# MODELO DE PARTÍCULA CLÁSSICA COM SPIN

**Virginia Velma Fernández**

Orientador: Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.
(UNICAMP)

Tese apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Física.

Este exemplar corresponde à redação final da tese de mestrado defendida pelo aluno Virgina Velma Fernández e aprovada pela Comissão Julgadora

CAMPINAS – SP

WRodrigues
08/06/95

1995

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA**

**BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

Fernández, Virginia Velma
F391m Modelo de partícula clássica com spin / Virginia Velma Fernández. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador: Waldyr A. Rodrigues Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1.*Spin do eletron. 2. Lagrange, Equações de. 3. Leis de conservação (Física). I. Rodrigues Júnior, Waldyr Alves. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

# PARECER DE APROVAÇÃO

# DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE

# VIRGÍNIA VELMA FERNÁNDEZ

DATA: 08 / 06 / 95

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr . Waldyr Alves Rodrigues Jr. (Orientador)

- Prof. Dr. Roberto Luzzi

Guillermo Cabrera
- Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzún

*Para meu pai*
*Amado Fernández e*
*Sabrina*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu companheiro, Antonio M. Moya, pelo grande apoio durante a realização deste trabalho; e pelas suas oportunas discusões e críticas objetivas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr., por ter-me sinalado o caminho e especialmente por ter-me permitido trabalhar com liberdade de ação e pensamento.

Agradeço ainda a minha família pela sua confiança em mim e no meu trabalho.

Gostaria de agradecer também à Fátima da Secretaria do DMA–IMECC, por datilografar o texto da Tese.

Finalmente agradeço ao CNPq o apoio financeiro na elaboração deste trabalho.

# RESUMO

Neste trabalho estudamos um modelo de partícula clássica com spin proposto originalmente por Barut-Zanghi (1984); e reformulado no Formalismo do Fibrado de Clifford por Pavšic, Recami, Rodrigues Jr. (1993).

Desenvolvemos alguns teoremas de conservação e observamos a consistência deste modelo de Barut-Zanghi com as leis de conservação; damos ainda alguns argumentos heurísticos que nos conduzem a uma apropriada Hamiltoniana.

# ABSTRACT

In this work we study a model of classical particle with spin that was first originally suggested by Barut-Zanghi (1984); it has recently translated into Clifford Fiber Bundle Formalism by Pavšic, Recami, Rodrigues Jr. (1993).

We develop some conservation theorems and point out the consistency of Barut-Zanghi model within the conservation laws; we also set any heuristic arguments yielding to an appropriate Hamiltonian for this one.

# ÍNDICE

# INTRODUÇÃO

Barut e Zanghi (BZ) em 1984 propuseram um modelo de eletron que fundiu o modelo clássico do eletron com o modelo do eletron de Dirac; consideraram o eletron como uma partícula clássica caracterizada pelo usual par de variáveis conjugadas $(x^\mu, p_\mu)$, com a novidade de um segundo par de variáveis spinoriais conjugadas $(z, i\overline{z})$ que representavam os graus de liberdade internos ($z$ é o spinor de Dirac e $\overline{z} \equiv z^+\gamma^0$, o correspondente spinor conjugado). BZ formularam, para este modelo de eletron clássico com spin (movendo-se em um campo eletromagnético), a Lagrangeana: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}i(\dot{\overline{z}}z - \overline{z}\dot{z}) + p_\mu(\dot{x}^\mu - \overline{z}\gamma^\mu z) + eA_\mu\overline{z}\gamma^\mu z (c = 1, \hbar = 1)$; onde $\gamma^\mu$ são as matrizes de Dirac, $A_\mu$ é o potencial eletromagnético e $x^\mu, p_\mu, z, \overline{z}$ consideram-se funções do parâmetro $\tau$ (o tempo próprio).

O modelo de BZ tem muitas importantes propriedades que podem ser estudadas usando-se o formalismo da álgebra de espaço-tempo (STA) introduzida por Hestenes em 1966 (vide Apêndice C). Pavšic, Recami e Rodrigues Jr. (1993) conseguiram reformular a Lagrangeana de BZ no Formalismo do Fibrado de Clifford.

Neste trabalho consideramos o modelo de partícula clássica com spin proposto originalmente por BZ, e reformulado no novo formalismo pelos autores mencionados acima. Discutimos fundamentalmente a consistência deste modelo de BZ com as leis de conservação. Também, com alguns argumentos heurísticos, propomos uma apropriada Hamiltoniana para o modelo de BZ. (Vide também a referência [11]).

O Formalismo Lagrangeano no Fibrado de Clifford foi desenvolvido tanto para partículas quanto para campos físicos no espaço-tempo Minkowskiano; por essa razão no Capítulo 2, faremos uma síntese dos conceitos importantes na elaboração desse formalismo Lagrangeano [12].

Este trabalho também contém dois apêndices. No Apêndice A expomos brevemente, para ulteriores referências, as equações da teoria eletromagnética e a equação de Dirac reformuladas no Formalismo do Fibrado de Clifford. No Apêndice B completamos a análise feita no Capítulo 3 mostrando a interessante relação existente entre o modelo de partícula livre de Dirac e o modelo de partícula livre de BZ (Rodrigues Jr. 1993). Também demonstramos a existência de uma base Lorentziana natural sobre a linha-mundo da partícula, que tem um papel fundamental na formulação do modelo geométrico de uma partícula clássica com spin. (Vide a referência [12]).

# CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES

## 1. – INTRODUÇÃO À TEORIA DE ESPAÇOS LINERAES

Nesta seção apresentamos os conceitos fundamentais da Teoria de Espaços Lineares sobre os quais baseia-se a construção da Álgebra de Clifford associada a um espaço linear real (finito) métrico.

## 1.1 – MULTIFORMAS SOBRE UM ESPAÇO LINEAR

Seja $V$ um espaço linear real, de dimensão $n$. Uma *multiforma sobre* $V$ é uma $(n+1)-$ *upla* de $k$-formas sobre $V(0 \leq k \leq n)$, isto é: [1,2]

$$A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n). \tag{1.1}$$

Definimos a soma de multiformas e o produto de escalar (real) por multiforma por:

$$\begin{aligned} A &= (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n), B = (B_0, B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_n) \to A + B = \\ &\quad (A_0 + B_0, A_1 + B_1, \cdots, A_k + B_k, \cdots, A_n + B_n) \\ &\quad \alpha \in I\!R, A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n) \to \alpha A = (\alpha A_0, \alpha A_1, \cdots, \alpha A_k, \cdots, \alpha A_n) \end{aligned}$$

$\Lambda(V)$, o conjunto de multiformas sobre $V$, com as operações definidas acima é um espaço linear real [3] , chamado de *espaço de multiformas de* $V$.

[1] Uma $k$-forma sobre $V$ é um $k$-tensor (ou tensor covariante de ordem $k$) antisimétrico sobre $V$.
[2] Se a dimensão de $V$ é $n$, então as $k$-formas sobre $V(k > n)$ são todas nulas.
[3] Se a dimensão de $V$ é $n$, então a dimensão de $\Lambda(V)$ é $2^n$.

Introduz-se em $\Lambda(V)$, um operador linear, *o operador k-parte* $(0 \leq k \leq n)$:

$$\begin{aligned}&\langle\ \rangle_k : \Lambda(V) \to \Lambda(V)/\\ &A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n) \to \langle A\rangle_k = (0, 0, \cdots, 0, A_k, 0, \cdots, 0)\end{aligned} \tag{1.2}$$

$A \in \Lambda(V)$ diz-se homogênea de graduação $k (0 \leq k \leq n)$ se $A = \langle A\rangle_k$; $A \in \Lambda(V) : A = \sum_{k=0}^{n}\langle A\rangle_k$. Identificamos as multiformas homogêneas de graduação $k$ com as $k$-formas sobre $V, \Lambda^k(V)$ denota quaisquer destes espaços lineares.

Introduz-se em $\Lambda(V)$ dois operadores lineares involutivos, a conjugação e a reversão:

$$\begin{aligned} - : \Lambda(V) &\to \Lambda(V)/\langle\overline{A}\rangle_k = (-1)^k\langle A\rangle_k\\ \sim : \Lambda(V) &\to \Lambda(V)/\langle\tilde{A}\rangle_k = (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}\langle A\rangle_k\end{aligned} \tag{1.3}$$

## 1.2 – PRODUTOS DE MULTIFORMAS

Sejam $V$ um espaço linear real, de dimensão $n$, e $g$ um tensor métrico sobre $V$ [4] (i.e. uma estrutura mínima $\langle V, g\rangle$).

*Produto Exterior* $\wedge : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \Lambda(V)/$

$$\begin{aligned}&A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n), B = (B_0, B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_n) \to A \wedge B =\\ &= \left(A_0B_0, A_0B_1 + A_1B_0, \cdots, \sum_{j=0}^{k} A_j \wedge B_{k-j}, \cdots, \sum_{j=0}^{n} A_j \wedge B_{n-j}\right)\end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $A_j \wedge B_{k-j}$ é o produto exterior da $j$-forma $A_j$ pela $(k-j)$-forma $B_{k-j}$.

*Produto Escalar* $\cdot : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to I\!R/$

$$A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n), B = (B_0, B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_n) \to A \cdot B = \sum_{j=0} A_j \cdot B_j \tag{1.5}$$

onde $A_j \cdot B_j$ é o produto escalar da $j$-forma $A_j$ pela $j$-forma $B_j$. Observe-se que na definição de produto escalar de $k$-formas utiliza-se o tensor métrico $g$.

---

[4] Um tensor métrico sobre $V$ é $g \in T^2(V)/$ *i)* $\forall x, y \in V : g(x, y) = g(y, x)$ (simetria); *ii)* $(\exists y \in V/\forall x : g(x, y) = 0) \Rightarrow y = 0$ (não degenerescência).

$$\begin{aligned}
&\textit{Contraído à esquerda}\rfloor : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \Lambda(V)/\\
&\forall C \in \Lambda(V) : (A \rfloor B) \cdot C = B \cdot (\tilde{A} \wedge C)\\
&\\
&\textit{Contraído à direita}\lfloor : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \Lambda(V)/\\
&\forall C \in \Lambda(V) : C \cdot (A \lfloor B) = (C \wedge \tilde{B}) \cdot A
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Note-se o produto escalar (dependente de $g$) nos produtos contraídos.

*Produto de Clifford* $\Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \Lambda(V)/$ (denota-se por justaposição) [2]

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} & \alpha \in \Lambda^0(V) = I\!R, B \in \Lambda(V) : \alpha B = \alpha \rfloor B (= \alpha \wedge B)\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad B\alpha = B \lfloor \alpha (= B \wedge \alpha)\\
\text{ii)} & a \in \Lambda^1(V) = V^*, B \in \Lambda(V) : aB = a \rfloor B + a \wedge B\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad Ba = B \lfloor a + B \wedge a\\
& \\
\text{iii)} & A, B, C \in \Lambda(V) : A(B + C) = AB + AC\\
& \qquad\qquad\qquad\quad (A + B)C = AC + BC\\
\text{iv)} & A, B, C \in \Lambda(V) : (AB)C = A(BC)
\end{array} \tag{1.7}$$

## 1.3 – ÁLGEBRA EXTERIOR DE MULTIFORMAS. ÁLGEBRA DE CLIFFORD DE MULTIFORMAS

$\Lambda(V)$ dotado com o produto exterior definido em (1.4) é uma álgebra associativa, chamada de *álgebra exterior de multiformas de $V$*. Denotada $\langle \Lambda(V), \wedge \rangle$.

$\Lambda(V)$ dotado com o produto exterior, o produto contraído e o produto de Clifford, definidos em (1.4), (1.6) e (1.7) é uma álgebra, chamada de *álgebra de Clifford de multiformas de $V$*. Denotada $\langle \Lambda(V), \wedge, \rfloor \lfloor, \text{produto de Clifford} \rangle$ ou $C\ell\langle V, g \rangle$.

Finalmente listamos as propriedades mais importantes dos produtos de multiformas:

$$
\begin{array}{rl}
\text{i)} & A,B\in\Lambda(V):(A\wedge B)^{-}=\overline{A}\wedge\overline{B},(A\wedge B)^{\sim}=\tilde{B}\wedge\tilde{A}\\
\text{ii)} & A,B,C\in\Lambda(V):A\wedge(B+C)=A\wedge B+A\wedge C,(A+B)\wedge C=A\wedge C+B\wedge C\\
\text{iii)} & A,B,C,\in\Lambda(V):(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)\\
\text{iv)} & A,B,C\in\Lambda(V):A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C\\
\text{v)} & A,B\in\Lambda(V):A\cdot B=B\cdot A\\
\text{vi)} & A,B,C\in\Lambda(V):A\rfloor(B+C)=A\rfloor B+A\rfloor C,(A+B)\rfloor C=A\rfloor C+B\rfloor C\\
 & \qquad A\lfloor(B+C)=A\lfloor B+A\lfloor C,(A+B)\lfloor C=A\lfloor C+B\lfloor C\\
\text{vii)} & A,B,C\in\Lambda(V):A\rfloor(B\rfloor C)=(A\wedge B)\rfloor C,(A\lfloor B)\lfloor C=A\lfloor(B\wedge C)\\
\text{viii)} & w\in\Lambda^{j}(V),\sigma\in\Lambda^{k}(V):w\rfloor\sigma=(-1)^{j(k-j)}\sigma\lfloor w,(j\leq k)\\
\text{ix)} & w\in\Lambda^{1}(V)eA,B\equiv\Lambda(V):w\rfloor(A\wedge B)=(w\rfloor A)\wedge B+\overline{A}\wedge(w\rfloor B)\\
\text{x)} & A,B\in\Lambda(V):A\cdot B=\langle\tilde{A}B\rangle_0=\langle A\tilde{B}\rangle_0\\
\text{xi)} & A,X,Y\in\Lambda(V):(AX)\cdot Y=X\cdot(\tilde{A}Y),(XA)\cdot Y=X\cdot(Y\tilde{A})\\
\text{xii)} & A,B\in\Lambda(V):(AB)^{-}=\overline{A}\,\overline{B},(AB)^{\sim}=\tilde{B}\tilde{A}
\end{array}
\tag{1.8}
$$

## 2. – INTRODUÇÃO À TEORIA DE VARIEDADES

Nesta seção apresentamos os principais conceitos da Teoria de Variedades, com os quais é possível formular-se a Teoria de Campos (i.e. a teoria de campos físicos no espaço físico).

### 2.1 – ANEL DOS CAMPOS ESCALARES

Seja $M$ uma variedade suave. Um campo escalar (real) sobre $M$ é uma função:

$$f: x\in M\to f(x)\in I\!R \tag{1.9}$$

$F(M)$, o conjunto dos campos escalares suaves sobre $M$ [1], com as operações de soma e produto de campos escalares: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ e $(fg)(x)=f(x)g(x), x\in M$; é um *anel.*

### 2.2 – MÓDULO DOS CAMPOS VETORIAIS. MÓDULO DOS DERIVADORES

Seja $M$ uma variedade suave. Um campo vetorial sobre $M$ é uma função

$$v : x \in M \to v_x \in T_xM; \text{ onde } T_xM \text{ é o espaço tangente no } x \in M \quad ^5 \tag{1.10}$$

$V(M)$, o conjunto dos campos vetoriais suaves sobre $M$, [1] com as operações de soma de campos vetoriais e produto de campo escalar por campo vetorial $(v+w)_x = v_x + w_x$ e $(fv)_x = f(x)v_x, x \in M$; é um *módulo sobre o anel* $F(M)$.

Sejam $M$ uma variedade suave e $F(M)$ o anel dos campos escalares suaves. Um derivador sobre $M$ é um operador no $F(M)$, definido por:

$$\hat{v} : F(M) \to F(M) / \forall\, f, g \in F(M) : \quad \begin{array}{ll} \text{i)} & \hat{v}(f+g) = \hat{v}f + \hat{v}g, \text{ linearidade} \\ \text{ii)} & \hat{v}(fg) = (\hat{v}f)g + f(\hat{v}g), \text{ regra de Leibnitz} \end{array} \tag{1.11}$$

$D(M)$, o conjunto dos derivadores sobre $M$, com as operações de soma de derivadores e produto de campo escalar por derivador: $(\hat{v}+\hat{w})f = \hat{v}f + \hat{w}f$ e $(g\hat{v})f = g(\hat{v}f), f \in M$; é um *módulo sobre o anel* $F(M)$.

Demonstra-se que o $V(M)$ é isomorfo ao $D(M)$. Por isso não faremos distinção notacional entre $v \in V(M)$ e $\hat{v} \in D(M)$ [6].

## 2.3 – MÓDULO DOS CAMPOS $k$-TENSORIAIS

Seja $M$ uma variedade suave. Um campo $k$-tensorial sobre $M$ é uma função

$$t : x \in M \to t_x \in T^k(T_xM), \tag{1.12}$$

onde $T^k(T_xM)$ é o espaço tangente dos $k$-tensores ao $x \in M$

$T^k(M)$, o conjunto dos campos $k$-tensoriais suaves sobre $M$ [1], com as operações de soma de campos $k$-tensoriais e produto de campo escalar por campo $k$-tensorial: $(t+s)_x = t_x + s_x$ e $(ft)_x = f(x)t_x, x \in M$, é um *módulo sobre o anel* $F(M)$.

Em particular os campos $k$-tensoriais antisimétricos sobre $M$ são chamados de campos $k$-forma: $\Lambda^k(M)$ denota o conjunto dos campos $k$-formas suaves sobre $M$; obviamente é também *módulo sobre o anel* $F(M)$.

---

[5] $T_xM$ é um espaço linear (real) fixado ao ponto $x \in M$: o espaço linear dos *vetores tangentes* no $x \in M$.

[6] O produto de Lie define-se naturalmente no $D(M)$ e pelo isomorfismo passa para o $V(M)$.

## 2.4 – MÓDULO DOS CAMPOS MULTIFORMAS

Seja $M$ uma variedade suave. Um campo multiforma sobre $M$ [3] é uma função

$$A : x \in M \to A_x \in \Lambda(T_xM); \tag{1.13}$$

onde $\Lambda(T_xM)$ é o espaço tangente das multiformas no $x \in M$.

$\Lambda(M)$, o conjunto dos campos multiformas suaves sobre $M$ [1], com as operações de soma de campos multiformas e produto de campo escalar por campo multiforma: $(A+B)_x = A_x + B_x$ e $(fA)_x = f(x)A_x, x \in M$, é um *módulo sobre o anel* $F(M)$.

Observamos que um $A \in \Lambda(M)$ realiza-se dando $(n+1)$ $A_k \in \Lambda^k(M)$:

$$A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n).$$

## 2.5 – FIBRADO DE CLIFFORD

Sejam $M$ uma variedade suave e $g$ um campo tensorial métrico [7].

O conjunto $\Lambda(TM) = \{(x, A)/x \in M, A \in \Lambda(T_xM)\}$ é chamado de *fibrado tangente de multiformas.*

Por outro lado, a estrutura algébrica $\langle \Lambda(T_xM), \wedge, \rfloor \lfloor$, produto de Clifford $\rangle$ e a álgebra de Clifford local de multiformas tangentes [ver 1.3].

A estrutura algébrica $\langle \Lambda(TM), \wedge, \rfloor \lfloor$, produto de Clifford $\rangle$ é chamada de *fibrado de Clifford.*

Até aqui apresentamos um resumo sobre as definições chaves na teoria de campos sobre uma variedade suave. Faremos agora uma síntese dos conceitos chaves na teoria de campos sobre uma curva suave.

## 2.6 – CAMPOS SOBRE UMA CURVA SUAVE

Uma curva em uma variedade suave $M$ é uma aplicação:

$$\sigma : S \to M, \tau \to \sigma(\tau) \quad (S \subset \mathbb{R}, \text{ um conjunto aberto})$$

[7] Um campo tensorial métrico sobre $M$ é um campo 2-tensorial suave sobre $M$, simétrico e não degenerado.

A curva $\sigma$ diz-se *suave* se para todo $f \in F(M) : f \circ \sigma \in C^\infty$ (1.14)

Por conveniência uma função (ordinária) $f : S \to I\!R, \tau \to f(\tau)$ chama-se de campo escalar sobre $\sigma$.

O conjunto dos campos escalares suaves (ou $\infty$-diferenciáveis) sobre $\sigma$ (i.e. $C^\infty$), denota-se também $F_\sigma(M)$. Lembre-se que $F_\sigma(M) = C^\infty$ é um *anel.*

No que segue, sejam $M$ uma variedade suave e $\sigma$ uma curva suave.

Um campo vetorial sobre $\sigma$ é uma função:

$$x : \tau \in S \to v(\tau) \in T_{\sigma(\tau)}M \tag{1.15}$$

onde $T_{\sigma(\tau)}M$ é o espaço tangente no $\sigma(\tau) \in M$.

O conjunto dos campos vetoriais suaves sobre $\sigma$, denotado $V_\sigma(M)$, é um *módulo sobre o anel* $F_\sigma(M)$.

Um campo $k$-tensorial sobre $\sigma$ é uma função:

$$t : \tau \in S \to t(\tau) \in T^k(T_{\sigma(\tau)}M) \tag{1.16}$$

onde $T^k(T_{\sigma(\tau)}M)$ é o espaço tangente dos $k$-tensores no $\sigma(\tau) \in M$.

O conjunto dos campos $k$-tensoriais suaves sobre $\sigma$, denotado $T^k_\sigma(M)$, é um *módulo sobre o anel* $F_\sigma(M)$.

Em particular os campos $k$-tensoriais antisimétricos chamam-se de campos $k$-formas, e serão denotados por $\Lambda^k_\sigma(M)$, que tem também estrutura de *módulo sobre o anel* $F_\sigma(M)$.

Um campo multiforma sobre $\sigma$ é uma função:

$$A : \tau \in S \to A(\tau) \in \Lambda(T_{\sigma(\tau)}M) \tag{1.17}$$

onde $\Lambda(T_{\sigma(\tau)}M)$ é o espaço tangente das multiformas no $\sigma(\tau) \in M$.

O conjunto dos campos multiformas suaves sobre $\sigma$, denotado $\Lambda_\sigma(M)$, é um *módulo sobre o anel* $F_\sigma(M)$.

## 2.7 – TEOREMA:

Considerem-se uma variedade suave $M$ e uma curva suave $\sigma$ em $M$; todo campo suave (ou $\infty$-diferenciável) sobre $M$ induz um campo suave (ou $\infty$-diferenciável) sobre $\sigma$.

**PROVA:**

i) *Para campos escalares*: Seja um campo escalar sobre $M, f : x \in M \to f(x) \in \mathbb{R}$; um campo escalar sobre $\sigma$ é induzido assim $f_\sigma : \tau \in S \to f_\sigma(\tau) = f[\sigma(\tau)] \in \mathbb{R}$, obviamente $f_\sigma = f \circ \sigma$. Agora se $f \in F(M)$ então, pela definição (1.14) de suavidade da curva $\sigma, f \circ \sigma \in C^\infty$. É dizer: $f \in F(M) \Rightarrow f_\sigma \in F_\sigma(M)$.

ii) *Para campos vetoriais*: Seja um campo vetorial sobre $M \quad v : x \in M \to v_x \in T_xM$, um campo vetorial sobre $\sigma$ é induzido assim $v_\sigma : \tau \in S \to v_\sigma(\tau) = v_{\sigma(\tau)} \in T_{\sigma(\tau)}M$. Observe-se que para todo $f \in F(M)$ a função ordinária $v_\sigma(\tau)f$, pode-se escrever: $v_\sigma(\tau)f = v_{\sigma(\tau)}f = (\hat{v}f)[\sigma(\tau)] = (\hat{v}f)_\sigma(\tau)$, onde $\hat{v} \in D(M)$ é o derivador associado ao campo vetorial $v \in V(M)$. Por outro lado se $f \in F(M)$ então, pela definição de suavidade de um campo vetorial sobre $M$, temos que: $\hat{v}f \in F(M)$, e pela parte (i) do Teorema, podemos afirmar que: $(\hat{v}f)_\sigma \in F_\sigma(M)$. Portanto para todo $f \in F(M)$ a função ordinária $v_\sigma(\tau)f$ é $\infty$-diferenciável; e em consequência, pela definição de suavidade de um campo vetorial sobre $\sigma, v_\sigma$ é suave. E assim, fica demonstrado que: $v \in V(M) \Rightarrow v_\sigma \in V_\sigma(M)$.

iii) Para campos $k$-tensoriais e campos multiformas sobre $M$, os campos induzidos sobre $\sigma$ definem-se em forma análoga; e a suavidade dos campos sobre $M$ implica a suavidade dos campos induzidos sobre $\sigma$ segundo a mesma linha de razonamento.

# CAPÍTULO 2

# FORMALISMO LAGRANGEANO NO FIBRADO DE CLIFFORD

Primeiramente daremos uma definição do espaço-tempo Minkowskiano, isto é, do espaço-tempo chato da relatividade restrita, que é suficientemente rigorosa só para nossos propósitos.

Depois introduziremos a derivada parcial de campos sobre a variedade Minkowskiana e a derivada absoluta de campos sobre uma linha-mundo.

Finalmente faremos uma síntese dos conceitos importantes na elaboração do formalismo Lagrangeano.

## 2.1 – ESPAÇO-TEMPO MINKOWSKIANO

Chama-se de espaço-tempo Minkowskiano à estrutura mínima $\langle M, g\rangle$, onde:

*M* é uma variedade suave quadridimensional e $g$ é um campo tensorial métrico sobre $M$; tal que existe $k$, um sistema de coordenadas global sobre $M$, isto é, um homeomorfismo $k : x \in M \to (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$, e as componentes de $g$ na base natural $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle$ associada ao $k$, são:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \eta_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

ou equivalentemente a expressão de $g$ na base natural $\langle dx^\mu \rangle$ $\left(\text{a dual de } \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle\right)$ associada ao $k$, é:

$$g = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{2.2}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz real $4 \times 4$ chamada de matriz Minkowskiana, dados por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, \mu & = & \nu = 0 \\ -1, \mu & = & \nu = 1, 2, 3 \\ 0, \mu & \neq & \nu \end{cases}$$

As coordenadas Minkowskianas $x^\mu \in \mathbb{R}$ estão relacionadas com a coordenada temporal $t \in \mathbb{R}$ e as coordenadas cartesianas $x, y, z, \in \mathbb{R}$, por: $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$.

Observamos que existem infinitas outras cartas globais sobre $M$ tais que $g$ expressa-se nas formas (2.1) ou (2.2).

Os campos vetoriais coordenados $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ da $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle$ e os campos covetoriais coordenados $dx^\mu$ da $\langle dx^\mu \rangle$ serão denotados por:

$$\begin{aligned} e_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \gamma^\mu &= dx^\mu \end{aligned} \tag{2.3}$$

Os campos vetoriais recíprocos dos $e_\mu$ e os campos covetoriais recíprocos dos $\gamma^\mu$ serão definidos por:

$$\begin{aligned} e^\mu &= \eta^{\mu\nu} e_\nu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \gamma_\mu &= \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ são os elementos da matriz real $4 \times 4$ inversa da matriz $(\eta_{\mu\nu})$. Observe-se que $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

$M$ será chamada de variedade Minkowskiana; $g$ será chamado de "métrica de Minkowski"; $k$ será chamado de sistema de coordenadas Lorentziano. E as bases $\langle e_\mu \rangle, \langle e^\mu \rangle$ e $\langle \gamma^\mu \rangle, \langle \gamma_\mu \rangle$ serão chamadas de bases Lorentzianas (fundamentais). (Vide Apêndice C).

## 2.2 – DERIVADAS PARCIAIS DE CAMPOS SOBRE A VARIEDADE MINKOWSKIANA

O operador de derivada parcial simboliza-se $\partial_\mu$. Definimos as derivadas parciais de campo escalar, campo vetorial, campo $k$-forma e campo multiforma.

i) Para $f \in F(M) : \partial_\mu f = e_\mu f$

ii) Para $v \in V(M) : \partial_\mu v = [e_\mu, v]$ (i.e. o produto de Lie)

iii) Para $\eta \in \Lambda^k(M) : (\partial_\mu \eta)(v_1, \cdots, v_k) = \partial_\mu \eta(v_1, \cdots, v_k) - \sum_{j=1}^{k} \eta(v_1, \cdots, \partial_\mu v_j, \cdots, v_k)$
(observe-se no primeiro termo a derivada parcial do tipo (i) e o segundo termo as derivadas parciais do tipo (ii))

iv) Para $A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n) \in \Lambda(M)$:
$$\partial_\mu A = (\partial_\mu A_0, \partial_\mu A_1, \cdots, \partial_\mu A_k, \cdots, \partial_\mu A_n) \tag{2.5}$$
(observe-se a derivação parcial "componente a componente" do tipo (iii)).

A derivação parcial tem as seguintes propriedades importantes:

i) $f, g \in F(M) : \partial_\mu(f+g) = \partial_\mu f + \partial_\mu g$
$$\partial_\mu(fg) = (\partial_\mu f)g + f(\partial_\mu g)$$

ii) $v, w \in V(M) : \partial_\mu(v+w) = \partial_\mu v + \partial_\mu w$
$$\partial_\mu(v \cdot w) = (\partial_\mu v) \cdot w + v \cdot (\partial_\mu w)$$

iii) $\varphi \in \Lambda^k(M), \psi \in \Lambda^k(M) : \partial_\mu(\varphi + \psi) = \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \psi$ (2.6)
$$\partial_\mu(\varphi \cdot \psi) = (\partial_\mu \varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\partial_\mu \psi)$$
$$\varphi \in \Lambda^j(M), \psi \in \Lambda^k(M) : \partial_\mu(\varphi \wedge \psi) = (\partial_\mu \varphi) \wedge \psi + \varphi \wedge (\partial_\mu \psi)$$

iv) $A, B \in \Lambda(M) : \partial_\mu(A+B) = \partial_\mu A + \partial_\mu B$
$$\partial_\mu(A \wedge B) = (\partial_\mu A) \wedge B + A \wedge (\partial_\mu B)$$
$$\partial_\mu(A \cdot B) = (\partial_\mu A) \cdot B + A \cdot (\partial_\mu B)$$
$$\partial_\mu(A \rfloor B) = (\partial_\mu A) \rfloor B + A \rfloor (\partial_\mu B), \partial_\mu(A \lfloor B) = (\partial_\mu A) \lfloor B + A \lfloor (\partial_\mu B)$$
$$\partial_\mu(AB) = (\partial_\mu A)B + A(\partial_\mu B)$$

## 2.3 – DERIVADA ABSOLUTA DE CAMPOS SOBRE UMA LINHA-MUNDO

Introduzimos os conceitos de trajetória e velocidade para uma curva suave $\sigma$ na variedade Minkowskiana $M$.

Chama-se de *trajetória* o campo 1-forma suave sobre $\sigma$, definido por:

$$x : \tau \in S \to x(\tau) \in \Lambda^1(T_{\sigma(\tau)}M) \text{ tal que } x(\tau) = x^\mu(\tau)\gamma_\mu; \ (S \subset \mathbb{R}) \tag{2.7}$$

onde $x^\mu(\tau) = (x^\mu \circ \sigma)(\tau)$ são as equações paramétricas da curva suave $\sigma$ ($\tau$, o tempo próprio, é o parâmetro).

Chama-se de *velocidade* o campo 1-forma suave sobre $\sigma$, definido por:

$$v : \tau \in S \to v(\tau) \in \Lambda^1(T_{\sigma(\tau)}M) \text{ tal que } v(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)\gamma_\mu \tag{2.8}$$

A curva suave $\sigma$ diz-se uma *linha-mundo* se $\forall\ \tau \in S : v(\tau) \cdot v(\tau) > 0$ (i.e. $v$ é *tipo tempo*).

O operador de derivada absoluta simboliza-se $\frac{d}{d\tau}$. Definimos a derivada absoluta de campo escalar, campo vetorial, campo $k$-forma e campo multiforma.

i) Para $f \in F_\sigma(M) : \frac{df}{d\tau} =$ derivada ordinária.

ii) Para $v \in V_\sigma(M)$ define-se pelos seguintes axiomas:

a) $\quad v, w \in V_\sigma(M) : \frac{d}{d\tau}(v + w) = \frac{dv}{d\tau} + \frac{dw}{d\tau}$

b) $\quad f \in F_\sigma(M), v \in V_\sigma(M) : \frac{d}{d\tau}(fv) = \frac{df}{d\tau}v + f\frac{dv}{d\tau}$

(observe-se no primeiro termo a derivada absoluta do tipo (i))

c) para todo $v \in V(M) : \frac{dv_\sigma}{d\tau} = \dot{x}^\mu(\partial_\mu v)_\sigma$

onde $\dot{x}^\mu \equiv \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ são as componentes da velocidade (2.8) na base Lorentziana $\langle\gamma_\mu\rangle$ (observe-se que $v_\sigma \in V_\sigma(M)$ e $(\partial_\mu v)_\sigma \in V_\sigma(M)$ de acordo com o teorema (2.7 do Cap. 1).

iii) Para $\eta \in \Lambda^k_\sigma(M)$ : $\left(\dfrac{d\eta}{d\tau}\right)(v_1, \cdots, v_k) = \dfrac{d}{d\tau}\eta(v_1, \cdots, v_k) - \sum_{j=1}^{k}\eta\left(v_1, \cdots, \dfrac{dv_j}{d\tau}, \cdots, v_k\right)$ (observe-se no primeiro termo a derivada absoluta do tipo (i) e no segundo termo a derivada absoluta do tipo (ii)).

iv) Para $A = (A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n) \in \Lambda(M)$:

$$\frac{dA}{d\tau} = \left(\frac{dA_0}{d\tau}, \frac{dA_1}{d\tau}, \cdots, \frac{dA_k}{d\tau}, \cdots, \frac{dA_n}{d\tau}\right) \tag{2.9}$$

(observe-se a derivação absoluta "componente a componente" do tipo (iii)).

A derivada absoluta tem obviamente propriedades importantes análogas às da derivada parcial, algumas dessas são:

i) $A, B \in \Lambda_\sigma(M) : \dfrac{d}{d\tau}(A + B) = \dfrac{dA}{d\tau} + \dfrac{dB}{d\tau}$

ii) $A, B \in \Lambda_\sigma(M) : \dfrac{d}{d\tau}(A \cdot B) = \dfrac{dA}{d\tau} \cdot B + A \cdot \dfrac{dB}{d\tau}$

$$\frac{d}{d\tau}(A \wedge B) = \frac{dA}{d\tau} \wedge B + A \wedge \frac{dB}{d\tau} \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{d\tau}(A \rfloor B) = \frac{dA}{d\tau} \rfloor B + A \rfloor \frac{dB}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau}(A \lfloor B) = \frac{dA}{d\tau} \lfloor B + A \lfloor \frac{dB}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}(AB) = \frac{dA}{d\tau}B + A\frac{dB}{d\tau}$$

## 2.4 – APLICAÇÕES DE HESTENES

Chamamos de aplicação de Hestenes (de 1-variável) [4] sobre a variedade Minkowskiana $M$, à aplicação

$$\mathcal{F} : \Lambda(M) \to \Lambda(M), X \to \mathcal{F}(X). \tag{2.11}$$

A aplicação de Hestenes (de $k$-variáveis) sobre $M$, define-se

$$\mathcal{F} : \Lambda(M) \times \cdots \times \Lambda(M) \to \Lambda(M), (X^1, \cdots, X^k) \to \mathcal{F}(X^1, \cdots, X^k). \tag{2.12}$$

De forma análoga definimos as aplicações de Hestenes (de 1-variável e $k$-variáveis) sobre uma curva suave $\sigma$.

Sejam $\mathcal{F}$ uma aplicação de Hestenes do tipo (2.11) e $A \in \Lambda(M)$. Definimos a derivada de $\mathcal{F}$ na direção de $A$, como:

$$\mathcal{F}'_A(X) = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(X + \lambda A)\Big|_{\lambda=0} \tag{2.13}$$

(observe-se que $\mathcal{F}(X + \lambda A)$ é um campo multiforma dependente de um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{d}{d\lambda}$ é o operador derivada para este tipo de campos $\lambda$-parametrizados).

Também definem-se o gradiente de $\mathcal{F}$, a divergência de $\mathcal{F}$ e o rotacional de $\mathcal{F}$, por:

$$\begin{aligned} \partial_X \mathcal{F} &= \mathcal{F}'_1 + \frac{1}{1!}\gamma^\mu \mathcal{F}'_{\gamma_\mu} + \frac{1}{2!}(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu)\mathcal{F}'_{\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu} + \cdots \\ \partial_X \rfloor \mathcal{F} &= \mathcal{F}'_1 + \frac{1}{1!}\gamma^\mu \rfloor \mathcal{F}'_{\gamma_\mu} + \frac{1}{2!}(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu)\rfloor \mathcal{F}'_{\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu} + \cdots \\ \partial_X \wedge \mathcal{F} &= \mathcal{F}'_1 + \frac{1}{1!}\gamma^\mu \wedge \mathcal{F}'_{\gamma_\mu} + \frac{1}{2!}(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \wedge \mathcal{F}'_{\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu} + \cdots \end{aligned} \tag{2.14}$$

que serão chamados em geral de *derivadas de Hestenes.*

Algumas identidades importantes que envolvem as derivadas de Hestenes são:

$$\begin{aligned} &\text{i)} && \partial_X X \cdot X = 2X \\ &\text{ii)} && A \in \Lambda(M) : \partial_X A \cdot X = A \\ &\text{iii)} && A, B \in \Lambda(M) : \partial_X (AXB) \cdot X = AXB + \tilde{A}X\tilde{B} \end{aligned} \tag{2.15}$$

iv) Sejam $\mathcal{A} : x \in \Lambda^1_\sigma(M) \rightharpoonup \mathcal{A}(x) \in \Lambda^1_\sigma(M)$ uma aplicação de Hestenes sobre uma linha-mundo $\sigma$ e $B \in \Lambda_\sigma(M)$:

$$\partial_x \mathcal{A}(x) \cdot B = (B \cdot \partial_x)\mathcal{A}(x) - B \rfloor (\partial_x \wedge \mathcal{A}(x)) (x \text{ é a trajetória})$$

v) Para a aplicação de Hestenes $A$ (sobre a linha-mundo $\sigma$) associada ao campo 1-forma $A \in \Lambda^1(M)$, temos que:

$$\begin{aligned} \partial_x \wedge A(x) &= (\partial \wedge A)(x) \\ \frac{d}{d\tau} A(x) &= (v \cdot \partial_x) A(x), \text{ onde } v = \dot{x} \text{ é a velocidade.} \end{aligned} \tag{2.16}$$

## 2.5 – FORMALISMO LAGRANGEANO

Uma *Lagrangeana* para um campo multiforma $X \in \Lambda(M)$ é uma aplicação de Hestenes

$$\mathcal{L} : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \rightharpoonup F(M), (X, \partial X) \to \mathcal{L}(X, \partial X) \tag{2.17}$$

onde $\partial X$ é a derivada de Dirac de $X \in \Lambda(M)$, definida por: $\partial X = \gamma^\mu \partial_\mu X$.

A *ação* associada à Lagrangeana $\mathcal{L}$ é a aplicação de Hestenes

$$\begin{aligned} S : \Lambda(M) \to F(M) \quad &, \quad X \to S(X) \text{ tal que} \\ S(X) &= \int_\Omega \mathcal{L}(X, \partial X) d^4\Omega \end{aligned} \tag{2.18}$$

*Princípio de Mínima Ação*

Para todo

$$A \in \Lambda(M) : A\Big|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \delta_X S(A) = 0, \tag{2.19}$$

onde $\delta_X S$ é o "diferencial de Hestenes" de $S$ em relação a $X \in \Lambda(M)$, definido por: $\delta_X S(Y) = S'_Y(X)$.

*Equação de Euler-Lagrange*

O princípio de mínima ação implica uma equação diferencial, chamada de equação de Euler-Lagrange , esta é:

$$\partial \partial_{\partial X} \mathcal{L} - \partial_X \mathcal{L} = 0 \tag{2.20}$$

(observe-se que no 1º termo $\partial_{\partial X}\mathcal{L}$ é $\partial_{\partial X}\mathcal{L}(X, \partial X)$ e no 2º termo $\partial_X \mathcal{L}$ é $\partial_X \mathcal{L}(X, \partial X)$).

Uma *Lagrangeana* para um campo multiforma $\psi \in \Lambda_\sigma(M)$ é uma aplicação de Hestenes

$$\mathcal{L} : \Lambda_\sigma(M) \times \Lambda_\sigma(M) \rightharpoonup F_\sigma(M), (\psi, \dot{\psi}) \to \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}) \tag{2.21}$$

onde $\dot{\psi} = \dfrac{d\psi}{d\tau}$ é a derivada absoluta de $\psi \in \Lambda_\sigma(M)$.

A *ação* associada à Lagrangeana $\mathcal{L}$ é a aplicação de Hestenes

$$\begin{aligned} S : \Lambda_\sigma(M) \rightharpoonup F_\sigma(M) \quad &, \quad \psi \rightharpoonup S(\psi) \text{ tal que} \\ S(\psi) \quad &= \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}) d\tau. \end{aligned} \tag{2.22}$$

*Princípio de Mínima Ação*

Para todo

$$\eta \in \Lambda_\sigma(M) : \eta(\tau_1) = \eta(\tau_2) = 0 \Rightarrow \delta_\psi S(\eta) = 0 \tag{2.23}$$

onde $\delta_\psi S$ é o "diferencial de Hestenes" de $S$ em relação a $\psi \in \Lambda_\sigma(M)$, definido por: $\delta_\psi S(\phi) = S'_\phi(\psi)$..

*Equação de Euler-Lagrange*

O princípio de mínima ação implica uma equação diferencial, chamada equação de Euler-Lagrange, esta é:

$$\frac{d}{d\tau} \partial_{\dot{\psi}} \mathcal{L} - \partial_\psi \mathcal{L} = 0 \tag{2.24}$$

(observe-se que no 1º termo $\partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L}$ significa $\partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L}(\psi, \dot{\psi})$ e no 2º termo $\partial_\psi \mathcal{L}$ significa $\partial_\psi \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi})$).

# CAPÍTULO 3

# MODELO DE PARTÍCULA CLÁSSICA COM SPIN

Aqui analizamos um modelo de partícula clássica com spin que foi proposto por Barut e Zanghi (BZ) em 1984. Neste modelo o eletron foi caracterizado pelo usual par de variáveis conjugadas $(x^\mu, p_\mu)$ de uma partícula clássica, e por um segundo par de variáveis spinoriais conjugadas $(z, i\overline{z})$ ($z$ era spinor de Dirac e $\overline{z} = z^\dagger\gamma^0$ o spinor conjugado de Dirac) [8].

Mais tarde Pavšic, Recami e Rodrigues Jr. em um "paper" sobre spin e a estrutura do eletron [5], conseguiram reformular esse modelo de Partícula de Barut-Zanghi no Formalismo de Fibrado de Clifford [12] (i.e. no Formalismo da Álgebra do Espaçø-Tempo). Vide Apêndice C.

Aqui partindo simplesmente da Lagrangeana de BZ, reformulado pelos autores mencionados acima, fazemos um estudo aprofundado desse modelo de partícula clássica com spin. Fundamentalmente, discutimos o significado de variáveis primitivas e obtemos teoremas de conservação para algumas importantes quantidades físicas.

## 3.1 – LAGRANGEANA DE BARUT–ZANGHI

A Lagrangeana para uma *Partícula de Barut–Zanghi* carregada, movendo-se em um campo eletromagnético, é a aplicação de Hestenes (sobre a linha-mundo $\sigma$), definida por:

$$\mathcal{L} : \Lambda_\sigma(M) \times \cdots \times \Lambda_\sigma(M) \to F_\sigma(M), (x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi}) \to \mathcal{L}(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi}) \text{ tal que}$$
$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi}) = \hbar(\dot{\psi}\gamma_2\gamma_1) \cdot \psi + p \cdot (\dot{x} - c\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) + c\ e\ (A(x)\psi\gamma_0) \cdot \psi \tag{3.1}$$

onde: $e$ é a carga da partícula,

$A$ é a aplicação de Hestenes (sobre a linha-mundo $\sigma$), associada ao campo de Maxwell $A \in \Lambda^1(M)$ (i.e. o potencial eletromagnético). [1]

Observamos que as *variáveis primitivas* para a partícula de BZ, são:

i) $x \in \Lambda^1_\sigma(M)$, um campo 1-forma sobre a linha-mundo $\sigma$, definido por:

$$x : \tau \in S \to x(\tau) \in \Lambda^1(T_{\sigma(\tau)}M) \text{ tal que } x(\tau) = x^\mu(\tau)\gamma_\mu, \quad (S \subset \mathbb{R})$$

onde $x^\mu(\tau) \equiv (x^\mu \circ \sigma)(\tau)$, são as equações paramétricas da linha-mundo $\sigma$ ($\tau$, o tempo próprio, é o parâmetro), $x \in \Lambda^1_\sigma(M)$ chama-se de *trajetória*.

ii) $p \in \Lambda^1_\sigma(M)$, um campo 1-forma sobre a linha-mundo $\sigma$, chamado de *momento*, $p \in \Lambda^1_\sigma(M)$ pode-se expressar, na base Lorentziana $\langle\gamma_\mu\rangle$, como: $p = p^\mu\gamma_\mu$.

(3.2)

iii) $\psi \in \Lambda^+_\sigma(M)$, um campo multiforma par (i.e. $\psi = \overline{\psi}$) sobre a linha-mundo $\sigma$, chamada de *spinor* [9],[2].

$\psi \in \Lambda^+_\sigma(M)$ pode-se expressar, na base $\langle\gamma_\mu\rangle$ como:

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2!}\psi_2^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{1}{4!}\psi_4^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho;$$

onde $\psi_0, \psi_2^{\mu\nu}, \psi_4^{\lambda\mu\nu\rho}$ são as $1+6+1=8$ componentes (reais) do spinor $\psi \in \Lambda^+_\sigma(M)$.

Vamos agora obter as equações diferenciais para este modelo de Barut-Zanghi de partícula clássica com spin.

Recordamos que as equações de Euler-Lagrange, para este tipo de Lagrangeana (discutida no Cap. 2), obtidas do Formalismo Lagrangeano no Fibrado de Clifford, são:

$$\frac{d}{d\tau}\partial_{\dot{x}}\mathcal{L} - \partial_x\mathcal{L} = 0 \tag{3.3a}$$

$$\partial_p\mathcal{L} = 0 \tag{3.3b}$$

---

[1] A aplicação de Hestenes (sobre a linha-mundo $\sigma$) associada a $A \in \Lambda^1(M)$, define-se $x \in \Lambda^1_\sigma(M) \to A(x) = A_\sigma \in \Lambda^1_\sigma(M)$, onde $x$ é a trajetória e $A_\sigma \equiv A \circ \sigma$ é " $A$ calculado sobre a linha-mundo $\sigma$".

[2] Para sermos mais rigorosos, chamamos de representante do spinor na base $\langle\gamma_\mu\rangle$. (Vide referência [13]).

$$\frac{d}{d\tau}\partial_{\dot\psi}\mathcal{L} - \partial_\psi\mathcal{L} = 0 \tag{3.3c}$$

Com a lagrangeana de BZ (3.1), calculamos as derivadas de Hestenes na equação (3.3.a) associada à trajetória $x$

$$\begin{aligned}
\partial_{\dot x}\mathcal{L} &= \partial_{\dot x} p\cdot\dot x = p \\
\partial_x\mathcal{L} &= \partial_x ce(A(x)\psi\gamma_0)\cdot\psi = e\partial_x A(x)\cdot c(\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) \\
&= e\{c((\psi\gamma_0\widetilde{\psi})\cdot\partial_x)A(x) - c(\psi\gamma_0\widetilde{\psi})\rfloor(\partial_x\wedge A(x))\} \\
\partial_x\mathcal{L} &= e\{c((\psi\gamma_0\widetilde{\psi})\cdot\partial_x)A(x) - c(\psi\gamma_0\widetilde{\psi})\rfloor F(x)\}
\end{aligned}$$

onde $F$ é a aplicação de Hestenes sobre a linha-mundo $\sigma$, associada ao campo de Faraday $F\in\Lambda^2(M)$ (i.e. o campo eletromagnético). [3]

Aqui utilizamos a identidade (1.8 xi) para o produto escalar, as identidades (2.15 ii), (2.15 iii) e (2.15 v) para as derivadas de Hestenes e a equação (A.5) da Apêndice A.

Colocando na equação (3.3.a) os resultados obtidos acima chegamos a:

$$\dot p - e\{c((\psi\gamma_0\widetilde{\psi})\cdot\partial_x)A(x) - (\psi\gamma_0\widetilde{\psi})\rfloor F(x)\} = 0 \tag{3.4a}$$

Da equação (3.3.b), associada ao momento $p$, com a lagrangeana de BZ (3.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_p p\cdot(\dot x - c\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) &= 0 \\
\dot x - c\psi\gamma_0\widetilde{\psi} &= 0
\end{aligned} \tag{3.4b}$$

onde usamos novamente a identidade (2.15 ii).

Finalmente, com a lagrangeana de BZ (3.1), calculamos as derivadas de Hestenes na equação (3.3c) associada ao spinor $\psi$

$$\begin{aligned}
\partial_{\dot\psi}\mathcal{L} &= \partial_{\dot\psi}\hbar(\dot\psi\gamma_2\gamma_1)\cdot\psi = \hbar\partial_{\dot\psi}\dot\psi\cdot(\psi\gamma_1\gamma_2) \\
\partial_{\dot\psi}\mathcal{L} &= \hbar\psi\gamma_1\gamma_2 \\
\partial_\psi\mathcal{L} &= \partial_\psi\hbar(\dot\psi\gamma_2\gamma_1)\cdot\psi - \partial_\psi cp\cdot(\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) + \partial_\psi ce(A(x)\psi\gamma_0)\cdot\psi \\
&= \hbar\dot\psi\gamma_2\gamma_1 - c\partial_\psi\psi\cdot(p\psi\gamma_0) + ce\partial_\psi(A(x)\psi\gamma_0)\cdot\psi \\
\partial_\psi\mathcal{L} &= \hbar\dot\psi\gamma_2\gamma_1 - 2cp\psi\gamma_0 + 2ceA(x)\psi\gamma_0
\end{aligned}$$

[3] Definida de forma análoga ao caso do potencial eletromagnético.

onde usamos novamente as identidades (1.8 xi) e (2.15 ii).

Colocando na equação (3.3c) os resultados obtidos acima, chegamos a:

$$\hbar\dot{\psi}\gamma_1\gamma_2 + c(p - eA(x))\psi\gamma_0 = 0 \tag{3.4c}$$

Se introduzirmos uma nova quantidade física definida por, $\pi = p - eA(x)$, então o sistema de equações (3.4a, 3.4b, 3.4c) pode ser escrito em uma forma muito mais compacta e conveniente, esta é:

$$\dot{\pi} = eF(x)\lfloor v \tag{3.5a}$$

$$v = c\psi\gamma_0\widetilde{\psi} \tag{3.5b}$$

$$\hbar\dot{\psi}\gamma_1\gamma_2 + c\pi\psi\gamma_0 = 0 \tag{3.5c}$$

$v = \dot{x} \in \Lambda^1_\sigma(M)$, é um campo 1-forma sobre a linha-mundo $\sigma$, chamado de *velocidade*. $\pi \in \Lambda^1_\sigma(M)$, um campo 1-forma sobre a linha-mundo $\sigma$, chama-se de *momento cinético*.

No que segue estudaremos as possíveis conservações de algumas quantidades físicas neste modelo de partícula clássica com spin, a saber: o momento, a energia e o momento angular.

Primeiramente vamos obter duas importantes equações, que serão utilizadas posteriormente nas análises dessas conservações.

Da equação (3.5c) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{c}{\hbar}\pi\psi\gamma_0\gamma_2\gamma_1 \\ \dot{\widetilde{\psi}} &= -\frac{c}{\hbar}\gamma_1\gamma_2\gamma_0\widetilde{\psi}\pi \end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora derivando a equação (3.5b), e levando em conta a equação (3.6), temos:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{d}{d\tau}(c\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) = c(\dot{\psi}\gamma_0\widetilde{\psi} + \psi\gamma_0\dot{\widetilde{\psi}}) \\ \dot{v} &= -\frac{c^2}{\hbar}(\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi}\pi - \pi\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi}) \end{aligned}$$

Mas levando em conta que $\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi} \in \Lambda^2_\sigma(M)$, obtemos finalmente que:

$$\dot{v} = \frac{2c^2}{\hbar}(\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi})\lfloor\pi \tag{3.7}$$

Por outro lado, derivando $\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi} \in \Lambda^2_\sigma(M)$ e levando em conta as equações (3.6) e (3.5b) temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi}) &= \dot{\psi}\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi} + \psi\gamma_2\gamma_1\dot{\widetilde{\psi}} \\
&= -\frac{c}{\hbar}(\pi\psi\gamma_0\gamma_2\gamma_1\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi} + \psi\gamma_2\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_0\widetilde{\psi}\pi) \\
&= \frac{1}{\hbar}(\pi v - v\pi) \\
\frac{d}{d\tau}(\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi}) &= \frac{2}{\hbar}\pi \wedge v
\end{aligned} \tag{3.8}$$

## 3.2 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

Observamos que no caso de uma partícula de BZ livre (i.e. $A = 0$), temos que $\pi = p - eA(x) = p$ e $F = \partial \wedge A = 0$, e assim a equação (3.5a) fica simplesmente:

$$\frac{dp}{d\tau} = 0 \tag{3.9}$$

Isto significa que para a partícula de BZ livre o momento $p$ é conservado; um resultado análogo ao caso de partícula clássica livre.

Sem embargo, observe-se que a velocidade da partícula de BZ livre não é necessariamente constante! (veja se a equação (3.5b)), e assim o momento $p$ não poderia ser jamais o momento mecânico clássico ($p = mv$). Portanto, o resultado anterior não é uma trivialidade.

## 3.3 – CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Para o caso geral da partícula de BZ carregada movendo-se em um campo eletromagnético, das equações (3.5a) e (3.7) obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi} \cdot v &= e(F(x)\lfloor v) \cdot v = 0 \\
\pi \cdot \dot{v} &= \pi \cdot \left(\frac{2c^2}{\hbar}(\psi\gamma_2\gamma_1\widetilde{\psi})\lfloor\pi\right) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}\cdot v+\pi\cdot\dot{v} &= 0\\
\frac{d}{d\tau}(\pi\cdot v) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Isto significa que para a partícula de BZ existe $\pi\cdot v\in F_\sigma(M)$, um campo escalar sobre a linha-mundo $\sigma$, que se conserva. Identificamos $\pi\cdot v$ como um tipo de energia da partícula BZ carregada movendo-se em um campo eletromagnético. E assim, se definirmos a *energia* $E=\pi\cdot v$, podemos dizer de acordo com a equação (3.10) que: para uma partícula de BZ carregada movendo-se em um campo eletromagnético, a energia $E$ é conservada.

Observe-se que ainda no caso da partícula de BZ livre (i.e. $A=0$), onde a energia é $E=p\cdot v$, o resultado anterior também não é nenhuma trivialidade, pois esta energia conservada não tem nada a ver com a energia da partícula clássica livre $\left(E=\sqrt{(mc^2)^2+c^2p^2}\right)$.

## 3.4 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Novamente para o caso da partícula de BZ livre (i.e. $A=0$), observamos que as equações (3.5a) e (3.8) ficam simplesmente:

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= 0\\
\frac{d}{d\tau}(\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}) &= \frac{2}{\hbar}p\wedge v
\end{aligned}
$$

de onde imediatamente obtemos:

$$
\begin{aligned}
x\wedge\dot{p} &= 0\\
v\wedge p &= -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}\right)\\
v\wedge p+x\wedge\dot{p} &= -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}\right)\text{ ou seja}\\
\frac{d}{d\tau}\left(x\wedge p+\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}\right) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Isto significa que para a partícula de BZ livre existe $x\wedge p+\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}\in\Lambda^2_\sigma(M)$, um campo 2-forma sobre a linha-mundo $\sigma$, que se conserva. Interpretamos o primeiro termo como um tipo de momento angular (extrínseco) $L=x\wedge p$, que chamaremos simplesmente *momento angular*; e segundo termo, como um tipo de momento angular (intrínseco) $S=\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}$, que chamaremos simplesmente *spin*.

Logo se definirmos o momento angular total $J = L + S$ podemos afirmar de acordo com a equação (3.11), que, para a partícula de BZ livre o momento angular $J$ é conservado.

Observemos ainda que o momento angular $L$ não é conservado, como seria de esperar em uma partícula clássica livre. Portanto novamente concluímos que o modelo de rtícula BZ livre não tem nada a ver com o modelo de partícula clássica livre.

Por outro lado notemos que a existência do spin $S$, um conteúdo de momento anlar próprio, restabelece naturalmente a conservação do momento angular (total) para partícula de BZ livre, tal como deveria ser em qualquer modelo de partícula livre (i.e. nsistência com a lei de conservação de momento angular).

Agora para finalizarmos a nossa análise das conservações, voltamos ao caso geral da *rtícula de BZ carregada, movendo-se em um campo eletromagnético.*

Pelas análises feitas nos ítens 3.3 e 3.4 vemos a conveniência de definirmos as seguins quantidades físicas: a *energia* $E = \pi \cdot v$, o *momento angular cinético* $L_\pi = x \wedge \pi$, o *in* $S = \frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_1\tilde{\psi}$ e o *momento angular cinético total* $J_\pi = L_\pi + S$.

Se tomarmos as equações (3.5a), (3.7) e (3.8), completamente gerais, e seguirmos na linha de razonamento análoga à utilizada nos ítens 3.3 e 3.4 obteremos que: para na partícula de BZ carregada, movendo-se em um campo eletromagnético são válidos seguintes teoremas:

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi} &= eF(x)\lfloor v \\
\dot{v} &= \frac{4c^2}{\hbar^2} S\lfloor \pi \\
\dot{S} &= \pi \wedge v \\
\dot{E} &= 0 \\
\dot{J}_\pi &= x \wedge (eF(x)\lfloor v)
\end{aligned}
$$

## 5 – HAMILTONIANA DE BARUT-ZANGHI

Continuamos aqui com uma discusão geral sobre a energia da partícula de Barutnghi.

Primeiramente desenvolveremos um teorema geral do formalismo Lagrangeano no fibrado de Clifford, a saber: o *teorema da energia.*

Demonstraremos a existência de uma aplicação de Hestenes associado à Lagrangeana cuja imagem, um campo escalar sobre a linha-mundo $\sigma$, é a *energia.* A aplicação será chamada simplesmente de *aplicação de energia.*

Veremos logo uma outra aplicação de Hestenes associada à Lagrangeana, construída com a aplicação de energia, esta é *a Hamiltoniana.*

A Lagrangeana de BZ é uma aplicação de Hestenes do tipo:

$$(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi}) \rightarrow \mathcal{L}(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi}).$$

Para começarmos derivamos $\mathcal{L}(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi}) \in F_\sigma(M)$, utilizando-se a regra de cadeia do cálculo de Hestenes

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L} = (\dot{x} \cdot \partial_x)\mathcal{L} + (\ddot{x} \cdot \partial_{\dot{x}})\mathcal{L} + (\dot{p} \cdot \partial_p)\mathcal{L} + (\dot{\psi} \cdot \partial_\psi)\mathcal{L} + (\ddot{\psi} \cdot \partial_{\dot{\psi}})\mathcal{L} \tag{3.12}$$

(observe-se que: $\mathcal{L}$ no lado esquerdo é $\mathcal{L}(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi})$ e $(\dot{x} \cdot \partial_x)\mathcal{L}$ no lado direito é $(\dot{x} \cdot \partial_x)\mathcal{L}(x, \dot{x}, p, \psi, \dot{\psi})$, etc.).

Por outro lado, como $\mathcal{L}$ é uma *aplicação escalar*: $(\dot{x} \cdot \partial_x)\mathcal{L} = \dot{x} \cdot (\partial_x \mathcal{L}), (\dot{\psi} \cdot \partial_\psi)\mathcal{L} = \dot{\psi} \cdot (\partial_\psi \mathcal{L})$, etc. e então a equação (3.12) pode ser escrita:

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L} = \dot{x} \cdot (\partial_x \mathcal{L}) + \ddot{x} \cdot (\partial_{\dot{x}} \mathcal{L}) + \dot{p} \cdot (\partial_p \mathcal{L}) + \dot{\psi} \cdot (\partial_\psi \mathcal{L}) + \ddot{\psi} \cdot (\partial_{\dot{\psi}} \mathcal{L}) \tag{3.13}$$

Agora lembrando-nos das equações de Euler-Lagrange (3.3a), (3.3b), (3.3c) para este tipo de Lagrangeana, a equação (3.13) pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\mathcal{L} &= \dot{x} \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\partial_{\dot{x}}\mathcal{L}\right) + \frac{d\dot{x}}{d\tau} \cdot \partial_{\dot{x}}\mathcal{L} + \dot{\psi} \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L}\right) + \frac{d\dot{\psi}}{d\tau} \cdot \partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L} \\
\frac{d}{d\tau}\mathcal{L} &= \frac{d}{d\tau}(\dot{x} \cdot \partial_{\dot{x}}\mathcal{L}) + \frac{d}{d\tau}(\dot{\psi} \cdot \partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L}).
\end{aligned}$$

De onde obtemos finalmente:

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x} \cdot \partial_{\dot{x}}\mathcal{L} + \dot{\psi} \cdot \partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L} - \mathcal{L}) = 0$$

Isto significa que existe uma aplicação de Hestenes (do mesmo tipo da Lagrangeana), definida por:

$$\begin{aligned} (x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) &\to E(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}), \\ E(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) &= \dot{x}\cdot\partial_{\dot{x}}\mathcal{L}(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) + \dot{\psi}\cdot\partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L}(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) - \mathcal{L}(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

tal que $E = E(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) \in F_\sigma(M)$, um campo escalar sobre a linha-mundo $\sigma$, é conservado!. A equação obtida acima fica simplesmente

$$\frac{dE}{d\tau} = 0. \tag{3.15}$$

Determinamos agora a expressão da aplicação de energia (3.14) associada à Lagrangeana de BZ (3.1)

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{x}}\mathcal{L} &= p \\ \partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L} &= \hbar\psi\gamma_1\gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) &= \dot{x}\cdot p + \dot{\psi}\cdot\hbar(\psi\gamma_1\gamma_2) - \hbar(\dot{\psi}\gamma_2\gamma_1)\cdot\psi - p\cdot(\dot{x} - c\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) - ce(A(x)\psi\gamma_0)\cdot\psi \\ &= cp\cdot(\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) - ce(A(x)\psi\gamma_0)\cdot\psi \\ &= c(p - eA(x))\cdot(\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) \\ E(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi}) &= c\pi(x,p)\cdot(\psi\gamma_0\widetilde{\psi}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $(x,p) \to \pi(x,p) = p - eA(x)$ é a aplicação de momento cinético (i.e. $\pi = \pi(x,p) \in \Lambda^1_\sigma(M)$ é o momento cinético).

Observamos que a equação (3.16), utilizando-se a equação (3.5c), fica simplesmente

$$E = \pi \cdot v.$$

Esta equação está de acordo com a definição da energia dada no ítem 3.3.

Agora introduzimos $\phi = \hbar\psi\gamma_1\gamma_2 \in \Lambda_\sigma(M)$, um campo multiforma sobre a linha-mundo $\sigma, \phi$ é o momento conjugado do spinor $\psi$ (i.e. $\phi = \partial_{\dot{\psi}}\mathcal{L}(x,\dot{x},p,\psi,\dot{\psi})$).

A Hamiltoniana para a partícula de BZ carregada movendo-se em um campo eletromagnético, será obtida colocando $\psi = \dfrac{1}{\hbar}\phi\gamma_2\gamma_1$ ou $\widetilde{\psi} = \dfrac{1}{\hbar}\gamma_1\gamma_2\widetilde{\phi}$ (mas não os dois) na expressão da aplicação de energia (3.16).

A Hamiltoniana de BZ é a aplicação de Hestenes, definida por:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} : \Lambda_\sigma(M) \times \cdots \times \Lambda_\sigma(M) \to F_\sigma(M), (x, p, \psi, \phi) \to \mathcal{H}(x, p, \psi, \phi) \text{ tal que} \\
&\mathcal{H}(x, p, \psi, \phi) = \frac{c}{\hbar}\pi(x, p) \cdot (\psi\gamma_0\gamma_1\gamma_2\tilde{\phi})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

As equações de Hamilton para este tipo de Hamiltoniana são:

$$\begin{aligned}
-\partial_x\mathcal{H} &= \dot{p} \qquad\qquad -\partial_\psi\mathcal{H} = \dot{\phi} \\
\partial_p\mathcal{H} &= \dot{x} \qquad\qquad \partial_\phi\mathcal{H} = \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Observamos que se colocarmos $\phi = \hbar\psi\gamma_1\gamma_2$ neste sistema de equações diferenciais (3.18) obteríamos as equações (3.5a), (3.5b) e (3.5c) novamente.

# CONCLUSÕES

As análises detalhadas feitas nos teoremas de conservação do Capítulo 3 nos permitem destacar algumas particularidades interessantes do modelo de partícula de BZ. Observamos que a partícula de BZ livre não movimenta-se com velocidade necessariamente constante, como estamos acostumados com as partículas livres clássicas. Ainda notemos que a componente da velocidade na direção do momento $\left( \text{i.e. } v \cdot \frac{p}{|p|} \right)$ é constante; assim nada misterioso empurra a partícula livre de BZ na direção do momento!.

Uma interessante questão é a seguinte: o modelo de partícula clássica e ainda no modelo de partícula de Dirac, aparecem a massa e a carga como parâmetros próprios sem nenhuma relação com as *"coisas externas"*. No modelo de BZ não aparece explicitamente a massa; mas massa efetiva (energia / $c^2$) existe e é constante. O que é que gera a massa?

# APÊNDICE A

## A. TEORIA ELETROMAGNÉTICA

A Lagrangeana para o *campo de Maxwell* $A \in \Lambda^1(M)$ (i.e. o potencial eletromagnético), gerado por uma *densidade de corrente* $J \in \Lambda^1(M)$, é a aplicação de Hestenes (sobre a variedade Minkowskiana $M$), definida por: [10]

$$\mathcal{L} : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \to F(M), (A, \partial A) \to \mathcal{L}(A, \partial A) \text{ tal que}$$

$$\mathcal{L}(A, \partial A) = \frac{1}{2\mu_0}\partial A \cdot \partial A + J \cdot A \tag{A.1}$$

onde $\partial A$ é a derivada de Dirac do $A$.

A equação de Euler-Lagrange para este tipo de Lagrangeana, obtida de Formalismo Lagrangeano no Fibrado de Clifford, é:

$$\partial \partial_{\partial A}\mathcal{L} - \partial_A \mathcal{L} = 0 \tag{A.2}$$

onde $\partial$ é o operador de Dirac e $\partial_{\partial A}\mathcal{L}, \partial_A \mathcal{L}$ são derivadas de Hestenes.

Da equação (A.2), usando-se as identidades (2.15 i) e (2.15 ii), facilmente obtemos:

$$\partial^2 A = \mu_0 J \tag{A.3}$$

Por outro lado, sabe-se que a equação (A.3) pode-se acoplar com a chamada *condição de Lorenz* [1] para o campo de Maxwell $A$:

$$\partial \rfloor A = 0 \tag{A.4}$$

O *campo de Faraday* $F \in \Lambda^2(M)$ (i.e. o campo eletromagnético), define-se:

---

[1] A condição "gauge" é devida ao L. Lorenz e não ao conhecido H.A. Lorentz.

$$F = \partial \wedge A \tag{A.5}$$

Das equações (3), (4) e (5) podemos obter a *equação de Maxwell* [2] como segue:

$$\begin{aligned} F &= \partial \wedge A = \partial \rfloor A + \partial \wedge A \\ F &= \partial A \\ \partial F &= \partial\partial A = \partial^2 A \\ \partial F &= \mu_0 J. \end{aligned} \tag{A.6}$$

# B. PARTÍCULA DE DIRAC-HESTENES

A Lagrangeana para uma partícula de Dirac-Hestenes (DH) carregada, movendo-se em um campo eletromagnético, é a aplicação de Hestenes (sobre a variedade Minkowskiana $M$), definida por: [10]

$$\mathcal{L}(\psi, \partial\psi) = \hbar(\partial\psi\gamma_2\gamma_1\gamma_0) \cdot \psi - mc\psi \cdot \psi - e(A\psi\gamma_0) \cdot \psi \tag{A.7}$$

onde: $m$ é a massa da partícula, e é a carga da partícula.
$A$ é o campo de Maxwell (i.e. o potencial eletromagnético).

Observamos que a *variável primitiva* para a partícula DH é:

$\psi \in \Lambda^+(M)$, um campo multiforma par (i.e. $\psi = \overline{\psi}$) sobre a variedade Minkowskiana $M$, chamado de *spinor.* [9]
$\psi \in \Lambda^+(M)$, na *base de Lorentz* $\langle\gamma_\mu\rangle$, expressa-se: $\psi = \psi_0 + \frac{1}{2!}\psi_2^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{1}{4!}\psi_4^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho$; onde $\psi_0, \psi_2^{\mu\nu},, \psi_4^{\lambda\mu\nu\rho}$ são as $1+6+1 = 8$ componentes (reais) do spinor $\psi \in \Lambda_\sigma^+(M)$.

A equação de Euler-Lagrange para a Lagrangeana DH é:

$$\partial\partial_{\partial\psi}\mathcal{L} - \partial_\psi\mathcal{L} = 0 \tag{A.8}$$

Da equação (8) usando-se a identidade (1.8 xi) para o produto escalar e as identidades (2.15 i), (2.15 ii) e (2.15 iii) para as derivadas de Hestenes, obtemos:

---

[2] No Formalismo do Fibrado de Clifford as conhecidas equações de Maxwell reduzem-se a uma só equação.

$$\hbar\partial\psi\gamma_2\gamma_1 - mc\psi\gamma_0 = eA\psi \tag{A.9}$$

A equação (9) chama-se de *equação de Dirac-Hestenes* [3].

[3] Trata-se da equação de Dirac no Formalismo do Fibrado de Clifford.

# APÊNDICE B

## A. RELAÇÃO ENTRE A PARTÍCULA LIVRE DE DIRAC E A PARTÍCULA LIVRE DE BARUT-ZANGHI

Primeiramente recordamos as definições de autovalor e autospinor do operador de momento: $P \in \Lambda^1(M)$ e $\phi \in \Lambda^+(M)$ são o autovalor e autospinor respectivamente, do operador de momento $\hbar\partial(\ )\gamma_1\gamma_2$ se somente se:

$$\hbar\partial\Phi\gamma_1\gamma_2 = P\Phi \tag{B.1}$$

Está última equação implica a seguinte equação:

$$\hbar\dot{\phi}\gamma_1\gamma_2 = (v \cdot p)\phi \tag{B.2}$$

onde $p = P_\sigma \in \Lambda^1_\sigma(M)$ e $\phi = \Phi_\sigma \in \Lambda^+_\sigma(M)$ são o autovalor e o autospinor, respectivamente, induzidos sobre a linha-mundo $\sigma$.

Agora, consideremos uma partícula clássica livre com spin, com energia $E$ (constante de movimento) e momento $p$ (constante de movimento). Podemos afirmar que: *o autospinor $\phi$ satisfaz a equação de BZ para uma partícula clássica livre com spin, com energia $E$ e momento $p$ se e somente se o autospinor $\Phi$ satisfaz a equação de DH para uma partícula livre com massa $(E/c^2)$.*

*Prova*: $\phi \in \Lambda^+_\sigma(M)$ satisfaz a equação $\hbar\dot{\phi}\gamma_1\gamma_2 + cp\phi\gamma_0 = 0$, é dizer:

$$\begin{aligned}
(v \cdot p)\phi + cp\phi\gamma_0 &= 0, \quad \text{pela equação (B.2)} \\
\frac{v \cdot p}{c}\phi\gamma_0 + p\phi &= 0 \\
\frac{E}{c}\phi\gamma_0 + p\phi &= 0, \quad \text{pela equação (3.10) no caso da partícula livre}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{v\cdot p}{c}\Phi\gamma_0 + P\Phi\right)_\sigma &= 0, \quad \text{pela equação (B.2)}\\
\frac{E}{c}\Phi\gamma_0 + P\Phi &= 0\\
\frac{E}{c}\Phi\gamma_0 + \hbar\partial\Phi\gamma_1\gamma_2 &= 0, \quad \text{pela equação (B.1)}\\
\left(\frac{E}{c^2}\right)c\Phi\gamma_0 + \hbar\partial\Phi\gamma_1\gamma_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $\Phi \in \Lambda^+(M)$ satisfaz a equação $\hbar\partial\Phi\gamma_1\gamma_2 + (E/c^2)c\Phi\gamma_0 = 0$.

Observamos que este teorema é válido ainda no caso geral do spinor $\Psi \in \Lambda^+(M)$ e seu correspondente spinor $\psi = \Psi_\sigma \in \Lambda^+_\sigma(M)$ pelo fato de que o spinor $\Psi$ pode ser expandido no autospinores $\Phi$.

## B. UMA BASE LORENTZIANA NATURAL PARA A PARTÍCULA DE BARUT-ZANGHI

A *existência da variável primitiva $\psi \in \Lambda^+_\sigma(M)$ implica a existência de uma base Lorentziana natural $\langle\epsilon_\mu\rangle$ sobre a linha-mundo $\sigma$.*

Primeiramente recordamos que todo spinor $\psi \in \Lambda^+_\sigma(M)$ não singular (i.e. $\psi\tilde{\psi} \neq 0$) pode ser escrito:

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{\beta\gamma_5/2}R \tag{B.3}$$

onde $\rho(\tau) \in \mathbb{R}^+, \beta(\tau) \in \mathbb{R}, R(\tau) \in \Lambda^+(T_{\sigma(\tau)}M)/R(\tau)\widetilde{R}(\tau) = \widetilde{R}(\tau)R(\tau) = 1$.

Esta notável decomposição canônica do spinor é devida a Hestenes (1967) [9], $\beta$ é chamado de ângulo de Takabayasi, $R$ é uma rotação de Lorentz [2] e $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ é elemento de volume da álgebra de espaço-tempo [2].

Algumas propriedades importantes que levaremos em conta são:

i) $(e^{\beta\gamma_5/2})^\sim = e^{\beta\gamma_5/2}$

ii) $\gamma_5 R = R\gamma_5$

iii) $e^{\beta\gamma_5}R = Re^{\beta\gamma_5}$

iv) $e^{\beta\gamma_5}\gamma_\nu = \gamma_\nu e^{-\beta\gamma_5}$

Os campos 1-formas base $\epsilon_\mu$ sobre a linha-mundo $\sigma$ definem-se pela equação

$$\rho\epsilon_\mu = \psi\gamma_\mu\tilde{\psi} \tag{B.4}$$

*Prova:*

$$\begin{aligned}
\rho\epsilon_\mu \cdot \rho\epsilon_\nu &= (\psi\gamma_\mu\tilde{\psi}) \cdot (\psi\gamma_\nu\tilde{\psi}) \\
&= \gamma_\mu \cdot (\tilde{\psi}\psi\gamma_\nu\tilde{\psi})\psi), \quad \text{pela identidade (1.8 xi)} \\
&= \gamma_\mu \cdot (\rho e^{\beta\gamma_5}\gamma_\nu \rho e^{\beta\gamma_5}), \quad \text{pela equação (B.3) e propriedade (iii)} \\
&= \rho^2\gamma_\mu \cdot (e^{\beta\gamma_5}\gamma_\nu e^{\beta\gamma_5}) \\
&= \rho^2\gamma_\mu \cdot (\gamma_\nu e^{-\beta\gamma_5} e^{\beta\gamma_5}), \quad \text{pela propriedade (iv)} \\
\epsilon_\mu \cdot \epsilon_\nu &= \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Assim por esta última equação podemos afirmar que os $\epsilon_\mu \in \Lambda^1_\sigma(M)$ formam uma base Lorentziana sobre a linha-mundo $\sigma$.

Observamos que $\epsilon_0 = \dfrac{1}{\rho}\psi\gamma_0\tilde{\psi} = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{v}{c}\right)$; se utilizarmos a equação (3.5b), isto significa que o $\epsilon_0$ é paralelo à $v$. Logo podemos interpretar a tetrada Lorentziana $\langle\epsilon_\mu\rangle$ como transladando-se ao longo da linha-mundo $\sigma$ à vez que rotando ao rededor da velocidade.

Para finalizar encontraremos uma expressão para o campo biforma de Darboux associada a esta base Lorentziana [4]

$$\Omega = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_\mu \wedge \epsilon^\mu = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}^\mu \wedge \epsilon_\mu. \tag{B.6}$$

No nosso caso podemos escrever $\rho\epsilon_\mu = J_\mu$, onde $J_\mu = \psi\gamma_\mu\tilde{\psi}$ são os campos 1-formas sobre a linha-mundo $\sigma$ chamados de correntes.

Começamos derivando a expressão $\rho\epsilon_\mu = J_\mu$:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}\epsilon_\mu + \rho\dot{\epsilon}_\mu &= \dot{J}_\mu \\
(\dot{\rho}\epsilon_\mu + \rho\dot{\epsilon}_\mu) \wedge \rho\epsilon^\mu &= \dot{J}_\mu \wedge J^\mu \\
\dot{\rho}\rho\epsilon_\mu \wedge \rho\epsilon^\mu + \rho\dot{\epsilon}_\mu \wedge \rho\epsilon^\mu &= \\
\rho^2 2\Omega &= \dot{J}_\mu \wedge J^\mu \\
\Omega &= \frac{1}{2\rho^2}\dot{J}_\mu \wedge J^\mu.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

As equações de Frenet $\dot{\epsilon}_\mu = \Omega\lfloor\epsilon_\mu$ ficam:

$$
\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_\mu &= \frac{1}{2\rho^2}(\dot{J}_\nu \wedge J^\nu)\lfloor\frac{1}{\rho}J_\mu \\
\dot{\epsilon}_\mu &= \frac{1}{2\rho^3}(\dot{J}_\nu \wedge J^\nu)\lfloor J_\mu = \frac{1}{2\rho^3}J_\mu\rfloor(J^\nu \wedge \dot{J}_\nu)
\end{aligned}
$$

Recentemente Rodrigues Jr., Vaz Jr. e Pavšic [12] formularam uma teoria Lagrangeana e Hamiltoniana para as equações de Frenet.

# APÊNDICE C

## A. BASES LORENTZIANAS FUNDAMENTAIS

Seja $M$ a variedade Minkowskiana, ao ponto $x \in M$ temos associados o espaço tangente $T_xM$ e o espaço cotangente $T_x^*M$ (o espaço linear dual do $T_xM$). Esses espaços lineares são de dimensão 4.

No ponto $x \in M$, de coordenadas Minkowskianas $x^\mu \in I\!R$ temos: os vetores coordenadas $e_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \mid_x$ e os covetores coordenados $\gamma^\mu \equiv dx^\mu \mid_x \cdot \langle e_\mu \rangle$ é uma base do $T_xM$ e $\langle \gamma^\mu \rangle$ é uma base de $T_x^*M$.

Os vetores recíprocos $e_\mu$ definem-se $e^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} e_\nu$, e os covetores recíprocos dos $\gamma^\mu$ definem-se $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu \cdot \langle e^\mu \rangle$ é uma base do $T_xM$ (a base recíproca da $\langle e_\mu \rangle$) e $\langle \gamma_\mu \rangle$ é uma base do $T_x^*M$ ( a base recíproca da $\langle \gamma^\mu \rangle$). Aqui $\eta_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz real $4 \times 4$ chamada de matriz Minkowskiana, dados por:

$$\eta_{\mu\nu} \begin{cases} 1 & , \ \mu = \nu = 0 \\ -1 & , \ \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0 & , \ \mu \neq \nu \end{cases} \tag{C.1}$$

$\eta^{\mu\nu}$ são elementos da matriz real $4 \times 4$ inversa da matriz Minkowskiana. Observe-se que $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Os produtos escalares dos vetores e covetores no ponto $x \in M$, definem-se de modo que:

$$e_\mu \cdot e_\nu = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}. \tag{C.2}$$

## B. ESPAÇO TANGENTE DE MULTIFORMAS. ÁLGEBRA DE GRASSMANN

No ponto $x \in M$, ao espaço linear fundamental $T_xM$ temos associados os seguintes espaços lineares:

0) $\Lambda^0(T_xM) \equiv \mathbb{R}$, chamado de espaço das 0-formas do $T_xM$.
$\langle 1 \rangle$ é uma base do $\Lambda^0(T_xM)$ e $dim\Lambda^0(T_xM) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

i) $\Lambda^1(T_xM) \equiv T_x^*M$, chamado de espaço das 1-formas do $T_xM$.
$\langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ é uma base do $\Lambda^1(T_xM)$ e $dim\Lambda^1(T_xM) = \binom{4}{1} = 4$.

ii) $\Lambda^2(T_xM)$, os 2-tensores antisimétricos, chamado de espaço das 2-formas do $T_xM$.
$\langle \gamma_0 \wedge \gamma_1, \gamma_0 \wedge \gamma_2, \gamma_0 \wedge \gamma_3, \gamma_1 \wedge \gamma_2, \gamma_1 \wedge \gamma_3, \gamma_2 \wedge \gamma_3 \rangle$ é uma base do $\Lambda^2(T_xM)$ e $dim\Lambda^2(T_xM) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$.

iii) $\Lambda^3(T_xM)$, os 3-tensores antisimétricos, chamado de espaço das 3-formas do $T_xM$.
$\langle \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2, \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_3, \gamma_0 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3, \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \rangle$ é uma base do $\Lambda^3(T_xM)$ e $dim\Lambda^3(T_xM) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$.

iv) $\Lambda^4(T_xM)$, os 4-tensores antisimétricos, chamado de espaço das 4-formas do $T_xM$.
$\langle \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \rangle$ é uma base do $\Lambda^4(T_xM)$ e $dim\Lambda^4(T_xM) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$.
A soma direta dos espaços das $k$-formas do $T_xM(0 \leq k \leq 4)$, é um espaço linear, chamado de espaço das multiformas do $T_xM$, denotado $\Lambda(T_xM)$. Observe-se que $dim\Lambda(T_xM) = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$.
$\Lambda(T_xM)$ com o produto de Grassmann (i.e. o produto exterior) é uma álgebra real associativa (a álgebra de Grassmann das multiformas tangentes no $x \in M$).

## C. ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO (STA)

$\Lambda(T_xM)$ com o produto de Clifford é uma álgebra real associativa (a álgebra de Clifford das multiformas tangentes do $T_xM$), chama-se de álgebra do espaço-tempo e denota-se $C\ell(T_xM, g_x)$.

Uma base conveniente para STA é

$$\langle 1, \gamma_\mu, \sigma_k, i\sigma_k, i\gamma_\mu, i\rangle, \mu = 1, 1, 2, 3 \text{ e } k = 1, 2, 3 \tag{C.3}$$

onde $\sigma_k = \gamma_k\gamma_0$ (biformas tipo tempo ) e $i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ (unidade pseudo-escalar).

Uma expressão conveniente para um número de Clifford $A$ é:

$$A = (\alpha + i\beta) + (a + ib) + (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \tag{C.4}$$

onde $\alpha, \beta \in \Lambda^0(T_xM), a = a^k\sigma_k, b = b^k\sigma_k \in \Lambda^2(T_xM)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\mu\gamma_\mu, \mathbf{b} = \mathbf{b}^\mu\gamma_\mu \in \Lambda^1(T_xM)$.

As biformas $\sigma_k$ jogam um papel fundamental na elaboração do formalismo tridimensional a partir do formalismo quadrimensional. A STA contém $3+3+3+1 = 10$ ***unidades imaginárias***, estas são:

$$\begin{aligned}
\gamma_k \in \Lambda^1(T_xM), &\qquad (\gamma_k)^2 = -1 \\
i\sigma_k \in \Lambda^2(T_xM), &\qquad (i\sigma_k)^2 = -1 \\
(i\sigma_1 = \gamma_3\gamma_2, i\sigma_2 &= \gamma_1\gamma_3, i\sigma_3 = \gamma_2\gamma_1) \\
i\gamma_k \in \Lambda^3(T_xM), &\qquad (i\gamma_k)^2 = -1 \\
(i\gamma_1 = \gamma_0\gamma_3\gamma_2, i\gamma_2 = \gamma_0\gamma_1\gamma_3, i\gamma_3 &= \gamma_0\gamma_2\gamma_1) \\
i \in \Lambda^4(T_xM), &\qquad (i)^2 = -1 \\
(i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)&
\end{aligned} \tag{C.5}$$

As unidades imaginárias têm interpretação geométrica e jogam um papel fundamental nas teorias físicas.

A STA tem duas involuções importantes, a saber;

$$\begin{aligned}
\text{Se} \qquad A &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \quad \text{então} \\
\overline{A} &= A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4, \quad \text{conjugação} \\
\widetilde{A} &= A_1 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4, \quad \text{reversão}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

As principais propriedades de ambas involuções são:

i) $A, B \in \Lambda(T_xM): \qquad (AB)^- = \overline{A}\,\overline{B}$ e $(AB)^\sim = \widetilde{B}\widetilde{A}$

$$
\begin{aligned}
&\text{ii)}\ \ X \in \Lambda(T_xM): && X = \overline{X}\ \ \text{(i.e. número par}\ \ \Leftrightarrow \langle X\rangle_1 = \langle X\rangle_3 = 0 \\
& && X = -\overline{X}\ \ \text{(i.e. número ímpar)}\ \ \Leftrightarrow \langle X\rangle_0 = \langle X\rangle_2 = \langle X\rangle_4 = 0 \\
&\text{iii)}\ \ X \in \Lambda(T_xM): && X = \widetilde{X} \Leftrightarrow \langle X\rangle_2 = \langle X\rangle_3 = 0 \\
& && X = -\widetilde{X} \Leftrightarrow \langle X\rangle_0 = \langle X\rangle_1 = \langle X\rangle_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

# REFERÊNCIAS


[1] D. MARTIN, *Manifold theory, An Introduction for Mathematical Physics.* **Ellis Harwood Limited**, (1991).

[2] D. HESTENES, *Space-Time Algebra.* **Gordon and Breach**, (1966).

[3] C. VON WESTENHOLZ, *Differential Forms in Mathematical Physics.* **North-Holland**,

[4] D. HESTENES AND GARRET SOBCZYK, *Clifford Algebra to Geometric Calculus, A Unified Language for Mathematics and Physics.* **D. Reidel Publishing Company**, (1984, 1987).

[5] M. PAVŠIC, E. RECAMI, W.A. RODRIGUES JR., *Spin and Electron Structure.* **Physics Letters B 318** (1993), 481–488.

[6] W.A. RODRIGUES JR., J. VAZ JR. AND E. RECAMI, *About Zitterbewegung and Electron Structure.* **Physics Letters B 318** (1993), 622–628.

[7] J. VAZ JR. AND W.A. RODRIGUES JR., *Zitterbewegung and the Electromagnetic Field of the Electron.* **Physics Letters B 319** (1993), 203–208.

[8] A.O. BARUT AND N. ZANGHI: *Classical model of Dirac eletron.* **Phys. Rev. Lett. 52** (1984), 2009–2012.

[9] D. HESTENES, *Real Spinor Fields.* **Journal of Mathematical Physics 8**, (1967), 798–808.

[10] A.M. MOYA, *Tese de Mestrado.* **Instituto de Física "Gleb Wataghin"**, (1995).

[11] J. VAZ JR. and W.A. RODRIGUES JR. (1993), *"Clifford Algebra Approach to Barut-Zanghi Model as a Hamiltoniana System"*, preprint IMECC–UNICAMP, R.P. 11/93, submititted for publication.

[12] W.A. RODRIGUES JR., J. VAZ JR. and M. PAVŠIC, *"The Clifford Bundle and the Dynamics of the Superparticle"*, submitted for publication.

[13] W.A. RODRIGUES JR., Q.A.G. DE SOUZA, J. VAZ JR. and P. LOUNESTO, *"Dirac-Hestenes Spinor Fields, their Covariant Derivates, and their Formulation on Riemann-Cartan Manifolds"*, submitted for publication.