

"INSTABILIDADES RESISTIVAS EM SISTEMAS DE
CONFINAMENTO MAGNÉTICO COM CAMPO REVERSO"

Marcos Antonio Matos Santiago

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão

Tese apresentada ao Instituto de Física
"Gleb Wataghin" da Universidade Esta-
dual de Campinas para obtenção do tí-
tulo de Doutor em Ciências.

Campinas, fevereiro de 1982

Aos meus pais
a Rosa e em
memória de Gilvan

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Ricardo M. O. Galvão pela orientação dedicada e segura durante todas as fases de realização desta tese.

Ao Prof. Dr. Paulo H. Sakanaka pelo apoio e valiosa ajuda em orientação que sempre dispensou a este trabalho.

Ao Prof. Dr. José Busnardo Neto pelos ensinamentos teóricos, discussões científicas e diversos auxílios prestados.

Aos demais membros do Grupo de Plasma da UNICAMP, em particular aos professores Dr. M. Niimura e Dr. S. Aihara, pelas sugestões e úteis discussões.

À Universidade Federal Fluminense por todo o apoio, material e moral, que me dispensou desde a inclusão no programa PICD até o término da tese, extensivo a todos os meus colegas do Departamento de Física, em particular aos professores José Raimundo Romeo e Carlos Alberto Fanzeres pelo estímulo e ajuda para o prosseguimento de minha permanência no IFGW-UNICAMP.

Um agradecimento especial tem que ser feito aos meus colegas do Grupo de Plasma por todos esses anos de saudável e fraterna convivência. Seria injusto se pretendesse lembrar de todos mas muito obrigado ao Tônico, Milton, Honda, Glaucia, Waltair, Geraldo, Cesar, Joaquim pela decisiva ajuda no uso do computador, Baloni, Munemasa, Ivo, Hisataki, Ray, Daniel, Armando e todos os demais.

Outro agradecimento muito importante vai para Bernardete, Glaucia, Eliane, Noemia, Ana, Wagner, Angelo, Atílio, João, Wilson, Hugo, Aldionso, Shibata e todos os colegas de república que tornaram bem mais agradáveis os dias em Campinas.

A Rita, Zezê, Nilza, Gisela, Célia, Suely, Nazarê e Ivani pela amizade e importante ajuda na interação com a Biblioteca.

A Carmem e Augusto, da Secretaria do Plasma, pela simpatia e inestimável cooperação de todos os dias.

A Ana Toma, Lori e Maria Ighes pela dedicação no trabalho de datilografia e atendimento nas questões relativas à CPG.

Ao Vasco e Charles pelos desenhos.

A CAPES - PIED pela bolsa de estudos no período inicial e ao CNPq pela bolsa na fase final bem como pelo auxílio para a participação na Escola sobre Energia de Fusão em Trieste.

A todos os familiares e amigos no Rio de Janeiro pelo carinho de sempre e de um modo geral a todos os que contribuíram para a realização desse trabalho muito obrigado.

RESUMO

Estudamos modos resistivos na configuração de campo reverso incluindo o efeito da rotação da coluna de plasma a qual quebra-se em um número discreto de anéis ao longo de seu comprimento.

É mostrado que o modo $m = 0$, onde m é o número azimutal, se reduz ao modo "tearing" usual somente no limite de rotação nula do plasma. Para um valor finito da rotação, o modo $m = 0$ torna-se compressível, com sua taxa de crescimento proporcional à potência $\frac{1}{3}$ da resistividade do plasma. A análise feita é análoga à do modo gravitacional resistivo em uma "fatia de plasma".

Um modo resistivo $m = 1$ é mostrado existir nesta configuração sem cisalhamento. Este modo tem um perfil radial quase constante desde o eixo magnético até o raio onde o campo magnético se anula. Sua taxa de crescimento varia com a potência $\frac{1}{3}$ da resistividade do plasma e os correspondentes deslocamentos perturbados paralelos às linhas de campo são muito maiores que os perpendiculares na região resistiva. Este modo pode levar ao rompimento da coluna de plasma em muitos anéis e ser o mecanismo responsável pela instabilidade rotacional $m = 1$ que é observada em descargas em θ - pinches. É mostrado que com cisalhamento na rotação a taxa de crescimento torna-se complexa e o modo pode ser estabilizado.

ABSTRACT

Resistive modes are studied in the reversed field configuration including the effect of the rotation of the plasma column which breaks into a number of discrete rings along its length.

It is shown that the mode $m = 0$, where m is the azimuthal mode number, reduces to the usual tearing mode only in the limit of vanishing plasma rotation. For a finite value of rotation, the mode $m = 0$ mode becomes compressional with its growth rate proportional to the $\frac{1}{3}$ power of the plasma resistivity. The analysis made is analogous to the gravitational resistive mode in a "slab plasma".

A resistive $m = 1$ mode is shown to exist in the present configuration without shear. The mode has an almost constant radial profile from the magnetic axis to the radius where the magnetic field vanishes. Its growth rate scales with the $\frac{1}{3}$ power of the plasma resistivity and the corresponding perturbed displacement parallel to the field lines is much larger than the perpendicular one in the resistive region. This mode may lead to the splitting of the plasma column into many rings and may also be a triggering mechanism for the rotational $m = 1$ instability that is observed in θ - pinch discharges. It is shown that in the presence of sheared rotation, the growth rate becomes complex and the mode may be stabilized.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - Introdução	
1.1 - Análise Teórica	3
1.2 - Descrição do Método de Análise	4
CAPÍTULO 2 - Formulação do Problema e Equações Gerais	
2.1 - Equilíbrio e Equações Básicas	8
2.2 - Análise de Perturbação	10
2.3 - Limite Magnetohidrodinâmico Ideal	16
2.4 - Equações Magnetohidrodinâmicas para os Modos $m = 0$ e $m = 1$. Comportamento Assintótico	20
CAPÍTULO 3 - Modo $m = 0$ Resistivo em Configurações de Campo Reverso	
3.1 - Equações Resistivas para o Modo $m = 0$	26
3.2 - Modo "Tearing" Resistivo $m = 0$	30
3.3 - Modo Resistivo $m = 0$ Compressível	34
3.4 - Solução Numérica das Equações do Modo $m = 0$ Resistivo Compressível	42
CAPÍTULO 4 - Instabilidades Rotacionais no Modo Kink Resistivo	
4.1 - Obtenção das Equações Resistivas no Modo Kink $m = 1$	61
4.2 - Ordenamento das Equações da Camada Resistiva	63

4.3 - Casamento Assintótico e Equação de Autovalor	67
4.4 - Análise e Interpretação de Resultados para o Modo $m = 1$ Resistivo	69
CAPÍTULO 5 - Conclusões e Trabalhos Futuros	74
Apêndice A - Modelo de Campo Reverso para o Modo $m = 0$	79
Apêndice B - Modelo de Campo Reverso para o Modo $m = 1$	91
Apêndice C - Rotação Arbitrária no Modo Kink Resistivo	95
Apêndice D - Modos Gravitacionais Resistivos em Plasmas	102
Apêndice E - Efeito Hall e Instabilidades Magnetodínamicas	111
Referências	118

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - Introdução	
1.1 - Análise Teórica	3
1.2 - Descrição do Método de Análise	4
CAPÍTULO 2 - Formulação do Problema e Equações Gerais	
2.1 - Equilíbrio e Equações Básicas	8
2.2 - Análise de Perturbação	10
2.3 - Limite Magnetohidrodinâmico Ideal	16
2.4 - Equações Magnetohidrodinâmicas para os Modos $m = 0$ e $m = 1$. Comportamento Assintótico	20
CAPÍTULO 3 - Modo $m = 0$ Resistivo em Configurações de Campo Reverso	
3.1 - Equações Resistivas para o Modo $m = 0$	26
3.2 - Modo "Tearing" Resistivo $m = 0$	30
3.3 - Modo Resistivo $m = 0$ Compressível	34
3.4 - Solução Numérica das Equações do Modo $m = 0$ Resistivo Compressível	42
CAPÍTULO 4 - Instabilidades Rotacionais no Modo Kink Resistivo	
4.1 - Obtenção das Equações Resistivas no Modo Kink $m = 1$	61
4.2 - Ordenamento das Equações da Camada Resistiva	63

CAPÍTULO 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o efeito da resistividade finita do plasma em sistemas de confinamento magnético com linhas de campo paralelas tal que o campo magnético muda de sentido no interior do plasma. Estas configurações ocorrem em espelhos magnéticos com campo reverso e em theta-pinch lineares com campo de polarização reverso (1).

Sabemos que instabilidades "tearing", que levam ao rompimento das linhas de força, são importantes em plasmas da magnetosfera e em experiências de laboratório visando à obtenção da fusão termonuclear controlada.

Experimentalmente é observado que com campo reverso a coluna de plasma se quebra ao longo de seu comprimento em um número discreto de anéis (2), sem o campo reverso ou com o campo sempre num mesmo sentido, a coluna permanece estável. As características da instabilidade associada a essa quebra da coluna estão em concordância qualitativa com as previsões teóricas para o modo "tearing", embora o valor experimental para a taxa de crescimento seja quase sempre uma ordem de grandeza maior que o previsto teoricamente. Por outro lado, em alguns casos, a coluna permanece estável por um tempo muito maior do que o tempo característico da instabilidade.

Resultados semelhantes foram obtidos em outras experiências (4) (7); entretanto, somente em poucos casos existe concordância quantitativa entre os valores experimentais e teórico para a taxa de crescimento da instabilidade. Alguns tra

balhos antigos, por Bodin e outros, já mostraram que o comportamento da descarga durante a fase de compressão em θ - pinches depende criticamente da direção do campo de polarização em relação ao campo principal compressional^(1,2).

Irby e outros fizeram recentemente medidas cuidadosas em descargas em θ - pinches com o campo reverso⁽⁸⁾. Eles mostraram que ilhas magnéticas associadas a modos "tearing" ocorrem durante a fase de compressão da coluna de plasma. A variação na emissão radial de luz, como uma função da distância ao longo do eixo, em θ - pinches com campo reverso, tem previamente sido citada⁽²⁾ como evidência para a existência de modos "tearing" nesses anéis discretos alongados.

Em theta-pinches com campo reverso, o plasma forma-se nas paredes e implode para formar um anel separando o campo magnético externo do campo anti-paralelo no caroço. Este anel executa umas poucas oscilações radiais e se comprime lentamente. Fora da região da bobina, onde a condutividade é baixa, as linhas de campo se reúnem e se quebram para formar um sistema de circuitos de campo fechados envolvendo o plasma⁽¹⁾.

Essas observações foram feitas⁽¹⁾ durante a fase seguinte à implosão radial e antes do fim da fase de contração. É também observada uma instabilidade rotacional após a fase de contração axial⁽⁹⁾. É observado que o anel de plasma, por exemplo, de raio $\sim 0,5$ cm e espessura $\sim 0,2$ cm⁽³⁾, separa-se em um número discreto de anéis aleatoriamente distribuídos, usualmente de cinco a sete. O tempo de formação dos anéis varia de 0,2 a 0,5 μ s (uma verdadeira taxa de crescimento exponencial não pode ser medida e o tempo citado corresponde ao tempo para o qual a amplitude da perturbação torna-se compará-

vel à espessura do anel).

1.1 - Análise Teórica

A análise teórica dos resultados experimentais é complicada devido à falta de medidas diretas dos perfis de densidade e de temperatura do plasma na maioria das experiências. Então o regime de colisionalidade⁽¹⁰⁾ do plasma em cada experiência não é conhecido precisamente. Em algumas experiências a instabilidade observada tem sido interpretada como o modo tearing colisional^(2, 6, 7, 11). Neste caso, a discrepância entre os valores experimental e teórico para a taxa de crescimento tem sido atribuída a vários efeitos tais como curto comprimento de bobina, rotação do plasma, etc. Alguns resultados tem sido explicados em termos do modo tearing não colisional^(8, 12). Entretanto, os cálculos analíticos conhecidos, para modos resistivos em configurações de confinamento sem cisalhamento, são válidos somente para modos com o deslocamento radial perturbado localizado na camada resistiva. Isto restringe a análise para modos de número azimutal $m \geq 2$. Como uma coluna de plasma com seção circular tem simetria cilíndrica, não deve existir uma razão a priori para que um dado número azimutal m seja preferido. O modo $m = 0$ (salsicha) deve ser portanto o modo básico a ser excitado. Já o modo $m = 1$ tem um papel importante em pinches difusos⁽¹³⁾ e em pinches de campo reverso com cisalhamento⁽¹⁴⁾ e é interessante estudar a possibilidade de que esse modo ocorra também em configurações sem cisalhamento.

No capítulo 2 usamos as equações magnetohidrodinâmicas (equações de movimento, continuidade e adiabática) acopladas às equações de Maxwell para descrever o equilíbrio e as

perturbações da coluna cilíndrica de plasma. Os perfis de \vec{B} (caracterizando a configuração de campo reverso) são da forma esquematizada na figura 1.1.

As equações gerais, obtidas tanto na região resistiva em torno de $r = r_0$, como na região ideal, onde se despreza a resistividade, são usadas depois para o estudo do modo $m = 0$, no capítulo 3, que é importante para a excitação de ondas magneto-acústicas na coluna de plasma, e do modo $m = 1$, a que nos referimos anteriormente, no capítulo 4.

Para o modo $m = 0$, verificamos que a rotação tem um papel preponderante para o modo associado à compressibilidade finita do plasma. Esse modo tem uma taxa de crescimento bem maior que a correspondente à do modo $m = 0$ sem rotação, ou modo "tearing" usual. Como os dados experimentais, associados a instabilidades rotacionais, indicam que os modos "kink" $m = 1$ e $m = 2$ ocorrem mais frequentemente, supomos que um fator de estabilização para o modo $m = 0$ seja a inclusão do termo de efeito Hall (proporcional a $\vec{j} \times \vec{B}$, onde \vec{j} é a densidade de corrente) na lei de Ohm generalizada (apêndice E).

1.2 - Descrição do Método de Análise

Vamos dividir a coluna de plasma em duas regiões. Uma, denominada camada resistiva e de pequena espessura, e onde o campo magnético se anula. Nela será considerado o efeito da resistividade finita do plasma. A outra, onde a resistividade é considerada nula, é a região magnetohidrodinâmica ideal. Consideramos perturbações normais em torno do equilíbrio descritas por

$$\tilde{\chi}(\vec{r}) = \chi_1(r) \exp \left[i(m\theta + kz - \omega t) \right]$$

As duas regiões são esquematizadas na figura 1.2.

As equações que descrevem as perturbações da velocidade do fluido e do campo magnético são linearizadas e solucionadas nas regiões magnetohidrodinâmica ideal e resistiva. As equações na região ideal têm um ponto singular em $r = r_0$, onde $B(r_0) = 0$. As soluções destas equações têm que casar assintoticamente com as soluções das equações não singulares da camada resistiva. Este casamento assintótico é um problema de autovalor que permite a determinação da taxa de crescimento das instabilidades.

Tal procedimento é feito nos capítulos 3 e 4 onde são estudados os modos $m = 0$ e $m = 1$, respectivamente. Com isso estabelecemos uma equação de autovalor que envolve também o cálculo de uma constante que depende do nosso modelo para a configuração física. A determinação dessa constante e a correspondente determinação completa da taxa de crescimento é feita nos apêndices A e B.

Em relação ao modo $m = 0$ é feita no apêndice D uma analogia desse modo com o modo gravitacional resistivo em uma "fatia de plasma".

Para o modo $m = 1$, consideramos o caso de possível estabilização por cisalhamento na rotação, no apêndice C, estabelecendo equações onde o autovalor pode ter uma representação complexa.

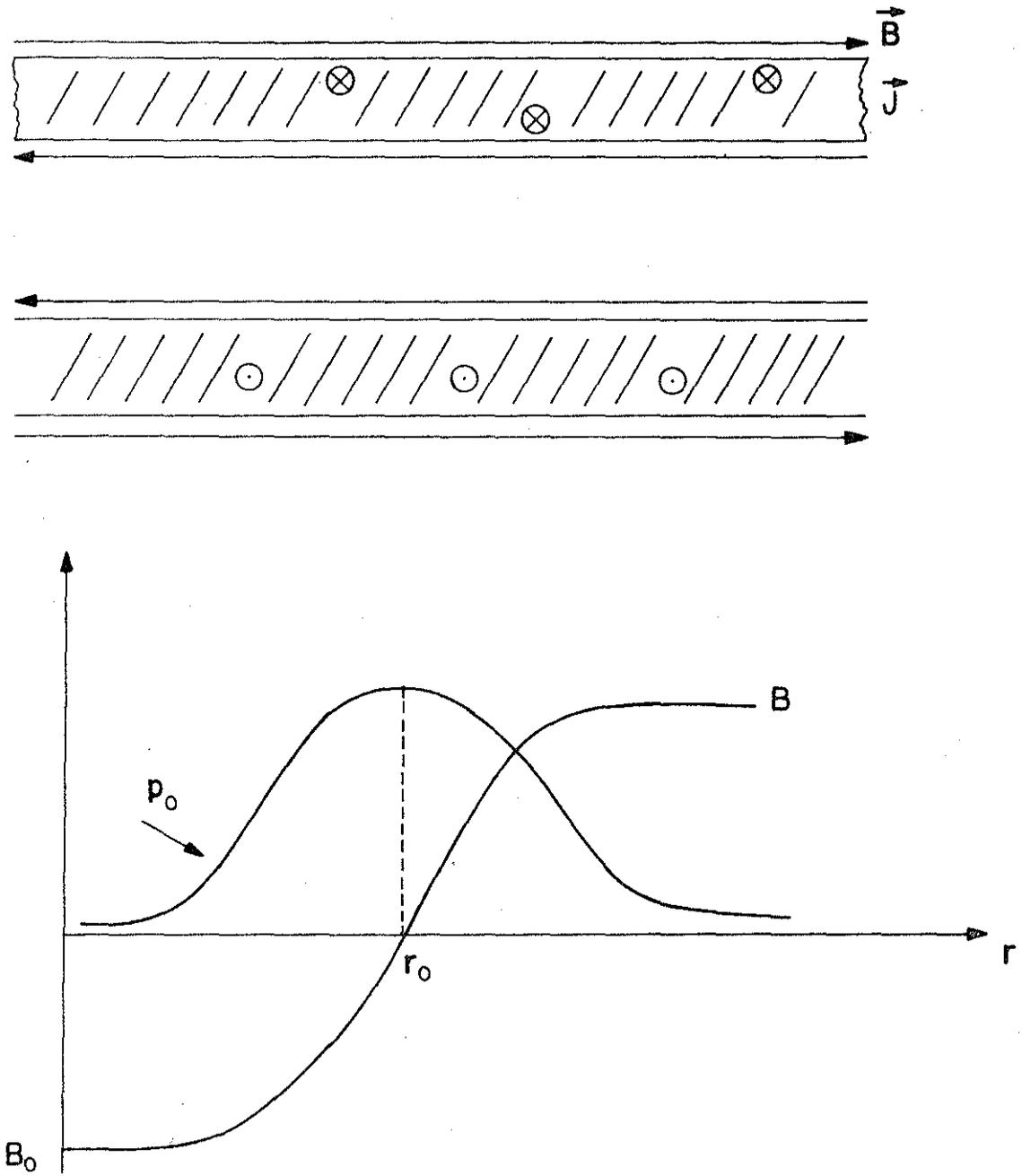


Figura 1.1 - Perfis da pressão e campo magnético no equilíbrio em configuração de campo reverso ($\Omega = 0$)

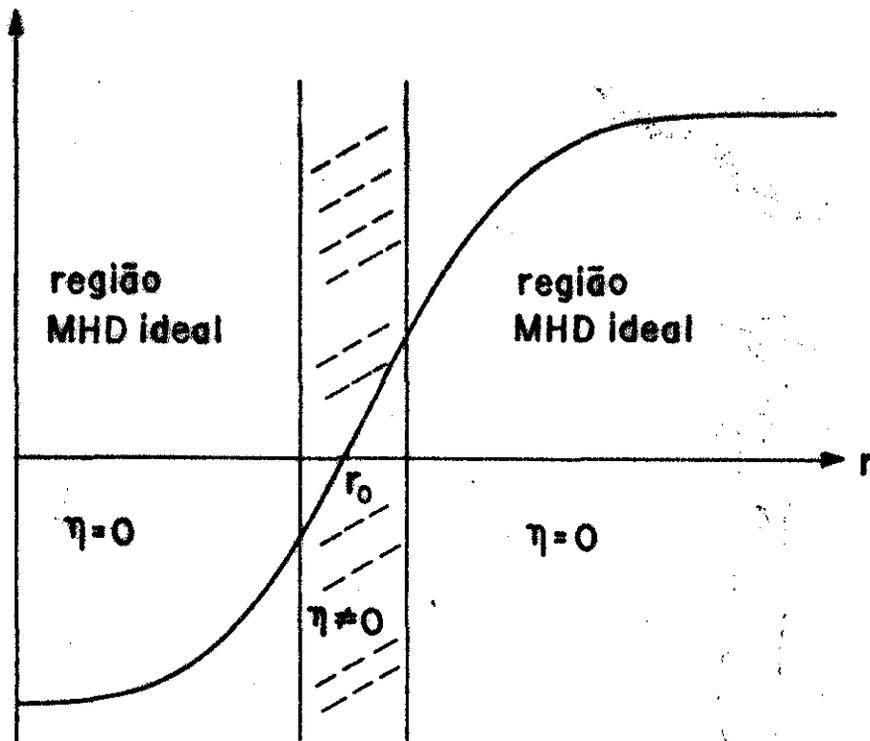


Figura 1.2 - Representação esquemática da camada resitiva e região MHD ideal

CAPÍTULO 2

Formulação do Problema e Equações Gerais

Neste capítulo são obtidas as equações gerais magnetohidrodinâmicas levando em conta a resistividade, a rotação e a compressibilidade da coluna de plasma.

Após a análise do equilíbrio, as perturbações são analisadas na região magnetohidrodinâmica (MHD) ideal e na camada resistiva. O limite magnetohidrodinâmico ideal reduz-se aos resultados conhecidos na literatura. É analisado também na região ideal o comportamento assintótico para os modos $m = 0$ e $m = 1$ que são estudados nos capítulos 2 e 3. Nestes capítulos é também estudado o problema do casamento assintótico das soluções das equações resistivas com as correspondentes soluções ideais.

2.1 - Equilíbrio e Equações Básicas

As equações básicas para a nossa descrição são: Equação do Movimento,

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla p \quad (2.1)$$

Equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \vec{v}, \quad (2.2)$$

Equação adiabática do fluido,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.3)$$

Equações de Maxwell,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\eta}{4\pi} (\nabla \times \nabla \times \vec{B}), \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

A equação (2.4) engloba a lei de Ohm $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$ e a lei de Faraday e descreve a evolução do campo magnético, sendo que supomos a existência de uma resistividade η constante e não nula.

As quantidades de equilíbrio de nosso problema são dadas por

$$\vec{B} = B(r) \hat{e}_z, \quad (\text{campo magnético})$$

$$\vec{v} = v_0(r) \hat{e}_\theta, \quad (\text{velocidade do fluido})$$

onde $v_0 = r \Omega(r)$ e Ω é a velocidade de rotação da coluna de plasma

$$p = p(r) \quad (\text{pressão do plasma})$$

$$\rho = \rho(r) \quad (\text{densidade do plasma})$$

A constante γ representa a razão entre os calores específicos, a pressão constante e a volume constante.

No equilíbrio temos $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ e $\eta = 0$. Além disso os perfis de \vec{B} (caracterizando a configuração de campo reverso) e p são considerados do tipo mostrado na figura 1-1.

A equação (2.1) fornece para o balanço de pressão no equilíbrio a relação:

$$\rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla p.$$

Desta última equação segue diretamente a condição

$$\rho \Omega^2 r = \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{8\pi} + p \right). \quad (2.6)$$

Vamos definir agora as quantidades adimensionais

$$\beta = \frac{8\pi p}{B_0^2}, \quad b = \frac{B}{B_0}, \quad f = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{e} \quad \tilde{r} = \frac{r^2}{a^2},$$

onde B_0 e ρ_0 são os valores médios de B e ρ , respectivamente, e a é o raio da coluna de plasma. Em termos destas quantidades, a equação de equilíbrio pode ser escrita como

$$\frac{\Omega^2 a^2}{v_A^2} f(\tilde{r}) = \frac{d}{dr} (\beta + b^2), \quad (2.7)$$

onde

$$v_A = \frac{B_0}{(4\pi\rho_0)^{1/2}}$$

é a velocidade de Alfvén. Esta equação mostra que a rotação da coluna de plasma influi nas condições de equilíbrio somente quando $\Omega \sim \frac{v_A}{a}$.

2.2 - Análise de Perturbação

Vamos linearizar as equações (2.1) - (2.5) con

siderando perturbações da forma:

$$\tilde{\chi} = X_1(r) \exp [i (\omega t + m\theta + kz)]$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \rho_0 (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 + \rho_0 (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_0 + \rho_1 (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_0 = \\ = \frac{1}{4\pi} [(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0] - \nabla (p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{4\pi}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_1) + \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) - \frac{\eta}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = - \vec{V}_0 \cdot \nabla p_1 - \vec{V}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_1 \nabla \cdot \vec{V}_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{V}_1 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = - \vec{V}_0 \cdot \nabla \rho_1 - \vec{V}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_1 \nabla \cdot \vec{V}_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{V}_1 \quad (2.11)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (2.12)$$

O conjunto completo de 8 equações para as componentes de \vec{V}_1 , \vec{B}_1 e p_1 e ρ_1 será obtido sem aplicar qualquer ordenamento, ao contrário do tratamento usual para modos resistivos, onde um ordenamento consistente em termos de um pequeno parâmetro é feito de imediato ⁽¹⁹⁾. Deste ordenamento segue que, para configurações com cisalhamento $v_{1z} \ll v_{1r}, v_{1\theta}$ e conseqüentemente $\nabla \cdot \vec{V}_{11} \sim 0$, onde \vec{V}_{11} é a componente da velocidade de fluido perpendicular às linhas de campo.

Em nosso caso ordenamentos apropriados em termos de pequenos parâmetros relevantes serão aplicados nas regiões ideal e resistiva independentemente.

De (2.9) obtemos 3 equações correspondentes às componentes de \vec{B}_1 :

$$-i\omega B_{1r} = -im\Omega B_{1r} + ik B V_{1r} - \frac{\eta}{4\pi} \left[\frac{B_{1r}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1r}}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1r} + \frac{2im}{r^2} B_{1\theta} \right], \quad (2.13)$$

$$-i\omega B_{1\theta} = r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_{1r} + ik B V_{1\theta} - \frac{\eta}{4\pi} \left[\frac{B_{1\theta}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2im}{r^2} B_{1r} + \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1\theta} \right] - im\Omega B_{1\theta} \quad (2.14)$$

e

$$-i\omega B_{1z} = -im\Omega B_{1z} - B (\nabla \cdot \vec{V}_1) + ik B V_{1z} - V_{1r} \frac{dB}{dr} - \\ - \frac{\eta}{4\pi} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} \right) + \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1z} \right]. \quad (2.15)$$

Ao invés da velocidade perturbada \vec{V}_1 introduziremos o deslocamento lagrangeano $\vec{\xi}$ definido por

$$\vec{\xi} = \int \vec{v}_1 dt = i \frac{\vec{V}_1}{\omega}$$

A equação (2.11) fornece

$$\rho_1 = \frac{-\omega \frac{\partial \rho_0 \xi_r}{\partial r} - \rho_0 \omega \nabla \cdot \vec{\xi}}{\omega - m\Omega}$$

sendo

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + i \frac{m}{r} \xi_\theta + ik \xi_z.$$

Substituindo o valor de ρ_1 em (2.8), obtemos as seguintes equações para as 3 componentes de $\vec{\xi}$:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho_0 \xi_r + m \rho_0 \omega \Omega \xi_r + 2 i \rho_0 \omega \Omega \xi_\theta + \\ & + r \Omega^2 \frac{\omega \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \xi_r + \omega \rho_0 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\omega - m \Omega} = \frac{ik}{4\pi} B B_{1r} - \frac{d}{dr} \left(p_1 + \frac{B B_{1z}}{4\pi} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho_0 \xi_\theta - m \rho_0 \omega \Omega \xi_\theta - 2i \rho_0 \omega \Omega \xi_r - i \rho_0 \omega \frac{d\Omega}{dr} r \xi_r = \\ & = \frac{ik}{4\pi} B B_{1r} - \frac{im}{r} \left(p_1 + \frac{B B_{1z}}{4\pi} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

e

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_z + m \rho_0 \omega \Omega \xi_z = \frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dr} B_{1r} - ik p_1. \quad (2.18)$$

Finalmente da equação (2.10) obtemos:

$$p_1 = \frac{-\omega \xi_r \frac{d\rho_0}{dr} - \omega \rho_0 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\omega - m \Omega} \quad (2.19)$$

Substituindo os valores de V_{1r} , $V_{1\theta}$ e V_{1z} em termos de ξ_r , ξ_θ , ξ_z , nas equações (2.13) - (2.15) e o valor de $\nabla \cdot \vec{\xi}$ em

termos de p_1 e ξ_r em (2.16) obtemos:

$$(\omega - m \Omega) B_{1r} = i \omega k B \xi_r + \frac{i \eta}{4 \pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1r}}{\partial r} \right) - \frac{1 + m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1r} - \frac{2 i m}{r^2} B_{1\theta} \right] \quad (2.20)$$

$$(\omega - m \Omega) B_{1\theta} = \frac{i r d \Omega / dr}{\omega - m \Omega} B_{1r} + i \omega k B \xi_\theta + \frac{i \eta}{4 \pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1r}}{\partial r} \right) - \frac{1 + m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1\theta} + \frac{2 i m}{r^2} B_{1\theta} \right] \quad (2.21)$$

$$(\omega - m \Omega) B_{1z} = i \omega k B \xi_z + (\omega - m \Omega) \frac{B p_1}{\gamma p_0} + \omega B \frac{dp_0 / dr}{\gamma p_0} \xi_r - \omega \frac{dB}{dr} \xi_r + \frac{i \eta}{4 \pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} \right) - \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1z} \right] \quad (2.22)$$

e

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r + m \rho_0 \omega \Omega \xi_r + 2 i \rho_0 \omega \Omega \xi_\theta - \frac{r \Omega^2 \rho_0 p_1}{\gamma p_0} - \frac{r \Omega^2 \rho_0 \omega}{\omega - m \Omega} \frac{dp_0 / dr}{\gamma p_0} \xi_r + \frac{r \Omega^2 \omega}{\omega - m \Omega} \frac{dp_0}{dr} \xi_r = \frac{i k}{4 \pi} B B_{1r} - \frac{d}{dr} \left(p_1 + \frac{B B_{1z}}{4 \pi} \right). \quad (2.23)$$

As equações (2.17) - (2.23) relacionam portanto as variáveis ξ_r ,

ξ_θ , ξ_z , B_{1r} , $B_{1\theta}$, B_{1z} e p_1

Finalmente p_1 pode ser eliminado substituindo o seu valor dado por (2.18) nas equações (2.17), (2.22) e (2.23).

Obtemos assim as equações:

$$\begin{aligned}
 (\omega - m\Omega) B_{1z} = & i\omega k B \xi_z + \frac{B(\omega - m\Omega)}{i k \gamma \rho_0} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dr} B_{1r} + \right. \\
 & \left. + \omega^2 \rho_0 \xi_z - m \rho_0 \omega \Omega \xi_z \right] + \frac{\omega B}{\gamma \rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r - \omega \frac{dB}{dr} \xi_r + \\
 & + \frac{i\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} \right) - \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1z} \right], \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - ik \rho_0 \omega^2 \xi_r + im k \rho_0 \omega \Omega \xi_r - 2\omega k \rho_0 \Omega \xi_\theta + \frac{r \Omega^2 \rho_0}{\gamma \rho_0} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dr} B_{1r} - \right. \\
 \left. - \omega^2 \rho_0 \xi_z + m \rho_0 \omega \Omega \xi_z \right] - \frac{ik r \omega \rho_0 \Omega^2}{\omega - m\Omega} \frac{d\rho_0/dr}{\gamma \rho_0} \xi_r + \\
 + \frac{ik r \omega \Omega^2}{\omega - m\Omega} \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r = - \frac{k^2}{4\pi} B B_{1r} - \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dr} B_{1r} + \omega^2 \rho_0 \xi_z - \right. \\
 \left. - m \rho_0 \omega \Omega \xi_z + \frac{ik}{4\pi} B B_{1z} \right] \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 - \omega^2 \rho_0 \xi_\theta + m \rho_0 \omega \Omega \xi_\theta - 2i \rho_0 \omega \Omega \xi_r - i \rho_0 \omega r \frac{d\Omega}{dr} \xi_r = \\
 = \frac{ik}{4\pi} B B_{1\theta} - \frac{m}{kr} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{dB}{dr} B_{1r} + \omega^2 \rho_0 \xi_z - m \rho_0 \omega \Omega \xi_z + \frac{ik}{4\pi} B B_{1z} \right] \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Obtivemos então um conjunto de 6 equações para as variáveis

ξ_j e B_{lj} , $j = r, \theta, z$, válidas na camada resistiva e na região ideal, em geral. O escalonamento dessas equações em termos de um pequeno parâmetro será feito nos capítulos 2 e 3 ao serem estudados os modos $m = 0$ e $m = 1$. Vamos prosseguir fazendo inicialmente a análise dessas equações na região magnetohidrodinâmica ideal.

2.3 - Limite Magnetohidrodinâmico Ideal

Fora da camada resistiva supomos que a evolução das grandezas perturbadas não é afetada pela resistividade do plasma, ou seja, o campo magnético é "congelado" ao fluido. Então fazendo $\eta = 0$, nas equações (2.20) - (2.22), obtemos:

$$B_{lr} = \frac{i \omega k B}{F} \xi_r,$$

$$B_{l\theta} = \frac{i r d\Omega/dr}{F} B_{lr} + \frac{i \omega k B}{F} \xi_\theta$$

e

$$B_{lz} = \frac{-B(\nabla \cdot \vec{\xi})}{F} + \frac{\omega}{F} i k B \xi_z - \frac{\omega dB/dr}{F} \xi_r,$$

onde

$$F = \omega - m \Omega.$$

Da equação (2.26) obtemos

$$\xi_\theta = \frac{2i \rho_0 \omega \Omega + i \omega r \frac{d\Omega}{dr} (\rho_0 - \frac{k^2 B^2}{4\pi} \frac{1}{F^2})}{-\rho_0 \omega F + \frac{k^2 B^2}{4} \frac{\omega}{F}} \xi_r +$$

$$+ \frac{\left(\frac{-m \rho_0 \omega F}{kr} + \frac{mk B^2 \omega}{4\pi r F} \right) \xi_z + \frac{im}{4\pi r} B^2 \frac{\omega}{F} \nabla \cdot \vec{\xi}}{-\rho_0 \omega F + \frac{k^2 B^2}{4\pi} \frac{\omega}{F}} \quad (2.27)$$

onde ξ_z é dado por (usando as equações (2.18) e (2.19) e a equação de equilíbrio)

$$\xi_z = \frac{\rho_0 \Omega^2 r \xi_r + \gamma \rho_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{im}{r} \xi_\theta \right)}{\frac{\omega}{F} k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega F} \quad (i k \frac{\omega}{F}) \quad (2.28)$$

Substituindo esta equação na expressão para a divergência de $\vec{\xi}$, temos:

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{-\rho_0 \omega F \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{im}{r} \xi_\theta \right) - k^2 \frac{\omega}{F} \rho_0 \Omega^2 r \xi_r}{\frac{\omega}{F} k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega F} \quad (2.29)$$

Temos que calcular o valor da pressão total perturbada

$$p_1 + \frac{B B_{1z}}{4 \pi} \quad \text{para substituímos na Equação (2.16) para } \xi_r.$$

Essa expressão é dada então por:

$$p_1 + \frac{B B_{1z}}{4} = \frac{\rho_0 \omega^2 \left(\gamma \rho_0 + \frac{B^2}{4\pi} \right) - \gamma \rho_0 \frac{k^2 B^2}{4\pi} \frac{\omega^2}{F^2}}{\frac{\omega}{F} k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega F} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \right.$$

$$+ \frac{im}{r} \xi_{\theta} + \frac{\rho_0 \omega^2 \Omega^2}{\frac{\omega}{F} k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega F} r \xi_r$$

Definindo

$$C = - \left(\frac{B^2}{4\pi} + \gamma \rho_0 \right) \rho_0 F^2 + \gamma \rho_0 \frac{k^2 B^2}{4\pi}$$

e multiplicando e dividindo o 1º termo por

$$A = \left(-\rho_0 F^2 + \frac{k^2 B^2}{4\pi} \right),$$

onde A e C são equivalentes às quantidades definidas por Spies⁽²⁰⁾, obtemos:

$$\begin{aligned} p_l + \frac{B B_l z}{4\pi} &= - \frac{\omega}{F} \frac{A C}{r (\rho_0^2 F^4 + k^2 C)} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + im \xi_{\theta} \right] + \\ &+ \frac{\rho_0 \omega^2 \Omega^2}{\frac{\omega}{F} k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega F} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27) obtemos

$$\begin{aligned} im \xi_{\theta} &= \frac{\frac{\omega}{F} (k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 F^2) (-2m\rho_0 \omega \Omega - \frac{Ar}{F^2} \frac{dF}{dr})}{r D} r \xi_r - \\ &- \frac{\frac{m^2}{r^2} C}{D} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{m^2 \rho_0^2 F^2 \Omega^2}{r D} r \xi_r \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde

$$D = k^2 C + \rho_0^2 F^4$$

com

$$K^2 = k^2 + \frac{m^2}{r^2}$$

A expressão para D é equivalente à citada na referência acima (20).

Substituindo finalmente (2.31) e (2.30) em (2.29), (2.30) e (2.31) em (2.16) vem:

$$\left(\frac{d}{dr} \frac{AC}{r F^2 D} \frac{d}{dr} + \frac{\phi}{F^2} \right) (r \xi_r) = 0 \quad (2.32)$$

onde

$$\phi = - \frac{A}{r} + \frac{AC}{r F^2 D} \left(\frac{dF^2}{dr} \right) + \frac{\rho_0 \Omega^2}{r D} \left[4F^2 (k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 F^2) - 4m \rho_0 F^3 \Omega + k^2 r^2 A \Omega^2 \right] - \frac{d}{dr} \left\{ \rho_0 \Omega^2 + \frac{1}{rD} \left[\frac{AC}{F} \frac{dF}{dr} + \frac{\rho_0 F \Omega}{r} (2mC + r^2 \rho_0 F A \Omega) \right] \right\}$$

Esta equação é a mesma equação obtida por Spies (20), onde sua variável ξ_r é igual a nossa variável $r \xi_r$. Spies utiliza esta equação para estudar as propriedades do espectro MHD ideal num theta-pinch com rotação. Neste trabalho vamos considerar modos que aparecem explicitamente devido ao efeito da resistividade do plasma e não modificações introduzidas pela resistividade do plasma nos modos descritos por Spies. Portanto, nós vamos considerar $\omega = 0$ (estabilidade marginal) ao resolver a equação (2.34) na região ideal. A frequência do modo será levada em consideração somente na camada resistiva e deverá tender para zero no limite $\eta \rightarrow 0$.

2.4 - Equações Magnetohidrodinâmicas para os Modos $m = 0$

e $m = 1$. Comportamento Assintótico.

2.4.1 - Modo $m = 0$

Fazendo $m = 0$ em (2.32) obtemos:

$$\frac{d}{dr} \frac{AC}{rD} - \frac{d}{dr} (r \xi_r) + \phi (r \xi_r) = 0 \quad (2.33)$$

onde

$$\phi = -\frac{A}{r} + \frac{\rho_0 \Omega^2}{r} \left[\frac{4\omega^2 (k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega^2)}{D} + \frac{k^2 r^2 A \Omega}{D} \right] -$$

$$-\frac{d}{dr} \left[\rho_0 \Omega^2 \left(1 + \rho_0 \omega^2 \frac{A}{D} \right) \right]$$

e

$$F = \omega = \text{cte.}$$

$$\text{Sendo } k^2 \gamma \rho_0 - \rho_0 \omega^2 = \frac{D}{A} \text{ vem,}$$

$$\phi = -\frac{A}{r} + \frac{\rho_0 \Omega^2}{r} \left[\frac{4\omega^2}{A} + \frac{k^2 r^2 \Omega^2 A}{D} \right] - \frac{d}{dr} \left[\rho_0 \Omega^2 \left(1 + \rho_0 \omega^2 \frac{A}{D} \right) \right]$$

onde A, C e D se reduzem a

$$A = -\rho_0 \omega^2 + \frac{k^2 B^2}{4\pi}$$

$$C = -\left(\frac{B^2}{4\pi} + \gamma \rho_0 \right) \rho_0 \omega^2 + \gamma \rho_0 \frac{k^2 B^2}{4\pi}$$

e

$$D = k^2 C + \rho_0^2 \omega^4$$

Desprezando os termos de inércia $\rho_0 \omega^2$ e mantendo a velocidade de rotação Ω na região ideal vem

$$\frac{d}{dr} \left(r B^2 \frac{d \xi_r}{dr} \right) - \left[\frac{B^2}{r} (1 + k^2 r^2) - \frac{dB^2}{dr} \right] \xi_r + \frac{4\pi \rho_0^2 \Omega^4}{\gamma p_0} r^3 \xi_r - 4\pi \frac{d}{dr} (\rho_0 \Omega^2) r^2 \xi_r = 0 \quad (2.34)$$

Esta equação tem um ponto singular em $r = r_0$ tal que $B(r_0) = 0$. Para fazer o casamento das autofunções nas regiões ideal e resistiva é necessário determinar o comportamento assintótico para ξ_r em torno de r_0 .

Definindo a variável adimensional

$$x = \frac{r - r_0}{r_0}$$

e

$$B = \left(r \frac{dB}{dr} \right)_{r_0} x$$

essa equação fica:

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x)^2 \frac{d \xi_r}{dx} \right] - \frac{x^2}{1+x} (1 + k^2 r_0^2 (1+x)^2) \xi_r + 2x \xi_r + a_1 \xi_r = 0 \quad (2.35)$$

onde, no entorno de $r = r_0$, a_1 é escrito como

$$a_1 = \frac{r_0 a_0}{B_0^2}$$

e

$$a_0 = \frac{4\pi \rho_0^2 \Omega^4}{\gamma p_0} r_0^3 - 4\pi r_0^2 \frac{d\rho_0}{dr_0} \Omega^2$$

É fácil verificar que (2.35) tem uma solução assintótica do tipo $\xi_r \sim x^s$ quando $x \rightarrow 0$ onde s é dado por:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a_1}}{2}$$

Logo

$$\xi_r \sim x^{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a_1}}{2}} \quad (x \rightarrow 0) \quad (2.36)$$

A solução das equações resistivas portanto deverá ter um comportamento assintótico semelhante à equação (2.36) para que seja possível o casamento. Esse casamento é discutido no capítulo 3, onde é estabelecida a correspondente equação de autovalor para o modo $m = 0$ com $\Omega \neq 0$. No apêndice A é obtida uma solução da equação (2.35) para as regiões onde $B = \text{cte}$ e $B = B_0 x$. Esta solução é utilizada para a determinação da taxa de crescimento desse modo para um modelo simples da configuração de equilíbrio com campo reverso.

2.4.2 - Modo $m = 1$

Para o modo $m = 1$, conforme é mostrado no capítulo 4, tomamos o limite incompressível. Fazendo, portanto, na equação (2.32), $\gamma \rightarrow \infty$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[r^3 \left(\frac{\rho_0 F^2 - \frac{k^2 B^2}{4\pi}}{m^2 + k^2 r^2} \right) \frac{d\xi_r}{dr} \right] + r \left[\left(-\rho_0 F^2 - \frac{k^2 B^2}{4\pi} \right) \frac{m^2 - 1 + k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \right. \\ \left. + 4 \frac{k^2 r^2 \rho_0^2 \Omega^2 F^2}{(\rho_0 F^2 - \frac{k^2 B^2}{4\pi})} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0 (\omega^2 + k^2 r^2 \Omega^2) - \frac{k^2 B^2}{4\pi}}{m^2 + k^2 r^2} \right) \right] \xi_r = 0 \quad (2.37) \end{aligned}$$

Considerando somente $m^2 \gg k^2 r^2$, ou seja, o limite de grande comprimento onda, para $m^2 \neq 0$, a equação (2.37) reduz-se a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[r^3 \left(\rho_0 F^2 - \frac{k^2 B^2}{4\pi} \right) \frac{d\xi_r}{dr} \right] + r \left[- \left(\rho_0 F^2 - \frac{k^2 B^2}{4} \right) (m^2 - 1) + \right. \\ \left. + r \frac{d}{dr} \left(\rho_0 \omega^2 - \frac{k^2 B^2}{4\pi} \right) \right] \xi_r = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esta equação é a mesma que a usada por Freidberg e Pearstein⁽²¹⁾ em sua análise cinética de instabilidades rotacionais em θ -pinches no limite de frequência de arrasto nula.

Vamos considerar instabilidades que surgem somente do ponto de acumulação⁽²⁰⁾ $F = 0$, devido ao efeito da resistividade. Vamos então fazer $F = 0$ e desprezar os termos de inércia. É fácil verificar que isto é válido somente se $\Omega^2 \ll m^2 k^2 V_A^2$ onde V_A é a velocidade de Alfvén, definida por:

$$V_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho_0}$$

A equação resultante tem um ponto singular onde $B = 0$. Próximo a esse ponto singular, tal como visto para o modo $m = 0$, o campo magnético é dado por

$$B = \left(r \frac{dB}{dr} \right) x_{r_0}$$

Então para $x \rightarrow 0$, 2 das soluções de (2.38)

comportam-se como

$$\xi_{r1} \approx C_1 + C_2 x \quad (2.39)$$

e

$$\xi_{r2} \approx \frac{C_3}{x} + C_4 \ln x \quad (2.40)$$

onde C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes.

As soluções não têm um comportamento oscilatório próximo da singularidade e o sistema é marginalmente estável para o modo ideal (22). Tal como a equação equivalente para o modo $m = 0$, resolvemos também a equação (2.38) no apêndice B para o nosso modelo de configuração de campo reverso.

CAPÍTULO 3

Modo $m = 0$ Resistivo em Configurações de Campo Reverso

Neste capítulo mostramos que em configurações de campo reverso, incluindo o efeito da rotação do plasma, o modo $m = 0$ se reduz ao modo "tearing" usual somente no limite de rotação nula⁽²³⁾.

Para um valor finito da rotação, o plasma torna-se compressional, com sua taxa de crescimento proporcional à potência $\frac{1}{3}$ da resistividade do plasma. O modo $m = 0$ é relevante porque é estável no limite MHD ideal, ao contrário do modo $m = 1$, descrito no capítulo 4, que é instável mesmo no limite MHD ideal⁽²⁴⁾. Resolvemos pelo método de teoria de camada limite as equações resistivas para o modo $m = 0$ com $\Omega = 0$ e $\Omega \neq 0$, realizando o casamento assintótico com as correspondentes soluções ideais descritas no capítulo 2. As equações obtidas para o modo compressivo são resolvidas numericamente para determinados valores experimentais de parâmetros do plasma e é feita uma analogia desse modo com o modo gravitacional resistivo em uma "fatia de plasma" no apêndice D. Obtivemos também uma solução analítica para o caso em que existem fortes gradientes de campo dentro da camada resistiva. O modo "tearing" usual, com rotação nula, cuja taxa de crescimento é proporcional à potência $\frac{3}{5}$ da resistividade, é resolvido na "aproximação de ψ - constante"⁽²⁵⁾, sendo calculada a sua razão de crescimento que é bem menor que a correspondente ao modo rotacional compressivo.

Portanto a compressibilidade do plasma desempenha um papel importante para o modo resistivo $m = 0$.

3.1 - Equações Resistivas para o Modo $m = 0$

No estudo do modo $m = 0$ fazemos a hipótese de rotação rígida ($\Omega = \text{cte}$), mantendo porém a compressibilidade finita da coluna de plasma.

Portanto, fazendo $m = 0$ e $\frac{d\Omega}{dr} = 0$, as equações (2.16), (2.23) reduzem-se a:

$$\begin{aligned}
 & -\rho_0 \omega^2 \xi_r + 2i\rho_0 \omega \Omega \xi_\theta + r\rho_0 \Omega^2 \left(-\frac{p_1}{\gamma p_0} \right) + r\rho_0 \Omega^2 \left(-\frac{dp_0/dr \xi_r}{\gamma p_0} \right) = \\
 & = \frac{ik}{4\pi} B B_{1r} - \frac{d}{dr} \left(p_1 + \frac{B B_{1z}}{4\pi} \right) - r \Omega^2 \frac{dp_0}{dr} \xi_r \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_\theta - 2i\rho_0 \omega \Omega \xi_r = \frac{ik}{4\pi} B B_{1\theta} \quad (3.2)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_z = \frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dr} B_{1r} - ik p_1 \quad (3.3)$$

$$B_{1r} = ikB \xi_r + \frac{i\eta}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_{1r}}{\partial r} - \frac{1+k^2 r^2}{r^2} B_{1r} \right] \quad (3.4)$$

$$B_{1\theta} = ikB \xi_\theta + \frac{i\eta}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial r} - \frac{1+k^2 r^2}{r^2} B_{1\theta} \right] \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 B_{1z} &= ikB \xi_z + \frac{B p_1}{\gamma p_0} + B \frac{dp_0}{dr} \frac{\xi_r}{\gamma p_0} - \frac{dB}{dr} \xi_r + \\
 &+ \frac{i\eta}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - k^2 B_{1z} \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$p_1 = -\xi_r \frac{dp_0}{dr} - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (3.7)$$

Sendo

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + ik \xi_z \quad (3.8)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{1r}}{\partial r} \right) + ik B_{1z} = 0 \quad (3.9)$$

O modo $m = 0$ não introduz dependência das grandezas perturbadas em θ , mantendo a simetria de rotação da coluna de plasma no equilíbrio. Portanto a componente ξ_θ da perturbação introduz apenas um deslocamento angular numa direção ignorável. Para simplificar a álgebra, podemos então supor $\xi_\theta = 0$.

Vamos substituir os valores de p_1 e B_{1z} dado por (3.7) e (3.9) na equação (3.1), sendo que em (3.7) usamos o valor de ξ_z dado por (3.3).

Efetuada essa álgebra obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ \gamma p_0 \left[\frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + \frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \frac{dp_0}{dr} \xi_r \right\} + \\ & + \rho_0 \omega^2 \xi_r - \rho_0 \Omega^2 r \left[\frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + \frac{k^2 dp_0 / dr}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \xi_r \right] - \\ & - \frac{d\rho_0}{dr} \Omega^2 r \xi_r = \frac{d}{dr} \left\{ \gamma p_0 \frac{ik dB/dr}{4\pi(\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0)} B_{1r} + \frac{iB}{4\pi k r} \frac{d}{dr} (r B_{1r}) \right\} - \\ & - \frac{ik r \rho_0 \Omega^2 dB/dr}{4\pi(\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0)} - \frac{ik B B_{1r}}{4\pi} \quad (3.10) \end{aligned}$$

Esta equação só envolve as variáveis ξ_r e B_{1r} ,

representando as componentes radiais da velocidade do fluido e do campo magnético. Combinando-a com a equação (3.4) obtemos o sistema básico de equações na camada resistiva para o modo $m = 0$. Vamos escrever essas equações em variáveis adimensionais escalonando as diferentes grandezas em termos do pequeno parâmetro ϵ definido em termos de tempo característico MHD τ_H da do por

$$\tau_H = \frac{r_0}{V_A} = \frac{r_0 \sqrt{4\pi\rho_0}}{\left(r \frac{dB}{dr}\right) r_0} \quad (3.11)$$

e do tempo característico resistivo τ_R definido por

$$\tau_R = \frac{4\pi r_0^2}{\eta} \quad (3.12)$$

através da equação

$$\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R} \ll 1 \quad (3.13)$$

A quantidade δ , que representa a espessura, será definida por

$$\delta = \epsilon^b$$

Em termos do parâmetro ϵ as outras grandezas serão representadas por

$$\xi_r = r_0 \hat{\xi}_r; \quad \omega = i\epsilon^a \Lambda \tau_H^{-1}$$

$$B_{1r} = -ikr_0 \left(r \frac{dB}{dr}\right) r_0 \epsilon^c \psi_r \quad (3.15)$$

sendo

$$\psi_r = \psi_0 + \epsilon^h \psi_{r1}; \quad \psi_0 = \text{cte} \quad (3.16)$$

Dentro da camada o campo B é representado pelo primeiro termo de expansão em série de Taylor, $B(r_0) = 0$, por

$$B = B_0 \delta x \quad ; \quad x = \frac{r-r_0}{\delta r_0} \quad (3.17)$$

e

$$\Lambda \sim \psi_r \sim \hat{\xi}_r \sim x \sim \theta \quad (1)$$

A equação (3.16), é apropriada para uma solução com $\psi_r \approx \text{cte}$, como é usual para o modo tearing.

Com as definições acima é possível escrever as equações (3.4) e (3.10) na forma

$$\begin{aligned} \psi_0 + \varepsilon^h \psi_{rl} = & - \varepsilon^{b-c} x \hat{\xi}_r + \frac{\varepsilon^{1-a-2b+h}}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_{rl}}{dx^2} - \\ & - \frac{\varepsilon^{1-a}}{\Lambda} \psi_0 - \frac{\varepsilon^{1-a+h}}{\Lambda} (1+k^2 r_0^2) \psi_{rl} \end{aligned} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} + \frac{\Omega^2 \tau_H^2 k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \left[\frac{\rho_0 \Omega^2 r_0^2}{\gamma P_0} - \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \right] \varepsilon^{2b-2a} \hat{\xi}_r = \\ = \frac{k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \varepsilon^{-2a+b+c+h} x \frac{d^2 \psi_{rl}}{dx^2} + \frac{\varepsilon^{b+c+d}}{2\gamma\beta} \frac{d\psi_{rl}}{dx} + \\ + \frac{\rho_0 \Omega^2 r_0^2 k^2 r_0^2}{\gamma P_0 \Lambda^2} \varepsilon^{-2a+2b+c} (\psi_0 + \varepsilon^h \psi_{rl}) - \\ - \frac{k^4 r_0^4}{\Lambda^2} \varepsilon^{-2a+3b+c} (\psi_0 + \varepsilon^h \psi_{rl}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\beta = \frac{8\pi p_0}{\left(r \frac{dB}{dr}\right) r_0} \gg \frac{\epsilon^{2a}}{k^2 r_0^2}$$

Os termos proporcionais às diferentes potências de $\frac{1}{\Lambda}$ são os termos que se anulam quando $\eta \rightarrow 0$.

Para balancear os termos que predominam nas equações (3.18) e (3.19) vamos obrigar que

$$b - c = 1 - a - 2b + h = 0 \quad (3.20)$$

A ordem dos termos predominantes na equação (3.19) depende de quando $\Omega = 0$ ou $\Omega \neq 0$. Na próxima seção estudaremos o caso em que $\Omega = 0$, que nos levará ao modo "tearing" usual.

3.2 - Modo "tearing" Resistivo $m = 0$

Para $\Omega = 0$ é fácil ver que a equação (3.20) é satisfeita e os termos que predominam em (3.19) são equilibrados se

$$a = \frac{3}{5}; \quad b = c = h = \frac{2}{5}$$

Neste caso as equações (3.18) e (3.19) reduzem-se

simplesmente a

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} - \sigma^2 x^2 \hat{\xi}_r = \sigma^2 \psi_0 x \quad (3.21)$$

com

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Lambda} (kr_0)^2$$

A taxa de crescimento desse modo varia com a potência $\frac{3}{5}$ da resistividade do plasma como é comum para o modo "tearing".

A equação (3.21) é análoga à obtida por Basu e Coppi⁽²⁵⁾ no estudo do modo de reconexão. Seguindo o tratamento descrito nessa referência, vamos fazer transformações do tipo

$$\frac{\xi_r}{\psi_0} = \hat{\xi}_r^* = y(z) e^{-z}$$

sendo

$$z = \frac{1}{2} \sigma x^2$$

Obtemos então a equação

$$z y'' - (2z - \frac{1}{2}) y' - \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{\sigma}{2}} z^{1/2} e^z$$

a qual admite uma solução particular da forma

$$y(z) = z^\alpha \int_c dt V(t) e^{zt}$$

onde o expoente α , o contorno c e a função $V(t)$ tem que ser determinados

Efetuada a álgebra necessária obtemos uma solução do tipo

$$\frac{\tilde{\xi}_r}{\psi_0} = -\frac{1}{2} \sigma x \int_0^1 dt (1-t^2)^{-1/4} \exp(-1/2\sigma t x^2) \quad (3.22)$$

Fora da camada singular o campo magnético perturbado é dado por

$$\psi = -x\xi$$

A descontinuidade em $(d\psi/dx)/\psi$ através de $x = 0$ é então dada por

$$\Delta' = (d\psi/dx)/\psi \Big|_{x \rightarrow 0^+} - (d\psi/dx)/\psi \Big|_{x \rightarrow 0^-} \quad (3.23)$$

As condições apropriadas de casamento para as soluções da equação resistiva são

$$\frac{d\psi_r}{dx_i}/\psi_s \Big|_{x \rightarrow \infty} = \frac{d\psi}{dx_e}/\psi \Big|_{x \rightarrow 0^+} \quad (3.24)$$

e

$$\frac{d\psi_r}{dx_i}/\psi_s \Big|_{x \rightarrow -\infty} = \frac{d\psi}{dx_e}/\psi \Big|_{x \rightarrow 0^-} \quad (3.25)$$

onde

$$x_e = \frac{r-r_0}{r_0} \quad \text{e} \quad x_i = \frac{r-r_0}{\delta r_0} = x$$

Combinando (3.24) e (3.25) obtemos

$$\left[(d\psi_r/dx)/\psi_s \right]_{-\infty}^{\infty} = \Delta' \quad (3.26)$$

Usando a expansão

$$\psi_r = \psi_0 + \epsilon^h \psi_{1r}$$

obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \psi_{1r}}{dx^2} dx = \Delta' \psi_0$$

onde usamos $x_e = \delta x = \epsilon^b x$

Como

$$\psi_0 = -x \hat{\xi}_r + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_{1r}}{dx^2}$$

resulta

$$\Lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + x \frac{\hat{\xi}_r}{\psi_0} \right] dx = \Delta' \quad (3.27)$$

com $\hat{\xi}_r$ dado por (3.22).

Substituindo (3.22) em (3.27) temos

$$\Delta' = \Lambda I$$

onde

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \sigma x^2 \int_0^1 dt (1-t^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma t x^2\right) \right] dx$$

Definindo

$$u^2 = \frac{1}{2} \sigma x^2 t \quad ; \quad t = z^{1/2}$$

e usando a relação

$$\int_0^u \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^\nu} dx = \frac{u^\mu}{\mu} {}_2F_1(\nu, \mu, 1+\mu; -\beta u),$$

onde ${}_2F_1$ representa a série hipergeométrica

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

e

$$\left| \arg(1 + \beta u) \right| < \pi \quad ; \quad \operatorname{Re} \mu > 0$$

achamos

$$I = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \{ \Gamma(3/4) \}^2$$

Portanto a nossa equação de autovalor fica

$$\Lambda \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \{ \Gamma(3/4) \}^2 = \Delta'$$

$$\text{Usando } \sigma = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} (kr_0)$$

obtemos finalmente

$$\Lambda^{5/4} A_0 = \Delta' \tag{3.28}$$

$$\text{com } A_0 = \left(\frac{2}{kr_0} \right)^{1/2} \{ \Gamma(3/4) \}^2$$

A taxa de crescimento desse modo γ é dada por

$$\gamma = -i\omega = \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{3/5} \Lambda \tau_H^{-1} = f(\Delta')$$

O salto na derivada logarítmica Δ' será calculado pelo uso apropriado das condições de contorno para o nosso problema da configuração de campo reverso nos pontos onde o campo magnético inicia e termina a sua variação linear de acordo com o que será descrito no apêndice A.

3.3 - Modo Resistivo $m = 0$ Compressível

Para $\Omega \neq 0$ a equação (3.20) é satisfeita e os

termos que predominam em (3.19) são equilibrados se

$$\psi_0 = h = 0$$

e

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

Neste caso as equações (3.18) e (3.19) reduzem-se a

$$\frac{d^2 \tilde{\xi}_r}{dx^2} + \frac{\Omega^2 \tau_H^2 k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \left(-\frac{r_0}{dr_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} + \frac{\rho_0 \Omega^2 r_0^2}{\gamma p_0} \right) \tilde{\xi}_r = \frac{k^2 r_0^2}{\Lambda^2} x \frac{d^2 \psi_r}{dx^2} \quad (3.29)$$

e

$$\psi_r = -x \tilde{\xi}_r + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_r}{dx^2} \quad (3.30)$$

Aqui usamos a equação de equilíbrio no ponto r_0 ($B(r_0) = 0$) para escrever

$$\frac{dp_0}{dr_0} = \rho_0 \Omega^2 r_0$$

Estamos considerando portanto um modo resistivo $m = 0$, compressível, com $\Omega \neq 0$, que não é descrito pela aproximação de " ψ - constante". Antes de calcular sua taxa de crescimento, vemos que ela é proporcional à potência $\frac{1}{3}$ da resistividade do plasma. Portanto podemos ver que essa taxa é bem maior que a do modo "tesring" usual, estudado na seção anterior.

Representando as taxas para $\Omega \neq 0$ e $\Omega = 0$ respectivamente por $\gamma(\Omega)$ e γ_0 é fácil ver que sendo

$$\gamma = -i\omega = \epsilon^a \Lambda \tau_H^{-1}$$

vem

$$\frac{\gamma(\Omega)}{\gamma_0} = \frac{\epsilon^{1/3}}{\epsilon^{3/5}} = \epsilon^{-4/15} \gg 1$$

e é claro que a compressibilidade desempenha um papel importante para este modo.

O modo $m = 0$ tem um deslocamento paralelo à superfície da mesma ordem que o deslocamento radial como se vê a partir das equações (3.3), (3.7) e (3.15) que fornecem a relação, em mais baixa ordem em ϵ ,

$$\xi_z = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\gamma p_0} \frac{dp_0}{dr} \xi_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi_r \right)$$

ou seja

$$|\xi_z| \sim |\xi_r|$$

Vemos portanto que ξ_z está 90° fora de fase com ξ_r . Do mesmo modo vemos que B_{1z} está em fase e B_{1r} 90° fora de fase com ξ_r .

A perturbação ξ_z na camada resistiva desloca o plasma desde um ponto onde $\xi_z = 0$ até o próximo ponto nulo e este deslocamento é acompanhado por um deslocamento nulo na direção azimutal devido à nossa hipótese $\xi_\theta = 0$, tal que o modo permanece compressível e ilhas circulares são formadas.

Um representação esquemática da perturbação na camada resistiva é indicada na figura 3.1.

Vamos agora verificar o comportamento assintótico das soluções das equações (3.29) e (3.30) quando $x \rightarrow \infty$ para verificarmos a possibilidade de casamento com a solução da região ideal quando $x \rightarrow 0$, vista no capítulo 2, para ser estabelecida a respectiva equação de autovalor.

Definindo

$$M = \frac{\Omega^2 \tau_H^2 k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \left[\frac{r_0}{\gamma p_0} \frac{dp_0}{dr_0} - \frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} \right]$$

escrevemos

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} + M \hat{\xi}_r = \frac{k^2 r_0^2}{\Lambda^2} x \frac{d^2 \psi_r}{dx^2}$$

$$\psi_r = -x \hat{\xi}_r + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_r}{dx^2}$$

Este sistema é equivalente à equação em $\hat{\xi}_r$

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 \hat{\xi}_r}{dx^4} - \frac{2}{x} \frac{d^3 \hat{\xi}_r}{dx^3} + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\Lambda} k^2 r_0^2 x^2 + M - \Lambda \right) \frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} + \\ & + \left(-\frac{2k^2 r_0^2}{\Lambda} x - \frac{2M}{x} \right) \frac{d \hat{\xi}_r}{dx} + \left(\frac{2M}{x^2} - M\Lambda \right) \hat{\xi}_r = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Quando $x \rightarrow \infty$ esta equação se reduz a

$$\frac{d^4 \hat{\xi}_r}{dx^4} - \frac{2}{x} \frac{d^3 \hat{\xi}_r}{dx^3} - \frac{k^2 r_0^2}{\Lambda} \frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} - \frac{2k^2 r_0^2}{\Lambda} x \frac{d \hat{\xi}_r}{dx} - M\Lambda \hat{\xi}_r = 0 \quad (3.32)$$

Vamos tentar uma solução do tipo $\hat{\xi}_r \sim x^s$ para compararmos com as soluções da região ideal.

É fácil verificar que isto ocorre para

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M\Lambda^2}{k^2 r_0^2}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4b_1}}{2} \quad (3.33)$$

Na região MHD ideal, vimos pela equação (2.36), que quando $x \rightarrow 0$, $\xi_r \sim x^s$ com

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a_1}}{2}$$

e

$$a_1 = \frac{r_0}{B^2} \left(\frac{4\pi\rho_0^2\Omega^4 r_0^3}{\gamma P_0} - 4\pi r_0^2 \Omega^2 \frac{d\rho_0}{dr_0} \right)$$

Temos que mostrar então que $a_1 = b_1$

Substituindo

$$\tau_H = \frac{r_0}{v_A} = \frac{r_0 (4\pi\rho_0)^{1/2}}{B_0}$$

e

$$\frac{d\rho_0}{dr_0} \approx \rho_0 \Omega^2 r_0 \quad \text{no valor de } b_1 \text{ dado por (3.33)}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\Omega^2 r_0^2}{B_0^2} 4\pi\rho_0 \left(\frac{r_0}{\gamma P_0} \rho_0 \Omega^2 r_0 - \frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} \right) \\ &= \frac{r_0}{B_0^2} \left(\frac{4\pi\rho_0^2\Omega r_0^3}{\gamma P_0} - 4\pi r_0^2 \Omega^2 \frac{d\rho_0}{dr_0} \right) = a_1 \end{aligned}$$

Portanto duas soluções das equações resistivas têm o comportamento apropriado para casar assintoticamente com as soluções para $\hat{\xi}_r(x)$ na região ideal.

Para determinar o comportamento assintótico das outras duas soluções vamos supor que

$$\hat{\xi}_r \sim e^{ax^b}$$

Também é fácil verificar que as soluções são obtidas para

$$b = 2 \quad \text{e} \quad a = \pm \frac{kr_0}{2\sqrt{\Lambda}}$$

As 4 soluções assintóticas para as equações resistivas são então

$$\xi_{r1} \sim x^{s_1}; \xi_{r2} \sim x^{s_2}; \xi_{r3} \sim e^{-\frac{kr_0 x^2}{2\sqrt{\Lambda}}}; \xi_{r4} \sim e^{-\frac{kr_0 x^2}{2\sqrt{\Lambda}}}$$

Para determinar o autovalor Λ vamos escrever a solução ideal como

$$\xi_{MHD} = c_1 x_M^{s_1} + c_2 x_M^{s_2} \quad x \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

e a solução resistiva como

$$\xi_R = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2} \quad x \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

onde c_1, c_2, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e x_M e x estão relacionados por

$$x_M = \frac{r - r_0}{r_0} = \delta x$$

Logo

$$\xi_{MHD} = c_1 \delta^{s_1} x^{s_1} + c_2 \delta^{s_2} x^{s_2}$$

A condição de casamento implica

$$c_1 \delta^{s_1} x^{s_1} + c_2 \delta^{s_2} x^{s_2} = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}$$

onde, para esse modo,

$$\delta = \epsilon^b = \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3}$$

Fazendo

$$c_1 = c_1 \delta^{s_1}$$

e

$$c_2 = c_2 \delta^{s_2}$$

obtemos

$$\frac{c_1}{c_2} = \delta^{s_1 - s_2} \frac{c_1}{c_2}$$

ou

$$\frac{c_1}{c_2} = \epsilon^{b(s_1 - s_2)} \frac{c_1}{c_2} \quad (3.36)'$$

Como o autovalor Λ foi suposto de ordem 1, a razão de crescimento do modo será dada por

$$\gamma = -i\omega - \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$$

Na equação (3.36) a razão $\frac{c_1}{c_2}$ fica constante na região assintótica e depende do autovalor. Na próxima seção é feita a solução numérica das equações (3.29) - (3.30) e no apêndice B a determinação da razão $\frac{c_1}{c_2}$ para um modelo de configuração de campo reverso e a determinação para esse modelo da taxa de crescimento.

No apêndice D veremos que o modo $m = 0$ compressivo é análogo a um modo gravitacional resistivo em uma "fatia de plasma" e faremos uma analogia entre a aceleração gravitacional g e a velocidade de rotação Ω da coluna de plasma.

Vamos obter agora para o modo $m = 0$ uma solução exata.

Como as equações resistivas têm uma solução asintótica

$$\hat{\xi}_r \sim e^{-\frac{kr_0 x^2}{2\sqrt{\Lambda}}}$$

que decai rapidamente dentro da camada resistiva é possível encontrar um modo localizado que não precisa casar com a solução MHD ideal externa. Para isso vamos supor na equação para ψ_r que

$$\psi_r \ll \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_r}{dx^2}$$

porque estamos procurando um modo com fortes gradientes dentro da camada resistiva.

Então a equação para ψ_r fica

$$x \hat{\xi}_r = \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_r}{dx^2}$$

Substituindo-a em (3.29) achamos

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} - k^2 r_0^2 \left(\frac{M_1}{\Lambda^2} + \frac{x^2}{\Lambda} \right) \hat{\xi}_r = 0 \quad (3.37)$$

onde

$$M_1 = -\Omega^2 \tau_H^2 \left(\frac{r_0}{\gamma p_0} \frac{dp_0}{dr_0} - \frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} \right)$$

Esta equação pode ser transformada na equação de Schrödinger para o oscilador harmônico de tal modo que a solução para $\hat{\xi}_r$ é obtida em termos de polinômios de Hermite

como

$$\hat{\xi}_r = e^{-\frac{kr_0}{2\sqrt{\Lambda}} x^2} H\left(\frac{kr_0 x^2}{2\sqrt{\Lambda}}\right) \quad (3.38)$$

onde

$$\Lambda = \left[- \frac{(kr_0) M_1}{(2n + 1)} \right]^{2/3} ; \quad n \text{ inteiro} \quad (3.39)$$

e a razão de crescimento é dada por

$$\gamma = -i\omega = \left[- \frac{(kr_0) M_1}{(2n + 1)} \right]^{2/3} \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$$

Vemos que $\gamma \propto (kr_0)^{2/3}$, ou seja, aumentando k , ou diminuindo o comprimento de onda do modo, cresce a taxa de crescimento da instabilidade.

3.4 - Solução Numérica das Equações do Modo $m = 0$ Resistivo Compressível

As equações (3.29) e (3.30) são resolvidas numericamente usando um programa Fortran que contém uma subrotina chamada ODE (para a solução de equações diferenciais ordinárias). As condições iniciais são divididas em 2 casos:

1) $\hat{\xi}_r$ par e ψ_r impar

$$\hat{\xi}_r(0) = 1 \quad ; \quad \hat{\xi}_r'(0) = 0$$

$$\psi_r(0) = 0 \quad ; \quad \psi_r'(0) = B$$

2) $\hat{\xi}_r$ impar e ψ_r par

$$\hat{\xi}_r(0) = 0 \quad ; \quad \hat{\xi}_r'(0) = B$$

$$\psi_r(0) = 1 \quad ; \quad \psi_r'(0) = 0$$

Para o cálculo de M fazemos

$$\Omega\tau_H = 1 \quad ; \quad k^2 r_0^2 = 0.01$$

e

$$\frac{r_0}{\gamma p_0} \frac{dp_0}{dr_0} - \frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} = -0.4$$

O valor de γ (cte adiabática) é tomado como sendo $\gamma = \frac{5}{3}$. Para o autovalor Λ , que na análise teórica é suposto de ordem 1, fazemos variações desde $\Lambda = 0.2$ até 2.0 e também alguns valores particulares como $\Lambda = 5.0; 10; 15$.

Na solução numérica o valor de B é variado até a solução apresentar um comportamento assintótico compatível com o da região ideal onde $\hat{\xi}_r \sim x^s$ e s é dado por (3.33).

Portanto é possível fazer um gráfico da inclinação da autofunção impar, B , em função do autovalor, como é mostrado nas figuras 3-2 e 3-3.

Para cada autovalor é calculada a razão $\frac{C_1}{C_2}$ que aparece na equação (3.36). Para isto é fácil ver que se admitirmos a expansão (3.35) podemos escrever

$$\hat{\xi}_r = C_1 \hat{\xi}_{r1} + C_2 \hat{\xi}_{r2}$$

com

$$\hat{\xi}_{r_1} = x^{s_1}$$

e

$$\hat{\xi}_{r_2} = x^{s_2}$$

válida na região assintótica.

Isso implica que a razão $\frac{c_1}{c_2}$ pode ser escrita na forma

$$\frac{c_1}{c_2} = - \frac{(x\hat{\xi}'_{r_2})\hat{\xi}_r - (x\hat{\xi}'_r)\hat{\xi}_{r_2}}{(x\hat{\xi}'_{r_1})\hat{\xi}_r - (x\hat{\xi}'_r)\hat{\xi}_{r_1}} \quad (3.40)$$

É verificado na solução numérica que para cada Λ , $\frac{c_1}{c_2}$ fica constante quando $\hat{\xi}_r \sim x^s$, sendo que nos últimos pontos da solução numérica $\frac{c_1}{c_2}$ volta a variar passando a predominar então a solução do tipo exponencial, ou seja,

$$\hat{\xi}_r \sim e^{+\frac{kr_0 x^2}{2\sqrt{\Lambda}}}$$

Portanto podemos fazer um gráfico da razão $\frac{c_1}{c_2}$ em função do autovalor Λ , para $\hat{\xi}$ ímpar e $\hat{\xi}$ par, como mostrado nas figuras 3-4 e 3-5.

Interpretando esses gráficos vemos que $\frac{c_1}{c_2}$ fica praticamente constante em relação ao autovalor para Λ em torno de 1 no caso de $\hat{\xi}$ ímpar ($\Lambda \in [0,8 ; 1,2]$) e $\hat{\xi}$ par ($\Lambda \in [0,5 ; 1,0]$) indicando que o conjunto de autovalores associados ao "matching" ou casamento assintótico está em torno de $\Lambda = 1$, o que concorda com a análise teórica onde Λ foi suposto de ordem 1.

Finalmente mostramos nas figuras 3-6 a 3-13 os

gráficos das autofunções ξ e ψ , com as paridades definidas, para o caso em que $\Lambda = 1,0$, mostrando a região de convergência assintótica onde $\xi_r \sim x^{s_1}$ e para 2 valores de s_1 .

Variamos também os valores de $k^2 r_0^2$ desde 0,05 até 1,00, e na figura 3-14, mostramos as respectivas variações de $\frac{c_1}{c_2}$ em função de Λ , para autofunções ímpares, na faixa de autovalores onde é melhor a convergência assintótica.

Vemos que à medida que k aumenta, cresce o autovalor Λ e portanto a taxa de crescimento γ , dada por $\gamma = \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \Lambda^{-1}$. Λ é determinado diretamente a partir do cálculo de $\frac{c_1}{c_2}$, que depende do modelo usado para a configuração, como é visto no apêndice A, fazendo a interseção das curvas de $\frac{c_1}{c_2}(\Lambda)$ obtidas do cálculo numérico com o valor de $\frac{c_1}{c_2}$ calculado nesse apêndice e que depende também das condições experimentais.

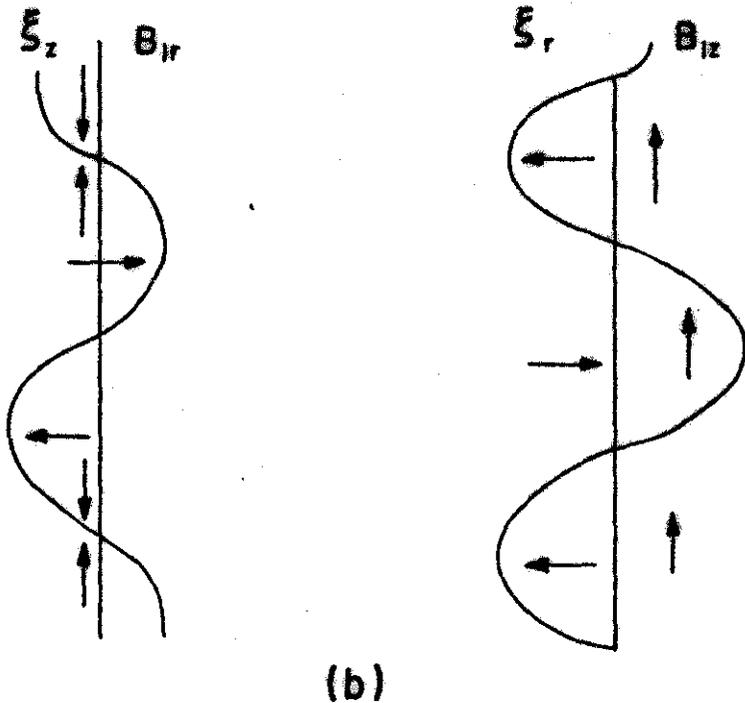
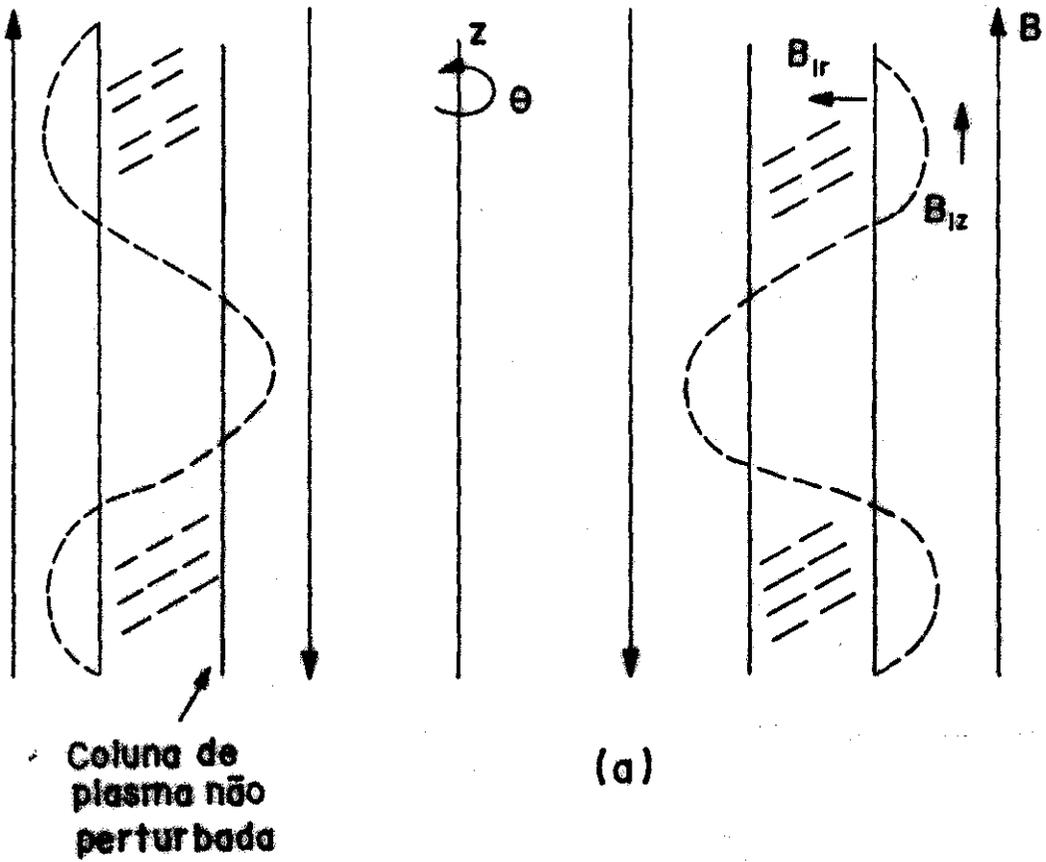


Figura 3.1 - Representação do modo resistivo $m = 0$ em configuração de campo reverso sem cisalhamento. O deslocamento perturbado ξ_z é da mesma ordem que o correspondente na direção radial. São mostradas também as fases relativas das componentes das perturbações do fluido e do campo magnético.

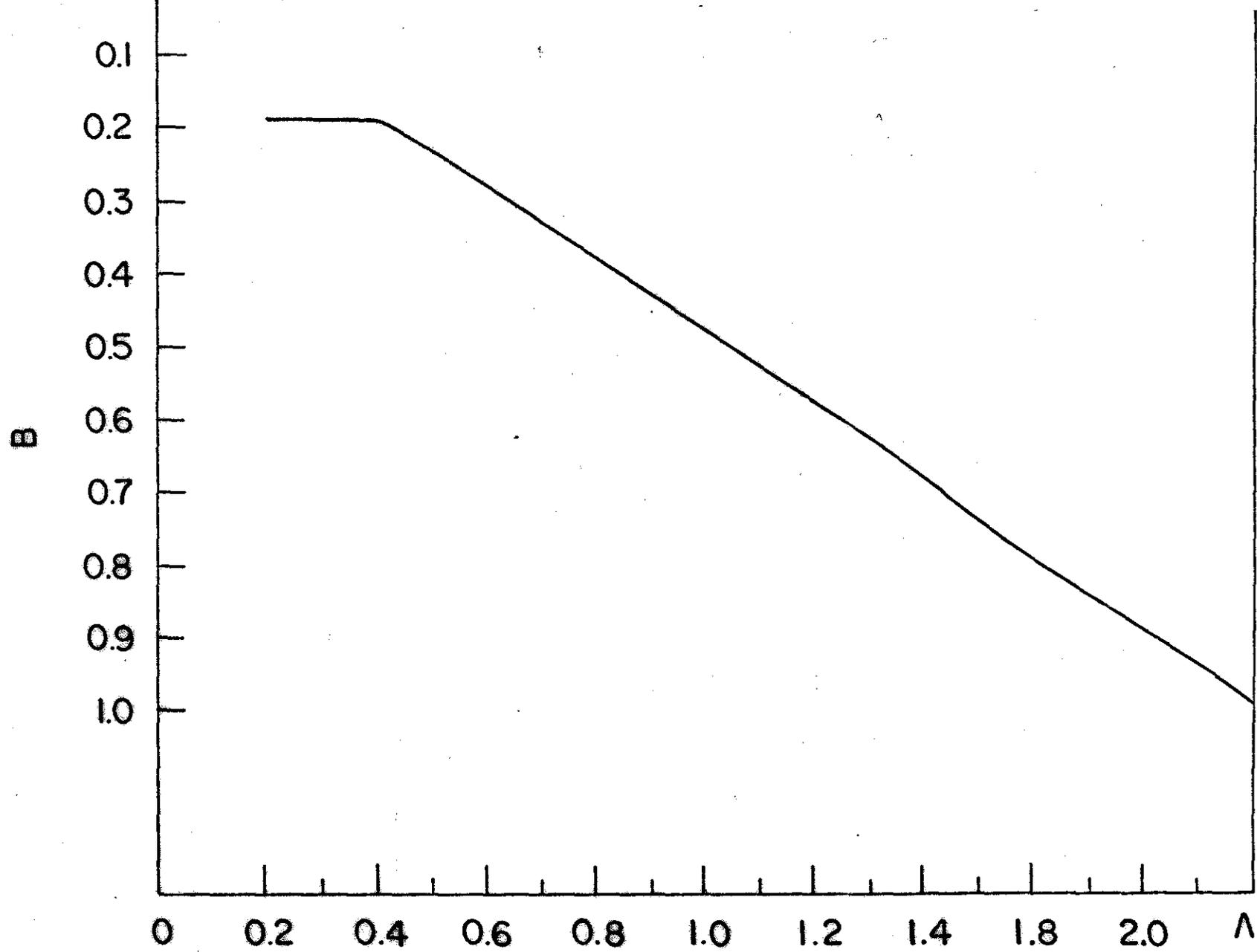


Figura 3.2 - Variação de $B = \xi'_r(x = 0)$ com o autovalor para $\tilde{\xi}_r$ ímpar, ψ_r par

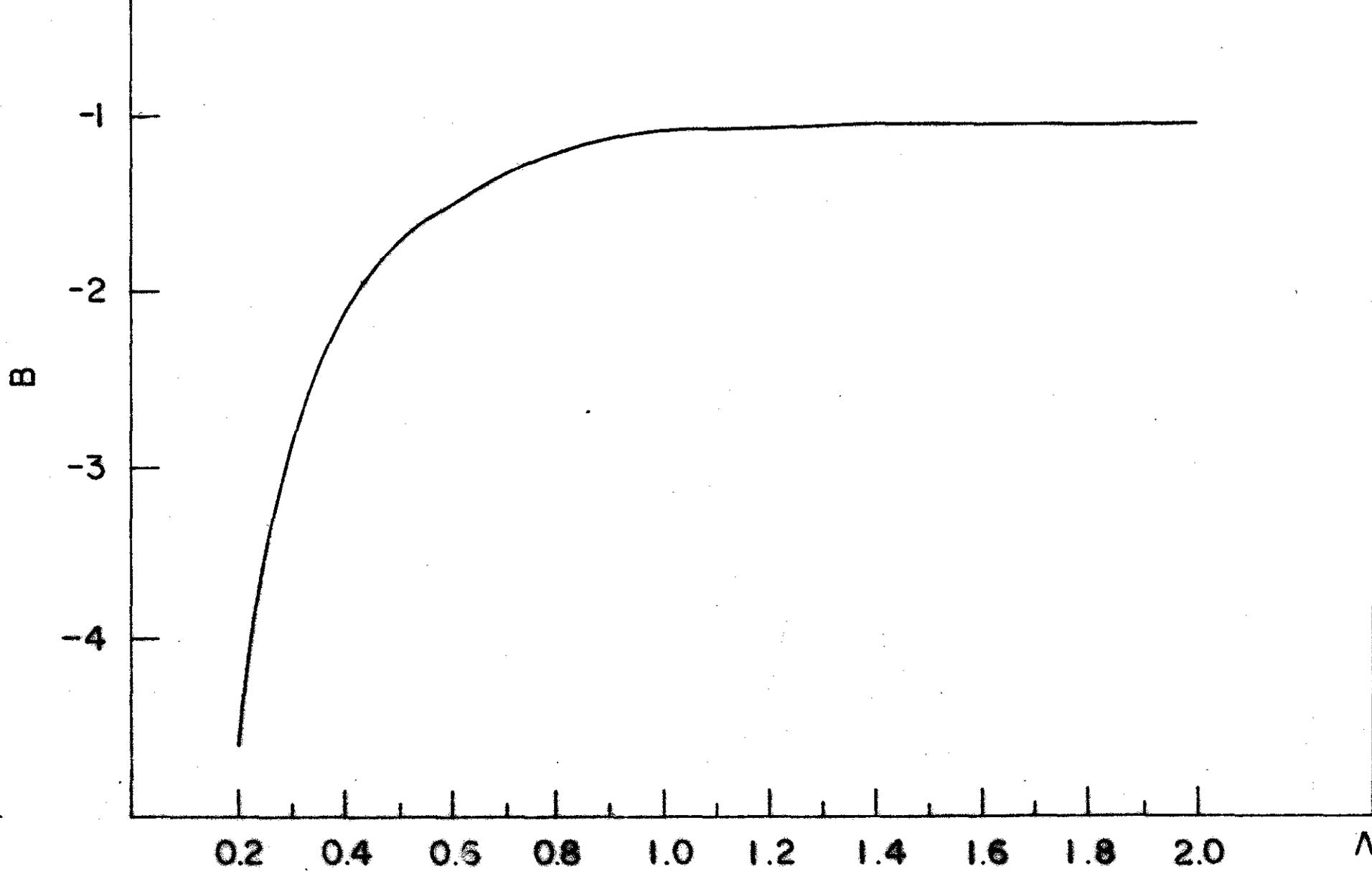


Figura 3.3 - Variação de $B = \xi'_r(x=0)$ com o autovalor para ξ_r par, ψ_r impar

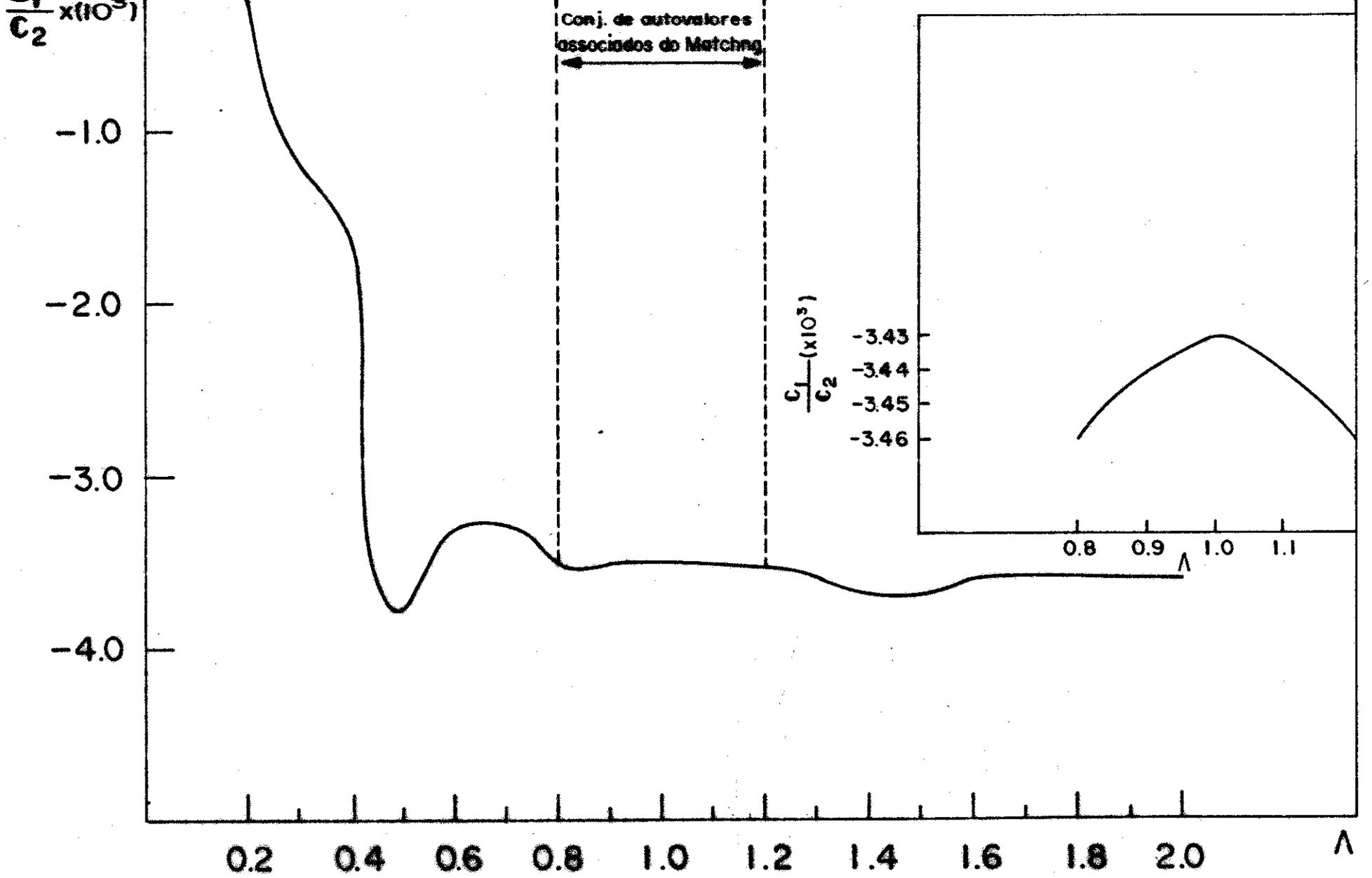


Figura 3.4 - Variação de $\frac{c_1}{c_2}$ com autovalor para $\hat{\xi}_r$ ímpar, ψ_r par

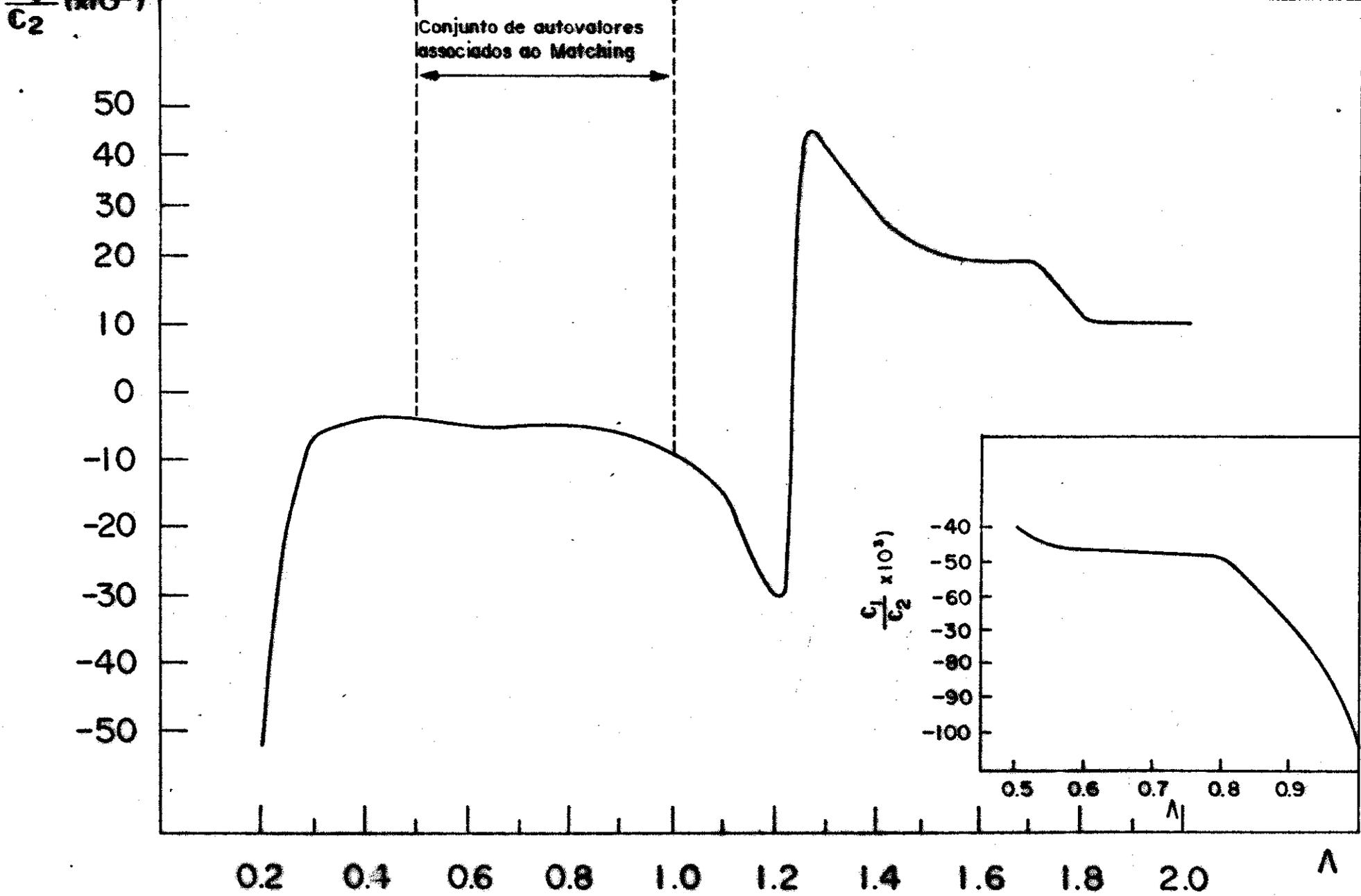


Figura 3.5 - Variação $\frac{c_1}{c_2}$ com o autovalor para ξ_r par, ψ_r impar

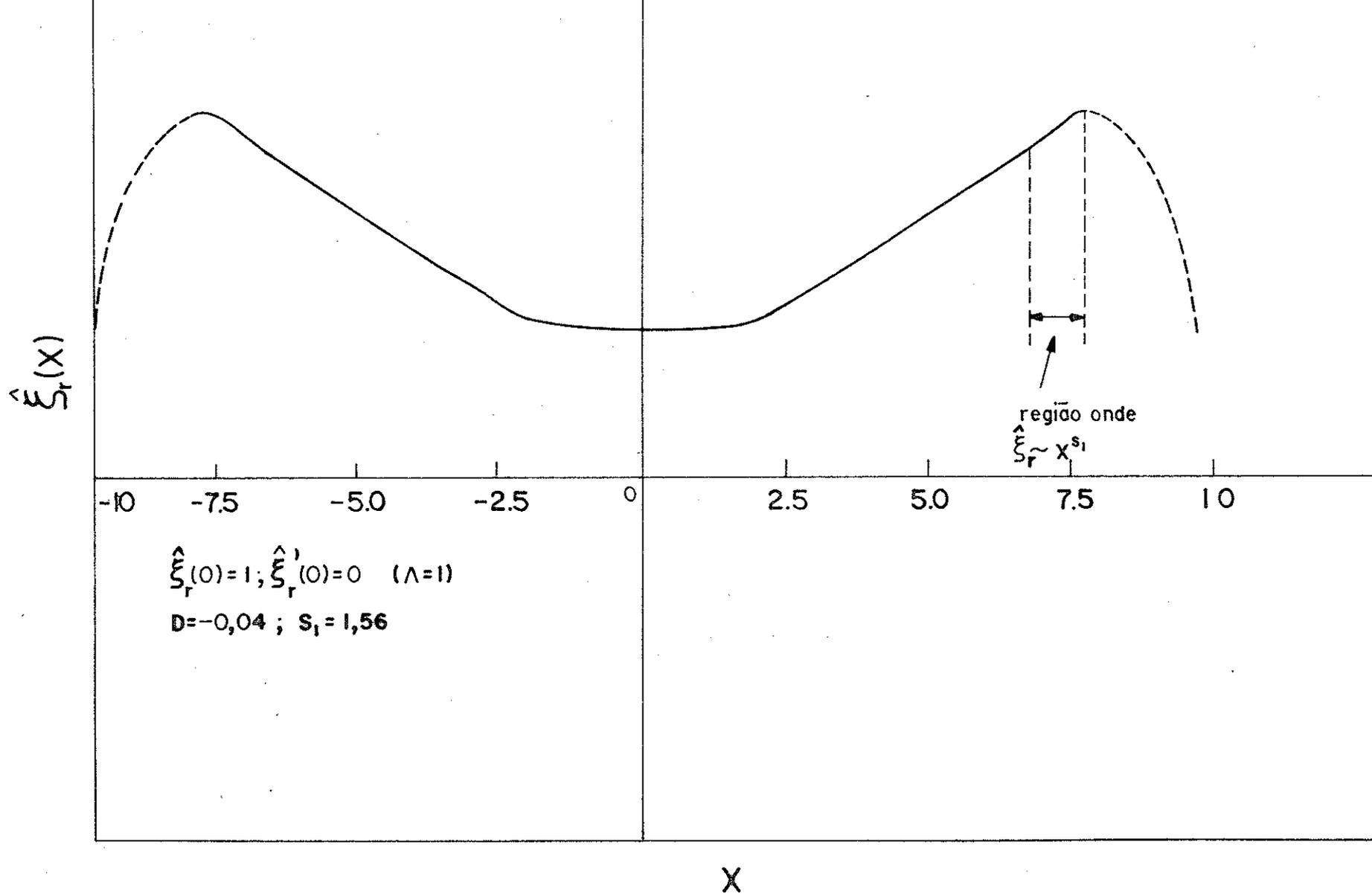


Figura 3.6 - Variação de deslocamento perturbado na camada resistiva

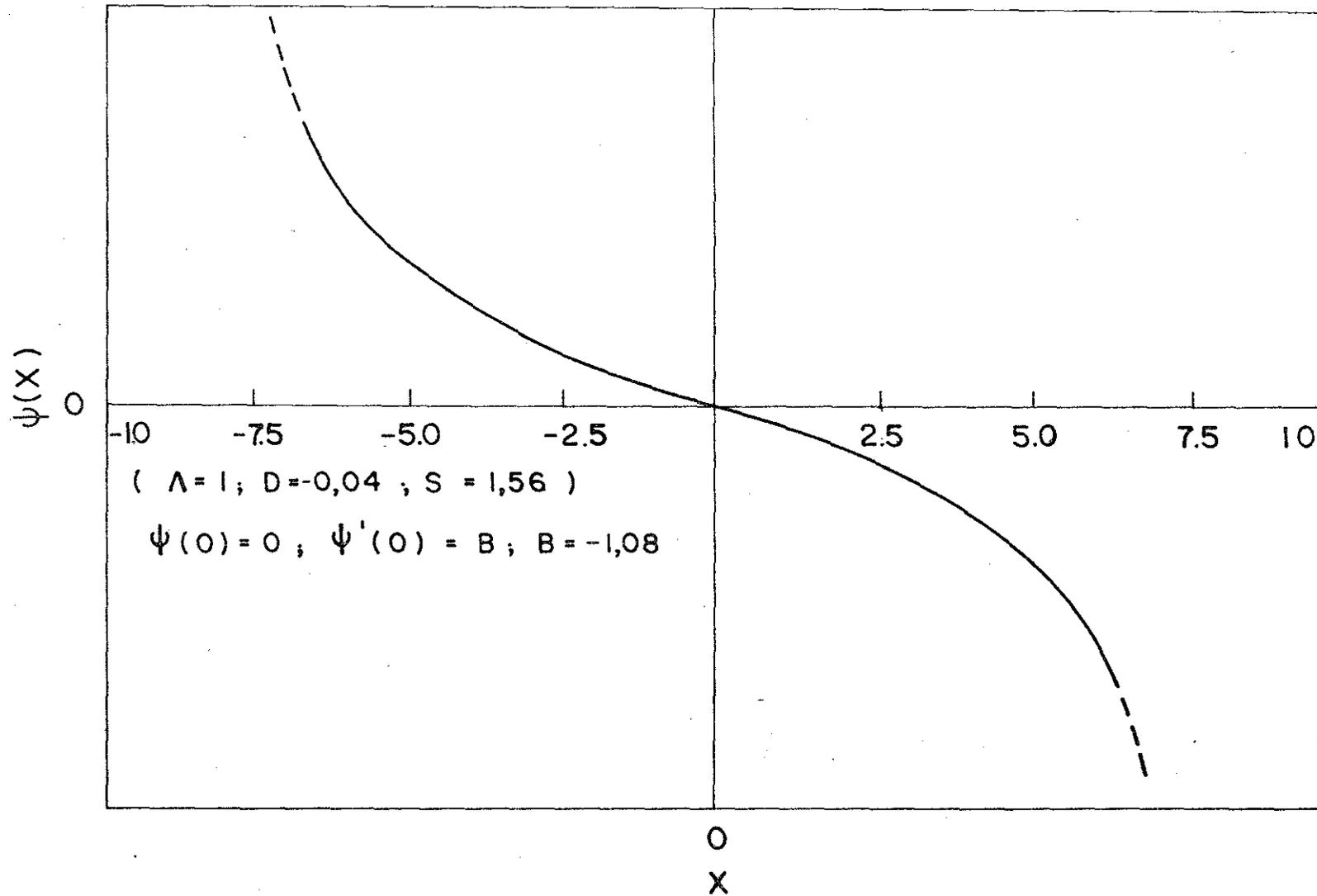


Figura 3.7 - Variação do campo magnético perturbado na camada resistiva

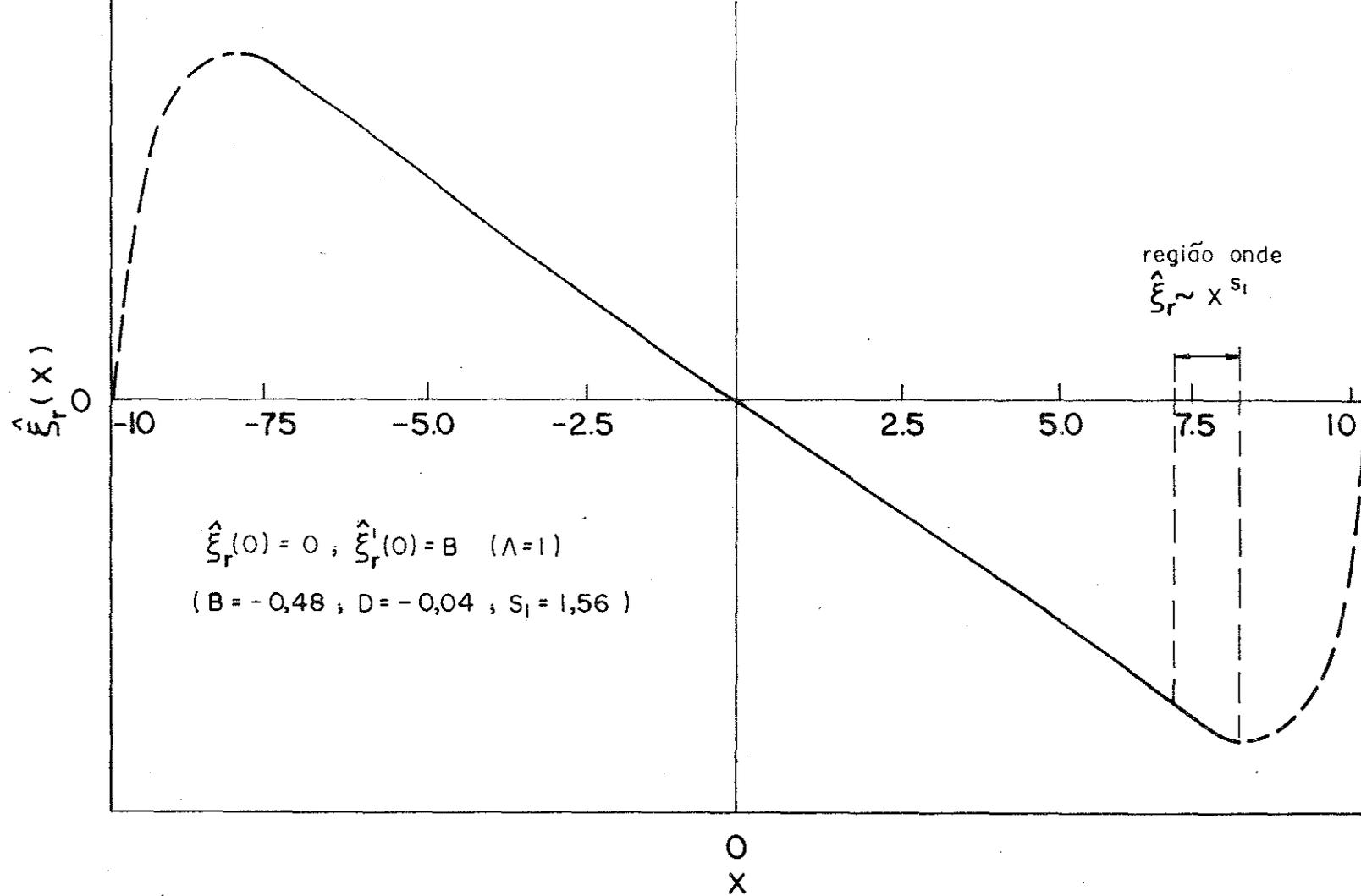


Figura 3.8 - Variação do deslocamento perturbado na camada resistiva

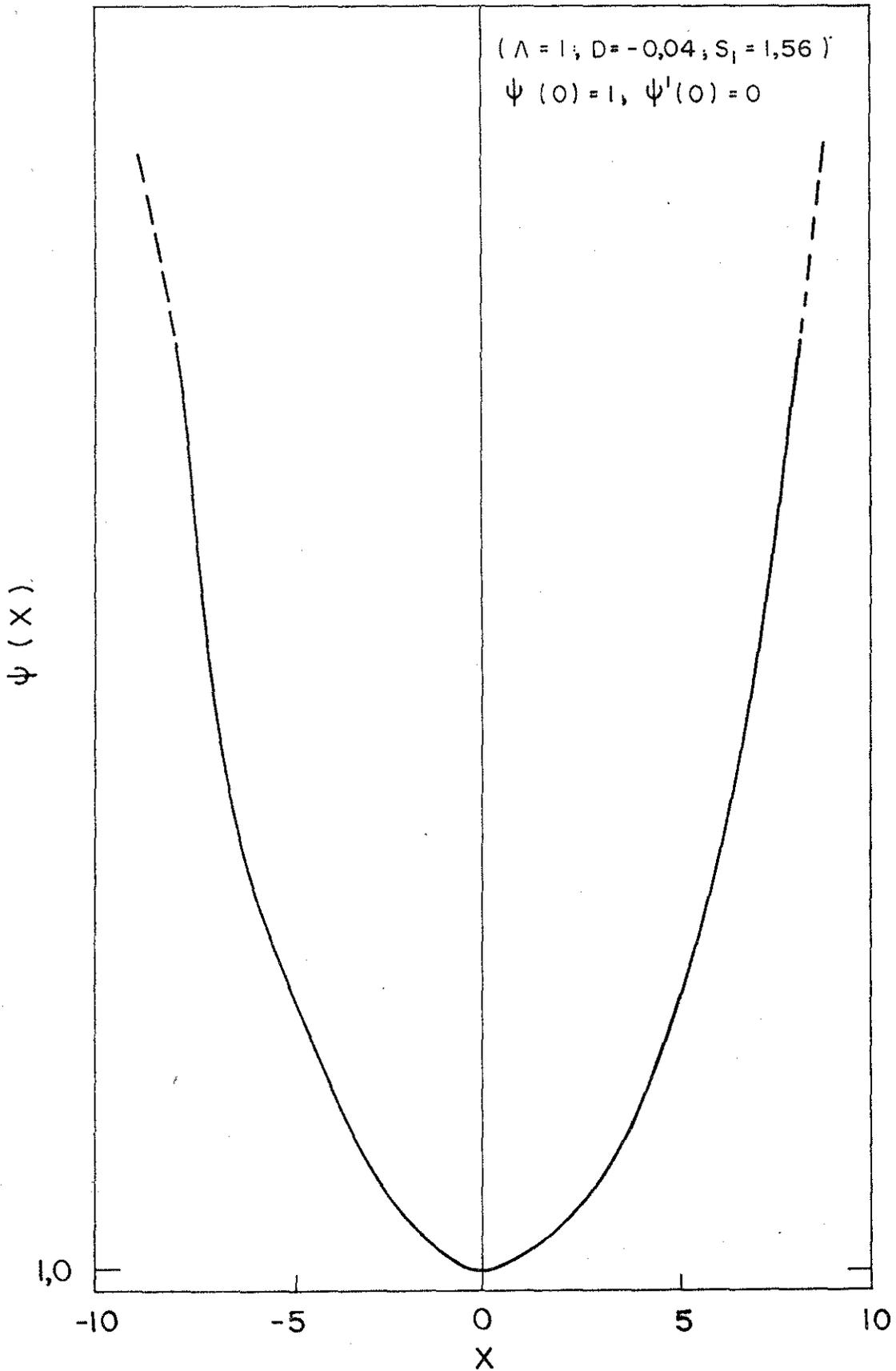


Figura 3.9 - Variação do campo magnético perturbado na cama da resistiva

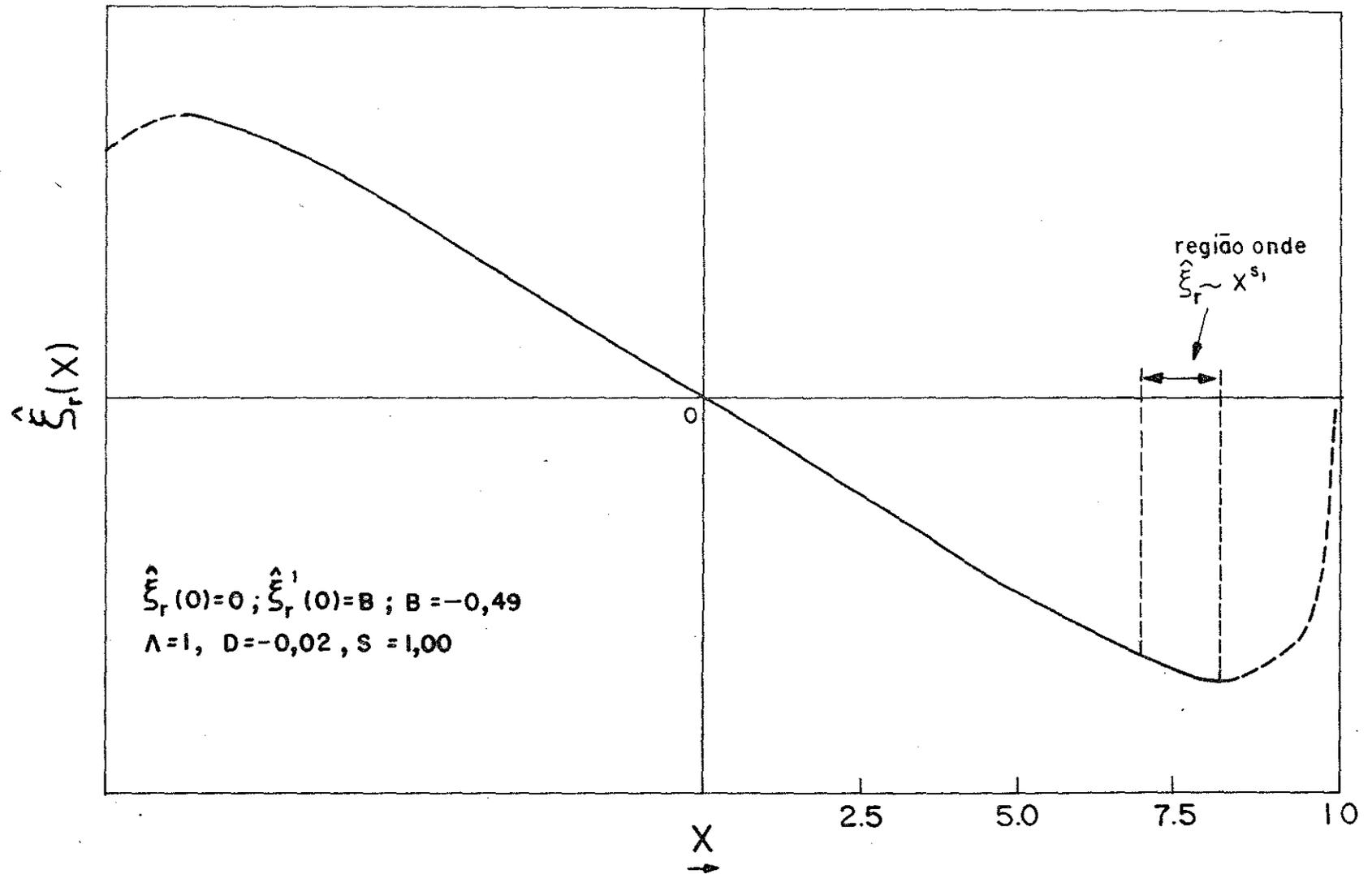


Figura 3.10 - Variação do deslocamento perturbado na camada resistiva

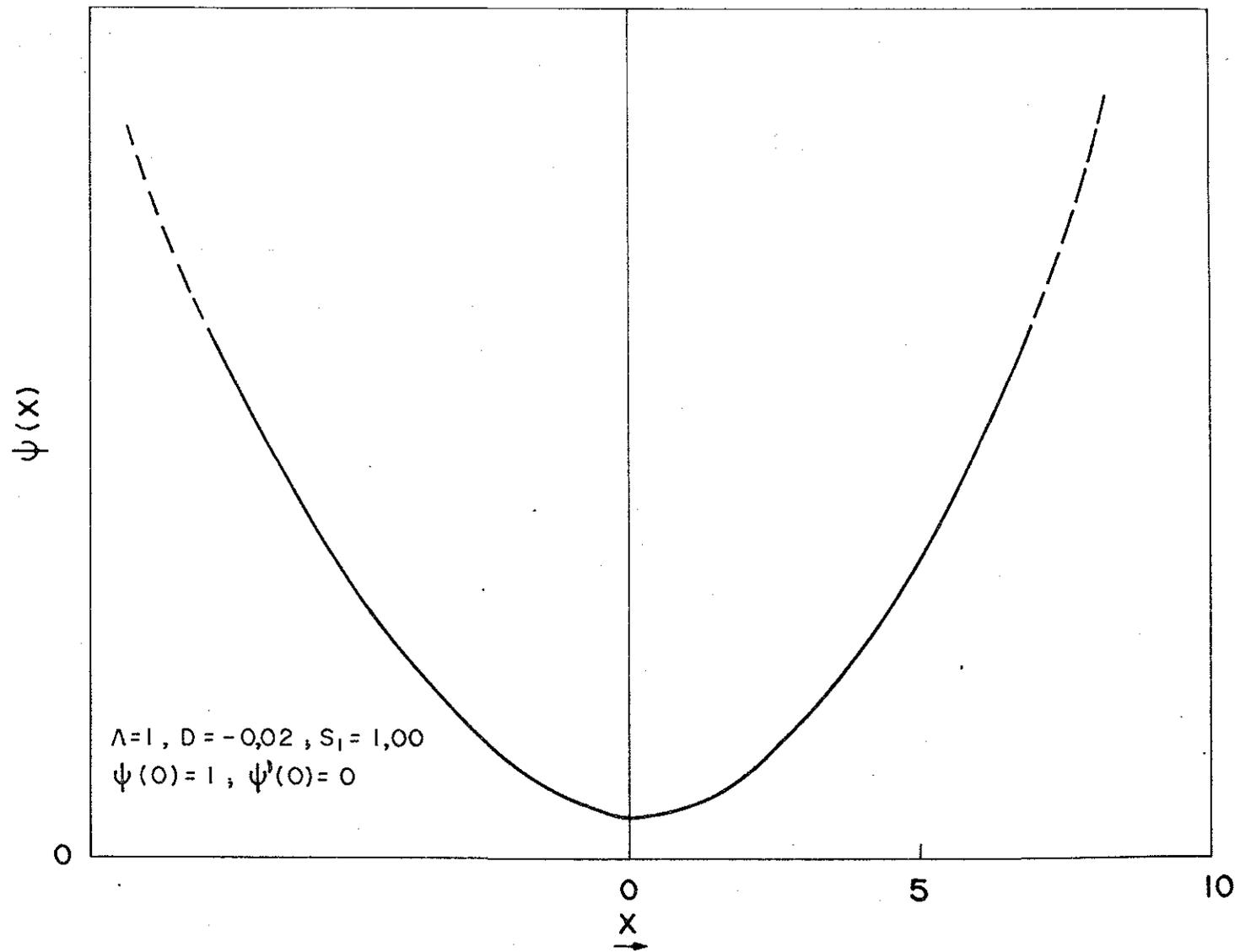


Figura 3.11 - Variação do campo magnético perturbado na camada resistiva

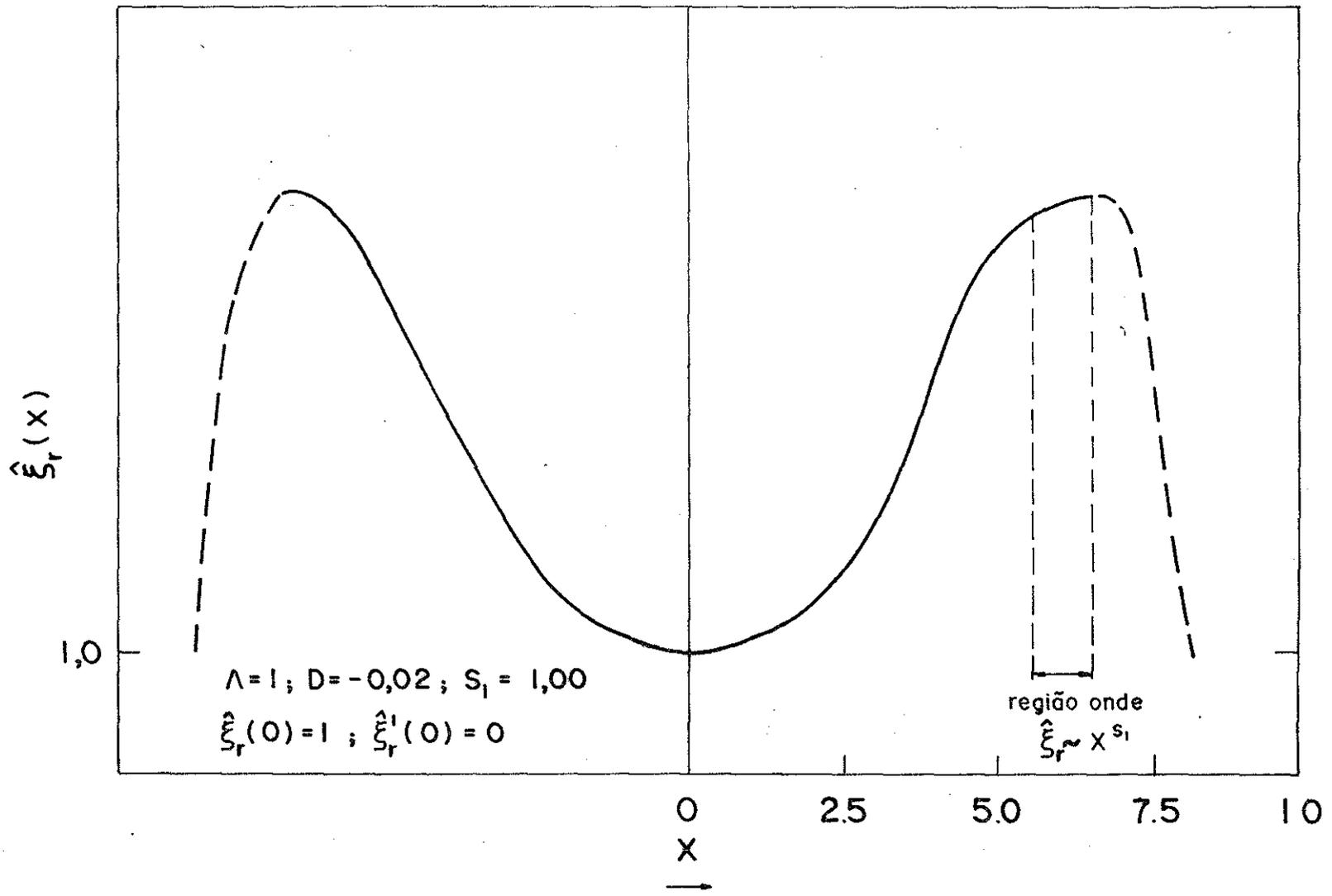


Figura 3.12 - Variação do deslocamento perturbado na camada resistiva

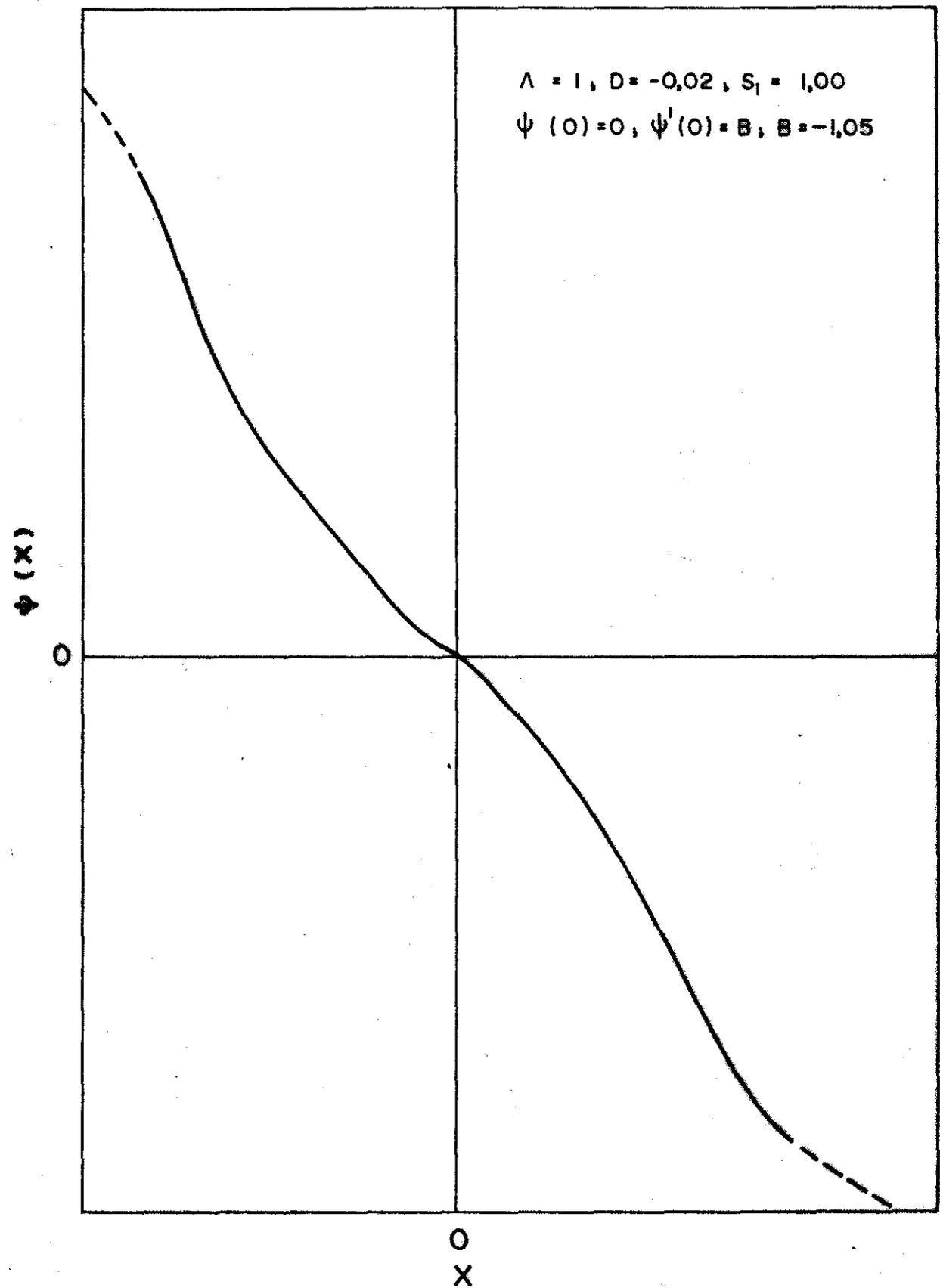


Figura 3.13 - Variação do campo magnético perturbado na camada resistiva

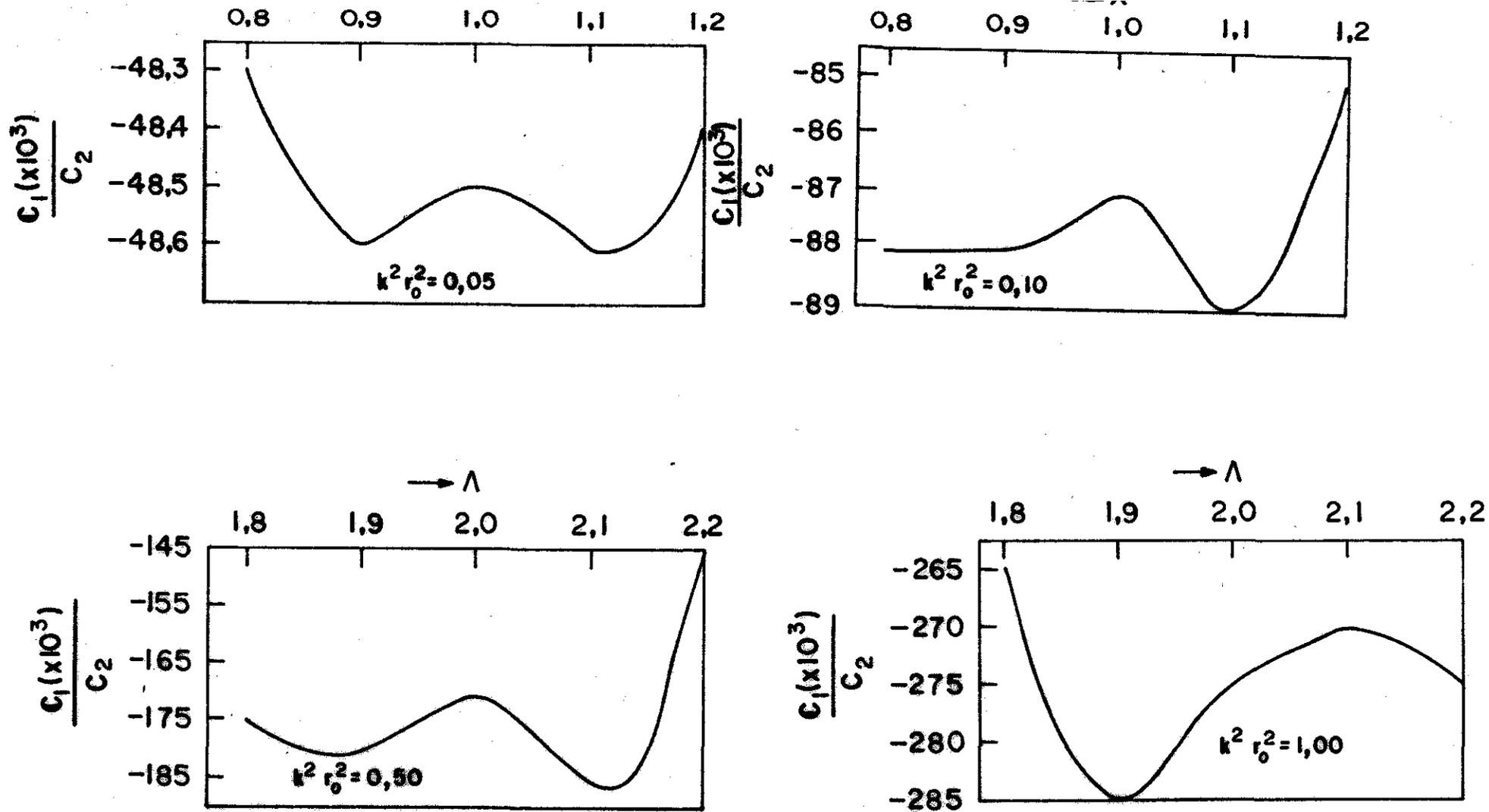


Figura 3.14 - Variação $\frac{c_1}{c_2}$ com o autovalor na região de convergência assintótica para diversos valores de $k^2 r_0^2$

CAPÍTULO 4

Instabilidades Rotacionais no Modo Kink Resistivo

Introdução

Neste capítulo fazemos uso das equações gerais obtidas no capítulo 2 para estudar o modo "kink" interno resistivo $m = 1$, no limite de incompressibilidade, rotação rígida e grande comprimento de onda.

Tal como o modo $m = 0$, fazemos o casamento assintótico das equações resistivas com as correspondentes soluções ideais para obtermos a taxa de crescimento das instabilidades.

A análise mostra que o modo $m = 1$ é instável, que a rotação somente introduz um deslocamento Doppler na frequência e que não é um fator estabilizante como proposto por Eberhagen et al⁽⁷⁾.

É bem conhecido que um modo $m = 1$ aparece em descargas em θ - pinches depois da fase de compressão⁽²⁶⁾. Embora este modo possa ser originado somente pela rotação do plasma⁽²⁴⁾, ⁽²⁷⁾, ele pode ser consequência de um modo resistivo $m = 1$ ocorrido na fase de compressão da descarga. Este modo tem uma taxa de crescimento que varia com a potência $\frac{1}{3}$ da resistividade do plasma e os correspondentes deslocamentos perturbados paralelos às linhas de campo são muito maiores que os perpendiculares na região resistiva. Isto pode levar à quebra da coluna de plasma em muitos anéis e pode ser o mecanismo causador da instabilidade $m = 1$ observada nas descargas em θ - pinches.

Calculamos a taxa de crescimento desse modo para dados experimentais descritos na literatura na última seção deste capítulo.

4.1 - Obtenção das Equações Resistivas para o Modo Kink $m = 1$

Faremos uso da hipótese de incompressibilidade do plasma ($\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ ou $\frac{1}{Y} \rightarrow 0$), que é válida para os modos que estamos considerando (3), (20), além da hipótese de rotação rígida ($\frac{d\Omega}{dr} = 0$), nas equações gerais descritas no capítulo 2. Portanto a equação (2.25) se reduz a

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r + m \rho_0 \omega \Omega \xi_r + 2i \rho_0 \omega \Omega \xi_\theta + \frac{r \Omega^2 \omega}{\omega - m \Omega} \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r =$$

$$= \frac{ik}{4\pi} BB_{1r} - \frac{d}{dr} \left[\frac{BB_{1z}}{4\pi} + \frac{1}{ik} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dr} B_{1r} + \omega^2 \rho_0 \xi_z - m \rho_0 \omega \Omega \xi_z \right) \right]$$

ou

$$-i\omega(\omega - m\Omega) (k\rho_0 \xi_r + i \frac{d}{dr} (\rho_0 \xi_z)) - 2\omega\Omega\rho_0 k\xi_\theta +$$

$$+ i\omega\Omega \frac{\Omega kr}{\omega - m\Omega} \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r = -\frac{1}{4\pi} \left[k^2 BB_{1r} + \frac{d}{dr} (ikBB_{1z} + \frac{dB}{dr} B_{1r}) \right]$$

(4.1)

A equação (2.26) pode ser escrita como

$$-i\omega(\omega - m\Omega) \left(\frac{m}{r} \xi_z - k\xi_\theta \right) \rho_0 - 2\omega\Omega\rho_0 kr =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[k^2 BB_{1\theta} - \frac{mk}{r} BB_{1z} + \frac{im}{r} \frac{dB}{dr} B_{1r} \right] \quad (4.2)$$

Aplicando agora o operador $\left(\frac{i}{k} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \right)$ à equação (4.1) e o operador $\left(\frac{m}{kr} \right)$ à equação (4.2) e em seguida

substraindo-as membro a membro obtemos:

$$\begin{aligned}
 & - \omega (\omega - m\Omega) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\rho\xi_\theta) - \frac{im}{r} \rho\xi_r \right) - 2i\omega\Omega \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\rho r\xi_r) + \\
 & + 2\omega\Omega\rho \frac{m}{r} \xi_\theta - i\omega\Omega \frac{m\Omega}{\omega-m\Omega} \frac{d\rho}{dr} \xi_r = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ikrBB_{1\theta}) \right) + \\
 & + \frac{mk}{r} BB_{1r} \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Usando-se as hipóteses mencionadas no início desta seção, as equações (2.20), (2.21) e (2.22) tornam-se

$$\begin{aligned}
 (\omega - m\Omega)B_{1r} & = ikB\omega\xi_r + \frac{i\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_{1r}}{dr} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{m^2 + 1 + k^2 r^2}{r^2} B_{1r} - 2i \frac{m}{r^2} B_{1\theta} \right] \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\omega - m\Omega)B_{1\theta} & = ikB\omega\xi_\theta + \frac{i\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_{1\theta}}{dr} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{m^2 + 1 + k^2 r^2}{r^2} B_{1\theta} + 2i \frac{m}{r^2} B_{1r} \right] \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (\omega - m\Omega)B_{1z} & = ikB\omega\xi_z - \omega \frac{dB}{dr} \xi_r + \\
 & + \frac{i\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_{1z}}{dr} \right) - \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1z} \right] \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

As equações (4.1), (4.6), obtidas a partir de nosso tratamento geral na camada resistiva, são portanto equivalentes às obtidas em nosso estudo inicial do modo kink $m = 1$ ⁽²⁸⁾ quando usamos o tratamento comum para modos incompressíveis, que consiste em aplicar o operador ∇_x aos membros da

equação de movimento (2.1).

Podemos observar também que tomando o limite $\eta \rightarrow 0$ nas equações (4.4), (4.6), substituindo as expressões resultantes para B_{1r} , $B_{1\theta}$ e B_{1z} nas equações (4.1), (4.3), eliminando as componentes ξ_θ e ξ_z , e fazendo a aproximação $k^2 r^2 \ll m^2$, obtemos também a equação (2.38) obtida a partir de nosso tratamento geral na região magnetohidrodinâmica ideal.

4.2 - Ordenamento das Equações da Camada Resistiva

Na camada resistiva consideraremos $dx_1/dr \gg x_1/r$, onde x_1 representa qualquer grandeza perturbada, e B como dado na equação (2.21).

Agora para o modo $m = 1$ vamos definir o tempo característico hidromagnético por $\tau_H = (kV_A)^{-1}$ onde V_A é velocidade de Alfvén definida como

$$V_A = \left(r_0 \frac{dB}{dr} \right) / (4\pi\rho_0)^{1/2}$$

Tal como no modo $m = 0$, o pequeno parâmetro na região resistiva é dado por $\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R} \ll 1$. A largura da camada é dada por $\delta = \epsilon^b$.

Definimos a variável $x = \frac{r - r_0}{\delta r_0}$ e supomos que seja de ordem 1 nessa camada.

As variáveis de camada serão escritas também em termos de quantidades adimensionais por:

$$\omega - m\Omega = \sigma = i\epsilon^a V_A \tau_H^{-1} \quad (4.7)$$

$$\begin{matrix} B_{1r} \\ B_{1\theta} \\ B_{1z} \end{matrix} = -i \begin{bmatrix} \epsilon^c \psi_r \\ kr_0 \left(r \frac{dB}{dr} \right)_{r_0} \frac{\omega}{\sigma} \epsilon^d \psi_\theta \\ \epsilon^e \psi_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\xi_r = r_0 \hat{\xi}_r, \quad \xi_\theta = r_0 \epsilon^f \hat{\xi}_\theta, \quad \xi_z = r_0 \epsilon^g \hat{\xi}_z, \quad (4.9)$$

onde

$$\Lambda \sim \psi_r \sim \psi_\theta \sim \psi_z \sim \hat{\xi}_r \sim \hat{\xi}_\theta \sim \hat{\xi}_z \sim x \sim \theta(1)$$

Em termos dessas quantidades, as equações (4.1), (4.6)

tornam-se:

$$\begin{aligned} \epsilon^{2a} (m \epsilon^g \hat{\xi}_z - k r_0 \epsilon^f \hat{\xi}_\theta) - 2 (\Omega \tau_H / \Lambda) k r_0 \epsilon^a \hat{\xi}_r = \\ = \frac{\epsilon^b}{\Lambda^2} (m \epsilon^e x \psi_z - i \frac{m}{k r_0} \epsilon^{c-b} \psi_r - (k r_0) \epsilon^d t \psi_\theta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{2a} \left[k r_0 \hat{\xi}_r + i \epsilon^{g-b} \frac{d \hat{\xi}_z}{dt} + i \epsilon^g \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \hat{\xi}_z \right] - \frac{2\Omega \tau_H}{\Lambda} k r_0 \epsilon^{a+f} \hat{\xi}_\theta + \\ + \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \frac{\Omega^2 \tau_H^2}{\Lambda^2} k r_0 \hat{\xi}_r = \frac{\epsilon^b}{\Lambda^2} \left(k r_0 \epsilon^c x \psi_r + i \epsilon^{-b} \frac{d}{dx} (x \psi_z) + \frac{\epsilon^{-2b+c}}{k r_0} \frac{d \psi_r}{dx} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{2a} \left[\epsilon^f \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \hat{\xi}_\theta + \epsilon^{f-b} \frac{d \hat{\xi}_\theta}{dx} - i m \hat{\xi}_r \right] + \frac{2\Omega \tau_H}{\Lambda} \epsilon^a \left[\left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \hat{\xi}_r + \epsilon^{-b} \frac{d \hat{\xi}_r}{dx} \right] + \\ + 2i \frac{\Omega \tau_H}{\Lambda} \epsilon^{a+f} m \hat{\xi}_\theta - i \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \frac{\Omega^2 \tau_H^2}{2} m \hat{\xi}_r = \end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon^b}{\Lambda} (\epsilon^{d-b} \frac{d}{dx} (x\psi_\theta) - im\epsilon^c \psi_r) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \psi_r = & -\epsilon^{b-c} x \hat{\xi}_r + \frac{\epsilon^{1-a-2b}}{\Lambda} \left(\frac{d^2 \psi_r}{dx^2} - (m^2 + 1 + k^2 r_o^2) \epsilon^{2b} \psi_r - \right. \\ & \left. - 2im\epsilon^{2b+d-c} \psi_\theta \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \psi_\theta = & -\epsilon^{b-d+f} x \hat{\xi}_\theta + \frac{\epsilon^{1-a-2b}}{\Lambda} \left(\frac{d^2 \psi_\theta}{dx^2} - (m^2 + 1 + k^2 r_o^2) \epsilon^{2b} \psi_\theta + \right. \\ & \left. + 2im\epsilon^{2b+c-d} \psi_r \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

e

$$\begin{aligned} \psi_z = & -\epsilon^{b-e+g} x \hat{\xi}_z + i \frac{\epsilon^{-e}}{kr_o} \hat{\xi}_r + \frac{\epsilon^{1-a-2b}}{\Lambda} \left(\frac{d^2 \psi_z}{dx^2} - (m^2 + k^2 r_o^2) \epsilon^{2b} \psi_z \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

O ordenamento como vimos é feito obrigando que os termos que se anulam quando $\eta \rightarrow 0$, tornem-se de ordem um.

É fácil ver que isso pode ser feito com a escolha

$$a = b = c = \frac{1}{3} \quad ; \quad d = e = 0$$

e

$$f = g = -\frac{1}{3} \quad (4.16)$$

Com esta escolha, segue que

$$\frac{\xi_z}{\xi_r} \sim \frac{B_{1z}}{B_{1r}} \sim \epsilon^{-1/3} \gg 1$$

Estas relações seguem direto do fato de que o modo permanece incompressível na camada resistiva. Podemos verificar facilmente das equações (4.10), (4.12) que $\hat{\xi}_z$ e $\hat{\xi}_r$ são

funções pares quando ξ_θ é ímpar, e que $\frac{\xi_z}{\xi_r} \sim kr_0 \ll 1$ e $\frac{\xi_\theta}{\xi_r} \sim 1$ na região magnetohidrodinâmica ideal. Então a perturbação é tal que o fluido no volume interior à superfície $r = r_0$ tende a se deslocar radialmente e a ser redistribuído no interior da camada resistiva formando ilhas magnéticas finas e alongadas.

Tomando o limite $\Omega^2 \tau_H^2 \sim k^2 r_0^2 \ll m^2$ e usando o ordenamento (4.16), as equações (4.10), (4.15) reduzem-se à ordem mais baixa em ϵ a

$$\frac{d^2 \tilde{\xi}_r}{dx^2} = \frac{x}{\Lambda^2} \frac{d^2 \psi_r}{dx^2} \quad (4.17)$$

e

$$\psi_r = -x \tilde{\xi}_r + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_r}{dx^2} \quad (4.18)$$

Este sistema de equações é o do modo kink interno resistivo, cuja solução é bem conhecida⁽¹³⁾.

Uma solução exata é dada por $\tilde{\xi}_r = \text{cte}$ e quando $x \rightarrow \infty$ existe uma solução que comporta-se como $\tilde{\xi}_r \sim \frac{1}{x}$.

Logo o casamento assintótico com as soluções da região ideal, (2.42) e (2.43), pode ser feito.

Para $\Lambda \sim 1$, temos $\sigma = i \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$

A taxa de crescimento da instabilidade, γ , é dada por

$$\gamma = -i(\omega - \Omega) \sim \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$$

Como $\tau_R \propto \frac{1}{\eta}$, temos que $\gamma \sim \eta^{1/3}$.

A taxa de crescimento varia com a potência $\frac{1}{3}$

da resistividade como no caso do modo kink interno resistivo sem rotação.⁽¹³⁾ Entretanto neste modo $\hat{\xi}_z \ll \hat{\xi}_r$ tanto na região resistiva como na ideal, enquanto que no nosso caso $\hat{\xi}_z \gg \hat{\xi}_r$ na região resistiva e $\hat{\xi}_z \ll \hat{\xi}_r$ na região ideal.

A rotação da coluna do plasma não estabiliza o modo e somente introduz um deslocamento Doppler na frequência ou seja

$$\omega = \Omega + i\Lambda \left(\tau_H / \tau_r \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$$

Poderíamos tentar ordenar as equações (4.10) , (4.15) fazendo $\hat{\xi}_z$ ser da ordem de $(kr_0) \hat{\xi}_r$ como na região MHD ideal; para isso faríamos $g = 0$ em (4.16). Isto levaria ao mesmo escalonamento para a taxa de crescimento sob a condição de que

$$\left(\frac{d^2 \psi_r}{dx^2} \right) / \Lambda \psi_r \sim \left(\frac{d^2 \psi_z}{dx^2} \right) / \Lambda \psi_z \ll 1 ;$$

estas relações são válidas apenas na região ideal, e devido a esta restrição este escalonamento não será usado.

4.3 - Casamento Assintótico e Equação de Autovalor

Devido ao ordenamento, o valor de m não aparece explicitamente nas equações resistivas relevantes (4.17) e (4.18). Também a solução dessas equações casam-se assintoticamente às soluções ideais, quando $x \rightarrow 0$, para qualquer valor de $m \neq 0$, pois supusemos $k^2 r^2 \ll m^2$. Vimos no capítulo anterior que o modo $m = 0$ tem uma taxa de crescimento bem menor que a do modo $m = 1$ para o modo "tearing" resistivo sem rotação, mas que existe um modo $m = 0$ com rotação e compressível que tem uma taxa

de crescimento que também escala com a potência $\frac{1}{3}$ da resistividade.

Voltando ao nosso modo $m = 1$ incompressível, associado a uma estrutura radial $\hat{\xi}_r$ sem nodos ($n = 0$), estamos supondo que efeitos de raio de Larmor finito são menos importantes que para o caso em que $m \geq 2$.

Vamos reescrever as equações (2.39) e (2.40) como

$$\hat{\xi}_{\text{MHD}} \approx \hat{\xi}_0 \left(1 + \frac{C}{x_M}\right); \quad x \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

onde $\hat{\xi}_0$ e C são ctes e $x_M = \delta x$

Então

$$\left(\frac{1}{\hat{\xi}_0} \frac{d\hat{\xi}_r}{dx}\right)_{x \rightarrow 0} \approx -\frac{C}{\delta x^2}$$

A solução de (4.17) e (4.18) foi obtida analiticamente por Coppi e outros⁽¹³⁾ e é dada assintoticamente por

$$\left(\frac{1}{\hat{\xi}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_r}{dx}\right)_{x \rightarrow \infty} \approx -\left[(2x^2) \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{d\chi}{dx}\right]^{-1} \quad (4.20)$$

$$\chi = 1 - \frac{\Lambda^{3/4}}{4\sqrt{2}} \int_0^1 dy y^{(3\Lambda^2-5)/4} (1+y)^{1/2} \exp\left(-\frac{x}{2\Lambda^{1/2}} \frac{1-y}{1+y}\right)$$

(4.21)

Substituindo (4.21) em (4.20) e calculando a integral⁽²⁸⁾, obtemos a equação de autovalor:

$$F(\Lambda) = \Lambda^{5/4} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{4} (\Lambda^{3/2}-1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{4} (\Lambda^{3/2}+5)\right]} = \frac{8}{\pi} \epsilon^{1/3} C^{-1} \quad (4.22)$$

A constante C é determinada resolvendo a equação MHD ideal (2.38) fora da camada resistiva para o nosso modelo de configuração de campo reverso como será visto no apêndice B.

Então para valores de τ_H e τ_R , obtidos por análise de dados experimentais relativos a instabilidades rotacionais em θ - pinches com $m = 1$, Λ pode ser determinado facilmente a partir de (4.22). Notemos que para o valor particular $\Lambda = 1$ corresponde a $C = 0$.

Na próxima seção usando os resultados do apêndice B faremos a análise de alguns dados experimentais.

4.4 - Análise e Interpretação de Resultados para o Modo $m = 1$ Resistivo

Este modo, como vimos, tem um grande deslocamento paralelo à superfície no interior da camada resistiva, ou seja, $\xi_\theta, \xi_z \gg \xi_r$. Das equações (4.10), (4.15), (4.17) e (4.18), vemos que B_{1z} está em fase com ξ_r e B_{1r} e ξ_z estão 90° fora de fase com ξ_r .

A grande perturbação ξ_z na camada resistiva desloca o plasma desde um ponto onde $\xi_z = 0$ até o próximo ponto nulo como mostrado na figura 4.1. Este deslocamento é também acompanhado de um grande deslocamento na direção azimutal, tal que o modo permanece incompressível, e ilhas magnéticas helicoidais são formadas. Este modo não é a versão resistiva do modo magnetohidrodinâmico ideal discutido por Freidberg e Wesson⁽²⁴⁾.

O modo ideal é instável pela energia livre rotacional associada a um gradiente negativo de densidade^{(19), (24)}.

O modo resistivo descrito aqui é instável pela energia magnética livre presente em configurações de campo reverso. Esta energia livre pode ser extraída através da resistividade finita do plasma e a estabilidade do modo não depende do gradiente de densidade.

Então o modo torna-se estável no limite de resistividade nula. Sabemos que a taxa de crescimento do modo $m = 1$ ideal é dada por $\gamma_{\text{MHD}} = c\Omega$, onde c é uma cte que depende dos perfis de equilíbrio; tipicamente $c \sim 0.2$.⁽²⁴⁾

Logo, a razão entre as taxas de crescimento dos modos resistivos e ideal é dada por

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_{\text{MHD}}} \approx \frac{\Lambda \epsilon^{1/3}}{c \Omega \tau_H}$$

Esta razão depende de valores dos parâmetros de equilíbrio.

Os efeitos de raio de Larmor finito tendem a reduzir a taxa de crescimento do modo ideal⁽²¹⁾. Quando estes efeitos são levados em conta essa taxa é dada por

$$\gamma_{\text{FLR}} \approx \left\{ 2 \ln \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \Omega^2 \tau_H^2 \right] \right\}^{-1/2} \tau_H^{-1}$$

onde $\alpha = - \frac{\Omega}{\Omega^*}$ e Ω^* é a frequência de arrasto⁽²¹⁾.

Então para $0 < \alpha < 1$ o modo é estável. Efeitos de raio de Larmor finito podem ser estabilizantes para o modo resistivo considerado aqui. Entretanto não incluímos esses efeititos devido à dificuldade de realizar um cálculo cinético em uma região onde o campo magnético se anula. Comparando a teoria com os dados experimentais para Scylla IV P, devido a não haver medida direta de Ω ⁽²¹⁾, Freidberg e Pearlstein calcularam Ω^*

a partir dos valores experimentais da temperatura iônica e do campo magnético e então determinaram α (isto é, Ω) igualando o valor experimental de ω_r ao calculado teoricamente.

Vamos calcular agora a taxa de crescimento do modo resistivo $m = 1$ para Scylla IV P usando os dados de de Freidberg e Pearlstein. De acordo com nossa teoria, tomamos Ω igual ao valor experimental de ω_r , portanto,

$$\frac{\Omega^2}{k^2 V_A^2} \approx 8 \times 10^{-4} (ka)^{-2} \quad (4.23)$$

Então a condição $\frac{\Omega^2}{k^2 V_A^2} \ll 1$ para nossa teoria ser válida é satisfeita se $(ka)^2 > 10^{-3}$. A taxa de crescimento é dada por

$$\gamma_r \approx \Lambda (ka)^{2/3} \times 10^6 \text{ s}^{-1} \quad (4.24)$$

O valor de Λ a ser substituído em (4.24) é determinado a partir da equação (4.22). Para isso é necessário determinar a constante C (ver apêndice B) em cujo cálculo precisamos conhecer o valor de ka .

Nós achamos que o valor experimental para a taxa de crescimento, $\gamma \approx 0.9 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, é achado para $\Lambda \approx 5$ e para um comprimento de onda $\lambda \approx 0,80 \text{ m}$ ⁽²⁸⁾. Este valor do comprimento de onda é maior que o previsto pela teoria magnetohidrodinâmica ideal, 0,51 m, mas menor que o previsto pelo raio de Larmor finito, 3,1 m.

Para os valores experimentais dados por Eberhagen e Grossmann (tabelas I e II da referência (7)), obtemos

taxas de crescimento que variam de 2,0 a $7,1 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. Então parece que o modo descrito aqui não ocorre em sua experiência durante a fase quiescente, onde uma estrutura anular é observada ficar estável por tempos da ordem de $10 \mu\text{s}$. O modo $m = 1$ pode ser a instabilidade responsável pela contração e quebra inicial da descarga de plasma.

Vemos também que não é necessário que um theta-pinch seja operado com um campo de polarização reverso externamente aplicado para que essa instabilidade seja observada. Se um pequeno fluxo magnético aparece no plasma durante a descarga de pré-aquecimento, o valor do correspondente campo magnético aumenta quando a coluna de plasma é comprimida, e uma configuração de campo reverso pode aparecer quando a máxima compressão é obtida⁽²⁹⁾. Este fluxo pode ser liberado pela instabilidade resistiva que discutimos aqui.

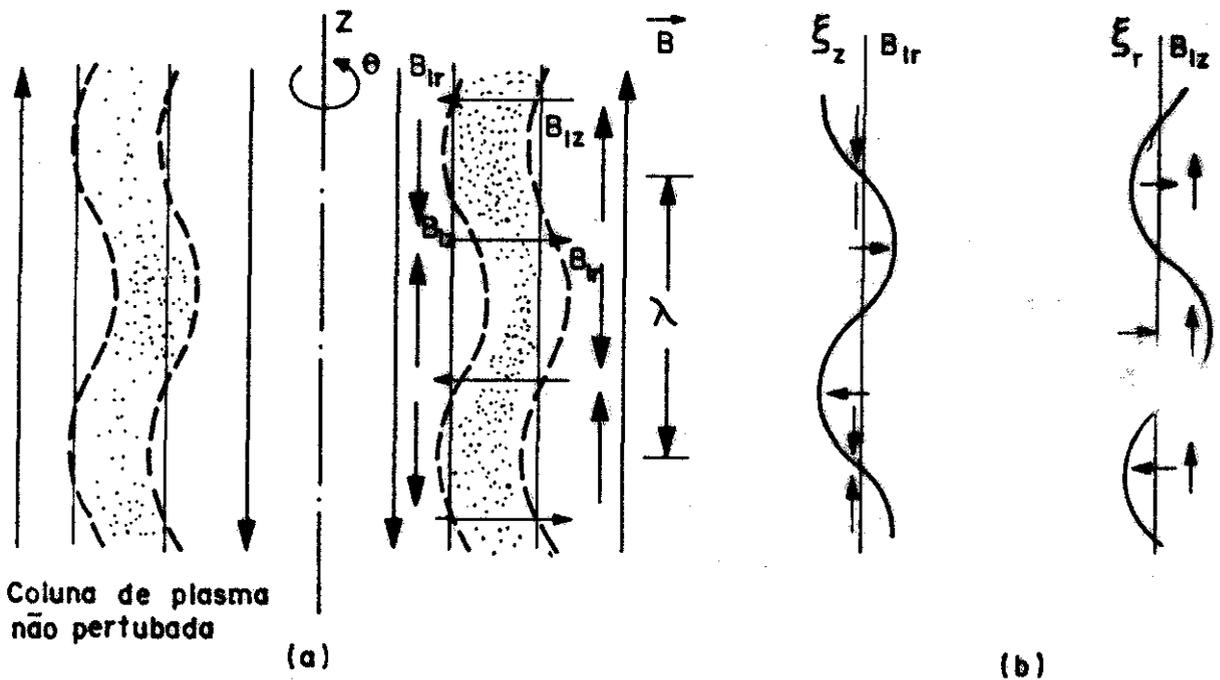


Figura 4.1 - Representação do modo resistivo $m = 1$ em uma configuração de campo reverso sem cisalhamento. O grande deslocamento perturbado ξ_z na camada resistiva leva à formação de regiões de alta e baixa densidade que se alternam ao longo da coluna de plasma. Isto é indicado em (a) pela densidade de pontos. As fases relativas das componentes perturbadas do deslocamento de fluido e campo magnético são mostrado em (b).

CAPÍTULO 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Diversas experiências e cálculos têm sido apresentados para theta-pinches operados com campo de polarização inicial com estrutura de campo reverso.

Um variedade de processos de reconexão e rompimento de linhas de campo, incluindo a formação de ilhas magnéticas, tem sido observado, junto com o fato de que as fases de implosão e pós-implosão têm um auto grau de simetria azimutal, ou seja, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ⁽⁸⁾. Isso leva a crer que um modo com $m = 0$ é relevante nessas configurações.

Nosso principal resultado para esse modo é que, levando em conta a rotação e a resistividade da coluna de plasma, existe um modo compressível associado à rotação, que tem uma taxa de crescimento muito maior que o modo associado a rotação nula da coluna ⁽²³⁾. Esse modo é análogo a um modo gravitacional, também resistivo, havendo uma relação entre a velocidade de rotação Ω e a aceleração gravitacional g , como se pode ver no apêndice D.

Uma continuação natural do trabalho é a investigação dos possíveis efeitos estabilizantes desse modo como o cisalhamento na rotação, que foi susposta rígida, a inclusão do termo de efeito Hall na equação de movimento e ainda a inclusão do efeito de raio de Larmor finito do ion o qual seria então suposto de mesma ordem que a espessura da camada. Cálculos baseados em efeitos de raio de Larmor finito, incluído também efeitos de resistividade e gravitação, têm sido aplica-

dos a modos resistivos de intercâmbio^{(30), (31)}, no contexto de um ordenamento para theta-pinches, e as equações obtidas têm uma estrutura analítica semelhante às equações magnetohidrodinâmicas que obtivemos especificamente para o modo $m = 0$.

Para o modo "kink" resistivo $m = 1$, estudamos a possibilidade de estabilização pela rotação do plasma, como proposto⁽⁷⁾ na literatura, e sua possível conexão com um modo rotacional observado após a compressão⁽²¹⁾.

Mostramos então que esse modo é instável em configurações de campo reverso sem cizalhamento e a rotação da coluna de plasma não estabiliza o modo e somente introduz um deslocamento Doppler na frequência⁽²⁸⁾. Esse modo, suposto incompressível, tem um grande deslocamento paralelo à superfície no interior da camada, que é acompanhado por um grande deslocamento na direção azimutal, formando-se ilhas magnéticas helicoidais.

O modo é instável pela energia magnética livre presente na configuração de campo reverso.

A ordem de grandeza das taxas de crescimento que obtemos, como pode ser visto no apêndice B, é cerca de uma ordem de grandeza superior às determinadas experimentalmente, como usual em cálculos magnetohidrodinâmicos. Este modo $m = 1$ pode ser também o responsável pela contração e quebra inicial da descarga de plasma.

Podemos então fazer uma tabela englobando as diversas taxas calculadas para esses modos descritos e associados ao modelo de configuração de campo reverso.

m	Ω	γ
0	0	$\Lambda_1 \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{3/5} \tau_H^{-1}$
	$\neq 0$	$\Lambda_2 \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$ (nã local)
		$\Lambda_3 \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$ local
1	$\neq 0$	$\Lambda_4 \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1}$

onde Λ_1 é dado por

$$\Lambda_1 = \left(\frac{\Delta'}{A_0} \right)^{4/5},$$

e Δ' é calculado através de (A15);

Λ_2 é calculado a partir da solução numérica da equação (3.36)', na qual $\frac{c_1}{c_2}$ é dado por (A 22);

Λ_3 é dado por

$$\Lambda_3 = \left[\frac{kr_0 M_1}{(2n+1)} \right]^{2/3}; \quad M_1 = \Omega^2 \tau_H^2 \left(\frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} - \frac{r_0}{\gamma P_0} \frac{dP_0}{dr_0} \right)$$

e

Λ_4 é solução da equação (4.22) onde a constante C que aí aparece é dada por (B 9).

Efeitos de raio de Larmor finito tendem a reduzir a taxa de crescimento do modo ideal^{(21), (32)}. Podemos incluí-los também, por exemplo, a partir das equações de fluido de Braginskii⁽³³⁾ que incluem o tensor de pressão, onde a equação de movimento é da forma

$$m_{\alpha} n_{\alpha} \frac{d \vec{V}_{\alpha}}{dt} = -\nabla p_{\alpha} - \nabla \cdot \vec{\pi} + e_{\alpha} n_{\alpha} (\vec{E} + \vec{V}_{\alpha} \times \vec{B}) + \vec{R}_{\alpha}$$

sendo $\vec{\pi}$ o tensor de pressão, α representa a espécie (ions ou elétrons) e \vec{R}_{α} é a transferência colisional de momentum para uma dada espécie.

Partindo das equações gerais descritas na referência acima, podemos reduzi-las a uma equação de movimento e a uma lei de Ohm generalizada como feito por Coppi e Basu no estudo do modo de reconexão⁽²⁵⁾, tanto para o modo $m = 0$ como para modo $m = 1$.

As equações completas de Braginskii só precisam ser utilizadas na camada resistiva, que pode ser suposta plana e portanto utilizadas as expressões cartesianas que são mais simples, e todos os elementos do tensor de pressão poderão ser escalonados em termos do pequeno parâmetro $\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R}$ definido em nosso trabalho.

Para o modo $m = 1$ também foi estudado a contribuição para a estabilidade do cisalhamento na rotação.

As equações obtidas, que reduzem-se às que obtemos para o caso de rotação rígida, indicam a possibilidade do autovalor associado à taxa de crescimento ter uma representação complexa, como é visto no apêndice C.

O grau de estabilização devido a esse fator depende ainda da determinação de sua parte imaginária, com a

lução completa dessas equações.

Resultados experimentais mais recentes têm mostrados que ao invés do modo "tearing" esperado, uma rotação pronunciada da coluna é observada; esta rotação cresce com o tempo até que a frequência rotacional alcança um valor crítico e nesse tempo o plasma torna-se instável em relação a um modo $m = 2$.

Seria interessante estudar esse modo, inicialmente apenas usando o tratamento magnetohidrodinâmico, a partir das equações gerais que obtivemos, e após estudado o problema do casamento assintótico com a solução da equação ideal, compararmos sua taxa de crescimento com as dos modos $m = 0$ e $m = 1$ que estudamos.

APÊNDICE A

Modelo de Campo Reverso para o Modo $m = 0$

Resolvemos neste apêndice a equação (2.34) para o modelo de configuração de campo reverso na região MHD ideal para os casos $\Omega = 0$ e $\Omega \neq 0$ e também determinamos a taxa de crescimento das instabilidades associadas ao modo $m = 0$, aplicando as condições de contorno apropriadas na região ideal.

Para o caso em que $\Omega = 0$, a equação (2.34) reduz-se simplesmente a

$$\frac{d}{dr} (rB^2 \frac{d\xi_r}{dr}) - \left[\frac{B^2}{r} (1 + k^2 r^2) + \frac{dB^2}{dr} \right] \xi_r = 0 \quad (\text{A.1})$$

Chamando as regiões onde $B = \text{cte}$, em nosso modelo de aproximação trapezoidal para a configuração de campo reverso (figura A-1), de região 1 e região 4, obtemos para tais regiões a equação

$$r^2 \frac{d^2 \xi_r}{dr^2} + r \frac{d\xi_r}{dr} - (1 + k^2 r^2) \xi_r = 0$$

cujas soluções são

$$\xi_r = AI_1(kr) + BK_1(kr) \quad (\text{A.2})$$

onde I_1 e K_1 são funções modificadas de Bessel.

Como na região 1 ξ_{r1} precisa satisfazer a

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \xi_{r1} = 0$$

e além disso $K_1(0) \rightarrow \infty$,

temos que fazer $B = 0$.

Também na região 4, $I_1(\infty) \rightarrow \infty$, o que implica $A = 0$.

Portanto

$$\xi_{r1} = AI_1(kr) = AI_1(kr_0(1+x))$$

e (A.3)

$$\xi_{r4} = BK_1(kr) = BK_1(kr_0(1+x)),$$

onde

$$x = \frac{r-r_0}{r_0}$$

Em termos dessa variável x vamos escrever diretamente a equação (A.1) para as regiões 2 e 3, onde $B = B_0x$, na forma

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x)x^2 \frac{d\xi_r}{dr} \right] - \frac{x^2}{1+x} (1+k^2r_0^2(1+x)^2) \xi_r + 2x\xi_r = 0$$

Desprezando o termo $k^2r_0^2(1+x)^2$ na equação acima, para simplificar o cálculo, obtemos

$$\frac{d^2\xi_r}{dx^2} + \frac{2+3x}{x(1+x)} \frac{d\xi_r}{dx} + \frac{2+x}{x(1+x)^2} \xi_r = 0$$

Uma solução é dada simplesmente por

$$\xi_r(x) = \frac{c}{1+x} \tag{A.4}$$

Para achar a outra solução, podemos usar a fórmula que dá a 2a. solução de uma equação do tipo

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + p(z) \frac{d\psi}{dz} + q(z)\psi = 0$$

em termos de uma solução conhecida⁽³⁴⁾, ou seja,

$$\psi_2(z) = D\psi_1(z) \int e^{-\int p dz} \frac{dz}{\psi_1^2(z)}, \quad D = \text{cte} \quad (\text{A.5})$$

Em nosso caso

$$p(x) = \frac{2 + 3x}{x(1+x)}; \quad q(x) = \frac{2+x}{x(1+x)^2}$$

e

$$\xi_r(x) = \frac{D}{1+x} \left[\ln x - \frac{1}{x} \right] \quad (\text{A.6})$$

Agora vamos calcular o fator Δ' que aparece na expressão da taxa de crescimento do modo "tearing" $m = 0$ dada por

$$\gamma = \epsilon^{3/5} \tau_H^{-1} \left(\frac{\Delta'}{A_0} \right)^{4/5}$$

As condições de contorno apropriadas para o cálculo de Δ' , de acordo com a figura A-1, são

$$\xi_{r_1} = \xi_{r_2} \Big|_{x=x_1}; \quad \xi'_{r_1} = \xi'_{r_2} \Big|_{x=x_1} \quad (\text{A.7})$$

$$\xi_{r_3} = \xi_{r_4} \Big|_{x=x_2}; \quad \xi'_{r_3} = \xi'_{r_4} \Big|_{x=x_2} \quad (\text{A.8})$$

sendo

$$x_1 = \frac{r_1 - r_0}{r_0} < 0; \quad x_2 = \frac{r_2 - r_0}{r_0} > 0$$

e

ξ_{r_2} e ξ_{r_3} são as correspondentes soluções dadas por

(A.4) e (A.6), sendo escritas na forma

$$\xi r_2 = \frac{c}{1+x} + \frac{D}{1+x} \left(\ln|x| - \frac{1}{x} \right)$$

e

$$\xi r_3 = \frac{E}{1+x} + \frac{G}{1+x} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$$

Substituindo essas equações em (A.7) e (A.8) obtemos

$$AI_1(kr_0(1+x_1)) = \frac{c}{1+x_1} + \frac{D}{1+x_1} \left(\ln|x_1| - \frac{1}{x_1} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$A \left\{ kr_0 I_0(kr_0(1+x_1)) - \frac{I_1(kr_0(1+x_1))}{(1+x_1)} \right\} = - \frac{c}{(1+x_1)^2} +$$

$$+ D \left\{ - \frac{1}{(1+x_1)^2} \left(\ln|x_1| - \frac{1}{x_1} \right) + \frac{1}{1+x_1} \left(- \frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{x_1^2} \right) \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$BK_1(kr_0(1+x_2)) = \frac{E}{1+x_2} + \frac{G}{1+x_2} \left(\ln x_2 - \frac{1}{x_2} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$-B \left\{ kr_0 K_0(kr_0(1+x_2)) + \frac{1}{1+x_2} K_1(kr_0(1+x_2)) \right\} =$$

$$= - \frac{E}{(1+x_2)^2} - \frac{G}{(1+x_2)^2} \left(\ln x_2 - \frac{1}{x_2} \right) + \frac{G}{1+x_2} \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} \right) \quad (\text{A.12})$$

Como fora da camada singular ψ é dado por $\psi = -x\xi$ vem

i) para $x < 0$

$$\xi r_2 = c - \frac{D}{x} \quad (x \rightarrow 0_-) \rightarrow \psi_{x \rightarrow 0_-} = -Cx + D$$

ii) para $x > 0$

$$\xi r_3 = E - \frac{G}{x} \quad (x \rightarrow 0_+) \rightarrow \psi_{x \rightarrow 0_+} = -Ex + G$$

Logo Δ' é dado por

$$\Delta' = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0_+} - \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0_-} = c - E \quad (\text{A.13})$$

A continuidade de ψ em $x = 0$ implica

$$G = D \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo algebricamente o sistema (A.9), (A.12), e usando a condição (A.14) obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \Delta' = & \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{|x_1|} \right)^{-1} \{ (1+x_1) \left[I_1(kr_0(1+x_1)) \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{|x_1|} \right) - \right. \\ & \left. - kr_0 I_0(kr_0(1+x_1)) \left(\ln|x_1| - \frac{1}{x_1} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{(1+x_1) I_0(kr_0(1+x_1))}{K_0(kr_0(1+x_2))} (K_1(kr_0(1+x_2)) \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} \right) + kr_0 K_0(kr_0(1+x_2)) \left(\ln x_2 - \frac{1}{x_2} \right)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Substituindo esse valor Δ' em (3.28) podemos então determinar o auto valor Λ .

Vamos agora resolver a equação (2.36), ou seja, considerar o caso em que $\Omega \neq 0$, para calcularmos a expressão $\frac{c_1}{c_2}$ que aparece na equação de autovalor do modo $m = 0$ compressional (3.24).

Para $B = B_0 = \text{cte}$ esta equação torna-se

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\xi_r}{dr} \right) - \left[\frac{1+k^2 r^2}{r} - \frac{4\pi\Omega^4 \rho_0^2}{\gamma B_0^2 p_0} r^3 + \frac{4\pi\Omega^2}{B_0^2} \frac{dp_0}{dr} r^2 \right] \xi_r = 0$$

Nessa região o nosso modelo vai supor $\rho_0 = \text{cte}$ na região 1 e $\rho_0 = 0$ na região 4.

Então usando a condição de equilíbrio dada por

$$\frac{d}{dr} \left(p_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = \rho_0 \Omega^2 r$$

vem

$$p_0 = \frac{1}{4} \rho_0 \Omega^2 r^2$$

Precisamos resolver então a equação

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\xi_r}{dr} \right) - \left[\frac{1 + k^2 r^2}{r} - ar \right] \xi_r = 0 \quad (\text{A.16})$$

com

$$a = \frac{8\pi\Omega^2\rho_0}{\gamma B_0^2}$$

Logo (A.16) pode ser escrita na forma

$$r^2 \xi_r'' + r \xi_r' - \left[1 + (k^2 - a)r^2 \right] \xi_r = 0 \quad (\text{A.17})$$

cuja solução geral é

$$\xi_r = AI_1((k^2 - a)^{1/2}r) + BK_1((k^2 - a)^{1/2}r)$$

Como ξ_r satisfaz $\lim_{r \rightarrow 0} r \xi_r = 0$ na região 1, isto implica $B = 0$

Portanto

$$\xi_{r_1} = AI_1((k^2 - a)^{1/2}r) \quad (\text{A.18})$$

Na região 4, $\rho_0 = 0$, ou seja, $a = 0$, então a solução é a mesma que a do caso $\Omega = 0$,

$$\xi_{r_4} = B K_1(kr) \quad (\text{A.19})$$

Para as regiões 2 e 3 onde $B = B_0 x$ temos que resolver a equação (2.37):

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x)x^2 \frac{d\xi_r}{dx} \right] - \frac{x^2}{1+x} (1+k^2 r_0^2 (1+x)^2) \xi_r + (2x+a_1) \xi_r = 0$$

onde

$$a_1 = \frac{r_0}{B_0^2} \left[\frac{4\pi\rho_0^2\Omega^4}{\gamma p_0} r_0^3 (1+x)^3 - 4\pi r_0^2 (1+x)^2 \frac{1}{r_0} \frac{d\rho_0}{dx} \Omega^2 \right]$$

A solução analítica dessa equação torna-se difícil e su pomos então nessa região que a_1 é constante, levando em conta somente o efeito de Ω , ρ_0 e p_0 , e ainda supomos $k^2 r_0^2 (1+x)^2 \ll 1$.

Esta equação fica então

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x)x^2 \frac{d\xi_r}{dx} \right] - \frac{x^2}{1+x} \xi_r + (2x + a_1) \xi_r = 0$$

com

$$a_1 = \frac{r_0}{B_0^2} \left[\frac{4\pi\rho_0^2\Omega^4}{\gamma p_0} r_0^3 - 4\pi r_0 \Omega^2 \frac{d\rho_0}{dr_0} \right]$$

Fazendo $\xi_r = \frac{G(x)}{1+x}$, obtemos

$$(1+x)x^2 G'' + x(x+2)G' + a_1 G = 0$$

cuja solução é ⁽³⁵⁾

$$G(x) = x^k u(x)$$

onde

$$k = \frac{-1 \pm B_1}{2}; \quad B_1 = \sqrt{1 - 4a_1}$$

Sendo

$$u_1(x) = (1+x)^2 F\left(\frac{B_1+3+\sqrt{B_1^2-B_1}}{2}, \frac{B_1+3-\sqrt{B_1^2-B_1}}{2}, 1+B_1; -x\right)$$

e

$$u_2(x) = (-x)^{-B_1} (1+x)^2 F\left(\frac{-B_1+3-\sqrt{B_1^2-B_1}}{2}, \frac{-B_1+3+\sqrt{B_1^2-B_1}}{2}, 1-B_1; -x\right)$$

e $F(a, b, c; x)$ representa a s\u00e9rie hipergeom\u00e9trica

$$\begin{aligned} F(a, b, c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Desta forma, ξ_r \u00e9 dado por

$$\begin{aligned} \xi_r &= \left[c_1 u_1(x) x^{k_1} + c_2 u_2(x) x^{k_2} \right] \frac{1}{1+x} \\ &= x^{\frac{-1+B_1}{2}} (1+x) \{ c_1 F(a_1, a_2, a_3; -x) + c_2 (-x)^{-B_1} F(d_1, d_2, d_3; -x) \} \end{aligned} \quad (A.20)$$

onde $a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, d_3$ s\u00e3o determinados pelas express\u00f5es de u_1 e u_2 .

O c\u00e1lculo de c_1 e c_2 \u00e9 feito usando as condi\u00e7\u00f5es de contorno no ponto $x_1 = \frac{r_1 - r_0}{r_0}$ dadas por

$$\xi r_1 = \xi r_2 \Big|_{x = x_1} \quad (\text{A.21})$$

$$\xi' r_1 = \xi' r_2 \Big|_{x = x_1}$$

onde os índices 1 e 2 representam respectivamente as regiões onde $B = \text{cte}$ e $B = B_0 x$.

Resolvendo algebricamente o sistema (A.21) obtemos

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{q_3' q_1 - q_1' q_3}{q_1' q_2 - q_2' q_1} \quad (\text{A.22})$$

onde

$$q_1 = I_1((k^2 - a)^{1/2} r_0(1+x_1)),$$

$$q_1' = (k^2 - a)^{1/2} I_0((k^2 - a)^{1/2} r_0(1+x_1)),$$

$$q_2 = x_1^{\frac{-1+B_1}{2}} (1+x_1) F(a_1, a_2, a_3, -x_1),$$

$$q_2' = \left[x_1^{\frac{-1+B_1}{2}} + \frac{B_1-1}{2} (1+x_1) x^{\frac{B_1-3}{2}} F(a_1, a_2, a_3; -x_1) - x_1^{\frac{-1+B_1}{2}} (1+x_1) \frac{a_1 a_2}{a_3} F(a_1+1, a_2+1, a_3+1; -x_1) \right],$$

$$q_3 = (-1)^{-B_1} (1+x_1) x_1^{\frac{-1-B_1}{2}} F(d_1, d_2, d_3; -x),$$

$$q_3' = (-1)^{-B_1} \left[(x_1)^{\frac{-1-B_1}{2}} + (1+x_1) \left(\frac{-1-B_1}{2} \right) x_1^{\frac{-3-B_1}{2}} \right] F(d_1, d_2, d_3; -x_1) -$$

$$- (-1)^{-B_1} \frac{d_1 d_2}{d_3} (1+x_1) x_1^{\frac{-1-B_1}{2}} F(d_1+1, d_2+1, d_3+1, -x_1).$$

Então substituindo a expressão de $\frac{c_1}{c_2}$ em (3.24) determinamos a expressão final analítica para o cálculo de $\frac{c_1}{c_2}$, ou seja, para a determinação da equação de autovalor, que foi resolvida numericamente. Dando valores numéricos a x_1 e B_1 é possível de determinar $\frac{c_1}{c_2}$ e conseqüentemente $\frac{c_1}{c_2}$. Fazendo então a interseção do valor de $\frac{c_1}{c_2}$ com a curva proveniente do cálculo numérico que dá a dependência de $\frac{c_1}{c_2}$ com o auto valor Λ , é possível determiná-lo para uma dada condição experimental. Para os dados experimentais da referência (7), fazendo $k^2 r_0^2 = 0,10$, obtemos $\frac{c_1}{c_2} \approx -8 \times 10^{-2}$, o que corresponde de acordo com a figura (3.4) a $\Lambda \approx 1,2$.

Vemos então que para o modo $m = 0$, a taxa de crescimento das instabilidades estudadas segue o esquema abaixo:

$\Omega = 0$	$\Omega \neq 0$	
modo "tearing" ($a = 3/5$)	modo compressivo ($a = 1/3$)	modo com fortes gradientes na camada ($a = 1/3$)
$\gamma = \gamma(\Delta')$	$\gamma = \gamma\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$	$\gamma \propto (kr_0)^{2/3}$

sendo

$$\gamma = \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^a \Lambda \tau_H^{-1},$$

Δ' e $\frac{c_1}{c_2}$ foram calculados nesse apêndice e a taxa do modo com fortes gradientes de campo na camada resistiva foi calculado diretamente no capítulo 3.

A seguir indicaremos alguns valores experimentais extraídos da referência 7 e que utilizamos no cálculo da taxa de crescimento

$$p_0 = 50 \text{ m Torr}$$

$$B_0 = 1,0 \text{ kG}$$

$$r_0 = 1,1 \text{ cm}$$

$$n_i = 4,0 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

$$T_i = 60 \text{ ev}$$

A partir desses dados para a citada experiência é achado

$$\tau_H = 5,1 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$\varepsilon = 8,4 \times 10^{-4} \ll 1$$

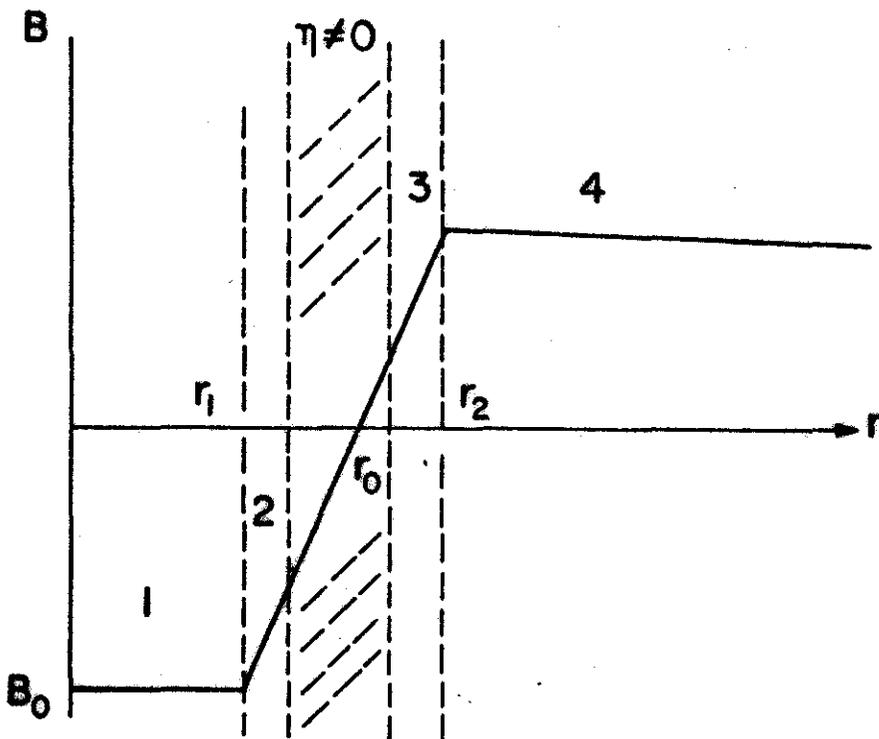


Figura A.1 - Modelo trapezoidal para a configuração de campo reverso sem cisalhamento

APÊNDICE B

Modelo de Campo Reverso para o Modo $m = 1$

Neste apêndice resolvemos a equação (2.40) para o modelo de campo reverso na região ideal e em seguida de terminar a constante C que aparece na equação de autovalor (4.22).

Nas regiões 1 e 4, da figura A1, $B = \text{cte}$ e as soluções para $m = 1$ são encontradas desprezando os termos $\rho\omega^2$ e $\rho\Omega^2$.

Elas são dadas por:

$$\xi_{rI} = \begin{cases} \xi_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{8}\right) & r < r_1 \\ \frac{A}{r^2} & r > r_1 + \Delta \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde ξ_0 e A são constantes.

A equação (2.40) nas regiões 2 e 3, em termos da variável $x = \frac{r - r_0}{r_0}$ e supondo $B = B_0$ x fica

$$\frac{d}{dx} x^2 (1+x)^3 \frac{d\xi_r}{dx} + 2x (1+x)^2 \xi_r = 0 \quad (\text{B.2})$$

Introduzindo a variável $y = x(1+x)^2 \xi_r$ obtemos

$$x(1+x) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (\text{B.3})$$

Portanto (B.2) é redutível a uma equação hipergeométrica e a solução geral para $\xi_r = \frac{y}{x(1+x)^2}$

é dada por

$$\xi_{r_{II}} = A^* \xi_{r_1} + B^* \xi_{r_2} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\xi_{r_1} = \frac{-F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2; -x)}{(1+x)^2} \quad (\text{B.5})$$

e

$$\begin{aligned} \xi_{r_2} = & - \frac{\ell_n(-x)}{(1+x)^2} F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2; -x) - \\ & - \frac{1}{(1+x)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \frac{(\sqrt{2})_n (-\sqrt{2})_n}{(2)_n n!} [\psi(\sqrt{2}+n) - \psi(\sqrt{2}) + \\ & + \psi(-\sqrt{2}+n) - \psi(-\sqrt{2}) - \psi(n+2) + \psi(2) - \psi(n+1) + \psi(1)] + \frac{1}{x(1+x)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde $a_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ e ψ é a função digama $\psi(z)$

definida por

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

As constantes A^* e B^* são determinadas casando as soluções ξ_r e $\frac{d\xi_r}{dx}$ em $x_1 = \frac{r_1 - r_0}{r_0}$. Quando $x \rightarrow 0$

a solução comporta-se como:

$$\xi_{r_{II}} \sim A^* + \frac{B^*}{x} = A^* \left(1 + \frac{B^*}{A^*} x\right) = A^* \left(1 + \frac{C}{x}\right);$$

tal como dado por (4.19).

Temos que resolver então o sistema

$$\xi_{rI} = \xi_{rII} \Big|_{x=x_1} \quad (B.7)$$

$$\frac{d \xi_{rI}}{dx} = \frac{d \xi_{rII}}{dx} \Big|_{x=x_1} \quad (B.8)$$

Então a solução de (B.7) e (B.8) fornece

$$C = \frac{B^*}{A^*} = \frac{-8}{8 k^2 r_0^2 (1+x_1)^2} \left[F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2; -x_1) \frac{k^2 r_0^2}{4} - \right. \\ \left. - F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3; -x_1) \left(\frac{8 + k^2 r_0^2 (1+x_1)^2}{8 (1+x_1)^2} \right) \right] x \\ x \left\{ \left[-F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3; -x_1) \frac{\ell_n(-x_1)}{(1+x_1)^3} + \frac{F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2; -x_1)}{x_1 (1+x_1)^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})_n (-\sqrt{2})_n}{(2)_n n!} \left[-2 \frac{n(x_1)^n}{(1+x_1)^3} + \frac{n(x_1)^{n-1}}{(1+x_1)^2} \right] [\psi_n] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 + 3x_1}{x_1^2 (1+x_1)^3} \right] - \frac{k^2 r_0^2}{4} (1+x_1)^2 \left[-F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2; -x_1) \frac{\ell_n(-x_1)}{(1+x_1)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(1+x_1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-x_1)^n \frac{(\sqrt{2})_n (-\sqrt{2})_n}{(2)_n n!} [\psi_n] - \frac{1}{x_1 (1+x_1)^2} \right] \right\}^{-1} \\ e \quad (B.9)$$

$$[\psi_n] = \psi(\sqrt{2} + n) - \psi(\sqrt{2}) + \psi(-\sqrt{2} + n) - \psi(-\sqrt{2}) - \psi(n+2) + \psi(2) - \\ - \psi(n+1) + \psi(1)$$

O valor da constante C depende do conhecimento da espessura da região onde o campo magnético varia e esta quantidade tem sido medida somente em poucas experiências ⁽⁷⁾. Se $(kr_0)^2 \ll 1$ e a espessura não é muito pequena, isto é, $-x_1 > 0,5$, C tem uma suave dependência com $(-x_1)$ variando linearmente de $C \approx 0,28$ para $-x_1 = 0,6$ até $C \approx 0,12$ para $-x_1 = 0,98$.

APÊNDICE C

Rotação Arbitrária no Modo "Kink" Resistivo

Neste apêndice estudamos o efeito do cisalhamento na rotação do plasma ($\frac{d\Omega}{dr} \neq 0$) a partir das equações resistivas obtidas no capítulo 2.

Mantendo a hipótese de incompressibilidade no modo $m=1$ estudado obtemos a partir da equação (2.25):

$$\begin{aligned}
 & -i\omega(\omega - m\Omega) \left[k \rho \xi_r + i \frac{d}{dr} (\rho \xi_z) \right] - \rho m \omega \frac{d\Omega}{dr} \xi_z - \\
 & -2\omega \Omega k \rho \xi_\theta + \frac{i\omega \Omega^2}{\omega - m\Omega} k r \frac{d\rho}{dr} \xi_r = -\frac{1}{4\pi} \left[k^2 B B_{1r} + \frac{d}{dr} (i k B B_{1z} + \frac{dB}{dr} B_{1r}) \right]
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
 & -i\omega(\omega - m\Omega) \rho \left(\frac{m}{r} \xi_z - k \xi_\theta \right) - 2\omega \rho k \rho \xi_r - \\
 & -\omega \rho k r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \xi_r = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{mk}{r} B B_{1z} + \frac{im}{r} \frac{dB}{dr} + k^2 B B_{1\theta} \right]
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega(\omega - m\Omega) \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \rho \xi_\theta) - \frac{im}{r} \rho \xi_r \right] - 2i\omega \Omega \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\rho k \xi_r) + \\
 & + 2\omega \Omega \rho \frac{m}{r} \xi_\theta - \frac{i m \omega \Omega^2}{\omega - m\Omega} \frac{d\rho}{dr} \xi_r + m \omega \rho \frac{d\Omega}{dr} \xi_\theta - 2i\omega \rho \frac{d\Omega}{dr} \xi_r - \\
 & -i\omega \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \rho \frac{\partial \Omega}{\partial r} \xi_r) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (i k r B B_{1\theta}) + \frac{mk}{r} B B_{1r} \right]
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
 (\omega - m\Omega) B_{1r} & = i\omega k B \xi_r + \frac{i\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dB_{1r}}{dr} - \frac{m^2 + 1 + k^2 r^2}{r^2} B_{1r} - \right. \\
 & \left. - \frac{2im}{r^2} B_{1\theta} \right]
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
 (\omega - m\Omega) B_{1\theta} = & i\omega k B \xi_{\theta} + \frac{i\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dB_{1\theta}}{dr} - \frac{m^2 + 1 + k^2 r^2}{r^2} B_{1\theta} + \right. \\
 & \left. + 2i \frac{m}{r^2} B_{1r} \right] + i \frac{d\Omega}{dr} r B_{1r}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$(\omega - m\Omega) B_{1z} = i\omega k B \xi_z + i \frac{\eta}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dB_{1z}}{dr} - \frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} B_{1z} \right] \tag{C.6}$$

Usaremos ainda

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \tag{C.7}$$

Tal como no caso da rotação rígida vamos considerar na camada resistiva $\frac{dx_1}{dr} \gg \frac{x_1}{r}$ e

$$B = \left(r \frac{dB}{dr} \right)_{r_0} x; \quad x = \frac{r - r_0}{\delta r_0}$$

A velocidade de Alfvén é dada por

$$V_A = \frac{(r_0 dB/dr_0)}{(4\pi\rho)^{1/2}}$$

e os tempos característicos hidromagnético e resistivo por

$$\tau_H = (kV_A)^{-1}; \quad \tau_R = \frac{4\pi r_0^2}{\eta} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{\tau_R}{\tau_H} \ll 1$$

O comprimento da camada é dado por $\delta = \epsilon^b$; $b < 1$

Normalizemos a variável x por $t = \frac{x}{\delta}$; $t \sim 1$.

As equações (C.1) - (C.6) são ordenadas em termos de ϵ escrevendo as variáveis dependentes em termos de quantidades adimensionais como segue:

$$\Omega = \Omega_0 + \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \right) \frac{r - r_0}{r_0} = \Omega_0 + \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)_{r_0} \delta t; \quad \Omega_0 = \text{cte}$$

Segue então que

$$\omega - m\Omega = (\omega - \Omega_0) \left[1 - \frac{m r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \delta t}{\omega - m\Omega_0} \right]$$

onde

$$\omega - m\Omega_0 = \sigma = i \epsilon^a \Lambda \tau_H^{-1} \quad (\text{C.8})$$

e

$$\omega - m\Omega = i \epsilon_a \Lambda \tau_H^{-1} \left[1 + im \frac{\epsilon^{b-a}}{\Lambda} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right] \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{array}{l} B_{1r} \\ B_{1\theta} \\ B_{1z} \end{array} \left[\begin{array}{l} \epsilon^c \psi_r \\ -i k r_0 \left(r \frac{dB}{dr} \right)_{r_0} \frac{\omega}{\sigma} \\ \epsilon^d \psi_\theta \\ \epsilon^e \psi_z \end{array} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$\xi_r = r_0 \hat{\xi}_r; \quad \xi_\theta = r_0 \epsilon^f \hat{\xi}_\theta; \quad \xi_z = r_0 \epsilon^g \hat{\xi}_z \quad (\text{C.11})$$

e

$$\Lambda \sim \psi_r \sim \psi_\theta \sim \psi_z \sim \hat{\xi}_r \sim \hat{\xi}_\theta \sim \hat{\xi}_z \sim t \sim \theta \quad (1)$$

Em termos destas quantidades as equações (C.1) - (C.8) ficam

$$\begin{aligned} & \left[1 + im \frac{\epsilon^{b-a}}{\Lambda} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right] \psi_r = -\epsilon^{b-c} t \hat{\xi}_r + \\ & + \frac{\epsilon^{1-a-2b}}{\Lambda} \left[\frac{d^2 \psi_r}{dt^2} - (m^2 + 1 + k^2 r_0^2) \epsilon^{2b} \psi_r - 2im \epsilon^{2b+d-c} \psi_\theta \right] \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + im \frac{\epsilon^{b-a}}{\Lambda} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right] \psi_\theta = -\epsilon^{b-d+f} t \hat{\xi}_\theta - \frac{ir_0}{\Lambda} \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \epsilon^{c-d-a} \psi_r + \\ & + \frac{\epsilon^{1-a-2b}}{\Lambda} \left[\frac{d^2 \psi_\theta}{dt^2} - (m^2 + 1 + k^2 r_0^2) \epsilon^{2b} \psi_\theta + 2im \epsilon^{2b+c-d} \psi_r \right] \end{aligned} \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + im \frac{\epsilon^{b-a}}{\Lambda} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right] \psi_z = -\epsilon^{b-e+g} t \hat{\xi}_z + \frac{i\epsilon^{-e}}{kr_0} \hat{\xi}_r + \\ & + \frac{\epsilon^{1-a-2b}}{\Lambda} \left[\frac{d^2 \psi_z}{dt^2} - (m^2 + k^2 r_0^2) \epsilon^{2b} \psi_z \right] \end{aligned} \quad (C.14)$$

$$\epsilon^{2a} (m \epsilon^g \hat{\xi}_z - (k r_0) \epsilon^f \hat{\xi}_\theta) - \frac{2 \Omega \tau_H (k r_0) \epsilon^a}{\Lambda \left[1 + im \epsilon^{b-a-1} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right]} \hat{\xi}_r =$$

$$\frac{(k r_0) \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) \epsilon^a}{\Lambda \left[1 + im \epsilon^{b-a-1} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right]} \hat{\xi}_r = \frac{\epsilon^b}{\Lambda^2 \left[1 + im \epsilon^{b-a-1} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr_0} \tau_H \right) t \right]} \left[m \epsilon^e t \psi_z - \right]$$

$$- \frac{im}{kr_0} \left[\epsilon^{c-b} \psi_r - (kr_0) \epsilon^c t \psi_\theta \right] \quad (C.15)$$

$$\epsilon^{2a} \left[kr_0 \hat{\xi}_r + i \epsilon^{g-b} \frac{d\hat{\xi}_z}{dt} + i \epsilon^g \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) r_0 \hat{\xi}_z \right] - \frac{2 \Omega \tau_H (kr_0) \epsilon^{a+f} \hat{\xi}_\theta}{\Lambda \left[1 + im \epsilon^{b-a-1} \left(r_0 \frac{d}{dr} \tau_H \right) t \right]}$$

$$+ \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) r_0 \frac{(kr_0)^2 \Omega^2 \tau_H^2}{\Lambda^2 \left[1 + im \epsilon^{b-a-1} \left(r_0 \frac{d}{dr} \tau_H \right) t \right]^2} \hat{\xi}_r -$$

$$- \frac{m r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \epsilon^{a+g}}{\Lambda \left[1 + im \epsilon^{b-a-1} \left(r_0 \frac{d}{dr} \tau_H \right) t \right]} \hat{\xi}_z =$$

$$= \frac{\epsilon^b}{\Lambda^2} \left[kr_0 \epsilon^c t \psi_r + i \epsilon^{e-b} \frac{d}{dt} (t \psi_z) + \frac{\epsilon^{-2b+c}}{k r_0} \frac{d\psi_r}{dt} \right] \quad (C.16)$$

e

$$\epsilon^{2a} \left[\epsilon^f \left(\frac{d\rho}{dr} \right) r_0 \hat{\xi}_\theta + \epsilon^{f-b} \frac{d\hat{\xi}_\theta}{dt} - im \hat{\xi}_r \right] +$$

$$\frac{+ 2\Omega \tau_H \epsilon^a}{\Lambda \left[1 + im \Lambda^{-1} \epsilon^{b-a} \left(r_0 \frac{d}{dr} \tau_H \right) t \right]} \left[\left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) r_0 \hat{\xi}_r + \epsilon^{-b} \frac{d\hat{\xi}_r}{dt} \right] +$$

$$+ 2 im \frac{\Omega \tau_H \epsilon^{a+f}}{\Lambda \left[1 + im \Lambda^{-1} \epsilon^{b-a} \left(r_0 \frac{d}{dr} \tau_H \right) t \right]} \hat{\xi}_\theta -$$

$$\begin{aligned}
& - i \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \frac{m \Omega^2 \tau_H^2}{\Lambda^2 \left[1 + im\bar{\Lambda}^{-1} \epsilon^{b-a} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \right) t \right]^2} \hat{\xi}_r + \\
& + \frac{im \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \right) \epsilon^{a+f} \hat{\xi}_\theta}{\Lambda \left[1 + im\bar{\Lambda}^{-1} \epsilon^{b-a} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \right) t \right]} + \frac{\left(r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \right) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho \hat{\xi}_r) \epsilon^{a-b}}{\Lambda \left[1 + im\bar{\Lambda}^{-1} \epsilon^{b-a} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \right) t \right]} + \\
& + \frac{2 r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \epsilon^a}{\Lambda \left[1 + im\bar{\Lambda}^{-1} \epsilon^{b-a} \left(r_0 \frac{d\Omega}{dr} \tau_H \right) t \right]} \hat{\xi}_r = \frac{\epsilon^b}{\Lambda^2} \left[\epsilon^{d-b} \frac{d}{dt} (t\psi_\theta) - im\epsilon^c \psi_r \right]
\end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\epsilon^{c-b} \frac{d\psi_r}{dt} + im \epsilon^d \psi_\theta + i (kr_0) \epsilon^e \psi_z = 0 \tag{C.18}$$

$$\frac{d\hat{\xi}_r}{dt} + im \epsilon^{f+b} \hat{\xi}_\theta + i (kr_0) \epsilon^{g+b} \hat{\xi}_z = 0 \tag{C.19}$$

A escolha de parâmetros que preserva a incompressibilidade na camada é

$$a = b = c = \frac{1}{3} ; d = e = 0 ; f = g = -\frac{1}{3} \tag{C.20}$$

Usando portanto a escolha (C.20) nas equações (C.12) - (C.17) e fazendo uso de (C.18) e (C.19) e ainda a aproximação de grande comprimento de onda usada no capítulo 4 obtemos

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dt^2} - \frac{im (\tau_H r_0 \frac{d\Omega}{dr})}{\Lambda + im (\tau_H r_0 \frac{d\Omega}{dr}) t} \hat{\xi}_r = \frac{t}{\Lambda^2} \frac{d^2 \psi_r}{dt^2} +$$

$$+ \frac{m^3 (\tau_H r_0 \frac{d\Omega}{dr_0})}{k^2 r_0^2 \Lambda^2 \left[\Lambda + \text{im}(\tau_H r_0 \frac{d\Omega}{dr_0}) t \right]} \psi_r \quad (\text{C.21})$$

e

$$\left[\Lambda + \text{im}(\tau_H r_0 \frac{d\Omega}{dr_0}) t \right] \psi_r = - \Lambda t \hat{\xi}_r + \frac{d^2 \psi_r}{dt^2} \quad (\text{C.22})$$

As equações (C.21) e (C.22) têm um comportamento assintótico dado por $\hat{\xi}_r \sim \frac{1}{t}$ quando $t \rightarrow \infty$ o que mostra que podem ser casadas às soluções da região ideal no caso em que se desprezam os termos inerciais e rotacionais nessa região.

A ocorrência do termo imaginário $\text{im}(\tau_H r_0 \frac{d\Omega}{dr_0})$ nestas equações indica que o autovalor Λ é complexo, ou seja, o cisalhamento da rotação permite que apareçam modos "sobre estáveis". Então pode ser que, embora a rotação não estabilize o modo $m = 1$, o cisalhamento na rotação seja um fator estabilizante.

A solução das equações (C.21) - (C.22) na cama da resistiva ainda precisa ser achada para ser estabelecida a equação de autovalor, o qual suporemos que é da forma

$$\Lambda = \Lambda_r + i \Lambda_i$$

O cálculo de Λ_i permitirá determinar o grau de estabilização fornecido pelo cisalhamento na rotação.

APÊNDICE D

Modos Gravitacionais Resistivos em Plasmas

Neste apêndice fazemos algumas considerações sobre o efeito da força de gravitação em plasmas e estudamos modos que aparecem devido a efeitos dissipativos, em particular considerando o efeito da resistividade finita do plasma.

Usamos o modelo de "fatia de plasma" e supomos que a força de gravitação está ao longo da direção x (figura D-1) e o campo magnético é dado no equilíbrio por

$$\mathbf{B} = B_y(x) \hat{e}_y + B_z(x) \hat{e}_z \quad (\text{D.1})$$

O nosso sistema de equações é dado por

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (\text{D.3})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \vec{J} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \vec{V} \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \vec{V} \quad (\text{D.6})$$

Em geral o efeito dessa força em plasmas é desprezível, mas introduziremos a gravitação para simular o efeito da curvatura

das linhas de força de um plasma. Para isso sabemos que a velocidade de arrasto de uma partícula num campo magnético \vec{B} é dada por

$$\vec{w}^g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{\omega_c B} \quad (D.7)$$

e ω_c representa a frequência ciclotrônica.

Já a velocidade de arrasto devido à curvatura das linhas é dada por

$$\vec{w}^c = \left[-w_{//}^2 \frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{B^2} \right] \times \frac{\vec{B}}{\omega_c B} \quad (D.8)$$

Portanto se queremos simular o efeito da curvatura das linhas de força fazemos

$$\vec{g}_c = \frac{v_{th}^2}{R} \hat{e}_r \quad (D.9)$$

onde substituímos $w_{//}^2$ por v_{th}^2 para fazer uma "média" sobre todas as partículas e usamos a relação

$$\frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{B^2} = -\frac{\hat{e}_r}{R}$$

onde R é o raio de curvatura das linhas de força.

É sabido que os modos gravitacionais ideais podem ser estabilizados se o campo magnético confinante apresentar suficiente cisalhamento das linhas de força.

Assim qualquer perturbação ideal ($\eta = 0$) tende a deslocar o campo magnético com ele distorcendo as linhas de

força. A tensão que aparece ao longo das linhas tende a restaurar a condição de equilíbrio, estabilizando a perturbação. Se introduzirmos a resistividade, as linhas de força do campo terão a possibilidade de difundir através do fluido de modo que este pode ter uma perturbação instável sem deslocar as linhas de força.

Usando as equações MHD (D.2), (D.6), é estudado então o problema de modos gravitacionais resistivos na "fatia do plasma". Os modos considerados são incompressíveis ($\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0$) e sem perturbação na direção de z, isto é,

$$\tilde{x}(x, y, z, t) = \tilde{x}(x) \exp[i\omega t -iky]$$

onde \tilde{x} representa uma grandeza perturbada.

Considerando constante a resistividade do plasma, as equações básicas linearizadas reduzem-se a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \rho_0 \frac{dv_{1x}}{dx} - k^2 \rho_0 v_{1x} + k^2 \frac{g}{\omega^2} \frac{d\rho_0}{dx} v_{1x} = \\ = - \frac{kB_y}{4\pi\omega} \left[\frac{d^2}{dx^2} B_{1x} - \frac{1}{B_y} \frac{d^2 B_y}{dx^2} B_{1x} - k^2 B_{1x} \right] \end{aligned} \quad (D.10)$$

e

$$i\omega B_{1x} = -ikB_y v_{1x} + \frac{\eta}{4\pi} \left(\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - k^2 B_{1x} \right) \quad (D.11)$$

Resolvendo também esse sistema pela teoria de camada limite no entorno do ponto singular onde $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ e onde supomos que η e $\rho\omega^2$ sejam não nulos, e também introduzindo a variável de deslocamento por

$$\xi = -\frac{i}{\omega} V_{1x},$$

obtemos o sistema

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{d\bar{x}^2} - \frac{k^2 x_0^2}{\Lambda^2} D \bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{\Lambda^2} \frac{d^2 \psi}{d\bar{x}^2} \quad (D.12)$$

$$\psi = -\bar{x} \bar{\xi} + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi}{d\bar{x}^2} \quad (D.13)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{x - x_0}{\delta x_0}; \quad i\omega = \sqrt{\frac{k^2 B_{y0}}{4\pi\rho_0}} \epsilon^a \Lambda; \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{x_0}$$

$$B_{1x} = ikx_0 B_{y0} \epsilon^c \psi; \quad \delta = \epsilon^b \quad (E.14)$$

As constantes a , b e c são especificadas em termos do pequeno parâmetro $\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R}$ onde

$$\tau_H = \frac{1}{kB_{y0} \sqrt{4\pi\rho_0}}; \quad \tau_R = \frac{4\pi x_0^2}{\eta} \quad (D.15)$$

As grandezas normalizadas são todas da mesma ordem, isto é,

$$\bar{x} \sim \Lambda \sim \bar{\xi} \sim \psi \sim \theta(1)$$

Para que o termo resistivo fique de ordem 1 assim como os outros que são mantidos nas equações ideais temos que escolher

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

Para determinar o valor Λ é necessário fazer o casamento as sintótico das soluções destas equações quando $\bar{x} \rightarrow \infty$ com as soluções da equação ideal quando $x \rightarrow 0$.

A equação ideal é dada por

$$\frac{d}{dx} \frac{k^2 B_y^2}{4\pi} \frac{dv_{1x}}{dx} - \frac{k^2}{4\pi} (k^2 B_y^2 + g \frac{d\rho_o}{dx} v_{1x}) = 0$$

onde foi desprezado o termo $\rho\omega^2$.

Essa equação é singular no ponto onde $kB_y = 0$.

Ela tem soluções assintóticas do tipo x'^s para

$$s_1 = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 4k^2 x_o^2 D} \right]$$

e

(D.17)

$$s_2 = \frac{1}{2} \left[-1 - \sqrt{1 + 4k^2 x_o^2 D} \right]$$

onde

$$D \equiv \frac{4\pi g \frac{d\rho_o}{dx}}{k^2 B_y^2} ; \quad x' = \frac{x - x_o}{x_o}$$

Já as soluções assintóticas das equações resistivas são dadas por $\bar{\xi} \sim \bar{x}^s$ com $s = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 4k^2 x_o^2 D} \right]$, e também 2

soluções na forma $\bar{\xi} \sim e^{\pm \bar{x}^2 / 2 \sqrt{\Lambda}}$

Portanto o autovalor pode ser determinado realizando o casamento assintótico da forma

$$\bar{\zeta}_{\text{ideal}} \approx A\delta^{s_1} \bar{x}^{-s_1} + B\delta^{s_2} \bar{x}^{-s_2} \quad (\bar{x} \rightarrow 0)$$

(D.18)

$$\bar{\zeta}_{\text{res}} \approx A' \bar{x}^{s_1} + B' \bar{x}^{s_2} = \bar{\zeta}_{\text{ideal}}$$

Esse tipo de casamento foi feito para o modo $m = 0$ compressível, com rotação constante, cuja taxa de crescimento vimos que é dada por

$$\gamma \sim \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1} \quad (\Lambda \sim 1).$$

Já o modo gravitacional resistivo terá uma taxa de cres_cimento dada por

$$\gamma' \sim \sqrt{\frac{k_B^2 y_0^2}{4\pi\rho_0}} \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} = \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1} \quad (\text{D.19})$$

O nosso modo $m = 0$ é portanto análogo a um modo gravitacional resistivo e comparando-se os respectivos fatores D que aparece em seus limites assintóticos podemos fazer uma analogia entre a velocidade de rotação Ω do modo $m = 0$ compressivel e a aceleração gravitacional g , ou seja,

$$-k^2 x_0^2 D \leftrightarrow \Omega^2 \tau_H^2 \left(\frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} - \frac{r_0}{\gamma p_0} \frac{dp_0}{dr_0} \right)$$

onde

$$D = g \frac{4\pi d\rho_0/dx}{k_B^2 y_0^2}$$

Como as equações ressitivas têm uma solução assintótica

$\bar{\xi} \sim e^{-x^2/2\sqrt{\Lambda}}$, que decai rapidamente dentro da camada resistiva, é possível encontrar um modo localizado que não precisa casar com a solução MHD externa.

Para isso vamos supor que

$$\psi \ll \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

já que estamos procurando um modo com fortes gradientes dentro da camada resistiva.

Com isso o sistema (D.12), (D.13) reduz-se a

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{dx^2} - \left(\frac{k^2 x_0^2}{\Lambda^2} + \frac{\bar{x}^2}{\Lambda} \right) \bar{\xi} = 0 \quad (\text{D.20})$$

Estas equações podem ser transformadas na equação de Schrödinger para o oscilador harmônico com as transformações

$$x' = Ax \quad ; \quad A = \Lambda^{-1/4}$$

As soluções então são dadas em termos de polinômios de Hermite e obtemos

$$\bar{\xi} = e^{-\frac{\bar{x}^2}{2\sqrt{\Lambda}}} H\left(\frac{\bar{x}^2}{2\sqrt{\Lambda}}\right) \quad (\text{D.21})$$

onde

$$\Lambda = \left[\frac{k^2 x_0^2 (-D)}{2n + 1} \right]^{2/3} \quad ; \quad n \text{ inteiro} \quad (\text{D.22})$$

e a taxa de crescimento do modo é dada por

$$\gamma = \left[\frac{k^2 x_o^2 (-D)}{2n + 1} \right]^{2/3} \left(\frac{\tau_H}{\tau_R} \right)^{1/3} \tau_H^{-1} \quad (\text{D.23})$$

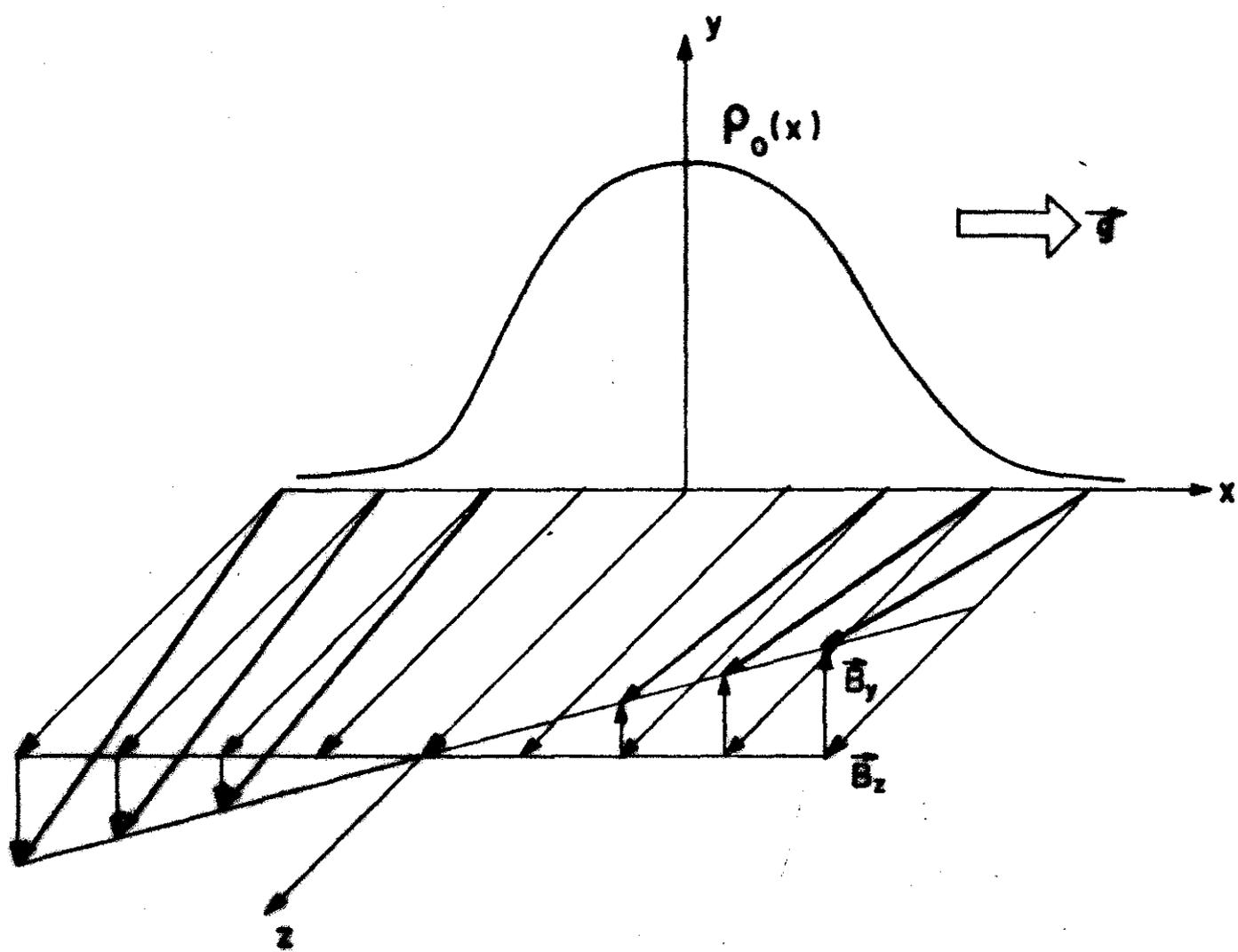


Figura D.1 - Modelo de "fatia de plasma" para modos gravitacionais em plasmas

APÊNDICE E

Efeito Hall e Instabilidades Magnetohidrodinâmicas

Diversos trabalhos têm sido apresentados no passado em que a corrente Hall tem sido proposta como uma modificação relevante fisicamente para as equações da magnetohidrodinâmica ideal^{(37), (38)}, e estudos foram feitos para determinar seu efeito em instabilidades ideais e em propagações de ondas⁽³⁹⁾. Recentemente Kappraff e outros⁽⁴⁰⁾ introduziram a corrente Hall no estudo do modo "tearing" $m = 0$ para um plasma com campo reverso no equilíbrio para explicar a supressão desse modo resistivo devido à rotação do plasma. O modo por eles estudado tem uma taxa de crescimento que escala com a potência $\frac{3}{5}$ da resistividade e no balanceamento das equações perturbadas foi preciso escalar o parâmetro de Hall que conceituamos nesse apêndice com a potência $\frac{1}{5}$ da resistividade. O termo de efeito Hall é acrescido à lei de Ohm generalizada e nessa referência é usado no equilíbrio uma equação de estado da forma

$$p = c\rho(r); \quad c = \frac{KT}{m_i}$$

onde K é a constante de Boltzmann, m_i a massa do ion e T a temperatura iônica.

Como continuação do trabalho desta tese é interessante investigar a inclusão do efeito Hall no modo $m = 0$ resistivo que estudamos, associado à compressibilidade da coluna de plasma, e que tem uma taxa de crescimento bem maior que a do modo "tearing" usual, para tentarmos explicar o efeito de

rotação na estabilização desse modo, como indica a evidência experimental, já que o termo de Hall está associado com um coeficiente que é proporcional à frequência de giro do ion.

Neste apêndice é feito a inclusão do termo de efeito Hall na equação (2.4) e mantidas as demais que formam o nosso modelo de equações básicas. Estudamos o equilíbrio e as equações perturbadas na camada resistiva verificando então que também precisamos escalonar o parâmetro de Hall com a resistividade para estabelecer o sistema básico de equações perturbadas.

Antes de escrever as equações básicas, vamos introduzir o fator de Hall na lei de Ohm através da relação

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} + \eta \vec{J} + \frac{K}{ne} \vec{J} \times \vec{B} \quad (\text{E.1})$$

onde K representa o termo ou parâmetro de Hall.

Substituindo na lei de Faraday obtemos

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta \vec{J}) - \frac{1}{e} \nabla \times \left(\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{n} \right) \quad (\text{E.2})$$

Usando a lei de Ampère (E.2) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) - \frac{m_i}{4\pi e} \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}) \times \frac{\vec{B}}{\rho} \right] \quad (\text{E.3})$$

onde supomos $m_i \gg m_e$.

Portanto o parâmetro de Hall pode ser escrito como

$$K = \frac{m_i}{e} = \frac{B_0}{\omega_{c_i}} \quad (\text{E.4})$$

onde ω_{c_i} é a frequência ciclotrônica do ion.

A equação (2.4) é então escrita na forma da equação (E.3) e as equações (2.2)-(2.3) ficam inalteradas.

No equilíbrio $K = 0$, $\vec{B} = B_0(r)\hat{e}_z$; $\vec{V}_0 = r\Omega\hat{e}_\theta$; $p = p(r)$; $n = 0$; o que fornece novamente a relação

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \rho_0 \Omega^2 r$$

As equações perturbadas já foram obtidas para o caso geral sem incluir o efeito Hall. Então o único termo novo perturbado que temos de incluir é

$$\left\{ \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}) \times \frac{\vec{B}}{\rho} \right] \right\}_1 = \nabla \times \cdot \left[\frac{(\nabla \times \vec{B}_0)}{\rho_0} \times \vec{B}_1 + \frac{(\nabla \times \vec{B}_1)}{\rho_0} \times \vec{B}_0 - \frac{(\nabla \times \vec{B}_0)}{\rho_0} \times \frac{\vec{B}_0}{\rho_0} \rho_1 \right] \quad (E.5)$$

Vamos precisar somente da componente r desse termo perturbado; um cálculo semelhante ao desenvolvido durante o trabalho conduza

$$\left\{ \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}) \times \frac{\vec{B}}{\rho} \right] \right\}_{1r} = \frac{k^2 B_0}{\rho_0} B_{1\theta}$$

Substituindo este termo nas equações perturbadas obtidas previamente e supondo novamente $\xi_\theta = 0$, temos

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_r + \left[\rho_0 (\nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r \right] \Omega^2 r = \frac{ikB_0}{4\pi} B_{1r} - \frac{d}{dr} \left(p_1 + \frac{B_0 B_{1z}}{4\pi} \right) \quad (E.6)$$

$$-i\rho_0 \omega \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \Omega \right) \xi_r = \frac{ikB_0}{4\pi} B_{1\theta} \quad (E.7)$$

$$-\rho_0 \Omega^2 \xi_z = \frac{1}{4\pi} \frac{dB_0}{dr} B_{1r} - ikp_1 \quad (\text{E.8})$$

$$B_{1r} = ikB_0 \xi_r + \frac{i\eta}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dB_{1r}}{dr} - \frac{1+k^2 r^2}{r^2} B_{1r} \right] - K \frac{ikB_0}{4\pi\rho_0 \omega} B_{1\theta} \quad (\text{E.9})$$

$$p_1 = -\gamma p_0 (\nabla \cdot \vec{\xi}) - \frac{dp_0}{dr} r \quad (\text{E.10})$$

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) + ik\xi_z \quad (\text{E.11})$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_{1r}) + ikB_{1z} = 0 \quad (\text{E.12})$$

Tal como feito no capítulo 3 é possível reduzir o sistema (E.6) - (E.12) a 2 equações envolvendo ξ_r e B_{1r} , as equações resultantes tornam-se então

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ \gamma p_0 \left[\frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right] + \frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \frac{dp_0}{dr} \xi_r \right\} + \\ & + \rho_0 \omega^2 \xi_r - \rho_0 \Omega^2 r \left[\frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) + \frac{k^2 dp_0/dr}{\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0} \xi_r \right] - \frac{dp_0}{dr} \Omega^2 r \xi_r = \\ & = \frac{d}{dr} \left\{ \gamma p_0 \frac{ikdB_0/dr}{4\pi(\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0)} B_{1r} + i \frac{B_0}{4\pi k} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_{1r}) \right\} - \rho_0 \Omega^2 r \frac{ikdB_0/dr}{4(\rho_0 \omega^2 - k^2 \gamma p_0)} B_{1r} - \\ & - \frac{ik}{4\pi} B_0 B_{1r} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$B_{1r} = ikB_0 \xi_r + \frac{i\eta}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dB_{1r}}{dr} - \frac{1+k^2 r^2}{r^2} B_{1r} \right] + 2iKk\Omega \xi_r \quad (E.14)$$

Na equação (E.14) nós usamos a expressão de $B_{1\theta}$ obtida a partir de (E.7) e usamos $\Omega = \text{cte}$. As equações (E.13) e (E.14) são básicas para a nossa análise.

No limite MHD ideal, como assumimos $K = 0$ também, a análise assintótica em torno de $r = r_0$, onde $B(r_0) = 0$, fornece novamente

$$\xi_r = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}$$

onde

$$x = \frac{r-r_0}{r_0}$$

e

$$s = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 - 4a_1} \right]$$

onde $a_1 = \frac{r_0 a_0}{B_0^2}$, como definido no capítulo 2.

Vemos que $s_1 = 0$ e $s_2 = -1$ para $\Omega = 0$ ($a_1 = 0$) e s_2 corresponde à solução predominante. Para $D > \frac{1}{4}$ obtemos modo sobreestáveis.

Para as equações resistivas introduzimos as normalizações

$$\omega = i\varepsilon^a \Lambda_T^{-1} ; \quad x = \frac{r-r_0}{r_0} \varepsilon^{-b}$$

$$B_0 = (r \frac{dB}{dr})_{r_0} \varepsilon^b x ; \quad B_{1r} = -ikr_0 (r \frac{dB}{dr})_{r_0} \varepsilon^c \psi \quad (E.15)$$

$$\xi_r = \frac{\xi_r}{r_0} ; \quad \bar{K} = \frac{\omega c_i}{(r \frac{dB}{dr})_{r_0}} K$$

onde

$$\Lambda \sim x \sim \psi \sim \hat{\xi}_r \sim \theta \quad (1)$$

e

$$\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R} ; \quad \tau_H^{-1} = \frac{(r \frac{dB}{dr})_{r_0}}{r_0 \sqrt{4\pi\rho_0}} ; \quad \tau_R = \frac{4\pi r_0^2}{\eta}$$

Para obter uma solução na aproximação de " ψ - constante", como no caso de modos "tearing", assumimos que

$$\psi = \psi_0 + \epsilon^d \psi_1 ; \quad \psi_0 = \text{cte} \quad (E.16)$$

Com estas definições as equações (E.13) e (E.14) reduzem -se a

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} + \frac{\Omega^2 \tau_H^2 k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \left[\frac{\rho_0 \Omega^2 r_0^2}{\gamma P_0} - \left(\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)_{r_0} \right] \epsilon^{2b-2a} \hat{\xi}_r = \\ & = \frac{k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \epsilon^{-2a+b+c+d} x \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{\epsilon^{b+c+d}}{2\gamma\beta} \frac{d\psi_1}{dx} + \\ & + \frac{\rho_0 \Omega^2 r_0^2 k^2 r_0^2}{\gamma P_0 \Lambda^2} \epsilon^{-2a+2b+c} (\psi_0 + \epsilon^d \psi_1) - \frac{k^4 r_0^4}{\Lambda^2} \epsilon^{-2a+3b+c} (\psi_0 + \epsilon^d \psi_1) \end{aligned} \quad (E.17)$$

onde

$$\beta = \frac{8\pi\rho_0}{(rdB/dr)_{r_0}^2} \gg \frac{\epsilon^{2a}}{k^2 r_0^2}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_0 + \epsilon^d \psi_1 &= -\epsilon^{b-c} x \hat{\xi}_r - 2\bar{K} \frac{\Omega}{\omega_{ci}} \epsilon^{-c} \hat{\xi}_r + \frac{\epsilon^{1-a-2b+d}}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - \\ & - \frac{\epsilon^{1-a}}{\Lambda} \frac{1+k^2 r_0^2}{r_0^2} (\psi_0 + \epsilon^d \psi_1) \end{aligned} \quad (E.18)$$

Como é de interesse estudar o modo $m = 0$ compressível, façamos inicialmente $\psi_0 = 0$ e $d = 0$. A equação (E.17) é balanceada com a escolha $a = b = c = \frac{1}{3}$, mas vemos que o novo termo que aparece em (E.18) só é equilibrado se escalonarmos o termo de Hall K com a resistividade, ou seja, se fizermos

$$K = \frac{(rdB/dr)_{r_0}}{\omega_{ci}} \varepsilon^e \bar{K} ; \quad \bar{K} \sim \theta \quad (1)$$

Agora a escolha $e = c = \frac{1}{3}$ equilibra a equação (E.18) e o sistema de equações para o modo $m = 0$ resistivo com a introdução do efeito Hall fica

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dx^2} + \frac{\Omega^2 \tau_H^2 k^2 r_0^2}{\Lambda^2} \left[\frac{\rho_0 \Omega^2 r_0^2}{\gamma P_0} - \frac{r_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr_0} \right] \hat{\xi}_r = \frac{k^2 r_0^2}{\Lambda^2} x \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \quad (E.19)$$

e

$$\psi_1 = -x \hat{\xi}_r - 2 \frac{\Omega}{\omega_{ci}} \bar{K} \hat{\xi}_r + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} \quad (E.20)$$

Evidentemente quando $x \rightarrow \infty$ o 1º termo do lado direito de (E.20) predomina sobre o termo que contém o fator \bar{K} é o casamento assintótico com a solução ideal onde supomos $K = 0$ é possível.

Verificamos então que foi preciso supor na camada resistiva que o termo de Hall varia com resistividade, ou seja, $K \propto (\eta^{1/3})$.

REFERÊNCIAS

- (1) H.A. Bodin, T.S. Green, G.B.F. Niblett, N.J. Peacock, J.M.P. Quinn e J.A. Reynolds, Nucl. Fusion, Suppl. 2, 521 (1962).
- (2) H.A. Bodin, Nucl. Fusion 3, 215 (1963).
- (3) H.P. Furth, J. Killen e M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 6, 459 (1963).
- (4) A. Eberhagen e H. Glaser, Nucl. Fusion 4, 196 (1964).
- (5) M. Alidieris, R. Ayman, P. Jourdan, F. Koechin e A.Samain, Plasma Physics 10, 841 (1968).
- (6) A. Kalek, L. Könen, P.Noll, K. Siguta, F. Waelbrock, K. Watanabe e H. Witulski, em Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (International Atomic Energy Agency, Viena, Vol. III, pág. 581, 1968).
- (7) A. Eberhagen e W. Grossmann, Z. Phys. 248, 130 (1971).
- (8) J. H. Irby, J. F. Drake e H. Grien, Phys. Rev. Letters 42, 228 (1979).
- (9) H. A. Bodin, A.A. Newton Phys. Fluids 6, 1338 (1963).
- (10) J. F. Drake e Y. C. Lee, Phys. Fluids 20, 1341 (1977).
- (11) L. Könen, P. Noll, F. Waelbrock e H. Witulski, em Proceedings of the Fourth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (CNEN, Roma, pág. 41, 1970).
- (12) G. Laval, R. Pellat e M. Vuillemin, em Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Viena, Vol. II, pág. 259, 1965).

- (13) B. Coppi, R. Galvão, R. Pellat, M. N. Rosenbluth e P. H. Rutherford, Soviet Journal Plasma Physics 2, 533 (1976).
- (14) D. Schnack e J. Killeen, Nucl. Fusion 19, 877 (1979).
- (15) J. D. Jukes, Phys. Fluids 7, 52 (1964).
- (16) K. M. Srivastava, J. Plasma Physics 12, 33 (1974).
- (17) P. Rosenau, J.A. Tataronis e G. Conn, J. Plasma Physics 21, 385 (1979).
- (18) V.M. Soundalgekar, S. Ravi e S. B. Hiremath, J. Plasma Physics 23, 495 (1979).
- (19) B. Coppi, J.M. Greene e J. L. Johnson, Nucl. Fusion 6, 101 (1966).
- (20) G. O. Spies, Phys. Fluids 21, 580 (1978).
- (21) J. P. Freidberg e L.D. Pearlstein, Phys. Fluids 21, 1209 (1978).
- (22) W. A. Newcomb, Ann. Phys. 10, 232 (1960).
- (23) M. A. M. Santiago, R. M. O. Galvão e P. H. Sakanaka - Anais da "Escola de Primavera sobre Energia de Fusão" (ICTP - Trieste - 1981).
- (24) J. P. Freidberg e J. A. Wesson, Phys. Fluids 13, 1117 (1970).
- (25) B. Basu e B. Coppi, Nucl. Fusion, 17, 1245 (1977).
- (26) K. S. Thomas, H. W. Harris, F. C. Jahoda, G.A. Sawyer e R. E. Siemon, Phys. Fluids 17, 1314 (1974).
- (27) E. Bowers e M. G. Haines, Phys. Fluids 14, 165 (1971).
- (28) R. M. O. Galvão e M. A. M. Santiago, Phys. Fluids 24, 661 (1981).

- (29) M. Niimura, P. H. Sakanaka e J. Busnardo Neto, Bull Am. Phys. Soc., 22, 1080 (1977).
- (30) J. P. Mondt, Phys. Fluids 24, 1279 (1981).
- (31) D. A. D'Ippolito e R. C. Davidson, Phys. Fluids 18, 1507 (1975).
- (32) Thomas E. Cayton e J. P. Freidberg, Phys. Fluids, 1289 (1981).
- (33) S. I. Braginskii, Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, 205 (1965).
- (34) Methods of Theoretical Physics, Vol. 1, P. Morse e H. Feshbach (McGraw-Hill, New York, 1953).
- (35) Higher Transcendental Functions, H. Bateman (McGraw-Hill, New York, 1953).
- (36) Handbook of Mathematical Functions, M. Abramovitz e I.A. Segun (Dover, New York, 1965).
- (37) P. Rosenau, J. A. Tataronis e G. Conn, J. Plasma Physics, 21, 385 (1979).
- (38) S. K. Malik, J. Plasma Physics, 5, 65 (1971).
- (39) A. Kadish, Phys. Fluids 19, 141 (1976).
- (40) J. Kappraff, W. Grossmann e M. Kress, J. Plasma Physics, 25, 111 (1981).