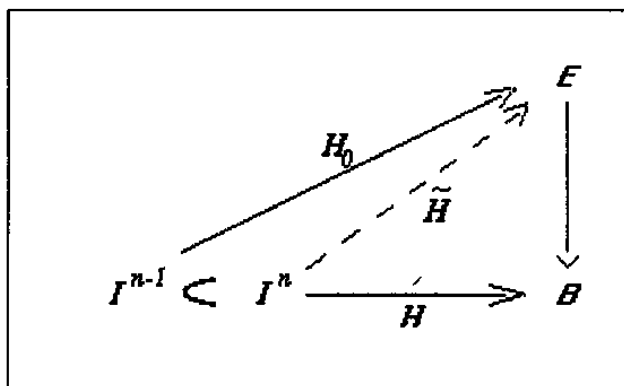


Figura 2.5: Esquema de levantamento de homotopia.

X : toda aplicação contínua $\mu : G \times X \rightarrow X$ tal que $\mu(e, x) = x$ com e o elemento neutro de G e $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ é dita uma ação (à esquerda) de G em X . Tal nomenclatura vem do fato que para cada elemento de G estamos associando um automorfismo de X dado por $\mu_g(x) = \mu(g, x)$ (usualmente denotaremos $\mu_g(x)$ por gx).

Dada uma ação de G em X podemos definir uma relação de equivalência dada por $x \sim gx$, para todo $g \in G$. Denotamos por X/G o espaço quociente por tal relação de equivalência⁵.

No caso G um grupo de Lie e $X = M$ uma variedade diferenciável a ação é dita diferenciável se μ for uma aplicação diferenciável. A ação é dita livre se $gx = x \Rightarrow g = e$, e o elemento neutro de G . Temos então o importante resultado: se G e M são compactos e G age livre e diferenciavelmente sobre M , então a projeção $p : M \rightarrow M/G$ é uma fibração com fibra isomorfa a G . Mais adiante veremos alguns exemplos de fibrações assim.

Vamos agora estudar a relação entre grupos de homotopia e fibrações como as descritas acima. Para evitar confusão denotemos por F a fibra, E o espaço total e B o espaço de base. Além disso, consideremos os pontos base $f \in F$, $b \in B$ e $x \in p^{-1}(b)$. Antes de mais nada devemos perceber que há a inclusão da fibra no espaço total $i : F \rightarrow E$ que induz $i_\#$ entre os diversos grupos de homotopia $\pi_n(F)$ e $\pi_n(E)$. Também a projeção $p : E \rightarrow B$ induz $p_\# : \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B)$. Não é difícil ver que $p_\# \circ i_\# = 0$, ou seja, que todo n -laço em E que é imagem de um n -laço em F por i é projetado sobre um n -laço da classe trivial em B .

Mas além destes dois temos o morfismo $\partial_\# : \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$ que passamos a descrever. O passo essencial (e a própria origem da notação) vem de lembrarmos que $\partial I^n \cong S^{n-1}$. Um n -laço em B é uma aplicação $I^n \rightarrow B$ tal que ∂I^n é mapeado no ponto base b . Podemos levantar esta homotopia para E e teremos ∂I^n mapeado em

⁵ É muito importante ter-se claro qual a ação empregada na definição do quociente. Ações diferentes podem implicar quocientes muito diferentes!

E_b . Mas $E_b \cong F$ e finalmente obtemos um $(n-1)$ -laço $S^{n-1} \rightarrow F$. Tal construção então leva ao morfismo de bordo $\partial_{\#} : \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$.

Temos então o importante teorema que a sequência

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(E) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_{\#}} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots$$

é exata. Isso significa que $\ker p_{\#} = \text{Im } i_{\#}$, $\ker \partial_{\#} = \text{Im } p_{\#}$ e $\ker i_{\#} = \text{Im } \partial_{\#}$. Tal teorema permite obter algebricamente muita informação sobre os grupos de homotopia. Por exemplo, se $\pi_n(F)$ e $\pi_{n-1}(F)$ são triviais segue que $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$. Tal teorema é verdadeiro para $n \geq 2$, mas pode ser estendido se considerarmos $\pi_0(X)$ como o conjunto de componentes conexas por caminho de X e sempre que necessário interpretarmos os morfismos como aplicações entre conjuntos e não mais de grupos.

Dadas duas fibrações $F_i \hookrightarrow E_i \xrightarrow{p_i} B_i$ uma aplicação $f : E_1 \rightarrow E_2$ é dita um morfismo de fibrações se ela define o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & & F_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

em palavras isso quer dizer que ela leva fibra em fibra, ou seja, define uma aplicação $\underline{f} : B_1 \rightarrow B_2$ e que $p_2 \circ f \equiv \underline{f} \circ p_1$.

Uma construção especialmente importante é o *pull back*: dada uma fibração $F \hookrightarrow E_1 \rightarrow B_1$, e uma aplicação $g : B_2 \rightarrow B_1$ podemos definir uma nova fibração $F \hookrightarrow E_2 \rightarrow B_2$ dita o *pull back* da primeira fibração por g . Heuristicamente trata-se de puxar as fibras por g , ou seja, considerar sobre $b \in B_2$ a mesma fibra de $g(b)$.

O primeiro exemplo que podemos trabalhar são os espaços de revestimento⁶. Uma boa maneira de vê-los é considerar o caso G discreto. Por exemplo, para $M = S^n$ e $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ onde $-1x = -x$. Temos então $S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^n$ o espaço projetivo de dimensão n . Um caso mais comum na física é quando consideramos $E = SU(2)$, $B = SO(3)$ e $G = \mathbb{Z}_2$; como podemos identificar $SU(2) \cong S^3$ segue que $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$.

Como a fibra é discreta segue que $\pi_n(F) = 0$ para $n \geq 1$. Logo $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$ para $n \geq 2$. Resta ainda a sequência exata:

$$0 \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow 0$$

que para o exemplo trabalhado implica $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 2$.

Outro exemplo muito bonito e essencial no que segue é a chamada *fibração de Hopf*. Consideremos S^3 como a esfera unitária do espaço $\mathbb{C}^2$ e usualmente identifiquemos S^1 com os complexos unitários. Podemos então considerar a ação

$$\begin{aligned} S^1 \times S^3 &\longrightarrow S^3 \\ (e^{i\phi}, (z, w)) &\longmapsto (e^{i\phi}z, e^{i\phi}w) \end{aligned}$$

⁶Também ditos *espaços de recobrimento* ou *cobertores*.

com a qual faremos o quociente S^3/S^1 . Vamos estudar tal quociente: se $w \neq 0$ então z/w define um elemento neste quociente; para cada valor complexo de z/w temos um elemento, e ainda o elemento correspondente a $w = 0$. Portanto tal quociente tem a topologia do plano mais um ponto, que pela projeção estereográfica identificamos com S^2 . Acabamos de obter a fibração de Hopf

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$$

Podemos notar que considerando S^7 como a esfera unitária de $\mathbb{H}^2$ e S^3 como quatérnios unitários obtemos outra fibração de Hopf:

$$S^3 \hookrightarrow S^7 \longrightarrow S^4$$

esta última está na base da construção de [Rigas].

2.3. Homotopia de Esferas

A construção de [Rigas] faz uso de alguns resultados de homotopia de esferas. No que se segue procuramos tornar estes resultados um pouco mais intuitivos - ou um pouco menos estranhos. Uma discussão muito mais extensa e profunda é encontrada em [Hu, Chp XI].

Começamos afirmando que $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ é um revestimento com fibra sobre $e^{2\pi i t}$ dada por $\{t + z : z \in \mathbb{Z}\}$. Mas $\mathbb{R}$ é convexo, logo $\pi_k(\mathbb{R}) = 0$, $k \geq 1$. Da discussão sobre revestimento segue que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_k(S^1) = 0$, $k \geq 2$. Assim obtivemos toda homotopia de S^1 .

Tal problema não é tão simples⁷ quando tratamos com S^n . Um primeiro resultado geral vem de um teorema de aproximação: toda aplicação $I^k \rightarrow S^n$ é homotópica a uma aplicação diferenciável. Como para $k < n$ uma tal aplicação diferenciável não pode ser sobrejetora, segue que $\pi_k(S^n) = 0$, para $k < n$.

A teoria do grau é suficiente para demonstrar que $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Também existem demonstrações que só fazem uso de topologia algébrica, usando as seqüências exatas de pares (ver [Nash-Sen, Chap 5]).

Agora utilizamos a seqüência exata da fibração de Hopf $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$:

$$\pi_k(S^1) \longrightarrow \pi_k(S^3) \longrightarrow \pi_k(S^2) \longrightarrow \pi_{k-1}(S^1)$$

Como $\pi_k(S^1) = 0$, para $k \geq 2$, segue que $\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2)$ para $k \geq 3$, assim, $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$! É muito interessante nessa construção que não apenas obtemos a estrutura algébrica de $\pi_3(S^2)$ como também um gerador dado pela própria fibração de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$.

Outra construção importante é a suspensão, que permite relacionar $\pi_k(S^n)$ e $\pi_{k+1}(S^{n+1})$. Começamos por considerar S^n , $n \geq 2$, como equador de S^{n+1} . Vamos definir um mapa $i : S^n \rightarrow \Omega^1(S^{n+1})$, o espaço de laços sobre S^{n+1} : para isso

⁷ A razão para isso é que não há um revestimento simples como $\exp$. A generalização de $\exp$ para mais dimensões reveste $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (o toro n -dimensional, produto cartesiano de n cópias de S^1) e não S^n .

sejam s_0 o ponto de base no equador, u e v os pólos de S^{n+1} ; definimos $i(x)$ como o laço⁸ $\widehat{s_0 u} \star \widehat{u x} \star \widehat{x v} \star \widehat{v s_0}$, onde estamos denotando por $\widehat{ab}$ a geodésica minimal que liga o ponto a ao ponto b . Identificando cada ponto $x \in S^n$ com sua imagem $i(x)$ podemos considerar a aplicação i como a inclusão de S^n em $\Omega^1(S^{n+1})$. Tal inclusão induz homomorfismos de grupos $i_\# : \pi_k(S^n) \rightarrow \pi_k(\Omega^1(S^{n+1}))$ e o teorema da suspensão [Hu, Chap XI, Thm 2.1] garante que $i_\#$ é isomorfismo se $k < 2n - 1$. Mas como vimos, uma das definições de $\pi_k(X)$ é $\pi_{k-1}(\Omega^1(X))$. Temos portanto um isomorfismo (nas dimensões adequadas) $\Sigma : \pi_k(S^n) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1})$ que é a chamada suspensão.

Com as fibrações de Hopf e a suspensão podemos estudar vários grupos de homotopia de esferas. Note que se ξ é um gerador de $\pi_k(S^n)$ ($k < 2n - 1$) então $\Sigma(\xi)$ é um gerador de $\pi_{k+1}(S^{n+1})$. Para mais detalhes novamente remetemos o leitor a [Hu].

⁸Tal laço pode ser visto como ligar o ponto base ao pólo u , este ao ponto x , x ao pólo oposto v e finalmente v ao ponto base; sempre por geodésicas minimais.

3. S^3 -FIBRADOS

Neste capítulo estudamos S^3 -Fibrados sobre S^7 , chamados $\widetilde{P}_n$, e suas projeções sobre S^4 , P_n . Os $\widetilde{P}_n$ são obtidos como subvariedades 10-dimensionais do grupo simplético $Sp(n)$. A referência fundamental é [Rigas].

3.1. Os Grupos Simpléticos

Começamos por estudar os grupos simpléticos, que podem ser vistos como grupos de matrizes "ortogonais" quaterniônicas. Tais grupos simpléticos servirão de ambiente para os fibrados $\widetilde{P}_n$.

Definição: O grupo simplético $Sp(n)$ é formado por matrizes $n \times n$ com entradas quaterniônicas tais que $AA^* = A^*A = I$, onde I é a matriz identidade e A^* denota a transposta conjugada da matriz A .

$Sp(n)$ pode ser visto como a variedade dos referenciais ortonormais de $\mathbb{H}^n$, onde o produto escalar é dado por¹ $\langle u, v \rangle = u^*v$. Tal interpretação nos permite entender um pouco mais de $Sp(n)$: para obter uma matriz $A \in Sp(n)$ devemos primeiro escolher a primeira coluna², um vetor unitário de $\mathbb{H}^n$, portanto um vetor de $S_{\mathbb{H}}^{n-1} \cong S_{\mathbb{R}}^{4n-1}$. Escolhida a primeira coluna, devemos escolher a segunda, ortogonal à primeira - logo em $\mathbb{H}^{n-1}$ - e unitário - portanto em $S_{\mathbb{H}}^{n-2} \cong S_{\mathbb{R}}^{4(n-1)-1}$. Depois escolhemos a terceira ... até a n -ésima coluna em $S_{\mathbb{H}}^0 \cong S_{\mathbb{R}}^3$. $Sp(n)$ tem portanto dimensão real $(4n-1) + (4(n-1)-1) + \dots + 3 = 2n^2 + n$. É importante notar que para os quaternions unitários temos $Sp(1) \cong S^3$, assim como para os complexos unitários temos $U(1) \cong S^1$. Não deixa de ser instigante o fato deste ser o grupo de *gauge* do eletromagnetismo, enquanto aquele o das interações fracas.

3.1.1. Ações de $Sp(m)$ sobre $Sp(n)$

Vamos definir ações de $Sp(m)$ sobre $Sp(n)$. Os fibrados $\widetilde{P}_n$ serão posteriormente obtidos como subvariedades de $Sp(n)$ invariantes por duas ações de $Sp(1)$.

Seja $\Delta : Sp(1) \rightarrow Sp(n)$ a inclusão $\Delta(q) = qI$. Dessa forma $Sp(1)$ é um subgrupo de $Sp(n)$. Para evitar confusão denotaremos tal subgrupo por $Sp^n(1)$, embora muitas vezes denotemos q , ao invés de $\Delta(q)$. Consideremos então a ação de $Sp^n(1)$ em $Sp(n)$ dada pela multiplicação à esquerda em $Sp(n)$:

$$Sp^n(1) \times Sp(n) \longrightarrow Sp(n)$$

¹ Novamente o $*$ denota conjugação e transposição.

² A mesma análise poderia ser feita linha por linha.

$$(q, A) \longmapsto \Delta(q) \cdot A$$

que nos dá a fibração:

$$Sp^n(1) \hookrightarrow Sp(n) \longrightarrow Sp^n(1) \backslash Sp(n)$$

- denotamos $Sp^n(1) \backslash Sp(n)$ para enfatizar que a ação é pela esquerda.

Agora definimos uma ação de $Sp(n-1)$ sobre $Sp(n)$, pela direita. Também partimos de uma inclusão $i: Sp(n-1) \rightarrow Sp(n)$ dada por:

$$B \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

para em seguida definir a ação:

$$\begin{aligned} Sp(n) \times Sp(n-1) &\longrightarrow Sp(n) \\ (A, B) &\longmapsto A \cdot i(B) \end{aligned}$$

que resulta numa nova fibração:

$$Sp(n-1) \hookrightarrow Sp(n) \longrightarrow Sp(n)/Sp(n-1).$$

Vamos agora estudar este quociente. Podemos ver esta ação como B operando nas $(n-1)$ últimas colunas de A . Com efeito, todas as matrizes de $Sp(n)$ que têm a primeira coluna idêntica à de A podem ser escritas na forma $A \cdot i(B)$ e só elas. Assim, cada classe de $Sp(n)/Sp(n-1)$ é definida pela primeira coluna das matrizes de $Sp(n)$, que são vetores unitários de $\mathbb{H}^n$. Tal quociente é, portanto, homeomorfo a $S_{\mathbb{H}}^{n-1}$.

Finalmente devemos perceber que as duas ações apresentadas comutam, devido à associatividade de $Sp(n)$.

3.2. Construção dos Fibrados X_n

Agora obtemos o fibrado X_n , passo essencial para obtenção de P_n e $\widetilde{P}_n$.

Com as duas ações expostas no parágrafo anterior, obtemos:

$$Sp(n-1) \hookrightarrow (Sp^n(1) \backslash Sp(n)) \longrightarrow (Sp^n(1) \backslash Sp(n) / Sp(n-1))$$

Para bem entendermos tal fibração fazemos uso da comutatividade das ações, ou seja, o mesmo quociente é obtido quando fazemos

$$Sp^n(1) \hookrightarrow (Sp(n) / Sp(n-1)) \longrightarrow (Sp^n(1) \backslash Sp(n) / Sp(n-1))$$

mas essa última pode ser reconhecida como a construção do espaço projetivo quaterniônico de $(n-1)$ -dimensões:

$$Sp(1) \hookrightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{H}P^{n-1}.$$

Devemos notar que no caso $n=2$ temos a fibração de Hopf, donde obtemos $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.

Lembremos que o espaço projetivo $(n-1)$ -dimensional quaterniônico $\mathbb{H}P^{n-1}$ é o espaço das direções quaterniônicas em $\mathbb{H}^n$, e que neste espaço podemos usar coordenadas homogêneas dadas por $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ com $[q_1, q_2, \dots, q_n] \simeq [\lambda q_1, \lambda q_2, \dots, \lambda q_n]$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Nessas coordenadas temos a inclusão de $\mathbb{H}P^1$ em $\mathbb{H}P^n$ dada por $i([a, b]) = [a, b, 0, \dots, 0]$. Obtemos então X_n fazendo o *pull back* do fibrado acima por i :

$$\begin{array}{ccc} Sp(n-1) & & Sp(n-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \longrightarrow & Sp^n(1) \setminus Sp(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^4 \cong \mathbb{H}P^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{H}P^{n-1} \end{array}$$

É importante notar que X_n é uma subvariedade de $Sp^n(1) \setminus Sp(n)$, estando então associada a uma subvariedade de $Sp(n)$ invariante pela ação de $Sp^n(1)$. Também é importante notar que a escolha desta inclusão será importante na construção das matrizes que representarão os $\widetilde{P}_n$, i.e.: a escolha de outra inclusão geraria matrizes diferentes, gerando outros $\widetilde{P}_n$ homeomorfos aos que obteremos.

3.3. Construção dos Fibrados P_n

Agora obtemos os fibrados $S^3 \hookrightarrow P_n \rightarrow S^4$. Fisicamente estes são os fibrados de nosso interesse, pois é neles que fazemos a teoria de Yang & Mills pura sobre $\mathbb{R}^4$ euclidiano, já imposta a condição do campo tender a zero no infinito (que permite a identificação do infinito com um ponto e a *compactificação* de $\mathbb{R}^4$ a S^4).

Para obter P_n devemos reduzir a fibra sobre S^4 de $Sp(n-1)$ para $Sp(1)$ na fibração que define X_n . Isso é possível uma vez que o fibrado associado:

$$Sp(n-1)/Sp(1) \hookrightarrow X_n/Sp(1) \longrightarrow S^4$$

possui secção, fato este que decorre de sua fibra $Sp(n-1)/Sp(1)$ ser $(n \geq 3)$ pelo menos 3-conexa (ver [Steenrod, 9.4]). Assim, visualizamos a construção com o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) & \hookrightarrow & Sp(n-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_n & & X_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^4 & \xrightarrow{1} & S^4 \end{array}$$

Dessa vez então é P_n que pode ser visto como uma subvariedade de X_n , portanto de $Sp^n(1) \setminus Sp(n)$.

3.4. Construção dos Fibrados $\widetilde{P}_n$

Agora vamos obter os $\widetilde{P}_n$. Os $\widetilde{P}_n$ são S^3 -fibrados sobre S^7 . S^3 -fibrados sobre S^7 são classificados por $\pi_6(S^3)$ [Steenrod, 18.5] e $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$ [Hu, Chap XI, Thm

16.1]. Como é demonstrado em [Barros, p.17] os $\widetilde{P}_n$ apresentados por Rigas geram representantes de oito das doze classes de S^3 -fibrados sobre S^7 .

Os $\widetilde{P}_n$ são obtidos pelo *pull back* dos P_n pela fibração de Hopf. Esquemáticamente temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 & & S^3 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \hookrightarrow & \widetilde{P}_n & \longrightarrow & P_n \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \hookrightarrow & S^7 & \xrightarrow{h} & S^4 \end{array}$$

Podemos notar então que os $\widetilde{P}_n$ são variedades 10-dimensionais com dupla estrutura de S^3 -fibrado: uma ação pela direita com quociente S^7 e uma pela esquerda (usando $Sp^n(1)$) com quociente P_n .

3.5. Classificação dos $\widetilde{P}_n$

Apresentamos a classificação dos $\widetilde{P}_n$, feita usando um teorema geral e uma construção engenhosa, apresentada em [Rigas] e corrigida em [Barros].

Os S^3 -fibrados sobre S^7 são classificados por $\pi_8(S^3)$ [Steenrod, 18.5] e $\pi_8(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$ [Hu, Chap XI, Thm 16.1]. Podemos então considerar 12 S^3 -fibrados sobre S^7 tais que não há dois homeomorfos (enquanto homeomorfismo de fibrados), dados por $S^3 \hookrightarrow E_i \rightarrow S^7$ com $E_1 \cong Sp(2)$, $E_2 \cong$ (duas vezes $Sp(2)$), ..., $E_{12} \cong$ (doze vezes $Sp(2)$); onde n vezes $Sp(2)$ significa que há uma aplicação $E_n \rightarrow Sp(2)$ de grau n .

Aumentemos o diagrama acima da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & S^3 & & S^3 & & S^3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \hookrightarrow & \widetilde{P}_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & S^7 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \hookrightarrow & S^7 & \xrightarrow{h} & S^4 & \xrightarrow{f_n} & S^4 \xrightarrow{j} \mathbb{H}P^\infty \end{array}$$

onde $\mathbb{H}P^\infty = \lim_n \mathbb{H}P^n$ pode ser definido pela fibração $S^3 \hookrightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$, onde S^3 age como $Sp(1)$ e S^∞ é pensado como a esfera unitária de um espaço de Hilbert quaterniônico $\mathcal{H}$ de dimensão infinita³, $f_n : S^4 \rightarrow S^4$ é uma aplicação de grau n e na vertical acrescentamos novamente a fibração de Hopf. O mapa $j \circ f_n \circ h$ é um mapa classificante para $\widetilde{P}_n$. Vamos estudar este mapa, começando por estudar $f_n \circ h$.

$f_n \circ h : S^7 \rightarrow S^4$ define uma classe de homotopia em $\pi_7(S^4)$. Muitas vezes utilizaremos funções representando suas classes de homotopia, o que deve ser subentendido sempre que necessário. [Hu, Chap XI, Thm 16.3] obtém $\pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$, com h sendo um gerador para a parte livre (o fator $\mathbb{Z}$) e $\Sigma(\xi)$ (i.e.: a suspensão Σ do gerador

³Um teorema notável diz que $S^\infty \cong \mathcal{H}$.

de $\pi_6(S^3)$, ξ) um gerador da parte de torsão ($\mathbb{Z}_{12}$). Fazendo uso de um teorema de Hilton que dá a “regra de distribuição” da seguinte forma⁴:

$$\begin{aligned} \text{Se } g &\in \pi_m(S^n), m \leq 3n-3, \text{ e } F_1, F_2 \in \pi_n(X), \text{ então:} \\ (F_1 + F_2) \circ g &= F_1 \circ g + F_2 \circ g + [F_1, F_2] H(g) \\ &\text{onde } [F_1, F_2] \text{ denota o produto de Whitehead [Hu, pp 138-9]} \\ &\text{de } F_1 \text{ e } F_2, \text{ e } H(g) \text{ o invariante de Hopf do mapa } g \text{ [Hu, p 326].} \end{aligned}$$

Usamos ainda a seguinte expressão para o produto de Whitehead de $i : S^4 \rightarrow S^4$ com ela mesma:

$$[i, i] = 2h - \varepsilon \Sigma(\xi)$$

onde ε é um sinal que depende das escolhas de orientações das esferas envolvidas e que $H(h) = 1$. Segue que [Barros, p.14]:

$$\begin{aligned} f_1 \circ h &\sim i \circ h \approx (1, 0) \\ f_2 \circ h &\sim (i + i) \circ h \approx (4, \pm 1) \\ &\vdots \\ f_n \circ h &\approx (n^2, \pm \phi(n-1)_{\text{mod } 12}) \end{aligned}$$

com $\phi(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Agora passamos a estudar $j \circ f_n \circ h : S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$. Tal mapa define uma classe em $\pi_7(\mathbb{H}P^\infty)$. Da sequência exata da fibração $S^3 \hookrightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ temos que o morfismo de bordo $\partial^\infty : \pi_n(\mathbb{H}P^\infty) \rightarrow \pi_{n-1}(S^3)$ é um isomorfismo. Desse modo j pode ser pensado como uma aplicação de $\pi_7(S^4)$ em $\pi_6(S^3)$. Do seguinte morfismo de fibrações:

$$\begin{array}{ccc} S^3 & & S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^7 & \longrightarrow & S^\infty \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ S^4 & \xrightarrow{j} & \mathbb{H}P^\infty \end{array}$$

segue o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(S^7) & \longrightarrow & \pi_n(S^4) & \xrightarrow{\partial^h} & \pi_{n-1}(S^3) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^7) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow j & \circlearrowleft & \downarrow 1 \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(S^\infty) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{H}P^\infty) & \xrightarrow{\partial^\infty} & \pi_{n-1}(S^3) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^\infty) \longrightarrow \dots \end{array}$$

do qual obtemos $\partial^\infty \circ j \equiv \partial^h$.

Basta agora estudarmos o morfismo de bordo da fibração de Hopf no caso $\partial_7^h : \pi_7(S^4) \rightarrow \pi_6(S^3)$. Mas da própria exatidão da sequência da fibração segue que

⁴Funções aqui denotam suas classes de homotopia e + denota o produto no π_k correspondente. Tal notação é usual já que os π_k são abelianos para $k \geq 2$.

$\partial_7^h(h) = 0$ e $\partial_7^h(\Sigma(\xi)) = \pm\xi$. Ou seja, $j : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ pode ser pensado como a projeção sobre a componente de torsão do grupo.

Segue então que $\widetilde{P}_n \cong E_{\phi(n-1) \bmod 12}$. Por inspeção Barros obtém que os $\widetilde{P}_n$ de Rigas são (infinitos) representantes de E_k , para $k = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10$.

3.6. Obtenção Explícita de Representantes de $\widetilde{P}_n$

Apresentamos primeiro $\widetilde{P}_3$ como uma subvariedade de $Sp(3)$. Discutimos então o que é consequência direta da construção e quais as escolhas ainda feitas (que nos permitem pensar numa família de $\widetilde{P}_n$). Em seguida apresentamos $\widetilde{P}_4$ para em seguida mostrar um método recursivo que é ilustrado com a construção de um representante para $\widetilde{P}_5$.

3.6.1. Representantes de $\widetilde{P}_3$

Lembrando antes de mais nada que obtivemos (em 3.4) $\widetilde{P}_3$ como uma subvariedade 10-dimensional em $Sp(3)$ invariante pela ação de $Sp^3(1)$ pela esquerda (cujo quociente nos dá P_3) e de $Sp(1)$ pela direita (com quociente S^7).

Seja então

$$\widetilde{P}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b\bar{b}b & q_1 \\ b & b\bar{a}b & q_2 \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & q_3 \end{pmatrix} \in Sp(3) \right\}$$

vamos agora mostrar que esta é uma escolha válida. Antes de mais nada observemos que a terceira coluna é restringida pelas anteriores e pela condição da matriz pertencer a $Sp(3)$, donde sai que

$$q_1 = m\phi ; q_2 = \frac{-b\bar{a}}{|b|^2}m\phi ; q_3 = \frac{a\bar{b}}{|a|^2\sqrt{1+|b|^2}}m\phi ; m^2 = |a|^2|b|^2(1+|b|^2)$$

Observamos que a ação de $Sp^3(1)$ equivale a multiplicar pela esquerda todos os elementos da matriz pelo mesmo quatérnio unitário q :

$$\begin{pmatrix} a & -b\bar{b}b & q_1 \\ b & b\bar{a}b & q_2 \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & q_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} qa & -qb\bar{b}b & qq_1 \\ qb & qb\bar{a}b & qq_2 \\ 0 & qa\sqrt{1+|b|^2} & qq_3 \end{pmatrix}$$

que é uma matriz do mesmo tipo da anterior com

$$\begin{aligned} a &\mapsto qa \\ b &\mapsto qb \\ \phi &\mapsto q\phi \end{aligned}$$

é importante notar que tal invariância resulta da forma específica como foram escolhidos os elementos de matriz (por exemplo, é essencial o a no elemento $_{32}$ da matriz;

sem ele - ou b - essa invariância seria quebrada). Observamos ainda que a ação pela direita equivale a

$$\phi \mapsto \phi q$$

o que mostra a invariância também por essa ação. Podemos inclusive escrever esta fibração em termos da parametrização aqui apresentada, obtendo $q \hookrightarrow (a, b, \phi) \rightarrow (a, b)$. Por fim, deve-se notar que segue do fato de tal matriz pertencer a $Sp(3)$ que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ e assim verificamos que (a, b) é uma parametrização de S^7 .

Passamos então a discutir tal escolha. Notemos que a primeira coluna fica definida pela inclusão $i: \mathbb{H}P^1 \rightarrow \mathbb{H}P^{n-1}$ conforme comentamos ao final de 3.2. Ai já temos sete graus de liberdade, dos dez que sabemos ter $\widetilde{P}_n$. Passamos então à escolha da segunda coluna. Devido à forma específica da primeira, apenas os dois primeiros elementos da segunda coluna participam do produto escalar. Trabalhamos então no bloco 2×2 superior. É importante notar que devido à não comutatividade dos quatérnios e à semi-anti-linearidade do produto interno usado, as escolhas que parecem naturais

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

não funcionam. Porém, ligeiramente modificadas levam a

$$\begin{pmatrix} a & -b\bar{b} \\ b & b\bar{a} \end{pmatrix}$$

poderíamos então considerar todos os demais vetores ortogonais a (a, b) , que dariam

$$\begin{pmatrix} a & -b\bar{b}\eta \\ b & b\bar{a}\eta \end{pmatrix}$$

com η quatérnio unitário.

Como já utilizamos sete graus de liberdade, sabemos que só dispomos de mais três. Da interpretação geométrica que apresentamos do grupo simplético sabemos que a terceira coluna só é definida pelas demais a menos de uma fase em S^3 , dada por outro quatérnio unitário. Assim, devemos escolher a entrada $_{32}$ da matriz como função de a e b tal que $f(qa, qb) = qf(a, b)$, para obtermos a invariância pela ação de $Sp^3(1)$. No caso apresentado o elemento escolhido aliou essa necessidade de manter tal invariância com a de normalizar a segunda coluna. Num caso geral, porém, deve-se incluir ainda em toda a coluna um fator real de normalização.

Essas são as escolhas envolvidas no processo: a inclusão i , a fase η e o elemento $_{32}$ dado pela f . Um estudo mais cuidadoso dessas escolhas nos permitiria estudar a família de $\widetilde{P}_3$ oriundos dessa construção. Tal estudo pode ser interessante pois cada elemento dessa família está mergulhado de uma maneira diferente em $Sp(3)$, portanto toda a parte não intrínseca de sua geometria pode variar de um elemento a outro, como por exemplo a conexão.

3.6.2. Representantes de $\widetilde{P}_4$

Agora apresentamos um representante para $\widetilde{P}_4$. Este passo é importante pois é a partir dele que geramos os demais $\widetilde{P}_n$.

Seja $\widetilde{P}_4$ dado por

$$\widetilde{P}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b}\bar{b}L^{-1} & 0 & q_1 \\ b & \bar{a}\bar{a}L^{-1} & 0 & q_2 \\ 0 & a\bar{a}L^{-1} & -b & q_3 \\ 0 & a\bar{b}L^{-1} & a & q_4 \end{pmatrix} \in Sp(4) \right\}$$

com $L = \sqrt{|a|^4 + |b|^4}$. Novamente, as três primeiras colunas foram escolhidas ortonormais (daí o fator de normalização L^{-1} na segunda coluna) e a condição de pertencer a $Sp(4)$ define os q_i a menos de um parâmetro ϕ . A invariância pelas duas ações de $Sp(1)$ também é trivialmente verificada, mostrando-se novamente resultado (e motivo!) da escolha da dependência formal dos elementos de matriz em a , b , $\bar{a}$ e $\bar{b}$.

Naturalmente, como o ambiente para esse fibrado é $Sp(4)$, temos mais escolhas ainda a fazer. Assim uma família ainda maior de representantes de $\widetilde{P}_4$ pode ser gerada de forma semelhante, mas mediante outras escolhas.

3.6.3. O Método Recursivo de Rigas

Apresentamos agora o método descrito em [Rigas] para obter $\widetilde{P}_{n+1}$ e também obtemos $\widetilde{P}_5$ como forma de ilustrá-lo. Novamente usando a interpretação geométrica já apresentada do grupo simplético, trata-se de escolher mais um vetor ortonormal. Fazemos isso a partir da segunda coluna das matrizes de $\widetilde{P}_n$ (aqui no exemplo usamos $n = 4$), da seguinte maneira:

1. Deixando a normalização momentaneamente de lado, tomamos as $n - 2$ últimas entradas da segunda coluna

$$\begin{pmatrix} a\bar{a}a \\ a\bar{b}a \end{pmatrix}$$

2. Obtemos um bloco $(n - 2) \times 2$ multiplicando à esquerda cada entrada por $a\bar{b}$

$$\begin{pmatrix} a\bar{b}a\bar{a}a & a\bar{b}a\bar{a}a \\ (a\bar{b})^2a & a\bar{b}a\bar{a}a \end{pmatrix}$$

3. Incluimos então uma nova linha dada por $-b$ na segunda coluna e af_k na primeira, onde f_k é uma função real de $|a|^2$ e $|b|^2$ tal que tais colunas, vistas como vetores de $\mathbb{H}^{n-1}$, sejam ortogonais.

$$\begin{pmatrix} af_k & -b \\ a\bar{b}a\bar{a}a & a\bar{b}a\bar{a}a \\ (a\bar{b})^2a & a\bar{b}a\bar{a}a \end{pmatrix}$$

4. Reintroduzimos as duas primeiras entradas da primeira coluna, completamos com zeros a segunda e estas se tornam as novas segunda e terceira colunas:

$$\begin{pmatrix} a & -b\bar{b}b & 0 & 0 & q_1 \\ b & b\bar{a}b & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & af_k & -b & 0 & q_3 \\ 0 & a\bar{b}a\bar{a}a & a\bar{a}a & -b & q_4 \\ 0 & (a\bar{b})^2a & a\bar{b}a & a & q_5 \end{pmatrix}$$

5. Basta normalizar cada (nova) coluna, dividindo por seu “comprimento”.

Desta forma obtivemos $\widetilde{P}_5 \subset Sp(5)$ e temos a receita para obter $\widetilde{P}_n \subset Sp(n)$. [Rigas] apresenta ainda algumas relações entre os f_k e os L_k (os fatores de normalização dados pelos “comprimentos” de cada coluna).

4. NOVO MÉTODO PARA O CÁLCULO DE INSTANTONS

Neste capítulo apresentamos nossa contribuição ao problema, descrevendo um método geométrico direto de obtenção do (anti-)instanton e nossas tentativas de generalizá-lo para a obtenção dos multi-instantons.

4.1. Instantons Fundamentais e $Sp(2)$

Descrevemos um novo método geométrico para a obtenção do (anti-)instanton fundamental.

4.1.1. $Sp(2)$ como $(S^3 \times S^3)$ -Fibrado sobre S^4

Apresentamos uma estrutura de *spliced bundle* para $Sp(2)$.

Começamos definindo duas ações de S^3 (agindo como $Sp(1)$) sobre $Sp(2)$. Estas ações são pela direita e comutam, logo definindo um *spliced bundle*[Bleecker, 7.1].

Sejam $u, d : Sp(2) \times Sp(1) \rightarrow Sp(2)$ as ações definidas por:

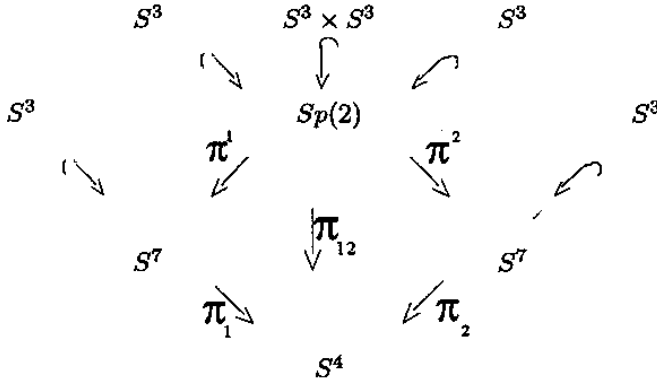
$$\begin{aligned}u(A, q) &= A \cdot \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\d(A, q) &= A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Usando a parametrização de $Sp(2)$ por quatérnios a, b, ϕ , sujeitos a $|a|^2 + |b|^2 = 1$ e $|\phi| = 1$, dada por

$$\begin{bmatrix} a & -b\phi \\ b & \bar{b}^{-1}\bar{a}b\phi \end{bmatrix}\tag{4.2}$$

é imediato que o quociente definido pela ação d é S^7 . Como as ações u e d são

semelhantes, obtemos o seguinte diagrama de cinco fibrados principais:



Atenção especial deve ser dada à questão da orientação. As duas fibrações de Hopf deste diagrama têm orientações opostas¹. Isso vai-se manifestar mais adiante quando obteremos o instanton e o anti-instanton por um mesmo procedimento.

4.1.2. A Conexão em $Sp(2) \rightarrow S^4$

A escolha da conexão em $Sp(2)$ é um passo central para a obtenção do instanton. Descrevemos esta escolha a seguir.

Em $Sp(2)$ temos a matriz de Cartan $g^{-1}dg$. Podemos interpretar esta 1-forma da seguinte maneira: escolhida uma base $\{E_i\}$ em $\mathfrak{sp}(2)$, vista como $T_e Sp(2)$, temos uma base globalmente definida dada por $\{L_g E_i\}$. A matriz de Cartan pode então ser vista como uma 1-forma de $\Lambda^1(Sp(2), \mathfrak{sp}(2))$, que para cada ponto g associa $L_g E_i$ a E_i . Formalmente podemos considerar em cada ponto a base de 1-formas $\{\theta_i\}$, dual a $\{L_g E_i\}$, e escrever $g^{-1}dg(X) = \sum \theta_i(X) E_i$.

Vamos trabalhar com algo que pode ser pensado como “a parte vertical da matriz de Cartan”. Para isso vamos trabalhar na escolha da base $\{E_i\}$. Os três primeiros E_i são escolhidos tangentes à fibra da ação d , os três seguintes tangentes à fibra da ação u . Da forma específica (4.1) destas ações obtemos

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{Q} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$E_i = \begin{bmatrix} \vec{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 4, 5, 6$$

onde $\vec{Q}$ denota um quatérnio puramente vetorial.

Temos $\pi_{12*} E_i = 0$ para $1 \leq i \leq 6$. Portanto estes vetores geram todo o espaço vertical em $T_e Sp(2)$. De mesma forma, $L_g E_i$, $1 \leq i \leq 6$, geram o espaço vertical em $T_g Sp(2)$. Escolher uma conexão no fibrado $(S^3 \times S^3) \hookrightarrow Sp(2) \xrightarrow{\pi_{12}} S^4$ é equivalente a

¹Se assim não fosse, teríamos $Sp(2) \cong S^4 \times S^3 \times S^3$, que sabemos não ser verdade, visto que todo pull-back de um fibrado por ele mesmo é trivial

escolher, para cada ponto, um espaço horizontal H_g tal que $H_g \oplus V_g = T_g Sp(2)$, V_g o espaço vertical. Tal escolha deve ainda depender diferenciavelmente do ponto g e ser compatível com as ações u e d .

Nosso método de obtenção do instanton baseia-se em fazer a escolha que nos parece mais natural para este espaço: o complemento ortogonal do espaço vertical, com respeito à métrica de Killing² (ver [Samelson], [Sattinger-Weaver] ou outro texto de álgebras de Lie). Devido a esta escolha temos

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 7, 8, 9, 10$$

Escrevendo como 1-forma temos a conexão

$$\omega = \sum_{i=1}^6 \theta_i E_i \quad (4.3)$$

4.1.3. A Conexão em $S^7 \rightarrow S^4$

Agora obtemos a conexão instantônica a partir da conexão ω e da estrutura de *spliced bundle* que impusemos a $Sp(2)$.

Notemos que $\omega = \pi^{1*}\omega_1 \oplus \pi^{2*}\omega_2$ onde ω_i é conexão de $S^3 \hookrightarrow S^7 \xrightarrow{\pi_i} S^4$ e cada *pull-back* $\pi^{i*}\omega_i$ é conexão de $S^3 \hookrightarrow Sp(2) \xrightarrow{\pi^j} S^7$, $j \neq i$. Se usarmos os isomorfismos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix} \mapsto \bar{Q} \text{ e } \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \bar{Q}$$

e denotando por $\overset{\circ}{E}_i$, $i = 1, 2, 3$, os vetores de $\mathfrak{sp}(1)$ correspondentes aos E_i , temos

$$\begin{aligned} \pi^{1*}\omega_1 &= \sum_{i=1}^3 \theta_i \overset{\circ}{E}_i \\ \pi^{2*}\omega_2 &= \sum_{i=1}^3 \theta_{i+3} \overset{\circ}{E}_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

Agora queremos obter expressões locais para ω_i , que são 1-formas de abertos de S^4 a valores em $\mathfrak{sp}(1)$. Estas expressões locais são obtidas pela escolha de secções do fibrado de Hopf $S^3 \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4$. Porém, tais secções σ podem ser obtidas por secções do fibrado $(S^3 \times S^3) \hookrightarrow Sp(2) \rightarrow S^4$. Neste caso, $\pi^i \circ \sigma : S^4 \rightarrow S^7$ é secção do fibrado de Hopf, já que $\pi_i \circ (\pi^i \circ \sigma) = \pi_{12} \circ \sigma$.

Usando (4.2) podemos escrever $\pi_{12} : Sp(2) \rightarrow S^4$ como

$$\begin{pmatrix} a & -b\phi \\ b & \bar{b}^{-1}\bar{a}b\phi \end{pmatrix} \mapsto \frac{\bar{a}b}{|a|^2}$$

²Entendida aqui como a métrica de Killing de $\mathfrak{sp}(2)$ transportada pela esquerda a todo $Sp(2)$.

e então escolher $\sigma_a : \mathbb{H} \subset S^4 \longrightarrow Sp(2)$ dada por

$$c \longmapsto \begin{pmatrix} a & -a\bar{c} \\ ac & a \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

com $|a|^2 = (1 + |c|^2)^{-1}$.

Agora obtemos os potenciais $A_i = (\pi^i \circ \sigma_a)^* \omega_i = \sigma_a^* (\pi^{i*} \omega_i)$. Pela definição do *pull back* $A(X) = \pi^{i*} \omega_i (\sigma_{a*} X)$. Para o cálculo de $\sigma_{a*} X$ escolhemos³ $a(c) \in \mathbb{R}_+$ e com isso obtemos:

$$\sigma_{a*} X = \frac{\frac{-1}{2} (\bar{c}X + \overline{X}c)}{(1 + |c|^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{c} \\ c & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(1 + |c|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & -\overline{X} \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando $L_{g^{-1}*}$, com $g = \sigma_a(c)$ temos

$$L_{g^{-1}*} \sigma_{a*} X = \frac{1}{(1 + |c|^2)} \begin{bmatrix} \text{Im} \{ \bar{c}X \} & -\overline{X} \\ X & \text{Im} \{ c\overline{X} \} \end{bmatrix}$$

Agora, usando (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} A_1(X) &= \frac{\text{Im} \{ c\overline{X} \}}{(1 + |c|^2)} \\ A_2(X) &= \frac{\text{Im} \{ \bar{c}X \}}{(1 + |c|^2)} \end{aligned}$$

que escritas como 1-formas de $\mathbb{H}$ a valores em $\mathfrak{sp}(1)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\text{Im} \{ cd\bar{c} \}}{(1 + |c|^2)} \\ A_2 &= \frac{\text{Im} \{ \bar{c}dc \}}{(1 + |c|^2)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

estas são exatamente as expressões (1.19) e (1.18) para o instanton e o anti-instanton fundamentais!

É importante notar que da forma que obtivemos (4.6) tanto o denominador $(1 + |c|^2)$ quanto a parte imaginária tornam-se conseqüências da exigência da matriz (4.5) pertencer a $Sp(2)$.

³Comentaremos tal escolha na secção 4.1.4.

4.1.4. Transformações de Gauge

Discutimos aqui a escolha de $a \in \mathbb{R}_+$ feita na secção anterior, obtendo transformações de gauge do potencial lá obtido como soluções quando tal restrição não está presente.

Com a mesma escolha de secção de (4.5), permitimos a variação arbitrária da fase de a . Seja então $a = (1 + |c|^2)^{-1} \phi$, com $|\phi| = 1$, obtemos

$$\sigma_{a*}X = \frac{\frac{-1}{2}(\bar{c}X + \bar{X}c)\phi + (1 + |c|^2)d\phi(X)}{(1 + |c|^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{c} \\ c & 1 \end{bmatrix} + \frac{\phi}{(1 + |c|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{X} \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

que leva a

$$L_{g^{-1}}\sigma_{a*}X = \begin{bmatrix} \frac{\text{Im}\{\bar{c}X\}}{1+|c|^2} + \bar{\phi}d\phi(X) & \frac{-\bar{X}}{1+|c|^2} \\ \frac{X}{1+|c|^2} & \frac{\text{Im}\{cX\}}{1+|c|^2} + \bar{\phi}d\phi(X) \end{bmatrix}$$

Novamente, usando (4.4) e escrevendo como 1-formas, obtemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\text{Im}\{cd\bar{c}\}}{(1 + |c|^2)} + \bar{\phi}d\phi \\ A_2 &= \frac{\text{Im}\{\bar{c}dc\}}{(1 + |c|^2)} + \bar{\phi}d\phi \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $\phi : \mathbb{H} \rightarrow S^3 \cong SU(2)$ e desta forma, usando a estrutura de grupo de $SU(2) \cong Sp(1)$ temos

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\text{Im}\{cd\bar{c}\}}{(1 + |c|^2)} + g^{-1}dg \\ A_2 &= \frac{\text{Im}\{\bar{c}dc\}}{(1 + |c|^2)} + g^{-1}dg \end{aligned} \quad (4.8)$$

ou seja, obtemos transformações de gauge dos potenciais (4.6), como era de se esperar.

4.2. Os Multi-instantons

Descrevemos aqui três caminhos que começamos a trilhar, e que acreditamos possam levar à solução geral do problema de um modo complementar aos que pudemos encontrar na literatura da área.

4.2.1. Generalização a la Rigas

O primeiro caminho que tentamos trilhar segue exatamente a linha que nos levou à obtenção do (anti)-instanton (4.6).

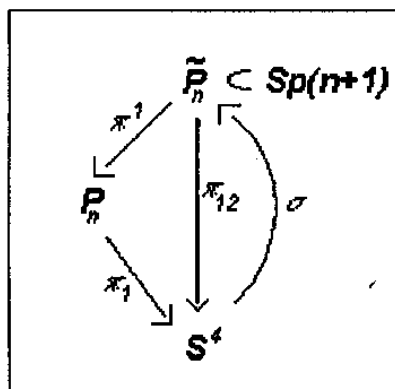


Figura 4.1: Diagrama da Generalização Formal

Primeiro devemos escolher um fibrado⁴ $S^3 \times S^3 \hookrightarrow \tilde{P}_n \rightarrow S^4$, de uma maneira análoga àquela feita em [Rigas] e aqui já apresentada. Em tal escolha já subentendemos uma parametrização de $\tilde{P}_n$ por matrizes de $Sp(n+1)$ e ações de S^3 sobre $\tilde{P}_n$ pela direita e que comutem.

Com uma tal estrutura, podemos obter uma conexão em $\tilde{P}_n \rightarrow S^4$ de maneira análoga à da secção 4.1.2, utilizando aí a estrutura algébrica de $Sp(n+1)$ e sua métrica de Killing.

Por fim, a escolha de uma secção permitiria obter expressões locais para a conexão em $P_n \rightarrow S^4$ como 1-formas quaterniônicas, do mesmo modo que obtivemos para o (anti-)instanton fundamental.

4.2.2. Generalização Formal

O segundo caminho que procuramos poderia ser considerado como a fase “cortar supérfluos” da tentativa anterior. Despe-se grande parte da geometria envolvida, procurando apenas reproduzir o que há (ou parece haver) de essencial em cada passo.

Consideramos apenas o diagrama 4.1 e definimos $\omega(X) = \pi_{\text{alg}} \tilde{\omega} \sigma_* \pi_{1*} (\bar{X})$, onde $\bar{X}$ denota um levantamento de X para o espaço tangente de P_n , $\tilde{\omega}$ é uma conexão no fibrado $\tilde{P}_n$ (que agora não precisa necessariamente da estrutura de *spliced bundle*) e π_{alg} é uma projeção algébrica $\pi_{\text{alg}} : \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1) \rightarrow \mathfrak{sp}(1)$, que faz com que ω tome valores em $\mathfrak{sp}(1)$.

Se por um lado tal caminho evita problemas como da escolha do fibrado necessariamente com estrutura de *spliced bundle*, por outro o excesso de liberdade tornam as escolhas muito vastas. Infelizmente as escolhas que fizemos, guiadas por nossa intuição, não resultaram efetivas.

⁴Utilizamos aqui a mesma notação $\tilde{P}_n$ e P_n de [Rigas] e do capítulo 1, devido à semelhança na estrutura da construção, porém, para os nossos intuítos, aqueles fibrados não resolvem o problema.

4.2.3. Generalização por Substituição dos Quatérnios

Aqui tratamos de uma “pista” que pode levar a um caminho algébrico para a obtenção dos multi-instantons. Trata-se de uma maneira alternativa de ver os números quaterniônicos, maneira esta que aponta para generalizações desta álgebra que permeia a obtenção de (4.6).

Há um isomorfismo natural $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(1)$, com o produto quaterniônico sendo assim mapeado:

$$\begin{aligned}(a + \vec{A}) \cdot (b + \vec{B}) &= ab + k(\vec{A}, \vec{B}) + a\vec{B} + b\vec{A} + \frac{1}{2}[\vec{A}, \vec{B}] \\ &= ab - \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + a\vec{B} + b\vec{A} + \vec{A} \times \vec{B}\end{aligned}$$

onde $k(\cdot, \cdot)$ é a métrica de Killing e $[\cdot, \cdot]$ o comutador de $\mathfrak{sp}(1)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno e $\times$ o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Tal isomorfismo permite que se definam generalizações dos quatérnios, dadas por álgebras do tipo $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}$ e com produto definido pelo segundo membro da expressão acima. A pista que tentamos seguir, neste caso, é usar $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(n)$ em substituição aos quatérnios na procura do n -instanton.

Conclusão

O problema de cálculo de instantons da teoria de Yang & Mills sobre $\mathbb{R}^4$ euclidiano mostrou-se muito rico. Embora já resolvido desde os anos setenta, ainda é possível procurar interpretações alternativas - e possivelmente encontrá-las - para tais soluções das equações de campo.

Mesmo tratando-se de um problema de física-matemática, em seu sentido mais restrito, tal problema ajuda a compreender a estrutura formal das teorias de calibre, que hoje ganham *status* de teorias fundamentais. Neste trabalho tivemos ainda a oportunidade de apresentar algumas formulações distintas das teorias de *gauge*, e mesmo sem sair do seu ramo clássico (i.e.: sem quantização) pudemos apresentar vários argumentos em favor da realidade física dos potenciais, em oposição à antiga idéia da "realidade" dos campos e do "artifício matemático" dos potenciais.

Em relação a nosso projeto inicial de usar a construção de [Rigas] para o cálculo de instantons, fizemos uma adaptação daquela e obtivemos o instanton e o anti-instanton fundamentais. Essa é a única parte original deste trabalho. Não pudemos, porém, obter as demais classes de soluções, que enriqueceriam muito este trabalho. Três caminhos que tentamos seguir são apresentados, e acreditamos que eles ainda possam render frutos, que nós mesmos ou algum leitor poderá colher.

BIBLIOGRAFIA

- [Atiyah] M. Atiyah **Geometry of Yang-Mills Field** *Lezioni Fermiane* Academia Nazionale dei Lincei & Scuola Normale Superiore di Pisa (1979). - reimpresso em M. Atiyah **Collected Works v.5 - Gauge Theories**, pp. 75-173, Oxford Science Publications (1988).
- [Barros] T. E. Barros **Fenômenos de Não- cancelamento Relacionados a S^3 -fibrados** Tese de Doutorado - IMECC/Unicamp (1997).
- [Belavin et all] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz & Yu. S. Tyupkin *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations* Phys. Lett. **59B** (1), 85 (1975).
- [Bleecker] D. Bleecker **gauge Theories and Variational Principles** *Global Analysis* Addison-Wesley Publishing Company (1981).
- [Hu] Sze-Tsen Hu **Homotopy Theory** Academic Press (1959).
- [Itzykson-Zuber] C. Itzykson & J.-B. Zuber **Quantum Field Theory** *International Series in Pure and Applied Physics* McGraw-Hill Book Company (1980).
- [Lawson Jr] H. B. Lawson Jr **A Geometria Diferencial dos Campos de Yang-Mills** Notas não publicadas.
- [Mercuri] F. Mercuri **Notas de Aula do Curso de Introdução à Homologia** não publicado - em italiano.
- [Milnor-Stasheff] J.W. Milnor & J.D. Stasheff **Characteristic Classes** Princeton (1974).
- [Nakahara] M. Nakahara **Geometry, Topology and Physics** *Graduate Student Series in Physics* Institute of Physics Publishing (1990).
- [Nash-Sen] C. Nash & S. Sen **Topology and Geometry for Physicists** Academic Press (1983).
- [Polyakov] A. M. Polyakov **Compact gauge Fields and the Infrared Catastrophe** Phys. Lett. **59B** (1), 82 (1975).

- [Rajaraman] R. Rajaraman **Solitons and Instantons - An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory** North-Holland (1982).
- [Ramond] P. Ramond **Field Theory - A Modern Primer** *Frontiers in Physics* The Benjamin/Cummings Publishing Company (1981).
- [Rigas] A. Rigas *S^3 -Bundles and Exotic Actions* **Bull. Soc. math. France** **112**, 69-92 (1984).
- [Samelson] H. Samelson **Notes on Lie Algebras** Springer-Verlag (1969).
- [Sattinger-Weaver] D.H. Sattinger & O.L. Weaver **Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics** Springer-Verlag (1986).
- [Steenrod] N. Steenrod **The Topology of Fibre Bundles** Princeton University Press (1951).
- ['t Hooft] G. 't Hooft *Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies* **Phys. Rev. Lett.** **37** (1), 8 (1976).
- [Warner] F. W. Warner **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups** Scott, Foresman and Company (1971).