

**ALGUMAS APLICAÇÕES DE FIBRADOS PRINCIPAIS
EM TEORIAS DE ESPAÇO-TEMPO**

Márcio Antonio de Faria Rosa



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL**

ALGUMAS APLICAÇÕES DE FIBRADOS PRINCIPAIS
EM TEORIAS DE ESPAÇO-TEMPO

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Márcio Antonio de Faria Rosa e aprovada pela Comissão Julgadora.

*Este exemplar
corresponde à*

redação final

da Tese Defendida

pelo Aluno

Márcio Antonio de

Faria Rosa e

aprovada pela

Comissão Julgadora

16/11/87

Francisco de

(Presidente de Banca)

Campinas, 16 de NOVEMBRO de 1987.

Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.
Orientador

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Dedico esta tese aos raros seres que
possuem o próprio espírito, e não
submetem-se à tirania e à mentira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e aos meus amigos pelo apoio e compreensão dedicados no decorrer destes quatro anos, período em que cursei o meu doutoramento em Física, que agora chega ao fim.

Agradeço em especial ao Prof. Waldyr pelo excelente trabalho de orientação e por sua amizade e compreensão. Também agradeço ao Prof. Rigas por haver-me ensinado algo mais que geometria.

Agradeço ao Edmundo, ao Quintino, ao Zeni e ao Vilson pelo excelente ambiente de trabalho que me propiciaram no grupo de física matemática.

Agradeço à Lourdes pelo excelente trabalho datilográfico.

Finalmente agradeço aos Profs. Adolfo e Recami por fazerem-me compreender os problemas da universidade brasileira.

RESUMO

Nesta tese apresentamos algumas aplicações de teoria de fibrados principais em física. Em especial extendemos o princípio de gauge com monopolo e tratamos da relação entre a equação de Dirac e a equação de Maxwell na forma *spinorial*.

ABSTRACT

In this thesis we present some applications of the theory of principal fiber bundles in physics. In particular we extend the gauge principle to gauge theories with monopoles and study also the relation between Dirac's equation and the Maxwell's equation in *spinorial* form.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	FIBRADOS PRINCIPAIS E ESCOLHAS DE GAUGE	4
3.	CONEXÕES, POTENCIAIS DE GAUGE E HORIZONTALIDADE	7
4.	DERIVADA COVARIANTE, CURVATURA E CAMPO DE GAUGE	12
5.	FORMAS HORIZONTAIS EQUIVARIANTES	15
6.	LAGRANGEANAS, CORRENTES E PRINCÍPIOS VARIACIONAIS	19
7.	FIBRADO SPLICED E CONEXÕES	26
8.	MONOPOLOS EM TEORIAS DE GAUGE I	29
9.	MONOPOLOS EM TEORIAS DE GAUGE II	35
10.	FIBRADO DOS REFERENCIAIS ORTONORMAIS E A 1-FORMA FUNDAMEN- TAL	43
11.	CONEXÃO DE LEVI-CIVITA E GEODÉSICAS	46
12.	TEORIA DE KALUZA-KLEIN (N + 4)-DIMENSIONAIS	48
13.	O GRUPO DE LORENTZ E A ORIENTABILIDADE DO ESPAÇO-TEMPO	53
14.	ESTRUTURA SPINORIAL E A EQUAÇÃO DE DIRAC	60
15.	O ISOMORFISMO MAXWELL-DIRAC, UMA ANTIGA TENTATIVA	64
16.	REFERÊNCIAS	69

1. INTRODUÇÃO

Procurarei nesta introdução relatar os estudos que fiz desde dezembro de 1984 visando principalmente teorias de espaço-tempo em física; sob a orientação do Prof. Waldyr.

Começamos por estudar a teoria da Relatividade (Geral e Restrita) quando o modelo geométrico é uma variedade pseudo-Riemanniana com assinatura -2 . Realizamos então alguns trabalhos sobre os testes da referida teoria (vide [1 - 2]).

Em seguida passamos a estudar estruturas algébricas associadas ao espaço-tempo (Álgebras de Clifford). Mais tarde, Zêni viria estudar o referido assunto, sobre o qual apresenta em breve sua tese de mestrado. Estes estudos deram origem a alguns trabalhos sobre monopolos magnéticos (vide [3 - 5]) que fizemos em colaboração com o Prof. Recami. No curso destes trabalhos defrontamo-nos com o problema de escrever as equações de Maxwell na forma spinorial e das relações entre estas e as equações de Dirac.

Durante o ano de 1986 participamos de uma série de seminários com os Profs. Adolfo e Rigas cujo objetivo era estudar fibras dos principais; o modelo geométrico para o espaço-tempo das teorias de gauge. Um dos intuitos destes seminários era generalizar nossos trabalhos sobre monopolos eletromagnéticos para outras teorias de gauge.

Reparamos que o eletromagnetismo com monopolos é usualmente descrito por um potencial apenas (vide [6 - 7]) entretanto ascustas de anomalias topológicas impostas ao espaço-tempo. Alguns autores haviam apresentado teorias em que o eletromagnetismo com monopolos é descrito por dois potenciais e assim não há necessidade de

introduzir-se as referidas anomalias topológicas (vide [8 - 11]) e foi nesta linha que havíamos feito nossos trabalhos já referidos (vide [3 - 5]).

Neste trabalho iremos estender o emprego de dois potenciais para teorias de gauge não abelianas nos parágrafos 8 e 9; após havermos desenvolvido as teorias de gauge com teorias de fibrados nos seis parágrafos precedentes. Observamos que recentemente um esforço foi empreendido neste sentido (vide [12]) o qual resultou na tese de doutoramento do Prof. Adolfo. Apesar dos resultados interessantes obtidos neste trabalho (vide [13]); a teoria então empregada não é de fato uma teoria de gauge (valendo apenas em uma escolha de gauge pré-fixada).

O enfoque que apresentaremos terá todas as prerrogativas de uma teoria de gauge usual. Haverão equações homogêneas de campo devidas às relações de Bianchi (apesar dos monopolos); as quais serão interpretadas de forma coerente no parágrafo 9, quando também apresentaremos o princípio de gauge para a teoria com monopolos.

A estrutura geométrica corresponderá a um fibrado principal, com uma cópia do grupo de gauge $G \times G$ (produto de dois grupos da teoria sem monopolos) "atarrachada" a cada ponto do espaço-tempo (que pode ser curvo neste trabalho).

Nos parágrafos seguintes mostraremos que de fato os fibrados principais correspondem ao espaço-tempo das teorias de gauge. Para tanto apresentamos as teorias de Kaluza-Klein generalizadas no parágrafo 12, quando é demonstrado que geodésicas no espaço fibrado (com respeito a uma métrica apropriada) são projetadas em curvas forçadas pelo campo de gauge no espaço-tempo.

Nos parágrafos finais, principalmente no parágrafo 15;

apresentamos nossa contribuição ao problema da relação entre as equações de Maxwell e Dirac. Vários autores têm tentado identificar o campo eletromagnético com a função de onda de Dirac (vide [14 - 16]) sendo que o modelo de Sallhofer (vide [16]) apresenta problemas, pois então a função de onda é equivariante com respeito ao grupo \mathcal{L}_+^\uparrow , e sofre transformações de similaridade ($\psi \rightarrow A^{-1}\psi A$) enquanto que a função de onda de Dirac é equivariante com respeito a $SL(2, \mathbb{C})$ e sofre transformações diretas ($\psi \rightarrow A^{-1}\psi$) (vide [17]).

Neste trabalho resolveremos parcialmente este problema, quando transformamos a função de onda de Sallhofer (que é obtida a partir do campo eletromagnético) em uma função de onda equivaniente (da forma direta) com respeito ao grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$; que é isomorfo, a menos de sinal, ao grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

Sugerimos então o emprego desta função de onda como função de onda de Dirac, o que traria a vantagem de que o grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ (vide [18]) tem mais significado físico que o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ (pois o primeiro é usualmente associado as antipartículas).

No que segue parte-se do pressuposto que os leitores conhecem variedades e formas diferenciáveis, bem como alguns rudimentos sobre grupos de Lie. A partir deste ponto constrói-se a teoria de fibrados principais, ferramenta central neste trabalho. As provas omitidas podem ser encontradas nas referências [19] e [20].

2. FIBRADOS PRINCIPAIS E ESCOLHAS DE GAUGE

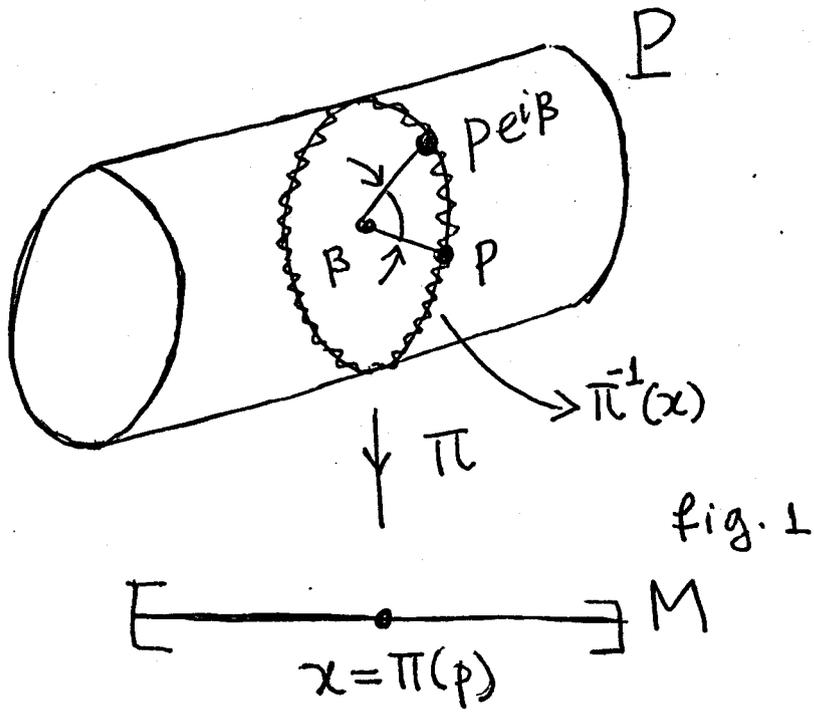
Um fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ com grupo G é constituído por duas variedades diferenciáveis P e M chamadas espaço total e base do fibrado, uma aplicação C^∞ $\pi : P \longrightarrow M$ chamada projeção e um grupo de Lie G . São ainda satisfeitas as seguintes propriedades:

(F1) dado $g \in G$ existe um difeomorfismo $R_g : P \longrightarrow P$ (escrevemos $R_g(p) = pg$) de forma que $p(g_1g_2) = (pg_1)g_2$ e que $pg = p \iff g = e$ (identidade em G). Em outras palavras o grupo G age livremente à direita de P .

(F2) $\pi : P \longrightarrow M$ é sobre e $\forall p \in P$, temos que $\pi^{-1}(\pi(p)) = \{pg, g \in G\}$. Em outras palavras a órbita de G através de $p \in P$ coincide com a fibra $\pi^{-1}(x)$ sobre $x = \pi(p) \in M$.

(F3) dado $x \in M$ existe um aberto $U \subset M$ com $x \in U$ e um difeomorfismo $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ da forma $T_u(p) = (\pi(p), S_u(p))$, onde $S_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ tem a propriedade $S_u(p)g = S_u(pg)$. Estes difeomorfismos são chamados trivializações locais.

Um exemplo de fibrado principal é o seguinte; quando o espaço total é o produto cartesiano $P = I \times U(1)$ do intervalo unitário $I = [0, 1] \in \mathbb{R}$ pelo grupo $U(1) = \{e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Definimos π como sendo a projeção $\pi : I \times U(1) \longrightarrow I = M$ dado por $\pi(p) = \pi(x, e^{i\alpha}) = x$ (para $x \in I$, $e^{i\alpha} \in U(1)$ e $p = (x, e^{i\alpha}) \in P = I \times U(1)$). A ação à direita de $U(1)$ sobre P é dada por $R_g(p) = pg = (x, e^{i\alpha})e^{i\beta} = (x, e^{i(\alpha+\beta)})$, onde $p = (x, e^{i\alpha})$, $g = e^{i\beta}$. Na figura 1 apresentamos este fibrado, que pode ser visualizado como um cilindro que projeta-se sobre o segmento unitário. Então a órbita



de $U(1)$ através de p , ou a fibra sobre $x = \pi(p)$ é a circunferência unitária contida no cilindro que passa por p .

Através de um procedimento análogo ao do nosso exemplo, sempre podemos construir um fibrado principal $\pi: M \times G \longrightarrow M$ com grupo G , a partir de uma variedade diferenciável M e de um grupo de Lie G . Fibrados assim construídos são chamados fibrados trivviais e por isso chamam-se trivializações locais as aplicações $T_u = (\pi, S_u) : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ apresentadas em (F3). Uma trivialização local também é chamada de escolha de gauge local, ou abreviadamente escolha de gauge, nome que empregamos no que segue.

Chamamos $(\sigma_u : U \longrightarrow P, U$ aberto em $M)$ de seção local do fibrado $\pi : P \longrightarrow M$ a uma aplicação $\sigma_u \in C^\infty(U, P)$ tal que $\pi \circ \sigma_u =$ identidade em U . Notamos que seções locais e trivializações locais (ou escolhas de gauge) são equivalentes. De fato, associamos $\sigma_u : U \longrightarrow P$ a $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ por $T_u(p) = T_u(\sigma_u(x)g) = (x, g)$ para $p = \sigma_u(x)g \in P$, e inversamente $\sigma_u(x) = T_u^{-1}(x, e)$.

Assim sendo, a cada escolha de gauge temos uma seção local associada $\sigma_u : U \longrightarrow P$. Podemos empregar o "pull-back" σ_u^* desta aplicação para associar um elemento matemático E definido em

P a outro elemento, σ_u^*E , definido em $U \subset M$.

Os fibrados principais são a estrutura geométrica das teorias de gauge; quando o grupo de Lie G é o grupo de gauge da teoria e a base M é o espaço-tempo. Então os elementos da forma σ_u^*E referidos há pouco estarão associados aos elementos físicos da teoria (na escolha de gauge correspondente).

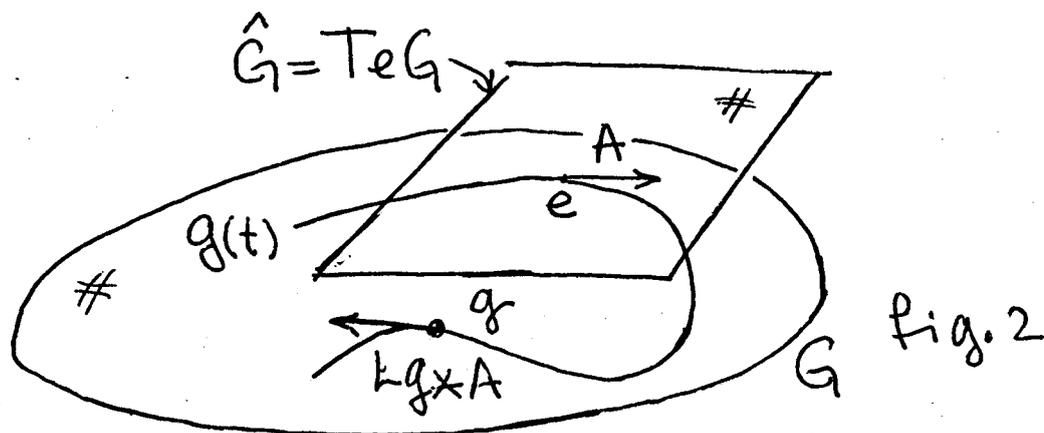
Suponhamos que temos duas escolhas de gauge, $T_u = (\pi, S_u) : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ e $T_v = (\pi, S_v) : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$, com seções locais associadas, $\sigma_u : U \longrightarrow P$ e $\sigma_v : V \longrightarrow P$; e ainda mais, suponhamos que $U \cap V \neq \emptyset$. Teremos definidos em $U \cap V$ dois elementos, σ_u^*E e σ_v^*E , associados a um mesmo elemento matemático E em P . A relação entre tais elementos chama-se transformação de gauge entre os mesmos. Para escrever tal relação veremos que será útil a função $g_{uv} : U \cap V \longrightarrow G$ dada por $g_{uv}(x) = S_u(p)S_v(p)^{-1}$ para $x = \pi(p) \in U \cap V$ (notamos que g_{uv} é bem definida pois $S_u(pg)S_v(pg)^{-1} = S_u(p)g(S_v(p)g)^{-1} = S_u(p)gg^{-1}S_v(p) = S_u(p)S_v(p)^{-1}$). Tal função chama-se função de transição entre as escolhas de gauge T_u e T_v .

3. CONEXÕES, POTENCIAIS DE GAUGE E HORIZONTALIDADE

Antes de definirmos "conexão" em um fibrado principal lembre-mo-nos que a álgebra de Lie \hat{G} de um grupo de Lie G pode ser identificada com o espaço tangente à variedade diferenciável que é G , na identidade $e \in G$, isto é $\hat{G} = T_e G$.

Assim (vide [19]) dado um vetor $A \in \hat{G}$ podemos construir um campo vetorial em G , que associa a cada $g \in G$, o vetor $L_{g*}A \in T_g G$; onde $L_g : G \rightarrow G$ é a multiplicação à esquerda por g ($L_g(g') = gg'$) e L_{g*} é o seu diferencial.

A exponencial $\exp tA = g(t)$ é então uma curva em G tal que $g(0) = e$, $g'(0) = A$ e $g'(t) = L_{g*}(t)A$ (vide figura 2); ou seja, é uma curva integral do referido campo vetorial associado a $A \in \hat{G}$. Podemos também pensar na exponencial como uma aplicação $\exp : \hat{G} \rightarrow G$ da álgebra de Lie sobre o grupo.



Além da aplicação exponencial, no que segue empregaremos a aplicação adjunta, que associa cada $g \in G$ à transformação linear $\text{Ad}_g : \hat{G} \rightarrow \hat{G}$ da álgebra de Lie \hat{G} ($\text{Ad}_g \in \text{GL}(\hat{G})$) de forma que $\text{Ad}_g(A) = L_{g*}R_g^{-1}(A)$ onde $R_g : G \rightarrow G$ é a multiplicação à direita por g ($R_g(g') = g'g$) e R_{g*} é o seu diferencial.

Quando empregamos a notação matricial para representar os elementos de \hat{G} e G a exponencial coincide com a exponencial matricial usual ($g(t) = \exp tA$) e a aplicação adjunta com a transformação de similaridade $A \longrightarrow gAg^{-1}$. De fato, como o produto por uma matriz é uma aplicação linear, coincide com o seu diferencial, então $L_{g^*}R_{g^*}^{-1}(A) = gAg^{-1}$ mostrando a segunda afirmativa; ademais se $g(t)$ é a exponencial, $g(0) = e$ e $g'(t) = L_{g^*}A = Ag(t)$ portanto $g(t) = \exp tA$ é a exponencial matricial usual (para maiores detalhes sobre álgebras e grupos de Lie bem como as aplicações envolvidas, vide [21]). Passamos agora à definição de conexão em um fibrado principal.

CONEXÃO W em um fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ com grupo G é uma 1-forma em P que assume valores na álgebra de Lie \hat{G} de G , com as seguintes propriedades:

(C1) se denotamos por $A_d : G \longrightarrow GL(\hat{G})$, $Ad(g) = Ad_g$ a representação adjunta de G em \hat{G} , e por R_g^* o "pull-back" da aplicação $R_g : P \longrightarrow P$ apresentada em (F1), então:

$$R_g^* W = Ad_{g^{-1}} W \quad (\text{isto é, } W(R_{g^*}X) = Ad_{g^{-1}} W(X),$$

para todo $X \in T_p P$).

(C2) para cada $A \in \hat{G}$ e $p \in P$, definimos um vetor no espaço tangente a P em p ($T_p P$):

$$A_p^* \in T_p P \quad \text{por} \quad A_p^* = \left. \frac{d}{dt} (p \exp tA) \right|_{t=0}$$

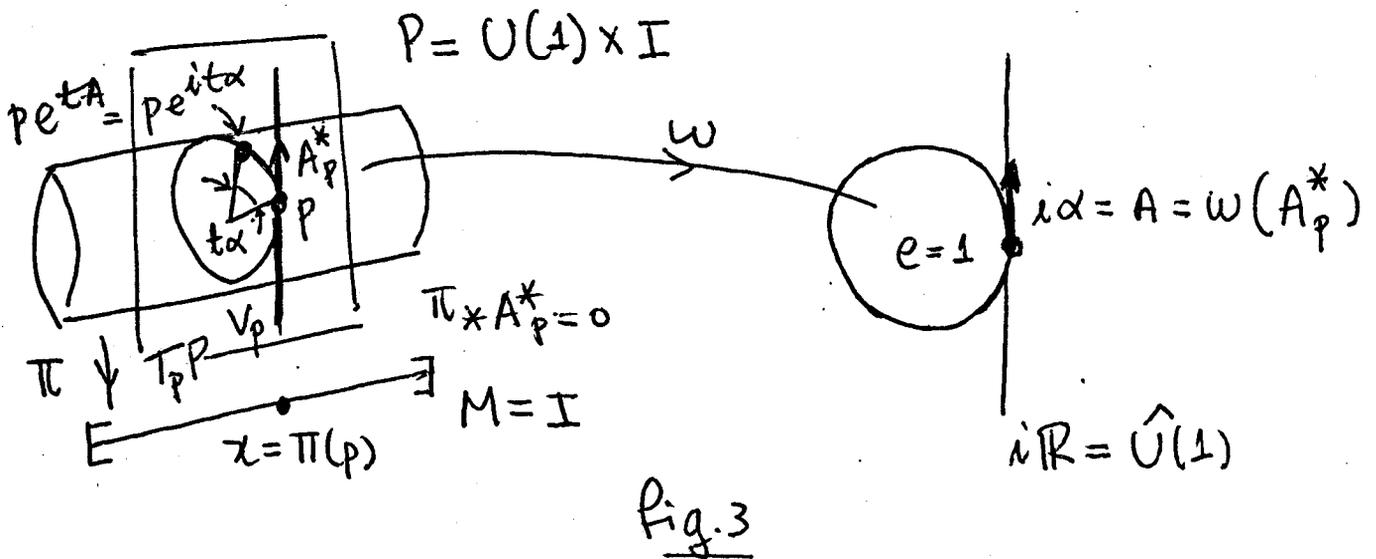
onde $\exp : \hat{G} \longrightarrow G$ é a exponencial que aplica a álgebra de Lie no respectivo grupo. Então temos que $W(A_p^*) = A$.

O vetor A_p^* definido como acima é chamado vetor vertical em $T_p P$ e $A \in \hat{G}$ é chamado gerador de A_p^* . As conexões levam

vetores verticais em seus geradores.

Notemos que $p \exp tA = pg(t)$ é uma curva em P que passa por p em $t = 0$ e está completamente contida na fibra $\pi^{-1}(x)$ ($x = \pi(p)$). Reparamos que $\pi(p \exp tA) = x$, independentemente de t , portanto $\pi_* A_p^* = 0$; ou seja, um vetor vertical tem projeção nula.

No caso do fibrado $\pi : I \times U(1) \longrightarrow I$ que apresentamos no parágrafo anterior, a álgebra de Lie é $\hat{U}(1) = i\mathbb{R}$ e a curva $p \exp tA = p \exp t i\alpha$ é a própria fibra, que no caso é unidimensional. A_p^* é então tangente à circunferência unitária que passa por p e tem projeção nula (vide figura 3).



O conjunto dos vetores verticais em $p \in P$ é uma reta $V_p \subset T_p P$ que a conexão coloca em bijeção com a reta $i\mathbb{R} = \hat{U}(1)$ tangente a $U(1)$ na identidade $e = 1$.

Quando o fibrado $\pi : P \longrightarrow M$ é a estrutura geométrica de uma teoria de gauge, a conexão estará associada ao potencial. Para cada escolha de gauge associamos à conexão W o potencial de gauge $W_u = \sigma_u^* W$, onde σ_u é a seção local associada à referida

escolha de gauge.

Costuma-se denotar o conjunto das k -formas definidas em A com valores em B por $\Lambda^k(A, B)$. Então $W \in \Lambda^1(P, \hat{G})$ e $W_u \in \Lambda^1(U, \hat{G})$.

Se temos duas escolhas de gauge T_u e T_v , os potenciais de gauge W_u e W_v (vide [19]) podem ser relacionados por

$$W_v(Y_x) = L_{g_{uv}}^{-1}(x) * (g_{uv} * (Y_x)) + \text{Ad}_{g_{uv}^{-1}(x)}(W_u(Y_x))$$

onde $Y_x \in T_x M$, $x \in U \cap V$, $L_g : G \rightarrow G$ é a multiplicação à esquerda por g , e $g_{uv} : U \cap V \rightarrow G$ é a função de transição entre T_u e T_v apresentada no parágrafo anterior.

A relação acima é chamada de transformação de gauge entre os potenciais de gauge W_u e W_v . Empregando notação matricial para G e \hat{G} tal relação toma a forma

$$W_v = g_{uv}^{-1} dg_{uv} + g_{uv}^{-1} W_u g_{uv} \quad (\text{TG1})$$

e no caso da Eletrodinâmica, com $G = U(1)$, $\hat{G} = i\mathbb{R}$, $g_{uv}(x) = \exp i\psi_{uv}(x)$ e temos

$$W_v = W_u + id\psi_{uv} \quad (\text{TG2}) .$$

As conexões, além de representarem potenciais em teorias de gauge, terão para nós outras utilidades. No que segue mostraremos que uma conexão permite-nos definir sistematicamente, para cada $p \in P$, a "horizontalidade" em $T_p P$.

Notemos que o conjunto V_p dos vetores verticais é um espaço vetorial isomorfo a \hat{G} pois $\left. \frac{d}{dt} p \exp t(\alpha A + \beta B) \right|_{t=0} = \alpha A_p^* + \beta B_p^*$, este é portanto um subespaço de $T_p P$ com dimensão dada por $\dim V_p = \dim \hat{G} = \dim G$. Lembremos que após a definição de conexão

mostramos que $\pi_* V_p = 0$; assim o conjunto $V'_p = \{X_p \in T_p P \mid \pi_* X = 0\}$ é um subespaço de $T_p P$ que contém V_p como subespaço. Afirmamos que $V_p = V'_p$, pois o posto de π_* é $\dim P - \dim M = \dim G$ (dado que o fibrado é localmente trivial) e portanto $\dim V'_p = \dim G = \dim V_p \Rightarrow V_p = V'_p$.

Desta forma os vetores verticais em $p \in P$ formam um subespaço $V_p \subset T_p P$ definido por (C2) ou alternativamente pela relação $\pi_* V_p = 0$.

Podemos em cada $p \in P$, tomar um subespaço $H_p \subset T_p P$, complementar de V_p , e escrever $T_p P = H_p \oplus V_p$ (então $\dim H_p = \dim T_p P - \dim V_p = \dim P - \dim G = \dim M$).

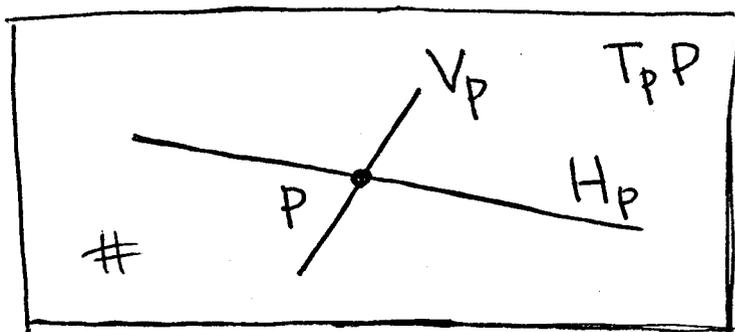


fig.4.

Observamos no entanto que não tem sentido chamarmos H_p de espaço dos vetores horizontais, pois para cada $p \in P$ existem vários subespaços $H_p \subset T_p P$ que podem ser escolhidos como complementos de V_p em $T_p P$. Quando temos uma conexão W definida em $\pi : P \rightarrow M$, podemos entretanto definir o subespaço $H_p \subset T_p P$ dos vetores horizontais em $p \in P$ através da relação $W(H_p) = 0$. De fato notamos que o posto de W é $\dim P - \dim \hat{G} = \dim M$, ademais W não anula-se quando aplicada a qualquer vetor não nulo de V_p , assim $T_p P = H_p \oplus V_p$.

Fica claro que uma conexão permite-nos além da noção de verticalidade, uma noção de horizontalidade em $T_p P$.

4. DERIVADA COVARIANTE, CURVATURA E CAMPO DE GAUGE

Como vimos acima, dada uma conexão W em um fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$, para todo vetor $X_p \in T_p P$, podemos escrever

$$X_p = X_p^V + X_p^H, \text{ com } \pi_*(X_p^V) = 0, \quad W(X_p^H) = 0.$$

Seja então $\varphi \in \Lambda^k(P, V)$ uma k -forma definida em P que assume valores em um espaço vetorial V . Podemos definir a parte horizontal de φ associada à conexão W , que denotamos por $\varphi^H \in \Lambda^k(P, V)$, por

$$\varphi^H(X_1, \dots, X_k) = \varphi(X_1^H, \dots, X_k^H)$$

para $X_j \in T_p P$ ($j=1, \dots, k$).

Definimos então a derivada covariante $D^W \varphi$ de $\varphi \in \Lambda^k(P, V)$ com respeito à conexão W por $D^W \varphi = (d\varphi)^H$, a parte horizontal (associada a W) da derivada usual $d\varphi \in \Lambda^{k+1}(P, V)$, notamos que $D^W \varphi \in \Lambda^{k+1}(P, V)$.

Definimos curvatura $\Omega^W \in \Lambda^2(P, \hat{G})$ associada a conexão $W \in \Lambda^1(P, \hat{G})$ por $\Omega^W = D^W W$. Valem para a curvatura as identidades

$$(\Omega 1) \quad \Omega^W = D^W W = dW + \frac{1}{2} [W, W]$$

$$(\Omega 2) \quad D^W \Omega^W = [\Omega^W, W] = 0.$$

A primeira delas é a definição de Ω^W , da qual decorre a segunda, chamada identidade de Bianchi (vide [19]). Quanto aos comutadores que aparecem nestas expressões, são definidos de forma natural, como iremos explicitar.

Para tal, seja N uma variedade e \hat{G} uma álgebra de Lie, com base $\{e_\alpha\}$ e constantes de estrutura $C_{\alpha\beta}^\gamma$ dadas por

$[e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$. Definimos então o comutador $[\varphi, \psi] \in \Lambda^{i+j}(N, \hat{G})$ das formas $\varphi = \varphi^\alpha e_\alpha \in \Lambda^i(N, \hat{G})$ e $\psi = \psi^\alpha e_\alpha \in \Lambda^j(N, \hat{G})$ (notamos que $\varphi^\alpha, \psi^\alpha$ são formas com valores reais) por:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha\beta}^\gamma (\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) e_\gamma$$

se empregamos notação matricial em \hat{G} , φ e ψ tornam-se matrizes de formas reais e temos

$$[\varphi, \psi] = \varphi \wedge \psi - (-1)^{ij} \psi \wedge \varphi \quad (\text{vide [19]})$$

onde utilizamos o produto matricial, mas com o "cunha" (\wedge) substituindo o produto usual dos elementos de matriz.

Valem para o comutador definido acima as seguintes propriedades (vide [19])

$$(\hat{G}1) \quad [\psi, \varphi] = -(-1)^{ij} [\varphi, \psi]$$

$$(\hat{G}2) \quad d[\varphi, \psi] = [d\varphi, \psi] + (-1)^i [\varphi, d\psi]$$

$$(\hat{G}3) \quad (-1)^{ik} [[\varphi, \psi], \rho] + (-1)^{kj} [[\rho, \varphi], \psi] + (-1)^{ji} [[\psi, \rho], \varphi] = 0,$$

para $\rho \in \Lambda^k(N, \hat{G})$.

A última das relações decorre da identidade de Jacobi para os elementos de \hat{G} (e é análoga a ela).

No caso em que $\pi : P \rightarrow M$ é o fibrado principal de uma teoria de gauge, associamos à curvatura Ω^W , o campo de gauge $\Omega_u = \sigma_u^* \Omega^W$, para uma escolha de gauge $T_u = (\pi, S_u)$. Dadas duas escolhas de gauge T_u e T_v , a mudança de gauge entre Ω_u e Ω_v (vide [19]) é dada por

$$\Omega_{\mathbf{v}} = \text{Ad}_{g_{\mathbf{uv}}^{-1}(\mathbf{x})} \Omega_{\mathbf{u}}$$

ou se empregamos a notação matricial,

$$\Omega_{\mathbf{v}} = g_{\mathbf{uv}}^{-1} \Omega_{\mathbf{u}} g_{\mathbf{uv}} \quad (\text{TG3})$$

onde $g_{\mathbf{uv}} : U \cap V \longrightarrow G$ é a função de transferência associada.

Reparamos que no caso da Eletrodinâmica, por $U(1)$ ser abeliano temos

$$\Omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\mathbf{u}} \quad (\text{TG4})$$

e o campo de gauge é o mesmo em todas escolhas de gauge. Em teorias de gauge não abelianas o campo não será o mesmo em todas as escolhas de gauge a menos que seja nulo ($\Omega_{\mathbf{u}} = 0 \implies \Omega_{\mathbf{v}} = 0$).

5. FORMAS HORIZONTAIS EQUIVARIANTES

Seja $G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G em um espaço vetorial V , denotada por $v \longrightarrow g.v$ para $g \in G$, $v \in V$. Definimos então as k -formas horizontais equivariantes como sendo as k -formas definidas em P que assumem valores em V com as seguintes propriedades

$$(H1) \quad \varphi(X_1, \dots, X_k) = 0 \quad \text{se algum dos } X_j \text{ é vertical}$$

$$(\pi_* X_j = 0).$$

$$(H2) \quad R_g^* \varphi = g^{-1} \cdot \varphi, \quad \forall g \in G.$$

Tais formas são "horizontais" porque anulam vetores verticais (H1) e equivariantes devido ao comportamento tensorial apresentado em (H2). Abreviadamente chamaremos as mesmas de formas horizontais e denotaremos o seu conjunto por $\bar{\Lambda}^k(P, V) \subset \Lambda^k(P, V)$.

Notamos que embora uma conexão $W \in \Lambda^1(P, \hat{G})$ tenha a propriedade (H2) quando empregamos a representação adjunta $Ad: G \longrightarrow GL(\hat{G})$; não anula-se em vetores verticais e não pertence a $\bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$.

A diferença entre duas conexões $\tau = W_1 - W_2 \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$ pois além de ter a propriedade (H2), anula-se em vetores verticais. De fato W_1 e W_2 aplicam um vetor vertical A_p^* em seu único gerador $A = W_1(A_p^*) = W_2(A_p^*) \in \hat{G}$. Inversamente se $\tau \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$, $W + \tau$ também será uma conexão, e se fixamos uma conexão W temos uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$ e as conexões em $\pi: P \longrightarrow M$.

Assim sendo, se W é uma conexão e $\tau \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$; $W + t\tau$ é uma curva em C , no espaço das conexões; que passa em W para $t=0$ - quando tem derivada $\tau \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$. Portanto podemos caracterizar $\bar{\Lambda}^1(P, \hat{G}) = T_W C$ como o espaço tangente ao espaço das conexões no

fibrado. Quanto à curvatura, é fácil ver que $\Omega^W \in \bar{\Lambda}^2(P, \hat{G})$ com a representação adjunta.

Chamamos as funções $\psi : P \longrightarrow V$ que cumprem apenas (H2) de funções horizontais ou campos de partículas ($\psi \in \bar{\Lambda}^0(P, V) \equiv C(P, V)$). Tais funções estarão associadas às funções de onda quânticas das partículas.

A derivada covariante leva formas horizontais em formas horizontais, isto é $D^W : \bar{\Lambda}^k(P, V) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{k+1}(P, V)$. De fato $D^W \varphi = (d\varphi)^H$ sempre anula-se em vetores verticais, ademais se $R_g^* \varphi = g^{-1} \cdot \varphi$, $R_g^* D^W \varphi = R_g^* (d\varphi)^H = (dR_g^* \varphi)^H = g^{-1} \cdot D^W \varphi$ (notamos que o "pull-back" comuta com o diferencial usual e que R_g^* altera apenas a parte vertical dos vetores).

Pode-se mostrar (vide [19]) que para $\tau \in \bar{\Lambda}^k(P, V)$ temos

$$(H3) \quad D^W \tau = d\tau + W \hat{\wedge} \tau$$

O símbolo $\hat{\wedge}$ em (H3), além do cunha usual carrega a ação de \hat{G} em V , de uma forma que tornaremos clara. Tal ação provém da representação de G em V , $v \longrightarrow g.v$, por

$$A.v = \frac{d}{dt} ((\exp tA).v) \Big|_{t=0} \quad \text{para } A \in \hat{G}, v \in V.$$

No caso em que $V = \hat{G}$ (com a representação adjunta), (H3) reduz-se a

$$D^W \tau = d\tau + [W, \tau],$$

que corresponde a identidade de Bianchi ($\Omega 2$) no caso em que $\tau = \Omega^W$.

Lembramos que para cada $p \in P$ podemos escolher $H_p \subset T_p P$ de forma que $T_p P = H_p \oplus V_p$. Observamos então que a restrição do diferencial da projeção $\pi_*|_{H_p} : H_p \longrightarrow T_x M (x = \pi(p))$ é um isomorfismo

entre H_p e $T_x M$.

Notamos que se M é o espaço-tempo, $T_x M$ tem uma métrica h_x com assinatura -2 que pode ser transportada (com o emprego do referido isomorfismo) para H_p , o qual fica dotado de uma métrica $\bar{h}_p = \pi_p^* h_x$. Podemos também definir um elemento de volume $\bar{\mu}$ em H_p a partir daquele em $T_x M$. Assim podemos definir um operador de Hodge em H_p ,

$$*_p : \Lambda^k(H_p, V) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(H_p, V)$$

(onde $n = \dim H_p = \dim M$).

Graças à partição $T_p P = H_p \oplus V_p$ e ao fato das formas horizontais anularem-se em vetores verticais podemos definir

$$\bar{*} : \bar{\Lambda}^k(P, V) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{n-k}(P, V).$$

Para $\varphi \in \bar{\Lambda}^k(P, V)$ e $p \in P$ definimos $(\bar{*}\varphi)_p$ como sendo a única extensão de $*_p(\varphi|_{H_p})$ para uma $n-k$ forma em P com valores em V , que anula-se em vetores verticais.

Observamos que embora a escolha de H_p seja arbitrária para cada $p \in P$, o operador $\bar{*}$ que definimos tem importantes propriedades que independem desta escolha. Se $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ é uma escolha de gauge com seção associada $\sigma_u : U \longrightarrow P$, então (vide [19])

$$(H4) \quad \sigma_u^*(\bar{*}\varphi) = * \sigma_u^*(\varphi)$$

onde $* : \Lambda^k(U, V) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(U, V)$ e o operador $*$ é o operador definido pela métrica e o elemento de volume em M .

Empregando o operador $\bar{*}$ podemos definir o codiferencial covariante associado a uma conexão W , $\delta^W : \bar{\Lambda}^k(P, V) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{k+1}(P, V)$

para formas horizontais por $\delta^W \equiv \bar{*} D^W \bar{*}$ (no caso em que M difere do espaço-tempo é por vezes conveniente introduzir um sinal negativo desta definição - vide [19]).

Empregando o operador $\bar{*}$ podemos definir uma métrica para as k -formas horizontais $\psi, \varphi \in \bar{\Lambda}^k(P, \mathbb{R})$ por

$$\bar{h} : \bar{\Lambda}^k(P, \mathbb{R}) \times \bar{\Lambda}^k(P, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

com $\varphi \wedge \bar{*} \psi = \bar{h}(\varphi, \psi) \bar{\mu}$, sendo $\bar{\mu}$ o elemento de volume em H_p .

Esta métrica pode ser estendida para formas horizontais $\varphi, \psi \in \bar{\Lambda}^k(P, V)$ que assumem valores em um espaço vetorial com métrica \hat{h} . Para tal seja $\{E_\alpha\}$ uma base em V , e escrevemos $\varphi = \varphi^\alpha E_\alpha$, $\psi = \psi^\alpha E_\alpha$, com $\varphi^\alpha, \psi^\alpha \in \bar{\Lambda}^k(P, \mathbb{R})$. Então definimos a métrica

$$(\bar{h} \hat{h}) : \bar{\Lambda}^k(P, V) \times \bar{\Lambda}^k(P, V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{com } (\bar{h} \hat{h})(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha, \beta} [\bar{h}(\varphi^\alpha, \psi^\beta)] \hat{h}_{\alpha\beta}$$

$$\text{onde } \hat{h}_{\alpha\beta} = \hat{h}(E_\alpha, E_\beta).$$

No caso em que $V = \hat{G}$ sempre escolheremos $\hat{h} = k$, a métrica bi-invariante de Killing-Cartan em \hat{G} , e teremos

$$(\bar{h} k) : \bar{\Lambda}^k(P, \hat{G}) \times \bar{\Lambda}^k(P, \hat{G}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

para as formas $\varphi \in \bar{\Lambda}^k(P, \hat{G})$.

6. LAGRANGEANAS, CORRENTES E PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

No que segue empregaremos para representar a função de onda de uma partícula $\psi \in \bar{\Lambda}^0(P, V) \equiv C(P, V)$. De fato a função de onda usualmente empregada é o "pull-back" $\psi_u = \sigma_u^* \psi \in C(U, V)$ em uma determinada escolha de gauge. Assumiremos que V é um espaço vetorial com métrica \hat{h} , e que existe uma representação $G \longrightarrow GL(V)$ dada por $v \longrightarrow g.v$ (para $g \in G$, $v \in V$).

Ademais $\pi : P \longrightarrow M$ será um fibrado principal com grupo G (grupo de gauge) e base igual ao espaço-tempo (que pode ser curvo). Trataremos de teorias de gauge.

Definimos daí o espaço de 1-jatos de P para V por

$$J(P, V) \equiv \{(p, v, \theta) \mid p \in P, v \in V \text{ e } \theta : T_p P \longrightarrow V \text{ é linear}\}.$$

Chamaremos então de Lagrangeana uma aplicação $L : J(P, V) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(pg, g^{-1}.v, g^{-1} \cdot \theta \circ R_{g^{-1}*}) = L(p, v, \theta).$$

Caso $L(p, g.v, g.\theta) = L(p, v, \theta)$ a Lagrangeana é dita G -invariante.

Definimos a "derivada" da Lagrangeana com respeito ao terceiro e segundo argumentos por $\nabla_3 L \in \bar{\Lambda}^1(P, V)$, $\nabla_2 L \in \bar{\Lambda}^0(P, V)$, com

$$(\bar{h} \hat{h})_p (\nabla_3 L(p, v, \theta), \beta) = \frac{d}{dt} L(p, v, \theta + t\beta) \Big|_{t=0} \quad \forall \beta \in \bar{\Lambda}_p^1(P, V)$$

$$\hat{h}(\nabla_2 L(p, v, \theta), W) = \frac{d}{dt} L(p, v + tW, \theta) \Big|_{t=0} \quad \forall W \in V$$

onde fizemos uso das métricas apresentadas no parágrafo anterior.

Pode-se mostrar (vide [19]) que dada uma Lagrangeana G -invariante

L , uma conexão W e uma função de onda ψ , podemos construir uma função $\mathcal{L}(\psi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ por

$$\mathcal{L}(\psi)(x) = L(p, \psi(p), D^W \psi_p) \text{ para } x = \pi(p)$$

a função $\mathcal{L}(\psi) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada densidade de ação. Para um aberto $U \subset M$ com fecho compacto definimos a ação associada a $\mathcal{L}(\psi)$ e U por $(\mathcal{L}^W(\psi) \equiv \mathcal{L}(\psi))$

$$\mathcal{I}_U^W(\psi) \equiv \int_U \mathcal{L}^W(\psi) d\mu \in \mathbb{R}$$

onde μ é o elemento de volume em M (que é o espaço-tempo).

Para W fixada dizemos $\mathcal{L}^W(\psi)$ é estacionária com respeito a ψ se

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}_U^W(\psi + t\tau) \Big|_{t=0} = 0$$

$\forall \tau \in C(P, V)$ com suporte projetado em U (isto é, $\{x \in M \text{ tal que } x = \pi(p) \text{ e } \tau(p) \neq 0\} \subset U$) e $\forall U \subset M$ aberto com fecho compacto.

A exigência de que $\mathcal{L}^W(\psi)$ seja estacionária, no caso com respeito a ψ , chama-se princípio de mínima ação e leva-nos as equações de Euler-Lagrange,

$$(L1) \quad \delta^W \frac{\partial L}{\partial (D^W \psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$$\text{onde } \frac{\partial L}{\partial (D^W \psi)} = \nabla_3 L(p, \psi(p), D^W \psi_p) \in \bar{\Lambda}^1(P, V)$$

$$\text{e } \frac{\partial L}{\partial \psi} = \nabla_2 L(p, \psi(p), D^W \psi_p) \in C(P, V).$$

Para a prova deste resultado efetua-se o procedimento usual do cálculo variacional, mas ao invés da integração por partes emprega-se a generalização do teorema de Stokes (vide [20])

$$(TS) \quad \int_U (\bar{h} \hat{h}) (D^W \alpha, \beta) = \int_U (\bar{h} \hat{h}) (\alpha, \delta^W \beta) \mu$$

onde U é aberto com fecho compacto, $\alpha \in \bar{\Lambda}^k(P, V)$, $\beta \in \bar{\Lambda}^{k+1}(P, V)$, sendo que α tem suporte projetado contido em U .

Efetuamos aqui a referida prova: Temos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}_U^W(\psi + t\tau) \Big|_{t=0} = \int_U \frac{d}{dt} \mathcal{L}^W(\psi + t\tau) \Big|_{t=0} \mu.$$

Ademais, em $t = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}^W(\psi(p) + t\tau(p)) &= \frac{d}{dt} L(p, \psi(p) + t\tau(p), D^W \psi + tD^W \tau) = \\ &= \hat{h} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi(p)}, \tau_p \right) + (\bar{h} \hat{h}) \left(\frac{\partial L}{(D^W \psi)_p}, D^W \tau_p \right) \end{aligned}$$

lembrando que $(\bar{h} \hat{h}) = \hat{h}$ para elemento de $\bar{\Lambda}^0(P, V) = C(P, V)$ e empregando o teorema de Stokes temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}_U^W(\psi + t\tau) \Big|_{t=0} = \int_U \hat{h} \left(\delta^W \frac{\partial L}{\partial (D^W \psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \tau \right) \mu$$

e fica claro que o princípio de mínima ação não só implica as equações de Euler-Lagrange, mas é equivalente a elas (notamos que a igualdade acima deve valer para $\forall \tau \in \bar{\Lambda}^0(P, V)$ com suporte projetado em U e VU aberto com fecho compacto).

Definimos agora a corrente $J^W(\psi) \in \bar{\Lambda}^1(P, G)$ (com a representação adjunta por (vide [19])):

$$(\bar{h} \hat{h}) \left(\frac{\partial L}{\partial (D^W \psi)}, \sigma \cdot \psi \right) = (\bar{h} k) (J^W(\psi), \sigma)$$

para todo $\sigma \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$. A corrente assim definida é chamada de corrente associada a L , ψ e W ; e poderia ser definida de forma equivalente por

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\psi, W + t\tau) \Big|_{t=0} = (\bar{h} k) (J^W(\psi), \sigma)$$

$\forall \sigma \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$ (escrevemos $\mathcal{L}^W(\psi) = \mathcal{L}(\psi, W)$).

Definimos também a densidade de autoação associada à conexão W por

$$S(W) = -\frac{1}{2} (\bar{h} k) (\Omega_u, \Omega_u)$$

onde $\Omega_u^W = \sigma_u^* \Omega^W$ é tomado em uma escolha de gauge. Observamos que no entanto $S(W) \in C^\infty(M)$ independe da escolha de gauge empregada, pois a métrica $K : \hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ de Killing-Cartan é invariante pela ação adjunta de G em \hat{G} ; ademais sob uma transformação de gauge Ω^W transforma-se segundo a regra

$$\Omega_v = g_{uv}^{-1} \Omega_u g_{uv}$$

(onde g_{uv} é a função de transferência associada à transformação de gauge).

Agora definimos a densidade de ação total $(\mathcal{L} + S)(\psi, W) = \mathcal{L}^W(\psi) + S(W)$ adicionando a ação normal à autoação. Estamos então preparados para apresentar um princípio variacional, que leva nos não apenas às equações de Euler-Lagrange para ψ , mas também às equações não homogêneas de campo (as equações homogêneas de

campo constituem a identidade de Bianchi, que já apresentamos).

Dizemos que o par (ψ, W) é estacionário com respeito à densidade de ação total de $(\mathcal{L} + S)$ se

$$\frac{d}{dt} \int_U (\mathcal{L} + S)(\psi + t\tau, W + t\sigma) \mu = 0$$

para todo aberto com fecho compacto $U \subset M$ e quaisquer $\tau \in \Lambda^0(P, V) = C(P, V)$ e $\sigma \in \bar{\Lambda}^1(P, V)$ que tenham suporte projetado em U .

Afirmamos então que o princípio variacional enunciado acima equivale às equações

$$(L1) \quad \delta^W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D^W \mathcal{L})} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

$$(L2) \quad \delta^W \Omega^W = J^W(\psi)$$

De fato, notemos que em $t = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_U (\mathcal{L} + S)(\psi + t\tau, W + t\sigma) \mu = \\ & = \frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L}(\psi + t\tau, W + t\sigma) \mu - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U (\bar{h}k)(\Omega_t, \Omega_t) \mu \end{aligned}$$

onde $\Omega_t = \Omega^{W+t\sigma} = d(W + t\sigma) + \frac{1}{2} [W + t\sigma, W + t\sigma]$, portanto

$$\frac{d}{dt} \Omega_t = d\sigma + [W, \sigma] = D^W \sigma \quad \text{em } t = 0,$$

quando então temos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_U (\mathcal{L} + S) (\psi + t\tau, W + t\sigma) \mu = \\
& = \frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L} (\psi + t\tau, W) \mu + \frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L} (\psi, W + t\sigma) \mu - \\
& \quad - \int_U (\bar{h}k) (\Omega^W, D^W \sigma) = \\
& = \int_U \hat{h} (\delta^W \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D^W \psi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}, \tau) \mu + \int_U (\bar{h}k) (J^W (\psi), \sigma) \mu - \\
& \quad - \int_U (\bar{h}k) (\delta^W (\Omega^W), \sigma) \mu
\end{aligned}$$

onde empregamos o teorema de Stokes e a definição de corrente. Torna-se então claro que o referido princípio variacional, no qual exige-se que a ação total seja estacionária com respeito a ψ e W ; é equivalente às equações (L1) e (L2). A equação (L1) corresponde às equações de Euler-Lagrange para ψ , e a equação (L2) quando escrita na base (com o emprego de uma seção local) tem a expressão

$$\delta \Omega_u + * [W_u, * \Omega_u] = J_u^W$$

correspondendo às equações de campo não homogêneas. No caso da eletrodinâmica, esta corresponde às equações de Maxwell não homogêneas, enquanto que o "pull-back" da equação de Bianchi

$$d\Omega_u + [W_u, \Omega_u] = 0$$

corresponde às equações de Maxwell homogêneas.

Finalmente notemos que (L2) implica que

$$\delta^W J^W (\psi) = \delta^W (\delta^W \Omega^W) = 0$$

(vide [19]).

O "pull-back" desta equação,

$$\delta J_u^W + * [W_u, * J_u] = 0$$

corresponde à conservação da corrente.

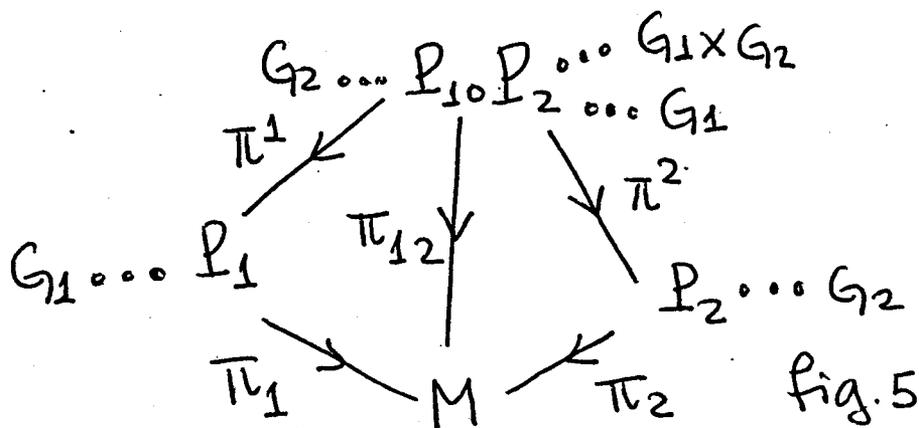
A construção de uma ação total a partir de uma Lagrangeana G -invariante é usualmente conhecida como princípio de gauge (vide [22]) e leva-nos não só às equações de Euler-Lagrange mas também às equações de campo. O princípio de gauge é o procedimento básico empregado nas teorias de gauge usuais. Nos três parágrafos que seguem construiremos teorias de gauge com monopolos, sem introduzir mudanças na topologia de espaço-tempo como usualmente é feito (vide [6 - 7]).

7. FIBRADO "SPLICED" E CONEXÕES

Sejam $\pi_1 : P_1 \longrightarrow M$ e $\pi_2 : P_2 \longrightarrow M$ dois fibrados principais com grupos G_1 e G_2 e a mesma base M . Definimos então o conjunto $P_1 \circ P_2 = \{(p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 \mid \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)\}$ e notamos que $G_1 \times G_2$ age livremente à direita de $P_1 \circ P_2$, $(p_1, p_2)(g_1, g_2) = (p_1 g_1, p_2 g_2)$. É fácil ver que $\pi_{12} : P_1 \circ P_2 \longrightarrow M$ com $\pi_{12}(p_1, p_2) = \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)$ é um fibrado principal com grupo $G_1 \times G_2$. Chamamos tal fibrado de fibrado "spliced" associado aos dois fibrados iniciais.

Podemos introduzir também dois outros fibrados principais; $\pi^1 : P_1 \circ P_2 \longrightarrow P_1$ ($\pi^1(p_1, p_2) = p_1$) com grupo G_2 e $\pi^2 : P_1 \circ P_2 \longrightarrow P_2$ ($\pi^2(p_1, p_2) = p_2$) com grupo G_1 .

Temos então uma estrutura formada por cinco fibrados principais que apresentamos na figura 5.



Pode-se mostrar (vide [19]) que se $w_1 \in \Lambda^1(P_1, \hat{G}_1)$ e $w_2 \in \Lambda^1(P_2, \hat{G}_2)$ são conexões nos fibrados $\pi_1 : P_1 \longrightarrow M$ e $\pi_2 : P_2 \longrightarrow M$, então

$$W = \pi_1^* w_1 \oplus \pi_2^* w_2 \in \Lambda^1(P_1 \circ P_2, \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2)$$

é uma conexão no fibrado $\pi_{12} : P_1 \circ P_2 \longrightarrow M$. Mostraremos aqui

que se W é conexão no fibrado "spliced" existem conexões W_1 e W_2 nos fibrados originais tais que

$$W = \pi^1_* W_1 \oplus \pi^2_* W_2 .$$

Para tal faremos uso das identificações $\hat{G}_1 = \hat{G}_1 \oplus 0$, $\hat{G}_2 = 0 \oplus \hat{G}_2$ em $\hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2$ e da projeção $p^1 : \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2 \longrightarrow \hat{G}_1$ (com $p^1(A \oplus B) = A$) e de sua análoga

$$p^2 : \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2 \longrightarrow \hat{G}_2 .$$

Notamos que sempre podemos escrever $W = p^1(W) \oplus p^2(W)$, assim se definimos W_1 e W_2 através das relações $\pi^1_* W_1 = p^1(W)$ e $\pi^2_* W_2 = p^2(W)$ obtemos o resultado $W = \pi^1_* W_1 \oplus \pi^2_* W_2$. Resta nos mostrar que W_1 e W_2 estão bem definidas e são conexões. Faremos a prova para W_1 (para W_2 é análoga).

Definimos W_1 por $p^1(W) = \pi^1_* W_1$, ou seja

$$(W_1)_{p_1}(X_{p_1}) = p^1(W_p(X_p)), \text{ onde}$$

$p \in P_1 \circ P_2$, $\pi^1(p) = p_1 \in P_1$, $X_p \in T_p(P_1 \circ P_2)$ e

$$X_{p_1} = \pi^1_*(X_p) \in T_{p_1}P_1 .$$

Devemos mostrar que esta definição independe da escolha de p e de X_p .

(a) para um mesmo p , caso $X_p, X'_p \in T_p(P_1 \circ P_2)$ e $\pi^1_*(X_p) = \pi^1_*(X'_p) = X_{p_1}$, temos

$$\pi^1_*(X_p - X'_p) = 0 \text{ e portanto}$$

$X_p - X'_p$ é um vetor vertical no fibrado $\pi^1 : P_1 \circ P_2 \longrightarrow P_1$. O grupo associado a este fibrado principal é G_2 e podemos escrever

$$x_p - x'_p = \frac{d}{dt} (p \exp tA_2) \Big|_{t=0}$$

para $A_2 \in \hat{G}_2$, fazendo a identificação

$$A_2 = 0 \oplus A_2 \in \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2 \quad \text{obtemos que}$$

$$W_p(x_p - x'_p) = 0 \oplus A_2$$

de forma que $p^1(W_p(x_p - x'_p)) = 0$ e

$$p^1(W_p(x_p)) = p^1(W_p(x'_p)) .$$

(b) caso $\pi^1(p) = \pi^1(p') = p_1$, temos que $p' = pg_2$ e $x'_p = Rg_2 * x_p$, portanto

$$\pi_*^1(x_{p'}) = \pi_*^1(x_p) ;$$

ademais $W_{p'}(x_{p'}) = \text{Ad}_{g_2}^{-1} W_p(x_p)$ e $p^1(W_{p'}(x_{p'})) = p^1(W_p(x_p))$

Assim W_1 está bem definida e resta-nos mostrar que é de fato uma conexão; vale claramente (C1) e mostramos (C2) no que segue. (notamos que do ponto de vista do fibrado $\pi^1 : P_1 \circ P_2 \longrightarrow P_1$, Rg_2 age da mesma forma que $R_{(e, g_2)}$ do ponto de vista do fibrado "spliced").

$$\begin{aligned} W_1(R_{g_1} * x_{p_1}) &= p^1(W(R_{(g_1, e)} * x_p)) = p^1(\text{Ad}_{(g, e)}^{-1} W(x_p)) = \\ &= \text{Ad}_{g_1}^{-1} p^1(W(x_p)) = \text{Ad}_{g_1}^{-1} W_1(x_{p_1}) . \end{aligned}$$

Assim estabelecemos que para cada conexão W no fibrado "spliced" existem duas conexões nos fibrados constituintes, W_1 e W_2 ; de forma que $W = \pi^1 * W_1 \oplus \pi^2 * W_2$. Como escório da prova acima, vemos que dada uma conexão W temos bem determinadas W_1 e W_2 .

8. MONOPOLOS EM TEORIAS DE GAUGE I

No que segue iremos apresentar uma generalização da teoria de dois potenciais para a Eletrodinâmica com monopolos (vide [3 - 5]) para uma teoria de gauge geral. Notamos que ao contrário do usual (vide [6 - 7]) em nosso enfoque o espaço-tempo não terá anomalias topológicas.

A estrutura matemática da teoria de gauge com monopolos que apresentaremos é o fibrado "spliced" $\pi_{12} : P \circ P \longrightarrow M$ com grupo $G \times G$ obtido a partir de dois fibrados idênticos àquele associado à mesma teoria de gauge sem monopolos ($\pi : P \longrightarrow M$ com grupo de gauge G e base igual ao espaço-tempo). Observamos que a base M empregada pode ser curva.

Associamos o potencial de gauge nesta teoria a uma conexão W em $\pi_{12} : P \circ P \longrightarrow M$. Ou seja, dada uma escolha de gauge neste fibrado,

$$T_u : \pi_{12}^{-1}(u) \longrightarrow U \times (G \times G)$$

com seção local $\sigma_u : U \longrightarrow P \circ P$ associada; definimos o potencial de gauge $W_u = \sigma_u^* W$ associado à referida escolha de gauge.

Notamos que existem, face a discussão no fim do ítem anterior, duas conexões W_1 e W_2 , em $\pi : P \longrightarrow M$ univocamente relacionadas a $W = \pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2$.

No entanto há uma diferença fundamental entre empregar-se para descrever o potencial de gauge.

(a) uma conexão $W = \pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2 \in \Lambda^1(P \circ P, \hat{G} \oplus \hat{G})$ no fibrado "spliced".

(b) duas conexões $W_1, W_2 \in \Lambda^1(P, \hat{G})$ no fibrado original da teoria de gauge sem monopolos.

Consideremos primeiro o caso (a). Sejam então duas escolhas de gauge $T_u : \pi_{12}^{-1}(U) \longrightarrow U \times (G \times G)$ e $T_v : \pi_{12}^{-1}(V) \longrightarrow V \times (G \times G)$ em $\pi_{12} : P \circ P \longrightarrow M$ com intersecção não vazia ($U \cap V \neq \emptyset$) e seções locais $\sigma_u : U \longrightarrow P \circ P$ e $\sigma_v : V \longrightarrow P \circ P$ associadas.

A função de transferência $g_{uv} : U \cap V \longrightarrow G \times G$ entre as duas escolhas de gauge assume valores em $G \times G$ e podemos escrevê-la como:

$$g_{uv}(x) = ((g_1)_{uv}(x), (g_2)_{uv}(x)) \text{ com } x \in U \cap V,$$

para $(g_1)_{uv}, (g_2)_{uv} : U \cap V \longrightarrow G$. Como

$$W = \pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2$$

assume valores em $\hat{G} \oplus \hat{G}$, a transformação de gauge (TG1) entre os potenciais de gauge W_u e W_v pode ser escrita como duas relações:

$$(W_1)_v = (g_1)_{uv}^{-1} d(g_1)_{uv} + (g_1)_{uv}^{-1} (W_1)_u (g_1)_{uv}$$

e

$$(W_2)_v = (g_2)_{uv}^{-1} d(g_2)_{uv} + (g_2)_{uv}^{-1} (W_2)_u (g_2)_{uv}.$$

No caso da Eletrodinâmica, podemos escrever (TG2) como

$$(W_1)_v = (W_1)_u + id\chi_{uv}$$

$$(W_2)_v = (W_2)_u + id\psi_{uv}$$

com $(g_1)_{uv}(x) = \exp i\chi_{uv}$, $(g_2)_{uv}(x) = \exp i\psi_{uv}$, com $\chi_{uv}, \psi_{uv} : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Desta forma uma transformação de gauge $W_u \in \Lambda^1(U, \hat{G} \oplus \hat{G})$ corresponde a duas transformações de gauge independentes de $(W_1)_u$ e $(W_2)_u \in \Lambda^1(U, \hat{G})$.

No caso (b) temos as conexões W_1 e W_2 no fibrado $\pi : P \longrightarrow M$. Sejam então duas escolhas de gauge, neste fibrado, $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ e $T_v : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ com intersecção não nula e seções associadas $\sigma_u : U \longrightarrow P$ e $\sigma_v : V \longrightarrow P$. A função de transição $g_{uv} : U \cap V \longrightarrow G$ assume valores em G e podemos escrever a transformação de gauge (TG1) para os potenciais de gauge associados a cada uma das conexões; de forma que obtemos:

$$(W_1)_v = g_{uv}^{-1} dg_{uv} + g_{uv}^{-1} (W_1)_u g_{uv}$$

$$(W_2)_v = g_{uv}^{-1} dg_{uv} + g_{uv}^{-1} (W_2)_u g_{uv} .$$

No caso da eletrodinâmica, temos $g_{uv} = \exp iX_{uv}$; $X_{uv} : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$ e escrevemos (TG2) para cada uma das conexões:

$$(W_1)_v = (W_1)_u + idX_{uv}$$

$$(W_2)_v = (W_2)_u + idX_{uv} .$$

Estas relações mostram que os potenciais de gauge $(W_1)_u$ e $(W_2)_u$ sofrem a mesma transformação de gauge no caso (b). Assim fica clara a diferença entre as opções (a) e (b). No que segue escolhemos a opção (a).

Afim de mostrar a necessidade da referida escolha vamos considerar a Eletrodinâmica com monopolos descrita por dois potenciais, um ligado às cargas elétricas e o outro ligado às magnéticas (como

é feito em [3 - 5]).

Primeiro notemos que na Eletrodinâmica sem monopolos, $G=U(1)$ e o potencial de gauge assume valores em $i\mathbb{R} = \hat{G}$, isto é, $(w_1)_u = iA_\mu dx^\mu \in \Lambda^1(U, i\mathbb{R})$. O campo de gauge é então dado por

$$\begin{aligned} (\Omega_1)_u &= d(w_1)_u + \frac{1}{2} [(w_1)_u, (w_1)_u] = \\ &= d(w_1)_u = iF_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Lambda^2(U, i\mathbb{R}) \end{aligned}$$

coincidindo com o diferencial do potencial, pois $U(1)$ é abeliano; e consistindo em uma 2-forma que assume valores em $i\mathbb{R}$.

Observamos que o campo $F_{\mu\nu}$ não é alterado se efetuamos a troca de potenciais

$$(w_1)_u \longrightarrow (w_1)_u + id\chi$$

onde $d\chi = \partial_\mu \chi dx^\mu = \vec{\nabla}\chi \cdot d\vec{r} + \frac{\partial\chi}{\partial t} dt$ e $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ($d\vec{r} = (dx^1, dx^2, dx^3)$ e $dt = dx^0$); pois $d^2\chi = 0$.

Esta transformação é interpretada geometricamente como uma mudança de escolha de gauge, ou trivialização local, de forma que a função de transição associada é dada por

$$g = \exp i\chi : U \cap V \longrightarrow G .$$

Notemos que o campo de gauge pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} (\Omega_1)_u &= iF_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \\ &= i(F_{ko} dx^k \wedge dx^o + F_{\ell m} dx^\ell \wedge dx^m) . \end{aligned}$$

As componentes do tensor eletromagnético associadas ao campo elétrico e magnético são dadas por $E_k = F_{ko}$ e $B_k = \epsilon_{k\ell m} dx^\ell \wedge dx^m$. Lembramos então que se $(*)$ é o operador de Hodge, $* dx^k \wedge dx^o = \epsilon_{k\ell m} dx^\ell \wedge dx^m$, assim

$$(\Omega_1)_u = i(E_k + *B_k) dx^k \wedge dx^o$$

e visto que $(*)^2 = -1$, a aplicação do operador de Hodge troca os campos elétrico e magnético.

Consideremos agora a Eletrodinâmica com cargas elétricas e magnéticas. O campo apenas gerado por cargas elétricas pode ser escrito por um potencial usual

$$(\Omega_1)_u = d(W_1)_u .$$

Já o campo gerado pelas cargas magnéticas é o dual de um campo similar àquele gerado por cargas elétricas (como vimos há pouco). Podemos então descrevê-lo por outro potencial da seguinte forma

$$*(\Omega_2)_u = * d(W_2)_u .$$

O campo total gerado pelas cargas elétricas e magnéticas será dado então por

$$iF = (\Omega_1)_u + * (\Omega_2)_u .$$

Assim sendo um dos potenciais descreve o campo gerado pelas cargas elétricas, e o outro o campo gerado pelas cargas magnéticas. Notamos ainda que se efetuamos as transformações de gauge

independentes

$$(W_1)_u \longrightarrow (W_1)_u + idX$$

$$(W_2)_u \longrightarrow (W_2)_u + id\psi$$

o campo F não é alterado (pois $d^2\chi = d^2\psi = 0$). Se queremos interpretar as transformações acima como mudanças de trivialização local em um fibrado; devemos empregar o fibrado "spliced" (devido a independência de χ e ψ). Fica portanto, justificada a escolha da opção (a). A opção (b) não daria cabo nem da geometrização da Eletrodinâmica com monopolos (como teoria de fibrado).

9. MONOPOLOS EM TEORIAS DE GAUGE II

Reparamos que o fibrado produto de duas cópias do fibrado $\pi : P \longrightarrow M$, tem cada ponto $p \in P \circ P$ de seu espaço total associado a dois pontos de P sobre uma mesma fibra. Este enfoque permite-nos compreender que uma transformação de gauge em $\pi_{12} : P \circ P \longrightarrow M$ corresponde a duas transformações de gauge em $\pi : P \longrightarrow M$. De fato $\sigma_u : U \longrightarrow P \circ P$ corresponde a $\sigma_u^1 = \pi^1 \circ \sigma_u : U \longrightarrow P$ e também a $\sigma_u^2 = \pi^2 \circ \sigma_u : U \longrightarrow P$.

Desta forma podemos associar uma única conexão W em P a dois potenciais de gauge $W_u = \sigma_u^1 * W$ e $\tilde{W}_u = \sigma_u^2 * W$.

Nota-se que

$$W_u = (\pi^1 \circ \sigma_u) * W = \sigma_u^*(\pi^1 * W) = \sigma_u^*(\pi^1 * W \oplus 0)$$

e

$$\tilde{W}_u = (\pi^2 \circ \sigma_u) * W = \sigma_u^*(\pi^2 * W) = \sigma_u^*(0 \oplus \pi^2 * W).$$

Estes dois potenciais de gauge, W_u e \tilde{W}_u correspondem aos potenciais de gauge associados às 1-formas $\pi^1 * W \oplus 0$ e $0 \oplus \pi^2 * W$ que são possíveis extensões de W ao fibrado produto.

Reparamos portanto que dadas duas conexões W_1 e W_2 em $\pi : P \longrightarrow M$, podemos associar-lhes duas conexões $W = \pi^1 * W_1 \oplus \pi^2 * W_2$ e $\tilde{W} = \pi^1 * W_2 \oplus \pi^2 * W_1$ em $\pi_{12} : P \circ P \longrightarrow M$. Como vimos no parágrafo 7, dada uma conexão W no fibrado "spliced" temos bem determinadas duas conexões W_1 e W_2 nos fibrados originais; vemos agora que no caso em que tais fibrados são iguais; estas conexões podem gerar uma outra conexão, \tilde{W} , no fibrado "spliced". Chamaremos \tilde{W} de conexão dual a W .

Notemos que temos duas curvaturas $\Omega^W = D^W W$ e $\Omega^{\tilde{W}} = D^{\tilde{W}} \tilde{W}$ associadas às conexões W e \tilde{W} . Estas curvaturas devem obedecer às

identidades de Bianchi, $D^W \Omega^W = 0$ e $D^{\tilde{W}} \tilde{\Omega}^{\tilde{W}} = 0$. Antes de analisarmos estas identidades com mais cuidado apresentamos (vide [8]) algumas propriedades de formas horizontais em um fibrado produto. Se $\tau \in \bar{\Lambda}^k(P_1 \circ P_2, \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2)$ com a representação adjunta $\text{Ad} : G_1 \times G_2 \longrightarrow \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2$, então

(a) podemos escrever univocamente com $\tau = \pi^{1*} \tau_1 \oplus \pi^{2*} \tau_2$ com $\tau_1 \in \bar{\Lambda}^k(P_1, \hat{G}_1)$, $\tau_2 \in \bar{\Lambda}^k(P_2, \hat{G}_2)$ onde empregamos as representações adjuntas $\text{Ad} : G_1 \longrightarrow \hat{G}_1$ e $\text{Ad} : G_2 \longrightarrow \hat{G}_2$.

(b) $D^W \tau = \pi^{1*} D^{W_1} \tau_1 \oplus \pi^{2*} D^{W_2} \tau_2$ para $W = \pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2$.

(c) Seja $\bar{*}_{12} : \bar{\Lambda}^k(P_1 \circ P_2, \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{n-k}(P_1 \circ P_2, \hat{G}_1 \oplus \hat{G}_2)$ o operador de Hodge para formas horizontais em $P_1 \circ P_2$ ($n =$ dimensão de M) e $\bar{*}_1 : \bar{\Lambda}^k(P_1, \hat{G}_1) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{n-k}(P_1, \hat{G}_1)$, $\bar{*}_2 : \bar{\Lambda}^k(P_2, \hat{G}_2) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{n-k}(P_2, \hat{G}_2)$, os operadores de Hodge para formas horizontais nos fibrados originais. Então $\bar{*}_{12} \tau = \pi^{1*} (\bar{*}_1 \tau_1) \oplus \pi^{2*} (\bar{*}_2 \tau_2)$.

Empregamos as relações (a), (b) e (c) no que segue. Voltando à curvatura $\Omega^W \in \bar{\Lambda}^2(P \circ P, \hat{G} \oplus \hat{G})$, podemos escrever $\Omega^W = \pi^{1*} \Omega_1 \oplus \pi^{2*} \Omega_2$ onde $\Omega_1, \Omega_2 \in \bar{\Lambda}^2(P, \hat{G})$ estão bem determinadas. Afirmamos que se $W = \pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2$, temos $\Omega_1 = \Omega^{W_1} = D^{W_1} W_1$ e $\Omega_2 = \Omega^{W_2} = D^{W_2} W_2$.

De fato,

$$\begin{aligned} \Omega^W &= dW + \frac{1}{2} [W, W] = \\ &= d(\pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2) + \frac{1}{2} [\pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2, \pi^{1*} W_1 \oplus \pi^{2*} W_2] = \\ &= d(\pi^{1*} W_1) \oplus d(\pi^{2*} W_2) + \left\{ \frac{1}{2} [\pi^{1*} W_1, \pi^{1*} W_1] \oplus \frac{1}{2} [\pi^{2*} W_2, \pi^{2*} W_2] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi^{1*} (dW_1 + \frac{1}{2} [W_1, W_1]) \oplus \pi^{2*} (dW_2 + \frac{1}{2} [W_2, W_2]) = \\
&= \pi^{1*} D^{W_1} W_1 \oplus \pi^{2*} D^{W_2} W_2 = \pi^{1*} \Omega^{W_1} \oplus \pi^{2*} \Omega^{W_2}
\end{aligned}$$

e analogamente temos $\Omega^{\tilde{W}} = \pi^{1*} \Omega^{W_2} \oplus \pi^{2*} \Omega^{W_1}$.

Assim sendo, as identidades de Bianchi $D^{W_1} \Omega^{W_1} = 0$ e $D^{\tilde{W}} \Omega^{\tilde{W}} = 0$; segundo (b) são equivalentes e correspondem a $D^{W_1} \Omega^{W_1} = D^{W_2} \Omega^{W_2} = 0$; que são identidades de Bianchi associadas a W_1 e W_2 em $\pi : P \longrightarrow M$. Voltando a Eletrodinâmica, que vimos no parágrafo anterior, teríamos que $d(\Omega_1)_u = 0$ e $d(\Omega_2)_u = 0$. O significado destas equações seria que o campo magnético de origem elétrica bem como o campo elétrico de origem magnética tem divergência nula; ademais que o campo magnético originado pelas cargas elétricas bem como o campo elétrico originado pelas cargas magnéticas, tem rotacional nulo no caso estático.

No que segue iremos generalizar o princípio de gauge para uma teoria de gauge com monopolos. Suporemos que temos de partida uma Lagrangeana como no parágrafo 6, $L : J(P \circ P, V) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde V é um espaço vetorial no qual existe uma representação de $G \times G$ ($G \times G \longrightarrow GL(V)$ dada por $v \longrightarrow g.v$ para $g = (g_1, g_2) \in G \times G$). Admitiremos ainda que L é $G \times G$ -invariante de forma que construamos a densidade de ação $\mathcal{L}^W(\psi) \in C^\infty(M)$ a partir de uma função de onda $\psi \in \bar{\Lambda}^0(P, V) = C(P, V)$. Teremos, como no parágrafo 6, que

$$\mathcal{L}^W(\psi)(x) = L(p, \psi(p), D^W \psi_p) \quad \text{onde}$$

$p \in P \circ P$ e $x = \pi(p) \in M$.

Ainda mais, se exigimos que $\mathcal{L}^W(\psi)$ seja estacionária com respeito a ψ obtemos as equações de Euler-Lagrange ((L1)-parágrafo 6).

Mostraremos então que se adicionamos um termo $S(W)$ apropriado

a $\mathcal{L}^W(\psi)$ obtendo a densidade de ação total $(\mathcal{L} + S)(\psi, W)$; esta densidade de ação irá gerar não apenas as equações de Euler-Lagrange mas também equações de campo não homogêneas. Ou seja, as referidas equações decorrerão se exigimos que $(\mathcal{L} + S)(\psi, W)$ seja estacionária com respeito ao par (ψ, W) . Veremos que as equações de campo não-homogêneas obtidas irão corresponder, no caso da Eletrodinâmica, às equações de Maxwell na presença de monopolos.

Definimos o termo da autoação

$$S(W) = -\frac{1}{4} \bar{h}K_{12}(F_u, F_u) \quad \text{com} \quad F^W = \Omega^W + * \bar{\Omega}^W \quad \text{e} \quad F_u = \sigma_u^* F^W \quad \text{e}$$

$\bar{h}K_{12} : \bar{\Lambda}^k(P \circ P, \hat{G} \oplus \hat{G}) \times \bar{\Lambda}^k(P \circ P, \hat{G} \oplus \hat{G}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a métrica para formas horizontais com valores em $\hat{G} \oplus \hat{G}$ (com representação adjunta). Notamos que K_{12} é a métrica de Killing-Cartan em $\hat{G} \oplus \hat{G}$, e que $K_{12}(A_1 \oplus A_2, B_1 \oplus B_2) = K(A_1, B_1) + K(A_2, B_2)$, onde K é a métrica de Killing-Cartan em \hat{G} .

Notamos que sendo F equivariante, $S(W)$ é gauge invariante cumprindo as condições usualmente exigidas (vide [22]) para a construção do termo de autoação. Observamos também que se houvésemos construído o termo de autoação da forma $-\frac{1}{2} \bar{h}K_{12}(\Omega^W, \Omega^W)$ não estaríamos levando em conta a interação entre monopolos e cargas usuais. De fato consideremos o caso da eletrodinâmica, quando $\Omega^W = \pi^1 * \Omega^W_1 \oplus \pi^2 * \Omega^W_2$, e os campos Ω^W_1 e Ω^W_2 correspondem àqueles gerados por cargas usuais e monopolos. Notemos então que

$$\bar{h}K_{12}(\Omega^W_u, \Omega^W_u) = \bar{h}K(\Omega^W_u^1, \Omega^W_u^1) + \bar{h}K(\Omega^W_u^2, \Omega^W_u^2)$$

e não são levados em conta, para o computo da ação, termos de interação entre os campos Ω^W_1 e Ω^W_2 associados às cargas usuais e aos monopolos.

Quanto ao termo de autoação escolhido temos

$$\begin{aligned}
 S(W) &= -\frac{1}{4} \bar{h}K(F_u, F_u) = \\
 &= -\frac{1}{4} \{ \bar{h}K(\Omega_u^{w_1} + * \Omega_u^{w_2}, \Omega_u^{w_1} + * \Omega_u^{w_2}) + \\
 &+ \bar{h}K(* \Omega_u^{w_1} + \Omega_u^{w_2}, * \Omega_u^{w_1} + \Omega_u^{w_2}) \} = \\
 &= -\frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_1} + * \Omega_u^{w_2}, \Omega_u^{w_1} + * \Omega_u^{w_2}) = \\
 &= -\frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_1}, \Omega_u^{w_1}) - \frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_2}, \Omega_u^{w_2}) - \bar{h}K(\Omega_u^{w_1}, * \Omega_u^{w_2})
 \end{aligned}$$

e aparece o termo de iteração.

Antes de aplicarmos o princípio variacional à ação total lembremo-nos da definição de corrente em termos de Lagrangeana

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\psi, W + t\sigma) \Big|_{t=0} = (\bar{h}K_{12})(J^W(\psi), \sigma)$$

$v\sigma \in \bar{\Lambda}^1(P \circ P, \hat{G} \oplus \hat{G})$. Neste caso $J^W(\psi) \in \bar{\Lambda}^1(P \circ P, \hat{G} \oplus \hat{G})$ e podemos escrever $J^W(\psi) = \pi^{1*} J_1 \oplus \pi^{2*} J_2$ e associaremos $J_1, J_2 \in \bar{\Lambda}^1(P, \hat{G})$ às correntes "elétrica" e "magnética" respectivamente.

Efetuada a variação temos em $t = 0$ ($\sigma = \pi^{1*} \sigma_1 \oplus \pi^{2*} \sigma_2$).

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \int_U (\mathcal{L} + S)(\psi + t\tau, W + t\sigma) \mu = \\
 &= \frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L}(\psi + t\tau, W) \mu + \frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L}(\psi, W + t\sigma) \mu + \\
 &- \frac{d}{dt} \int_U \frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_1+t\sigma_1}, \Omega_u^{w_1+t\sigma_1}) \mu - \frac{d}{dt} \int_U \frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_2+t\sigma_2}, \Omega_u^{w_2+t\sigma_2}) \mu -
 \end{aligned}$$

$$- \frac{d}{dt} \int_U \bar{h}K(\Omega_u^{w_1+t\sigma_1}, * \Omega_u^{w_2+t\sigma_2}) .$$

As primeiras quatro parcelas da expressão podem ser calculadas como no parágrafo 6, e obtemos (em $t=0$)

$$\frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L}(\psi + t\tau, w) \mu = \int_U \hat{h}(\delta^w \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D^w \psi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}, \tau) \mu$$

$$\frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L}(\psi, w + t\sigma) \mu = \int_U (\bar{h}K_{12})(J^w(\psi), \sigma) \mu$$

$$\frac{d}{dt} \int_U - \frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_1+\sigma_1}, \Omega_u^{w_2+t\sigma_1}) \mu = - \int_U \bar{h}K(\delta^w \Omega^{w_1}, \sigma_1) \mu$$

$$\frac{d}{dt} \int_U - \frac{1}{2} \bar{h}K(\Omega_u^{w_2+t\sigma_2}, \Omega_u^{w_2+t\sigma_2}) \mu = - \int_U \bar{h}K(\delta^w \Omega^{w_2}, \sigma_2) \mu .$$

Quanto ao termo restante temos ($t=0$)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \bar{h}K(\Omega^{w_1+t\sigma_1}, * \Omega^{w_2+t\sigma_2}) = \\ & = \frac{d}{dt} \bar{h}K(\Omega^{w_1+t\sigma_1}, * \Omega^{w_2}) + \frac{d}{dt} \bar{h}K(\Omega^{w_1}, * \Omega^{w_2+t\sigma_2}) . \end{aligned}$$

Lembrando do parágrafo 6 que em $t=0$

$$\frac{d}{dt} \Omega^{w+t\sigma} = D^w \sigma , \quad \text{temos}$$

$$\frac{d}{dt} \bar{h}K(\Omega^{w_1+t\sigma_1}, * \Omega^{w_2+t\sigma_2}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{h}K(D^{w_1}\sigma_1, \bar{*}\Omega^{w_2}) + \bar{h}K(\Omega^{w_1}, \bar{*}D^{w_2}\sigma_2) = \\
&= \bar{h}K(\delta^{w_1}(\bar{*}\Omega^{w_2}), \sigma_1) + \bar{h}K(\delta^{w_2}(\bar{*}\Omega^{w_1}), \sigma_2)
\end{aligned}$$

obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_U \bar{h}K(\Omega^{w_1+t\sigma_1}, \bar{*}\Omega^{w_2+t\sigma_2}) = \\
&= \int_U (\bar{h}K(\delta^{w_1}(\bar{*}\Omega^{w_2}), \sigma_1) + \bar{h}K(\delta^{w_2}(\bar{*}\Omega^{w_1}), \sigma_2)) \mu .
\end{aligned}$$

Agora somando todos os termos obtidos e usando o fato de que τ, σ_1 e σ_2 são independentes; ainda mais, que

$$\bar{h}K_{12}(J^W(\psi), \sigma) = \bar{h}K(J_1, \sigma_1) + \bar{h}K(J_2, \sigma_2) .$$

Obtemos as equações

$$\delta^w \frac{\partial L}{\partial (D^w \psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$$\delta^{w_1} \Omega^{w_1} + \delta^{w_1}(\bar{*}\Omega^{w_2}) = J_1$$

$$\delta^{w_2} \Omega^{w_2} + \delta^{w_2}(\bar{*}\Omega^{w_1}) = J_2 .$$

A primeira delas corresponde à equações de Euler-Lagrange, as outras duas podem ser reescritas como $(F = \Omega^{w_1} + \bar{*}\Omega^{w_2})$

$$\delta^{w_1} F = J_1$$

$$\delta^{w_2} (*F) = J_2 \iff D^{w_2} F = *J_2$$

e são as equações de campo não homogêneas da teoria.

Na eletrodinâmica estas equações reduzem-se a

$$\delta F = J_1$$

$$dF = *J_2$$

que são as equações de Maxwell para o campo eletromagnético total

$F = \Omega^{w_1} + * \Omega^{w_2}$ gerado por cargas elétricas e magnéticas. Empregando esta expressão para F obtemos:

$$\delta \Omega^{w_1} = J_1$$

$$\delta \Omega^{w_2} = J_2$$

visto que $d\Omega^{w_1} = d\Omega^{w_2} = 0$.

Dado que

$$\Omega^{w_1} = dW_1$$

$$\Omega^{w_2} = dW_2$$

obtemos

$$\delta dW_1 = J_1$$

$$\delta dW_2 = J_2$$

que ligam os potenciais respectivos às correntes elétrica e magnética.

10. FIBRADO DOS REFERENCIAIS ORTONORMAIS E A 1-FORMA FUNDAMENTAL

Seja M uma variedade n -dimensional com métrica g de assinatura (r,s) . Iremos definir o fibrado dos referenciais ortonormais $F(M)$ com base M . Primeiro consideramos a métrica canônica de \mathbb{R}^n com assinatura (r,s) , isto é se

$$V = (v_1, \dots, v_n) \text{ e } W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definimos o produto interno

$$\langle V, W \rangle = w_1 v_1 + \dots + w_r v_r - w_{r+1} v_{r+1} \dots - w_{r+s} v_{r+s}.$$

Empregando a notação de matriz coluna para os vetores de \mathbb{R}^n , escrevemos $\langle v, w \rangle = v^T \eta w$, onde $\eta = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ vezes}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s \text{ vezes}})$.

Definimos o grupo ortogonal $O(r,s)$ como sendo o grupo dos elementos $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ que mantêm invariante o produto interno definido a pouco, isto é $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$. Com o uso da notação matricial vemos que $A \in O(r,s) \iff A^T \eta A = \eta$. Afim de determinarmos a álgebra de Lie $\hat{O}(r,s)$ do grupo $O(r,s)$; tomamos uma curva $A(t) \in O(r,s)$ com $A(0) = I$. Portanto $\langle A(t)v, A(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, diferenciando esta expressão em $t=0$ obtemos $\langle A'(0)v, w \rangle + \langle v, A'(0)w \rangle = 0$. Assim sendo qualquer elemento $B \in \hat{O}(r,s)$ deve satisfazer a relação $\langle Bv, v \rangle = -\langle v, Bw \rangle$. Em notação matricial teremos que $B^T \eta = -\eta B$.

Tendo definido os elementos do grupo $O(r,s)$ e sua álgebra de Lie $\hat{O}(r,s)$, iremos no que segue definir o fibrado dos referenciais ortonormais sobre M , $\pi : F(M) \longrightarrow M$ com grupo $O(r,s)$. Chamamos de referencial ortonormal em $x \in M$ uma aplicação isométrica

$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$, se empregamos a métrica canônica de assinatura (r,s) em \mathbb{R}^n e a métrica g_x em $T_x M$. O conjunto dos referenciais ortonormais em x é denotado por $F(M)_x$ e corresponde a uma fibra do fibrado dos referenciais ortonormais.

Definimos $F(M) = \bigcup_{x \in M} F(M)_x$ e $\pi : F(M) \longrightarrow M$ que associa

um referencial ortonormal em $x \in M$ ao próprio x . Este é um fibrado com grupo $O(r,s)$. Notamos que se $u \in F(M)_x$ e $A \in O(r,s)$ então $u \circ A \in F(M)_x$ pois $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é isometria, e a órbita de $O(r,s)$ irá cobrir todos os referenciais ortonormais sobre x , isto é $\pi^{-1}(x) = F(M)_x$ (é claro que valem para $\pi : F(M) \longrightarrow M$ (F1) e (F2), para uma prova de (F3) veja referência [19]).

Um elemento importante em $F(M)$ será a 1-forma fundamental, $\varphi \in \bar{\Lambda}^1(F(M), \mathbb{R}^n)$ horizontal e equivariante se empregamos a representação usual de $O(r,s)$ em \mathbb{R}^n ; que definimos pela expressão

$$\varphi(X_u) = u^{-1}(\pi_* X_u) \quad \text{para } X_u \in T_u(F(M)), \text{ e } u \in F(M)_x.$$

Suponhamos que temos um conjunto de campos ortonormais $E_1(x), \dots, E_n(x)$ em um aberto $U \subset M$. Podemos associá-los a uma seção local $\sigma_u : U \longrightarrow F(M)$ do fibrado dos referenciais ortonormais. Para tal definimos $\sigma_u(x)$ como sendo a isometria $u = \sigma_u(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ que associa a base canônica de \mathbb{R}^n aos campos ortonormais em x , isto é, $\sigma_u(x)(e_i) = E_i(x)$.

Neste caso podemos efetuar o "pull-back" de forma fundamental $\varphi \in \bar{\Lambda}^1(F(M), \mathbb{R})$ e obter $\bar{\varphi} = \sigma_u^* \varphi \in \Lambda^1(U, \mathbb{R}^n)$. Como $\bar{\varphi}$ assume valores em \mathbb{R}^n podemos escrevê-la como uma matriz coluna de 1-formas reais, $\bar{\varphi} = [\bar{\varphi}^j]$ com $\bar{\varphi}^j \in \Lambda^1(U, \mathbb{R})$. Observamos então que as formas $\bar{\varphi}^j$ assim definidas, são em cada $x \in M$ as formas duais

dos campos ortonormais $E_i(x)$, isto é; $\bar{\varphi}^j(E_k) = \delta_{jk}$.

Desta forma o pull-back da 1-forma fundamental φ com o uso de uma seção local de $F(M)$ gerada por um conjunto de campos ortonormais em $U \subset M$, é em cada $x \in U$, a matriz coluna das formas duais associadas a tais campos em x .

11. CONEXÃO DE LEVI-CIVITTA E GEODÉSICAS

Dada uma conexão W em $\pi : F(M) \longrightarrow M$, definimos a 2-forma de torsão $\tau = D^W \varphi \in \bar{\Lambda}^2(F(M), \mathbb{R}^n)$; isto é, a derivada covariante da 1-forma fundamental com respeito a W .

Definimos então a conexão θ de Levi-Civitta em $F(M)$ como sendo aquela conexão que tem forma de torsão nula, isto é, $D^\theta \varphi = 0$. Podemos mostrar que θ , assim definida, existe e é única. Como (vide H3) φ é horizontal $D^\theta \varphi = d\varphi + \theta \wedge \varphi = 0$, portanto

$$(MC1) \quad d\varphi = -\theta \wedge \varphi.$$

Esta é conhecida como a primeira das equações de Maurer-Cartan; caso E_1, E_2, \dots, E_n sejam campos ortonormais em um aberto $U \subset M$, associamos a estes $\sigma_u : U \longrightarrow F(M)$ como no item anterior e obtemos

$$(MC1') \quad d\bar{\varphi} = -\bar{\theta} \wedge \bar{\varphi}$$

onde $\bar{\varphi} = \sigma_u^* \varphi$, $\bar{\theta} = \sigma_u^* \theta$.

Notando que $\bar{\theta}$ assume valores em \hat{G} e é uma matriz de 1-formas reais escrevemos

$$(MC2) \quad \bar{\theta}^T \eta = -\eta \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} = (\bar{\theta}_j^i)$$

esta é a segunda das equações de Maurer-Cartan.

Seja uma curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$. Chamamos levantamento de γ para $F(M)$ pelo ponto $p \in \pi^{-1}(\gamma(a))$ a curva $u : [a, b] \longrightarrow F(M)$; tal que $u(a) = p$ e $\pi \circ u(s) = \gamma(s)$ para $s \in [a, b]$. Dizemos ainda que este levantamento é horizontal com respeito à conexão θ

de Levi-Civita se $\theta(u'(s)) = 0$. No caso de um fibrado geral $\pi : P \longrightarrow M$, podemos definir o levantamento de $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ por $p \in P$ horizontal com respeito a uma conexão W neste fibrado de forma análoga.

Pode-se mostrar que o levantamento horizontal assim definido é único para cada $p \in \pi^{-1}(\gamma(a))$. A partir do levantamento de curvas podemos também efetuar o levantamento de campos empregando as curvas integrais associadas aos mesmos.

Empregando o levantamento a $F(M)$ definido a pouco, definiremos a derivada covariante de um campo $X : s \in [a, b] \longrightarrow T_{\gamma(s)} M$ ao longo de γ por $\frac{DX}{ds} : s \in [a, b] \longrightarrow T_{\gamma(s)} M$, com

$$\frac{DX}{ds}(s) = u(s) \frac{d}{ds} [u(s)^{-1} X(s)]$$

onde $u(s)$ é o levantamento horizontal de $\gamma(s)$ para $F(M)$ (com respeito a θ) por algum $p \in \pi^{-1}(\gamma(a))$. (Mostra-se que $\frac{DX}{ds}$ independe de p).

No caso em que temos campos ortonormais E_j em $U \subset M$ com seção associada $\sigma_u : U \longrightarrow F(M)$ e $\bar{\theta} = \sigma_u^* \theta = [\bar{\theta}_j^i]$ (como no início do item) vale a relação

$$\frac{DX}{ds} = \sum_k [(x^k)'] E_k + \sum_{i,j} \bar{\theta}_i^k(E_j) X^i_{\gamma',j} E_k$$

onde $X(s) = \sum x^i(s) E_i(\gamma(s))$.

Finalmente definimos geodésica γ em M como uma curva para qual $D\gamma'/ds = 0$, ou seja

$$(G1) \quad \frac{D\gamma'}{ds} = \sum_k [(\gamma',k)'] E_k + \sum_{i,j} \bar{\theta}_i^k(E_j) \gamma'^i_{\gamma',j} E_k = 0$$

12. TEORIAS DE KALUZA-KLEIN (n+4)-DIMENSIONAIS

Seja $\pi : P \longrightarrow M$ o fibrado principal de uma teoria de gauge com grupo G . Seja então M o espaço tempo da teoria da relatividade geral com métrica g de assinatura $(1,3)$; e W a conexão em $\pi : P \longrightarrow M$ que representa o potencial associado à referida teoria de gauge.

Definimos então uma métrica h no espaço total P do fibrado por

$$(h1) \quad h(X,Y) = \pi^*g(X,Y) + K(W(X),W(Y))$$

onde $K : \hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a métrica invariante pela adjunta em G . Temos então um fibrado métrico $\pi : (P,h) \longrightarrow (M,g)$, sobre o qual mostraremos dois importantes teoremas:

TEOREMA i. Se $\gamma : [a,b] \longrightarrow (P,h)$ é uma geodésica então $W(\gamma'(s)) = \text{constante} \in \hat{G}$.

PROVA. Sejam $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots, E_{n+q}$ campos ortonormais em $\pi^{-1}(U) \in P$ de forma que E_1, \dots, E_n são levantamentos horizontais com respeito a W de campos $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$ ortonormais em $U \subset M$ e $E_{n+\alpha} = e_\alpha^*$ ($\alpha = 1, \dots, q$) são vetores gerados pelos elementos de uma base $\{e_\alpha\}$ em \hat{G} .

Visto que $\gamma : [a,b] \longrightarrow (P,h)$ é geodésica temos por (G1) que

$$(G1') \quad [(\gamma'^a)'] + \bar{\theta}(h)^a_b (E_c) \gamma'^b \gamma'^c \rfloor E_a = 0$$

onde $\bar{\theta}(h)$ é o "pull-back" da conexão $\theta(h)$ de Levi-Civita com respeito a h ; através de seção local de $F(P)$ gerada pelos campos E_1, \dots, E_q .

Aplicamos então W a (G1'), visto que $W(E_a) = 0$ para $a \leq n$ e $W(E_{n+\alpha}) = e_\alpha$ para $\alpha = 1, \dots, f$; temos

$$(G2) \quad [(\gamma^{n+\alpha})' + \bar{\theta}(h)^{n+\alpha} b(E_c) \gamma^{b, \gamma, c}] e_\alpha = 0$$

Se $\bar{\varphi}$ é o pull-back da forma fundamental como apresentado em (6), temos $\varphi^a(E_b) = \delta^a_b$, se escrevemos $W = W^\alpha e_\alpha$, temos $W^\alpha(E_{n+\beta}) = \delta^\alpha_\beta$ de forma que $\bar{\varphi}^{-n+\alpha} = W^\alpha$. Então empregamos (G2)

$$d\bar{\varphi}^{-n+\alpha} e_\alpha = dW = -\frac{1}{2} [W, W] + \Omega^W.$$

Fazemos uso das constantes de estrutura $C_{\alpha\beta}^\gamma$ dadas por $[e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$ para escrever

$$-\frac{1}{2} [W, W] = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha W^\beta \wedge W^\gamma e_\alpha = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \bar{\varphi}^{-n+\beta} \wedge \bar{\varphi}^{-n+\gamma} e_\alpha$$

e definimos as componentes da curvatura por

$$\Omega^W = \Omega^\alpha e_\alpha = \Omega_{ij}^\alpha \bar{\varphi}^i \wedge \bar{\varphi}^j e_\alpha$$

com $i, j \leq n$ pois Ω^W é horizontal, substituindo estas relações obtemos

$$d\bar{\varphi}^{-n+\alpha} = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \bar{\varphi}^{-n+\beta} \wedge \bar{\varphi}^{-n+\gamma} + \Omega_{ij}^\alpha \bar{\varphi}^i \wedge \bar{\varphi}^j$$

comparamos esta relação com a primeira das equações de Maurer-Cartan (MC1),

$$d\bar{\varphi} = -\bar{\theta}(h)^a b \wedge \bar{\varphi}^b \quad \text{e obtemos}$$

$$\bar{\theta}(h)^{n+\alpha} j = -\Omega_{ij}^\alpha \bar{\varphi}^i, \quad \bar{\theta}(h)^{n+\alpha} n+\gamma = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \bar{\varphi}^{-n+\beta}$$

Substituímos estas relações em (G2) para obter

$$\bar{\theta}(h)_j^{n+\alpha}(E_c) = -\Omega_{ij}^\alpha \bar{\varphi}^i(E_c) = -\Omega_{ij}^\alpha \delta_c^i$$

$$\bar{\theta}(h)^{n+\alpha}_{n+\gamma}(E_c) = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \bar{\varphi}^{n+\beta}(E_c) = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \delta_c^{n+\beta}$$

$$\Rightarrow [(\gamma'^{n+\alpha})' + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \gamma'^{n+\beta} \gamma'^{n+\gamma} + \Omega_{ij}^\alpha \gamma'^i \gamma'^j] e_\alpha = 0.$$

Visto que $C_{\beta\gamma}^\alpha$ e Ω_{ij}^α são antissimétricas nos índices inferiores temos

$$\begin{aligned} (\gamma'^{n+\alpha})' = 0 &\Rightarrow [W(\gamma')] = [W(\gamma'^{n+\alpha} E_{n+\alpha})] = \\ &= (\gamma'^{n+\alpha})' e_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Identificaremos a constante $W(\gamma') \in \hat{G}$ com a razão carga massa,

$$W(\gamma') = k \frac{Q}{m}$$

onde k é uma constante que depende do sistema de unidades empregado. Fazemos esta identificação por motivo que veremos mais tarde.

TEOREMA ii: Empregando a notação utilizada no teorema anterior e em sua prova, temos

$$\frac{D\gamma'}{ds} = k \frac{Q^\alpha}{m} \Omega_{\alpha j}^i \bar{\gamma}'^j \bar{E}_i$$

com $\bar{\gamma} = \pi \circ \gamma : s \in [a, b] \longrightarrow M$ representando a projeção geodésica γ .

PROVA. Primeiro obteremos algumas relações úteis. Observamos que

as formas $\bar{\omega}^i = \pi^* \omega^i$ ($i \leq n$) são duas estruturas de campo sobre a base \bar{M} escrevemos

$$d\bar{\omega}^i_M = -\bar{\theta}(g)^i_j \wedge \bar{\omega}^j_M,$$

para a conexão de

correspondente à equação de Maurer-Cartan (MC1) para a conexão Levi-Civita $\theta(g)$ associada a métrica g .

Aplicamos π^* nesta relação e temos

$$d\bar{\omega}^i = -\pi^* \bar{\theta}(g)^i_j \wedge \bar{\omega}^j \implies \bar{\theta}(h)^i_j = \bar{\theta}(g)^i_j$$

$\bar{\theta}(h)^i_{n+\alpha}$. Lembra

Ainda pretendemos obter os termos da forma $\bar{\theta}(h)^i_{n+\alpha}$ mos a prova anterior que

$$\bar{\theta}(h)^{n+\alpha}_i = -\Omega^\alpha_{ij} \bar{\omega}^j \implies \bar{\theta}(h)_{n+\alpha i} = -\Omega_{\alpha ij} \bar{\omega}^j$$

Maurer-Cartan

Empregamos então a segunda das equações de Maurer-Cartan (MC2),

$$\bar{\theta}(h)^T \eta = -\eta \bar{\theta}(h) \implies [\bar{\theta}(h)^T]^a_b \eta_{bc} = -\eta_{ab} \bar{\theta}(h)^b_c$$

$$\implies \bar{\theta}(h)^b_a \eta_{bc} = -\eta_{ab} \bar{\theta}(h)^b_c \therefore \bar{\theta}(h)_{ca} = -\bar{\theta}(h)_{ac}$$

$$\implies \bar{\theta}(h)_{in+\alpha} = +\bar{\theta}(h)_{n+\alpha i} = -\Omega_{\alpha ij} \bar{\omega}^j \therefore \bar{\theta}^i_{n+\alpha} = -\Omega^\alpha_{ij} \bar{\omega}^j$$

Aplicamos agora π_* em (G1') e obtemos

$$[(\bar{\gamma}^i)^a + \bar{\theta}(h)^i_b (E_c)^b \gamma^c] \bar{E}_i = 0 \quad (G3)$$

pois $\pi_*(E_{n+\alpha}) = 0$, $\pi_*(E_i) = \bar{E}_i$ e $\bar{\gamma}^i = \gamma^i$.

Com o uso das relações obtidas há pouco temos

$$\bar{\theta}(h)_{j}^{i}(E_c) = \pi^* \bar{\theta}(g)_{j}^{i}(E_c) = \bar{\theta}(g)_{j}^{i}(\bar{E}_k) \delta_c^k$$

$$\bar{\theta}(h)_{n+\alpha}^i(E_c) = -\Omega_{\alpha}^i \bar{\varphi}^j(E_c) = -\Omega_{\alpha}^i \delta_c^j$$

substituindo em (G3) obtemos

$$[(\bar{\gamma}'^i)'] + \bar{\theta}(g)_{j}^{i}(\bar{E}_k) \bar{\gamma}'^j \bar{\gamma}'^k - \Omega_{\alpha}^i \bar{\gamma}'^{n+\alpha} \bar{\gamma}'^j \bar{E}_i] = 0$$

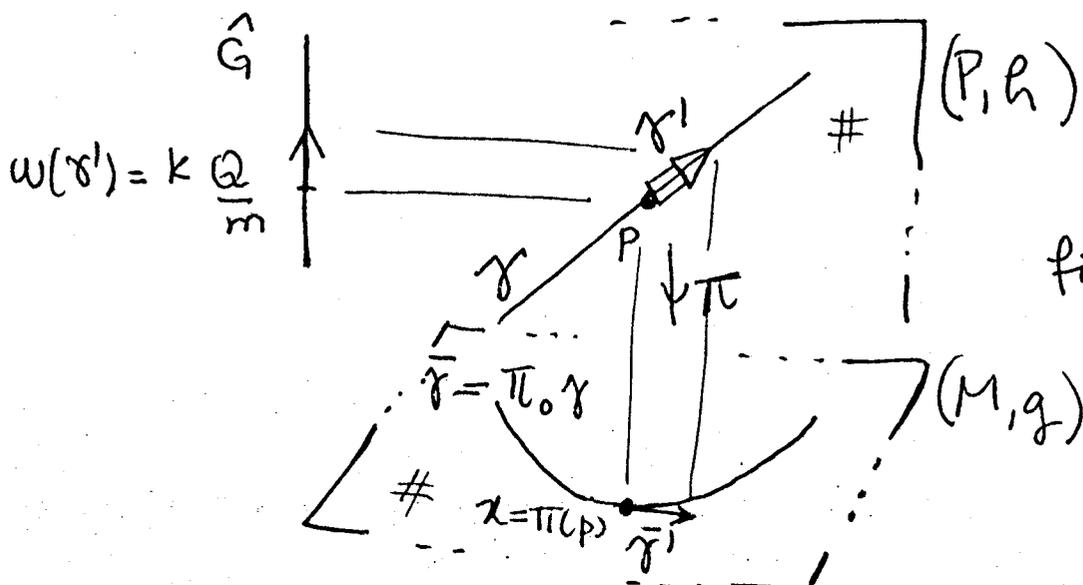
Notamos, então que

$$\frac{D\bar{\gamma}'^i}{ds} = [(\bar{\gamma}'^i)'] + \bar{\theta}(g)_{j}^{i}(\bar{E}_k) \bar{\gamma}'^j \bar{\gamma}'^k \bar{E}_i$$

e que $\bar{\gamma}'^{n+\alpha} = Q^{\alpha}/m$, levando-nos ao resultado final:

$$\frac{D\bar{\gamma}'^i}{ds} = \frac{k}{m} Q^{\alpha} \Omega_{\alpha}^i \bar{\gamma}'^j \bar{E}_i$$

Interpretamos os teoremas i e ii da seguinte forma: uma partícula de carga Q percorre em M a curva forçada que é a projeção de uma geodésica em P ; geodésica esta caracterizada pela relação $W(\gamma') = kQ/m$ (vide figura 9).



13. O GRUPO DE LORENTZ E A ORIENTABILIDADE DO ESPAÇO TEMPO

O grupo de Lorentz é o grupo das isometrias lineares de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 quando este espaço é dotado da métrica canônica com assinatura (1,3); se empregamos a notação do parágrafo 10, devemos denotar tal grupo por $O(1,3)$.

Se utilizamos a notação de vetores coluna para os elementos de \mathbb{R}^4 e a notação matricial para uma transformação de Lorentz $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, esta deve satisfazer a relação $L^T \eta L = \eta$ onde $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (como vimos no parágrafo 10).

Pode-se mostrar (vide [23]) que o grupo de Lorentz é composto por quatro componentes conexas,

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{L \in O(1,3) \mid \det L = +1, L_{00} \geq 1\}$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \{L \in O(1,3) \mid \det L = -1, L_{00} \geq 1\}$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \{L \in O(1,3) \mid \det L = 1, L_{00} \leq -1\}$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \{L \in O(1,3) \mid \det L = -1, L_{00} \leq -1\}$$

das quais apenas \mathcal{L}_+^\uparrow é um subgrupo de $O(1,3) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$ e valem as relações $\mathcal{L}_-^\uparrow = \eta \mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow = -\mathbb{1} \mathcal{L}_+^\uparrow$ e $\mathcal{L}_-^\downarrow = -\eta \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Os elementos de \mathcal{L}_+^\uparrow , \mathcal{L}_-^\uparrow , \mathcal{L}_+^\downarrow e \mathcal{L}_-^\downarrow são respectivamente chamados de transformações de Lorentz próprias ortócronas, impróprias ortócronas, próprias antícronas e impróprias antícronas. Como o grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é isomorfo a $\{1, -1, \eta, -\eta\}$ com a multiplicação (vide [23]) temos $O(1,3) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Pode-se mostrar (vide [23]) que o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ das matrizes

complexas 2×2 com determinante 1 é o recobrimento duplo e universal (pois $SL(2, \mathbb{C})$ é conexo) da componente \mathcal{L}_+^\uparrow de $O(1,3)$. Afim de exibir este recobrimento notamos que o conjunto das matrizes Hermitianas 2×2 , $H(2, \mathbb{C})$, é isomorfo a \mathbb{R}^4 (com respeito a soma nos dois conjuntos).

De fato uma matriz Hermitiana

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

pode ser escrita como $\tilde{x} = x^0 \sigma_0 + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 = x^\mu \sigma_\mu$, onde

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é a identidade e}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{são as}$$

matrizes de Pauli. Assim existe um isomorfismo natural entre $H(2, \mathbb{C})$ e \mathbb{R}^4 dado por

$$x = x^\mu e_\mu \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow \tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu \in H(2, \mathbb{C})$$

onde $\{e_\mu\}$ é a base canônica em \mathbb{R}^4 . Outro isomorfismo que podemos construir é dado por

$$x = x^\mu e_\mu \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow \tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu \in H(2, \mathbb{C}).$$

Observa-se que

$$\det \underline{x} = \det \tilde{x} = \langle x, x \rangle \quad \text{e} \quad \underline{x}\tilde{x} = \tilde{x}x = \langle x, x \rangle I$$

onde \langle , \rangle é o produto interno associado à métrica canônica de assinatura (1,3) em \mathbb{R}^4 , com a notação matricial $\langle x, y \rangle = x^T \eta y$ para $x, y \in \mathbb{R}^4$.

Voltamos ao referido recobrimento $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$, que é dado (vide [23]) por $A \in SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda(A) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, de forma que

$$\tilde{y} = A\tilde{x}A^+ \quad \text{para} \quad y = \Lambda(A)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$$

onde A^+ é o conjugado Hermitiano de A e fizemos uso da ação $\tilde{x} \longrightarrow A\tilde{x}A^+$ de $SL(2, \mathbb{C})$ em $H(2, \mathbb{C})$.

Pode-se mostrar (vide [23]) que existe uma "fórmula de inversão" para tal recobrimento dada por

$$A = \pm \frac{L_{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu}{[(L_{\mu\nu} L_{\alpha\beta} \sigma^\mu \sigma^\nu \sigma^\alpha \sigma^\beta) / \mathbb{1}]^{1/2}}$$

para $L = [L_{\mu\nu}] = \Lambda(A)$ (reparamos que $L_{\mu\nu} L_{\alpha\beta} \sigma^\mu \sigma^\nu \sigma^\alpha \sigma^\beta$ é proporcional à identidade através de um fator positivo (vide [23]) - o qual denotamos por

$$(L_{\mu\beta} L_{\alpha\beta} \sigma^\mu \sigma^\nu \sigma^\alpha \sigma^\beta) / \mathbb{1}.$$

Observamos então que com o emprego desta fórmula podemos construir uma aplicação sobrejetora

$$K : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup -\mathbb{1}\mathcal{L}_+^\uparrow \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$$

dada por $K(\pm L) = \pm A$ para $\pm L \in \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$. Notamos que K é um

isomorfismo a menos de um sinal. De fato se

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \text{ e, } A_1 = K(L_1), \quad A_2 = K(L_2) \in SL(2, \mathbb{C}),$$

temos $L_1 = \pm \Lambda(A_1)$, $L_2 = \pm \Lambda(A_2)$ e portanto $L_1 L_2 = \pm \Lambda(A_1) \Lambda(A_2) = \pm \Lambda(A_1 A_2)$ (onde empregamos na última passagem que Λ é um homomorfismo).

Podemos agora construir o seguinte homomorfismo sobrejetor

$$M = \Lambda \circ K : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$$

que tem núcleo isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Notamos que M é um recobrimento duplo de \mathcal{L}_+^\uparrow , mas não é universal (pois $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ não é conexo).

No parágrafo seguinte apresentamos a descrição usual da função de Dirac $\psi \in C(P, V)$ onde $\pi : P \longrightarrow M$ é um fibrado principal com grupo $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o espaço tempo, $V = \mathbb{C}^4$, e consideramos a representação

$$\rho : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4) \text{ dada por}$$

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^+)^{-1} \end{bmatrix} \text{ para } A \in SL(2, \mathbb{C});$$

com respeito à qual ψ será equivariante, $\psi(pA) = \rho(A^{-1})\psi(p)$.

Notamos que ρ é a soma direta de duas representações

$$D^{(0, 1/2)} : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2) \text{ dada por } D^{(0, 1/2)}(A) = A \text{ e}$$

$$D^{(1/2, 0)} : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2) \text{ dada por } D^{(1/2, 0)}(A) = (A^+)^{-1}.$$

Com o emprego do isomorfismo a menos de sinal $K : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$, construímos a representação a menos de sinal para

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ em \mathbb{E}^4 dada por

$$\sigma = \rho \circ K : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \longrightarrow GL(\mathbb{E}^4) .$$

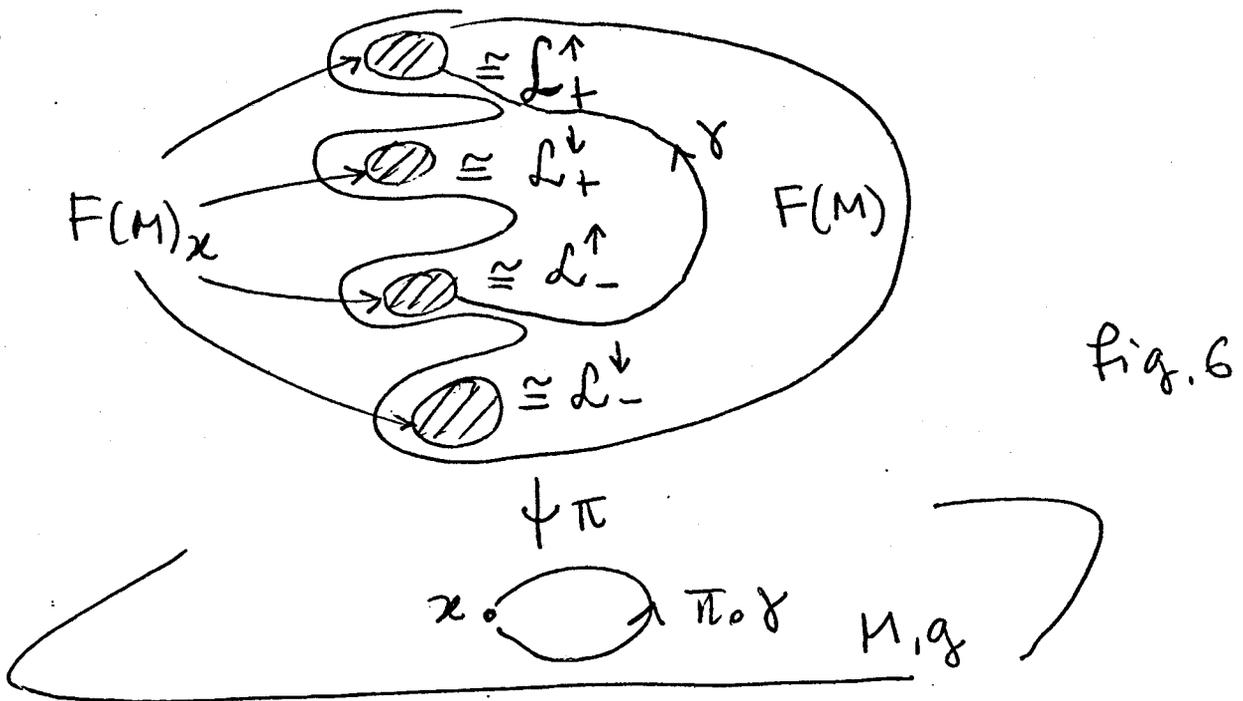
No parágrafo 15 iremos descrever a função de Dirac de uma forma não usual, empregando $\chi \in C(Q, V)$ onde $\pi : Q \longrightarrow M$ será um fibrado principal semelhante àquele referido há pouco, com base igual ao espaço tempo; entretanto com grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$. Teremos então $V = \mathbb{E}^4$ e χ será equivariante com respeito à representação σ , isto é

$$\chi(pL) = \sigma(L^{-1})\chi(p) \quad \text{para } L \in \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow .$$

No parágrafo 10 apresentamos o fibrado $\pi : F(M) \longrightarrow M$, dos referenciais ortonormais associados a uma variedade M com métrica g . Caso M seja o espaço temos a fibra $F(M)_x$, composta dos referenciais ortonormais sobre $x \in M$, é difeomorfa ao grupo associado ao referido fibrado; que é o grupo de Lorentz $O(1,3)$.

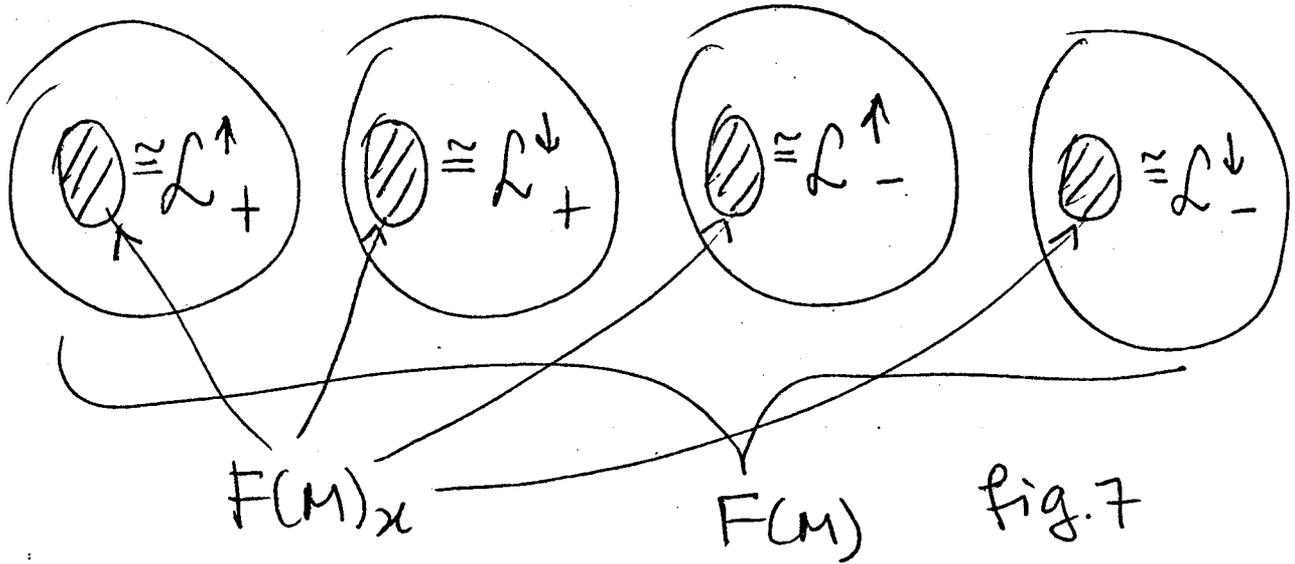
Desta forma $F(M)_x$ é composta por quatro componentes conexas correspondentes às quatro componentes de $O(1,3)$. Duas dessas quatro componentes não podem ser unidas portanto, por uma curva pertencente a $F(M)_x$. Resta no entanto a possibilidade de que tais componentes sejam unidas por uma curva pertencente a $F(M)$.

(Vide figura 6)



Observamos no entanto que se admitimos a união das componentes L_+^{\uparrow} e L_-^{\uparrow} através de tal curva γ , um viajante que percorresse a projeção $\pi \circ \gamma$ (vide figura 6) desta curva em M retornaria ao mesmo ponto do espaço tempo onde encontraria um mundo correspondente à imagem especular daquele que partiu (o espaço tempo seria então algo semelhante a uma faixa de Moebius). Analogamente se unisse as componentes correspondentes a L_+^{\uparrow} e L_-^{\downarrow} o viajante reencontraria o mundo de partida, mas com o tempo fluindo no sentido inverso.

Para evitar tais situações costuma-se postular que tais curvas γ não existem (vide [19]), o que corresponde à suposição de que $F(M)$ possui quatro componentes conexas (vide figura 7)



Diz-se então que M é espaço-tempo orientável, assumiremos aqui esta hipótese. Então podemos restringir o fibrado dos referenciais ortonormais a $\pi : F_0(M) \longrightarrow M$ com grupo \mathcal{L}_+^\uparrow ; onde $F_0(M)$ é uma das componentes de $F(M)$.

14. ESTRUTURA SPINORIAL E A EQUAÇÃO DE DIRAC

A geometrização da equação de Dirac em termos de fibrado principal é feita usualmente com o uso de uma estrutura spinorial (figura 8)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}_2 \dots SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{L}_+^\uparrow \\
 \vdots & & \\
 \mathbb{Z}_2 \dots S(M) & \xrightarrow{\lambda} & F_0(M) \\
 \downarrow \pi_s & & \downarrow \pi_f \\
 M & & M
 \end{array}$$

Figura 8

que consiste de um fibrado principal $\pi_s : S(M) \longrightarrow M$ com grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e uma aplicação $\lambda : S(M) \longrightarrow F_0(M)$ (definido no parágrafo anterior) de forma que $\Pi(\lambda(p)) = \pi_s(p)$, $\forall p \in S(M)$ e $\lambda(pA) = \lambda(p)\Lambda(A)$ onde $p \in S(M)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ é o recobrimento duplo que apresentamos no parágrafo anterior.

No caso em que $\pi : F_0(M) \longrightarrow M$ é trivial tal estrutura existe e caso M não seja compacto vale a afirmação inversa (para uma discussão detalhada a respeito da existência de tais estruturas vide [24]). Em nosso caso M será o espaço tempo de Minkowski de forma que (vide [24]) $\pi : F_0(M) \longrightarrow M$ é trivial, existindo a referida estrutura "spinorial".

Usualmente a função de onda de Dirac está associada a um elemento $\psi \in C(S(M), \mathbb{C}^4)$ equivariante com respeito a $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$ apresentada no parágrafo anterior. Para cada escolha de gauge $\sigma_u : U \subset M \longrightarrow S(M)$ identificamos a função de onda de Dirac com o pull-back $\psi_u = \sigma_u^* \psi$ do referido elemento.

Pode-se mostrar que se θ é a conexão de Levi-Civita restrita a $\pi : F_0(M) \longrightarrow M$, então $\tilde{\theta} = \Lambda^{-1}_* \circ \lambda^* \theta$ é uma conexão em $\pi_S : S(M) \longrightarrow M$ (reparamos que $\Lambda^{-1}_* : \hat{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}_+^1$ é o isomorfismo de álgebras de Lie dado pelo diferencial recobrimento duplo $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^1$ e λ^* é o "pull-back" associado à aplicação $\lambda : S(M) \longrightarrow F_0(M)$). Ademais, seja $\varphi \equiv \varphi|_{F_0(M)}$ uma 1-forma fundamental restrita a $\pi : F_0(M) \longrightarrow M$. Definimos então $\tilde{\varphi} = \lambda^* \varphi \in \Lambda^1(S(M), \mathbb{R}^4)$, pode-se mostrar que $R_g^* \tilde{\varphi} = \Lambda(g)^{-1} \cdot \tilde{\varphi}$ e que $\tilde{\varphi}$ anula-se em vetores verticais, ou seja, $\tilde{\varphi} \in \bar{\Lambda}^1(S(M), \mathbb{R}^4)$ onde empregamos a representação $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{R}^4)$ dada por $g.v = \Lambda(g)v$ (para a prova das afirmações deste parágrafo, vide [19]).

Pretendemos obter a equação de Dirac para ψ a partir de uma Lagrangeana no fibrado $\pi_S : S(M) \longrightarrow M$. Antes de apresentá-la convém definir mais alguns elementos.

Definimos a aplicação linear

$$\gamma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4) \text{ por } \gamma(x) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{x} \\ \tilde{\bar{x}} & 0 \end{bmatrix} \text{ onde}$$

empregamos os isomorfismos $\tilde{\bar{x}}, \tilde{x} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow H(2, \mathbb{C})$ definidos no parágrafo anterior, e definimos as matrizes de Dirac por $\gamma_\mu = \gamma(e_\mu)$, onde $\{e_\mu\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^4 . Para tal aplicação valem as propriedades

$$\gamma(x)\gamma(y) + \gamma(y)\gamma(x) = 2\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle I \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^4$$

e

$$\gamma(\Lambda(A)x) = \rho(A)\gamma(x)\rho(A)^{-1}.$$

Também nos será útil a aplicação linear

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \hat{GL}(\mathbb{C}^4) \text{ dada por}$$

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{x} \\ \tilde{x} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para a qual}$$

valem as propriedades $\tilde{\gamma}(x)\tilde{\gamma}(y) + \tilde{\gamma}(y)\tilde{\gamma}(x) = 2\langle x, y \rangle I$ e $\tilde{\gamma}(\Lambda(A)x) = \rho(A^{-1})\tilde{\gamma}(x)\rho(A)$.

Definimos em \mathbb{C}^4 a forma bilinear $H : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ por $H((z_1, z_2, z_3, z_4), (w_1, w_2, w_3, w_4)) = z_1\bar{w}_3 + z_3\bar{w}_4 + z_3\bar{w}_1 + z_4\bar{w}_2$, em notação matricial $H(z, w) = z^T \gamma_0 \bar{w}$ onde $\gamma_0 = \gamma(e_0)$. Definimos então a métrica em \mathbb{C}^4 , $\hat{h} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\hat{h}(z, w) = 1/2(H(z, w) + H(w, z))$. Tanto H quando \hat{h} são invariantes sob a ação de $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$, ademais $\hat{h}(\gamma(x)v, w) = h(v, \gamma(x)w)$.

Neste ponto estamos preparados para definir a Lagrangeana de Dirac,

$$L : J(S(M), \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ por}$$

$$L(p, v, \sigma) = \hat{h}(i(\gamma \dot{\times} \sigma), v) - m\hat{h}(v, v)$$

para $p \in S(M)$, $v \in \mathbb{C}^4$ e para a aplicação linear $\sigma : T_p S(M) \longrightarrow \mathbb{C}^4$, onde

$$\gamma \dot{\times} \sigma \equiv \sum_{ij} \eta_{ij} (\tilde{\varphi}(E_i)) (\sigma(E_j))$$

sendo E_0, E_1, E_2, E_3 campos ortonormais em $S(M)$, horizontais com respeito a $\tilde{\theta}$, tais que $\tilde{\varphi}(E_j) = e_j$ onde $\{e_j\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^4 .

Notamos que $\gamma \dot{\times} \sigma$ está bem definida pois se empregássemos campos E'_0, E'_1, E'_2, E'_3 com a propriedade acima deveríamos ter

$E_j^! = \sum_i \Lambda_{ji} E_i$ para alguma transformação de Lorentz $\Lambda = [\Lambda_{ji}]$.

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \eta_{ij} \gamma(\tilde{\varphi}(E_i^!))(\sigma(E_j^!)) &= \sum_{ij} \sum_{kl} \eta_{ij} \Lambda_{ik} \Lambda_{jl} (\tilde{\varphi}(E_k))(\sigma(E_l)) = \\ &= \sum_{kl} \eta_{kl} \gamma(\tilde{\varphi}(E_k))(\sigma(E_l)). \end{aligned}$$

Ademais $L : J(S(M), \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ como definida acima é uma Lagrangeana $SL(2, \mathbb{C})$ -invariante para a qual as equações de Euler-Lagrange correspondem, em cada escolha de gauge, à equação de Dirac (vide [19]). A ação induzida na base por L tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\tilde{\theta}}(\psi)(x) &= L(p, \psi(p), D^{\tilde{\theta}}\psi_p) = \\ &= \hat{h}(i\gamma \dot{x} \cdot D^{\tilde{\theta}}\psi_p, \psi(p)) - m\hat{h}(\psi(p), \psi(p)) \end{aligned}$$

para $x = \pi_S(p)$.

15. O ISOMORFISMO MAXWELL-DIRAC, UMA ANTIGA TENTATIVA.

Por muitas vezes (vide [14-16]) as equações de Maxwell têm sido escritas de forma semelhante à equação de Dirac. Recentemente propôs-se que as componentes $\Omega_{\mu\nu}$ do campo eletromagnético fossem em certos casos identificadas com a parte independente do tempo da função de Dirac (vide [16]).

Notemos que as componentes do campo eletromagnético $\Omega^W \in \bar{\Lambda}^2(P, \hat{G})$ são um conjunto de aplicações $\Omega_{\mu\nu} : F_0(M) \longrightarrow \hat{G}$ dadas por $u \longrightarrow \sigma^* \Omega^W(ue_\mu, ue_\nu)$ onde $\sigma : U \longrightarrow P$ é uma seção local e $\{e_\mu\}$ a base canônica de \mathbb{R}^4 (no que segue omitiremos σ , visto que o campo eletromagnético é gauge-invariante). Tais aplicações são equivariantes com respeito a \mathcal{L}_+^\uparrow , no sentido de que $\Omega_{\mu\nu}(uL) = L^\alpha_\mu L^\beta_\nu \Omega_{\alpha\beta}(u)$ para $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Por vezes houveram tentativas (vide [14-16]) de identificar com a função de onda o campo $\varphi : F_0(M) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$, dado por

$$\varphi(u) = \sum_{\mu, \nu} -i\Omega^W(ue_\mu, ue_\nu) \tilde{\gamma}(e_\mu) \tilde{\gamma}(e_\nu).$$

Tais tentativas levaram a problemas, apesar de alguns resultados positivos (vide [17]) pois além de φ e $\psi \in C(S(M), \mathbb{C}^4)$ estarem definidas em domínios distintos; têm propriedades de equivariância bem diferentes.

Notamos que para $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$,

$$\begin{aligned} \varphi(uL) &= \sum_{\mu, \nu} -i\Omega^W(uLe_\mu, uLe_\nu) \tilde{\gamma}(e_\mu) \tilde{\gamma}(e_\nu) = \\ &= \sum_{\mu, \nu} \sum_{\alpha, \beta} -iL^\alpha_\mu L^\beta_\nu \Omega^W(ue_\alpha, ue_\beta) \tilde{\gamma}(e_\mu) \tilde{\gamma}(e_\beta) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha, \beta} -i\Omega^W(ue_\alpha, ue_\beta) \tilde{\gamma}(Le_\alpha) \tilde{\gamma}(Le_\beta) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta} -i\Omega^W(ue_\alpha, ue_\beta) \rho(A^{-1}) \tilde{\gamma}(e_\alpha) \rho(A) \rho(A^{-1}) \tilde{\gamma}(e_\beta) \rho(A) = \\
&= \rho(A^{-1}) \varphi(u) \rho(A)
\end{aligned}$$

para algum $A \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda(A) = L$.

E vemos que φ transforma-se por similaridade, quando ψ transforma-se de maneira direta, $\psi(uA) = \rho(A^{-1})\psi(u)$. Além disso é claro que os domínios são diferentes, mas antes de preocupar-se com isto, vamos definir outra função $\tilde{\varphi} : F_O(M) \longrightarrow \mathbb{C}^4$, com uma regra de transformação direta.

Para tal lembremos que $\pi : F_O(M) \longrightarrow M$ é trivial, assim podemos escolher para cada $x \in M$, $u \in \pi^{-1}(x) \subset F(M)$. Definimos então $\varphi_O : F_O(M) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$ por

$$\varphi_O(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

quando u é um dos elementos escolhidos e

$$\varphi_O(uL) = \rho \circ k(L^{-1}) \varphi_O(u) \quad \text{para } L \in \mathcal{L}_+^\uparrow \subset \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow,$$

onde $k : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ é o isomorfismo a menos de sinal no parágrafo 13.

Notemos então que se definimos $\tilde{\varphi} : F_O(M) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$ através do produto matricial

$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u)\varphi_0(u)$ teremos daí que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(uL) &= \varphi(uL)\varphi_0(uL) = \rho(A^{-1})\varphi(u)\rho(A)\rho(A^{-1})\varphi_0(u) = \\ &= \rho(A^{-1})\tilde{\varphi}(u) \quad \text{para } A = k(L) .\end{aligned}$$

Notemos que se u é um dos "elementos escolhidos" $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u)\varphi_0(u)$ tem apenas os elementos da primeira coluna não nulos; quando não é, isto também ocorre, pois

$$\tilde{\varphi}(uL) = \rho(A^{-1})\tilde{\varphi}(u) = (\rho(A^{-1})\varphi(u))\varphi_0(u)$$

assim escrevemos $\tilde{\varphi} : F_0(M) \longrightarrow \mathbb{C}^4$ onde subentende-se que pegamos a primeira coluna da aplicação $\tilde{\varphi} : F_0(M) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$.

Resta-nos ainda o problema de que o grupo que age sobre $\tilde{\varphi}$ é \mathcal{L}_+^\uparrow e não $SL(2, \mathbb{C})$, que age sobre a função de onda de Dirac.

Para resolver tal problema trocamos a estrutura spinorial usual pela seguinte estrutura

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 \dots \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow & \xrightarrow{M} & \mathcal{L}_+^\uparrow \\ \mathbb{Z}_2 \dots \mathbb{Z}_2 \times F_0(M) & \xrightarrow{\mu} & F_0(M) \\ \downarrow \pi_m & & \downarrow \pi_f \\ M & & M \end{array}$$

Figura 9

onde $M = \Lambda \circ k : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ é o homomorfismo apresentado no gráfico 13 que leva ϵL em L ($\epsilon = \pm 1$, $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$) e

$\mu : \mathbb{Z}_2 \times F_0(M) \longrightarrow F_0(M)$ é definido de maneira natural, por $\mu(\tilde{u}) = \mu(\varepsilon, u) = u$ para $\tilde{u} = (\varepsilon, u) \in \mathbb{Z}_2 \times F_0(M)$ e $u \in F_0(M)$. A ação de $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ em $\mathbb{Z}_2 \times F_0(M)$ é definida através de

$$(\varepsilon, u)\varepsilon'L = (\varepsilon\varepsilon', uL)$$

de forma que $\mu(\tilde{u}\tilde{L}) = \mu(\tilde{u})M(\tilde{L})$ para $\tilde{u} \in \mathbb{Z}_2 \times F_0(M)$ e $\tilde{L} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$.

Observamos que a estrutura apresentada difere da estrutura spinorial usual apenas pelo fato de que todas as fibrações do diagrama são triviais. Podemos agora definir

$$\chi : \mathbb{Z}_2 \times F_0(M) \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

por

$$\chi(\varepsilon, u) = \varepsilon\tilde{\varphi}(u) \quad , \quad \text{notamos}$$

então que $\chi(\tilde{u}\tilde{L}) = \rho(A^{-1})\chi(\tilde{u})$ onde

$$\tilde{L} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \quad \text{e} \quad A = k(\tilde{L}) \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad , \quad \text{ou seja}$$

$$\chi(\tilde{u}\tilde{L}) = \sigma(\tilde{L}^{-1})\chi(\tilde{u})$$

onde

$$\sigma = \rho \circ k : \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^4)$$

é a representação a menos de sinal apresentamos no parágrafo 13.

Propomos o emprego de χ como função de onda quântica ao invés da função usual $\psi : S(M) \longrightarrow \mathbb{C}^4$ (com a propriedade $\psi(uA) = \rho(A^{-1})\psi(u)$). A vantagem é que tal função pode ser "identificada"

com o campo eletromagnético clássico como fizemos acima. Ademais pode-se mostrar (vide [16]) que $\tilde{\varphi}$ como definida há pouco obedece à equação de Dirac com massa nula (desde que Ω^W obedeça às equações de Maxwell sem fontes). Notamos que sendo a referida equação homogênea, também é obedecida por ψ .

Finalmente notamos que o emprego do grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ ao invés do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ dá mais significado físico à teoria pois o primeiro é usualmente ligado à existência de antipartículas (vide [18]) que aparecem naturalmente na teoria de Dirac.

16. REFERÊNCIAS

- [1] M.A.F. ROSA e W.A. RODRIGUES Jr., Lett. Il Nuovo Cimento, vol. 44, N. 7, pág. 437 (1985).
- [2] M.A.F. ROSA e W.A. RODRIGUES Jr., Rev. Bras. de Física, vol. 16, N. 4, pág. 535 (1986).
- [3] M.A.F. ROSA, E. RECAMI and W.A. RODRIGUES Jr., Phys. Letters B137 (1986); Erratum B188, 511 (1987) (também apresentado no VIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 1987, por um dos autores).
- [4] A. MAIA, E. RECAMI, W.A. RODRIGUES Jr. and M.A.F. ROSA, Relatório Técnico 14/87, IMECC-UNICAMP.
- [5] W.A. RODRIGUES Jr., E. RECAMI, M.A.F. ROSA and A. MAIA Jr., Relatório Técnico 31/87, IMECC-UNICAMP.
- [6] DIRAC, P.A.M., Proc. R. Soc. A133, 60 (1931).
- [7] 't HOOFT, G., Nuclear Physics, B79, 276 (1974).
- [8] CABIBBO, N. and FERRAI, E., Il Nuovo Cimento 23, Nº 6, 1147 (1962).
- [9] MIGNANI, R. and RECAMI, E., Il Nuovo Cimento, vol. 30A, Nº 4, (1975).

- [10] A.O. BARUT, Electromagnetic Fields on Manifolds: Betti Numbers, Monopoles and Strings, Minimal Coupling - Lecture Notes in Mathematics, 676, Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II (Springer Verlag, 1977).
- [11] ROHRLICH, referência perdida enviada em carta pessoal.
- [12] A. MAIA Jr., Tese de Doutorado, IFGW - UNICAMP, 1987.
- [13] A. MAIA Jr., and W.A. RODRIGUES Jr., Relatório Técnico 32/87, IMECC-UNICAMP.
- [14] J.R. OPPENHEIMER, Phys. Rev. 38, 725 (1931).
- [15] E. MAJORANA, Scientific manuscripts, unpublished, deposited at the «Domus Galilacana» , Pisa, quaderno 2, p. 101/1 (vide ref. recente a este trabalho por R. Mignani, E. Recami e M. Baldo; Lett. Al Nuovo Cimento, 11, N. 12, 596 (1974)).
- [16] H. SALLHOFER, Elementary Derivation of the Dirac Equation X, Z. Naturforsch, 41a, 486 (1986).
- [17] H. SALLHOFER, Maxwell-Dirac-Isomorphism, XII, Z. Naturforsch, 41a, 1335 (1986).
- [18] E. RECAMI and W.A. RODRIGUES Jr., Foundations of Physics 12, 709 (1982).

- [19] BLEECKER, D.D., Gauge Theory and Variational Principles, Addison-Wesley Reading, Mass. (1981).
- [20] KOBAYASKI, S. and K. NOMIZU , Foundations of Differential Geometry (vols. 1 and 2), Wiley, N.Y. (1963 e 1969).
- [21] C. VON WESTENHOLZ, Differential Forms in Mathematical Physics, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [22] L. O'RAIFEARTAIGH, Rep. Prog. Phys., 42, 160 (1979)
- [23] M.A.F. ROSA, Álgebra Linear do Espaço de Minkowski, monografia.
- [24] V.L. FIGUEIREDO, Tese de doutoramento, IMECC-UNICAMP, 1987.