

ÁLGEBRAS GEOMETRICAS,

ROTAÇÕES

E A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

este exemplar corresponde a
edição final da tese defendida
pelo aluno J. R. Rezende Zani e
aprovada pela comissão julgadora
14/10/87

Tese submetida ao Instituto de Física
Gleb Wataghin da Universidade Estadual
de Campinas como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do grau de
Mestre em Ciências.

OUTUBRO - 1987

AGRADECIMENTOS

Dirijo meus agradecimentos ao grupo de Física Matemática do IMECC pela ambiente propício a realização de tais estudos, em particular aos professores Márcio Rosa e Edmundo Oliveira pelos estímulos e atenção prestada as minhas explicações. Agradeço também aos professores Gaston Barberis e Jorge Cisneros pelo acompanhamento na fase de exposição dos resultados, e também por compartilharem, creio, da proposta desta tese.

Vale também uns agradecimento ao "pessoal lá de casa", Mário, Deca e Justino, pela compreensão e incentivo aos meus estudos, e em especial a Grácia Navarro, pela alegre e compreensiva companhia que tem sido nestes últimos anos.

Sou grato também ao CNPq pela concessão da bolsa quando da minha entrada no programa de Mestrado do IFGW, a FAPESP pela bolsa cedida quando da apresentação do projeto de tese, e ao IFGW pelo suporte e incentivos prestado a minha pessoa.

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese ao meu pai Deolindo Zeni, a minha mãe Edyr Resende, aos quais quaisquer agradecimentos seriam pouco, a todos os meus amigos que me ajudaram a percorrer todos esses anos, e também ao professor Waldyr Rodrigues Jr., não só pela orientação pessoal, mas pelo prazer e dedicação estimulante que se entrega aos estudos.


José Ricardo de Resende Zeni,
1988

ALGEBRAS GEOMETRICAS, ROTAÇÕES E A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

As álgebras de Clifford tem sido recentemente um campo intenso de pesquisa em várias áreas da física. Este trabalho tem por objetivo divulgar a utilização das álgebras de Clifford, também denominadas álgebras geométricas, na formulação das teorias físicas, e para isso abordamos dois problemas: a Eletrodinâmica Clássica, e os grupos de rotações, em especial, as transformações de Lorentz. Além do estudo das transformações de Lorentz serem complementares a discussão relativista da Eletrodinâmica, os temas escolhidos para aplicar as álgebras geométricas tiveram como objetivo dar um maior respaldo à utilização das mesmas. Nos dois casos, a formulação aqui adotada apresenta-se como uma linguagem intrínseca, e temos nesse fato um dos maiores méritos do esquema algébrico aqui apresentado.

A proposta da tese é basicamente uma revisão crítica da formulação das teorias citadas anteriormente, em especial da Eletrodinâmica, apresentando uma nova linguagem, que achamos, propicia uma maior simplicidade nos cálculos, dotando-os por vezes de interpretações significativas. A questão central é a linguagem. Os físicos em geral, trabalham com diversos sistemas algébricos, cada um sendo mais conveniente em certas investigações. Neste ponto, compartilhamos do pensamento de David Hestenes, um dos idealizadores do esquema algébrico aqui apresentado, de que as álgebras geométricas permitem uma unificação de vários sistemas algébricos, proporcionando uma economia sensível de esforço na formulação das teorias físicas.

INDICE

Glossário

Pág.

CAPT I: ESTRUTURA DAS ÁLGBRAS DE CLIFFORD

01	§1. Conceitos Preliminares e Axiomas
12	§2. Produto Geométrico com Vetor
19	§3. Expansão Geral do Produto Geométrico
28	§4. Operações em R_n
35	§5. Bases

CAPT II: ÁLGBRAS FUNDAMENTAIS

43	§6. Isomorfismos e Subálgebras Par
49	§7. Álgebras Bidimensionais
52	§8. Álgebras Quadridimensionais
57	§9. Álgebra de Pauli
66	§10. Álgebra de Minkowski

CAPT III: ISOMETRIAS E ROTAÇÕES

77	§11. Resultados Gerais
88	§12. Isometrias em Espaços Euclidiano
94	§13. Isometrias no espaço-tempo
99	§14. Transformações de Lorentz

CAPT IV: OPERADORES DIFERENCIAIS E HOLOMORFIA

- 105 §15. Operador Gradiente
- 113 §16. Holomorfia

CAPT V: ELETRODINÂMICA

- 116 §17. Elementos Básicos
- 119 §18. Invariantes do Campo Eletromagnético
- 122 §19. Equações de Maxwell
- 126 §20. Ondas Planas
- 129 §21. Potenciais
- 136 §22. Leis de Conservação
- 144 §23. Momento Angular
- 147 §24. Monopólos Magnéticos

Apêndices

- 150 I. A Interpretação Geométrica
- 156 II. Produto Exterior e Produto Geométrico
- III. Algebras Tensorial e Exterior

Conclusão

Referências

GLOSSÁRIO

Notação	Interpretação
R_n	espaço linear da álgebra de Clifford de dimensão 2^n
R_n^r	subespaço de R_n de graduação r
R_n^+	subálgebra par de R_n
números de Clifford	elementos da álgebra de Clifford
multivetores	números de Clifford com graduação definida (ou homogênea)
lâminas	multivetores formados pelo produto de vetores ortogonais entre si
E^n	espaço vetorial real de dimensão n , ou espaço de base para R_n
$E^{r,s}$	espaço vetorial de assinatura r,s
a, b, c, \dots	vetores (primeiras letras latinas minúsculas)
A, B, D, F, P, \dots	números de Clifford (letras latinas maiúsculas)
$\langle A \rangle_r$	componente de A no subespaço R_n^r
A_r	r -vetor, ou r -lâmina
AB	produto geométrico entre A e B
$A \wedge B$	produto exterior

$A.B$	produto interno
$*$	inversão, inversão espacial
\dagger	reversão, reversão no espaço-tempo
$ \ $	norma pelo reverso
δ_{ij}	delta de Kroenecker
G	tensor métrico
$\epsilon_{ij\dots r}$	permutador de $ij\dots r$
ε	inversão no espaço-tempo
$\bar{\varepsilon}$	reversão espacial
P	álgebra de Pauli
M	álgebra de Minkowski
σ	vetores de base para P
\hat{e}	vetores de base (em especial, para M)
∂	derivada parcial
\square	gradiente em M
∇	gradiente em P
Γ	fator de Lorentz

As referências a equações no texto tem a seguinte orientação: quando nos referimos a uma equação no mesmo parágrafo, utilizamos apenas o número da equação; quando nos referimos a equação de outro parágrafo, além do número da equação fornecemos também o número do parágrafo a que se refere.

CAPT I: ESTRUTURA DAS ÁLGBRAS DE CLIFFORD

Neste capítulo apresentamos a estrutura básica das álgebras de Clifford. §1 descreve o espaço vetorial das álgebras, e fornece os axiomas e definições necessários. §2 e §3 apresentam os resultados básicos sobre o produto geométrico. O §4 introduz algumas operações importantes nas aplicações, e estuda algumas propriedades do produto geométrico em termos dessas operações. Os resultados destes parágrafos são apresentados de uma maneira intrínseca, sem referências a bases. Por fim, §5 estuda as representações dos números em termos de bases, e analisa algumas relações válidas para o produto geométrico explicitamente em termos de bases.

Procuramos construir o esquema de modo autoconsistente, tornando desnecessário a exposição, ou o conhecimento, de outras álgebras para sustentação de nosso esquema. Os tópicos abordados nos apêndices procuram cobrir algumas lacunas deste capítulo, mas tais tópicos são desnecessários para as aplicações e foram renegados a um segundo plano. O material apresentado neste capítulo deve ser compreensível para quem tenha feito um curso de álgebra linear.

As referências para este capítulo são: [He⁰], [He¹], [HS], [SW] e [Ma].

§1. CONCEITOS PRELIMINARES E AXIOMAS

As álgebras de Clifford são construídas sobre espaços lineares de dimensão 2^n , e possuem além da soma uma lei de composição interna associativa, aqui denominada de produto de Clifford ou alter-

nativamente produto geométrico. Os elementos da álgebra serão denominados números de Clifford. Representamos o elemento neutro da soma pelo 0 , e o elemento neutro do produto pelo 1 . Assim temos as seguintes operações dentro da álgebra:

Soma: simbolizada por $+$; isto é, a soma de dois números de Clifford, D e P , é indicada como $D + P$, com as propriedades usuais, associativa, comutativa e existência de inverso aditivo (oposto).

Produto de Clifford: o qual não será simbolizado, o produto geométrico sendo implícito quando um número estiver justaposto ao outro, isto é indicamos por DP o produto de Clifford entre D e P , nesta ordem. Supomos que o produto é associativo, não sendo portanto necessário o uso de parênteses, isto é:

$$1) \quad DPF = D(PF) = (DP)F$$

A associatividade do produto geométrico é tida como um axioma e não deve ser questionada.

O produto de Clifford, em geral, não é comutativo, e assim, devemos respeitar a ordem dos termos no produto. Também, a existência de inverso multiplicativo, ou inverso simplesmente, não é necessária.

Além das propriedades internas de cada uma das operações acima, é válida também a propriedade distributiva da soma em relação ao produto de Clifford, que expressa a linearidade do produto de Clifford:

$$2) \quad (D + P)F = DF + PF \quad \text{ou} \quad D(P + F) = DP + DF$$

Também supomos que está definido o produto de um número de Clifford por um escalar, o produto por escalar sendo comutativo, isto é, $xD = Dx$; onde x pertence ao corpo dos escalares.

Como escalares utilizaremos apenas o corpo dos reais, indicado por R . Os espaços lineares das álgebras de Clifford reais serão indicados por R_n , onde n indica a dimensão da álgebra, dada por 2^n . Por abuso de linguagem, tanto a álgebra de Clifford quanto o espaço linear a ela associado serão indicados por R_n .

O que distingue a álgebra de Clifford de outras álgebras associativas é que o espaço linear da álgebra (R_n) pode ser decomposto na soma direta de subespaços que são caracterizados pelo que denominamos graduação. Os elementos dos subespaços serão aqui genericamente denominados de multivetores. Então, os multivetores, como entendidos neste trabalho, representam números de Clifford de graduação definida (ou homogênea). A graduação dos subespaços é indicada por um número, ou genericamente por um índice assumindo valores de 0 à n . Indicamos os subespaços por R_n^k ($k \leq n$), onde k é a graduação do subespaço. Os elementos de R_n^k serão também denominados k -vetores. Essa notação explicita a graduação dos multivetores pertencentes à R_n^k . A dimensão dos subespaços R_n^k é dada pelo número combinatorial de n e k , isto é:

$$3) \quad \dim R_n^k = n! / ((n-k)! k!)$$

Esse resultado será demonstrado mais adiante, após os axiomas I e II, onde mostramos como construir os elementos de R_n^k , e em particular construímos uma base para R_n^k . Notamos que o resultado acima concorda com a dimensão do espaço total da álgebra (R_n), pois a dimensão de R_n é a soma da dimensão dos subespaços R_n^k .

Devemos identificar R_n^0 (subespaço de graduação zero) com o corpo dos escalares (reais). Tal fato deve-se não somente a dimensão de R_n^0 , que é igual a unidade, mas também a própria natureza

de seus elementos. O produto geométrico quando um dos fatores for um escalar deve ser entendido como sendo simplesmente o produto por escalar. Também, denominamos os elementos de R_n^n de pseudoescalares, devido a dimensão de R_n^n ser também igual a unidade. A distinção entre escalares e pseudoescalares é necessária devido ao fato que o produto geométrico de um multivector por um pseudoescalar, em geral, resulta num multivector de graduação diferente do original. Este resultado distingue os pseudoescalares dos escalares. Entretanto, os pseudoescalares gozam de várias propriedades importantes, merecendo uma atenção especial.

Desde que podemos decompor o espaço da álgebra (R_n) na soma direta de subespaços (R_n^k), qualquer número da álgebra pode ser expresso como a soma das componentes em cada subespaço. Assim, os números de Clifford podem ser escritos como polinômios em multivetores de diferentes graduações, cada multivector representando a componente do número no subespaço correspondente à graduação do multivector. Por vezes nos referimos as componentes nos subespaços como multivetores componentes, para diferenciar das componentes dos multivetores em relação a uma base dos subespaços R_n^k , nas quais os multivetores possam estar representados.

Definimos o projetor no subespaço R_n^k de um número de Clifford qualquer, indicado por $\langle \rangle_k$, como a operação que seleciona somente a componente do número no subespaço R_n^k , isto é, $\langle \rangle_k$ é um k -vector, não tendo componentes em outros subespaços R_n^j para $j \neq k$. Assim, seja D um número de Clifford qualquer, então podemos escrevê-lo como:

$$4) \quad D = \langle D \rangle + \langle D \rangle_1 + \langle D \rangle_2 + \dots + \langle D \rangle_n$$

O projetor para o subespaço dos escalares não será acompanhado de índice, pois ele aparecerá inúmeras vezes, e preferimos poupar o trabalho.

A decomposição acima é de extrema utilidade, pois em uma equação envolvendo vários números de Clifford podemos equacionar separadamente multivetores de mesma graduação. Além disso, a decomposição acima reduz o estudo das operações lineares da álgebra (como o produto geométrico!!) ao estudo das operações entre multivetores.

O projetor é um operador linear: $\langle A + B \rangle_k = \langle A \rangle_k + \langle B \rangle_k$

Para a construção do edifício teórico das álgebras de Clifford adotaremos um procedimento sintético: a partir de elementos primordiais desenvolveremos relações gerais válidas dentro das álgebras de Clifford. Para tanto vamos utilizar um espaço vetorial auxiliar, também sobre o corpo dos reais, munido de produto interno, a partir do qual será construída uma álgebra de Clifford. Tal espaço vetorial, indicado genericamente por E^n , será denominado espaço de base para R_n , a álgebra de Clifford a ele associada. A dimensão de R_n é igual a 2^n quando a dimensão de E^n for igual a n . Os vetores de E^n são os elementos primordiais de R_n (Axioma Fundamental), e devemos identificar o subespaço R_n^1 com o próprio espaço de base E^n , isto é, os 1-vetores de R_n são simplesmente os vetores de E^n .

Apesar de restringirmos o estudo à espaços vetoriais reais, utilizaremos tanto a métrica euclidiana quanto a métrica pseudo-euclidiana no espaço de base, devendo representar E^n por $E^{j,k}$ quando for necessário tornar explícito a métrica adotada no espaço de base, onde j e k fornecem a assinatura do espaço (j indica o número de vetores da base com quadrado positivo, enquanto k indica

o número de vetores da base com quadrado negativo, e temos que $j+k=n$). Desde que as álgebras de Clifford dependem da métrica adotada no espaço de base (ver capt II), devemos, de acordo com a convenção firmada na Primeira Conferência Internacional sobre Álgebras de Clifford (Inglaterra, 1985) indicar o espaço linear da álgebra de Clifford real associado ao espaço de base $E^{j,k}$ por $R_{j,k}$. Os resultados deste capítulo independem da métrica utilizada no espaço de base, E^n , e portanto, escrevemos simplesmente R_n para a álgebra de Clifford associada à E^n .

Não estamos interessados em patologia matemática, e não devemos considerar espaços de base dotados de métrica singular. No capítulo III faremos uma restrição maior, de modo a só trabalharmos com métricas euclidianas ou lorentzianas.

Como dito anteriormente, a decomposição de qualquer número de Clifford em multivetores de diferentes graduações é um dos fatos fundamentais no estudo das álgebras de Clifford. Introduzimos agora um axioma que nos ensina a construir os multivetores mais fundamentais diretamente a partir dos vetores de E^n .

Axioma I (Lâminas): O produto geométrico de vários vetores ortogonais entre si produz um elemento de R_n , denominado lâmina, linearmente independente dos vetores de E^n . Lâminas tendo diferentes números de vetores são linearmente independentes entre si.

As lâminas são multivetores, sendo que o número de vetores que formam uma lâmina é igual a graduação da lâmina. Analogamente aos multivetores, denominamos lâminas formadas por r 1-vetores de r -lâminas. Assim, considere um conjunto de vetores de E^n , (a_1, a_2, \dots, a_r) , cujos vetores são ortogonais entre si, isto é, $a_j \cdot a_k = 0$, se $j \neq k$. Então, as lâminas A_2, B_3, C_k definidas a seguir:

$$5) \quad A_2 = a_1 a_2 \quad B_3 = a_1 a_2 a_3 \quad C_k = a_1 a_2 \dots a_k$$

pertencem respectivamente aos subespaços R_n^2 , R_n^3 , e R_n^k , que são subespaços ortogonais entre si.

Apesar de toda lâmina ser um multivetor, nem todo multivetor é uma lâmina. A seguir, eq (13) apresentamos uma condição suficiente para um r -vetor não ser uma r -lâmina. A forma mais geral para um r -vetor é uma soma sobre r -lâminas.

No caso de vetores, a definição de lâminas não se aplica, mas podemos nos referir a qualquer vetor como sendo uma 1-lâmina. Também, escalares podem ser denominados \emptyset -lâminas (o axioma II nos ensinará como obter os escalares).

O axioma I nos sugere que a maior graduação possível para uma lâmina em R_n é igual a n , desde que temos no máximo n vetores ortogonais entre si em E^n .

Para completar o estudo da estrutura vetorial de R_n , e por outro lado, iniciar o estudo do produto geométrico, introduzimos um último axioma.

Axioma II (Produto Geométrico e Produto Interno de vetores): a parte simétrica do produto geométrico de dois vetores é igual ao produto interno, existente em E^n , dos mesmos vetores. Também, se os vetores são colineares o produto geométrico é comutativo, de modo que o produto geométrico de vetores colineares é igual ao produto interno dos mesmos vetores.

Então, se $a, b \in E^n$, temos por definição que:

$$6) \quad 1/2(ab + ba) = a \cdot b$$

Assim, notamos que os escalares são obtidos sempre que realizamos o produto geométrico entre vetores colineares. Ilustramos o

caráter escalar da parte simétrica do produto geométrico de dois vetores através da seguinte expressão:

$$7) \quad (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

Então, supondo que o quadrado de um vetor é um escalar, necessariamente a parte simétrica do produto geométrico tem de ser um escalar. É natural imaginarmos o quadrado de um vetor como sendo um escalar; representando a grandeza do vetor. A interpretação geométrica dos elementos e relações mais básicas existentes nas álgebras de Clifford é dada no apêndice I, mas, adiantamos que a relação acima expressa no plano euclidiano a relação existente entre a diagonal de um paralelogramo, e os lados que o compõem.

Como consequência fundamental do axioma II, temos que o produto geométrico de dois vetores ortogonais é anticomutativo, e vice-versa, isto é, se $a, b \in E^n$, então:

$$8) \quad ab = -ba, \text{ se e sómente se: } a \cdot b = 0$$

Esse resultado nos permite inferir a dimensão dos subespaços R_n^k . Para isto, observamos inicialmente que se alterarmos a ordem dos vetores que compõem uma r -lâmina, a r -lâmina assim obtida não é linearmente independente da r -lâmina original: por causa da associatividade do produto geométrico, e da anticomutatividade do produto geométrico de dois vetores ortogonais, alterações na ordem dos vetores que compõem uma lâmina resulta apenas em alterações no sinal (para a determinação do sinal, ver §5 deste capítulo, a definição do permutador). Assim, para obter a dimensão dos subespaços R_n^k , considere uma base ortogonal para E^n ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$). Como último axioma, supomos que r -lâminas formadas pelo produto geométrico de vetores desta base, tendo diferentes vetores como fatores

(ao menos um vetor), são linearmente independentes. Assim, a dimensão dos subespaços R_n^k é dada pela análise combinatória: qual o número de diferentes combinações que conseguimos dispoindo n vetores em k posições, sem repetições e não importando a ordem? A resposta é o número combinatorial de n e k , como dito anteriormente (eq 3).

Vamos agora estudar a descrição do espaço vetorial R_n através de bases para os subespaços R_n^k . Assim, encontraremos uma representação para os r -vetores em termo de uma base para R_n^k . A fim de facilitar a notação, representamos o produto geométrico de vetores de uma base ortogonal através do acúmulo de índices após a letra \hat{e} :

$$9) \quad \hat{e}_{12} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \quad \hat{e}_{123} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad \text{etc...}$$

Deste modo, uma base para R_n^k consiste do conjunto dos k -vetores $(\hat{e}_{j_1 j_2 \dots j_k})$, onde os \hat{e}_{j_s} são vetores da base de E^n , e devemos convencionar que $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, para excluir r -vetores linearmente dependentes da base de R_n^k . Esta exigência é apenas uma convenção. Uma base para R_n^k é obtida considerando qualquer combinação dos n vetores da base de E^n em r posições, sem repetição e sem permutação na ordem.

Um número qualquer de R_n , D , pode ser escrito como:

$$10) \quad D = D^0 + D^j \hat{e}_j + D^{j_1 j_2} \hat{e}_{j_1 j_2} + \dots \\ \dots + D^{j_1 j_2 \dots j_n} \hat{e}_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

onde a convenção da soma sobre índices repetidos deve estar implícita, e também devemos utilizar a convenção anterior $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Identificamos na expressão acima os multivetores componentes do número D nos subespaços R_n^k representados em termos das bases para estes subespaços como sendo dados por:

$$11) \quad \langle D \rangle = D^0 ; \quad \langle D \rangle_1 = D^j \hat{e}_j ; \quad \langle D \rangle_2 = D^{j_1 j_2} \hat{e}_{j_1 j_2} ; \quad \text{etc...}$$

O estudo de bases terá continuidade no §5. Vamos preferir trabalhar os resultados sem nos referirmos a bases, de modo a desenvolver um cálculo intrínseco sobre R_n .

Apresentamos agora uma condição suficiente para que um r -vetor não seja uma r -lâmina. Como corolário dos axiomas I e II, segue que o quadrado de toda lâmina é um escalar. Por exemplo, no caso de uma 2-lâmina, indicada por A , formada pelos vetores a_1 e a_2 , nessa ordem, temos que:

$$12) \quad A^2 = (a_1 a_2)(a_1 a_2) = a_1(a_2 a_1)a_2 = -a_1^2 a_2^2$$

onde na segunda passagem usamos a associatividade do produto de Clifford, e na terceira passagem usamos o fato de que os vetores que compõem uma lâmina são ortogonais, e portanto anticomutam. Como, pelo axioma I, o quadrado de um vetor é um escalar, o quadrado da 2-lâmina, A , é também um escalar. No caso geral, adotamos o mesmo procedimento que acima, permutamos os vetores até obter o quadrado da lâmina expresso como o produto dos quadrados dos vetores que a compõem.

Portanto, se o quadrado de um r -vetor não é um escalar, então o r -vetor não pode ser uma r -lâmina. Mostramos que tal fato pode ocorrer. Da representação por bases obtemos que qualquer r -vetor pode ser expresso como uma soma sobre r -lâminas. Considere um r -vetor, P , dado pela soma de duas r -lâminas, A e B . Assim, temos que:

$$13) \quad P^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Então, se $(AB + BA)$ não é um escalar, P não é uma r -lâmina.

As lâminas são os objetos mais simples para trabalhar em R_n . Assim, o desenvolvimento das relações algébricas decorrentes do produto geométrico serão aqui realizadas inicialmente abordando lâ-

minas, e depois generalizadas para números de Clifford quaisquer. Notamos que o produto geométrico é associativo por definição, de modo que a partir do axioma II é possível extendê-lo a qualquer número da álgebra.

Baseado na seguinte análise, fundamentada na representação de um número de Clifford qualquer em termos das bases para os subespaços R_n^k : por causa da linearidade do produto geométrico, o conhecimento do produto geométrico entre dois números de Clifford quaisquer pode ser inferido do conhecimento do produto geométrico entre duas lâminas de quaisquer graduação; e por sua vez, por causa da associatividade do produto geométrico, o conhecimento do produto geométrico entre duas lâminas de quaisquer graduação pode ser inferido do conhecimento do produto geométrico entre uma lâmina e um vetor. Para completar a cadeia de raciocínios, também por causa da associatividade do produto geométrico, o produto geométrico entre uma lâmina e um vetor pode ser inferido do conhecimento do produto geométrico entre dois vetores quaisquer; e portanto, podemos adotar um método construtivo para o estudo do produto geométrico, que se baseia num grau crescente de dificuldade no estudo do mesmo: iniciamos estudando o produto geométrico entre dois vetores, depois partimos para o estudo do produto entre um vetor e uma lâmina, e como último passo estudamos o produto entre duas lâminas de quaisquer graduação. O produto geométrico entre dois números de Clifford quaisquer, é em última instância, uma soma sobre o produto geométrico entre lâminas através das quais representamos os multivetores componentes dos números. Este procedimento construtivo será empregado no que se segue.

52. PRODUTO GEOMETRICO COM VETOR

Seguindo a análise feita no fim do último parágrafo, vamos agora estudar o produto geométrico quando um dos fatores é um vetor. O resultado básico obtido neste parágrafo diz respeito a graduação dos multivetores resultantes do produto geométrico, relacionando-os, conforme a graduação, com a simetria do produto em relação a comutação dos fatores.

Seja a um vetor e B_r um r -vetor ($r \geq 1$). Então mostraremos que o produto entre a e B_r resulta em:

$$1) \quad aB_r = \langle aB_r \rangle_{r-1} + \langle aB_r \rangle_{r+1}$$

ou seja, o produto geométrico de um vetor com um r -vetor tem apenas multivetores componentes de graduação $r-1$ e $r+1$. Também mostraremos que os multivetores resultantes do produto geométrico tem a paridade de acordo com a graduação, obedecendo a seguinte regra:

$$2a) \quad \langle aB_r \rangle_{r-1} = 1/2(aB_r - (-1)^r B_r a)$$

$$2b) \quad \langle aB_r \rangle_{r+1} = 1/2(aB_r + (-1)^r B_r a)$$

A prova desses resultados será feita para r -lâminas, mas são facilmente generalizadas para r -vetores quaisquer desde que a forma mais geral para um r -vetor é uma soma sobre r -lâminas, a graduação e a paridade sendo a mesma para todos os fatores.

De um modo geral notamos que qualquer produto de dois números em uma álgebra pode ser decomposto em partes simétricas e antisimétricas de acordo com a seguinte expressão:

$$3) \quad DF = 1/2(DF + FD) + 1/2(DF - FD)$$

Tal decomposição é muito significativa no estudo do produto geométrico, como já se pode ver acima (veja também 54, eq 22).

Iniciamos com um estudo mais detalhado do produto de dois vetores de modo a ressaltar o procedimento a ser adotado. Considere o produto geométrico de dois vetores quaisquer, a e b , então, por um lado podemos escrever:

$$4) \quad ab = a^{\parallel}b + a^{\perp}b$$

onde: $a^{\parallel} = ((a \cdot b)/b^2)b$, é a componente de a paralela a b , e a^{\perp} é a componente de a perpendicular a b ($a^{\perp} = a - a^{\parallel}$). Agora, pelo axioma II (eq 6, §1) e corolário subsequente (eq 8), devemos identificar:

$$5) \quad a^{\parallel}b = 1/2(ab + ba) = a \cdot b ; \quad \text{enquanto que:} \quad a^{\perp}b = 1/2(ab - ba)$$

Observe que a equação a esquerda resulta num escalar, enquanto que a da direita resulta num bivector, o que concorda com o resultado geral apresentado no início deste parágrafo (eqs 1 e 2).

Estudamos agora o produto geométrico de um vetor qualquer, a , por uma 2-lâmina, B , formada pelos vetores b_1 e b_2 , nessa ordem. Assim, temos que:

$$6) \quad aB = a(b_1b_2) = (ab_1)b_2 = (a \cdot b_1 + a^{\perp}b_1)b_2$$

Na segunda passagem usamos a associatividade do produto geométrico, e na terceira passagem o resultado acima, onde a^{\perp} é a componente de a perpendicular a b_1 . O primeiro termo no membro da direita está na sua forma final. O segundo termo pode ser desenvolvido notando que o produto geométrico entre $a^{\perp}b_1$ é anticomutativo. Assim, escrevemos:

$$7) \quad a^{\perp}b_1b_2 = -b_1a^{\perp}b_2 = -b_1(a^{\perp} \cdot b_2 + a^{\perp}b_2)$$

onde a^{\perp} é a componente de a^{\perp} perpendicular ao vetor b_2 .

Agora, desde que b_1 e b_2 são ortogonais, temos que:

$$8) \quad a^{\perp} \cdot b_2 = [a - ((a \cdot b_1)/b_1^2) b_1] \cdot b_2 = a \cdot b_2$$

Segue do resultado acima que a^\perp é dado por:

$$9) \quad a^\perp = a - (a \cdot b_1)/b_1^2 b_1 - (a \cdot b_2)/b_2^2 b_2$$

e é claramente ortogonal aos dois vetores b_1 e b_2 .

Com as considerações acima, o produto geométrico do vetor a pela 2-lâmina B pode ser convenientemente escrito como:

$$10) \quad aB = ab_1b_2 = (a \cdot b_1)b_2 - (a \cdot b_2)b_1 + a^\perp b_1 b_2$$

Portanto, o produto geométrico de um vetor e uma 2-lâmina produz somente vetores e trivetores, desde que a^\perp , b_1 e b_2 são ortogonais entre si (axioma I), que são dados por:

$$11) \quad \langle aB \rangle_1 = (a \cdot b_1)b_2 - (a \cdot b_2)b_1 ; \quad \text{enquanto que:} \quad \langle aB \rangle_3 = a^\perp b_1 b_2$$

Vejamos agora a paridade. Para isto, estudamos o produto comutado Ba . Adotando o mesmo procedimento anterior encontramos que:

$$12) \quad Ba = b_1b_2a = (a \cdot b_2)b_1 - (a \cdot b_1)b_2 + a^\perp b_1 b_2$$

Portanto, temos que o vetor componente do produto aB é antissimétrico em relação a comutação dos fatores, enquanto que o trivector componente do produto aB é simétrico em relação a comutação dos fatores, resultados em concordância com a eq 2. Observe que a paridade da parte trivector é facilmente obtida, pois pelo corolário do axioma II, eq 8, §1, o produto entre vetores ortogonais é anticomutativo, e portanto, temos que: $a^\perp b_1 b_2 = -b_1 a^\perp b_2 = b_1 b_2 a^\perp$.

O produto geométrico de um vetor com uma 3-lâmina pode ser estudado adotando o mesmo procedimento acima. Após efetuarmos os cálculos, o produto geométrico entre um vetor v e uma 3-lâmina A , formada pelos vetores a_1 , a_2 e a_3 , é na sua forma final dado por:

$$13) \quad vA = va_1a_2a_3 = (v \cdot a_1)a_2a_3 - (v \cdot a_2)a_1a_3 + \\ + (v \cdot a_3)a_1a_2 + v^\perp a_1a_2a_3$$

onde $v^\perp = v - (v \cdot a_1)/a_1^2 a_1 - (v \cdot a_2)/a_2^2 a_2 - (v \cdot a_3)/a_3^2 a_3$

O bivector e o quadrvetor resultante do produto geométrico de v por A tem a paridade dada por:

$$14) \quad \langle vA \rangle_2 = \langle Av \rangle_2 ; \text{ enquanto que: } \langle vA \rangle_4 = - \langle Av \rangle_4$$

A paridade da parte quadrvetor pode ser entendida rapidamente notando-se que para comutarmos o produto $v^\perp A$, o vetor v^\perp tem de permutar com os tres vetores que formam A , trocando de sinal cada vez que isto é feito. Assim, o resultado final é que $v^\perp A = - Av^\perp$.

Vamos agora demonstrar o caso geral.

Teorema I: o produto geométrico de um vetor qualquer, a , por uma r -lâmina, B_r , tem como resultados sómente multivetores componentes de graduação $r-1$ e $r+1$. Os multivetores resultantes são dados por:

$$15a) \quad \langle aB_r \rangle_{r-1} = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot b_k) b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_{k+1} \dots b_r$$

$$15b) \quad \langle aB_r \rangle_{r+1} = a^\perp b_1 b_2 \dots b_{r-1} b_r$$

onde os vetores b_j 's ($j=1,2,\dots,r$) formam o r -vetor B_r , e a^\perp é a componente do vetor a ortogonal a todos os vetores que compõem B_r :

$$16) \quad a^\perp = a - \sum_{k=1}^r (a \cdot b_k) / b_k^2 b_k$$

A prova deste teorema será feita por indução sobre a graduação da r -lâmina. Já mostramos que ele é válido para os casos em que r é igual a um e dois. Assumimos que ele é válido para r e devemos mostrar que ele é válido para $r+1$. Assim, considere o produto geométrico de um vetor a pela $(r+1)$ -lâmina D_{r+1} , formada pelos vetores $b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}$, e escreva este produto como:

$$aD_{r+1} = ab_1 b_2 \dots b_r b_{r+1} = aB_r b_{r+1}$$

onde a r -lâmina B_r é formada pelos vetores $b_1 b_2 \dots b_r$. Agora, por hipótese, o produto entre a e B_r satisfaz o teorema I, e portanto, o produto entre a e D_{r+1} é dado por:

$$17) \quad aD_{r+1} = (aB_r) b_{r+1} = \left(\sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot b_k) b_1 b_2 \dots \right. \\ \left. \dots b_{k-1} b_{k+1} \dots b_r + a^\perp b_1 b_2 \dots b_r \right) b_{r+1}$$

onde a_1^\perp é a componente do vetor a ortogonal aos vetores $b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, b_r$; mas não é ortogonal ao vetor b_{r+1} .

O primeiro termo da direita, a somatória, está na sua forma final. O teorema I estará provado se:

$$18) \quad a_1^\perp B_r b_{r+1} = a_1^\perp b_1 b_2 \dots b_r b_{r+1} = (-1)^r (a \cdot b_{r+1}) b_1 b_2 \dots b_r + a_1^\perp b_1 b_2 \dots b_r b_{r+1}$$

onde $a^\perp = a - \sum_{k=1}^r (a \cdot b_k) / b_k^2 b_k$

Observamos que $a_1^\perp B_r = (-1)^r B_r a_1^\perp$, e portanto segue que:

$$19) \quad B_r a_1^\perp b_{r+1} = (a_1^\perp \cdot b_{r+1}) B_r + B_r a_2^\perp b_{r+1}$$

onde a_2^\perp é a componente do vetor a_1^\perp perpendicular ao vetor b_{r+1} . Como b_{r+1} é ortogonal a todos os outros vetores b_1, b_2, \dots, b_r , a_2^\perp continua ortogonal a eles, e portanto, a_2^\perp é o próprio a^\perp . Também, da forma explícita para a_1^\perp (eq 15b), deve ser claro que:

$$20) \quad a_1^\perp \cdot b_{r+1} = a \cdot b_{r+1}$$

e portanto o teorema I está demonstrado.

Para completar os resultados apresentados no início do parágrafo, analisamos agora a paridade dos multivetores resultantes do produto entre um vetor e uma r -lâmina, utilizando o teorema I.

A paridade do termo de maior graduação é facilmente obtida desde que a^\perp é ortogonal a todos os vetores b_k ($k=1$ à r), isto é, permutamos o vetor a^\perp com cada vetor b_k até obter o produto comutado. Como o número de permutações é r , e em cada permutação o sinal é invertido:

$$21) \quad a^\perp B_r = (-1)^r B_r a^\perp$$

A paridade do termo de menor graduação é obtida considerando-se o produto comutado, $B_r a$, e notando que nessa ordem, realizariamos inicialmente o produto entre a e b_r , depois entre a e b_{r-1}, \dots , e finalmente entre a e b_1 , ou seja:

$$22) \quad \langle B_r a \rangle_{r-1} = (a \cdot b_r) b_1 b_2 \dots b_{r-2} b_{r-1} - (a \cdot b_{r-1}) b_1 b_2 \dots b_{r-2} b_r + \dots \\ \dots + (-1)^{r+1} (a \cdot b_1) b_2 b_3 \dots b_{r-1} b_r$$

Comparando esse resultado com o enunciado no teorema I (eq 15) é claro que devemos ter:

$$23) \quad \langle B_r a \rangle_{r-1} = (-1)^{r+1} \langle a B_r \rangle_{r-1}$$

Tendo provado os resultados apresentados no início deste parágrafo, vamos agora definir um modo conveniente de representar o produto geométrico de um vetor por um número de Clifford qualquer, representação esta que será adotada nas aplicações, pois é intrínseca e algebricamente significativa. Há duas maneiras de introduzir esta representação; ou através da análise da graduação, ou através da paridade. Vamos optar pela análise da graduação, pois nas aplicações, a primeira coisa a ser feita nas equações envolvendo números de Clifford é igualar separadamente multivetores de mesma graduação. Assim, vamos agora introduzir o conceito de operadores de redução e produção de graduação, isto é, operadores que, através de vetores, atuam sobre multivetores reduzindo e aumentando em uma unidade a graduação dos mesmos. É natural que esses operadores correspondam a partes do produto geométrico, e devemos tratá-los como sendo um produto entre um vetor e um número de Clifford. Denominaremos os operadores de redução e produção de graduação como sendo, respectivamente, os produtos interno e exterior em R_n , sinalizados pelo ponto \cdot e pela cunha \wedge , respectivamente.

No caso em que operam sobre um multivector A_r através de um vetor v , os produtos interno e exterior são definidos por:

$$24) \quad v \cdot A_r = \langle v A_r \rangle_{r-1} ; \text{ enquanto que: } v \wedge A_r = \langle v A_r \rangle_{r+1}$$

e apresentam, portanto, a seguinte paridade (eq 2):

$$25) \quad v \cdot A_r = (-1)^{r+1} A_r \cdot v ; \text{ enquanto que: } v \wedge A_r = (-1)^r A_r \wedge v$$

No caso em que o r -vetor é uma r -lâmina, os produtos interno e exterior são dados explicitamente pelo teorema I.

A idéia básica que leva a definição dos produtos interno e exterior, além da simplicidade na notação, é que eles podem ser definidos para operarem sobre números de Clifford através de um vetor qualquer, pensando que os produtos devem ser efetuados entre o vetor e cada multivetor componente do número, ou seja:

$$26) \quad aD = \sum_k a \langle D \rangle_k = \sum_k (a \cdot \langle D \rangle_k + a \wedge \langle D \rangle_k) = a \cdot D_k + a \wedge D_k$$

onde a é um vetor e D é um número de Clifford qualquer.

Apesar dos produtos interno e exterior de um vetor por um número de Clifford, em geral não representarem as partes simétricas e antisimétricas do produto geométrico, poderíamos chegar ao resultado acima através da análise da paridade da seguinte maneira: deixemos denotar R_n^+ e R_n^- como sendo os subespaços de R_n que são gerados por todos os multivetores de graduação par e ímpar, respectivamente. Obviamente, R_n é a soma direta de R_n^+ e R_n^- , e portanto, qualquer número de Clifford pode ser escrito como uma soma sobre suas componentes nestes subespaços. Vamos indicar as componentes do número D em R_n^+ e R_n^- por D_+ e D_- , respectivamente. Agora, notamos que a paridade dos produtos internos e exterior é tal que podemos escrever:

$$27a) \quad a \cdot D_- = 1/2(aD_- + D_-a) \qquad a \cdot D_+ = 1/2(aD_+ - D_+a)$$

$$27b) \quad a \wedge D_- = 1/2(aD_- - D_-a) \qquad a \wedge D_+ = 1/2(aD_+ + D_+a)$$

e portanto, segue que:

$$28) \quad aD = aD_+ + aD_- = a \cdot D + a \wedge D$$

§3. EXPANSÃO GERAL DO PRODUTO GEOMÉTRICO

Com os resultados dos parágrafos anteriores estamos aptos a realizar um estudo geral do produto de Clifford (produto geométrico). Como qualquer número de Clifford pode ser representado como uma soma de multivetores, e cada multivector pode ser expresso como uma soma de lâminas, por causa da linearidade do produto de Clifford nossa atenção deve estar concentrada no produto entre lâminas.

Além disso, o conhecimento do produto entre lâminas de graduação arbitrária se resume ao conhecimento do produto geométrico entre um vetor e um multivector, através da seguinte análise: vamos operando com cada fator de uma das lâminas sobre cada multivector resultante dos produtos anteriores. Assim, o produto entre lâminas pode ser trabalhado com o aparato já desenvolvido no parágrafo anterior. Não necessitamos trabalhar com duas lâminas, bastando apenas que um dos fatores seja uma lâmina. Para visualizar o procedimento que vamos usar, estudamos inicialmente o produto geométrico entre uma 2-lâmina, A_2 , formada pelos vetores a_1 e a_2 , e um multivector de graduação $s \geq 2$ (B_s) (consideramos $s \geq 2$ para não trabalharmos com casos já estudados). Assim, o produto geométrico entre A_2 e B_s pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} 1) \quad A_2 B_s &= a_1 a_2 B_s = a_1 (a_2 B_s) = a_1 (a_2 \cdot B_s + a_2 \wedge B_s) = \\ &= a_1 \cdot (a_2 \cdot B_s) + a_1 \cdot (a_2 \wedge B_s) + a_1 \wedge (a_2 \cdot B_s) + a_1 \wedge (a_2 \wedge B_s) \end{aligned}$$

A característica essencial do resultado acima é que os multivetores resultantes tem graduação diferindo por duas unidades um do outro. No exemplo acima os únicos multivetores não nulos resultantes do produto geométrico entre A_2 e B_s ($s \geq 2$) são dados abaixo:

$$2a) \quad \langle A_2 B_s \rangle_{s-2} = a_1 \cdot (a_2 \cdot B_s)$$

$$2b) \quad \langle A_2 B_s \rangle_s = a_1 \cdot (a_2 \wedge B_s) + a_1 \wedge (a_2 \cdot B_s)$$

$$2c) \quad \langle A_2 B_s \rangle_{s+2} = a_1 \wedge (a_2 \wedge B_s)$$

Vamos, agora demonstrar a fórmula fundamental para o produto geométrico entre um r -vetor (A_r) e um s -vetor (B_s).

Teorema II: o produto geométrico de um r -vetor por um s -vetor tem a seguinte forma geral:

$$3) \quad A_r B_s = \sum_{j=0}^{\min(r,s)} \langle A_r B_s \rangle_j$$

onde $t = s - r + 2j$, e consideramos $s \geq r$.

A expansão acima é satisfeita pelos resultados obtidos no §2, quando um dos fatores é um vetor, e é trivial no caso em que um dos fatores é um escalar. Neste parágrafo já demonstramos que ela é válida para $r=2$. A prova geral é construída por indução finita sobre um dos fatores. Supomos que a fórmula acima é válida para r , e mostraremos que ela é válida para $r+1$. Consideramos que o multivetor de menor graduação (A_r) é uma lâmina, e supomos para simplificar os cálculos que $s \geq r+1$. Para mostrarmos que a expansão acima é válida para $r+1$, considere um vetor (c) ortogonal a todos os vetores que compõe A_r . Então, o produto geométrico entre c e A_r reduz-se ao produto exterior, e o resultado é portanto um $(r+1)$ -vetor, ou melhor uma $(r+1)$ -lâmina. Agora formamos o produto geométrico entre cA_r e B_s , e desenvolvemos esse produto explorando a associatividade do produto geométrico, e os resultados do §2, ou seja:

$$cA_r B_s = c(A_r B_s) = c \cdot (A_r B_s) + c \wedge (A_r B_s)$$

Supondo que o produto geométrico entre A_r e B_s satisfaz a expansão fundamental é fácil ver que o primeiro termo, $c \cdot (A_r B_s)$, tem a graduação dos multivetores componentes não nulos de $(s-r-1)$ à

$(s+r-1)$, de dois em dois, enquanto que o segundo termo, $c \wedge (A_r B_s)$, tem a graduação dos multivetores componentes de $(s-r+1)$ à $(s+r+1)$, de dois em dois. Portanto, os multivetores componentes não nulos do produto geométrico $(c A_r B_s)$ tem a graduação de $(s-r-1)$ à $(s+r+1)$, de dois em dois, e assim o produto geométrico entre um $(r+1)$ -vetor, $c A_r$, e um s -vetor, B_s , satisfaz a expansão dada no teorema, e a prova está completa.

Não é difícil mudar a prova acima para o caso que $s < r+1$, bastando construir a prova "pela direita", isto é, consideramos que B_s é uma s -lâmina, e introduzimos um vetor c ortogonal a todos os vetores que compõe B_s . Portanto $(B_s c)$ é uma $(s+1)$ -lâmina. Considerações do produto geométrico $A_r (B_s c)$ análogas ao procedimento acima nos levariam a expansão fundamental.

A característica essencial da formula fundamental é a graduação dos multivetores componentes resultantes do produto geométrico, que segue de dois em dois. A análise da graduação dos multivetores resultantes do produto geométrico permite a demonstração de relações existentes entre as diversas partes do produto geométrico. De imediato, esse resultado estabelece que o produto geométrico de um número par (ímpar) de vetores tem como resultado somente multivetores componentes de graduação par (ímpar).

De especial interesse é o resultado que o produto geométrico entre multivetores de graduação par é um número de Clifford cujos multivetores componentes tem todos graduação par. Portanto, o subespaço gerado por todos os multivetores de graduação par (indicado por R_n^*) é fechado em relação ao produto geométrico, sendo uma subálgebra de R_n , denominada a subálgebra par de R_n . Claramente,

o subespaço gerado pelos multivetores de graduação ímpar (indicado por R_n^-) não é fechado em relação ao produto geométrico. Simbolicamente, escrevemos as relações entre os subespaços R_n^+ e R_n^- pelo produto de Clifford como:

$$4) \quad \begin{aligned} R_n^+ R_n^+ &= R_n^+ & R_n^- R_n^+ &= R_n^- \\ R_n^- R_n^- &= R_n^+ & R_n^+ R_n^- &= R_n^- \end{aligned}$$

Desde que R_n^+ é a soma direta dos subespaços R_n^r para r par, a dimensão de R_n^+ é igual a $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, e assim R_n^+ pode ser identificado com R_{n-1} , dotado de uma métrica conveniente. O capítulo II faz um levantamento geral das subálgebras par.

A decomposição de R_n em R_n^+ e R_n^- é de interesse quando estudamos as relações entre as diversas álgebras existentes. Em particular, destacamos a relação entre a álgebra de Pauli e a álgebra de Minkowski: a álgebra de Pauli é a subálgebra par da álgebra de Minkowski. Assim, os multivetores de graduação par na álgebra de Minkowski geram os elementos da álgebra de Pauli. Quando estudarmos tais álgebra encontraremos uma projecção natural de uma álgebra na outra, de modo a incluir os multivetores de graduação ímpar da álgebra de Minkowski na álgebra de Pauli.

Definimos o produto interno e o produto exterior entre dois multivetores quaisquer como sendo os multivetores componentes de menor e maior graduação, respectivamente, no produto geométrico entre os dois multivetores. Assim, seja A_r um r -vetor, e seja B_s um s -vetor, então temos por definição que:

$$5) \quad A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|s-r|} \quad A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{s+r}$$

No caso em que A_r é uma r -lâmina formada pelos vetores a_j 's, os produtos interno e exterior são dados por:

$$\begin{aligned} 6a) \quad A_r \wedge B_s &= A_{r-1} \wedge (a_r \wedge B_s) = A_{r-2} \wedge (a_{r-1} \wedge (a_r \wedge B_s)) = \dots \\ &= \dots = a_1 \wedge (a_2 \wedge \dots [a_{r-1} \wedge (a_r \wedge B_s)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6b) \quad A_r \cdot B_s &= A_{r-1} \cdot (a_r \cdot B_s) = A_{r-2} \cdot (a_{r-1} \cdot (a_r \cdot B_s)) = \dots \\ &= \dots = a_1 \cdot (a_2 \cdot \dots [a_{r-1} \cdot (a_r \cdot B_s)]) \end{aligned}$$

onde escrevemos $A_{r-j} = a_1 a_2 \dots a_{r-j+1} a_{r-j}$, para simplificar a notação. As formulas acima nos dizem que os produtos interno e exterior entre dois multivetores podem ser obtidos por iteração do produto entre um vetor e um multivector (veja eq 2).

É conveniente estender as definições acima para o caso em que um dos fatores é um escalar, do seguinte modo, entendemos que o produto geométrico quando um dos fatores é um escalar é igual ao produto exterior, o produto interno sendo nulo. Isso permite que nossas formulas sejam lidas de maneira mais geral.

Da definição anterior para os produtos interno e exterior é claro que eles atuam dentro da álgebra como operadores de redução e produção de graduação, respectivamente.

Analisamos agora algumas propriedades e relações decorrentes da formula fundamental. É importante encarar o produto geométrico como o produto fundamental da álgebra, os outros produtos sendo formados a partir deles. Assim, quando encontramos uma expressão envolvendo vários números de Clifford e diferentes produtos entre eles, devemos sempre pensar que há um único produto básico entre esses números: o produto geométrico. Por causa que os produtos interno e exterior são dados pelos multivetores resultantes de graduação extrema, eles gozam de algumas propriedades importantes.

Vamos mostrar agora que o produto exterior é associativo. Inicialmente, podemos verificar por exclusão através da análise da graduação dos multivetores componentes que os resultados abaixo são válidos:

$$A_r \wedge (B_s \wedge C_t) = A_r \wedge ((B_s C_t)_{t+s}) = \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{r+s+t}$$

$$(A_r \wedge B_s) \wedge C_t = ((A_r B_s)_{r+s}) \wedge C_t = \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{r+s+t}$$

Agora, pela associatividade do produto geométrico decorre que:

$$7) \quad \langle A_r B_s C_t \rangle_{r+s+t} = \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{r+s+t} = \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{r+s+t}$$

e portanto o produto exterior é associativo.

O apêndice 2 mostra com mais clareza a associatividade do produto exterior, e o leitor pode dissipar suas dúvidas consultando-o.

Devemos observar que apesar do produto de Clifford ser associativo o produto interno em geral não é associativo. Para ilustrar a falta de associatividade do produto interno, realizamos os produtos abaixo, e observamos simplesmente a graduação dos multivetores resultantes:

$$8) \quad A_2 \cdot (A_3 \cdot A_5) = A_2 \cdot (\text{bivetor}) = \text{escalar}; \text{ enquanto que:}$$

$$9) \quad (A_2 \cdot A_3) \cdot A_5 = (\text{vetor}) \cdot A_5 = \text{quadrivetor}$$

onde os índices numéricos referem-se as graduações dos multivetores envolvidos no produto. Claramente os resultados são distintos. Assim, por causa da falta de associatividade do produto interno, é necessário o uso de parênteses a fim de não confundir as expressões. Também, em outras expressões nas quais aparecem vários produtos devemos usar parênteses, como por exemplo:

$$10) \quad (AB) \cdot C \neq A(B \cdot C) \quad \text{e também} \quad (AB) \wedge C \neq A(B \wedge C)$$

A análise da graduação mostra que o produto interno satisfaz uma lei de associatividade restrita; para $t \geq s+r$ vale que:

$$11) \quad A_r \cdot B_t \cdot C_s = (A_r \cdot B_t) \cdot C_s = A_r \cdot (B_t \cdot C_s)$$

O leitor pode verificar que as igualdades abaixo são válidas supondo a restrição acima ($t \geq r+s$), as quais são a prova do resultado acima:

$$\langle A_r B_t C_s \rangle_{t-s-r} = \langle (A_r \cdot B_t) C_s \rangle_{t-r-s} = \langle A_r (B_t \cdot C_s) \rangle_{t-s-r}$$

Ressaltamos que a associatividade restrita satisfeita pelo produto interno só é válida na ordem enunciada acima. Quando trocamos a ordem do multivetor de maior graduação (B_t), encontramos uma formula muito útil para o cálculo do produto interno entre multivetores de quaisquer graduação, que relembra a eq 6b, dada por:

$$12a) \quad A_r \cdot (C_s \cdot B_t) = (A_r \wedge C_s) \cdot B_t ; \text{ ou alternativamente:}$$

$$12b) \quad (B_t \cdot C_s) \cdot A_r = B_t \cdot (C_s \wedge A_r) ; \text{ onde consideramos } t \geq r+s.$$

A verificação deste resultado é imediata. Para o caso que o multivetor de maior graduação (B_t) está a direita, temos que:

$$\langle A_r C_s B_t \rangle_{t-s-r} = \langle A_r (C_s \cdot B_t) \rangle_{t-s-r} = \langle (A_r \wedge C_s) B_t \rangle_{t-s-r}$$

A formula acima expressa uma transposição entre os produtos interno e exterior quando há ainda um produto interno com um multivetor de maior graduação.

Pela associatividade do produto exterior, é claro que o duplo produto exterior com o mesmo vetor é nulo, isto é:

$$13a) \quad a \wedge a \wedge D = (a \wedge a) \wedge D = 0$$

Também notamos que se temos o duplo produto interno consecutivamente com o mesmo vetor, o resultado é nulo, isto é:

$$13b) \quad a \cdot (a \cdot D) = (a \wedge a) \cdot D = 0$$

As propriedades acima dos produtos interno e exterior são similares as propriedades da diferencial no cálculo exterior, onde seu quadrado é nulo. Os produtos interno e exterior podem ser abordados pelas propriedades acima, conhecidas como derivação algébrica (ver [Ma] para um tratamento deste tipo).

$$19) \quad 0 = 1/2 ((-1)^r A_r a P_n - (-1)^r A_r a P_n)$$

Obtemos as relações desejadas, 15a e 15b, agrupando convenientemente os termos, e lembrando as definições do §2, eqs 24 e 25. A relação 15b é obtida quando escrevemos:

$$15b) \quad a \wedge (A_r P_n) = 1/2 (a A_r - (-1)^r A_r a) P_n + \\ + 1/2 (-1)^r A_r (a P_n + (-1)^n P_n a)$$

Por outro lado, a relação 15a é obtida quando escrevemos:

$$15a) \quad a \wedge (A_r P_n) = 1/2 (a A_r + (-1)^r A_r a) P_n - \\ - 1/2 (-1)^r A_r (a P_n - (-1)^n P_n a)$$

Provas análogas podem ser construídas para as relações 14a e 14b. Notamos que no caso de P ser um pseudoescalar, indicado por I, as relações 14b e 15b reduzem-se à:

$$20a) \quad a \cdot (A_r I) = (a \wedge A_r) I$$

$$20b) \quad a \wedge (A_r I) = (a \cdot A_r) I$$

Também, das relações 14a e 15b, decorrem as relações abaixo envolvendo o produto interno e o produto exterior.

$$21a) \quad a \cdot (A_r \wedge P_n) = (a \cdot A_r) \wedge P_n + (-1)^r A_r \wedge (a \cdot P_n)$$

$$21b) \quad a \wedge (A_r \cdot P_n) = (a \cdot A_r) \cdot P_n + (-1)^r A_r \cdot (a \wedge P_n)$$

A prova de tais corolários se faz equacionando multivetores de mesma graduação nas equações originais. Como exemplo, provamos 21a. Observamos inicialmente que: $a \cdot (A_r \wedge P_n)$ é um $(n+r-1)$ -vetor.

Agora notamos que os únicos multivetores componentes com essa mesma graduação no membro direito de 14a são:

$$22a) \quad \langle (a \cdot A_r) P_n \rangle_{n+r-1} = (a \cdot A_r) \wedge P_n, \text{ e também:}$$

$$22b) \quad \langle A_r (a \cdot P_n) \rangle_{n+r-1} = A_r \wedge (a \cdot P_n)$$

Daí segue o corolário 21a. Prova semelhante pode ser construída para 21b..

54. OPERAÇÕES EM R_n

As operações que vamos agora definir são muito úteis nas aplicações, pois dizem respeito a propriedades intrínsecas dos números de Clifford, em especial dos multivetores. Todas as operações aqui definidas são lineares, o que simplifica em muito o estudo das mesmas. Observamos também que inversão e reversão são automorfismos em R_n , ou seja, quando "quadramos" as operações obtemos a identidade.

Após a apresentação das operações estudamos mais cuidadosamente o produto com bivectores, e a paridade das diversas componentes que aparecem na formula fundamental, Teorema II, eq 3, §3. Em especial mostramos que a componente escalar do produto geométrico de dois números é simétrica em relação a comutação dos números.

INVERSÃO: inversão (ou aqui também denominada conjugação em E^n). indicada por $*$, é a operação que leva todo r -vetor (A_r) em seu conjugado (A_r^*) dado por:

$$1) \quad A_r^* = (-1)^r A_r$$

Inversão é distributiva em relação ao produto, isto é:

$$2) \quad (AB)^* = A^*B^*$$

além da linearidade, expressa de modo mais geral como:

$$3) \quad (A + B)^* = A^* + B^* \quad \langle A^* \rangle_k = \langle A \rangle_k^*$$

Pela equação 1, inversão não altera multivetores de graduação par, enquanto que o conjugado de um multivector de graduação ímpar é o seu oposto (ou inverso aditivo). Portanto, inversão distingue os subespaços R_n^+ e R_n^- , fato que é simbolizado como:

$$4) \quad (R_n)^* = (R_n^+ + R_n^-)^* = R_n^+ - R_n^-$$

Observamos que inversão é equivalente a inverter o sentido de todos os vetores do espaço de base (E^n), daí a denominação alternativa conjugação em E^n .

REVERSÃO: é por vezes conveniente reordenarmos os fatores no produto entre números. Para isso introduzimos agora a operação de reversão, indicada por † . O resultado da reversão de um número é denominado reverso do número. Assim temos as seguintes definições:

$$5a) \quad \langle A \rangle_r^\dagger = \langle A^\dagger \rangle_r ; \text{ e também: } (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$5b) \quad \langle A \rangle_1^\dagger = \langle A \rangle_1 ; \text{ e também: } \langle A \rangle^\dagger = \langle A \rangle$$

$$6) \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

As eqs 5a expressam a linearidade da reversão. As eqs 5b mostram que reversão não altera nem vetores nem escalares. Por fim, a eq 6 mostra que o reverso do produto é igual ao produto dos reversos.

Reversão se refere ao produto geométrico, e assim, é natural trabalharmos com lâminas. O reverso de uma lâmina pode ser facilmente analisado através das equações 5b e 6. Temos os seguintes resultados para o reverso de multivetores de menor graduação:

$$7) \quad \text{vetores: } a^\dagger = a \quad \text{bivetores: } B^\dagger = -B,$$

$$\text{trivetores: } T^\dagger = -T \quad \text{quadrivetores: } P^\dagger = P$$

Os resultados são facilmente verificados para lâminas, e resulta da reordenação dos vetores. Por exemplo:

$$\text{se } B = b_1 b_2, \text{ então, } B^\dagger = b_2 b_1 = -b_1 b_2 = -B$$

$$\text{se } T = v_1 v_2 v_3, \text{ então, } T^\dagger = v_3 (v_1 v_2)^\dagger = v_3 v_2 v_1 = -v_1 v_2 v_3$$

Consideramos agora o caso geral. Seja A_r uma r -lâmina formada pelos vetores a_1, a_2, \dots, a_r . Então, o reverso de A_r é dado por:

$$8) \quad A_r^\dagger = a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1$$

Desde de que o reverso é obtido simplesmente alterando a ordem dos vetores no produto, A_r^\dagger está relacionado a A_r por um fator, (-1) elevado a um expoente, que depende do número de inversões necessárias para se obter A_r^\dagger a partir de A_r . A análise abaixo esclarece qual deve ser o expoente:

$$\begin{aligned} 9) \quad a_1 a_2 \dots a_r &= (-1)^{r-1} a_r a_1 a_2 \dots a_{r-2} a_{r-1} = \\ &= (-1)^{(r-1)+(r-2)} a_r a_{r-1} a_1 a_2 \dots a_{r-3} a_{r-2} \end{aligned}$$

e assim por diante, até obtermos o resultado final para o reverso de A_r , dado por:

$$10) \quad A_r^\dagger = (-1)^{r(r-1)/2} A_r$$

O expoente é o resultado da soma de 1 até $r-1$.

NORMA & PRODUTO ESCALAR: utilizando a reversão, definimos o produto escalar entre dois números quaisquer da álgebra como a componente escalar do produto de Clifford de um número pelo reverso do outro, e é representado da maneira usual, ou seja, $\langle A^\dagger B \rangle$.

O produto escalar entre dois números é simétrico em relação a comutação dos números, isto é,

$$11) \quad \langle A^\dagger B \rangle = \langle B^\dagger A \rangle$$

Este resultado segue diretamente das propriedades que definem a operação de reversão.

Usando o produto escalar podemos definir uma norma dada pelo produto escalar de um número por si próprio. A norma assim definida será indicada por barras verticais duplas, e denominada norma pelo reverso. Assim, escrevemos para a norma $\| \cdot \|$ do número A :

$$12) \quad \|A\| = \langle A^\dagger A \rangle$$

Desde que o reverso de um vetor é igual a ele mesmo, a norma assim definida entre os vetores resulta na norma usual em E^n , a

menos de estar elevada ao quadrado, como no caso de espaços euclidianos. Portanto a norma acima é uma generalização da norma em E^n .

A norma $\| \cdot \|$ depende obviamente da métrica adotada em E^n , sendo positiva definida só no caso em que a métrica também é positiva definida. Entretanto, não faremos aqui restrições sobre a métrica a ser utilizada, e portanto não é conveniente efetuarmos a raiz quadrada da norma.

Vamos agora analisar a paridade dos multivetores resultantes do produto geométrico de dois multivetores, os quais são dados pelo Teorema II, eq 3, 53. A paridade dos multivetores resultantes será achada para depender da graduação dos multivetores originalmente envolvidos no produto geométrico e da graduação do próprio multivetor. Mais precisamente, estamos interessados na determinação do expoente n da seguinte fórmula:

$$(13) \quad \langle A_r B_s \rangle_k = (-1)^n \langle B_s A_r \rangle_k$$

A resposta em termos gerais pode ser obtida através do uso da operação de reversão. Notamos que das equações 10 e 6, segue que:

$$(14) \quad \langle A_r B_s \rangle_k^{\vee} = (-1)^{k(k-1)/2} \langle B_s A_r \rangle_k$$

enquanto que por outro lado, $(A_r B_s)^+ = B_s^+ A_r^+$, e segue que:

$$(15) \quad B_s^+ A_r^+ = (-1)^{s(s-1)/2 + r(r-1)/2} B_s A_r$$

e portanto, temos que o expoente n é dado por:

$$(16) \quad n = (s(s-1) + r(r-1) - k(k-1))/2$$

onde $k = s - r + 2j$; $j = 0, 1, 2, \dots, r$ ($s \geq r$, ver eq 3, 53)

Estamos particularmente interessados na paridade dos produtos interno e exterior (ver eq 5, 53). Esses são os casos extremos em que $k = s - r$ ou $k = s + r$, respectivamente. Assim, segue que ($s \geq r$):

$$(17a) \quad A_r \cdot B_s = (-1)^{r(s+1)} B_s \cdot A_r$$

$$17b) \quad A_r \wedge B_s = (-1)^{rs} B_s \wedge A_r$$

Observamos que se a graduação do multivetor de menor graduação envolvido no produto, no caso A_r , for par, os dois produtos comutam.

De posse deste resultado vamos demonstrar que a componente escalar do produto geométrico entre dois números de Clifford é simétrica em relação a comutação dos números. Observamos inicialmente que a componente escalar do produto geométrico entre dois números é simplesmente a soma do produto interno entre os multivetores componentes dos números de mesma graduação, consequência direta da expansão fundamental para o produto geométrico entre dois multivetores (eq 3, 53). Mas, pela equação 17, podemos ver claramente que o produto interno entre dois multivetores de mesma graduação é simétrico. Então, concluímos que a componente escalar do produto de dois números é simétrica em relação a comutação dos números, isto é:

$$18) \quad \langle AB \rangle = \langle BA \rangle$$

Note que a componente escalar do produto geométrico entre dois multivetores de graduações diferentes é nula.

Vamos agora analisar um pouco mais a fundo o Produto Geométrico com Bivector. Os resultados aqui obtidos são muito úteis nas aplicações, tanto no estudo das rotações quanto na formulação da Eletrodinâmica.

O produto geométrico de um bivector, indicado por B , e um r -vetor, indicado por A_r , pode ser escrito como se segue ($r \geq 2$):

$$19) \quad BA_r = B \cdot A_r + \langle BA_r \rangle_2 + B \wedge A_r$$

é interessante analisar a paridade dos multivetores resultantes. Das equações 17a e 17b, sabemos que:

$$20) \quad B \cdot A_r = A_r \cdot B \quad ; \quad \text{e também:} \quad B \wedge A_r = A_r \wedge B$$

Por outro lado, o multivetor resultante de graduação r é anti-simétrico em relação a comutação dos fatores, isto é:

$$21) \quad \langle BA_r \rangle_r = - \langle A_r B \rangle_r$$

Assim, os produtos interno e exterior são a parte comutativa do produto geométrico quando um dos fatores é um bivector. Por outro lado, se o número envolvido no produto é um multivetor, a parte anticomutativa do produto geométrico é dada pelo multivetor resultante de mesma graduação que o multivetor, e podemos escrever:

$$22a) \quad 1/2(BA_r + A_r B) = B \cdot A_r + B \wedge A_r$$

$$22b) \quad 1/2(BA_r - A_r B) = \langle BA_r \rangle_r$$

resultado que é tido como uma extensão dos resultados obtidos para o produto geométrico de um vetor e um r -vetor (eq 2, §2). Note que no caso do produto de um bivector com um vetor, nossa primeira afirmação não é mais verdadeira, pois:

$$23a) \quad 1/2(Bv + vB) = B \wedge v$$

Entretanto, a segunda afirmação continua válida, pois:

$$23b) \quad 1/2(Bv - vB) = B \cdot v = \langle Bv \rangle_1$$

Por simplicidade nas expressões, representamos a parte anticomutativa do produto geométrico de dois números quaisquer pelo comutador dos números, indicado por $[]$, isto é:

$$24) \quad [A, P] = 1/2(AP - PA)$$

A álgebra dos comutadores não é associativa, mas satisfaz a seguinte identidade conhecida como a identidade de Jacobi:

$$25a) \quad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

e algumas outras identidades, entre as quais destacamos:

$$25b) \quad [A, A] = 0 \quad [A, B] = - [B, A]$$

$$25c) \quad [A+B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$25d) \quad [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

No nosso caso, as duas primeiras são óbvias. A segunda é decorrência da linearidade do produto geométrico. A terceira pode ser verificada facilmente. Uma álgebra que goze das propriedades acima é dita uma álgebra de Lie.

O comutador do produto geométrico de um bivector por um multivector tem uma propriedade importante: ele preserva a graduação do multivector (eq 22b). Segue deste fato que a álgebra dos comutadores no espaço dos bivectores é fechada, formando uma subálgebra de R_n .

A álgebra dos comutadores de bivectores é essencial na análise do grupo de rotações, importância ressaltada pelo seguinte resultado (ver [Ma]): a álgebra dos comutadores de bivectores é isomorfa a álgebra dos comutadores das matrizes antisimétricas. Como é bem conhecido as matrizes antisimétricas são os geradores do grupo das rotações. O capítulo III traz uma análise detalhada do grupo das rotações através do esquema algébrico aqui adotado.

Para completar o estudo dos bivectores, ressaltamos duas particularidades: 1) um bivector é denominado simples se seu quadrado é um escalar. Das equações 19 e 22, uma condição necessária e suficiente para um bivector ser simples é que o produto exterior dele por si próprio seja nulo, isto é:

$$26) \quad B^2 = B \cdot B = \text{escalar, se e sómente se } B \wedge B = 0$$

Também, dois bivectores são ditos ortogonais se o produto interno entre os dois é nulo. Observamos que todo bivector da base de R_n^2 construída a partir de uma base de vetores ortogonais para E^n é simples e são ortogonais entre si.

§5. BASES

Trabalharemos somente com bases ortonormais. Os vetores da base serão chamados de versores, e indicados genericamente pela letra \hat{e} . Os elementos das bases dos subespaços R_n^k serão indicados por acúmulos de índices após a letra \hat{e} , conforme convenção firmada no §1, eq 9, e serão também designados por bivectores ($k=2$), trivectores ($k=3$), etc.. Usaremos uma convenção alternativa à do §1, eq 10, para a representação de um número de Clifford em termos das bases para os subespaços, conforme a expressão abaixo:

$$1) \quad D = D^0 + D^j \hat{e}_j + (1/2)D^{j_1 j_2} \hat{e}_{j_1 j_2} + \dots + \\ \dots + (1/n!) D^{j_1 j_2 \dots j_n} \hat{e}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$$

onde a soma sobre índices repetidos é subentendida, e definimos as coordenadas do número D como $D^{j_1 j_2} = -D^{j_2 j_1}$, desde que $\hat{e}_{j_1 j_2} = -\hat{e}_{j_2 j_1}$. Nos outros subespaços também vamos acompanhando o sinal das coordenadas de acordo com o sinal dos multiversores da base. Tal expediente requer dividirmos cada componente (ou soma) nos subespaços R_n^k por $(k!)$, onde k é a graduação do subespaço.

É conveniente em espaços não euclidianos introduzir a base recíproca (\hat{e}^j), onde os $\hat{e}^{j_1 j_2}$ satisfazem a condição:

$$2) \quad \hat{e}^i \cdot \hat{e}_j = \delta^i_j, \quad \text{onde } \delta^i_j = 1 \text{ se } i=j, \text{ e } 0 \text{ nos outros casos, é o delta de Kroenecker usual.}$$

A base recíproca como construída aqui está associada ao mesmo espaço de base, e não deve ser interpretada como estando associada a algum outro espaço distinto, sendo apenas um recurso de linguagem. Para distinguir a base natural da base recíproca, devemos representar os versores da base recíproca por superíndices. Os versores da base natural continuarão a ser indicados por subíndices.

É conveniente fazer o balanceamento dos índices em espaços não euclidianos, de modo a valer a convenção da soma: havendo um subíndice igual a um super-índice a soma é subentendida.

Um vetor qualquer de E^n pode ser representado tanto na base original (\hat{e}_j) quanto na base recíproca (\hat{e}^j) , isto é:

$$3) \quad v = v^j \hat{e}_j = v_j \hat{e}^j$$

A representação dos vetores (e também multivetores) por componentes como acima esclarece um fato essencial: os vetores são objetos absolutos, não dependendo da base escolhida para representá-los. Assim, se mudarmos a base do espaço por meio de uma aplicação linear, as coordenadas dos vetores devem mudar com a inversa da aplicação linear entre as bases, a fim de que os vetores permaneçam invariantes frente a mudança de base. As coordenadas que se transformam de acordo com os versores da base recíproca são chamadas de coordenadas contravariantes (v^j) e as coordenadas que se transformam com a inversa da transformação dos versores da base recíproca são chamadas de coordenadas covariantes (v_j). Observamos que as coordenadas contravariantes de um vetor são obtidas efetuando-se o produto interno entre o vetor e o correspondente versor da base recíproca, ou seja, temos que:

$$4) \quad v^j = v \cdot \hat{e}^j$$

pois, por definição $\hat{e}^j \cdot \hat{e}_i = \delta^j_i$

Definimos o tensor métrico segundo o produto interno dos vetores da base do E^n , com as componentes na forma covariante dadas pelo produto interno dos correspondentes versores da base natural:

$$5a) \quad G_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

Com o auxílio da base recíproca podemos escrever as componentes contravariantes do tensor métrico:

$$5b) \quad G^{ij} = \hat{e}^i \cdot \hat{e}^j$$

O tensor métrico é usualmente representado formando-se uma matriz quadrada, $n \times n$, indicada por $[G]$, com suas componentes dadas pela equação acima. A matriz assim construída é simétrica, pois o produto interno entre dois vetores é a parte simétrica do produto geométrico. Além disso, trabalhando com bases ortogonais o tensor métrico assume uma forma diagonal, isto é, os elementos de matriz $[G]_{ij}$ são nulos se $i \neq j$.

O produto interno de dois vetores pode ser representado como:

$$6a) \quad a \cdot b = a^i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}^j = a^i b_j \delta_i^j = a^i b_i$$

De outra forma, podemos também escrever:

$$6b) \quad a \cdot b = a^i b^j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a^i b^j G_{ij} = a^i b_i$$

Notamos então, que o tensor métrico faz o balanceamento de índices, ou seja transforma as coordenadas contravariantes em covariantes e vice-versa, de acordo com a seguinte regra:

$$7a) \quad a^j = G^{ji} a_i, \quad \text{ou} \quad a_j = G_{ji} a^i$$

A base recíproca também pode ser construída a partir do tensor métrico pelo mesmo processo utilizado para as coordenadas, isto é:

$$7b) \quad \hat{e}^j = G^{ji} \hat{e}_i$$

Analogamente aos versores e as respectivas coordenadas, os multiversores das bases recíprocas dos subespaços R_n^k são também relacionados à base natural pelo tensor métrico, assim também sendo as coordenadas contravariantes e covariantes dos multivetores. Ilustramos as situações que podem ocorrer para o caso das coordenadas de um bivector, que pode ser expresso como:

$$8) \quad 2B = B^{ij} \hat{e}_{ij} = B^j_i \hat{e}_i^j = B_i^j \hat{e}^{ij} = B_{ij} \hat{e}^{ij}$$

As diferentes formas das coordenadas do bivector B estão relacionadas pelo tensor métrico através das seguintes expressões:

$$9) \quad B^{ij} = G^{ir} B_r^j = G^{js} B_s^i = G^{ir} G^{js} B_{rs}$$

Mostramos abaixo alguns resultados para o produto geométrico entre multivectores. Tais expressões e alternativas são muito úteis nas aplicações. Inicialmente, observamos que trabalhando com bases ortogonais, o produto geométrico entre os versores reduz-se ao produto exterior, isto é:

$$10) \quad \hat{e}_i \hat{e}_j = \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = \hat{e}_{ij} = -\hat{e}_{ji} \quad \text{ou} \quad \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0, \quad \text{se } i \neq j.$$

Por outro lado, temos que:

$$11) \quad \hat{e}_{ij} = \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = 0; \quad \text{se } i=j.$$

Em geral, temos que:

$$12) \quad \hat{e}_i \hat{e}_j = G_{ij} + \hat{e}_{ij}; \quad \text{ou:} \quad \hat{e}_i \hat{e}^j = \delta_i^j + \hat{e}_i^j$$

A seguir mostramos alguns resultados do produto geométrico entre multivectores de menor graduação. Esses resultados podem ser obtidos usando-se a associatividade do produto geométrico (escreva $\hat{e}_{jk} = \hat{e}_j \hat{e}_k$, para $j \neq k$), e a expansão para o produto geométrico entre um vetor e uma lâmina (Teorema I, eq 15, §2).

$$13a) \quad \hat{e}_i \hat{e}_{jk} = G_{ij} \hat{e}_k - G_{ik} \hat{e}_j + \hat{e}_{ijk}$$

$$13b) \quad \hat{e}_j \hat{e}_{lmn} = G_{jl} \hat{e}_{mn} - G_{jm} \hat{e}_{ln} + G_{jn} \hat{e}_{lm} + \hat{e}_{jlmn}$$

$$14) \quad \hat{e}_{ij} \hat{e}_{mn} = \hat{e}_i (\hat{e}_j \hat{e}_{mn}) = \text{tres multivetores componentes}$$

$$14a) \quad \langle \hat{e}_{ij} \hat{e}_{mn} \rangle = \hat{e}_{ij} \cdot \hat{e}_{mn} = G_{jm} G_{in} - G_{jn} G_{im}$$

$$14b) \quad \langle \hat{e}_{ij} \hat{e}_{mn} \rangle_2 = G_{jm} \hat{e}_{in} - G_{jn} \hat{e}_{im} - G_{im} \hat{e}_{jn} + G_{in} \hat{e}_{jm}$$

$$14c) \quad \langle \hat{e}_{ij} \hat{e}_{mn} \rangle_4 = \hat{e}_{ij} \wedge \hat{e}_{mn} = \hat{e}_{ijmn}$$

Os resultados para expressões envolvendo tanto os versores da base natural quanto os versores da base recíproca podem ser obtidos dos resultados acima através da substituição conveniente das componentes do tensor métrico pelo delta de Kronecker.

Agora mostramos como se relacionam as coordenadas de multivetores que são o produto de outros multivetores para casos em que a graduação dos objetos envolvidos é baixa. Seja F um bivector resultante do produto exterior entre os vetores a e b . Então, temos que:

$$15) \quad F^{ij} = a^i b^j - a^j b^i, \quad \text{se } F = a \wedge b.$$

Para o vetor v , resultante do produto interno entre o vetor u e o bivector F , isto é, se:

$$16) \quad v = F \cdot u, \quad \text{então: } v^i = F^{ij} u_j, \quad \text{onde } v \text{ e } u \text{ são vetores.}$$

É por vezes útil trocarmos a ordem dos versores no produto geométrico. Isso pode ser feito, no caso do produto entre vetores usando-se o fato que o produto interno é a parte simétrica do produto geométrico, isto é:

$$17) \quad ab = 2a \cdot b - ba$$

Para inverter o produto geométrico entre um vetor e um bivector, podemos escrever:

$$18) \quad aF = 2a \cdot F + Fa$$

Definimos a unidade pseudoescalar da álgebra, indicada por I maiúsculo, como se segue:

$$19) \quad I = \hat{e}_{123\dots n} = (1/n!) \epsilon^{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \hat{e}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$$

onde definimos $\epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n}$ como o permutador de $1, 2, 3, \dots, n$.

Na forma contravariante, ele é (por definição) $+1$ se o número de inversões (também dito permutação) na ordem fundamental $(1, 2, 3, \dots, n)$ é par, e -1 se o número de inversões é ímpar. Assim, temos que:

$$20a) \quad \epsilon^{123\dots n} = +1, \quad \text{e também:}$$

$$20b) \quad \epsilon^{213\dots n} = -1$$

Considere uma r -lâmina, A_r , formada pelos vetores a_1, a_2, \dots, a_r . Então, observamos que a definição do permutador de $123\dots r$ expressa as permutações dos vetores na expressão para A_r , ou seja:

$$21) \quad \epsilon^{123\dots r} A_r = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r}$$

Vamos agora enunciar e demonstrar um resultado de grande utilidade nas aplicações, pois ele simplifica em muito o Teorema II eq 3, §3, no caso em que um dos fatores é um pseudoescalar.

Teorema III: o produto geométrico de um número qualquer da álgebra por um pseudoescalar reduz-se ao produto interno.

Para a demonstração consideramos o produto de um pseudoescalar indicado por P , por uma lâmina. Iniciamos notando que para o caso do produto com vetores o teorema é trivial, desde que os pseudoescalares são os elementos de maior graduação em R_n . Considere agora o produto de P com uma 2-lâmina, A_2 , formada pelos vetores a e b . Assim, temos que:

$$22) \quad A_2 P = abP = a(bP) = a \cdot (bP) + a \wedge (bP)$$

Agora, o primeiro termo no último membro da direita é simplesmente o produto interno entre a 2-lâmina A_2 e P (eq 6, §3), isto é:

$$23) \quad a \cdot (bP) = a \cdot (b \cdot P) = (ab) \cdot P = A_2 \cdot P$$

O segundo termo é nulo, pois temos que (eq 20b, §3):

$$24) \quad a \wedge (bP) = (a \cdot b)P = 0$$

desde que a e b são ortogonais entre si, por hipótese.

Tendo demonstrado o teorema para os casos em que o número é um vetor ou uma 2-lâmina, o caso geral é feito por indução. Supomos que o teorema seja válido para uma r -lâmina, isto é, $A_r I = A_r \cdot I$, e vamos mostrar que ele é válido para uma $(r+1)$ -lâmina. Para isso, consideramos uma $(r+1)$ -lâmina formada pelo produto geométrico entre

um vetor, v , e A_p , sendo que v é ortogonal a todos os vetores que compõe A_p (portanto, $vA_p = v \wedge A_p$). Agora, consideramos o produto geométrico entre vA_p e I , cujo desenvolvimento é dado por:

$$25) \quad (vA_p)I = v(A_p I) = v \cdot (A_p I) + v \wedge (A_p I)$$

Seguindo a argumentação que estavamos dando, o primeiro termo é o produto interno entre vA_p e I , pois por hipótese o produto geométrico entre A_p e I é igual ao produto interno, isto é:

$$26) \quad v \cdot (A_p I) = v \cdot (A_p \cdot I) = (v \wedge A_p) \cdot I = (vA_p) \cdot I$$

O segundo termo é nulo, pois pela eq 20b, §3, temos que:

$$27) \quad v \wedge (A_p I) = (v \cdot A_p)I = 0$$

é portanto o teorema está demonstrado.

Considerando o produto geométrico da unidade pseudoescalar por um multivector da base de R_n , o teorema III pode facilmente ser visualizado através do seguinte raciocínio: como a unidade pseudoescalar é formada por todos os versores da base de E^n , podemos escrever o produto da unidade pseudoescalar pelo k -versor $\hat{e}_{j_1 j_2 \dots j_k}$, como sendo o quadrado deste k -versor multiplicado pelos versores de E^n distintos dos versores que formam o k -versor, bastando reordená-los convenientemente.

Como consequência do teorema, obtemos que o resultado da multiplicação de um r -vetor por um pseudoescalar é um $(n-r)$ vetor, e vice-versa. Assim, podemos definir uma dualidade entre os subespaços R_n^k e R_n^{n-k} através da multiplicação dos elementos de um dos subespaço por um pseudoescalar, denominada naturalmente de dualidade por pseudoescalar. A dualidade exposta acima deve ser entendida do ponto de vista da álgebra linear, isto é: os espaços vetoriais R_n^r e R_n^{n-r} são isomorfos (note que os subespaços R_n^r e R_n^{n-r} tem a mesma dimensão).

Nos próximos parágrafos, onde estudamos as álgebras de Pauli e de Minkowski, estudaremos em maior detalhe a dualidade pela unidade pseudoescalar, que será muito útil na formulação da Eletrodinâmica, principalmente na representação do campo eletromagnético, facilitando em muito os cálculos.

A dualidade por pseudoescalar exposta acima, corresponde ao dual de Hodge encontrado na álgebra exterior (ver apêndice III).

É interessante observar as propriedades de comutação do produto geométrico entre um pseudoescalar e um r -vetor. Do teorema III, e da equação 17, §4, segue que:

$$28) \quad IA_r = (-1)^{r(n+1)} A_r I$$

onde n é a dimensão do espaço de base associado a R_n .

Então, se a dimensão do espaço de base for ímpar (como no caso da álgebra de Pauli, ver capítulo II) os pseudoescalares comutam com qualquer elemento da álgebra, enquanto que se n for par (como na álgebra de Minkowski), comutam com multivetores de graduação par (elementos de R_n^+) e anticomutam com multivetores de graduação ímpar. Note que os pseudoescalares sempre comutam entre si.

É conveniente também analisar o quadrado da unidade pseudoescalar, que é igual a ± 1 , o sinal dependendo da dimensão do espaço de base e da métrica adotada. Iniciamos escrevendo I^2 como abaixo:

$$29) \quad I^2 = (-1)^{n(n+1)/2} I I^+$$

Agora, é fácil ver que: $I I^+ = +1$, em espaços euclidianos.

Em espaços de base com assinatura métrica r, s onde s indica o número de vetores com quadrado negativo, temos que

$$30) \quad I I^+ = (-1)^s$$

CAPITULO II: ÁLGEBRAS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo particularizamos o estudo geral do capítulo anterior. Algumas álgebras associadas a espaços de baixa dimensão são bem conhecidas, como a dos complexos (§1.1) e a dos quaternions (§2.3), outras não, como a dos pseudocomplexos (§1.2). Também, encontramos as relações satisfeitas pelas matrizes de Pauli naturalmente na álgebra associada ao espaço euclidiano, e por isso denominamos-a álgebra de Pauli (§9). Dentro dessa álgebra encontramos uma subálgebra muito conhecida: a álgebra vetorial. Por fim, estudamos a álgebra que mais nos interessa, a álgebra de Minkowski (§10), associada ao espaço-tempo da relatividade restrita. A parte de suas particularidades, as álgebras aqui estudadas se enquadram perfeitamente bem no esquema algébrico desenvolvido no capítulo I.

No primeiro parágrafo deste capítulo fazemos um levantamento geral das álgebras de baixa dimensão, e introduzimos o conceito de isomorfismos entre duas álgebras. Juntamente com a noção de subálgebra par, o conceito de álgebras isomorfas permite que nosso estudo se desenvolva de maneira gradual.

Parte do material aqui abordado pode ser encontrado nas seguintes referências: [He⁰], [Sa³], [Gr], [He⁴], [Ve], [Sa⁵].

§6. ISOMORFISMOS

Isomorfismos entre duas álgebras é definido em termos de uma aplicação, tal que essa aplicação estabeleça uma correspondência entre os elementos de uma álgebra e os elementos da outra álgebra,

e além disso, preserve o produto, ou seja, as álgebras C_1 e C_2 são isomorfas se existe uma aplicação ϕ :

1a) $\phi: C_1 \rightarrow C_2$, tal que ϕ é invertível e também vale:

1b) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, para qualquer x, y pertencente a C_1 ;

1c) $\phi^{-1}(\phi^{-1}x\phi^{-1}y) = xy$

onde $x^{-1} = \phi(x)$, e $y^{-1} = \phi(y)$.

Quando nos referirmos a isomorfismos entre álgebras de Clifford, entendemos que o produto a ser preservado pelo isomorfismo é o produto geométrico. Isomorfismos entre álgebras de Clifford requer como condição básica, necessária mas não suficiente, que as álgebras tenham a mesma dimensão, pois se elas são isomorfas, o espaço vetorial a elas associados também são isomorfos do ponto de vista da álgebra linear.

Ressaltamos que os isomorfismos entre álgebras de Clifford não necessitam preservar a graduação dos elementos entre as álgebras, e como veremos a seguir em geral não preservam. Neste último caso, todas as operações existentes em uma das álgebras que dependam da graduação dos números não tem uma correspondente natural na outra álgebra. Segue como corolário básico deste fato que duas álgebras isomorfas nem sempre tem as mesmas subálgebras par (vide por exemplo, §7), desde que o conceito de subálgebra par está estruturado sobre a graduação da álgebra (é a subálgebra gerada por todos elementos de graduação par, vide §3, eq 4). Obviamente, deve ser possível definir em uma álgebra operações induzidas por operações existentes em outra álgebra isomorfa a primeira (vide por exemplo a definição de inversão espacial na álgebra do espaço-tempo, neste capt, §10).

Outra consequência deste fato, é que quando regraduamos a subálgebra par, R_n^+ , isto é, a representamos por uma álgebra de Clifford isomorfa a ela (ver tabela II mais a frente), indicada por $*R_{n-1}$, as operações existentes em R_n^+ , como por exemplo inversão e reversão, nem sempre correspondem as respectivas operações existentes em $*R_{n-1}$. Em particular, os produtos interno e exterior existentes em R_n^+ e $*R_{n-1}$ não levam ao mesmo resultado. Em geral, somente o produto geométrico é preservado, assim como requerido para o isomorfismo entre R_n^+ e $*R_{n-1}$.

No 57 e 58 deste capítulo, mostramos que as álgebras $R_{0,1}$ e $R_{0,2}$ são isomorfas aos complexos e aos quaternions, respectivamente, indicados por C e H. Além disto, devemos usar a seguinte convenção para algumas das outras álgebras apresentadas na tabela I:

$$R_{3,0} = P \text{ (álgebra de Pauli)} \quad R_{3,1} = J \text{ (álgebra de Majorana)}$$

$$R_{1,3} = M \text{ (álgebra de Minkowski)} \quad R_{4,1} = D \text{ (álgebra de Dirac)}$$

As álgebras P e M serão estudadas nos 59 e 510 deste capítulo. As álgebras de Majorana e de Dirac não serão abordadas neste trabalho (observação: a referência básica para esta tese [He⁰] denomina a álgebra de Minkowski de álgebra de Dirac, denominação já revista pelo próprio autor em [He³]).

Fazemos aqui uma observação: os físicos não distinguem, por descuido, as formulações feitas adotando-se métricas diferentes no espaço-tempo: alguns utilizam a métrica de assinatura +2 (Majorana), enquanto outros utilizam a métrica de assinatura -2 (Minkowski). Notamos que a álgebra tensorial, associada a um espaço vetorial, é independente da métrica adotada no espaço vetorial. Entretanto, as álgebras de Clifford dependem da assinatura métrica, e em

particular, as álgebras de Minkowski e de Majorana não são isomorfas (vide tabela I).

A álgebra de Majorana é muito usada pelos físicos considerando o tempo como um número complexo imaginário puro. Esta consideração, juntamente com a adoção da norma euclidiana usual no \mathbb{R}^4 , resulta na norma de Lorentz-Majorana, isto é, considere um vetor quadridimensional $x = (it, x)$, a norma euclidiana do vetor x é:

$$2) \quad |x|^2 = (it)^2 + x^2 = -t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

que é a norma de Lorentz associada à métrica de Majorana $(-, +, +, +)$.

O estudo das diferenças obtidas usando-se métricas distintas para o espaço-tempo está ainda em aberto, mas é um ramo de pesquisa proeminente na formulação das teorias relativistas. Adotamos aqui a métrica de Minkowski $(+, -, -, -)$ por acharmos mais natural. A parte das diferenças entre as métricas de Majorana e de Minkowski, a representação complexa da componente temporal é tida por nós como um tanto artificial. Livros mais modernos, e mesmos os reeditados (vide [Ja] e [LL]) tem adotado a mesma postura que a nossa.

Apresentamos agora um resultado que estabelece isomorfismos entre algumas álgebras de Clifford, corolário das equações 5 e 6 que estabelecem as subálgebras par.

$$3) \quad \text{Teorema: } R_{p+1, q} \text{ é isomorfa a } R_{q+1, p} \quad (p \text{ ou } q \geq 1)$$

Assim, temos que (isomorfismo indicado por \sim):

$$\begin{array}{lll} R_{2,0} \sim R_{1,1} & R_{1,2} \sim P & R_{4,0} \sim M \\ R_{2,2} \sim J & R_{2,3} \sim D & R_{5,0} \sim R_{1,4} \end{array}$$

Além destas relações, são também válidas as seguintes relações, não enquadradas no teorema anterior (ver [VW] ou [Sa4]):

$$4) \quad R_{0,4} \sim M \quad R_{0,5} \sim D$$

De posse destas relações de isomorfismos entre as álgebras, podemos classificar as álgebras de acordo com sua dimensão e assinatura métrica, como exposto na tabela I dada a seguir (para simplificar escrevemos $R_{2,0} = E$; $R_{1,4} = N$; e também $R_{1,0} = F$).

Tabela I: isomorfismos entre álgebras de Clifford de acordo com sua dimensão e assinatura métrica.

n	$R_{p,q}$					
0	R					
1		F		C		
2		E		E		H
3		P	$R_{2,1}$	P		$R_{0,3}$
4		M	J	J	M	M
5	N	D	$R_{3,2}$	D	N	D

O braço esquerdo da tabela é a direção de p crescente, enquanto que o braço direito é a direção de q crescente, na mesma linha.

Observamos que a álgebra inicialmente abordada por Clifford foi $R_{0,3}$, conhecida como a álgebras dos biquaternions (ver referências históricas).

Para abordagem das álgebras de Clifford por teoria de Grupos ver [Ve], [UW] e [Sa4].

O estudo das subálgebras par é de especial interesse, pois as álgebras apresentadas estão relacionadas por este conceito. Assim, o conhecimento de algumas propriedades de uma estrutura maior (R_n) pode ser inferido do conhecimento das propriedades correspondentes na estrutura menor (vide por exemplo, os estudos do capt II).

Um teorema que diz quais álgebras de Clifford são isomorfas as subálgebras par de outras álgebras pode ser encontrado em [Ve], e relata que:

5) a subálgebra par de $R_{p,q}$ é isomorfa a $R_{p,q-1}$

6) a subálgebra par de $R_{p,q}$ é isomorfa a $R_{q,p-1}$

onde os índices que fornecem a assinatura métrica são inteiros positivos, incluindo o zero.

Como corolário das eqs 5 e 6, temos que as álgebras $R_{p,q}$ e $R_{q,p}$ tem a mesma subálgebra par.

Observamos então, que apesar de não serem isomorfas, as álgebras de Majorana ($R_{3,1}$ ou J) e a álgebra de Minkowski ($R_{1,3}$ ou M) tem a mesma subálgebra par que é a álgebra de Pauli, $R_{3,0}$ ou P. Notamos entretanto, que a subálgebra par da álgebra de Dirac é a álgebra de Minkowski que não é isomorfa a álgebra de Majorana. Este resultado sugere que a álgebra de Minkowski seja mais conveniente do que a álgebra de Majorana para a formulação das teorias físicas, referendando assim nosso ponto de vista.

Um levantamento das subálgebras par das álgebras de Clifford é dado na seguinte tabela.

Tabela II: subálgebras par, $R_{p,q}^+$, conforme dimensão e assinatura métrica da álgebra inteira, $R_{p,q}$. Após tabela I.

n	$R_{p,q}^+$							
0	R							
1	R				R			
2	C		F		C			
3	H		E		E		H	
4	$R_{0,3}$		P		$R_{2,1}$		P $R_{0,3}$	
5	M	M	J	J	M	M	M	M

§7. ÁLGBRAS DE CLIFFORD BIDIMENSIONAIS

Analisaremos agora as álgebras de Clifford associadas ao espaço vetorial real unidimensional, com normas distintas ($E^{1,0}$ e $E^{0,1}$). Apesar dos espaços de base serem isomorfos (do ponto de vista da álgebra linear), as álgebras de Clifford associadas a $E^{0,1}$ e $E^{1,0}$ não são isomorfas.

Para o estudo de tais álgebras, vamos utilizar outra norma, denominada norma pelo conjugado, ao invés da norma introduzida anteriormente, derivada do produto escalar (norma pelo reverso).

Ao estudarmos álgebras associadas a espaço de base unidimensionais, o versor do espaço de base é identificado com a unidade pseudoescalar da álgebra. Assim, vetores confundem-se com pseudoescalares. Não devemos utilizar a base recíproca, e também não será necessário a utilização de índices, desde que o espaço de base é unidimensional.

Observamos também que no estudo das álgebras de Clifford bidimensionais, o produto de Clifford é comutativo, pois o produto geométrico entre vetores reduz-se ao produto interno. Ressaltamos que o produto fundamental é o produto geométrico, e no que se segue não vamos nos referir a outros produtos.

§7.1 ÁLGBRAS DOS COMPLEXOS

A álgebra de Clifford associada a $E^{0,1}$ será identificada com a álgebra dos complexos, o que deve ficar claro da exposição a seguir. Deste modo, a unidade pseudoescalar, um vetor unitário, se-

rá denominada unidade imaginária, e será representada por i . Um número complexo qualquer tem uma componente real (escalar) e uma componente imaginária (pseudoescalar), e pode ser escrito como:

$$1) \quad z = x + iy, \text{ onde } x \text{ e } y \text{ são escalares.}$$

Assumindo a representação acima, o produto entre dois números quaisquer da álgebra é dado por:

$$2) \quad z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Então, o produto geométrico em $R_{0,1}$ é simplesmente o produto entre números complexos, referendando nossa denominação anterior.

Em particular, o quadrado de um número complexo é dado por:

$$3) \quad z^2 = (x^2 + y^2) + 2ixy$$

Definimos a operação de inversão (ou conjugação), indicada por $*$, da maneira usual (eq 1, §4), ou seja, conjugação inverte o sinal dos vetores da base. Assim, o conjugado de z é dado por:

$$4) \quad z^* = x - iy, \text{ onde } z = x + iy$$

Assim, a operação de inversão (ou conjugação) produz simplesmente o conjugado complexo do número, como era de se esperar.

O produto de um número pelo seu conjugado, é dado por:

$$5) \quad z^* z = z z^* = x^2 + y^2$$

que é um escalar positivo. Assim, definimos a norma para os complexos através do produto do número pelo seu conjugado, isto é:

$$6) \quad |z|^2 = z^* z = x^2 + y^2$$

A norma assim definida é denominada norma pelo conjugado, e reproduz a norma euclidiana dentro dos complexos.

Como é bem conhecido, os complexos formam uma álgebra de divisão. O inverso de um número z , é indicado por z^{-1} , e é dado por:

$$7) \quad z^{-1} = z^* / |z|^2$$

§7.2 PSEUDOCOMPLEXOS

Abordamos agora a álgebra dos pseudocomplexos, associada ao espaço de base $E^{1,0}$, indicada por F . A unidade pseudoescalar será indicada por \mathcal{U} , e temos que $\mathcal{U}^2 = +1$.

Um número qualquer da álgebra F , indicado por q , tem uma componente escalar e uma componente pseudoescalar, e é escrito como:

$$8) \quad q = x + \mathcal{U}y, \text{ onde } x \text{ e } y \text{ pertencem a } \mathbb{R}.$$

O produto de dois números quaisquer da álgebra resulta em:

$$9) \quad q_1 q_2 = (x_1 + \mathcal{U}y_1)(x_2 + \mathcal{U}y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathcal{U}(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Definimos o conjugado espacial de q , indicado por q^* , como:

$$10) \quad q^* = x - \mathcal{U}y$$

A norma pelo conjugado no caso dos pseudocomplexos conduz à norma de Lorentz, isto é:

$$11) \quad |q|^2 = q^* q = x^2 - y^2$$

Observamos que o escalar obtido da norma pelo conjugado pode ser igual a zero, para isto basta que $x=y$. Isso nos sugere que os pseudocomplexos não formam uma álgebra de divisão.

Introduzimos agora o conceito de divisibilidade seccional. A idéia é classificar os elementos de F de modo que para certas classes deles a existência de inversa seja assegurada.

Um pseudocomplexo é dito tipo luz se $|z|=0$, tipo tempo se $|z|>0$ e tipo espaço se $|z|<0$. Para os pseudocomplexos tipo luz não há inversa. Para os pseudocomplexos tipo tempo a inversa existe, e é dada por:

$$12) \quad z^{-1} = z^*/|z|, \quad (|z|>0)$$

Claramente, a inversa satisfaz $z z^{-1} = z^{-1} z = +1$.

58. ALGEBRAS QUADRIDIMENSIONAIS

Vamos agora estudar as álgebras de Clifford associadas aos espaços de base bidimensionais, $E^{2,0}$, $E^{1,1}$ e $E^{0,2}$. A característica comum dessas álgebras, além da dimensão, é que os vetores anticomutam com os pseudoescalares, desde que os pseudoescalares são bivectores nessas álgebras, e o produto entre um pseudoescalar e um vetor é o produto interno, que no caso é anticomutativo. Assim, considerando uma base de vetores ortogonais, os vetores e os pseudoescalares construído a partir do produto geométrico desses vetores formam um conjunto de tres elementos anticomutativos. Esse é um dos fatos cruciais na análise dessas álgebras. A escolha das métricas distingue as álgebras, selecionando a álgebra dos quaternions como sendo a única álgebra entre elas que constitui uma álgebra de divisão, ou seja, para qualquer quaternion existe e é única a inversa, no sentido usual.

58.1 A ALGEBRA DO PLANO EUCLIDIANO

A álgebra de Clifford associada aos vetores do plano euclidiano. $E^{2,0}$ será indicada por $R_{2,0}$. Escolhemos uma base ortonormal para $E^{2,0}$, dada pelos versores e_1 e e_2 , que obedecem as seguintes relações:

- 1) $e_1^2 = +1$ $e_2^2 = +1$
- 2) $e_1 \cdot e_2 = 0$; ou equivalentemente: $e_1 e_2 = - e_2 e_1$

A unidade pseudoescalar, indicada por i (note que i anticomuta com vetores) é definida como:

$$3) \quad i = e_1 e_2 ; \quad e \text{ satisfaz: } i^2 = -1$$

é trivial mostrar que a subálgebra par de $R_{2,0}$ é isomorfa aos complexos.

Os resultados para o produto entre um dos vetores da base e a unidade pseudoescalar podem ser calculados como se segue:

$$4) \quad i e_1 = (e_1 e_2) e_1 = e_1 e_2 e_1 = - e_1^2 e_2 = - e_2$$

Analogamente, decorrem as relações abaixo:

$$5a) \quad e_1 i = e_2 \qquad i e_2 = e_1$$

$$5b) \quad e_1 i = - i e_1 \qquad i e_2 = - e_2 i$$

Notamos que os elementos e_1, e_2, i não são cíclicos. Também, enquanto os vetores tem quadrado positivo, a unidade pseudoescalar em quadrado negativo.

Não vamos analisar na álgebra do plano euclidiano a noção de divisibilidade, pois $R_{2,0}$ (e também $R_{1,1}$) nos interessa como álgebra, e não como subálgebra de uma álgebra de dimensão maior.

58.2 A ALGEBRA DO PLANO DE MINKOWSKI

A álgebra de Clifford associada aos vetores do plano de Minkowski, $E^{1,1}$, será indicada por $R_{1,1}$. Uma base de vetores ortogonais para $E^{1,1}$, indicada por (g_0, g_1) satisfaz as seguintes relações:

$$6a) \quad g_1^2 = -1 \qquad g_0^2 = +1$$

$$6b) \quad g_1 \cdot g_0 = 0 ; \text{ ou } \qquad g_1 g_0 = - g_0 g_1$$

A unidade pseudoescalar em $R_{1,1}$ será indicada por σ , e é dada por:

$$7) \quad \sigma = g_1 g_0 ; \text{ e satisfaz: } \sigma^2 = +1$$

É trivial verificar que a subálgebra par de $R_{2,0}$, gerada pelos escalares e pseudoescalares, é isomorfa a álgebra dos pseudocomplexos, estudada no §7.2. Note que o pseudoescalar no plano de Minkowski tem quadrado positivo.

As seguintes relações são facilmente verificadas:

$$8a) \quad \sigma g_1 = -g_1 \sigma \qquad \sigma g_0 = -g_0 \sigma$$

$$8b) \quad \sigma g_1 = g_0 \qquad \sigma g_0 = g_1$$

Vamos agora construir explicitamente uma correspondência entre os elementos de $R_{1,1}$ e os elementos de $R_{2,0}$ que estabeleça o isomorfismo entre as álgebras, isto é, preserve o produto geométrico como exposto no §6. Isso é facilmente verificado para a seguinte correspondência:

$$9) \quad \sigma = e_1 \qquad g_1 = i \qquad g_0 = e_2$$

Note que $\sigma^2 = e_1^2 = +1$; e também: $g_0^2 = e_2^2 = +1$, enquanto que $g_1^2 = i^2 = -1$. Todas as demais relações (equações 3 e 5 e as correspondentes 7 e 8) são preservadas pela correspondência acima. Notamos que se as relações para o produto entre os elementos das bases são preservadas, o produto entre dois números quaisquer é preservado, e portanto o isomorfismo está estabelecido.

§8.3 QUATERNIONS

A álgebra de Clifford associada aos vetores do plano euclidiano com métrica negativa, $E^{0,2}$, será indicada por H , e é re-

conhecida como a álgebra dos quaternions, isto é, uma álgebra formada por tres elementos de quadrado negativo, que anticomutam entre si e são cíclicos, além de uma componente escalar. Como é bem conhecido, os quaternions formam uma álgebra de divisão, e esse resultado será reobtido aqui explicitamente, onde apresentamos a inversa de qualquer elemento.

Uma base de vetores ortonormais para $E^{0,2}$, (v_1, v_2) satisfaz as seguintes relações:

$$10a) \quad v_1^2 = -1 \qquad v_2^2 = -1$$

$$10b) \quad v_1 \cdot v_2 = 0, \text{ ou equivalentemente: } v_1 v_2 = -v_2 v_1$$

A unidade pseudoescalar dos quaternions, indicada por v_3 , é dada por:

$$11) \quad v_3 = v_1 v_2; \text{ e satisfaz: } v_3^2 = -1$$

Não será posteriormente explorado, como no caso do estudo das outras subálgebras par aproveitado no próximo parágrafo, mas desde que a unidade pseudoescalar nos quaternions tem quadrado negativo, deve ser claro o isomorfismo entre a subálgebra par dos quaternions e os complexos.

As relações satisfeitas para o produto geométrico de um dos vetores da base por v_3 são:

$$12a) \quad v_1 v_3 = -v_3 v_1 \qquad v_2 v_3 = -v_3 v_2$$

$$12b) \quad v_3 v_1 = v_2 \qquad v_2 v_3 = v_1$$

Notamos então, que em geral:

$$13) \quad v_i = v_j v_k; \text{ para } i, j, k \text{ cíclicos, e também: } v_i^2 = -1$$

A equação acima mostra a completa equivalência entre os elementos v_1, v_2, v_3 da base dos quaternions. Algebricamente eles são indistinguíveis.

Deixe-nos representar um quaternion qualquer como a soma de um escalar mais um "vetor" tridimensional, ou seja:

$$14) \quad q = x + a ; \text{ onde } a = q^j v_j, \text{ e } x \text{ pertence a } \mathbb{R}.$$

$$\text{Note que } a^2 = - \sum_j q_j^2 \leq 0.$$

Assim, o produto de dois quaternions quaisquer é dado por:

$$15) \quad qr = (x + a)(y + b) = xy + xb + ya + ab ;$$

Desde que o produto de dois elementos v_i e v_j é dado por:

$$16) \quad v_i v_j = D_{ij} + \epsilon_{ijk} v_k ; \text{ segue que:}$$

$$17) \quad ab = a \cdot b + a \times b$$

onde $a \times b = \epsilon_{ijk} a_i b_j v_k$; e portanto podemos escrever:

$$18) \quad qr = xy + a \cdot b + xb + ya + a \times b$$

A representação de quaternions acima exposta é conveniente para construirmos a inversa. Obsevamos inicialmente que a composição da operação de inversão com a reversão em H resulta em:

$$19) \quad (q^+)^* = x - q^j v_j = x - a$$

Assim, notamos que a parte escalar permanece inalterada, enquanto que a componente "vetor" tem seu sinal invertido. Analisando a forma do produto (eq 18) segue que:

$$20) \quad q(q^+)^* = (q^+)^*q = x^2 - a^2 ; \text{ onde } a^2 \leq 0$$

Assim, definimos uma norma positiva definida em H , dada por:

$$21) \quad |q|^2 = q(q^+)^*$$

Note que $|q| = 0$ se e sómente se $q=0$. Portanto, podemos definir a inversa de qualquer quaternion como dada por:

$$22) \quad q^{-1} = (q^+)^*/|q|$$

Note que apesar do produto entre quaternions não ser comutativo, o produto entre q e q^{-1} é comutativo, ou seja, temos que:

$$23) \quad qq^{-1} = q^{-1}q = +1$$

59. A ÁLGEBRA DO ESPAÇO EUCLIDIANO: ÁLGEBRA DE PAULI

A álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial euclidiano tridimensional (E^3) será denominada álgebra de Pauli, indicada por P , pois as relações entre os vetores da base são bem conhecidas quando utilizamos a representação matricial sugerida por Pauli.

Escolhemos um conjunto ortonormal de vetores para a base do espaço, e os indicamos pela letra grega σ (sigma) acrescida do índice correspondente à direção a que se referem (reservaremos a letra \hat{e} para indicar os versores da álgebra de Minkowski, estudada no próximo parágrafo). Desde que todas as componentes do tensor métrico em P são positivas, e igual a unidade, os versores da base recíproca são os mesmos da base original. Assim, trabalhando em P , não devemos distinguir os versores da base original e os da base recíproca, e devemos portanto usar apenas subíndices.

Os versores do E^3 satisfazem as seguintes relações:

$$1a) \quad \sigma_j^2 = +1 ; \text{ enquanto que: } \sigma_i \cdot \sigma_j = 0, \text{ se } i \neq j$$

$$1b) \quad \sigma_j \sigma_k = - \sigma_k \sigma_j ; \text{ para } j \neq k.$$

Uma base para o subespaço dos bivectores, indicado por P^2 , é dada por:

$$2) \quad (\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}), \text{ onde: } \sigma_{ij} = \sigma_i \wedge \sigma_j$$

Os bivectores satisfazem as seguintes relações:

$$3a) \quad \sigma_{jk}^2 = \sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k = - \sigma_j^2 \sigma_k^2 = -1$$

$$3b) \quad \sigma_{jk} \sigma_{mn} = \delta_{km} \delta_{jn} - \delta_{kn} \delta_{jm}$$

$$3c) \quad \langle \sigma_{ij} \sigma_{jn} \rangle_2 = 1/2 [\sigma_{ij}, \sigma_{jn}] = \sigma_{in}$$

$$3d) \quad \sigma_{jk} \wedge \sigma_{mn} = 0 \quad \} \quad \text{}$$

A primeira igualdade está provada explicitamente. A segunda é equivalente a eq 14a, §5. A terceira é um caso particular da eq 14b, §5 (veja também eq 22b, §4). A última relação é consequência do número de dimensões do espaço de base, que não permite multivetores de graduação maior do que tres.

Notamos também que o produto de bivectores distintos da base de P^2 é anticomutativo. Antes de mostrar esse resultado, observe que o produto de dois bivectores distintos da base deve envolver um índice comum aos dois, desde que estamos restritos a tres dimensões. Assim, segue que:

$$4) \quad \sigma_{ij} \sigma_{jk} = \sigma_{ik} ; \text{ enquanto que. } \sigma_{jk} \sigma_{ij} = \sigma_{ki} = - \sigma_{ik}$$

Este resultado, juntamente com a equação 3c merece um pouco mais de atenção. Comentamos no fim do §4 que a álgebra dos comutadores no espaço dos bivectores é isomorfa a álgebra dos comutadores dos geradores das rotações. No espaço euclidiano os geradores das rotações são os operadores de momento angular, que satisfazem as bem conhecidas regras de comutação:

$$5) \quad [L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

A correspondência abaixo nos assegura o isomorfismo entre a álgebra dos comutadores dos operadores de momento angular e os bivectores da álgebra de Pauli:

$$6) \quad L_1 = - 1/2 \sigma_{23} ; \quad L_2 = 1/2 \sigma_{13} ; \quad L_3 = - 1/2 \sigma_{12}$$

A escolha do sinal é por conveniência, e só será esclarecida no próximo parágrafo, onde estudamos a álgebra do espaço-tempo. Através das eq 3c e eq 4, é fácil verificar que as relações de comutação são preservadas pela correspondência estabelecida na eq 6.

Ainda quanto as rotações no espaço euclidiano, como é bem conhecido, os quaternions as descrevem de maneira simples. Através da eq 4 de anticomutação, da eq 3a que nos mostra que o quadrado de qualquer bivector da base de P^2 é negativo, e da eq 3c que nos mostra o caráter cíclico dos bivectores (exposto claramente na eq 5, e a correspondente eq 6), deve ser claro que a subálgebra par da álgebra de Pauli, formada pelos escalares e bivectores, é isomorfa a álgebra dos quaternions. Vamos aproveitar essa relação entre as álgebras para descrever rotações no espaço euclidiano. Isso será feito no §12.

A unidade pseudoescalar, indicada pela letra i , será usada como base para o subespaço dos trivetores (ou pseudoescalares) P^3 , e é definida como:

$$7) \quad i = \sigma_{123} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Conforme mostramos no Capítulo I, §5, teorema III, o produto geométrico quando um dos fatores é um pseudoescalar é simplesmente o produto interno. Também, desde que a graduação da unidade pseudoescalar em P é tres, a unidade pseudoescalar (i) comuta com qualquer número da álgebra de Pauli. Desde que seu quadrado é negativo ela desempenha em P um papel semelhante ao da unidade imaginária nos complexos.

Podemos escrever a unidade pseudoescalar i como:

$$8) \quad i = (1/6) \epsilon_{ijk} \sigma_{ijk}$$

e por outro lado, o permutador pode ser escrito como:

$$9) \quad \epsilon_{ijk} = i(\sigma_{kji}) = -i \sigma_{ijk}$$

O permutador (ϵ_{ijk}) é o (pseudo) tensor de Levi-Civita. Há somente seis conjuntos de valores (ijk) para os quais o tensor de Levi-Civita não é nulo.

Os seguintes resultados são úteis nas aplicações:

$$10a) \quad i \sigma_i = i \cdot \sigma_i = 1/2 \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}$$

$$10b) \quad i \sigma_{jk} = (i \sigma_j) \cdot \sigma_k = \epsilon_{ikj} \sigma_i$$

Demonstramos a primeira igualdade. Iniciamos escrevendo a unidade pseudoescalar em termos dos versores, através da eq 8:

$$i \cdot \sigma_i = 1/6 \epsilon_{lmn} \sigma_{lmn} \cdot \sigma_i$$

Desenvolvendo o produto interno (ver eq 13b, §4), obtemos que:

$$i \cdot \sigma_i = 1/6 (\epsilon_{lmi} \sigma_{lm} - \epsilon_{lin} \sigma_{ln} + \epsilon_{imn} \sigma_{mn}) = 1/2 \epsilon_{imn} \sigma_{mn}$$

onde para realizar a última passagem, usamos o fato de que os índices de soma (índices repetidos) são índices "mudos", isto é, podemos designar qualquer letra para esses índices, e usamos também as propriedades do permutador ($\epsilon_{lmi} = \epsilon_{ilm}$ e também $\epsilon_{lin} = -\epsilon_{iln}$).

Como exemplo da utilidade dos resultados acima, vamos demonstrar uma conhecida formula que relaciona o pseudotensor de Levi-Civita (permutador ϵ_{ijk}) com o delta de Kroenecker (δ_{ij}), muito utilizada nas demonstrações do cálculo vetorial a qual expressa que:

$$11) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Inicialmente, escrevemos o membro da esquerda como (ver eq 9):

$$11a) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = (i \sigma_{kji}) (-i \sigma_{imn})$$

Desde que o produto de Clifford é associativo, e a unidade pseudoescalar comuta com qualquer número da álgebra, temos que:

$$11b) \quad -i^2 \sigma_{kji} \sigma_{imn} = \sigma_{kji} \cdot \sigma_{imn} = \sigma_{kj} \cdot \sigma_{mn}$$

Portanto, da expansão do produto interno do último membro (ver eq 3b) segue a igualdade 11, como queríamos demonstrar.

A relação de multiplicação dos versores anteriormente expostas, eq 10b, pode ser posta na forma abaixo (multiplicando a anterior por i), que é facilmente identificada na representação matri-

cial da álgebra de Pauli como a relação de multiplicação das matrizes de Pauli:

$$12) \quad \sigma_{mn} = \sigma_m \sigma_n = \epsilon_{imn} i \sigma_i ; \quad m \neq n$$

Também, as relações de anticomutação dos versores da base do R^3 (eq 1b), e a condição de normalização (eq 1a), representam as relações satisfeitas pelas matrizes de Pauli, associadas aos operadores quânticos de spin. Também, notamos que a unidade pseudoescalar em P , com todas as propriedades anteriormente desenvolvidas, representa simplesmente a unidade imaginária ($i^2 = -1$) utilizada na representação usual da álgebra de Pauli, como as fornecidas pelos livros textos de mecânica quântica.

Outras relações também podem ser identificadas entretanto, não vamos neste trabalho desenvolver um aparato que nos permita identificar e interpretar as relações usuais obtidas para os operadores de spin em termos da álgebra que estamos desenvolvendo.

Até agora fizemos uma descrição exaustiva das relações existentes entre os elementos da base da álgebra de Pauli. Vamos agora realizar um estudo intrínseco de algumas propriedades.

Trabalhando em P temos que o produto exterior de um multivetor qualquer por ele próprio é nulo. Entretanto, esse resultado não se estende a números quaisquer de P , valendo apenas para números com graduações definidas (multivetores).

Qualquer número (C) em P pode ser escrito como um polinômio em multivetores, segundo a forma abaixo:

$$13) \quad C = x + \langle C \rangle_1 + \langle C \rangle_2 + iy$$

onde x e y são escalares, e $\langle C \rangle_1$ e $\langle C \rangle_2$ são as componentes vetor e bivector, respectivamente.

Também, podemos expressar o número C em termos dos multivectores dos subespaços de P , conforme a convenção adotada no §5, eq1:

$$14) \quad C = x + C^j \sigma_j + (1/2) C^{ij} \sigma_{ij} + iy$$

onde definimos $C^{ij} = -C^{ji}$, desde que $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$.

Vejamos agora os resultados em P das operações anteriormente definidas. O conjugado em P de um número qualquer da álgebra (inversão espacial, indicada por $*$), quando analisado na forma polinomial é dado por:

$$15) \quad C* = x - \langle C \rangle_1 + \langle C \rangle_2 - iy$$

O reverso em P , reverso espacial, indicado por $\bar{\Phi}$ (reservamos o símbolo \dagger para reversão no espaço-tempo), de um número qualquer da álgebra quando analisado por multivetores componentes resulta em:

$$16) \quad C\bar{\Phi} = x + \langle C \rangle_1 - \langle C \rangle_2 - iy$$

Desde que a unidade pseudoescalar em P representa uma dualidade entre vetores e bivectores (e também entre escalares e pseudoescalares), transformando vetores em bivectores e vice-versa (ver eqs 10a e 10b), também podemos representar um número qualquer da álgebra de Pauli como:

$$17) \quad C = (x + iy) + (a + ib)$$

onde x e y são escalares e a e b são vetores. Esta representação é introduzida para representar um escalar complexo mais um vetor complexo. Tal representação além de conveniente na formulação da Eletrodinâmica, é muito frutífera para o desenvolvimento de algumas relações algébricas.

A representação acima da álgebra de Pauli é reconhecida como a álgebras dos quaternions sobre o corpo dos complexos. Assim como a

álgebra de Pauli, tal álgebra é distinta da álgebra dos biquaternions (ver tabela I, §6, e também, [Sa³]) que foram os objetos dos estudos iniciais de Clifford (ver referências históricas).

Para completar o parágrafo, vamos estudar a conexão entre o produto exterior e o produto vetorial. Para isso, lembramos a forma explícita por componentes do produto vetorial (conforme definido no cálculo vetorial) entre dois vetores, a e b , dada por:

$$18) \quad a \times b = \epsilon_{ijk} a_i b_j \sigma_k$$

Notamos que na álgebra de Pauli, o produto exterior entre dois vetores quando explicitado em termos de componentes pode ser escrito como (ver eq 12):

$$19) \quad a \wedge b = a_i b_j \sigma_{ij} = i \epsilon_{ijk} a_i b_j \sigma_k$$

Portanto definimos o produto vetorial como:

$$20) \quad a \times b = -i(a \wedge b) ; \text{ ou também: } a \wedge b = i(a \times b)$$

Através dessa definição podemos obter todas as relações usuais disponíveis do cálculo vetorial.

A identificação por componentes tem sua vantagem: o leitor acostumado se sentirá mais seguro, e de qualquer modo, na solução dos problemas temos muitas vezes que explicitar as componentes. A redução do cálculo vetorial ao cálculo que estamos desenvolvendo é saudável dada a simplicidade do cálculo geométrico em queimar etapas em cálculos complicados. Além disso podemos construir uma imagem geométrica das relações, que de outra forma ficariam escondidas sob a artimanha do manuseio de índices usada na forma explícita por componentes do cálculo vetorial, que é o único meio que dispomos para demonstrarmos algumas relações usando o cálculo vetorial.

Vamos agora desenvolver algumas relações da álgebra vetorial pela álgebra de Clifford, a fim de evidenciar sua simplicidade.

O leitor deve se precaver que apesar da unidade pseudoescalar comutar com todos os números da álgebra de Pauli, ela não interfere no produto interno (ou exterior), conforme ilustrado abaixo:

$$21) \quad a \wedge (ib) \neq i(a \wedge b), \quad \text{e também:} \quad a \cdot (ib) \neq i(a \cdot b)$$

É útil desenvolver expressões alternativas para o próprio produto vetorial pela álgebra de Clifford:

$$22a) \quad a \times b = -i(a \wedge b) = -(ia) \cdot b = b \cdot (ia)$$

$$22b) \quad a \times b = -i(a \wedge b) = i(b \wedge a) = (ib) \cdot a = -a \cdot (ib)$$

Começamos mostrando que a norma pelo reverso do produto exterior entre dois vetores, que representa a área do paralelogramo definido por eles (ver apêndice I), é igual a norma pelo reverso (norma euclidiana ao quadrado) do produto vetorial entre os vetores. A prova é imediata, pois:

$$23) \quad \|a \times b\| = \|-i(a \wedge b)\| = i(a \wedge b)(b \wedge a)(i\bar{\Phi})$$

assim, desde que i (e $i\bar{\Phi}$ também) comuta com qualquer número da álgebra de Pauli, e $i(i\bar{\Phi}) = +1$, segue que:

$$24) \quad \|a \times b\| = (a \wedge b)(b \wedge a) = \|a \wedge b\|$$

Na próxima relação observamos inicialmente que $a \cdot (b \times c)$ representa o volume escalar do paralelepípedo definido por a , b e c , conforme a álgebra vetorial. Desde que pela álgebra de Clifford, $a \wedge b \wedge c$ (um trivetor) representa o mesmo volume orientado (veja os apêndices I e II), e em P a unidade pseudoescalar (i) desempenha uma dualidade entre escalares e trivetores, devemos ter que:

$$25) \quad a \wedge b \wedge c = i[a \cdot (b \times c)], \quad \text{ou} \quad a \cdot (b \times c) = -i(a \wedge b \wedge c)$$

onde o sinal provém da prova abaixo. A prova de tal identidade é imediata:

$$26) \quad a \cdot (b \times c) = a \cdot [-(b \wedge c) \cdot i] = -(a \wedge b \wedge c) \cdot i = -i(a \wedge b \wedge c)$$

onde na passagem da segunda igualdade usamos a transposição do produto interno no produto exterior quando ainda há o produto interno com um multivetor de maior graduação (ver eqs 12, 53).

Por fim, identificamos o duplo produto vetorial entre tres vetores como abaixo:

$$27) \quad a \times (b \times c) = - a \cdot (b \wedge c)$$

Dessa identificação decorre imediatamente a expansão do duplo produto vetorial, segundo a expansão para o produto interno entre um vetor e um bivector, que é o produto exterior de dois vetores (ver apêndice II, e Teorema I, §2), dada por:

$$28) \quad a \cdot (b \wedge c) = c(a \cdot b) - b(a \cdot c), \text{ ou: } a \times b \times c = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

Observamos que tal formula só pode ser obtida pela análise vetorial se decomposmos o duplo produto vetorial por componentes, enquanto que ela emerge naturalmente da álgebra de Clifford através da definição do produto interno entre um vetor e um multivetor.

Apesar da identificação entre o produto exterior e o produto vetorial dentro da álgebra de Pauli, é evidente as vantagens de se usar o produto exterior. Também, fora da álgebra de Pauli, o produto vetorial não permite generalização imediata para espaços vetoriais com dimensão qualquer, sendo uma 'maravilha' (ou um acidente) causado pelo número de dimensões (3) do espaço físico de nossa percepção imediata.

§10. A ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO: ÁLGEBRA DE MINKOWSKI

Vamos agora descrever as relações básicas da álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial de Minkowski ($E^{1,3}$), que é construído sobre o espaço tempo da relatividade especial. A álgebra assim desenvolvida será denominada álgebra de Minkowski, e indicada por M .

Antes de começar devemos fazer uma convenção sobre os índices a serem usados: índices representados pelas letras gregas ($\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ e ν) podem assumir valores de 0 à 3 (0, 1, 2, 3), enquanto que índices latinos assumem valores entre 1 e 3 (1, 2, 3). Assim, quando quisermos especificar, usamos além dos índices latinos o índice numérico zero.

Escolhemos uma base ortonormal para $E^{1,3}$ cujos versores serão indicados pela letra \hat{e} . Os versores da base devem satisfazer as seguintes relações:

$$1a) \quad \hat{e}_0^2 = +1 ; \text{ enquanto que: } \hat{e}_j^2 = -1 ;$$

$$1b) \quad \hat{e}^\mu \cdot \hat{e}^\nu = 0 ; \text{ ou de outro modo: } \hat{e}^\mu \hat{e}^\nu = - \hat{e}^\nu \hat{e}^\mu \quad (\mu \neq \nu)$$

A base recíproca é dada pelos versores \hat{e}^μ , tal que:

$$2a) \quad \hat{e}^\mu \cdot \hat{e}^\nu = \delta^{\mu\nu} ; \text{ e portanto, temos que:}$$

$$2b) \quad \hat{e}^0 = \hat{e}_0 ; \text{ enquanto que: } \hat{e}^j = - \hat{e}_j$$

Dizemos que o vetor \hat{e}_0 (ou \hat{e}^0) é tipo tempo, enquanto os vetores \hat{e}_k (ou \hat{e}^k) são tipo espaço. A componente tipo tempo de um vetor em M é chamada a componente temporal do vetor, enquanto que as componentes tipo espaço são chamadas componentes espaciais. A denominação acima pode ser estendida para multivetores em M , com os devidos ajustes.

A álgebra de Minkowski tem dimensão igual a dezesseis. Os subespaços M^2 e M^3 são gerados pelos bivectores e trivectores, respectivamente, construídos a partir de uma base do $R^{4,3}$.

Uma base para M^2 é dada pelos bivectores $(\hat{e}_{10}, \hat{e}_{20}, \hat{e}_{30}, \hat{e}_{12}, \hat{e}_{23}, \hat{e}_{31})$, e satisfazem as seguintes relações:

$$3a) \quad \hat{e}_{j0}^2 = +1 ; \text{ enquanto que: } \hat{e}_{jk}^2 = -1$$

A base recíproca no espaço dos bivectores é dada por:

$$3b) \quad \hat{e}^{j0} = -\hat{e}_{j0} ; \text{ enquanto que: } \hat{e}^{jk} = \hat{e}_{jk}$$

As componentes \hat{e}_{j0} de um bivetor são chamadas componentes temporais, e as componentes \hat{e}_{jk} são chamadas componentes espaciais. Um bivetor é dito tipo-tempo se ele tem somente componentes temporais, ou seja, se ele é uma combinação linear dos bivectores \hat{e}_{j0} . Por outro lado, um bivetor é dito tipo-espaco se ele é uma combinação linear dos bivectores \hat{e}_{jk} . Obviamente, todo bivetor na álgebra de Minkowski pode ser escrito como uma combinação linear de bivectores tipo-tempo e tipo-espaco. A importância de tal classificação dos bivectores é ressaltada pelos seguintes resultados (ver §4, eq 26).

5a) qualquer bivetor tipo-tempo ou tipo-espaco é simples;

5b) um bivetor tipo-tempo é ortogonal a qualquer bivetor tipo-espaco, e vice-versa.

A prova desses resultados é trivial. Começamos pela eq 5a. Observe que, quando quadramos um bivetor tipo-tempo, deve aparecer o quadrado de \hat{e}_0 , que é um escalar, e portanto a parte quadrivetor é nula. Analogamente, no caso do quadrado de um bivetor tipo-espaco, desde que estão envolvidos somente índices espaciais, a parte quadrivetor, proveniente do produto exterior, deve ser nula, pois há somente tres índices espaciais distintos em M .

Por fim, argumentamos sobre a eq 5b. Observe que no produto de um bivector tipo-tempo por um tipo-espaco, o versor \hat{e}_0 aparecendo no bivector tipo-tempo é ortogonal a todos os versores tipo-espaco, e portanto o produto interno entre eles deve ser nulo (ver eq 26,54).

Outros resultados uteis que dizem respeito a classificaco dos bivectores em tipo-tempo e tipo-espaco, so dados abaixo, e versam sobre as relaes de comutao satisfeita pelos bivectores da base de M^2 .

6a) os diferentes bivectores tipo-tempo anticomutam entre si, e assim tambm o é para os bivectores tipo-espaco. Em qualquer caso, o resultado do produto geométrico é um bivector tipo-espaco.

6b) um bivector tipo-tempo anticomuta com um bivector tipo-espaco que tenha um índice espacial igual ao seu. Ainda, o resultado do produto geométrico é um bivector tipo-tempo.

A prova dessas relaes é efetuada explicitamente, e devemos ter em mente as eqs 1a e 1b, deste parágrafo.

$$6a.i) \quad \hat{e}_{j0} \hat{e}_{k0} = \hat{e}_j \hat{e}_0 \hat{e}_k \hat{e}_0 = - \hat{e}_{jk} \hat{e}_0^2 = - \hat{e}_{jk}$$

$$\text{enquanto que: } \hat{e}_{k0} \hat{e}_{j0} = - \hat{e}_{kj} = \hat{e}_{jk} ; \text{ c.q.d.}$$

$$6a.ii) \quad \hat{e}_{ji} \hat{e}_{ki} = - \hat{e}_{jk} \hat{e}_i^2 = + \hat{e}_{jk}$$

$$\text{enquanto que: } \hat{e}_{ki} \hat{e}_{ji} = \hat{e}_{kj} = - \hat{e}_{jk} ; \text{ c.q.d.}$$

$$6b) \quad \hat{e}_{j0} \hat{e}_{jk} = - \hat{e}_j^2 \hat{e}_{ok} = \hat{e}_{ok} = - \hat{e}_{ko}$$

$$\text{enquanto que: } \hat{e}_{jk} \hat{e}_{j0} = - \hat{e}_j^2 \hat{e}_{ko} = \hat{e}_{ko} ; \text{ c.q.d.}$$

Os resultados acima so uma extenso dos resultados obtidos na álgebra de Pauli. Analogamente ao comentário feito no §9, após a equao 4, relembramos que no fim do §4 comentamos que a álgebra dos comutadores dos bivectores é isomorfa a álgebra dos comutadores dos geradores das rotaes. No caso do espaco-tempo de Minkowski, o

grupo das rotações é o $SO(1,3)$, gerado pelos elementos L_j e K_j , identificados como os geradores das rotações espaciais (momento angular), e os geradores dos boost, respectivamente. As relações de comutação satisfeitas pelos geradores L e K são dadas abaixo:

$$7a) \quad [L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

$$7b) \quad [L_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$$

$$7c) \quad [K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

Há um total de quinze relações de comutação: tres entre os operadores L_j (eq 7a), tres entre os operadores K_j (7c), e nove entre os operadores L_i e K_j (eq 7b).

Observamos que a eq 7a nos diz que as rotações espaciais formam um subgrupo dentro do grupo das rotações no espaço-tempo. Por outro lado, a eq 7c nos mostra que as rotações no espaço-tempo descritas por boost não formam um grupo. Por fim, a eq 7b nos sugere que podemos construir um boost qualquer através da composição de uma rotação espacial com um outro boost conveniente.

Estabelecemos um isomorfismo entre os geradores das rotações no espaço-tempo, os operadores L e K , e os bivectores da base de M^2 através da seguinte correspondência:

$$8a) \quad L_i = 1/2 \hat{e}_{jk} ; \quad i, j, k \text{ cíclicos.}$$

$$8b) \quad K_j = 1/2 \hat{e}_{j0}$$

Assim, observamos que as relações 7a e 7b correspondem a eq 6a, e por outro lado, a eq 7c, corresponde a eq 6b. A relação entre os operadores de momento angular definidos pela eq. 8a e aqueles definidos no §9, eq 6, será esclarecida quando estudarmos a relação entre a álgebra de Minkowski e a álgebra de Pauli, ainda neste parágrafo. No capítulo III, §13 e §14, fazemos a descrição das rota-

ções no espaço-tempo, ou transformações de Lorentz, em termos dos bivectores da álgebra do espaço-tempo.

Voltamos agora a estudar a estrutura da álgebra de Minkowski.

Uma base para M^3 é dada pelos trivectores $(\hat{e}_{012}, \hat{e}_{023}, \hat{e}_{031}, \hat{e}_{123})$, e satisfazem as relações que se seguem:

$$9) \quad \hat{e}_{0jk}^2 = -1 ; \text{ enquanto que: } \hat{e}_{ijk}^2 = +1$$

Não necessitamos um estudo mais profundo dos trivectores. Também, como será visto mais adiante, os trivectores podem ser obtidos dos vetores por dualidade através da unidade pseudoescalar.

A base recíproca em M^3 é dada por:

$$10) \quad \hat{e}^{0jk} = \hat{e}_{0jk} ; \text{ enquanto que: } \hat{e}^{ijk} = -\hat{e}_{ijk}$$

A unidade pseudoescalar em M , será indicada por \hat{e}_5 , e serve de base para o subespaço dos pseudoescalares (M^4). A unidade pseudoescalar em M é definida como:

$$11) \quad \hat{e}_5 = \hat{e}_0 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = \hat{e}_{0123}$$

Como mostrado no §5, capt I, teorema III, o produto geométrico quando um dos fatores é um pseudoescalar reduz-se ao produto interno, e desde que a graduação dos pseudoescalares em M é igual a 4, os pseudoescalares em M comutam com multivetores pares e anticomutam com multivetores ímpares.

Qualquer número (A) em M pode ser decomposto em uma parte escalar, vetor, bivector, trivector e uma parte pseudoescalar, isto é:

$$12) \quad A = x + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \langle A \rangle_3 + y \hat{e}_5$$

onde x e y são escalares, e $\langle A \rangle_1$, $\langle A \rangle_2$ e $\langle A \rangle_3$ são as componentes vetor, bivector e trivector, respectivamente.

Em termos da base dos subespaços M^k ($k=0,1,2,3,4$), escrevemos A como:

13) $A = x + A^\mu \hat{e}_\mu + 1/2 A^{\mu\nu} \hat{e}_{\mu\nu} + 1/6 A^{\mu\nu\lambda} \hat{e}_{\mu\nu\lambda} + y \hat{e}_5$
 onde definimos: $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, e também: $A^{\ll\mu\nu} = A^{\mu\nu\ll}$,
 etc..., de modo que as coordenadas acompanhem o sinal dos multiver-
 sores.

A operação de inversão em M será denominada conjugação no es-
 paço-tempo, e será indicada por * após o número (reservamos * para
 conjugação na álgebra de Pauli, conjugação espacial. Desde que as
 duas álgebras serão relacionadas não é bom confundir a notação). O
 conjugado no espaço-tempo de um número qualquer quando decomposto
 nos subespaços resulta em:

$$14) \quad A^* = x - \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + y \hat{e}_5$$

A operação de reversão em M será indicada por +. O reverso no
 espaço tempo de um número resulta em:

$$15) \quad A^+ = x + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + y \hat{e}_5$$

Vamos agora definir o permutador de 0123. Inicialmente conven-
 cionamos que:

$$16) \quad \epsilon^{0123} = +1 ; \quad \text{enquanto que:} \quad \epsilon_{0123} = -1$$

Tal convenção é conveniente, pois respeita o balanceamento dos
 índices juntamente com a seguinte definição:

$$17a) \quad \epsilon^{\ll\mu\nu} = \hat{e}_5 \hat{e}^{\ll\mu\nu}; \quad \text{enquanto que:}$$

$$17b) \quad \epsilon_{\ll\mu\nu} = \hat{e}_5 \hat{e}_{\ll\mu\nu}$$

Há "sómente" vinte e quatro permutações de 0123 para as quais
 o permutador não é nulo. Para cada índice fixo os outros índices
 comportam-se ciclicamente, como ilustrado abaixo, onde mostramos
 alguns resultados para o permutador na forma contravariante:

$$18a) \quad \epsilon^{0123} = \epsilon^{0312} = \epsilon^{0231} = +1$$

$$18b) \quad \epsilon^{3210} = \epsilon^{1320} = \epsilon^{2130} = +1$$

Note que ϵ^{0ijk} reduz-se ao tensor de Levi-Civita (ϵ_{ijkl}).

Utilizando o permutador de 0123 podemos escrever a unidade pseudoescalar em $M(\hat{e}_5)$ como:

$$19) \quad \hat{e}_5 = 1/24 \epsilon^{\langle\lambda\mu\nu\rangle} \hat{e}_{\langle\lambda\mu\nu\rangle}$$

Os seguintes resultados são muito úteis nas aplicações e seguem diretamente da definição acima:

$$20a) \quad \hat{e}_5 \hat{e}^\lambda = 1/6 \epsilon^{\langle\nu\mu\lambda\rangle} \hat{e}_{\langle\nu\mu\rangle}$$

$$20b) \quad \hat{e}_5 \hat{e}^{\lambda\mu} = 1/2 \epsilon^{\langle\nu\lambda\mu\rangle} \hat{e}_{\langle\nu\rangle}$$

$$20c) \quad \hat{e}_5 \hat{e}^{\lambda\mu\nu} = \epsilon^{\langle\nu\lambda\mu\rangle} \hat{e}_{\langle\rangle}$$

Então, observamos dos resultados acima que a unidade pseudoescalar em $M(\hat{e}_5)$ representa uma dualidade entre vetores e trivetores, e opera como uma dualidade própria entre bivectores (isto é, transforma bivectores em bivectores). Ressaltamos porém que \hat{e}_5 transforma as componentes temporais de um bivetor em componentes espaciais, do novo bivetor, e vice-versa, ou de outro modo, transforma bivectores tipo-tempo em bivectores tipo-espaco, e vice versa. Tal fato será útil na expressão para o campo eletromagnético, pois nos permite trabalhar somente com bivectores tipo-tempo, representando bivectores tipo-espaco como o dual de um bivetor tipo-tempo.

No §6, de introdução a este capítulo, dissemos que a álgebra de Pauli era a subálgebra par da álgebra de Minkowski. Vamos agora construir explicitamente o isomorfismo entre a subálgebra par de Minkowski, constituída pelos escalares, bivectores e pseudoescalares, e os elementos da álgebra de Pauli. Também, como exposto no §6, o isomorfismo claramente não preserva a graduação dos objetos, e nem as relações que dependam da graduação, como por exemplo, os produtos interno e exterior. Entretanto, todas relações que sejam

provenientes do produto geométrico são preservadas, como requerido para o isomorfismo. Em particular, a parte simétrica e antisimétrica do produto geométrico são as mesmas, tanto na subálgebra par de Minkowski, trabalhada em termos de base para M , quanto na álgebra de Pauli.

A álgebra de Minkowski representa as propriedades geométricas locais do espaço-tempo, enquanto que a álgebra de Pauli representa as propriedades do espaço. Para determinar a relação entre as álgebras de Minkowski e de Pauli, escolhemos os versores tipo espaço em M para se referirem à mesma direção dos versores de P . Deste modo, a fim de que as relações já estudadas entre os elementos da base de P (59, eqs 1,3,7 e 10) e as relações válidas para os elementos da base da subálgebra M^+ (eqs.1,3,6) sejam mantidas, definimos a seguinte correspondência:

$$21a) \quad \hat{e}_{k0} = \hat{e}_k \hat{e}_0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_k$$

Assim, devemos ter a seguinte correspondência entre os outros elementos:

$$21b) \quad \hat{e}_{jk} = \hat{e}_j \hat{e}_k \quad \longrightarrow \quad -\sigma_{jk} = -\sigma_j \sigma_k$$

$$21c) \quad \hat{e}_5 = \hat{e}_0 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad \longrightarrow \quad I = \sigma_{123} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Para ilustrar o raciocínio utilizado, mostramos a primeira relação (lembramos que $\hat{e}_0^2 = +1$, e \hat{e}_0 anticomuta com os \hat{e}_j):

$$22) \quad \hat{e}_j \hat{e}_k = \hat{e}_j (\hat{e}_0 \hat{e}_0) \hat{e}_k = (\hat{e}_j \hat{e}_0) (-\hat{e}_k \hat{e}_0) \quad \longrightarrow \quad -\sigma_j \sigma_k$$

Assim, escalares e pseudoescalares em M são representados por escalares e pseudoescalares em P , respectivamente. Bivetores tipo-tempo em M são representados em P por vetores, enquanto que bivetores tipo-espaço em M são representados em P por bivectores.

Através da relação 21b, o leitor pode verificar que as representações dos operadores de momento angular na álgebra de Pauli como dada pela eq 6, §9, corresponde a representação para o mesmo como em termos dos bivectores de Minkowski (eq. 8, neste parágrafo).

Observamos que a decomposição das componentes temporais dos bivectores de M em vetores de P dependem da particular direção temporal escolhida para relacionar as álgebras, ou de outro modo, do particular sistema de coordenadas adotado em M , tido como um particular referencial inercial no espaço-tempo da relatividade restrita. Tal fato ressalta que a estrutura do espaço-tempo é mais complicada do que uma simples decomposição em tres componentes espaciais relacionadas ao espaço físico usual, mais uma componente relacionada ao tempo. Assim, deveríamos chamar a álgebra de Pauli relacionada a álgebra de Minkowski por uma particular direção temporal dada por \hat{e}_0 da álgebra de Pauli de \hat{e}_0 . Entretanto, na discussão que segue assumiremos que isto está implícito, a fim de eliminar referências desgastantes e simplificar a leitura do texto.

É conveniente para a maioria das aplicações físicas, exprimir as leis físicas em termos das coordenadas de um particular referencial inercial, como por exemplo, o referencial do laboratório. Como os sujeitos das leis físicas podem, em geral, serem quaisquer objetos da álgebra do espaço-tempo, é conveniente encontrarmos uma representação para os multivetores de graduação ímpar de M . Isso pode ser feito através da aplicação projetiva, exposta a seguir.

Para relacionar os multivetores ímpares de M com os elementos de P , multiplicamo-os pelo versor \hat{e}_0 . Assim, transformamos os vetores de M em escalares + bivectores (correspondendo as componentes

temporal e espaciais, respectivamente, dos vetores), e projetamos o objeto assim construído em P . O procedimento é análogo para trivetores. Assim, um vetor (v) em M após a multiplicação por e_0 , é representado em P por um escalar mais um vetor, isto é:

$$23) \quad v \hat{e}_0 \quad \text{--->} \quad v^0 + v$$

Observação: usaremos a mesma letra para representar os objetos tanto em M como em P , mas isso não deve causar confusão pois, os elementos de P serão escritos em negritos.

Observamos então que um multivetor em M é, em geral, representado por um polinômio em multivetores em P , conforme o quadro abaixo, que serve de guia para a representação dos elementos de M em P .

Minkowski		Pauli
escalares	---->	escalares
vetores	---->	vetores + escalares
bivetores	---->	bivetores + vetores
trivetores	---->	pseudoescalares + bivetores
pseudoescalares	---->	pseudoescalares

Com exceção dos pseudoescalares e dos escalares, para os quais a terminologia por componentes não é necessária, o primeiro termo da coluna da álgebra de Pauli é associado as componentes espaciais dos multivetores em M , enquanto que o segundo termo é associado as componentes temporais dos multivetores em M .

No caso de bivetores em M , podemos "homogeneizar" sua representação em M através da dualidade por pseudoescalar, representando um bivector em M como a soma de um bivector tipo-tempo e o dual de um outro bivector tipo-tempo, convenientemente escolhido. Desde que o isomorfismo entre M^* e P preserva o produto geométrico, a repre-

sentação de um bivector de M em P pode ser feita através de um vetor e o dual de outro vetor. Note que isso está em concordância com a dualidade existente em P , que relaciona vetores e bivectores.

Desde que \hat{e}_0 anticomuta com os versores \hat{e}_j 's, devemos respeitar a ordem na projecção (multiplicação por \hat{e}_0) de M para P . A multiplicação de um vetor em M por \hat{e}_0 à esquerda leva em:

$$24) \quad \hat{e}_0 v \longrightarrow v^0 - v ; \text{ enquanto que: } v\hat{e}_0 \longrightarrow v^0 + v$$

Por fim é conveniente estender a operação de inversão espacial existente em P , indicada por $*$, para M através da seguinte definições. Seja A um número em M . Então, o conjugado espacial de A (A^*) em M é dado por:

$$25) \quad A^* = \hat{e}_0 A \hat{e}_0$$

A conjugação espacial atua em M "como" a transformação da escrita contravariante para a escrita covariante na linguagem tensorial usual. Como ilustração mostramos os resultados da conjugação espacial sobre os versores e bivectores de M , válidos em qualquer representação, apesar de serem apresentados na base original:

$$25a) \quad \hat{e}_0^* = \hat{e}_0 \qquad \hat{e}_k^* = -\hat{e}_k$$

$$25b) \quad \hat{e}_{k0}^* = -\hat{e}_{k0} \qquad \hat{e}_{jk}^* = \hat{e}_{jk}$$

Estes resultados são os esperados quando os projetamos em P (vetores em P , correspondendo a componente espacial de vetores e bivectores em M , são invertidos, enquanto bivectores e escalares em P , correspondendo a componente temporal de vetores e bivectores em M , permanecem inalterados sobre conjugação espacial). A conjugação espacial será muito útil na formulação da Eletrodinâmica.

CAPT III: ISOMETRIAS E ROTAÇÕES

Este capítulo surge como a primeira aplicação do esquema desenvolvido anteriormente. Neste capítulo nos restringimos a espaços de base com métrica euclidiana ou lorentziana. Os motivos de tais restrições são vários, e podem ser vistos em [Ma]. Os resultados do capítulo anterior são fundamentais para a construção deste capítulo, principalmente as relações de subálgebra par. Tal relação permite um estudo deveras simples e unificado das rotações, seja em espaços euclidianos, como no espaço-tempo de Minkowski. Também, apresentamos o estudo de reflexões, que no desenvolvimento teórico teve um papel importante (ver [Ma], por exemplo).

Os tres primeiros parágrafos são um estudo do ponto de vista ativo das isometrias, isto é, pensamos que os vetores são alterados. O último parágrafo apresenta como uma transformação de coordenadas, ou seja, uma transformação na forma passiva, está relacionada a uma rotação na forma ativa. Tal estudo é importante para as transformações de Lorentz, estudadas no último parágrafo deste capítulo. Os resultados aqui obtidos para as transformações de Lorentz, após o prelúdio do §11 basicamente, se apresentam de uma forma simples, e são tidos como uma extensão natural das rotações nos espaços euclidianos.

As referências para este capítulo são: [He⁰], [He¹], [Ma], [He⁴], [Sa⁵], e [Ja].

§11. RESULTADOS GERAIS

Uma isometria em E^n é concebida como uma transformação ϕ de E^n em E^n , tal que ϕ preserve a norma dos vetores, isto é:

1) seja $\phi: E^n \rightarrow E^n$, tal que se: $v' = \phi(v)$, então $v'^2 = v^2$ dizemos que ϕ é uma isometria em E^n .

Nosso desejo é representar as isometrias em E^n , e sua extensão em R_n através de números de Clifford, de modo que possamos formular o estudo das isometrias em termos do esquema algébrico desenvolvido anteriormente. Deste modo podemos obter as condições que os operadores de isometrias satisfazem através das operações existentes em R_n , estudadas nos capítulos anteriores.

A representação que vamos usar para um estudo geral das isometrias é tida como uma operação pelos dois lados, através da multiplicação por dois números de Clifford, isto é, sejam v e v' pertencentes a E^n e L e S pertencentes a R_n , então, queremos que as isometrias sejam dadas por:

$$2) \quad v' = \phi(v) = SvL$$

e dizemos que a isometria é descrita pelos operadores L e S .

A condição fundamental que deve ser satisfeita para a transformação descrita pelos operadores L e S ser uma isometria é que se $v' = SvL$; então, deve valer: $v'^2 = v^2$, ou em termos dos operadores L e S , devemos ter:

$$3a) \quad v'^2 = SvLsLvL = v^2$$

Notamos que o único modo da condição acima ser satisfeita é que o produto LS comute com qualquer vetor e satisfaça:

$$3b) \quad SLSL = +1$$

Como LS deve comutar com qualquer vetor, segue que LS comuta com qualquer número em R_n , resultado óbvio quando olhamos para a representação de um número de Clifford em termos de uma base de R_n gerada por uma base de E^n .

Em geral, LS deve ser um escalar, pois esses são os únicos números de Clifford que comutam com todos os outros. No caso de R_n com n ímpar, os pseudoescalares também comutam com qualquer número de R_n (ver §5). Entretanto, estamos particularmente interessados em descrever rotações, e como veremos a seguir, os operadores de rotação devem ser elementos da subálgebra par. Para R_n com n ímpar, os pseudoescalares não são elementos da subálgebra par, e portanto não podem ser obtido através do produto de dois operadores de rotação.

Assim, se LS é um escalar, então SL também deve ser um escalar, e devemos ter:

$$4a) \quad LS = 1/(SL)$$

é conveniente normalizar o produto LS , de modo a podermos escrever sem perda de generalidade que:

$$4b) \quad LS = SL = \pm 1$$

Portanto, segue que $S = \pm L^{-1}$, onde L^{-1} é a inversa de L em R_n , ou seja, $LL^{-1} = L^{-1}L = +1$. Assim, a determinação do operador S é equivalente a determinação da inversa do operador L . Como vimos no capítulo II, as álgebras de Clifford não são em geral álgebras de divisão, mas há elementos que são invertíveis. Em particular, qualquer lâmina é invertível. A equação 4 nos diz que os operadores de isometrias são números de Clifford invertíveis.

Vamos agora mostrar a unicidade das isometrias. Suponha que há duas isometrias descritas pelos operadores L e T respectivamente, que satisfazem:

$$5) \quad L^{-1}vL = T^{-1}vT$$

Então, devemos ter: $L = xT$, onde x é um escalar ($x \in \mathbb{R}$).

A prova é simples. Multiplicando a equação anterior por L a esquerda, e por T^{-1} a direita, concluímos que:

$$6) \quad vLT^{-1} = LT^{-1}v$$

Então, LT^{-1} deve comutar com qualquer vetor, e deve ser portanto um escalar. Assim, devemos ter:

$$7) \quad L = xT ; \text{ e também: } L^{-1} = 1/x T^{-1}$$

Apesar dos operadores de isometria serem determinados a menos de um escalar multiplicativo, as isometrias vistas como uma operação biladeada são determinadas unívocamente, o que deve ser claro da forma dos operadores das isometrias.

Consideramos agora a composição de isometrias. Deixe a composição de duas isometrias ϕ_1 e ϕ_2 ser representada pela isometria ϕ , dada por: $\phi = \phi_2(\phi_1)$, tal que as isometrias ϕ_1 e ϕ_2 são descritas pelos operadores L_1, S_1 e L_2, S_2 respectivamente. Então, ϕ é, por definição, descrita pelos operadores L, S , dados por:

$$8a) \quad L = L_1L_2 \quad S = S_2S_1 ; \text{ de modo que:}$$

$$8b) \quad v' = \phi(v) = \phi_2(\phi_1(v)) = S_2S_1vL_1L_2 = SvL$$

é trivial verificar que a composição de isometrias é uma isometria.

O estudo de isometrias está intimamente relacionado ao conceito de grupo. Um grupo é definido como um conjunto que é fechado em relação a uma operação (produto), que goza da associatividade, tal que para qualquer elemento do grupo existe a inversa, isto é se G é um grupo então:

$$9a) \quad \text{se } g_1, g_2 \in G, \text{ então: } g_1g_2 \in G$$

Qualquer que seja $g \in G$, existe e é único g^{-1} , tal que:

$$9b) \quad gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

Observamos que as isometrias formam um grupo. Considere a isometria ϕ descrita pelos operadores L, S , então sua inversa é dada pela isometria ϕ^{-1} descrita pelos operadores S, L , isto é, se:

$$10a) \quad \phi(v) = SvL; \text{ e por outro lado: } \phi^{-1}(v) = LvS, \text{ então:}$$

$$10b) \quad \phi(\phi^{-1}(v)) = \phi^{-1}(\phi(v)) = v$$

pois do fato que LS e SL são escalares (vide eq 3) e da condição de normalização (eq 4b), temos que:

$$11) \quad LSVLS = (LS)^2 v = v; \text{ e também: } SLvSL = (SL)^2 v = v$$

Pela unicidade das isometrias, mostrada anteriormente, a inversa é única.

Vamos agora utilizar as operações de inversão e reversão definidas no §4 para determinar algumas propriedades dos operadores de isometrias. Notamos inicialmente que para qualquer vetor vale que:

$$12a) \quad v^\dagger = v \quad (12b) \quad v^* = -v$$

Assim, para $v' = SvL$, devemos ter:

$$13a) \quad v'^\dagger = (SvL)^\dagger = v'$$

$$13b) \quad v'^* = (SvL)^* = -v'$$

Da eq 13a segue que: $L^\dagger v S^\dagger = SvL$; ou melhor: $S = \pm L^\dagger$.

Assim, como $S = \pm L^{-1}$, concluímos que: $L^{-1} = \pm L^\dagger$.

Podemos considerar somente os operadores em que $L^{-1} = +L^\dagger$, pois os outros podem ser obtidos deste a partir da composição destes últimos com os operadores de reflexão na origem, dados por:

$$14) \quad L_0 = 1; \text{ enquanto que: } S_0 = -1$$

pois, se L_+, S_+ são tais que $S_+ = (L_+)^\dagger$, então, os operadores L_-, S_- dados por $L_- = L_+ L_0$, $S_- = S_0 S_+$ satisfazem a condição $S_- = -(L_-)^\dagger$.

Também, de agora em diante consideraremos somente isometrias em que $S = + L^{-1}$; pois a outra possibilidade, $S = - L^{-1}$, pode pelo mesmo argumento acima, ser obtida da composição dos operadores de reflexão na origem com os operadores em que $S = + L^{-1}$.

Observamos que as isometrias descritas pelos operadores que satisfazem $S = - L^{-1}$, ou $S = - L^+$, ou de outro modo, isometrias que são composição de isometrias que satisfazem $S = L^{-1}$, ou $S = L^+$, com a isometria de reflexão na origem não formam um grupo. Este fato é consequência direta de que a isometria de reflexão na origem composta com ela mesma gera a identidade, que claramente não é uma reflexão na origem. Por outro lado, as isometrias descritas pelos operadores que satisfazem $S = L^+$ formam um grupo.

Para ver isso, considere duas isometrias ϕ_1 e ϕ_2 descritas pelos operadores L_1, S_1 e L_2, S_2 , respectivamente, tais que $S_j = L_j^+$, $j=1,2$. Então, a isometria ϕ dada pela composição de ϕ_2 e ϕ_1 , nessa ordem, é descrita pelos operadores L, S tal que $S = L^+$, pois, temos que:

$$15a) \quad \phi(v) = \phi_2(\phi_1(v)) = S_2 S_1 v L_1 L_2; \text{ e por outro lado:}$$

$$15b) \quad \phi(v) = S v L.$$

Assim, devemos ter: $L = L_1 L_2$, e também: $S = S_2 S_1$.

Como $S_2 S_1 = L_2^+ L_1^+ = (L_1 L_2)^+$, segue que $S = L^+$, c. d. d.

De passagem, observamos que a condição $S = - L^+$ deve estar relacionada na representação matricial com a condição de que o determinante da matriz seja igual a -1 .

Vamos agora a analisar a eq 13b. Notamos que:

$$16) \quad (SvL)^* = S^* v^* L^* = - S^* v^* L^*$$

Então, para que a eq 13b seja satisfeita, L e S devem se comportar do mesmo modo sobre inversão, isto é, L e S devem ter somente multivetores de graduação par ou ímpar, e portanto:

$$17a) \quad L^* = -L \quad (S^* = -S) ; \quad \text{ou alternativamente:}$$

$$17b) \quad L^* = L \quad (S^* = S)$$

Os operadores que satisfazem $L^* = L$ (além de $S = L^\dagger$) descrevem isometrias de rotações, enquanto que os operadores que satisfazem $L^* = -L$, descrevem isometrias que são composições de rotações e reflexões, ou reflexões puras. Tais denominações ficarão mais claras quando estudarmos tais isometrias em álgebras particulares, como no plano euclidiano e no espaço euclidiano.

Anteriormente estudamos a estrutura de grupos das isometrias. Agora passamos a considerar a estrutura de grupo dos operadores de isometria.

Claramente os operadores de isometria que satisfazem $L^* = L$ pertencem a subálgebra par, e formam um grupo, pois estão associados a isometrias, e são portanto invertíveis. Os operadores de isometrias que satisfazem $L^* = -L$ pertencem ao subespaço de graduação ímpar, R_n^- , e não formam um grupo, apesar de serem invertíveis, pois o subespaço R_n^- não é fechado pelo produto geométrico.

Dentro da álgebra de Clifford encontramos um grupo de especial interesse: o grupo de Clifford em R_n é gerado pelos números de R_n que são invertíveis, além de pertencerem a um subespaço de R_n fechado pelo produto geométrico, a inversa considerada em relação ao produto geométrico. Claramente, o grupo de Clifford está intimamente associado aos operadores de rotações.

Vamos agora analisar alguns resultados sobre isometrias.

Um teorema devido a Hamilton (ver [Ma]) relata que qualquer rotação pode sempre ser decomposta em duas reflexões. Hamilton se referia a reflexões puras e rotações no plano e espaço euclidiano, mas a proposição pode ser estendida para outros espaços de base, através da seguinte definição, que mostrará ser palpável na análise das álgebras particulares: uma reflexão pura é descrita por operadores vetoriais. Notamos, que se L é um vetor temos que:

18) $L^* = -L$, enquanto que: $L^+ = L$; que se enquadra em nossa classificação anterior das isometrias, como sendo uma reflexão.

Nosso estudo sugere que o teorema de Hamilton deve ser verificado, pois claramente o produto de dois vetores pertence a subálgebra par, e descreve portanto uma rotação. Nos próximos parágrafos estudamos a forma explícita das duas reflexões correspondentes a rotação, para espaços euclidianos.

O próximo resultado é uma construção explícita dos operadores de rotação, introduzindo na discussão os geradores do grupo de rotação. Deixe-nos supor que os operadores de rotação podem ser escritos como:

19) $L = \exp(B) = 1 + B + B^2/2 + B^3/3! + \dots$; onde $B \in R_n$.

Não vamos aqui discutir a convergência da série, pode-se mostrar que ela é absolutamente convergente para a escolha de uma norma conveniente (ver [Ma] para maiores detalhes). O resultado da soma é obviamente um número de Clifford.

Claramente a expansão da exponencial nos mostra que B deve ser um elemento da subálgebra par, pois caso contrário o primeiro termo na expansão já não pertenceria a R_n^+ . Além disso, pelas propriedades da operação de reversão (vide §4), temos que:

$$20) \quad L^\dagger = (\exp(B))^\dagger = \exp(B^\dagger)$$

Podemos mostrar que se A e B são dois números que comutam então, vale que:

$$21) \quad \exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$$

Da equação acima, segue que a inversa de $\exp(B)$ é dada por $\exp(-B)$. Como estamos considerando rotações, onde $L^\dagger = L^{-1}$, concluímos das equações 20, 21 e da condição $L^\dagger = L^{-1}$, que:

$$22) \quad \exp(-B) = \exp(B^\dagger), \text{ e portanto, temos que: } B^\dagger = -B$$

Nas álgebras de Clifford de baixa dimensão, R_n com $n \leq 5$, os únicos elementos, da subálgebra par, que satisfazem a condição $B^\dagger = -B$ são bivectores.

Mostramos acima que todo número de Clifford que é da forma $\exp B$, onde B é um bivector tem associado a si uma rotação. A recíproca também é verdadeira: toda rotação pode ser escrita como $\exp B$, onde B é um bivector. A prova pode ser encontrada em [Ma]. Esse resultado é reconhecido na representação matricial das isometrias como o resultado de que toda matriz que representa uma rotação pode ser escrita na forma exponencial de uma matriz antisimétrica. Em [Ma] o leitor interessado pode achar uma prova de que as matrizes antisimétricas $n \times n$ formam uma álgebra de Lie isomorfa a álgebra de Lie dos bivectores de R_n .

Os objetos que aparecem na exponencial são ditas os geradores das rotações. Na representação das álgebras de Clifford, os geradores das rotações são os bivectores. Portanto, o número de parâmetros do grupo de rotação em R_n é igual a dimensão do subespaço dos bivectores de R_n , dado por $1/2 n(n-1)$. Assim, uma rotação em E^n , ou a sua extensão para R_n , é determinada por $1/2 n(n-1)$ variáveis.

Considere agora uma rotação infinitesimal gerada pelo bivetor B , isto é, termos de ordem quadrada em B podem ser desprezados na expansão da exponencial. Então, temos que:

$$23) \quad L = \exp(B) = 1 + B + O(B^2)$$

onde $O(B^2)$ contém termos da ordem de B^2 ou menores.

Uma rotação infinitesimal do vetor v resulta em:

$$24a) \quad v' = L^+ v L = (1 - B)v(1 + B) = v + [v, B] + O(B^2)$$

onde $[v, B]$ é o comutador de v com B (ver §4, eq 24). Alternativamente, podemos escrever a expressão acima como:

$$24b) \quad v' = v + 2v.B$$

Claramente v' é um vetor como era de se esperar, pois consideramos que L descreve uma isometria. Note também, que:

$$25) \quad v'^2 = v^2 + 2(v(v.B) + (v.B)v) + O(B^2)$$

Agora desde que a parte simétrica do produto de dois vetores é dada pelo produto interno, segue que:

$$25a) \quad 1/2(v(v.B) + (v.B)v) = v.(v.B) = (v \wedge v).B = 0$$

e assim, voltando a equação 25, notamos que uma transformação infinitesimal preserva a norma como era de se esperar.

Vamos agora fazer a extensão das rotações em E^n para R_n .

Este resultado é fundamental para a discussão relativística da Eletrodinâmica através da álgebra de Clifford, pois ele nos mostra que qualquer elemento de R_n se transforma com a mesma lei em relação a uma rotação (transformações de Lorentz em $R_{1,3}$), de modo que as equações obtidas com números de Clifford se escrevem do mesmo modo quando passamos de um referencial para o outro.

Como vimos, um vetor de E^n se transforma sob rotação como:

$$26) \quad v' = L^+ v L, \quad \text{onde } L \in R_n^+, \text{ e também } L^+ = L^{-1}$$

Agora, um bivector da base transformada pode ser escrito como:

$$27) \quad \hat{e}_{jk}' = \hat{e}_j' \hat{e}_k' = (L^+ \hat{e}_j L) (L^+ \hat{e}_k L) = L^+ \hat{e}_{jk} L$$

pois, $LL^+ = +1$.

Assim, os elementos da base dos bivectores tem a mesma lei de transformação que os vetores. A extensão desse resultado para um elemento qualquer da base é óbvia, e portanto, um número qualquer de Clifford em R_n , indicado por F , se transforma do mesmo modo que os vetores, isto é:

$$28) \quad F' = L^+ F L$$

Deve ser claro da forma que escrevemos os bivectores transformados que uma rotação (ou uma isometria) não altera a graduação dos multivetores, de modo que o método de equacionar separadamente multivetores de mesma graduação não é afetado por rotações.

Vamos agora analisar o efeito das rotações infinitesimais sobre um multivector qualquer, e confirmar assim, que nesse caso a graduação do multivector não se altera sob rotações. O procedimento é análogo ao adotado no caso de uma rotação infinitesimal de um vetor.

Deixe A_r ser um r -vetor. Então uma rotação infinitesimal descrita pelo operador $L = 1 + B$, onde B é o gerador da rotação, leva A_r em A_r' , dado por:

$$29) \quad A_r' = (1 - B) A_r (1 + B) = A_r + [A_r, B] + O(B^2)$$

Lembrando o resultado do §4, eq 22, de que o comutador de um multivector por um bivector preserva a graduação do multivector, o resultado desejado, isto é, que uma rotação infinitesimal preserva a graduação dos multivetores, está provado.

§12. ISOMETRIAS EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS

§12.1 ISOMETRIAS NO PLANO EUCLIDIANO

Considere $R_{2,0}$ dado por uma base $(1, e_1, e_2, i)$ (ver §8).

Estudamos inicialmente as isometrias de rotação, cujos operadores são elementos de $R_{2,0}^*$; ou seja são os complexos. Assim, os operadores podem ser escritos como:

$$1a) \quad L = x + iy; \text{ e também, temos que:}$$

$$1b) \quad L^+ = x - iy; \text{ e assim: } LL^+ = L^+L = x^2 + y^2$$

Devemos trabalhar com a forma normalizada dos operadores:

$$2) \quad L = \cos w + i \operatorname{sen} w = \exp(iw)$$

Os geradores das rotações no plano euclidiano são os números imaginários puros, os bivectores de $R_{2,0}$. Eles formam um grupo comutativo a um parâmetro. O parâmetro w descreve o ângulo de rotação.

Uma rotação no plano euclidiano é então, descrita como:

$$3) \quad v' = L^+vL = \exp(-iw) v \exp(iw)$$

É conveniente sempre que possível diminuir o número de operações envolvidas, e vamos escrever as rotações no plano euclidiano como sendo descrita por uma única multiplicação, da forma usual. Isso pode ser feito notando que:

$$4) \quad L^+v = \exp(-iw) v = v \exp(iw) = vL; \text{ pois a unidade pseudoscalar anticomuta com vetores de } R_{2,0}, \text{ isto é:}$$

$$\exp(iw) v = (\cos w + i \operatorname{sen} w)v = v(\cos w - i \operatorname{sen} w) = v \exp(-iw)$$

Assim, as rotações podem ser escritas como:

$$5) \quad v' = L^+vL = vL^2 = v \exp(2iw)$$

Vamos agora dar uma interpretação geométrica para o fato da unidade pseudoescalar anticomutar com vetores em $R_{2,0}$. Desde que o gerador das rotações no plano euclidiano, i , tem as seguintes relações com os vetores de uma base ortonormal de $E^{2,0}$:

$$6a) \quad e_1 i = e_2 \quad ; \quad \text{e por outro lado:} \quad i e_1 = -e_2$$

$$6b) \quad e_2 i = -e_1 \quad \quad \quad i e_2 = e_1$$

Assim, é natural interpretar a ordem da multiplicação da unidade pseudoescalar como fornecendo o sentido da rotação, a multiplicação por i à direita gera rotação no sentido anti-horário, considerando-se e_1 como o eixo horizontal e e_2 como sendo o eixo vertical, enquanto que a multiplicação por i à esquerda gera rotação no sentido horário. Note que o tratamento usual das rotações nos complexos não esclarece o fato de termos dois sentidos de rotação no plano.

Vamos agora estudar as reflexões puras no plano euclidiano. Conforme estrutura geral apresentada no parágrafo anterior, as reflexões puras são descritas por operadores que são vetores, isto é, qualquer vetor determina uma reflexão. Trabalharemos com vetores unitários. Uma reflexão do vetor v na direção do vetor unitário u é dada por:

$$7) \quad v' = uvu = 2(u \cdot v)u - v$$

onde desenvolvemos o produto $vu = 2v \cdot u - uv$. Da representação acima é fácil ver que a reflexão no eixo u inverte a componente perpendicular ao eixo e mantém inalterada a componente paralela ao eixo.

Analisamos agora o teorema de Hamilton no plano euclidiano: toda rotação é descrita por duas reflexões. Nossa tarefa é encontrar as relações explícitas satisfeitas pelos vetores que descrevem

as reflexões e o ângulo da rotação correspondente. A composição de duas reflexões na direção dos vetores unitários n e u , é dada por:

8a) $v' = unvnu$; e desejamos escrevê-la na forma de uma rotação:

8b) $v' = v \exp(2iw)$

que descreve uma rotação no sentido anti-horário, do eixo 1 para o eixo 2, por um ângulo igual a $2w$.

Obsevamos que podemos escrever o produto un como:

9) $un = u \cdot n + u \wedge n = u \cdot n + i(u_1 n_2 - u_2 n_1)$

onde u_j e n_j são as coordenadas dos vetores u e n em termos de uma base ortonormal de $E^{2,0}$, (e_1, e_2) . Também, como u e n são vetores unitários, podemos escrever:

10) $n = \cos x + i \sen x$; e também: $u = \cos y + i \sen y$

e assim, a relação 9 fica:

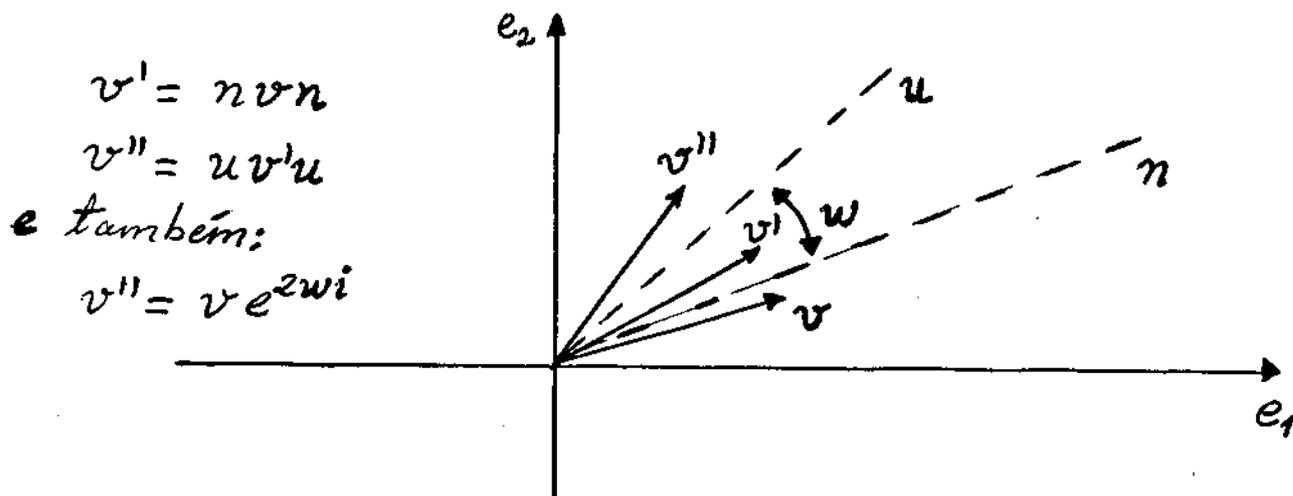
9a) $un = (\cos x \cos y - \sen x \sen y) + i(\cos x \sen y + \cos y \sen x)$

Então, devemos ter que a rotação correspondente ao produto das reflexões u e n é descrita por um ângulo w , tal que o ângulo entre os vetores u e n seja a metade do ângulo de rotação, isto é:

11) $\cos(x-y) = \cos(2w)$; e também: $\sen(x-y) = \sen(2w)$

A situação é ilustrada na figura abaixo.

figura 1 Rotação equivalente a composição de duas reflexões



§12.2 ISOMETRIAS NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Vamos agora descrever as rotações no espaço, usando para isso a álgebra de Pauli, P . Os operadores de rotações são os elementos da subálgebra par, que é isomorfa aos quaternions. Como os quaternions formam uma álgebra de divisão, podemos dizer que para qualquer quaternion está associada uma rotação.

Observamos que a operação de reversão em P corresponde a composição das operações de inversão e reversão em H . A operação de reversão em P troca o sinal de trivetores, e assim, segue que:

$$12) \quad L = x + in, \text{ então: } L^\dagger = x - in; \text{ onde } x \in \mathbb{R}, \text{ e } n \in \mathbb{E}^3, 0$$

Impondo a condição de normalização:

$$13) \quad LL^\dagger = L^\dagger L = x^2 + n^2 = 1$$

podemos escrever os operadores de rotação como abaixo:

$$14) \quad L = \exp(iwu) = \cos w + iu \operatorname{sen} w; \text{ onde } u \text{ é um vetor unitário.}$$

O grupo das rotações no espaço euclidiano é um grupo não comutativo a tres parâmetros. Podemos interpretar geometricamente esses tres parâmetros como sendo: dois parâmetros associados a direcção do eixo sobre o qual se faz a rotação (note que os cossenos directores no espaço satisfazem a $\cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(z) = 1$, e portanto, direcções no espaço são determinadas por dois parâmetros), e um terceiro associado ao ângulo da rotação.

A representação dos operadores de rotação espacial dada acima sugere que u deve ser o eixo sobre o qual se faz a rotação, e que w fornece uma medida do ângulo da rotação. No que se segue mostraremos que tal interpretação é correcta.

A condição para que o vetor v seja igual ao vetor a rodado sobre o eixo u por um ângulo de $2w$ radianos é que as componentes de a e v paralelas (\parallel) e perpendiculares (\perp) a u satisfaçam:

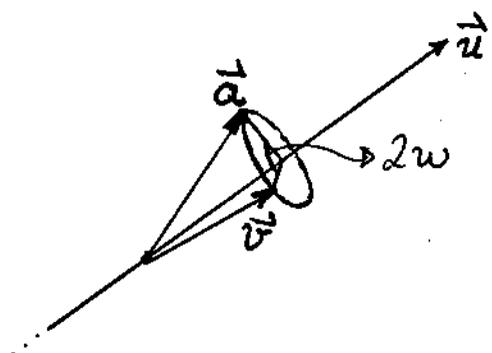
15) $v^\parallel = a^\parallel$, enquanto que: $v^\perp \cdot a^\perp = 2w$

além da condição essencial de ser uma isometria, isto é: $|v| = |a|$

Notamos também que das condições acima para a componente paralela e do fato de preservar a norma, segue que: $|v^\perp| = |a^\perp|$

Assim, a componente do vetor a paralela ao eixo de rotação é inalterada, enquanto que a componente perpendicular ao eixo de rotação sofre uma rotação no plano ortogonal ao eixo de rotação por uma medida de $2w$ radianos. A figura abaixo ilustra a situação.

figura 2. Rotação do vetor a sobre o eixo u por $2w$ radianos



$$\vec{v} = e^{-i\vec{u}w} \vec{a} e^{i\vec{u}w}$$

Vamos agora mostrar que a rotação descrita pelo operador:

16) $L = \exp(iuw) = \cos w + i \text{sen} w$

é a rotação exposta acima. Assim, o vetor v deve ser dado por:

17a) $v = L^\dagger a L = \exp(-iuw) a \exp(iuw)$; ou explicitamente como:

17b) $v = a \cos(2w) + u \times a \text{sen}(2w) + (a \cdot u) u (1 - \cos(2w))$

Assim, é imediato verificar que as equações 15 são válidas:

18a) $v^\parallel = a^\parallel$; ou equivalentemente: $v \cdot u = a \cdot u$; e também que:

18b) $v^\perp \cdot a^\perp / (v^\perp)^2 = \cos(2w)$; onde $v^\perp = v - v^\parallel$.

Como os operadores de rotação em Pauli são elementos da álgebra dos quaternions, as rotações no espaço euclidiano formam um grupo não comutativo. O produto de dois operadores, L_1 e L_2 , onde $L_j = x_j + ia_j$, é dado por:

$$19) \quad L_1 L_2 = x_1 x_2 + i(x_1 a_2 + x_2 a_1) - a_1 \cdot a_2 - i(a_1 \times a_2)$$

Observamos então, que duas rotações só comutam se e somente se forem ao redor do mesmo eixo, ou melhor, se forem efetuadas no mesmo plano.

Discutimos agora um pouco sobre reflexões. As reflexões puras são dadas pelos operadores vetoriais. O produto de duas reflexões puras é uma rotação, descrita pelo operador L , tal que:

$$20) \quad L = un = u \cdot n + iu \times n$$

onde u e n são os vetores unitários que descrevem as reflexões. Note que: $(u \cdot n)^2 + |u \times n|^2 = u^2 n^2 = 1$; e portanto, L já está normalizado. Assim, o teorema de Hamilton no espaço tem a seguinte interpretação: uma rotação ao redor do eixo b por um ângulo $2w$ corresponde a duas reflexões em duas direções (ou vetores) ortogonais ao eixo b , que fazem um ângulo w entre si, isto é, escrevendo:

$$21) \quad u \cdot n = \cos w \quad ; \quad \text{e por outro lado:} \quad u \wedge n = \sin w \quad b \quad ; \quad \text{segue que:}$$

$$22) \quad L = un = \exp(iwb)$$

Por fim analisamos as operações de simetria. Uma simetria é uma composição de reflexão na origem por reflexão em um vetor, resultando numa reflexão no plano normal ao vetor. Então, uma simetria segundo o vetor unitário u , é dada por:

$$23) \quad v = -uvu = v - 2(v \cdot u)u = v^\perp - v^\parallel; \quad \text{onde } v^\parallel = (v \cdot u)u$$

Uma reflexão no plano xy (ou, $\sigma_1 \sigma_2$) corresponde a uma simetria segundo a direção do eixo z (σ_3).

§13. ISOMETRIAS NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

§13.1 ISOMETRIAS NO PLANO DE MINKOWSKI

Uma base para $R_{1,1}$ é dada por $(1, g_0, g_1, \eta)$ (ver §8.2). Os operadores de rotação no plano de Minkowski são os pseudocomplexos:

$$1) \quad L = x + \eta y ; \quad \text{e também:} \quad L^\dagger = x - \eta y$$

Observe que a operação de reversão em $R_{1,1}$ corresponde a operação de conjugação nos pseudocomplexos (§7.2, eq 10), e temos que:

$$2) \quad L L^\dagger = L^\dagger L = x^2 - y^2$$

Então, podemos adotar a forma normalizada para os operadores de rotação no plano de Minkowski dada pela exponencial pseudocomplexa mostrada abaixo:

$$3) \quad L = \exp(\eta\theta) = \text{ch}\theta + \eta\text{sh}\theta ; \quad \text{enquanto que:} \quad L^\dagger = \exp(-\eta\theta)$$

onde ch e sh são as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, tão convenientes para descrever as rotações no plano de Minkowski quanto o são as funções trigonométricas no plano euclidiano.

Uma rotação sobre o vetor s no plano de Minkowski é dada por:

$$4) \quad s' = L^\dagger s L = s \exp(2\eta\theta)$$

onde a última passagem foi possível, pois os vetores no plano de Minkowski anticomutam com a unidade pseudoescalar, η .

O grupo das rotações em $R_{1,1}$ é um grupo comutativo a um parâmetro. O parâmetro θ é conhecido como a rapidez da transformação, e pode ser convenientemente interpretado através da seguinte identificação:

$$5) \quad \text{ch}\theta = \Gamma ; \quad \text{enquanto que:} \quad \text{sh}\theta = \Gamma v ; \quad \text{onde} \quad \Gamma = 1/(1-v^2)^{1/2}$$

Γ é reconhecido como o fator de Lorentz, e v é reconhecido como a velocidade entre os referenciais primado (K') e sem prima (K). Apesar de como dito no início deste capítulo, trabalharmos na forma ativa, podemos simular uma transformação na forma passiva interpretando as coordenadas do vetor s' como se referindo ao referencial (ou seja, a base primada) primado. Maiores detalhes serão dados no próximo parágrafo.

A interpretação acima da rapidez em termo da velocidade entre os referenciais é significativa para a interpretação física. Entretanto, para cálculos é mais conveniente trabalharmos com a rapidez. Como exemplo da simplicidade em se trabalhar com a rapidez, vamos agora estudar a lei de adição de velocidades. A composição de duas rotações em $R_{1,1}$, descrita pelos operadores L_1 e L_2 , cujas rapidez são θ_1 e θ_2 , respectivamente, é descrita por um operador L , dado por:

$$6) \quad L = L_1 L_2 = \exp(\mathcal{O}\theta_1)\exp(\mathcal{O}\theta_2) = \exp(\mathcal{O}(\theta_1 + \theta_2))$$

desde que as seguintes relações são válidas:

$$7a) \quad \text{ch}(\theta_1 + \theta_2) = \text{ch}\theta_1 \text{ch}\theta_2 + \text{sh}\theta_1 \text{sh}\theta_2$$

$$7b) \quad \text{sh}(\theta_1 + \theta_2) = \text{sh}\theta_1 \text{ch}\theta_2 + \text{sh}\theta_2 \text{ch}\theta_1$$

e portanto, a rapidez da transformação composta é a soma da rapidez das transformações que a compõem. A relação entre a velocidade da transformação L e as velocidades v_1 e v_2 das transformações L_1 e L_2 pode ser obtida através da eqs 5, notando que a velocidade é dada em termos da rapidez por:

$$8) \quad v = \text{tgh}(\theta)$$

Assim, das regras para a soma de argumentos da função tangente hiperbólica, segue que:

$$9) \quad v = \operatorname{tgh}(\theta_1 + \theta_2) = (\operatorname{tgh}\theta_1 + \operatorname{tgh}\theta_2) / (1 + \operatorname{tgh}\theta_1 \operatorname{tgh}\theta_2)$$

$$\text{e portanto, segue da eq 8 que: } v = (v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2)$$

que é a lei de adição de velocidades na relatividade restrita.

§13.2 ISOMETRIAS EM $R_{1,3}$

Nossa primeira tarefa é escrever os operadores das rotações em $R_{1,3}$ na forma exponencial, num sentido bem definido, análogo ao dos parágrafos anteriores. Como os operadores das rotações são elementos da subálgebra par da álgebra de Minkowski (ver §10), eles podem ser escrito como abaixo:

$$10) \quad R = x + B + y\hat{e}_5 ; \text{ onde } B \text{ é um bivetor e } x \text{ e } y \text{ são escalares.}$$

O reverso do operador R , é dado por (ver eq 15, §10):

$$11) \quad R^\dagger = x - B + y\hat{e}_5$$

A condição de normalização leva a: .

$$12) \quad R R^\dagger = R^\dagger R = x^2 + 2xy\hat{e}_5 - y^2 - B^2 = 1$$

Equacionando separadamente multivetores de mesma graduação na equação acima, temos que:

$$12a) \quad x^2 - y^2 - B \cdot B = 1 \quad (\text{parte escalar})$$

$$12b) \quad 2xy\hat{e}_5 - B \wedge B = 0 \quad (\text{parte pseudoescalar})$$

Essas são as condições mais gerais que um operador de rotação na álgebra de Minkowski deve satisfazer. Não vamos mostrar aqui, mas qualquer rotação na álgebra de Minkowski pode ser obtida através da composição de uma rotação espacial com um boost, os quais passamos a analisar agora (ver eqs 8, §10). A visualização física desse resultado, é que dois referenciais são relacionados da seguinte maneira: inicialmente fazemos uma rotação espacial para pa-

paralelizar os eixos espaciais entre os dois referenciais, e depois fazemos um boost na direção do movimento relativo. Estamos particularmente interessados nos boosts, pois por simplicidade, podemos escolher os eixos espaciais dos dois referenciais para já estarem paralelos.

O que caracteriza essas particulares rotações no espaço-tempo, é que a parte bivector é dada por um bivector simples. Desde que o bivector é simples ($B \wedge B = 0$, ver eq 26, 54), segue da eq 12b que devemos ter x ou y igual a zero.

Analisamos inicialmente o caso em que a parte bivector do operador de rotação é tipo-tempo. Tais operadores descrevem os boosts. Como o bivector é tipo-tempo, $B^2 \geq 0$, e portanto a única opção que satisfaz as eqs 12 é $y=0$. Também, pela eq 12a, devemos ter:

$$(13) \quad x^2 - B^2 = 1; \text{ e assim, podemos escrever:}$$

$$(14) \quad x = \text{ch}\theta; \text{ juntamente com: } B = K \text{ch}\theta$$

onde K é um bivector tipo-tempo unitário, isto é, $K^2 = +1$.

Portanto, por analogia com as rotações no plano de Minkowski, podemos escrever o operador de boost como:

$$(15) \quad R = \exp(K\theta) = \text{ch}\theta + K \text{sh}\theta$$

Os boost são descritos por tres parâmetros que são convenientemente interpretados do seguinte modo: dois associados a direção do movimento, dado pelas duas componentes independentes de K (note que $K^2 = +1$), e um associado a velocidade (ou módulo da...) relativa entre os referenciais, representada pela rapidez (θ). Mostraremos no próximo parágrafo que tal interpretação é correta.

Vamos agora analisar o caso em que a parte bivector do operador de rotação é tipo-espaço. Como $B^2 \geq 0$, podemos ainda ter x ou y

igual a zero, nas eqs 12. As rotações espaciais são associadas ao caso em que y igual a zero. No caso em que x é igual a zero, é fácil ver que a rotação é um boost disfarçado pela unidade pseudoescalar, pois temos que:

$$16) \quad R = T + y\hat{e}_5 = (B + y)\hat{e}_5$$

onde T é um bivector tipo-espaco, e B é o dual do bivector T , sendo portanto tipo-tempo. É fácil verificar, através das propriedades da unidade pseudoescalar em M , que a unidade pseudoescalar aparecendo na equação acima não muda a forma final da rotação, desde que essa é descrita por uma operação biladeada.

Os operadores das rotações espaciais, que são a soma de bivectores tipo-espaco com escalares, devem satisfazer a condição de normalização 12a, isto é:

$$17) \quad R R^\dagger = R^\dagger R = x^2 - T^2 = 1$$

Desde que $T^2 \leq 0$, pois T é tipo-espaco, podemos escrever os operadores de rotação espacial como:

$$18) \quad R = \cos w + L \operatorname{sen} w = \exp(Lw); \text{ e também: } R^\dagger = \exp(-Lw)$$

onde L é um bivector tipo-espaco unitário ($L^2 = -1$).

Esta representação das rotações espaciais é equivalente a dada no parágrafo anterior, onde estudamos rotações no espaco euclidiano. As duas descrições são relacionadas notando que a álgebra de Pauli é a subálgebra par da álgebra de Minkowski (ver §10, eqs 21), e portanto, bivectores tipo-espaco em Minkowski correspondem a bivectores em Pauli, ou melhor, ao dual de um vetor, o que se enquadra melhor na nossa discussão de rotações espaciais feita no §12.2.

§14. TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

No parágrafo anterior a discussão sobre rotações se deu na forma ativa, isto é, os vetores eram alterados. Esse ponto de vista é conveniente para simplificar os estudos. Uma outra visão das rotações, que é de maior interesse na interpretação física, é que os vetores em si permanecem inalterados, o que ocorre é uma mudança de referencial, ou mudança de coordenadas, também dita uma rotação na forma passiva.

Representamos mudança de coordenadas por matrizes, isto é:

$$1) \quad x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (A^{\mu}_{\nu} \text{ são constantes})$$

Desde que os vetores de E^n são tidos como os vetores tangentes as linhas coordenadas, uma mudança de coordenadas leva naturalmente a uma mudança de base:

$$2) \quad \hat{e}'^{\mu} = D(x'^{\mu}) = (\partial x'^{\mu} / \partial x^{\nu}) \hat{e}^{\nu} = A^{\mu}_{\nu} \hat{e}^{\nu}$$

onde D é o operador gradiente (maiores detalhes sobre o operador gradiente no próximo parágrafo).

Como dissemos no §5 após introduzirmos a base recíproca, os vetores são tidos como objetos invariantes em relação a mudança de base (ou, mudança de referencial). Assim, para um vetor s , dado por:

$$3) \quad s = s^{\mu} \hat{e}_{\mu} = s'^{\mu} \hat{e}'_{\mu}$$

devemos ter que as coordenadas contravariantes se transformam com a inversa dos vetores da base natural (covariante), ou seja:

$$4a) \quad \hat{e}'_{\mu} = T^{\nu}_{\mu} \hat{e}_{\nu}$$

$$4b) \quad s'^{\mu} = A^{\mu}_{\lambda} s^{\lambda}$$

onde a matriz $[T^{\nu}_{\mu}]$ é a inversa da matriz $[A^{\mu}_{\nu}]$, isto é:

$$5) \quad A^{\lambda\nu} T^{\nu\mu} = \delta^{\lambda\mu}$$

Podemos simular uma transformação de coordenadas através de uma transformação ativa, notando que nesse caso os vetores da base se transformam como:

$$6a) \quad \hat{e}'_{\mu} = L \hat{e}_{\mu} L^{\dagger} \quad \text{com a inversa dada por:}$$

$$6b) \quad \hat{e}_{\mu} = L^{\dagger} \hat{e}'_{\mu} L$$

Assim, a transformação ativa do vetor s dada por:

$$7) \quad s' = L^{\dagger} s L$$

simula uma transformação de coordenadas quando interpretamos que suas coordenadas são em referência a base transformada, ou seja, ao novo referencial. Note que transformamos o vetor s de acordo com a inversa da base natural (eq 6a).

Os elementos de matriz $T^{\mu\nu}$ são dados em termos dos operadores da forma ativa por:

$$8) \quad T^{\mu\nu} = \hat{e}'_{\mu} \cdot \hat{e}^{\nu} = \langle L \hat{e}_{\mu} L^{\dagger} \hat{e}^{\nu} \rangle$$

Da forma acima é fácil verificar que a inversa (ver eq 5) da matriz da transformação é a transposta multiplicada pela matriz do tensor métrico, isto é:

$$8a) \quad T^{\mu\nu} = G^{\mu\lambda} G^{\nu\kappa} A^{\lambda\kappa}$$

A ordem dos índices não importa (ver eq 8), pois o produto interno de dois vetores é simétrico em relação a comutação dos vetores.

Para resolver para os operadores em termos dos elementos de matriz é mais difícil, e não será discutido aqui. Isso não causa prejuízos a exposição, desde que vamos trabalhar intrinsecamente, ou seja, com os operadores.

Como vimos no §10 cada referencial no espaço-tempo determina uma única álgebra de Pauli, segundo sua particular direção temporal. Também, apontamos que em geral as contas são feitas em um particular referencial (o referencial de laboratório), de modo que a questão que surge é: como estão relacionadas as álgebras de Pauli associadas a dois referenciais inerciais entre si? Para responder tal questão deixe-nos exprimir a direção temporal (vetor \hat{e}_0) de um dos referenciais, primado, na álgebra de Pauli do outro referencial, sem prima, isto é:

$$9) \quad \hat{e}_{0'} = \hat{e}_0 = A^{0'0} + A^{0'k} \hat{e}_k$$

$$\text{onde } A^{0'\mu} = \hat{e}_{0'} \cdot \hat{e}_\mu$$

Para uma interpretação significativa dos coeficientes $A^{0'k}$ escrevemos a transformação inversa:

$$10) \quad \hat{e}^\mu = A^{\mu\nu} \hat{e}^{\nu'}$$

Agora, notando que $\hat{e}_k = -\hat{e}^k$, $\hat{e}_0 = \hat{e}^0$, segue que:

$$11) \quad A^{0'k} = \hat{e}_{0'} \cdot \hat{e}_k = -\hat{e}_{0'} \cdot \hat{e}^k = -A^k_{0'}$$

Por outro lado, os elementos de matriz $A^k_{0'}$ são dados por:

$$12) \quad A^k_{0'} = (\partial x^k / \partial x^{0'}) = (\partial x^k / \partial x^0) \Gamma$$

$$\text{onde } \Gamma = A^{0'0} = (\partial x^0 / \partial x^{0'})$$

Podemos interpretar $\partial x^k / \partial x^0$ como sendo a velocidade do referencial primado em relação ao referencial sem prima, considerando x^k como a coordenada, no referencial sem prima, de um ponto em repouso no referencial primado. Assim, podemos escrever a representação do vetor $\hat{e}_{0'}$ na álgebra de Pauli de \hat{e}_0 como abaixo:

$$13) \quad \hat{e}_{0'} \cdot \hat{e}_0 = \Gamma(1 + v^k \hat{e}_k) \longrightarrow \Gamma(1 + v)$$

Para obtermos a relação entre Γ e v , quadrámos a relação anterior:

$$14) \quad (\hat{e}_0', \hat{e}_0')^2 \longrightarrow \Gamma^2 (1 + v)^2$$

O membro direito resulta em:

$$\Gamma^2(1 + v)^2 = \Gamma^2(1 + 2v + v^2)$$

enquanto que o membro esquerdo é dado por:

$$\hat{e}_0' (2\hat{e}_0 - \hat{e}_0' - \hat{e}_0' \hat{e}_0) \hat{e}_0 = 2 \Gamma^2(1 + v) - 1$$

Assim, segue que:

$$15) \quad \Gamma^2(1 - v^2) = 1 ; \text{ ou: } \Gamma = 1/(1 - v^2)^{1/2}$$

que é a expressão usual para o fator de Lorentz.

Vamos agora relacionar o estudo acima (eq 13, basicamente) com os operadores de rotação no espaço-tempo. Como exposto anteriormente vamos nos concentrar apenas no estudo dos boosts.

Iniciamos escrevendo o vetor \hat{e}_0' do referencial primado em termos do vetor \hat{e}_0 do referencial sem prima através dos operadores de boost como abaixo:

$$16) \quad \hat{e}_0' = R \hat{e}_0 R^\dagger$$

Os operadores de boost são dados por: $R = \exp(wK) = chw + Kshw$ onde K é um bivetor (em M) tipo-tempo unitário. Então, notamos que:

$$17) \quad \hat{e}_0 K \hat{e}_0 = K^\dagger, \text{ e portanto: } \hat{e}_0 R \hat{e}_0 = R^\dagger$$

Assim, podemos escrever o vetor \hat{e}_0' como:

$$16a) \quad \hat{e}_0' = \hat{e}_0^2 R \hat{e}_0 R^\dagger = \hat{e}_0 R^{\dagger 2}$$

e portanto temos que:

$$18) \quad \hat{e}_0 \hat{e}_0' = R^{\dagger 2}$$

Da eq 13, segue que o membro esquerdo é dado por:

$$19) \quad \hat{e}_0 \hat{e}_0' = 2\hat{e}_0 - \hat{e}_0' - \hat{e}_0' \hat{e}_0 \longrightarrow 2 \Gamma - \Gamma(1 + v) = \Gamma(1 - v)$$

e assim, temos a relação fundamental:

$$20) \quad R^{\dagger 2} = \Gamma(1 - v)$$

Também, da representação exponencial para o operador de boost temos que:

20a) $R^{+2} = \exp(-2wK) \rightarrow \text{ch}2w - k \text{sh}2w$; e assim, devemos ter:

20b) $\text{ch}2w = \Gamma$; $k \text{sh}2w = \Gamma v$; e portanto: $v = k \text{tgh}2w$

As fórmulas relacionando v com o meio ângulo w exigem um certo trabalho. É conveniente sempre que possível trabalhar com a exponencial de ângulo inteiro. Veremos como fazer isso nos casos de maior interesse, estudados a seguir. As relações obtidas são, como exposto anteriormente, trabalhadas na álgebra de Pauli dos referenciais. Note que os operadores de boost são projetados naturalmente na álgebra de Pauli, desde que eles são elementos da subálgebra par

A transformação das coordenadas de um vetor podem ser obtidas realizando a transformação inversa da dos vetores de base, eq 16:

$$21) \quad p^* = R^+ p R$$

Agora, projetando na álgebra de Pauli, e com a ajuda da eq 17, temos que:

$$21a) \quad p^* = R^+ p R \hat{e}_0 = R^+ p \hat{e}_0^2 R \hat{e}_0 \rightarrow R^+ (p_0 + p) R^+$$

Decompondo o vetor p em componentes ortogonal, indicada por p^\perp , e paralela, indicada por $p_\#$, na direção da velocidade relativa v , e notando que assim temos que:

$$22) \quad R^+ p_\# = p_\# R^+ ; \text{ enquanto que: } R^+ p^\perp = p^\perp R$$

encontramos finalmente que:

$$23) \quad p_0^* + p^* = (p_0 + p_\#) R^{+2} + p^\perp$$

ou, utilizando a eq 20 para R^{+2} , e equacionando separadamente a parte escalar da parte vetor, temos que

$$23a) \quad p_0^* = \Gamma (p_0 - v \cdot p)$$

$$23b) \quad p_\#^* = \Gamma (p_\# - p_0 v) ; \text{ e também: } p^\perp^* = p^\perp$$

que são as transformações de Lorentz usuais para vetores no espaço-tempo da relatividade restrita.

Estudamos agora a transformação de bivectores. É conveniente expressar o bivector como a soma de um bivector tipo tempo e o dual de outro bivector tipo-tempo. A conveniência em se exprimir um bivector em M desta maneira é que quando o projetamos em P , ele é escrito como um vetor mais o dual de outro vetor, ou seja:

$$24) \quad F^* = E^* + \hat{\epsilon}_5 B^* \longrightarrow E^* + iB^*$$

Agora, a representação do bivector F no referencial primado é dada pela inversa da transformação dos vetores de base, isto é:

$$25) \quad F^* = R^+ F R \longrightarrow R^+(E + iB)R$$

Novamente decompondo os vetores E e B em componentes paralela e perpendicular a direção do movimento relativo, e utilizando a eq 22, encontramos que:

$$26) \quad E^* + iB^* = E_{\#} + iB_{\#} + R^{+2}(E^{\perp} + iB^{\perp})$$

Lembrando a expressão fundamental para R^{+2} , eq 20, e equacionando separadamente a parte vetor e bivector da equação acima, segue que:

$$26a) \quad E^* = E_{\#} + \Gamma(E^{\perp} + v \times B)$$

$$26b) \quad B^* = B_{\#} + \Gamma(B^{\perp} - v \times E)$$

que são as transformações de Lorentz para os campos elétrico e magnético.

CAPT IV: OPERADORES DIFERENCIAIS E HOLOMORFIA

§15. OPERADORES DIFERENCIAIS

Nosso trabalho até agora tem abordado apenas espaços vetoriais. Entretanto, o espaço vetorial de Minkowski (R^4, J) e o espaço vetorial euclidiano R^3 são simplesmente o espaço tangente em um ponto genérico de espaços mais primitivos denominados variedades diferenciáveis, no caso relacionadas ao espaço-tempo da relatividade especial e ao espaço físico de nossa percepção imediata (euclidiano tridimensional), respectivamente.

Para construir o formalismo da Eletrodinâmica, bem como o de outras teorias físicas, necessitamos introduzir operadores diferenciais atuando sobre os pontos dessas variedades e desenvolver algumas relações básicas entre eles.

Neste trabalho, voltado para a formulação da eletrodinâmica, estamos principalmente interessados em uma formulação que não deve ser extrínseca, isto é, que não dependa do sistema de coordenada utilizado, seja no espaço de Minkowski, ou seja no espaço físico ordinário (euclidiano, tridimensional). É conveniente lembrarmos que a transformação de Lorentz atua no espaço de Minkowski como uma rotação rígida dos eixos coordenados, sendo considerada simplesmente como uma mudança de base no espaço de Minkowski. A formulação que pretendemos desenvolver, e na qual geralmente se desenvolve os formalismos da eletrodinâmica está relacionada ao cálculo absoluto, ou seja, a representação dos elementos é feita de maneira intrínseca, não estando sujeita a um particular sistema de coordena-

nadas. Os operadores utilizados nas formulações usuais como gradiente, divergente, rotacional são intrínsecos. Os operadores que usaremos no que segue são intrínsecos em relação ao espaço a que se referem. Para distinguir os operadores em espaços diferentes, devemos quando necessário explicitarmos a que espaço os operadores estão referidos.

O tratamento neste parágrafo é basicamente relacionado as propriedades algébricas dos operadores. Está fora do objetivo apresentar como são construídos os operadores de diferenciação sobre as variedades. As variedades aqui abordadas são supostas diferenciáveis, e supomos também que os campos aqui estudados são diferenciáveis no sentido usual da análise matemática.

Estamos particularmente interessados no estudo de campos cujo domínio sejam as variedades relacionadas ao espaço euclidiano tridimensional e ao espaço-tempo de Minkowski (que por abuso de linguagem serão indicados também por R^3 e $R^{1,3}$, respectivamente) e contradomínio sejam respectivamente P e M , ou seja, esquematicamente campos que atuam como:

$$f : R^3 \quad \text{---} \rightarrow \quad P$$

$$g : R^{1,3} \quad \text{---} \rightarrow \quad M$$

Assim, trabalhando sobre tais espaços estamos aptos a definir o operador diferencial gradiente, segundo as direções escolhidas para descreverem o espaço (usaremos a letra \hat{e} para os versores do espaço, mas deve ser entendido que eles não se referem aos versores do espaço de Minkowski, a abordagem é genérica). Portanto definimos:

$$1) \quad D = \hat{e}^j \partial_j$$

onde ∂_j é o operador de diferenciação segundo a direção do j -ésimo vetor contravariante da base. Assim deve ser pois, diferenciação com respeito a uma coordenada contravariante gera um operador covariante, desde que a derivada se transforma com a inversa da transformação da coordenada a qual se refere. Assim, temos que:

$$2) \quad \partial_j = d/d(x^j)$$

onde x^j é a coordenada segundo a direção dada por \hat{e}^j .

Desde que nosso interesse reside no espaço euclidiano e no espaço-tempo de Minkowski, podemos restringir o estudo somente para espaços chatos. Assim, os vetores da base recíproca podem ser interpretados como sendo os vetores tangentes as linhas coordenadas do sistema, sendo construído pelo gradiente da coordenada correspondente, ou seja, temos que:

$$3) \quad \hat{e}^j = D(x^j)$$

O operador gradiente tem todas as propriedades de vetor frente as operações da álgebra superposta às características dos operadores diferenciais. Vejamos como ele se comporta quando opera sobre multivetores básicos da álgebra. Quando ele atua sobre funções escalares (f) ele produz um vetor:

$$4) \quad Df = \hat{e}^j \partial_j(f)$$

O gradiente de uma função escalar tem a interpretação usual do cálculo: é um vetor cujo módulo é o máximo da variação da função no ponto, e cuja direção indica a direção de maior crescimento para a função.

Antes de avaliarmos o resultado da operação do gradiente sobre vetores e multivetores outros que escalar, devo ressaltar que não estamos interessados em coordenadas curvilineas, cujos vetores tan-

gentes não são constantes em todos os pontos do espaço, de modo que as derivadas dos vetores da base serão aqui consideradas nulas. Se esse não fosse o caso, ao trabalharmos com vetores correspondentes a coordenadas curvilineas, a diferenciação deveria ocorrer antes das operações algébricas, de modo que o acoplamento algébrico do operador gradiente a um vetor qualquer deveria ser realizado após a operação de diferenciação não só das coordenadas, mas também dos vetores da base no qual o vetor está escrito. No estudo aqui realizado os versores da base são supostos constantes e passam pelos operadores de derivação, que devem atuar somente sobre as coordenadas. Assim, podemos realizar as operações algébricas envolvendo os versores separadamente das operações de derivação, que devem envolver somente as coordenadas.

Após a observação acima vejamos o resultado da operação do gradiente sobre um vetor:

$$5) \quad Dv = D \cdot v + D \wedge v$$

ou seja, o operador gradiente desenvolvido pelo cálculo geométrico compreende a divergência e o rotacional, quando aplicado à 1-vetores da álgebra. Temos então, de acordo com a estrutura algébrica, duas equações correspondentes a aplicação do operador gradiente sobre um vetor: uma escalar, correspondendo a divergência, e a outra em bivectores, correspondendo ao rotacional. Devemos preferir denominar o rotacional para o produto exterior ao invés do produto vetorial, visto que o produto exterior é muito mais geral.

A generalização da operação do gradiente sobre multivetores de qualquer graduação (exceto escalares) é imediata, pois segue o resultado do §2, capt I: produz dois termos, um com um grau a menos

que o multivetor original, correspondendo a divergência, e o outro termo com um grau a mais que o do multivetor, correspondendo ao rotacional do multivetor. Assim, a aplicação do gradiente sobre um bivector produz um ivector e um 3vector, e assim por diante. Esse resultado, juntamente com a construção intrínseca de nossos objetos, permitirá condensarmos os postulados da teoria eletrodinâmica em uma equação: a equação de Maxwell (ver §19).

O operador gradiente na álgebra de Pauli, indicado por ∇ , e denominado gradiente espacial, é definido como abaixo:

$$6) \quad \nabla = \sigma_j \partial_j$$

Definimos agora o operador gradiente em M , indicado por um quadradinho (\square), referido explicitamente como o gradiente no espaço-tempo para não haver perigo de confusão com o gradiente espacial (∇). O gradiente no espaço-tempo é dado por:

$$7) \quad \square = \hat{e}^\mu \partial_\mu$$

Devemos violar a convenção anterior sobre a projeção de vetores de M em P , e devemos projetar o operador gradiente do espaço-tempo em P como:

$$8) \quad \square \hat{e}_0 \longrightarrow \partial_0 - \nabla; \quad \text{ou} \quad \hat{e}_0 \square \longrightarrow \partial_0 + \nabla$$

onde ∂_0 é o operador de derivação na direção temporal. Isso deve ser feito a fim de que nossos operadores de derivação nas direções espaciais na forma covariante sejam os mesmos em M e em P .

Observamos que a projeção acima definida do operador gradiente do espaço-tempo está relacionada a métrica adotada em M (métrica de Lorentz), que tem como consequência que os versores da base recíproca não são iguais aos versores da base original em M , enquanto que em P eles são os mesmos versores, isto é, temos que:

$$9) \quad \sigma^K = \sigma_k ; \text{ enquanto que em } M: \quad \hat{e}^K = - \hat{e}_k$$

é de interesse o cálculo de algumas expressões, e abaixo fazemos uma amostragem das que mais nos interessam. Iniciamos citando que o gradiente do produto de uma função escalar por um número de Clifford qualquer é desenvolvido pela regra de Leibniz, e resulta em:

$$10) \quad D(fA) = f(DA) + (Df)A$$

A expressão acima, para o caso em que A é um vetor, condensa na álgebra de Pauli os resultados obtidos do cálculo vetorial para a divergência e o rotacional, isto é:

$$11a) \quad \nabla \cdot (fa) = f(\nabla \cdot a) + (\nabla f) \cdot a$$

$$11b) \quad \nabla \wedge (fa) = f(\nabla \wedge a) + (\nabla f) \wedge a$$

onde a é uma função vetorial, e f uma função escalar.

Citamos agora que o rotacional do gradiente de uma função escalar é nula, isto é:

$$12) \quad D \wedge D(f) = 0$$

A prova é simples e ilustra algumas regras bem gerais para o manuseio de índices. Explícitando cada termo na expressão acima, temos que:

$$D \wedge D(f) = (\hat{e}^j \partial_j) \wedge (\hat{e}^k \partial_k (f)) = \partial_{jk}(f) \hat{e}^{jk}$$

onde $\partial_{jk} = d/dx^j \{d/dx^k(\dots)\}$

Notamos que as derivadas ∂_j e ∂_k comutam pois supomos que os campos são tantas vezes diferenciáveis quanto necessário. Agora, um fator simétrico bidimensional (ou seja, dois índices), $\partial_{jk}(f)$, "contraído" com um fator antisimétrico, \hat{e}^{jk} , é nulo. Para provar esse resultado procedemos como segue. Iniciamos trocando os índices mudos:

$$\partial_{jk}(f) \hat{e}^{jk} = \partial_{kj}(f) \hat{e}^{kj}$$

Agora, como as derivadas comutam, isto é, $\partial_{jk} = \partial_{kj}$, o termo da direita fica:

$$\partial_{kj}(f) \hat{e}^{kj} = \partial_{jk}(f) \hat{e}^{kj} = - \partial_{jk}(f) \hat{e}^{jk}$$

onde a última passagem é possível devido a anticomutatividade do produto exterior entre dois vetores. Mas, a última expressão é o negativo da expressão original, de modo que a única alternativa é que ela seja nula, como queríamos demonstrar.

O resultado acima é facilmente generalizado. O rotacional duplo (ou seja, o rotacional do rotacional) de qualquer número é nulo:

$$(13) \quad D \wedge D \wedge (\dots) = 0$$

Igualmente ao rotacional, podemos mostrar que o divergente do divergente de qualquer número da álgebra é também nulo:

$$(14) \quad D \cdot (D \cdot (\dots)) = 0$$

Esses resultados são de natureza algébrica, ilustrando o caráter vetorial do operador gradiente, sendo conseqüências de resultados análogos para vetores quaisquer (ver eq 13, 53).

Notamos que o operador diferencial gradiente ao quadrado é um escalar. Esse resultado segue diretamente do resultado análogo para vetores, e da independência entre as operações algébricas e as operações de diferenciação, esta última conseqüência da restrição deste trabalho ao estudo de bases cujos versores têm diferencial nula. Assim, temos que:

$$(15) \quad D^2 (\dots) = \partial_j \partial_i (\dots) \hat{e}^j \cdot \hat{e}^i = G^{ij} \partial_{ji} (\dots)$$

Agora, relacionamos o operador gradiente no espaço-tempo ao quadrado (\square^2) reconhecido como o D'Alembertiano (o operador da

equação de onda), com o operador gradiente espacial ao quadrado (∇^2) reconhecido como o laplaciano. O operador gradiente ao quadrado é um escalar, e assim a projeção do D'Ambertiano em P é dada por:

$$16) \quad \square^2 = \partial_0^2 - \nabla^2$$

O resultado de operar com o gradiente ao quadrado pode também ser desenvolvido através da expansão do produto de Clifford. Efetuamos abaixo o desenvolvimento quando operamos sobre multivetores de baixa graduação. Sobre ivetores temos que:

$$17) \quad D^2(v) = DD(v) = D(D.v + D^{\wedge}v) = D(D.v) + D.(D^{\wedge}v)$$

cujos termos são todos ivetores, o que evidencia o caráter escalar do gradiente ao quadrado. Para tornar mais claro a compreensão dos termos, escrevemos os termos acima em componentes:

$$18) \quad D(D.v) = \partial_{j i} (v^i) \hat{e}^j$$

$$19) \quad D.(D^{\wedge}v) = G^{i j} \partial_{i j} (v^k) \hat{e}_k - \partial_{k j} (v^k) \hat{e}^j$$

Claramente a soma dos termos conduz à expressão anterior na forma explícita por componentes para o gradiente ao quadrado.

A expansão anterior para o caso particular do laplaciano (gradiente ao quadrado na álgebra de Pauli), resulta na seguinte fórmula, bem conhecida do cálculo vetorial:

$$20) \quad \nabla \times \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla^2(v)$$

Os operadores diferenciais também estão sujeitos as operações de inversão e reversão. Por conveniência, o reverso do gradiente é um operador diferencial que deve atuar sobre o objeto à sua esquerda, devendo por isso ser mantido o sinal de reversão. Assim, a representação do reverso do gradiente aplicado a um vetor qualquer é indicado por:

$$21) \quad (Dv)^{\dagger} = vD^{\dagger} = \partial_j (v^k) \hat{e}_k \hat{e}^j$$

§16. HOLOMORFIA

Nosso objetivo nesse parágrafo é fornecer uma interpretação para os postulados básicos da Eletrodinâmica, ou seja, as equações de Maxwell. É bem conhecido que as equações da eletrostática livre de fontes no plano euclidiano são equivalentes as condições de Cauchy-Riemann. Vamos mostrar como podemos generalizar tais relações a partir de uma definição conveniente de Holomorfia.

O estudo de holomorfia nos complexos apresenta um rica cadeia de relações extremamente útil nos cálculos: se uma função é holomorfa, então vale que:

- 1) suas derivadas de todas as ordens existem;
- 2) sua integral de linha sobre um contorno fechado é nulo;
- 3) sua expansão em série de Taylor existe;
- 4) suas componentes são funções harmônicas.

A abordagem de holomorfia em outras álgebras, como os quaternions, tem sido feita por algumas dessas condições, e as generalizações tem se deparado com várias dificuldades.

Vamos dar aqui uma definição técnica, tida como uma generalização das condições de Cauchy-Riemann. Abordamos somente campos descritos no parágrafo anterior, isto é, campos sobre as variedades relacionadas ao espaço de base, que assumem valores na álgebra de Clifford. Também, nossa atenção deve estar concentrada em campos que tenham graduação definida, denominados campos multivetoriais.

Definição: um campo multivetorial é holomorfo se seu gradiente é nulo, isto é, seja A_r um campo r -vetorial, então se:

$$1) \quad DA_r = 0, \quad A_r \text{ é dito holomorfo.}$$

Da definição acima segue diretamente que se um campo multivetorial é holomorfo, então suas funções coordenadas são harmônicas, pois aplicando novamente o gradiente, temos que:

$$2) \quad D^2 A_r = 0$$

Este resultado já nos mostra que a definição anterior é um tanto razoável. Para dar maior credibilidade a mesma, estudamos campos multivetoriais em particulares álgebras. Nossa primeira tarefa é obter os resultados para os complexos. Para isso, considere um campo vetorial no plano euclidiano, isto é:

$$3) \quad A(x, y) = A_1(x, y)\hat{e}_1 + A_2(x, y)\hat{e}_2$$

A condição de holomorfia leva a duas equações correspondente ao divergente e ao rotacional, que são dadas explicitamente por:

$$4a) \quad D \cdot A = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 = 0 ; \text{ ou também: } \partial_1 A_1 = -\partial_2 A_2$$

$$4b) \quad D \wedge A = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0 ; \text{ ou também: } \partial_1 A_2 = \partial_2 A_1$$

As condições acima para as componentes do campo vetorial A são equivalentes as condições de Cauchy-Riemann.

Agora, considere um campo vetorial no espaço euclidiano. A condição de holomorfia leva as equações da eletrostática livre de fontes, isto é:

$$5) \quad D \cdot E = 0 ; \text{ e também: } D \wedge E = 0$$

Por fim, estudamos a condição de holomorfia para campos multivetoriais no espaço-tempo de Minkowski.

Observamos inicialmente que a condição de holomorfia para campos vetoriais em M é equivalente a determinação do potencial do campo eletromagnético no calibre de Lorentz quando o campo eletromagnético é nulo (eq 9, §21).

No caso de um campo bivetorial, a condição de holomorfia é exatamente a equação de Maxwell para campos livres (ver eq 1, 519).

Não vamos desenvolver mais a teoria de holomorfia, mas o leitor pode inquirir a respeito das condições 1 à 4, que são equivalentes no caso dos complexos. Também, um resultado de extrema importância seria a extensão do teorema de resíduos para campos singulares. Para tanto precisaríamos da formulação integral, que não trataremos neste trabalho.

CAPÍTULO V: ELETRODINÂMICA

Nossos objetivos neste capítulo são os seguintes: i) apresentar uma formulação intrínseca na álgebra do espaço-tempo M , ou seja, uma formulação covariante que seja intrínseca e permita cálculos simples e diretos; ii) explicitar os resultados finais em coordenadas, cobrindo assim, a representação tensorial explícita; iii) realizar a projeção dos resultados básicos na álgebra de Pauli, tida como a escolha de um particular referencial inercial na descrição relativística, o que nos permite transpor os resultados obtidos em M de uma forma simples e natural para a linguagem vetorial, explicitando claramente as diferenças entre as formulações relativística e a formulação original de Maxwell, baseada no espaço-tempo de Newton.

Acreditamos que um dos grandes méritos da linguagem aqui apresentada reside no fato de que ela é uma linguagem intrínseca; condensando as informações em poucas frases, e dispõem de processos lógicos razoavelmente simples para deduzir outras relações. A formulação tensorial explícita por componentes, como encontrada em [Ja] e [LL], é minuciosa e complexa. O uso explícito das coordenadas resulta num rebuscamento das expressões finais quase imemoriável, proveniente da grande quantidade de índices que podem ocorrer nos cálculos (o leitor pode comparar por exemplo, a forma intrínseca do tensor energia-momento-tensão do campo (eq 9, 522), com a forma explícita por coordenadas (eq 22, 522)). Esperamos que no decorrer da exposição fique visível a economia oferecida pelo cálculo

geométrico, tanto na forma final das expressões quanto nos processos dedutivos.

Além da formulação intrínseca basicamente outro resultado merece destaque: a obtenção das leis de conservação diretamente da equação de Maxwell, o que nos permite obter as equações de movimento para as partículas elétricas sem necessidade de recorrer a outras teorias, como o formalismo lagrangeano (ver [Waldyr]).

§17. ELEMENTOS BÁSICOS

Iniciamos introduzindo os campos elétrico (E) e magnético (B). Trabalharemos com a forma usual dos campos E e B em P , ou seja, eles são vetores, de acordo com as seguintes expressões:

$$1) \quad E = E_j \sigma_j ; \quad B = B_j \sigma_j$$

Assim, os campos E e B devem ser representados em M por bivetores tipo-tempo, e são expressos explicitamente como:

$$2) \quad E = E^{j0} \hat{e}_{j0} ; \quad B = B^{j0} \hat{e}_{j0}$$

Também, adotamos a convenção do §10, capítulo II, segundo a qual os objetos de P são escritos em negritos.

Introduzimos agora o bivetor de campo eletromagnético, indicado por F , cujo bivetor componente tipo-tempo é o bivetor campo elétrico, (E), e cujo bivetor componentes tipo-espaco é o dual em M do bivetor campo magnético, B . Assim, escrevemos:

$$3) \quad F = E + \hat{e}_5 B$$

Explicitamente, as componentes de F na forma contravariante são dadas por:

$$4) \quad F^{k0} = E^{k0} ; \quad F^{jk} = \epsilon^{0ijk} B_{i0}$$

À projeção do bivector de campo F em P é direta:

$$5) \quad F = E + e_5 B \quad \text{--->} \quad E + iB$$

Não devemos confundir a escrita, e usaremos a letra i para indicar que estamos trabalhando em P , e quando usarmos o símbolo \hat{e}_5 deve estar subentendido que estamos trabalhando em M .

Vamos preferir trabalhar diretamente em M com o bivector F ao invés de trabalhar com os campos E e B . A conveniência em tal preferência deve ser visível nos parágrafos subseqüente.

Dois objetos construídos diretamente a partir do bivector de campo serão de grande utilidade: o dual de F pela unidade pseudoescalar, e o conjugado espacial de F . O dual do bivector de campo F é indicado por D e expresso como:

$$6) \quad D = \hat{e}_5 F = -B + \hat{e}_5 E$$

Explicitamente as componentes do bivector D são dadas por:

$$7) \quad D^{\mu\nu} = 1/2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa}$$

onde utilizamos os resultados do §10, capt II, para o produto de \hat{e}_5 por bivectores, eq 20.

O conjugado espacial de F é indicado por F^* , e é dado por:

$$8) \quad F^* = e_0 F e_0 = -E + \hat{e}_5 B$$

Os campos elétrico e magnético podem ser obtidos através da combinação de F com F^* como mostrado abaixo:

$$9) \quad E = 1/2(F - F^*) \quad B = (-1/2) \hat{e}_5(F + F^*)$$

A representação acima para os campos E e B é também válida na álgebra de Pauli, simplesmente devemos trocar \hat{e}_5 por i .

Introduzimos agora o vetor densidade de corrente (ou corrente simplesmente) indicado por J , em M :

$$10) \quad J = J^\mu \hat{e}_\mu, \text{ enquanto que em } P: J \hat{e}_0 \text{ --->} \mathcal{J} + J$$

A componente temporal do vetor corrente em M (parte escalar em P) é simplesmente a densidade de carga (ρ), enquanto que as componentes espaciais (parte vetor em P) representam a densidade de corrente vetorial. O método de projeção de M em P relaciona diretamente as coordenadas contravariantes da parte espacial de um vetor em M com as coordenadas contravariantes da parte vetor da projeção do vetor de M em P .

§18. INVARIANTES DO CAMPO ELETROMAGNETICO

Como vimos no capítulo III, os operadores de rotação pertencem a subálgebra par, e assim, os invariantes em R_n são os elementos que comutam com todo elemento da subálgebra par. Na álgebra do espaço-tempo de Minkowski, os escalares e os pseudoescalares comutam com todo elemento da subálgebra, sendo assim os invariantes naturais em relação a transformações de Lorentz.

Para fabricarmos escalares e pseudoescalares a partir do bivector de campo sómente, é uma tarefa fácil através da álgebra que estamos trabalhando (em [Sa¹] se discute a existência de outros invariantes, mas os invariantes ali obtidos envolvem diretamente o potencial, além do bivector de campo). Notamos que das equações 22a e 22b, §4, o quadrado de qualquer bivector tem sómente componentes escalar e pseudoescalar. Assim, temos que os invariantes do campo eletromagnético são dados por:

$$1) \quad F^2 = \langle F^2 \rangle + \langle F^2 \rangle_4 = F \cdot F + F \wedge F$$

Explícitamente por coordenadas os invariantes são dados por:

$$2a) \quad F \cdot F = 1/4 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \hat{e}^{\mu\nu} \cdot \hat{e}^{\mu\nu} = - 1/2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$2b) \quad F \wedge F = - 1/4 F^{\mu\nu} F^{\alpha\lambda} \epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} \hat{e}_5$$

onde na última igualdade usamos a eq ~~17~~, §10. Lembrando a definição do dual do campo eletromagnético, eq 7, § anterior, podemos escrever a última equação como:

$$F \wedge F = 1/2 F^{\mu\nu} D_{\mu\nu} \hat{e}_5$$

Desprezando fatores escalares numéricos e a unidade pseudoescalar, os invariantes do campo são explicitamente dados por:

$$3a) \quad F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}; \quad \text{e também:} \quad (3b) \quad F^{\mu\nu} D_{\mu\nu}$$

Os invariantes do campo eletromagnético assumem uma forma mais significativa quando expressos em termos dos campos elétrico e magnético. Isso pode ser facilmente efetuado através da representação do bivector de campo em termo dos campos E e B (eq 3, § anterior):

$$4) \quad F^2 = (E + \hat{e}_5 B)^2 = E^2 - B^2 + \hat{e}_5 (EB + BE)$$

e portanto os invariantes são dados por:

$$5a) \quad E^2 - B^2; \quad (5b) \quad E \cdot B$$

Observe que as relações acima são válidas tanto na álgebra do espaço-tempo, M, quanto na álgebra do espaço P.

As eqs 5a e 5b tem uma interpretação direta: a eq 5a nos diz que se os campos E e B tem intensidades iguais (ou seja, a diferença do módulo dos dois é nula) em relação a algum observador, então eles tem intensidades iguais, em relação a qualquer outro observador inercial. Por outro lado, a eq 5b nos diz que se os campos são perpendiculares entre si em algum referencial, então eles são perpendiculares em qualquer outro referencial inercial.

Vamos agora mostrar um resultado interessante: os máximos e mínimos do campo eletromagnético são Lorentz-invariantes. Sempre podemos expressar o campo eletromagnético como:

$$6) \quad F = f \exp(\hat{e}_5 \phi)$$

onde f é o campo de amplitude, e ϕ é reconhecido como a fase do campo eletromagnético. Tal interpretação será referendada quando estudarmos ondas planas (520). O campo de amplitude é descrito por dois bivectores ortogonais, dado abaixo:

$$7) \quad f = E_a + \hat{e}_5 B_a ; \text{ onde consideramos que: } E_a \cdot B_a = 0$$

A exponencial tem a forma trigonométrica usual. A descrição acima do campo eletromagnético se relaciona de maneira simples com a forma anteriormente dada ($F = E + \hat{e}_5 B$).

Os quadrado do bivector de campo é agora dado por:

$$8) \quad F^2 = f^2 \exp(2\hat{e}_5 \phi)$$

desde que f comuta com a exponencial, pois é um bivector.

A expressão acima é significativa: os invariantes do campo são representados por f e ϕ , e seguindo a interpretação dada anteriormente para ϕ , temos que a fase do campo deve ser um invariant. Como os máximos e mínimos do campo eletromagnético dependem somente da fase do campo eletromagnético, eles são portanto invariantes em relação a qualquer referencial inercial, apesar das intensidades serem relativas.

519. EQUAÇÕES DE MAXWELL

Vamos agora formular as leis da eletrodinâmica. O postulado básico para nosso trabalho são as equações de Maxwell, que relacionam os campos e as fontes. Trabalhamos apenas com a forma diferencial das equações.

Vale aqui fazer um comentário sobre a simplicidade fornecida pelo desenvolvimento algébrico ocorrido desde a formulação da eletrodinâmica por Maxwell; a formulação original de Maxwell, que empregava coordenadas, consistia num conjunto de oito equações escalares. Com a introdução do cálculo vetorial por Gibbs, as equações de Maxwell passaram a ser representadas por quatro equações: duas correspondentes ao rotacional e duas correspondentes ao divergente dos campos E e B . Na formulação tensorial, e também na formulação da álgebra exterior (ou formas diferenciais), as equações de Maxwell são representadas por duas equações: uma para a divergência do tensor de campo, e uma para a divergência do dual do tensor de campo. O formalismo da álgebra de Clifford permite condensarmos a representação das equações mais ainda: na representação em M condensaremos as equações de Maxwell em uma equação. A equação de Maxwell em M é expressa dizendo que o gradiente do bivetor de campo F é igual ao vetor corrente J , isto é:

$$1) \quad \square F = J$$

Podemos equacionar separadamente a divergência e o rotacional do campo. Desde que a corrente é um vetor, devemos ter:

$$2) \quad \square \cdot F = J ; \text{ enquanto que: } \square \wedge F = 0$$

A representação das equações acima em componentes é similar a representação do cálculo tensorial. O cálculo explícito é direto. A equação do divergente resulta em:

$$3) \quad \square \cdot F = \partial_\mu F^{\mu\nu} \hat{e}_\nu = J^\nu \hat{e}_\nu, \text{ e portanto: } \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

A equação para o rotacional do bivector de campo tem a seguinte expressão:

$$4) \quad \square \wedge F = 1/2 \partial^\lambda F^{\mu\nu} \hat{e}_{\lambda\mu\nu} = 0$$

Apesar de termos vinte e quatro possibilidades (arranjo de quatro possíveis índices, tres a tres), sómente quatro desses arranjos geram trivectores linearmente independentes. Desde que cada componente segundo um trivector da base de M^3 deve se anular separadamente, devemos ter:

$$5) \quad \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Na última equação as alternativas para os índices são (0,1,2), (0,1,3), (0,2,3) e (1,2,3). Qualquer alteração nas ordens dos índices produz a mesma equação, a menos do sinal.

Podemos também escrever a equação para o dual de F. Para isso multiplicamos a equação de Maxwell por \hat{e}_5 , isto é:

$$6) \quad \hat{e}_5 \square F = \hat{e}_5 J; \text{ ou melhor: } \square D = - \hat{e}_5 J$$

pois \hat{e}_5 é constante e anticomuta com vetores. Igualando separadamente multivetores de mesma graduação na equação para D, temos que:

$$7) \quad \square \cdot D = 0; \text{ enquanto que: } \square \wedge D = - \hat{e}_5 J$$

A equação para a divergência do dual (equação homogênea) corresponde a equação para o rotacional do bivector de campo, enquanto que a equação para o rotacional do dual corresponde a equação para a divergência do bivector de campo. Devido a simplicidade em explicitar o divergente, é usual na representação por coordenadas adotar o par de equações dado abaixo:

$$8) \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = J \quad \partial_\mu D^{\mu\nu} = 0$$

como representando as equações de Maxwell.

Vamos agora encontrar a representação da equação de Maxwell em termos dos campos E e B na álgebra de Pauli. Como ela é uma equação em multivetores de graduação ímpar, multiplicamos a equação por \hat{e}_0 :

$$9) \quad \hat{e}_0 \partial F = \hat{e}_0 J$$

A projeção da equação acima em P é dada por:

$$10) \quad (\partial_0 + \nabla)(E + iB) = \rho - J$$

Desenvolvendo o produto do membro direito encontramos que:

$$11) \quad \partial_0 E + \nabla E + i\nabla B + i\partial_0 B = \rho - J$$

Expandindo o produto de Clifford, encontramos que:

$$12) \quad \partial_0 E + \nabla \cdot E + \nabla \wedge E + i(\nabla \cdot B) + i(\nabla \wedge B) + i\partial_0 B = \rho - J$$

Equacionando separadamente multivetores de mesma graduação na equação acima, obtemos que:

$$13a) \quad \nabla \cdot E = \rho \quad \text{(parte escalar)}$$

$$13b) \quad \partial_0 E + i(\nabla \wedge B) = -J \quad \text{(parte vetor)}$$

$$13c) \quad \nabla \wedge E + i\partial_0 B = 0 \quad \text{(parte bivector)}$$

$$13d) \quad i(\nabla \cdot B) = 0 \quad \text{(parte trivector)}$$

que são as equações de Maxwell na forma vetorial usual, após relacionarmos o produto exterior com o vetorial, $a \times b = -i(a \wedge b)$.

As duas equações homogêneas (a bivector e a trivector, resultantes da projeção de um trivector em M) quando expressas em componentes resultam ser as mesmas equações que as do rotacional do bivector de campo em M, e as equações não homogêneas (a escalar e a vetor, resultantes da projeção de um vetor em M) são equivalentes a equação do divergente do bivector de campo em M.

As equações acima são muito conhecidas para merecerem algum comentário especial, mas vamos identifica-las: a equação escalar para o divergente do campo elétrico (E) é reconhecida como a lei de Gauss; a equação (pseudoescalar, ou escalar) para o divergente do campo magnético (B) expressa a não existência de monopolos magnéticos; a equação em bivector para o rotacional do campo elétrico é a lei de indução de Faraday; e finalmente a equação vetorial para o rotacional do campo magnético é denominada lei de Ampere/Maxwell.

A equação de Maxwell é a lei básica da qual derivam outras relações importantes do eletromagnetismo. Prosseguimos no desenvolvimento da teoria trabalhando diretamente com a equação de Maxwell. Segue diretamente dela que o vetor corrente em M é conservado, pois sua divergência é nula. Para obtermos esse resultado aplicamos o operador gradiente a equação de Maxwell, e assim obtemos:

$$14) \quad \square^2 F = \square J = \square \cdot J + \square \wedge J$$

Lembrando que o D'Alambertiano (\square^2) é um escalar, e desde que F é um bivector, devemos ter:

$$15) \quad \square^2 F = \square \wedge J \quad \text{enquanto que:} \quad \square \cdot J = 0$$

A lei de conservação para J é a equação de continuidade para a corrente, que é uma equação escalar, dada por

$$16) \quad \nabla \cdot J + \partial_0 \rho = 0$$

Por outro lado, a outra equação relacionando o D'Alambertiano de F com o rotacional de J, permite o desenvolvimento dos campos em multipolos, desde que as componentes de F satisfazem a equação de onda. A representação em P da equação é mais facilmente obtida quando projetamos a equação original em P, isto é:

$$17a) \quad \square^2 F \longrightarrow \square^2 E + I \square^2 B ; \quad \text{enquanto que:}$$

$$17b) \quad \square J = \square \hat{e}_0 \hat{e}_0 J \longrightarrow (\partial_0 - \nabla)(\rho - J)$$

O desenvolvimento do produto no membro da direita envolvendo o gradiente da corrente mostra que a projeção em P da equação $\square^2 F = \square J$ tem tres componentes de diferentes graduações. A parte escalar é simplesmente a equação de continuidade (eq 16), as outras componentes são as equações de onda para os campos E e B, dadas por:

$$18a) \quad \square^2 E = - \nabla \varphi - \partial_0 J \quad (\text{parte vetor})$$

$$18b) \quad I(\square^2 B) = \nabla \wedge J \quad (\text{parte bivector})$$

520. ONDAS PLANAS

Vamos agora estudar um exemplo específico entre tantos tópicos interessantes da eletrodinâmica: o modelo de ondas planas para campos livres. O modelo de ondas planas para o campo eletromagnético no vácuo apresenta resultados bem conhecidos: os campos E e B são transversais a direção de propagação, e ortogonais entre si.

A equação de Maxwell em regiões livres de fontes de correntes reduz-se à:

$$1) \quad \square F = 0$$

Considere a solução de ondas planas para o campo, dada por:

$$2) \quad F = f \exp(\hat{e}_5(K \cdot x)) = f(\cos(K \cdot x) + e_5 \sin(K \cdot x))$$

onde x é o vetor posição em M, K é um vetor constante descrevendo o modo de propagação da onda eletromagnética e f é um bivector constante (f descreve a amplitude do campo). Os representantes em P de K e de f são dados por:

$$3) \quad K \hat{e}_0 \text{ ---} \rangle \omega + K ; \quad f \hat{e}_0 \text{ ---} \rangle e + ib$$

Quando substituímos a solução de onda planas na equação de Maxwell, encontramos que:

$$4) \quad \square F = \hat{e}_\mu f \partial_\mu (\exp i \hat{e}_\nu (K \cdot x)) = K F = 0 ; \quad \text{ou também: } K f = 0$$

Assim, projetando o resultado acima em P, devemos ter:

$$5) \quad K f = 0 \quad \text{--->} \quad w(e + ib) = K(e + ib)$$

Assim, igualando separadamente multivetores de mesma graduação obtemos as relações abaixo:

$$6a) \quad K \cdot e = 0 \quad (\text{escalar})$$

$$6b) \quad w e = i(K \wedge b) \quad (\text{vetor})$$

$$6c) \quad i w b = K \wedge e \quad (\text{bivetor})$$

$$6d) \quad i(K \cdot b) = 0 \quad (\text{pseudoescalar})$$

As partes escalar e pseudoescalar mostram que os campos e & b são transversos a direção de propagação da onda, dada pelo vetor (em P) K . Quando efetuamos o produto exterior da parte bivetor com e , vemos que os campos e & b são ortogonais entre si. Por fim, a parte ivetor mostra como obter um campo a partir do outro, o que reduz o estudo de ondas planas a determinação de apenas um campo.

A equação 5 também equivale as equações abaixo:

$$7) \quad w e = i K b ; \quad w b = -i K e$$

A multiplicação da primeira por e , e da segunda por b , todas à direita, seguida da subtração das duas equações, juntamente com o resultado obtido anteriormente que $e \cdot b = 0$ (do que decorre que $eb = -be$), nos leva a concluir que:

$$8) \quad e^2 = b^2$$

Também, obtemos informações sobre a polarização manipulando a equação 5 decorrente do modelo de ondas planas, isto é:

$$9) \quad w(e + ib) = K(e + ib) \quad \text{ou} \quad w f = K f$$

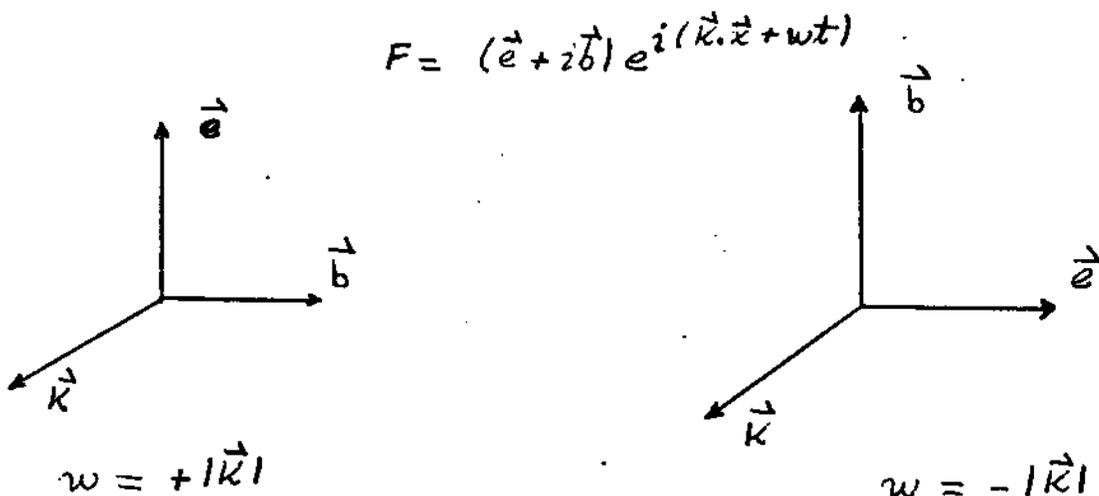
Multiplicando por $w + K$ pela esquerda, obtemos que:

$$10) \quad w^2 f = K^2 f$$

Assim, temos que:

$$ii) \quad \omega = \pm |\mathbf{K}|$$

O sinal corresponde à polarizações circulares esquerda (+) ou direita (-), isto é, se $\omega = +|\mathbf{K}|$ então os vetores \mathbf{K} , \mathbf{b} , \mathbf{e} , nesta ordem, formam um sistema de coordenadas mão direita, ou seja, conforme a onda evolue, o campo \mathbf{b} roda na direção do campo \mathbf{e} (no sentido anti-horário). Se $\omega = -|\mathbf{K}|$, então \mathbf{K} , \mathbf{e} , \mathbf{b} , nesta ordem, formam um sistema de coordenadas mão direita, e nesse caso o campo \mathbf{e} roda na direção do campo \mathbf{b} . A figura abaixo ilustra as alternativas $\omega = \pm |\mathbf{K}|$.



Observamos que a álgebra de Clifford além de introduzir a unidade pseudoescalar (a unidade imaginária nos tratados usuais de eletrodinâmica) de uma forma mais natural na formulação, acrescenta também uma nova interpretação para a polarização circular. A multiplicação dos campos de amplitude, \mathbf{e} & \mathbf{b} , por $\exp \hat{e}_5(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x})$ é uma operação de dualidade, que transforma vetores em bivectores e vice-versa.

§21. POTENCIAIS

Vamos agora desenvolver a teoria de potenciais para o campo eletromagnético, a qual permite formulações simples da equação de Maxwell em termos do potencial.

A característica da equação de Maxwell quando trabalhada na álgebra de Minkowski é que ela expressa diretamente que o rotacional do bivector de campo é nulo. Desde que o rotacional duplo de qualquer vetor é nulo, o bivector de campo pode ser expresso como o rotacional de um vetor, que será denominado potencial vetor, e será indicado por A . A expressão do campo como o rotacional de um vetor também se adequa a exigência de que o campo seja um bivector. Assim, podemos escrever: (1) $F = \square \wedge A$.

A equação satisfeita pelo potencial vetor é dada por:

$$2) \quad \square F = \square(\square \wedge A) = J$$

A equação para o potencial pode ser expressa alternativamente como:

$$3) \quad \square(\square \wedge A) = \square^2 A - \square(\square \cdot A) = J$$

O potencial vetor em M é representado como:

$$4) \quad A = A^\mu \hat{e}_\mu, \quad \text{e em } P \text{ como: } A \hat{e}_0 \longrightarrow \phi + A$$

A componente temporal do vetor potencial em M é o potencial escalar em P (ϕ), enquanto que as componentes espaciais formam o potencial vetor em P (A).

A formulação da equação de Maxwell em termos dos potenciais é muito importante pela liberdade que o tratamento oferece. Observamos que se o potencial é alterado pela adição do gradiente de uma

função escalar então, o campo permanece inalterado, desde que como mostrado no §15, capítulo IV, o rotacional do gradiente de qualquer função escalar é nulo. Tal transformação é dita uma transformação de calibre, e é escrita como:

$$5a) \quad A' = A + \nabla X, \text{ onde } X \text{ é a função de calibre.}$$

Projetando a equação acima na álgebra de Pauli, temos que:

$$5b) \quad A'_0 \hat{e}_0 \rightarrow \phi' + A' = (\phi + \partial_0 X) + (A - \nabla X)$$

Explorando a liberdade oferecida na construção dos potenciais, através das transformações de calibre, podemos simplificar as equações obedecidas pelos potenciais. Temos duas formas importantes da equação de Maxwell: a satisfeita pelos potenciais do calibre de Lorentz, e a satisfeita pelos potenciais do calibre de Coulomb. Vamos aqui desenvolver tais equações e observar as exigências sobre os potenciais a fim de que eles satisfaçam as mesmas.

A equação satisfeita pelos potenciais do calibre de Lorentz é simplesmente a equação de onda desacoplada para cada componente do potencial, tendo a correspondente componente do vetor corrente como termo fonte. Tal equação é sempre obtida quando a divergência do potencial em M é nula (condição de Lorentz), isto é:

$$6) \quad \text{se } \nabla \cdot A = 0, \text{ então } A \text{ pertence ao calibre de Lorentz.}$$

É sempre possível encontrar um potencial que é solução da equação de Maxwell e satisfaça a condição de Lorentz. Para ver isso considere um potencial, A, que seja solução da equação de Maxwell mas não satisfaça a condição de Lorentz. Agora, uma transformação de calibre para um novo potencial A', dada por:

$$7) \quad A' = A + \nabla X; \text{ tal que a função de calibre satisfaça:}$$

8) $\square^2 X = -\square \cdot A$; gera um potencial, A' , que é solução da mesma equação de Maxwell (no sentido que geram o mesmo campo eletromagnético) e que pertence ao calibre de Lorentz.

No calibre de Lorentz, desde que o divergente do potencial é nulo o campo pode ser expresso simplesmente como o gradiente do potencial, isto é:

$$9) \quad F = \square A$$

Assim, pela equação de Maxwell, o potencial satisfaz a equação de onda, dada por:

$$10a) \quad \square^2 A = J, \text{ ou projetando a equação em P temos que:}$$

$$10b) \quad \square^2 \phi + \square^2 A = \rho + J$$

que deve ser convenientemente separada nas partes escalar e vetor (e posteriormente, a parte vetorial escrita por componentes).

Para completar o tratamento do calibre do Lorentz, observamos que as transformações de calibre invariante dentro do calibre de Lorentz, são obtidas requerendo que a função de calibre satisfaça a equação de onda homogênea. Então, se A pertence ao calibre de Lorentz, e:

$$ii) \quad A' = A + \square X, \text{ onde temos que: } \square^2 X = 0$$

então A' e A produzem o mesmo campo e são soluções da mesma equação dentro do calibre de Lorentz.

O calibre de Lorentz é muito utilizado no estudo do comportamento local dos campos, sem referências à fonte. O estudo da ótica e de condução de ondas em meios homogêneos (materiais não magnéticos, dielétricos e condutores), assim como o tratamento (usual) de ondas planas é realizado utilizando-se o calibre de Lorentz.

Vamos agora introduzir o calibre de Coulomb, conhecido também como calibre de radiação ou transversal (longe da fonte de radiação somente os campos transversais a direção de propagação são importantes). Tais denominações alternativas decorrem de que o calibre de Coulomb é muito útil no estudo da radiação. O nome calibre de Coulomb decorre de que a equação satisfeita pela componente temporal do potencial resulta ser uma equação análoga a equação usada na eletrostática (a dependência temporal estando embutida na densidade de carga).

A condição satisfeita pelos potenciais do calibre de Coulomb é melhor expressa em P: o divergente espacial do vetor potencial (em P) é nulo, isto é, temos que:

$$(12) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 ; \quad \text{ou de outro modo:} \quad \square \cdot \mathbf{A}' = \partial_0 \phi$$

Sempre podemos encontrar uma solução da equação de Maxwell dentro do calibre de Coulomb. Para isso, considere um potencial vetor em P, \mathbf{A} , cujo divergente espacial não é nulo. Então, uma transformação de calibre por uma função de calibre que independa do tempo e satisfaça:

$$(13) \quad \nabla^2 \chi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

gera um potencial solução da mesma equação de Maxwell dentro do calibre de Coulomb.

No calibre de Coulomb o campo continua sendo expresso pelo rotacional do potencial. Equações alternativas satisfeitas pelos potenciais do calibre de Coulomb são obtidas analisando-se a equação de Maxwell para o potencial (eq 3), e obtemos diretamente que:

$$(14) \quad \square^2 \mathbf{A} - \square(\partial_0 \phi) = \mathbf{J} ; \quad \text{desde que:} \quad \square \cdot \mathbf{A} = \partial_0 \phi.$$

Projetando a equação anterior em P, multiplicando-a por \hat{e}_0 à direita, obtemos que:

$$1.5a) \quad \square^2(\phi + A) - (\partial_0 - \nabla)(\partial_0\phi) = \rho + J$$

Igualando separadamente multivetores de mesma graduação na equação acima, encontramos que:

$$1.5b) \quad \nabla^2\phi = -\rho; \text{ enquanto que: } \square^2 A = J - \partial_0(\nabla\phi)$$

O calibre de Coulomb é muito utilizado no estudo da radiação causadas por fontes com características bem específicas. O estudo da radiação longe das fontes é baseado nas componentes espaciais, as quais cumprem as características dos campos de radiação de cair sómente com o inverso da distância, o que torna possível sua transmissão entre lugares distantes. Por outro lado, o potencial escalar (em P) decai com o inverso do quadrado da distância, característica dos campos coulombianos da eletrostática, sendo desprezível longe das fontes.

Além da sua utilidade no estudo da radiação, o calibre de Coulomb também é conveniente na formulação lagrangeana de cargas que interagem, desde que o potencial escalar (em P) satisfaz uma equação tipo eletrostática e é por isso denominado potencial instantâneo. Efeitos de retardamento provindos da equação de onda não podem ser enquadrados na formulação lagrangeana como descrevendo partículas interagindo. Assim, na descrição lagrangeana da interação entre elétrons e prótons separados por pequenas distâncias (como ocorre nos átomos), a interação é simplesmente a interação Coulombiana descrita pelo potencial escalar. A interação provinda do potencial vetor (em P) além de não se enquadrar completamente na descrição lagrangeana (há o termo de Darwin obtido por uma expansão do poten-

cial, que descreve uma interação tipo magnetostática, não incorporando efeitos de retardamento, e portanto pode ser enquadrado na formulação lagrangeana), é desprezível no estudo de cargas com baixas velocidades, desde que a interação magnética é da ordem das correções relativísticas. O calibre de Coulomb é também usado em resolução de problemas de magnetostática, em particular em meios magnéticos sem fontes de corrente.

As transformações de calibre que deixam as soluções invariantes dentro do calibre de Coulomb estão sujeitas a restrição de que a função de calibre além de ser independente do tempo cumpra a condição abaixo:

$$16) \quad \nabla^2 \chi = 0$$

Assim, se a função de calibre satisfaz a equação de Laplace a transformação de calibre restrita é uma transformação de invariância dentro do calibre de Coulomb. As transformações de invariâncias nos calibres dizem simplesmente que a solução não é única, a menos da função de calibre restrita as condições específicas de invariâncias impostas pelos calibres particulares a que se referem.

As condições impostas sobre os potenciais e funções de calibre discutidas na análise dos calibres de Lorentz e de Coulomb nos mostram que a formulação do calibre de Lorentz está intrinsecamente relacionado a estrutura do espaço-tempo, enquanto que o calibre de Coulomb está intimamente relacionado a estrutura do espaço.

Apesar de termos desenvolvido os dois calibres devemos observar que as equações obtidas pelo calibre de Lorentz são invariante em relação às transformações de Lorentz, enquanto que às do calibre de Coulomb claramente não são Lorentz-invariante, pois envolvem re-

ferências explícitas a um particular referencial, isto é, a escolha de uma particular direção temporal \hat{e}_0 . Isso significa que a solução no calibre de Coulomb para um dado referencial inercial não é solução para outro referencial que esteja em movimento em relação ao primeiro. Para estudos fora do âmbito relativístico entretanto, isso não deve ser motivo de preocupação, pois o mais importante é que se consiga mostrar que existe uma solução. Também, a condição sobre a função de calibre para que a transformação de calibre seja uma transformação de invariância dentro do calibre de Coulomb não é Lorentz-invariante.

Vamos agora expressar os vetores de campo, E e B , dentro da álgebra de Pauli em termos do potencial. Ressaltamos que as expressões são independente do calibre usado, pois as transformações de calibre deixam o campo invariante, e as particulares soluções dentro de cada calibre são obtidas por transformações de calibre.

Para isso, devemos expressar o rotacional do potencial em M em termos do produto de Clifford, o qual é mais apropriado para projetar em P , devido a propriedade associativa. Então, escrevemos:

$$17) \quad F = \square \wedge A = \square A - \square \cdot A$$

Projetando a equação acima em P , obtemos que:

$$18) \quad E + iB = (\partial_0 - \nabla)(\phi - A) - \partial_0 \phi - \nabla \cdot A$$

Expandindo o produto de Clifford, encontramos que:

$$19) \quad E + iB = -\nabla(\phi) - \partial_0(A) + \nabla \wedge A$$

Assim, igualando separadamente multivetores de mesma graduação na última equação, temos que:

$$19a) \quad E = -\partial_0 A - \nabla \phi$$

$$19b) \quad B = -i(\nabla \wedge A) = \nabla \times A$$

522. LEIS DE CONSERVAÇÃO

Vamos agora desenvolver as leis de conservação da teoria eletrodinâmica. Desde que só fornecemos a formulação diferencial, trabalharemos apenas com densidades, isto é, abordaremos leis de conservação para densidade de energia, densidade de momento, densidade de força, etc... As leis de conservação exprimem relações entre quantidades relacionadas ao campo (energia, momento linear, tensão) e quantidades relacionadas as fontes. Também, é possível deduzir as equações de movimento para cargas pontuais a partir das leis de conservação [Waldyr]

Nosso trabalho é desenvolver uma forma simples e ilustrativa para o "tensor" energia-momento-tensão do campo eletromagnético, assim como para a lei de conservação.

É interessante notar que as leis de conservação aqui obtidas pela álgebra de Clifford decorrem diretamente da equação de Maxwell, sem necessitarmos de qualquer outra equação adicional. Isso contrasta com os resultados usuais, os quais introduzem "ad hoc" outras equações, tipo equações de movimento, além da equação de Maxwell, que possibilitem obter as leis de conservação (força de Lorentz na formulação vetorial, e o formalismo lagrangeano na formulação para campos). De outro modo, a formulação aqui adotada torna "superfluo" o uso do formalismo lagrangeano.

Nosso estudo se desenvolve a partir da equação de Maxwell (eq 1, §19). O reverso daquela equação é dado por:

$$1) \quad F^{\dagger} \Omega^{\dagger} = J^{\dagger}$$

Multiplicando a equação de Maxwell pelo reverso do bivector F , à esquerda, e a equação revertida pelo bivector de campo F pela direita, e adicionando as duas equações assim obtidas, temos que:

$$2) \quad F^\dagger \text{DF} + F^\dagger \text{D}^\dagger F = F^\dagger J + J^\dagger F$$

Desde que $F^\dagger = -F$, o membro da direita é dado por:

$$3) \quad JF - FJ = 2J \cdot F = -2 F \cdot J$$

A expressão acima é reconhecida como o vetor força de Lorentz, indicado por Q , definido em M pelo produto interno do bivector de campo com o vetor corrente, nessa ordem, e é dado por:

$$4) \quad Q = F \cdot J ; \text{ ou por componentes: } Q^\mu = F^{\mu\nu} J_\nu$$

Para relacionarmos as componentes do vetor força de Lorentz com as componentes dos campos elétrico e magnético, é mais direto observar a projeção do vetor força de Lorentz em P :

$$4a) \quad Q \hat{e}_0 = (F \cdot J) \hat{e}_0 \longrightarrow W + Q ; \text{ onde } W = Q^0$$

é conveniente desenvolver o produto interno entre F e J como a parte antisimétrica do produto geométrico, isto é:

$$4b) \quad (F \cdot J) \hat{e}_0 = (1/2) (FJ - JF) \hat{e}_0$$

substituindo $J(\hat{e}_0 \hat{e}_0)F$ para JF , e lembrando que $F^* = \hat{e}_0 F \hat{e}_0$, segue que:

$$4c) \quad (F \cdot J) \hat{e}_0 = (1/2) (F(J\hat{e}_0) - (J\hat{e}_0)F^*)$$

Assim, segue que:

$$5) \quad (F \cdot J) \hat{e}_0 \longrightarrow (1/2) ((E + iB)(\mathcal{S} + J) - (\mathcal{S} + J)(-E + iB))$$

Portanto, devemos ter:

$$6a) \quad W + Q = \mathcal{S}E + 1/2(EJ + JE) + (1/2) i(BJ - JB)$$

ou de outro modo, escrevemos a expressão acima como:

$$6b) \quad W + Q = \mathcal{S}E + E \cdot J - i J \wedge B$$

Assim, em P a parte escalar da força de Lorentz ($W = E \cdot J$) fornece a potência dispendida pelo campo sobre as fontes, enquanto a parte vetor em P ($Q = \mathcal{J}E + J \times B$) é a expressão vetorial para a força de Lorentz.

Retornamos agora a equação encontrada para a lei de conservação (eq 2). A expressão para os termos no membro da esquerda é explicitamente dada por:

$$7) \quad F^\dagger \square F + F^\dagger \square^\dagger F = - F \hat{e}^\mu (\partial_\mu F) - (\partial_\mu F) \hat{e}^\mu F$$

Então, podemos escrever a lei de conservação (eq 2) como:

$$8) \quad \partial_\mu S^\mu = J \cdot F = - Q$$

onde definimos os vetores (S^μ) como:

$$9) \quad S^\mu = 1/2 F^\dagger \hat{e}^\mu F = - 1/2 F \hat{e}^\mu F$$

A prova de que o objeto acima definido é realmente um vetor é feita recorrendo-se as operações de reversão e inversão definidas em M. O reverso de cada S^μ é o próprio S^μ , pois temos que:

$$10) \quad (S^\mu)^\dagger = 1/2 (F^\dagger \hat{e}^\mu F)^\dagger = 1/2 (\hat{e}^\mu F)^\dagger F = \\ = 1/2 F^\dagger \hat{e}^\mu F = S^\mu$$

Por outro lado, o conjugado no espaço tempo (lembramos que inversão em M é indicada por ε) de S^μ é dado por:

$$11) \quad S^{\mu\varepsilon} = - 1/2 (F \hat{e}^\mu F)^\varepsilon = - 1/2 F^\varepsilon \hat{e}^\mu \varepsilon F^\varepsilon$$

e desde que: $F^\varepsilon = F$, e também: $\hat{e}^{\mu\varepsilon} = - \hat{e}^\mu$

segue que: $S^{\mu\varepsilon} = - S^\mu$

O único elemento da álgebra de Minkowski que satisfaz simultaneamente as condições acima, isto é:

$$12) \quad S^\dagger = S ; \text{ e também: } S^\varepsilon = - S ;$$

é um vetor, e portanto a prova está terminada.

Antes de trabalharmos a expressão explícita para os vetores S^μ , vamos colocar a equação anteriormente obtida para a lei de conservação (eq 8) em uma forma mais conveniente, explorando as propriedades da álgebra de Clifford. As coordenadas contravariantes de cada vetor S^μ são obtidas efetuando-se o produto interno entre o vetor S^μ e o versor da base recíproca desejado, isto é:

$$13) \quad (S^\mu)^\nu = S^\mu \cdot \hat{e}^\nu$$

Vamos agora mostrar que as coordenadas são simétricas, isto é:

$$14) \quad S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$$

Para isto observamos que a expressão anterior (eq 13) para as coordenadas $S^{\mu\nu}$ pode ser vista como a componente escalar do produto geométrico entre S^μ e \hat{e}^ν , isto é:

$$15) \quad S^{\mu\nu} = -1/2 \langle \hat{e}^\mu \hat{e}^\nu \rangle$$

Como a componente escalar do produto entre dois números é simétrica em relação a comutação dos números, obtemos que:

$$16) \quad \langle (\hat{e}^\mu)(\hat{e}^\nu) \rangle = \langle (\hat{e}^\nu)(\hat{e}^\mu) \rangle \quad \text{c.q.d.}$$

A simetria acima exposta para as coordenadas dos vetores S^μ nos permite por a lei de conservação (eq 8) em uma forma mais significativa. A forma explícita por componentes da lei de conservação (eq 8) se identifica com a equação obtida pela linguagem tensorial, e é dada por:

$$17a) \quad \partial_\mu (S^{\mu\nu}) = F^{\nu\lambda} J_\lambda = -Q^\nu$$

Agora, devido a simetria das componentes dos vetores S^μ , podemos também escrever o membro esquerdo como:

$$17b) \quad \partial_\mu (S^{\mu\nu}) = \partial^\mu (S^{\nu\mu}) = \square \cdot S^\nu$$

$$18) \quad \text{portanto, devemos ter: } \square \cdot S^\nu = -Q^\nu$$

Assim, a lei de conservação encontrada com o formalismo aqui adotado expressa que a divergência do vetor S^ν é igual ao negativo da componente ${}^\nu$ do vetor força de Lorentz.

Para encontrarmos a expressão explícita para as coordenadas $S^{\mu\nu}$ em termos das coordenadas do bivetor de campo F seguiremos um caminho que explore as facilidades oferecidas pela linguagem que estamos desenvolvendo. Devemos partir da expressão que fornece as coordenadas $S^{\mu\nu}$ como a parte escalar do produto entre S^μ e o versor \hat{e}^ν (eq 15). Agora, escrevendo:

$$19a) \quad F\hat{e}^\mu = 2F.\hat{e}^\mu + \hat{e}^\mu F, \text{ segue que:}$$

$$19b) \quad S^{\mu\nu} = - \langle (F.\hat{e}^\mu)F\hat{e}^\nu \rangle - 1/2 \langle \hat{e}^\mu F^2 \hat{e}^\nu \rangle$$

No primeiro termo notamos que o produto geométrico, $F\hat{e}^\nu$, tem sómente parte vetor ($F.\hat{e}^\nu$) e trivetor ($F\wedge\hat{e}^\nu$). Desde que a parte escalar do produto geométrico entre dois números de Clifford quaisquer é dada pelo produto interno entre multivetores de mesma graduação, segue que o primeiro termo reduz-se à:

$$20a) \quad \langle (F.\hat{e}^\mu)F\hat{e}^\nu \rangle = (F.\hat{e}^\mu).(F.\hat{e}^\nu)$$

Explicitamente por componentes, o termo acima é dado por:

$$20b) \quad (F.\hat{e}^\mu).(F.\hat{e}^\nu) = - F^{\mu\kappa} F^{\lambda\nu} G_{\kappa\lambda};$$

desde que: $F.\hat{e}^\mu = F^{\mu\kappa} \hat{e}_\kappa$.

No segundo termo, o produto F^2 contém sómente parte escalar ($F.F$) e pseudoescalar ($F\wedge F$), e seguindo a análise que precedeu a equação (20a), temos que:

$$21) \quad \langle \hat{e}^\mu F^2 \hat{e}^\nu \rangle = (F.F) G^{\mu\nu} = - 1/2 F^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} G^{\mu\nu}$$

Portanto, as coordenadas $S^{\mu\nu}$ são dadas por:

$$22) \quad S^{\mu\nu} = G_{\kappa\lambda} F^{\mu\kappa} F^{\lambda\nu} + 1/4 G^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}$$

de onde é claro a simetria das componentes dos vetores S^μ , mostrada anteriormente (eqs 14, 15 e 16).

A expressão acima é idêntica a expressão para as componentes do tensor energia-momento-tensão do campo eletromagnético encontrado na formulação lagrangeana (linguagem tensorial) do campo eletromagnético. A expressão acima para as coordenadas dos vetores S^μ em termos das coordenadas do bivector de campo F não tem uma relação simples em termos das coordenadas dos campos elétrico e magnético (os conhecedores do formalismo tensorial devem conhecer bem a situação).

Vamos agora desenvolver a expressão que relaciona os vetores S^μ diretamente aos vetores dos campos elétrico e magnético. Para isso é conveniente projetarmos os vetores S^μ em P . É conveniente escrever o resultado da projeção na seguinte forma:

$$23) \quad S^\mu \hat{e}_0 \longrightarrow S^{\mu 0} + S^\mu$$

Iniciamos com o desenvolvimento da expressão para o vetor S^0 . Observe que podemos escrever $S^0 \hat{e}_0$ como:

$$24) \quad S^0 \hat{e}_0 = (-1/2) F \hat{e}^0 F \hat{e}_0 = -1/2 FF^*$$

Agora, temos que:

$$25) \quad FF^* = -(E^2 + B^2) + \hat{e}_5(EB - BE)$$

O cálculo da expressão acima é mais simples quando realizado na álgebra de Pauli. A projeção de S^0 em P é direta, desde que a equação anterior envolve somente o produto geométrico e resulta em:

$$26) \quad S^0 \hat{e}_0 \longrightarrow 1/2(E^2 + B^2) - i(E \wedge B)$$

A expressão acima é significativa. A componente temporal do vetor S^0 (escalar em P) é reconhecida como a densidade de energia do campo eletromagnético, e será indicada por $U = 1/2(E^2 + B^2)$, enquanto que as componentes espaciais (vetor em P) são reconhecidas como as componentes do vetor de Poynting, indicado por $S^0 = E \times B$, que representa o fluxo de energia do campo eletromagnético.

A lei de conservação obtida anteriormente na forma do divergente (eq 18), expressa que para o vetor S^0 , em M, devemos ter:

$$27) \quad \text{D}.S^0 = -Q^0 ; \text{ ou em P: } \partial_0 U + \nabla \cdot (E \times B) = -E \cdot J.$$

que relata a conservação da energia para o campo eletromagnético, ou seja, a variação temporal da densidade de energia do campo eletromagnético dentro de um volume arbitrário mais o fluxo de energia do campo através da superfície fronteira desse volume deve igualar a potência dispendida pelo campo sobre as fontes encontradas dentro do volume.

Analogamente ao vetor S^0 , desenvolvemos a expressão para os vetores S^j . Assim, escrevemos inicialmente $S^j \hat{e}_0$ como:

$$28) \quad S^j \hat{e}_0 = 1/2 F_{j0} F_{00} = 1/2 F_{j0} e_0 F^*$$

Assim, a projecção do vetor S^j em P é dada por:

$$29a) \quad S^j \hat{e}_0 \rightarrow 1/2 (E + iB) \sigma_j (-E + iB) =$$

$$29b) \quad = 1/2 (-(E \sigma_j E + B \sigma_j B) + i(E \sigma_j B - B \sigma_j E))$$

O primeiro termo na expressão acima envolve o produto de um número ímpar de vetores, e deve portanto fornecer a componente vector em P. Este é realmente o caso, pois podemos escrever:

$$30) \quad E \sigma_j = 2E^j - \sigma_j E ; \text{ e segue que: } E \sigma_j E = 2E^j E - E^2 \sigma_j$$

Fazendo um cálculo análogo para $B \sigma_j B$, encontramos que:

$$31a) \quad S^j = S^{jk} \sigma_k = U \sigma_j - (E^j E + B^j B)$$

ou explicitamente, as componentes S^{jk} são dadas por:

$$31b) \quad S^{jk} = U \delta_{jk} - (E^j E^k + B^j B^k)$$

O segundo termo na eq 29b envolve um número par de vetores, e deve fornecer a componente escalar, S^{j0} . Pela análise anterior da simetria das componentes dos vetores S^A (eq 14), sabemos que:

$$32) \quad S^{j0} = S^{0j} = S^0 \cdot \sigma_j = (E \times B) \cdot \sigma_j$$

Podemos mostrar que o segundo termo resulta nesta expressão, mas o trabalho é desnecessário, pois o resultado já foi obtido por métodos mais gerais.

A lei de conservação para os vetores (em M) S^J é dada por:

$$33a) \quad \partial_0 S^{0K} + \partial_j S^{jK} = -Q^K ; \text{ ou alternativamente:}$$

$$33b) \quad \square \cdot S^J = -Q^J ; \text{ ou em P: } \partial_0 S^{J0} + \mathbb{F} \cdot S^J = -Q^J$$

O leitor pode escolher a forma que melhor lhe convier para exprimir a lei de conservação. A lei de conservação para os vetores S^J expressa a conservação do momento linear do sistema campos-fontes. O vetor de Poynting representa tanto o fluxo de energia quanto o momento linear do campo. Os vetores, em P, S^J representam as componentes do tensor das tensões do campo eletromagnético (ou tensor das tensões de Maxwell). Por outro lado, as componentes Q^J representam a força efetuada pelos campos sobre as fontes, ou a variação temporal do momento linear das fontes.

523. MOMENTO ANGULAR

O momento angular do campo eletromagnético é representado em M por quatro bivectores, indicados por L^{μ} , definidos como:

$$1a) \quad L^{\mu} = S^{\mu} \wedge x$$

As componentes dos bivectores L^{μ} são dadas por:

$$1b) \quad L^{\mu\kappa\rho} = S^{\mu\kappa} x^{\rho} - S^{\mu\rho} x^{\kappa}$$

Vamos agora mostrar o seguinte teorema: a lei de conservação do momento angular do sistema campos-fontes é dada por:

$$2a) \quad \partial_{\mu} L^{\mu} = - Q \wedge x ; \quad \text{ou em componentes:}$$

$$2b) \quad \partial_{\mu} L^{\mu\kappa\rho} = Q^{\rho} x^{\kappa} - Q^{\kappa} x^{\rho}$$

A prova segue diretamente a partir da definição dos bivectores L^{μ} , pois temos que:

$$3) \quad \partial_{\mu} L^{\mu} = \partial_{\mu} (S^{\mu} \wedge x) = (\partial_{\mu} S^{\mu}) \wedge x + S^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} x)$$

Agora, notamos que o primeiro termo é justamente o termo encontrado na lei de conservação acima enunciada, pois $\partial_{\mu} S^{\mu} = - Q$. Resta portanto, mostrar que o segundo termo é nulo. Inicialmente, notamos que $\partial_{\mu} x = \hat{e}_{\mu}$, e assim, segue que devemos mostrar que $S^{\mu} \wedge \hat{e}_{\mu} = 0$. Para ver que isso é satisfeito, escrevemos a expressão explicitamente:

$$4) \quad S^{\mu} \wedge \hat{e}_{\mu} = S^{\mu\nu} \hat{e}_{\nu\mu} = 0$$

pois a contração de um fator bidimensional simétrico ($S^{\mu\nu}$) com um fator antisimétrico ($\hat{e}_{\nu\mu}$) é nulo, c.q.d.

A lei de conservação para o momento angular é uma equação no espaço dos bivectores em M e corresponde portanto, a seis equações escalares. Veremos agora sua representação em P . Observamos que bivectores em M são representados em P por vetores mais bivectores,

correspondendo a parte temporal e espacial, respectivamente dos bivectores de M . É conveniente escrever a representação do momento angular em P como:

$$5) \quad L^{\mu} \longrightarrow N^{\mu} + iL^{\mu}$$

A expressão explícita para os vetores (em P) N^{μ} e L^{μ} é obtida projetando em P a expressão que define os bivectores L^{μ} , isto é:

$$6) \quad L^{\mu} = S^{\mu} \wedge x = 1/2(S^{\mu}x - xS^{\mu})$$

Incluindo \hat{e}_0^2 entre x e S^{μ} , nos dois termos da expressão acima, obtemos que:

$$7a) \quad L^{\mu} \longrightarrow 1/2((S^{\mu 0} + S^{\mu})(t - x) - (t + x)(S^{\mu 0} - S^{\mu})) =$$

$$7b) \quad = (tS^{\mu} - S^{\mu 0}x) + x \wedge S^{\mu}$$

Portanto, os vetores, em P , N^{μ} e L^{μ} são dados por:

$$8) \quad N^{\mu} = tS^{\mu} - S^{\mu 0}x, \text{ enquanto que: } L^{\mu} = x \wedge S^{\mu}$$

Os vetores N^{μ} representam um centro de "massa" (ou de energia-momento) para o campo eletromagnético, e estão associados a uma lei de conservação relativa ao centro de "massa" do sistema campos-fontes. Os vetores L^{μ} estão associados ao momento angular do campo no sentido natural: L^0 é o momento do vetor de Poynting, ou melhor, o momento do momento linear do campo, enquanto que os vetores L^j são o momento do "tensor" das tensões de Maxwell, representados pelos vetores S^j .

Vamos agora representar a lei de conservação do momento angular em P . Para isso, é necessário expressar o termo de interação campos-fontes em P . Isto é facilmente realizado adotando um procedimento similar ao utilizado na representação do momento angular em P . Assim, re-presentado $Q \wedge x$ em P como um vetor complexo:

$$9) \quad Q \wedge x = R + iT; \text{ segue que:}$$

$$10) \quad \mathbf{R} = t\mathbf{Q} - \dot{\mathbf{W}}\mathbf{x} ; \text{ enquanto que: } \mathbf{T} = \mathbf{x}\times\mathbf{Q}$$

O vetor \mathbf{R} está associado a uma variação temporal do centro de energia-momento das fontes (a análise final necessitaria da formulação integral, vide [Ja] ou [LL]). O vetor \mathbf{T} representa o torque sobre as fontes causado pelo campo eletromagnético.

A lei de conservação obtida anteriormente em \mathbf{M} para o momento angular pode então ser escrita em \mathbf{P} como duas equações vetoriais, após a representação acima dos elementos, e é dada por:

$$11) \quad \partial_{\mu} N^{\mu} = -\mathbf{R} , \text{ enquanto que: } \partial_{\mu} L^{\mu} = -\mathbf{T}$$

A lei de conservação para N^{μ} e \mathbf{R} relata a conservação do centro de energia-momento do sistema campo-fontes. A lei de conservação para L^{μ} e \mathbf{T} é mais conhecida, pois pode ser obtida com o cálculo vetorial, e relata a conservação do momento angular (no sentido da mecânica de Newton) do sistema campos-fontes.

§24. MONOPÓLOS MAGNÉTICOS

Tendo já estudado o material clássico, mostramos agora como nossa formulação se adequa a descrição de pólos magnéticos. Além do interesse nos resultados em si, este parágrafo é discutido de maneira intrínseca e de forma compacta, de modo a dar uma amostra de como os cálculos podem ser diretos para quem está familiarizado com a linguagem aqui adotada.

A inclusão de monopólos magnéticos na teoria é feita de modo técnico: os monopólos são vistos para serem descritos por um vetor corrente magnética. Postulamos que a equação que descreve os campos associados as correntes elétricas e magnéticas é dada por:

$$1) \quad \text{DF} = J_e - \hat{e}_5 J_m$$

Assim, pensamos que a corrente magnética altera as equações de Maxwell usual, contribuindo com um termo fonte para a equação do rotacional do campo, que deixa portanto, de ser uma equação homogênea.

As equações acima quando projetadas em Pauli simetriza as equações de Maxwell usuais, isto é:

$$2a) \quad \nabla \cdot E = \rho_e \qquad \nabla \cdot B = \rho_m$$

$$2b) \quad \nabla \wedge B = J_e + \partial_0 E \qquad \nabla \wedge E = - J_m - \partial_0 B$$

Como a expressão intrínseca para o bivector de campo é inalterada pela presença de fontes magnéticas, os elementos da teoria relacionados somente ao campo, permanecem inalterados. Entre esses, destacam-se: os invariantes de campo continuam sendo dados por F^2 ; os vetores tensão-energia-momento tem a forma usual, descrito só-

mente em termos do bivector de campo. Também, as soluções para campos livres, como o modelos de ondas planas, estudado no §20, obviamente permanecem inalterados.

As partes da nossa descrição alteradas pela inclusão do termo de fonte magnética são, é claro, aquelas intimamente relacionadas a interação campo-fontes. Abordaremos dois pontos que tem sido muito comentados na literatura (ver [Ad]): a teoria de potenciais para o campo na presença de fontes elétrica e magnética; e a descrição da força de Lorentz nesse caso.

Desde que o rotacional do bivector de campo não é mais nulo na presença de polos magnéticos, o campo não pode mais ser descrito somente como o rotacional de um vetor. A expressão para o campo deve ser acrescida do divergente de um trivector, que por conveniência, representaremos o trivector pelo dual de um vetor, indicado por M . Assim, os potenciais vetores que descrevem o campo são indicados por A e M , e temos que:

$$3) \quad F = \square \wedge A - \square \cdot (\hat{e}_5 M) = \square \wedge A - \hat{e}_5 (\square \wedge M)$$

onde usamos a equação 20, §3, para escrever a divergência do dual como o dual do rotacional.

é conveniente adotar o calibre de Lorentz generalizado, isto é admitimos que os dois potenciais tem divergente nulo. Então, o campo pode ser escrito como abaixo:

$$4) \quad F = \square (A - \hat{e}_5 M)$$

A equação postulada anteriormente para a descrição do campo (eq 1), é em termos dos potenciais no calibre de Lorentz generalizado obtida aplicando-se o gradiente a eq 4, e resulta em

$$5) \quad \square^2 A = J_e \qquad \square^2 M = J_m$$

onde já equacionamos separadamente a parte vetor (associada a corrente elétrica) e a parte trivetor (associada a corrente magnética), esta última já livre da unidade pseudoescalar \hat{e}_5 .

Analisamos agora a força de Lorentz, um termo crucial na descrição das interações campo-fontes. Adotando o mesmo procedimento do §22, encontramos que:

$$6) \quad \partial_\nu S^\mu = -F \cdot J_e + D \cdot J_m$$

Assim, temos que a presença de polos magnéticos contribue para a força de Lorentz, e quando projetamos na álgebra de Pauli, encontramos que:

$$7a) \quad W_m = + B \cdot J_m$$

$$7b) \quad Q_m = \mathcal{S}_m B - J_m \times E$$

A equação 7a fornece a potência dispendida pelo campo eletromagnético sobre as fontes magnéticas, enquanto que a equação 7b fornece a força efetuada pelo campo sobre as fontes magnéticas.

Um dos maiores méritos da formulação aqui adotada para a descrição de monopólos magnéticos é que ela fornece o acoplamento que se supõem ser o correto para a interação campos-fontes, ou seja, o bivector de campo acopla com a corrente elétrica, enquanto que o dual do bivector de campo acopla com a corrente elétrica. Então, na ausência de polos magnéticos, a teoria aqui adotada descreve a interação correta, ou seja, a nossa formulação é uma generalização da teoria eletrodinâmica usual, reobtendo os resultados dessa quando não temos a presença de pólos magnéticos.

APENDICE I: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA & ÁLGEBRA LINEAR

Neste parágrafo vamos mostrar que os elementos básicos das álgebras de Clifford, as lâminas, contém uma significativa interpretação geométrica. Também, desenvolvemos uma interpretação geométrica para o produto geométrico de dois vetores, e mostramos como o produto geométrico de um vetor por um multivetor pode auxiliar nas questões relativas à álgebra linear dos subespaços do espaço de base.

A noção intuitiva dos elementos mais básicos de geometria, como pontos, segmentos de retas, retângulos, paralelepípedos, etc..., nos sugere que esses objetos são intrinsecamente distintos. Assim, a construção de um esquema algébrico que faça uma distinção intrínseca de seus elementos de modo que à eles correspondam esses objetos geométricos, deve ser saudável, pois torna significativo o esquema algébrico, e possibilita exprimir mais simplesmente relações e objetos geométricos. Nosso pensamento sobre tal compatibilidade entre álgebra e geometria é melhor expresso pelo seguinte pensamento devido a David Hestenes: "Álgebra sem geometria é incompreensível, geometria sem álgebra é inexprimível".

É bem conhecido pelos geômetras a conveniência da representação pela álgebra vetorial dos objetos geométricos no espaço euclidiano. As demonstrações seguem mais facilmente e assumem uma representação mais compacta. Entretanto, os geômetras não deviam estar satisfeitos em representar paralelogramos e paralelepípedos por vetores, provindos do produto vetorial de outros vetores, visto que os vetores estão intuitivamente associados a segmentos de retas orientados.

A construção algébrica de lâminas como apresentada no axioma I (§1, capt I) vem diferenciar algebricamente, através da noção de independência linear, objetos de natureza geométrica distintas. A correspondência entre os elementos básicos das álgebras de Clifford e os elementos básicos da geometria deve ser entendida sob a luz da seguinte correspondência: aos escalares correspondem pontos, aos vetores correspondem segmentos de reta orientados, às 2-lâminas correspondem retângulos orientados, cujos lados são representados pelos vetores que formam a 2-lâmina, as 3-lâminas correspondem os volumes retos (paralelepípedos reto retângulo) orientados, cujas arestas são definidas pelos vetores que compõem a 3-lâmina, etc... A orientação dos vetores é intrínseca, e a partir dela se infere a orientação dos outros elementos. A anticomutatividade dos vetores que compõe uma r -lâmina é essencial do ponto de vista geométrico, fato bem conhecido da álgebra exterior de Grassmann: a ordem dos vetores no produto geométrico define a orientação externa (ou induzida) da hipersuperfície gerada pela r -lâmina. Também, encontramos naturalmente nas álgebras de Clifford uma medida da grandeza da hipersuperfície correspondente a uma r -lâmina é dada pela norma pelo reverso (eq 12, §4).

O produto geométrico de vários vetores não tem uma interpretação geométrica clara; sua construção deve-se a possibilidade de podermos construir um esquema algébrico coerente e que goze de certas propriedades, como associatividade. Por vezes as exigências algébricas necessitam de abstração não estando diretamente relacionada a uma interpretação geométrica. Se algumas relações puderem ser interpretadas tanto melhor, pois agregamos elementos visuais para recordá-las.

Veremos agora a interpretação geométrica do produto geométrico de dois vetores. Inicialmente, notamos as consequências do axioma **II**, §1:

- i) se o produto geométrico é comutativo, então os vetores são colineares;
- ii) se o produto geométrico é anticomutativo, então os vetores são ortogonais.

Para a análise, é conveniente analisarmos inicialmente a interpretação geométrica dos produtos interno e exterior de dois vetores.

PRODUTO INTERNO: como é usual o produto interno de dois vetores representa a projeção escalar de um vetor sobre o outro (adotando o comprimento de um dos dois como a escala), isto é:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(w)$$

onde w é o ângulo entre os vetores a e b , e $| \cdot |$ é a norma euclídea usual. A figura 1 dada mais adiante esclarece a situação.

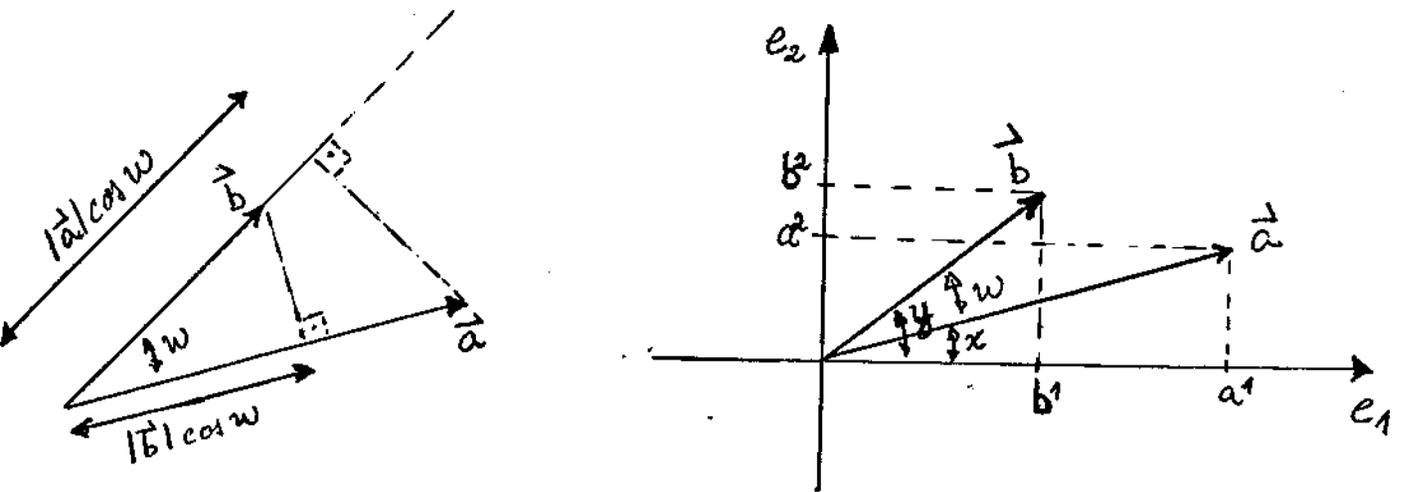
É conveniente obtermos a representação do produto interno em termos das componentes dos vetores quando estes são decompostos em uma base ortonormal. Para isto, nos restringimos ao espaço bidimensional, descrito por uma base (\hat{e}_1, \hat{e}_2) . Assim, a representação dos vetores a e b nessa base é dada por:

$$a = a^1 \hat{e}_1 + a^2 \hat{e}_2 = |a| (\cos(x) \hat{e}_1 + \sin(x) \hat{e}_2)$$

$$b = b^1 \hat{e}_1 + b^2 \hat{e}_2 = |b| (\cos(y) \hat{e}_1 + \sin(y) \hat{e}_2)$$

onde x e y são os ângulos que os vetores a e b , respectivamente fazem com os eixos \hat{e}_1 e \hat{e}_2 , conforme a figura abaixo.

figura 1. Visualização do produto interno de dois vetores



Assim, desde que o ângulo w é dado por: $w = y - x$, o produto interno entre a e b é dado por:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos w = |a| |b| (\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

Portanto, temos que o produto interno dos vetores a e b é dado pela multiplicação das componentes correspondentes dos vetores, isto é

$$a \cdot b = a^1 b^1 + a^2 b^2$$

PRODUTO EXTERIOR: o produto exterior de dois vetores representa a área orientada do paralelogramo definido pelos dois vetores. A orientação da área está relacionada a anticomutatividade do produto exterior pelo seguinte argumento: pensamos que o plano definido pelos vetores divide o espaço de base em duas regiões, e podemos olhar o plano de uma região ou de outra, cada visão define uma orientação no plano; assim, cada orientação corresponde a uma ordem dos vetores no produto exterior.

Uma medida da área plana definida pelos vetores é dada pela norma pelo reverso, isto é:

$$\|a \wedge b\| = \|a^\perp b\| = a^\perp b = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2$$

onde $a^\perp = a - ((a \cdot b)/b^2)b$

$$\text{Portanto, temos que: } \|a \wedge b\| = a^2 b^2 \sin^2(\omega)$$

onde ω é o ângulo entre os vetores a e b .

É bem conhecido que os produtos interno e exterior juntos contém toda a informação disponível entre dois vetores, e portanto, o produto geométrico de dois vetores contém toda a informação disponível entre os dois vetores. O fato novo ao trabalharmos com o produto geométrico é sua simplicidade em reconstruir um vetor a a partir do conhecimento dessas informações, e do outro vetor, ou seja, dado um vetor a , então se conhecemos o resultado do produto geométrico entre a e outro vetor b , que estamos procurando, o vetor b é unicamente determinado, e é dado por:

$$b = 1/a^2 ((ba)a) = 1/a^2 (a(ab)) = 1/a^2 (a(a \cdot b + a \wedge b))$$

Analisamos agora o produto geométrico de um vetor por uma lâmina. Veremos que tal análise sugere que o produto geométrico é uma ferramenta poderosa e simples na investigação da dependência linear de um vetor em relação a um conjunto de vetores ortogonais, ou linearmente independentes.

Observamos inicialmente, que uma lâmina induz uma decomposição no espaço de base em dois subespaços: o subespaço gerado pelos vetores que formam a lâmina, e o subespaço ortogonal a este, cujos elementos são ortogonais a todo vetor que pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores que formam a lâmina.

Considere o produto geométrico de um vetor, a , por uma r -lâmina B_r , formada pelos vetores b_j 's. É conveniente decompor o vetor a em dois outros vetores: a componente de a que é ortogonal a todos os vetores b_j 's, indicada por a^\perp , e a componente de a que pode ser escrita como uma combinação linear dos b_j 's, indicada por a^\parallel , isto é, escreva:

$$a = a^\parallel + a^\perp$$

onde $a^\perp \cdot b_j = 0$, $j=1,2,\dots,r$; enquanto que: $a^\parallel = \sum_j (a \cdot b_j) / b_j^2 \cdot b_j$

Pelos resultados do 52, teorema I e eq 15, segue que:

$$a^\perp \cdot B_r = 0 ; \text{ enquanto que: } a^\parallel \wedge B_r = 0$$

assim, devemos ter:

$$a \wedge B_r = a^\perp \wedge B_r ; \text{ enquanto que: } a \cdot B_r = a^\parallel \cdot B_r$$

Então, claramente o produto interno "seleciona" (isto é, é igual ao produto geométrico com...) a componente do vetor "paralela" ao r -vetor, enquanto que o produto exterior seleciona a componente "perpendicular". O produto geométrico fornece portanto uma medida da dependência linear do vetor em relação aos vetores que compõem a r -lâmina. Em particular, se o produto $a \cdot B_r$ é igual a um dos termos abaixo:

$$a \cdot B_r \quad \text{ou} \quad (-1)^{r+1} B_r \cdot a \quad \text{ou} \quad (a \cdot B_r)_{r-1}$$

então está assegurada a dependência linear do vetor a em relação aos vetores (e somente estes vetores) que formam a r -lâmina B_r .

Obviamente uma relação implica nas outras duas.

APÊNDICE II: PRODUTO GEOMÉTRICO E PRODUTO EXTERIOR DE VÁRIOS VETORES

Neste apêndice vamos estudar algumas relações satisfeitas pelo produto exterior de vários vetores, e sua expressão em termos do produto geométrico e vice-versa.

É instrutivo iniciarmos analisando o produto geométrico de três vetores, uma outra continuação natural do estudo do produto geométrico de dois vetores. A primeira observação a ser feita é que pelo teorema dois apresentado no §3, os multivetores resultantes do produto geométrico de vários vetores devem ter somente graduação par ou ímpar, conforme o número de vetores envolvido no produto é par ou ímpar.

Considere agora tres vetores quaisquer, a , b e c . Para estudar o produto geométrico entre eles, usamos a associatividade do produto geométrico e os resultados do §2, para o produto com vetores, e podemos escrever:

$$1) \quad abc = (ab)c = (a \cdot b + a \wedge b)c = (a \cdot b)c + (a \wedge b) \cdot c + (a \wedge b) \wedge c$$

Os dois primeiros termos no membro final são 1-vetores, enquanto que o terceiro termo é um trivetor, que corresponde ao produto exterior dos tres vetores a , b e c . Ele é igual a uma 3-lâmina formada por vetores obtidos destes ortogonalizando-se estes últimos, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, exposto mais a frente. Do modo que está escrito, devemos ortogonalizar primeiro a em relação a b , e depois c em relação a b e à a ortogonalizado.

O segundo termo pode ser desenvolvido como se segue:

$$2a) \quad (a \wedge b) \cdot c = (a^\perp b) \cdot c = (b \cdot c) a^\perp - (a^\perp \cdot c) b$$

onde $a^\perp = a - ((a \cdot b)/b^2)b$. Substituindo esta expressão para a^\perp na equação acima, é imediato verificar o seguinte resultado:

$$2b) \quad (a \wedge b) \cdot c = (b \cdot c) a - (a \cdot c) b$$

Esta é uma expressão análoga ao produto interno de um vetor por uma 2-lâmina. Em geral, o resultado do produto interno de um vetor por um multivetor puro, ou seja, um multivetor formado pelo produto exterior de vários vetores, é equivalente a expressão para o produto interno de um vetor por uma lâmina, bastando incluir a cunha, \wedge , que sinaliza o produto exterior, convenientemente entre os vetores.

Assim, encontramos que a equação 1 para o produto geométrico de tres vetores pode ser escrita como:

$$3) \quad abc = (b \cdot c) a - (a \cdot c) b + a^\perp b c^\perp$$

onde $c^\perp = c - ((c \cdot b)/b^2)b - ((c \cdot a^\perp)/a^{\perp 2})a^\perp$

Vamos agora dar a definição para o produto exterior de vários vetores. A definição segue a idéia apresentada no §2 de que o produto exterior atua como um operador de produção de graduação dentro da álgebra de Clifford. Assim, definimos o produto exterior de r i -vetores como a parte r -vetor do produto geométrico dos mesmos r i -vetores, isto é:

$$4) \quad a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{r-1} \wedge a_r = \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r$$

e denominamos tais objetos de r -vetores puros.

De imediato notamos que seguindo a definição acima e o axioma I apresentado no §1, que diz que o produto geométrico de r i -vetores ortogonais entre si é um r -vetor, concluímos que o produto geo-

métrico de vetores ortogonais entre si é igual ao produto exterior dos mesmos vetores. Este resultado tem como consequência que o espaço vetorial da álgebra exterior é isomorfo ao espaço vetorial das álgebras de Clifford, em particular o espaço vetorial das r -formas é isomorfo ao espaço vetorial dos r -vetores.

Um multivetor puro é igual a qualquer lâmina formada por vetores que são obtidos ortogonalizando-se, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, os vetores originalmente envolvidos no produto, respeitada a ordem dos vetores no produto. Assim, é fácil entender porque os multivetores puros comportam-se como lâminas, isto é, seu quadrado é um escalar, e também o produto interno de dois multivetores puros tem a mesma expressão que o produto interno entre duas lâminas, e por fim, o resultado acima citado tem como consequência a associatividade do produto exterior, desde que ele independe da ordem de ortogonalização. Para tornar mais claro os resultados acima comentados, passamos a expor o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Dado r vetores linearmente independentes entre si, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}, a_r$, então para construirmos um conjunto de r vetores ortogonais a partir destes, indicados como v_j 's, escrevemos:

$$\begin{aligned}
 5) \quad v_1 &= a_1 & v_2 &= a_2 - ((a_2 \cdot v_1)/v_1^2)v_1 \\
 v_3 &= a_3 - ((a_3 \cdot v_1)/v_1^2)v_1 - ((a_3 \cdot v_2)/v_2^2)v_2 \\
 &\dots \\
 v_j &= a_j - ((a_j \cdot v_1)/v_1^2)v_1 - ((a_j \cdot v_2)/v_2^2)v_2 - \dots - \\
 &\quad - ((a_j \cdot v_{j-2})/v_{j-2}^2)v_{j-2} - ((a_j \cdot v_{j-1})/v_{j-1}^2)v_{j-1} \\
 &\dots \\
 v_r &= a_r - ((a_r \cdot v_1)/v_1^2)v_1 - \dots - ((a_r \cdot v_{r-1})/v_{r-1}^2)v_{r-1}
 \end{aligned}$$

Há vários modos de se fazer a ortogonalização através do processo de Gram-Schmidt, eles diferem entre si na sequência em que ortogonalizamos os vetores. No caso acima, iniciamos pelo vetor a_1 , e seguimos a ordem natural dos vetores. Se tivéssemos ortogonalizado em outra sequência teríamos obtido um conjunto de vetores diferente do acima. Há no máximo $r!$ conjunto distintos de vetores ortogonais correspondendo as possíveis permutações na ordem de ortogonalização. Apesar dos conjuntos serem distintos, o produto exterior dos r vetores a_j 's é igual a qualquer lâmina que seja formada pelos vetores v_j 's obtidos por Gram-Schmidt, independente da ordem de ortogonalização dos vetores a_j 's, respeitada a ordem dos vetores ortogonalizados correspondentes aos vetores originalmente envolvidos no produto, isto é:

$$6) \quad a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{r-1} \wedge a_r = v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_r}$$

onde os v_j 's são obtidos através da ortogonalização dos a_j 's, o índice j indica a sequência de ortogonalização, como anteriormente. O segundo índice indica a qual vetor a_j que ele corresponde.

Para mostrar este resultado devemos entender o produto exterior de acordo com a definição anterior. Assim, necessitaríamos da expressão para o produto geométrico de r i -vetores quaisquer. Para entender o procedimento que deveria ser adotado, voltamos a análise do produto de tres vetores quaisquer. Da expressão 1 e 3, temos que:

$$7) \quad a \wedge b \wedge c = abc - (b \cdot c)a + (a \cdot c)b$$

Assim, para mostrar que o produto exterior entre os tres vetores é igual a qualquer lâmina formada por vetores obtidos por Gram-Schmidt dos vetores originalmente envolvidos no produto, de-

veríamos mostrar que o produto de três vetores obtidos por Grand-Schmidt dos vetores a, b, c conduz a expressão acima. Não vamos aqui fazer a verificação exaustiva. Observamos ao leitor que no caso de três vetores há no máximo seis conjuntos de três vetores ortogonais entre si obtidos por Grand-Schmidt que são distintos entre si. Também, quatro desses conjuntos podem ser obtidos naturalmente como resultado do produto exterior através da análise anterior do produto geométrico dos três vetores. A característica desses conjuntos consiste em que ou o processo de ortogonalização tem o vetor que está no meio como referência (no caso anterior o vetor b), ou este vetor foi o primeiro a ser ortogonalizado em relação a um dos vetores posicionado na extremidade. Esta característica é resultado do uso da associatividade do produto geométrico na análise anterior. Os outros dois conjuntos que podem ser obtidos dos vetores a, b, c ortogonalizando-os por Grand-Schmidt ou tem o vetor a ou vetor c como referência para o início do processo de ortogonalização, e como último vetor a ser ortogonalizado o vetor b . É direto verificar que esses dois conjuntos ainda conduzem a expressão correta para o produto exterior como dado pela equação 7.

Do ponto de vista da álgebra linear nossos multivetores puros geram um subespaço do espaço de base que independe da base escolhida para descrevê-lo. No entanto, eles devem preservar algumas características intimamente relacionadas a sua interpretação geométrica: um multivector puro representa uma hipersuperfície caracterizada pela sua grandeza, que pode ser medida pela norma pelo reverso, e pela orientação externa da mesma, definida pela ordem dos vetores no produto exterior, que deve ser respeitada pelos vetores

correspondentes aos originais após efetuarmos o processo de ortogonalização. Podemos mostrar que a grandeza da hipersuperfície medida pela norma pelo reverso independe também do processo de ortogonalização dos vetores. Este resultado generaliza o resultado bem conhecido da geometria euclidiana que a área de um paralelogramo é igual a área de qualquer um dos dois retângulos construídos a partir dos lados do paralelogramo, ortogonalizando-se estes últimos. Bivetores puros devem ser identificados com paralelogramos orientados, trivetores puros com paralelepípedos orientados definidos pelos vetores que o compõem, e assim por diante.

Apresentamos agora o resultado do produto geométrico de 4 vetores em termos do produto exterior e do produto interno entre os mesmos vetores:

$$8) \quad abcd = (a \cdot b)(c \cdot d) + (b \cdot c)(a \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot b)c \wedge d + \\ + (b \cdot c)a \wedge d - (a \cdot c)b \wedge d + (c \cdot d)a \wedge b - (b \cdot d)a \wedge c + (a \cdot d)b \wedge c + \\ + a \wedge b \wedge c \wedge d$$

Podemos também expressar o produto exterior dos quatro vetores em termos do produto interno e do produto geométrico entre eles:

$$9) \quad a \wedge b \wedge c \wedge d = abcd + (a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) + \\ + (a \cdot b)cd + (b \cdot c)ad - (a \cdot c)bd + (c \cdot d)ab - (b \cdot d)ac + (a \cdot d)bc$$

A fórmula geral que expressa o produto geométrico de r vetores em termos do produto interno e do produto exterior entre os mesmos vetores pode ser vista em [Ca]. Ela é de interesse nos cálculos efetuados em Eletrodinâmica Quântica, e exigiria o conhecimento, ao menos para a notação, de pfaffianos.

APÊNDICE III: ÁLGEBRAS TENSORIAL E EXTERIOR

Neste parágrafo comentamos como estão relacionadas as álgebras tensorial e exterior com a álgebra de Clifford.

A álgebra de Clifford pode ser obtida da álgebra tensorial passando esta última ao quociente por um particular elemento (o mesmo processo pode ser feito para a obtenção da álgebra exterior a partir da álgebra tensorial). Mostra-se assim, que a associatividade do produto tensorial é preservada pelo processo, e portanto o produto de Clifford, que é o produto tensorial após efetuarmos o quociente, é associativo. Este é um método trabalhoso e desgastante de apresentar as álgebras de Clifford. Nossa postura neste trabalho foi apresentar um esquema algébrico coerente, e auto-suficiente, no sentido de não necessitarmos referências, ou resultados, de outras álgebras para podermos desenvolvê-lo. Os resultados obtidos no capítulo I são acessíveis a quem conhecer os resultados básicos de álgebra linear, como aqueles contidos em [Ha] ou [BR]. Também, acreditamos ser a estrutura da álgebra de Clifford mais significativa do que a álgebra tensorial, tal como pretende mostrar a exposição do apêndice I, sendo por isso também reconhecidas como álgebras geométricas. Além disso, os cálculos realizados com a álgebra de Clifford são por vezes mais simples do que os correspondentes cálculos na álgebra tensorial. Os argumentos acima nos permitem dizer que não teria sentido recorrermos a álgebra tensorial para podermos apresentar a álgebra de Clifford. Deste modo, a apresentação das álgebras de Clifford neste trabalho foi basicamente axiomática.

Nossa postura é também resguardada pela análise da história da ciência que nos tem ensinado que o desenvolvimento de uma teoria é melhor exequível quando elevamos seus resultados básicos a posição de axiomas.

O axioma I nos ensina a construir os objetos básicos das álgebras de Clifford, as lâminas, e é usualmente encontrado na literatura matemática sob a seguinte forma: o espaço vetorial das álgebras de Clifford é isomorfo ao espaço vetorial da álgebra exterior associada ao mesmo espaço de base. Em particular, o espaço vetorial das r -formas é isomorfo ao espaço vetorial dos r -vetores. Tal resultado deve ser claro quando notamos que o produto geométrico de r i -vetores ortogonais entre si é igual ao produto exterior dos mesmos r i -vetores (ver apêndice II).

Também, notamos que se no axioma II zerarmos a parte comutativa do produto geométrico, isto é, o produto interno de quaisquer dois vetores for considerado nulo, então a álgebra assim obtida é simplesmente a álgebra exterior, cujo produto de dois vetores é anticomutativo.

Entendemos neste trabalho a graduação das álgebras de Clifford como a graduação de uma das suas subálgebras: a álgebra exterior. A definição rigorosa de álgebras graduadas requer que além de ser possível decompor o espaço vetorial na soma direta de subespaços, requer também que o produto de um elemento de R_n^k por um elemento de outro subespaço R_n^j pertença ao subespaço R_n^{j+k} . Isso claramente não acontece nas álgebras de Clifford (ver teorema II, §3). Entretanto, pela definição do produto exterior (ver eq 5, §3) é claro que a álgebra exterior é uma álgebra graduada. A álgebra ten-

sorial também é graduada, sendo que a graduação dos tensores é denominada ordem ("rank"), isto é, um tensor antisimétrico que corresponda a um bivector na álgebra de Clifford é um tensor de segunda ordem.

Das propriedades do produto exterior na álgebra de Clifford, observamos que a álgebra exterior é a subálgebra mais simples para se trabalhar. Este fato basicamente determinou uma maior divulgação, e um estudo inicial mais profundo da álgebra exterior, relegando a álgebra de Clifford como uma estrutura mais complexa, prejudicando assim, seu desenvolvimento teórico, e suas possíveis aplicações. Entretanto, o desenvolvimento do produto interno entre multivetores de quaisquer graduação, cujo mérito, creio, deve ser conferido a David Hestenes, facilitou a compreensão da estrutura das álgebras de Clifford, assim como simplificou seu manuseio, tornando-a uma linguagem acessível e de grande utilidade nas aplicações. A expressão algébrica do dual de Hodge, existente na álgebra exterior, encontrada no §5, teorema III, por exemplo, simplifica em muito os cálculos realizados com o dual de Hodge, tornando-os claro e mais compreensível, pois "materializa" algébricamente o isomorfismo existente entre R_n^k e R_n^{n-k} através do produto pela unidade pseudoescalar. Os conhecedores do cálculo exterior devem comparar o tratamento usual do dual de Hodge com a dualidade por pseudoescalar encontrada na álgebra de Clifford, e assim, julgar qual o tratamento que é mais simples e mais significativo. O dual de Hodge é igual a dualidade por pseudoescalar a menos de um sinal, que depende da métrica adotada no espaço de base, da graduação do multivector envolvido na dualidade, e por fim, da definição adotada para

o dual de Hodge. Como exemplo da simplicidade da dualidade por pseudoescalar, comentamos agora a relação entre o operador gradiente aqui definido (§15), e a diferencial existente na álgebra exterior.

O operador gradiente como aqui definido é representado na álgebra exterior em termos de dois operadores: a diferencial exterior, indicada por d , e a coderivada, ou derivada de Hodge, indicada por δ , que correspondem, a menos de sinal, respectivamente ao rotacional, e ao divergente, nos quais é decomposto o operador gradiente, conforme exposto no §15. Vamos estudar algumas propriedades básicas da coderivada, que é definida em termos da diferencial exterior através do dual de Hodge (exclusivamente neste parágrafo indicado por $*$) pela seguinte expressão:

$$\delta A_r = *d(*A_r)$$

onde A_r é uma r -forma (um r -vetor). Se supormos que a derivada exterior corresponde ao rotacional definido no §15 (e assim, é claro que a diferencial exterior de um r -vetor resulta em um $(r+1)$ -vetor) e aceitarmos que a dualidade de Hodge é dada pelo produto pela unidade pseudoescalar (a menos de sinal), então, podemos expressar a coderivada na álgebra de Clifford como:

$$\delta A_r = (D \wedge (A_r i)) i = ((D \cdot A_r) i) i = \pm D \cdot A_r$$

onde D é o operador gradiente (ver §15), i a unidade pseudoescalar (§5, eq 19), e usamos a eq 20b, §3, para efetuar a segunda passagem. O sinal é decorrente de que o quadrado da unidade pseudoescalar é mais ou menos um (ver eqs 29 e 30, §5), mas nosso estudo não deve ser prejudicado pela indeterminação do sinal. Da equação acima, é claro que a coderivada de um r -vetor é um $(r-1)$ -vetor, pois ela corresponde ao divergente do r -vetor. Também, as relações que

se seguem são facilmente verificadas através da representação da dualidade de Hodge pelo produto com a unidade pseudoescalar.

$$\delta(*A_p) = \pm *d(A_p) \qquad *(dA_p) = \pm d(*A_p)$$

Também, as propriedades básicas da diferencial exterior e da coderivada, isto é, que seus quadrados são nulos, são correspondentes as equações encontradas para o rotacional e para o divergente encontradas no §15, como consequência direta da estrutura algébrica desses operadores (ver eqs 13, 53)

CONCLUSÃO

Penso que os resultados dos capítulos III e V sejam por si só suficientes para destacar a simplicidade do formalismo das álgebras geométricas. Notamos que as formulações usuais das transformações de Lorentz são em termos de matrizes, e também a formulação covariante da Eletrodinâmica é usualmente realizada em termos das coordenadas dos tensores. O uso explícito de coordenadas acarreta uma leitura minuciosa das formulas, e trabalha com um algoritmo abstrato, sem maiores relevâncias. A linguagem intrínseca aqui adotada proporciona uma significativa economia nos cálculos e expressões.

Além da linguagem intrínseca, as álgebras de Clifford permitem uma unificação de vários sistemas algébricos, eliminando assim vários esforços que teriam de ser feitos para se aprender a trabalhar com várias álgebras, que por vezes apresentam resultados redundantes quando temos que trabalhar com duas ou mais delas ao mesmo tempo, como no caso da discussão usual da covariância da Eletrodinâmica, onde os campos são representados por tensores e os operadores das transformações por matrizes.

Apesar da referência original ser do século passado (W.K.Clifford) o desenvolvimento da estrutura algébrica é recente, e se deu basicamente nas décadas de cinquenta e sessenta, através dos estudos encabeçados por Marcel Riesz, Chevalley, Kahler, e Hestenes. Mais recente ainda é a divulgação, que tem sido intensa e encontrando aplicações em várias áreas. Assim, é compreensível que o esquema ainda não esteja no seu potencial máximo, e a construção de várias

das álgebras existentes como derivada da estrutura algébrica aqui apresentada ainda está ocorrendo. Por exemplo, o esquema algébrico aqui apresentado descreve tensores antisimétricos naturalmente, no entanto, a representação de tensores simétricos é um problema importante a ser resolvido. Em geral, conseguimos apenas uma representação de suas componentes, como no caso do "tensor" tensão-energia-momento do campo eletromagnético. Também, a representação de spinores através das álgebras de Clifford é um campo novo e que promete bons resultados (ver [VW]). Em particular, os spinores da álgebra de Dirac, $R_{4,1}$, nos permite a formulação da Eletrodinâmica Quântica num esquema parecido com o apresentado para a Eletrodinâmica clássica, postulando-se a equação de Dirac como a equação fundamental.

Outros tópicos que não foram abordados fornecem uma discussão mais profunda sobre os resultados usuais; entre eles destacamos: o problema da existência de soluções para campos livres de fontes cujos campos elétrico e magnético são paralelos, ou não perpendiculares; a discussão sobre a existência de outros invariantes para o campo eletromagnético, e novas leis de conservação para campos livres. Também, um estudo mais completo do cálculo geométrico não nos restringiria tanto: tornaria possível a formulação integral da Eletrodinâmica, e permitiria também a extensão dos resultados aqui obtidos para espaços curvos, permitindo deste modo a formulação da Relatividade Geral.

REFERENCIAS

- [He⁰] David Hestenes - "Space-Time Algebra", Editora Gordon Breach (1966).
- [He¹] - "New Foundations for Classical Mechanics", Ed. D. Reidel Publishing Company (1986)
- [He²] - "Clifford Algebra and the Interpretation of Quantum Mechanics"
- [He³] - "A Unified Language for Mathematics and Physics".
- Os dois artigos acima citados de Hestenes estão publicados em J.S.Chisholm and A. K.Common (eds), "Clifford Algebra and Their Applications in Mathematical Physics", D. Reidel Publ. & Company
- [He⁴] - "Vectors, Spinors & Complex Numbers in Classical and Quantum Physics", Am. Jour. of Physics, vol 39 (1971)
- [HS] D.Hestenes & G.Sobczyk - "Clifford Algebra to Geometric Calculus", Ed. D. Reidel Publi. Comp. (1984)
- [Ma] Marcel Riez - "Clifford Numbers and Spinors", Lecture series n^o 38, University of Maryland (1958)
- [Ve] Vera L.Figueiredo - Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP
- [VW] V. Figueiredo & W.A.Rodrigues - "Alternative Representations for Spinors by Clifford Algebras", relatório interno n^o28/87, IMECC/UNICAMP
- [ZW] J.Ricardo Zeni & Waldyr A.Rodrigues - "Eletrodinâmica: Formalismo das álgebras de Clifford", relatório interno n^o IMECC/UNICAMP. Também publicado nos anais do X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, pgs 1088/98 (1987).
- [Ad] Adolfo Maia Jr. - Tese de doutorado, IFGW/UNICAMP.

[ERR] M. Faria-Rosa, E. Recami & W.A.Rodrigues - "A Satisfactory Formalism for Magnetic Monopoles", Physics Letters B, vol 173, no 3, pg233/236 (1986).

[Gr] K.R.Greider - "A Unifying Clifford Algebra Formalism for Relativistic Fields", Foundation of Physics, vol 14, no16, pg 467 (1984).

[Sa¹] Nikos Salingaro - "Invariants of the Electromagnetic Field and Waves", Am. Jour. of Physics, vol 53 (4), pgs 361/363 (1985).

[Sa²] - "Electromagnetism and the Holomorphic Properties of Space-Time", Jour.Math.Physics, 22 (9), pgs 1919/1925 (1981)

[Sa³] - "Algebras with Three Anticommuting Elements". I. Spinors and Quaternions, II. Two Algebras over a Singular Field" Jour. Math. Phys., 22 (10), outubro 1981, pgs 2091/2100

[Sa⁴] - "Realization, Extension and Classification of Certain Physically Important Groups and Algebras",

[Sa⁵] - "Relativistic motion of a charged particle, the Lorentz group, and the Thomas precession." Jour. Math. Physics, 25 (3), pgs 706/716 (1984).

[SW] N.Salingaros & G.P.Wene - "The Clifford Algebra of Differential Forms", Acta Applicandae Mathematicae, vol 4, pgs271/292 (1985).

[Im] K. Imaeda - "A New Formulation for Classical Electrodynamics", Il Nuovo Cimento, vol 32B, no1, pg 138/162 (1976)

[LL] L. Landau & E Lifchitz - "The Classical Theory of Fields", 4^a ed.revisada, Ed. Pergamon Press (1975)

[Ja] J.D.Jackson - "Eletrodinâmica Clássica", 2ª ed., Ed. Guanahara Dois.

[Ca] E.R.Caianello - "Combinatorics and renormalization in Quantum Field Theory", Ed. W.A.Benjamin, inc (1973).

[FW] Márcio A. Faria-Rosa & Waldyr A. Rodrigues Jr - "Comments on Einstein's later view of the twin paradox", relatório interno IMECC, nº 344.

[Ha] P.Halmos - "Finite Dimensional Space-Vectors", Ed. Springer (1974).

[BR] J.L.Boldrini, S.Rodrigues, V.L.Ribeiro & H.Wetzler - "Algebra Linear", Ed. Harbra.

REFERENCIAS HISTÓRICAS - W.K.CLIFFORD

in "Mathematical Papers of W.K.Clifford", edited by R.Tucker, Chelsea, New York.

- "Applications of Grassmann's extensive algebra", paper XXX
- "Preliminary Sketch of Biquaternions", paper XX
- "Further Note on Biquaternions", paper XLII
- "On the Classification of Geometric Algebras", paper XLIII

A referência básica para esta tese é o livro de David Hestenes [He⁰], que aborda quase todos os tópicos aqui trabalhados. É um livro que expõem o potencial de aplicação das álgebras de Clifford, sendo recomendado como uma leitura inicial para os físicos. Entretanto, o desenvolvimento da estrutura algébrica é por assim dizer, "obscuro" neste livro. A referência [HS] é a mais segura e mais ampla para os resultados da estrutura geral das álgebras.