CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO ESPALHAMENTO BRILLOUIN

(Trabalho apresentado para a obtenção do título de Dr. em Física pela Universidade Estadual de Campinas).

Orientador: Dr. Sérgio Pereira da Silva Pôrto

Autor . Zoraide Primerano Arguello

Julho

1970

Êste trabalho, embora bastante simples, foi o melhor que pude fazer. Por isso eu o dedico a

Meus Pais .

Agradecimentos

Não poderíamos deixar de apresentar os nossos mais sinceros agradecimentos às seguintes pessoas:

Prof. Dr. Manlio Napoli, Livre Docente da cadeira de Ortopedia da U.S.P., a cuja extraordinária abilidade profissional devemos a restituição da condição física indispensável para continuarmos vivendo a vida que escolhemos.

Prof. Dr. Zeferino Vaz, Magnífico Reitor da Universidade Estadual de Campinas por haver-nos concedido seu apôio e confiança na época que mais dêles necessitávamos.

Prof. Dr. Marcello Damy de Souza Santos, Coordenador do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas, bem como a todos os demais colegas do referido Instituto, por haverem colaborado conosco ocupando nosso lugar durante todo o tempo em que nos ausentamos do país afim de realizarmos êste trabalho.

Prof. Dr. Roberto Luzzi, por várias e elucidativas discussões.

À Sandra Ferreira e Maria Helena Tomazi Milani pelo cuidado com que datilografaram êste trabalho.

Em especial queremos ainda agradecer :

Ao Prof. Dr. Sérgio Porto, por haver-nos dado a honra de orientar-nos nesta tese, por haver-nos emprestado tão generosamente tanto seu tempo como seus conhecimentos, e por haver-nos fornecido as condições materiais indispensáveis à realização dêste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos Alfredo Arguello, por todo estímulo e inestimável colaboração que nos tem ofertado não sòmente durante a execução dêste trabalho como desde o início de nossa carreira.

A todos o nosso sincero Muito Obrigado.

ÍNDICE

Resumo

Nossa contribuição ao estudo do efeito Brillouin pode ser resumida como segue:

1)- Determinação teórica das linhas que compoem o espectro da luz espalhada a partir da expressão da polarização induzida em função do campo elétrico da radiação incidente.

2)- Comparação entre o efeito Raman e Brillouin que evidencia a razão pela qual as regras de seleção obtidas a partir de teoria de grupos para o efeito Raman não se aplicam ao efeito Brillouin.

3)- Determinação das regras de seleção para o efeito Brillouin devido a fonons de polarização pura em cristais não piezoelétricos pertencentes às simetrias, cúbica, tetragonal, hexagonal, romboedral e ortorrômbica. Tais regras são obtidas através da introdução de "tensores Brillouin" os quais dependem tanto da simetria cristalina como da direção de propagação dos fonons.

4)- Cálculo detalhado da montagem experimental a ser utilizada para a observação do efeito.

5)- Um novo procedimento experimental para o alinhamento do sistema ótico.

6)- Introdução de um manômetro que transforma linearmente a variação de pressão entre as placas do interferômetro em um sinal elétrico o qual é por consequência linearmente proporcional à frequência selecionada por aquêle aparêlho.

7)- Discussão através da análise de vários espectros por nós obtidos das dificuldades mais frequentemente ligadas a observação do efeito Brillouin.

8)- Medidas inéditas do efeito e aplicação das regras de seleção a cristais de NaCl.

PREFACIO

Antes de iniciarmos a descrição detalhada de nosso trabalho, parece-nos importante que deixemos claro o critério adotado na escolha do tema.

Impuzemo-nos bàsicamente duas condições que consideramos de impotância.

A primeira resulta de nossa convicção de que verdadeira pesquisa só se faz em nível internacional; a segunda, se relaciona com a possibilidade de garantir economicamente tanto a instalação como a manutenção da montagem experimental. Em outras palavras, procuramos evitar problemas cuja solução exige o emprêgo de equipamentos - excessivamente dispendiosos, elegendo para tanto um campo no qual - fôsse realmente possível trabalhar no Brasil com condições de quase igualdade com os pesquisadores do exterior. O estudo do efeito - Brillouin apresenta essas características. Além disso, apesar de haver atraído sôbre si a atenção de inúmeros cientistas nos últimos 6 anos (após a descoberta do laser), mostra-se como um campo relativamente novo com inúmeras possibilidades de pesquisas futuras.

Como não temos conhecimento da existência de outro trabalho sôbre o assunto, realizado no Brasil, precederemos a apresentação - de nossos resultados com uma breve revisão geral do tema. Tal revisão, bem como a bibliografia indicada tem como finalidade servir de referência a futuros trabalhos e permitir uma avaliação da nossa - contribuição ao estudo do efeito Brillouin.

H I S T Ó R I C O

Os primeiros estudos sôbre o espalhamento da luz, foram apresentados no século passado por Rayleigh (1871-1899), logo após a introdução das equações de Maxwell. Em seus trabalhos Rayleigh considerou o espalhamento de uma onda luminosa provocada por uma esfera dielétrica de raio muito pequeno quando comparado com o comprimento de onda da radiação incidente. Utilizando-se da mesma teoria, conseguiu ainda justificar uma série de outros fenômenos, como por exemplo a côr do céu e a atenuação da luz solar ao atravessar a atmosfera. A extensão dessa teoria para meios contínuos foi apresentada por Smoluchowski (1908) e Eistein (1910), explicando-se então o fenômeno da opalescência, característico do ponto crítico de uma substância.

Por essa época, com a teoria de Debye para calores específicos (1912), as ondas elásticas são pela primeira vez identificadas com a quantidade de calor no material. As idéias sugeridas por Debye vieram contribuir para os estudos relativos ao espalhamento da luz, uma vez que forneceram a necessária dependência temporal das flutuações de densidade.

Foi pouco depois disso que Brillouin (1914-1922), mostrou que um feixe de luz ao atravessar um meio transparente deve sofrer uma reflexão Bragg devido às frentes de onda das flutuações de densidade dêsse meio. Esta é a interpretação clássica do fenômeno atualmente conhecido como efeito Brillouin.

Chamando-se λ_0 o comprimento de onda da radiação incidente, n o índice de refração do meio, λ_0 o comprimento de onda das vibrações elásticas do meio e θ o ângulo entre as direções de propagação da luz incidente e das ondas elásticas no meio, a relação de Bragg tem a forma

$$\frac{\lambda_0}{n} = 2\ \lambda_0\ \mathrm{sen}(\theta)$$

A confirmação experimental dêste efeito foi apresentada alguns anos depois por uma série de trabalhos realizados por Gross (1930-1932) e por Meyer e Ramm (1932-1934). Em vista dessa comprova ção, surgem quase que simultaneamente as primeiras teorias detalhadas sôbre o assunto. Estas constam do tratamento puramente clássico de Leontowitsch e Mandelstam (1931-1932) e do tratamento puramente quântico de Tamm (1930).

Apesar dessa diferença fundamental na forma pela qual aquêles pesquisadores trataram o problema, chegam pràticamente às mesmas conclusões.

Essa concordância de resultados é em realidade fàcilmente explicada por ser proveniente da baixa energia dos fonons acústicos.

Durante a década de 30, tanto na Europa como na Índia, surgem então alguns trabalhos nos quais o efeito é utilizado para a medida da velocidade do som em líquidos: Debye e Sears (1932), Raman e Nath (1935-1936), e outros.

A teoria de Mandelstam no entanto, sòmente veio a ter sua comprovação experimental cêrca de 15 anos após haver sido proposta, com os resultados de Krishnam (1947-1955) em experiências com cristais de diamante.

Mais recentemente o efeito foi tratado por Theimer (1951 - 1952) que levou em consideração a estrutura cristalina. Êsses resultados, no entanto, não coincidem com os de seus predecessôres, o que como é salientado por Born e Huang,(1966) deve-se a um êrro no trabalho de Theimer.

Embora encontrem-se na literatura trabalhos experimentais relativos à medida do efeito Brillouin anteriores a 1964, tais trabalhos apresentam uma grave limitação quanto à precisão dos resultados. Tal limitação foi imposta principalmente pelos valôres relativamente baixos dos afastamentos em frequência, com respeito às larguras de linha das fontes luminosas então disponíveis.

A luz proveniente de um laser contínuo é caracterizada pela monocromaticidade e pequena divergência do feixe o que faz dêste fonte de luz ideal em experiências ligadas a espectroscopia de um modo geral (Leite e Porto - 1964)

No que se refere ao efeito Brillouin, os primeiros a utilizarem o laser foram: Benedeck et al(1964),Cecchi (1964) e Chiau (1964), Stoicheff (1964).

A partir dessa época, tem crescido consideravelmente o número de trabalhos apresentados nêsse campo, nunca tendo sido no entan to tão intenso quanto hoje em dia o interêsse por êle despertado .

INTRODUÇÃO

Êste trabalho apresenta duas contribuições principais ao estudo do espalhamento Brillouin.

A primeira corresponde ao estabelecimento de regras de seleção para o efeito, obtidas através da consideração de processos de espalhamento devidos a fonons acústicos propagando-se nas direções de polarização pura. Conseguiu-se assim, estabelecer uma certa analogia com o tratamento dado ao efeito Raman.

Tal analogia está contida no significado físico de certos tensores por nós introduzidos. Assim, em vista de sua finalidade ser semelhante à dos tensores Raman, convencionamos denominá-los de " tensores Brillouin".

O fato de havermos considerado sòmente processos envolvendo os fonons acima referidos não constitue em realidade uma limitação à solução apresentada para o problema. Isto por que como o efeito é regido pela lei de conservação de vetor de onda, a direção do fonon pode sempre ser controlada através da geometria empregada durante sua observação experimental. Além disso, tem-se também que tôdas as direções de propagação possíveis para fonons de polarização pura são em número finito e bem determinadas para tôdas as simetrias cristalinas.

Queremos no entanto deixar claro que, embora não tenhamos feito explicitamente os cálculos para outras direções, isto é, para fonons "mistos", aquêles podem ser realizados sempre que necessários seguindo-se para tanto o procedimento indicado durante o capítulo I.

Além disso, procuramos também mostrar através da comparação entre os efeitos Raman e Brillouin por que não se aplicam a êste último as regras de seleção obtidas a partir da teoria de grupos , Ovander (1960) para o primeiro.

A segunda contribuição a que nos referimos, é apresentada durante o segundo capítulo desta tese. De acôrdo com nossas experiên cias, pudemos demonstrar que o fenômeno em questão pode ser observado por meio de uma montagem experimental bastante mais simples do que a utilizada até a presente data. Nossa demonstração baseia-se em que, como pode ser comprovado pelos espectros obtidos, nossos resultados são sempre de igual ou melhor qualidade que os obtidos por outros autores.

C A P Í T U L O I

a - ESTUDO GERAL SÔBRE PROCESSOS DE ESPALHAMENTO DA LUZ

Nêste capítulo procuraremos estabelecer as equações de espalhamento da luz em um meio cristalino ou líquido utilizando a teoria clássica da luz.

Seja então V um volume unitário no interior do meio. O campo elétrico $\vec{E}_i$ da radiação incidente que suporemos monocromática polarizada induzirá em V uma polarização $\vec{P}$ dada por:

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_i \qquad \text{(I - 1a)}$$

onde N é o número de dipolos induzidos por unidade de volume e α é a polarizabilidade do meio, desde que o comprimento de onda λ_i da luz incidente seja grande em comparação com as distâncias interatômicas.

A energia da radiação emitida por tais dipolos, isto é, a energia da radiação espalhada, será de acôrdo com a teoria eletromagnética dada por:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_e \wedge \vec{H}_e\right] \qquad \text{(I - 2a)}$$

Nesta expressão $\vec{S}$, $\vec{E}_e$ e $\vec{H}_e$ correspondem respectivamente ao vetor de Poynting e aos campos elétrico e magnético da radiação espalhada. Sendo assim, o módulo de $\vec{S}$ será dado por:

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi}\left|E_e\right|^2 \qquad \text{(I - 3a)}$$

Da teoria eletromagnética sabe-se ainda que o valor de $\vec{E}_e$ a uma distância $\vec{R}$ do volume de espalhamento, em um tempo $(t+\frac{\vec{R}}{c})$ é:

$$E_e(t+\frac{\vec{R}}{c}) = \frac{1}{R^3c^2}\left[\vec{R} \wedge \left\{\vec{R} \wedge \ddot{\vec{P}}(t)\right\}\right] \qquad \text{(I - 4a)}$$

dependendo portanto diretamente da derivada segunda da polarização $\vec{P}$ com respeito ao tempo.

O que faremos então é calcular tal derivada com o auxílio da expressão (I -1a), levando em consideração a influência das flutuações de densidade e polarizabilidade.

Tem-se então que, considerando sòmente a parte real das exponenciais, o comportamento de N e α pode ser descrito por

$$N = N_0 + \delta N \, e^{\pm i\omega_B t} \quad \text{———} \quad I - 5a$$

$$\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha \, e^{\pm i\omega_{BR} t} \quad \text{———} \quad I - 6a$$

Onde $N_0 = N_0$ (S.P) ——— valor médio de N, função da densidade através de S e P.

S ——— Entropia

P ——— Pressão

$\delta N \ll N_0$ ——— amplitude máxima de flutuação de N_0 .

$\alpha_0 = \alpha$ (S.P) ——— valor médio de α, função da densidade através de S e P .

$\delta\alpha \ll \alpha_0$ ——— amplitude máxima da flutuação de α_0 .

$\omega_{R,B}$ ——— frequências de vibração ótica (R)ou acústica do meio (B) .

ω_B ——— frequências de vibração acústica .

t ——— tempo .

Por outro lado, o campo elétrico da radiação incidente pode ser descrito como a parte real de

$$E_i = E_0 \, e^{-i\omega_0 t}$$

onde ω_0 corresponde à frequência da luz incidente, suposta monocromática.

Substituindo-se (I - 5a) e (I - 6a) em (I - 1a) vem que:

$$P = N_0\alpha_0 E_0 \, e^{-i\omega_0 t} + \delta N \alpha_0 E_0 \, e^{-i(\omega_0 \pm \omega_B)t} + N_0 \delta\alpha E_0 \, e^{-i(\omega_0 \pm \omega_{R,B})t} +$$

$$+ \delta N \delta\alpha E_0 \, e^{-i(\omega_0 \pm \omega_{R,B} \pm \omega_B)t} \qquad (I - 8a)$$

Derivando-se (I - 8a) duas vezes com respeito ao tempo e despresando-se δN em relação a N_0 e $\delta\alpha$ em relação a α_0 obtem-se

$$\ddot{P} = N_0\alpha_0E_0\omega_0^2\ e^{-i\omega_0t} + \delta N\alpha_0E_0(\omega_0\pm\omega_B)^2\ e^{-i(\omega_0\pm\omega_B)t} +$$

$$+ N_0\delta\alpha E_0(\omega_0\pm\omega_R)^2\ e^{-i(\omega_0\pm\omega_{R,B})t} +$$

$$+ \delta N\delta\alpha E_0(\omega_0\pm\omega_{R,B}\pm\omega_B)^2\ e^{-i(\omega_0\pm\omega_{R,B}\pm\omega_B)t} \qquad (I.9a)$$

O campo E_e da radiação espalhada é então obtido utilizando-se(I - 9a) em(I - 4a). Substituindo-se o resultado em(I - 3a) teremos então a expressão procurada da intensidade de radiação espalhada em função das interações da luz incidente com o meio.

O último têrmo do segundo membro da equação (I - 9a)ou seja

$$\delta N\delta\alpha E_0(\omega_0\pm\omega_{R,B}\pm\omega_B)^2\ e^{-i(\omega_0\pm\omega_{R,B}\pm\omega_B)t}$$

é despresível porque $\delta N_0 << N_0$ e $\delta\alpha << \alpha_0$

A componente Rayleigh da luz espalhada caracterizada por apresentar a mesma frequência que a radiação incidente e ser - proporcional à quarta potência de ω_0, é proveniente do têrmo:

$$E_0\omega_0^2N_0\alpha_0\ e^{-i\omega_0t}$$

Consideremos agora o terceiro têrmo em(I - 9a).Como as - frequências acústicas, ω_B tem uma contribuição muito pequena à variação da polarizibilidade $\delta\alpha$, podemos aqui despresar as componentes de frequências ω_B . As componentes restantes de frequências óticas ω_R compoem o espectro Raman e têm intensidade proporcional à $(\omega_0\pm\omega_R)^4$.

O segundo têrmo em(I - 9a) é responsável pelo espectro - Brillouin e suas componentes de frequência $\omega_0\pm\omega_B$ têm intensidades proporcionais à $(\omega_0\pm\omega_B)^4$. êstes têrmos são devidos à variação de densidade δN .

Note-se que o terceiro têrmo, proveniente da variação de polarizabilidade, também possue componentes Brillouin, mas estas são de magnitude inferior àquelas devidas à variação da densidade.

Êsses são portanto os três grupos nos quais devem enquadrar-se tôdas as linhas do espectro de frequências da luz espalhada. Dentre êles, nos preocuparemos especificamente com os têrmos em ω_B .

Como para tôdas as simetrias cristalinas existem sòmente três frequências acústicas de vibração, correspondentes a cada uma das possíveis translações da célula unitária, o espalhamento-Brillouin introduzirá no máximo seis linhas ao espectro da radiação espalhada, sendo três Stokes e três anti-Stokes.

É nossa intenção a seguir estabelecer teòricamente, através do cálculo de regras de seleção, quais as condições experimentais necessárias à observação dessas linhas.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

De um modo geral, as características fundamentais dos processos de espalhamento podem ser descritas matematicamente através das equações:

$$\vec{k}_i = \vec{k}_e + \vec{k}_\theta \qquad \text{(I - 1b)}$$

$$\omega_i = \omega_e + \omega_\theta \qquad \text{(I - 2b)}$$

I - 1b : Representa conservação de vetor de onda e

I - 2b : Representa conservação de energia.

Observemos que se multiplicarmos a equação (I - 1b) por h teremos:

$$\hbar\vec{k}_i = \hbar\vec{k}_e + \hbar\vec{k}_\theta \qquad \text{(I - 3b)}$$

onde $\hbar\vec{k}_i$ e $\hbar\vec{k}_e$ representam as quantidades de movimento associadas aos fotons absorvido e emitido pelo cristal. Devido à seme -

lhança matemática entre êsses têrmos e $\hbar\vec{K}_\theta$ algumas vezes a equação (I - 3b) é referida como uma lei de conservação de quantidade de movimento.

A equação (I - 1b) é importante também para a determinação geométrica do espalhamento, pois, que sendo uma equação vetorial, uma vêz estabelecidas as direções de incidência e de observação, fica automaticamente estabelecida a direção do fonon que interveio no processo.

Outra forma de encarar o problema consiste na formulação semi-clássica apresentada por Born e Huang, tendo sido esta adotada por nós.

Por êste motivo, reveremos brevemente essa formulação evitando ao máximo seus detalhes matemáticos e procurando dar sòmente a idéia física de seu objetivo.

A radiação é tomada clàssicamente enquanto que o cristal é encarado sob o ponto de vista quântico. O campo $\vec{E}_i$ da luz incidente em um ponto $\vec{x}$ no interior do cristal **é dado por.**

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i^- e^{-i\omega_i t+2\pi i(\vec{S}_i\cdot\frac{\vec{x}}{\lambda})} + \vec{E}_i^+ e^{i\omega_i t-2\pi i(\vec{S}_i\cdot\frac{\vec{x}}{\lambda_i})} \qquad \text{(I - 4b)}$$

e $$\vec{E}_i^- = (\vec{E}_i^+)^* \qquad \text{(I - 5b)}$$

onde $\vec{S}_i$ é um vetor unitário na direção de incidência.

As inomogeneidades dielétricas em um volume dV que contém $\vec{x}$ e que funcionam como centros de espalhamento para $\vec{E}_i$ são dadas por $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{x})$. Sendo assim, a interação de $\vec{E}_i$ com $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{x})$ traduz-se no aparecimento de uma variação de momento dipolar elétrico - $\vec{m}$ em dV.

Pode-se mostrar que o campo elétrico da radiação emitida por dV (associado à radiação espalhada) em um ponto $\vec{R} >> \vec{x}$ e em um tempo $(t + \frac{\vec{R}}{c})$, será dependente da derivada segunda de $\vec{m}(t)$, sempre que cada uma de suas componentes for dada por:

$$m_\alpha^- = (m_\alpha^+)^* = \sum_\beta \frac{E_\beta^-}{4\pi} \int_V \delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{x})\, e^{2\pi i(\vec{S}_\theta\cdot\frac{\vec{x}}{\lambda_\theta})}\, dV \qquad \text{(I - 6b)}$$

Onde

E_β - indica cada uma das componentes β de $\vec{E}_i$

$$\frac{\vec{S}_\theta}{\lambda_\theta} = \frac{\vec{S}_i - \vec{S}_e}{\lambda_i} \qquad \text{(I - 7b)}$$

$$\lambda_\theta = \frac{\lambda_0}{2\,\mathrm{sen}\,(\theta/2)}$$

Nestas igualdades, $\vec{S}_\theta$ é um versor na direção de $\vec{R}$, ou seja, na direção de propagação da luz espalhada e θ e o ângulo entre a direção de incidência e a direção de espalhamento(ângulo de espalhamento).

A intensidade da radiação espalhada é calculada através - da utilização direta de (I - 6b) na expressão do módulo do correspondente vetor de Poynting,

$$\vec{S} = \frac{\omega_0^4}{2\pi R^2 c^3} \sum_{i=1,2} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha^i \, n_\beta^i \, m_\alpha^+ \, m_\beta^- \qquad \text{(I - 9b)}$$

onde $\vec{n}^1$ e $\vec{n}^2$ são dois vetores unitários normais entre si e à direção de espalhamento, e m_α^+ e m_β^- devem ser substituidos pelos elementos da matriz de transição correspondente.

Afim de chegar a uma expressão final que leve em conta explicitamente a simetria do cristal, introduzem-se as constantes-elasto- óticas do meio através das componentes $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ do tensor dielétrico, ou seja

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum k_{\alpha\beta,\gamma\eta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\eta} \qquad \text{(I - 10b)}$$

onde

$$\text{a)}\; k_{\alpha\beta,\gamma\eta} = -\sum_{\mu\nu} (\varepsilon_0)_{\alpha\mu} \, P_{\mu\nu,\gamma\eta} \, (\varepsilon_0)_{\nu\beta} \qquad \text{(I - 11b)}$$

são constantes relacionadas com os coeficientes elasto-óticos - $P_{\mu\nu,\gamma\eta}$, ligados a cada simetria através das componentes do tensor dielétrico ($\varepsilon_{\alpha\beta}$).

b) u_γ - representam as componentes γ dos deslocamentos elásticos os quais são idênticos as componentes das vibrações acústicas de ordem zero do cristal.

Vemos então, pela equação(I - 10b), que $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ é uma função linear das deformações elásticas não possuindo nenhum têrmo independente. Sendo assim, $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ será nulo sempre que $\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\eta} = 0$. Nêste caso, o processo seguramente não envolve interação com fonons acústicos.

Isso acontece quando não há variação do estado de energia do cristal durante o espalhamento. Isto leva a que, para o espalhamento Brillouin, os elementos da diagonal da matriz de transição ligada a $\vec{m}$ sejam sempre nulos.

A determinação explicita das componentes γ de $\vec{u}$ $(\vec{x})$, seguida de sua introdução em (I - 10b) permite então o cálculo dos $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ indispensáveis à obtenção de m_α^+ e m_α^-. Êstes são finalmente dados por intermédio(I - 6b)

$$m_\alpha^- = (m_\alpha^+)^* = \frac{1}{\lambda_\theta} \left(\frac{V}{\rho}\right)^{1/2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}(j) \left\{ i q_1 \, {}^{S_\theta}\!/\!_j{}^{\lambda_\theta} - q_2 \, {}^{S_\theta}\!/\!_j{}^{\lambda_\theta} \right\} E_\beta^- \qquad \text{(I - 12b)}$$

Nesta última expressão, tem-se que:

ρ - densidade de massa.

$q_1\left\{ {}^{S_\theta}\!/\!_j{}^{\lambda_\theta} \right\}$ - coordenada normal real de primeira ordem do deslocamento $\vec{u}$, devido ao ramo j de vibração acústica de comprimento de onda λ_θ propagando-se na direção $\vec{S}_\theta$.

λ_θ - comprimento de onda da vibração acústica

$g_{\alpha\beta}(j)$ - elementos da matriz G ligada a cada uma das 3 possíveis vibrações acústicas j do meio por:

$$g_{\alpha\beta}(j) = \frac{1}{2^{5/2}} \sum_{\gamma\eta} k_{\alpha\beta,\gamma\eta} \, e_\gamma \left({}^{S_\theta}\!/\!_j{}^{\lambda_\theta} \right) \vec{S}_{\theta_\eta} \qquad \text{(I - 13b)}$$

Em (I - 13b) temos que:

$e_\gamma\left(\vec{S}_\theta/\lambda_\theta\atop j\right)$ - componentes γ dos vetores de polarização unitários, associados com cada ramo de vibração j - que se propaga na direção $\vec{S}_\theta$.

$\vec{S}_{\theta_\eta}$ - componentes η do versor $\vec{S}_\theta$.

Com os valôres assim encontrados para $\vec{m}^+$ e $\vec{m}^-$ pode-se finalmente calcular os elementos da matriz de transição e chegar à expressão da intensidade de espalhamento Brillouin para cada componente j das vibrações acústicas do cristal, A expressão para luz incidente não polarizada é dada por:

$$I_j = \frac{V}{\rho}\ \frac{KT\omega_i^4}{8\pi^2 c^3 c_j^2 \lambda(\vec{S}_\theta)} \sum_i \sum_{\alpha\rho} \sum_{\alpha\beta\gamma\eta} n_\alpha^i\, n_\beta^i\, g_{\alpha\gamma}(j)\, g_{\beta\eta}(j)\, E_\gamma^+ E_\eta^- \qquad \text{(I - 14b)}$$

γ

onde:

$\vec{c}_j(\vec{S}_\theta)$ - velocidade de fase do fonon j propagando-se segundo $\vec{S}_\theta$.

$\vec{n}^i(i-i,2)$ - dois vetores unitários normais entre si e à direção de espalhamento.

O espectro da luz espalhada, é composto de seis linhas cujas frequências são:

$$\omega_i \pm \omega\left(\vec{S}_\theta/\lambda_\theta \atop j\right) = \omega_i\left[1 \pm \frac{2c_j}{\lambda_\theta}(\vec{S}_\theta)\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2}\right] \qquad \text{(I - 15b)}$$

c) Comparação entre os efeitos Raman e Brillouin.

Devido à conservação de energia e do vetor de onda nos processos de espalhamento inelásticos de luz por um meio cristalino sòmente participam do processo fonons pertencentes à região central da zona de Brillouin, isto é, no visível:

$$\vec{k}_\theta \simeq 10^6 \ cm^{-1}$$

Tais processos serão denominados respectivamente Raman ou Brillouin quando o fonon por êles criado (linha Stokes) ou des - truido (linha anti Stokes) for ótico ou acústico. As diferenças entre êsses dois efeitos decorrem portanto das diferenças entre as características dêsses dois tipos de fonons.

A primeira delas provém de que na região mencionada para os valôres possíveis de $|\vec{K}_\theta|$ as curvas de dispersão para fonons ó ticos e acústicos diferem bastante entre si. Devido à lei de - conservação do vetor de onda temos então que:

$$k_\theta \cong 2k_i \ sen \ \frac{\theta}{2}$$

Para $|\vec{K}_\theta|$ tendendo a zero a curva de dispersão correspondente a fonons óticos é praticamente paralela ao eixo dos $|\vec{k}|$ despresando-se efeitos de polariton e anisotropia. Isto significa que para o espalhamento Raman a frequência dos fonons é a mesma para qual - quer ângulo de espalhamento, excepto para direção de observação muito próxima da direção de incidência.

Em contraste a frequência dos fonons acústicos nessa re - gião da zona de Brillouin varia muito fortemente com $|\vec{k}_\theta|$ ou seja com o ângulo de espalhamento, o mesmo então ocorrendo com os estados de energia correspondentes. Consequentemente, qualquer tentativa para o estabelecimento de regras de seleção deverá levar em consideração a variação da energia do fonon com o ângulo θ de espalhamento.

O número de fonons em cada nível de energia do cristal é dado, para cada temperatura T, pela probabilidade de ocupação N

onde
$$\frac{1}{1+e^{\hbar\omega/KT}} \qquad (I - 10c)$$

Sendo assim, o número de fonons óticos (onde **estão**

$\omega_{\text{ótico}} \cong 300\text{cm}^{-1}$) é pequeno em comparação com o número de fonons acústicos. É de se esperar portanto que a probabilidade de criação de um fonon ótico seja maior que a de sua aniquilação, em contraste com o caso de fonons acústicos ($\omega_{\text{acústico}} \cong 1\text{cm}^{-1}$) onde as probabilidades de aniquilação e criação são aproximadamente iguais.

Experimentalmente esta diferença se traduz em um espectro simétrico para o efeito Brillouin enquanto para o efeito Raman a razão entre as linhas Stokes e anti Stokes é dada pelo inverso de N.

Vejamos agora por que, embora o efeito Brillouin seja considerado por alguns autores como um efeito Raman de primeira ordem, não deve seguir as regras de seleção estabelecidas a partir da teoria de grupos para êste último.

Existe como se sabe, uma diferença fundamental entre os fonons óticos e os fonons acústicos, a qual é ligada ao movimento relativo entre ions de cargas opostas. Tal movimento é em sentidos opostos para as vibrações associadas aos fonons óticos e no mesmo sentido para as associadas a fonons acústicos.

Em vista disso, os fonons óticos envolvem sempre, mesmo para $k_\theta = 0$, uma polarizabilidade iônica por célula unitária, a qual, de acôrdo com a equação I - 6a variará periodicamente com a mesma frequência que o fonon ótico ao qual é devida. Quando sôbre a célula unitária incidir uma radiação luminosa, teremos que o momento dipolar induzido será:

$$\vec{m} = (\alpha_0 + \delta\alpha)\,\vec{E}_i \qquad \text{(I - 11c)}$$

onde α_o corresponde a polarizabilidade eletrônica que é constante.

As regras de seleção são então obtidas através da análise dos elementos da matriz de transição $\vec{m}$, supondo-se que o espalhamento é devido a fonons de vetor de onda $\vec{k}_\theta = 0$ ou seja, de comprimento de onda tendendo a infinito. Isto equivale a dizer que tôdas as células unitárias no volume de espalhamento apresentam a mesma polarizabilidade, isto é, tôdas as componentes da rêde cristalina movem-se em fase.

Seja então a expressão

$$m_{fi} = \int_V \psi_f \delta\alpha \psi_i dV \qquad \text{(I - 12c)}$$

dos elementos da matriz de transição de $\vec{n}$, na qual V corresponde ao volume de espalhamento.

Fazendo nessa expressão ψ_f corresponder à função de onda ligada ao nível fundamental do cristal, ψ_f será sempre completamente simétrica. Para que m_{fi} seja diferente de zero é condição necessária então que $\delta\alpha$ e ψ_i pertençam à mesma representação.

Esta formulação aplica-se convenientemente ao efeito Raman, pois nêste caso não há dispersão ou seja como já dissemos, a curva ω versus $\vec{k}_\theta$, para $\vec{k}_\theta$ tendendo a zero, é praticamente constante.

Isto não ocorre no entanto para o efeito Brillouin, pelas seguintes razões:

1º)- Para valôres de $\vec{k}_\theta$ muito próximos de zero, a curva ω_θ versus $\vec{k}_\theta$ apresenta sua máxima dispersão. Sendo assim, cálculos baseados no que se passa **para** $\vec{K}_\theta = 0$, não darão nenhuma idéia quanto ao que se passa para os demais valôres de $\vec{k}_\theta$.

2º)- A valôres de k_θ no intervalo

$$0 \leq \vec{k}_\theta \leq \vec{k}_{\theta\ máx.}$$

correspondem frequências que variarão respectivamente no intervalo

$$0 \leq \omega_\theta \leq \omega_{\theta\ máx.}$$

Cada valor possível de ω_0 nêsse intervalo, ao contrário do que sucede para fonons óticos, está ligado a diferentes valôres de energia e consequentemente a diferentes ψ_i.

3º)- Para k_θ igual ou tendendo a zero as vibrações acústicas não envolvem polarizabilidade iônica do meio, e, sendo assim, a consideração de que todos os componentes da rêde crista lina movam-se em fase levará sempre a valôres nulos para os elementos m_{fi} da matriz de transição de $\vec{m}$. Em outras palavras, no caso acústico, k_θ aproximadamente igual a zero ou seja λ tendendo a infinito, corresponde apenas a uma translação constante para tôdas as células unitárias do volume de espalhamento.

Devido a essas razões torna-se então imprescindível, o estabelecimento de uma formulação particular para o cálculo das regras de seleção para o efeito Brillouin.

d)- Regras de seleção para o efeito Brillouin

Para luz incidente não polarizada, a equação (I - 14b) pode ser escrita como:

$$I_j = \frac{V}{\rho} \frac{I_0 KT\omega^4}{8\pi^2 c^4 c_j^2(\vec{S}_\theta)} \sum_{i=1,2} \sum_{k=1,2} n_\alpha^i n_\beta^i \, g_{\alpha\beta}(j) \, g_{\beta\eta}(j) \bar{n}_\gamma^k \, \bar{n}_\eta^k \qquad \text{(I - 1d)}$$

onde:

n^i - são dois versores simultaneamente perpendiculares entre si e à direção de incidência,

$\bar{n}^k$ - são dois versores simultaneamente perpendiculares entre si e à direção de espalhamento.

Se usarmos luz polarizada, cada têrmo obtido através do desenvolvimento das $\sum_{i=1,2}$ e $\sum_{k=1,2}$ correspondem ao resultado da utilização de polarizações específicas i,k, respectivamente para a luz incidente e para a luz espalhada. Sendo assim para cada arranjo experimental a equação (I - 1d) pode ser escrita como:

$$I_{j(i,k)} = M_B \left[n_\alpha^i \, g_{\alpha\eta}(j) \, \bar{n}_\eta^k \right]^2 \qquad \text{(I - 2d)}$$

onde

$$M_B = \frac{V}{\rho} \frac{I_0 KT\omega^4}{8\pi^2 c^4 c_j^2(\vec{S}_\theta)} \qquad \text{(I - 3d)}$$

As regras de seleção para o efeito Brillouin serão obtidas pela análise de $I_j(i,k)$. Sempre que:

$$n_\alpha^i \, g_{\alpha\eta}(j) \, \bar{n}_\eta^k = 0 \qquad \text{(I - 4d)}$$

a transição é proibida.

É importante salientar que:

$g_{\alpha\eta}(j)$, tensor Brillouin, depende exclusivamente do cristal e da direção de propagação do fonon j no mesmo.

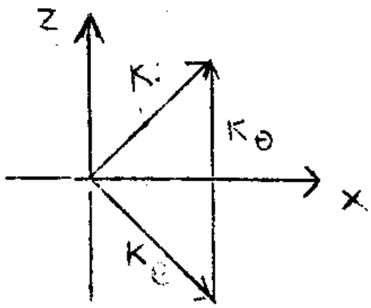
n_α^i e $\bar{n}_\eta^k$ dependem exclusivamente da montagem experimental utilizada, isto é, das direções de incidência e espalhamento e suas respectivas polarizações.

Tomemos um exemplo concreto.

Suponhamos que se deseje observar o espalhamento Brillouin sob um ângulo de 90° devido a fonons propagando-se na direção (0,0,1), em um cristal cúbico da classe 23. Nessa direção o fonon pode estar polarizado longitudinal (L) ou transversalmente (T), não havendo polarização mista.

Devido à conservação do vetor de onda, a observação de tais fonons implica na utilização da geometria indicada na figura (I - 1d).

Figura I - 1d



Nessa figura, $\vec{k}_i$ tem componentes (0,1, 1) e $\vec{k}_e$ tem componentes (0,1,-1).

Os vetores $\vec{\bar{n}}^k$ e $\vec{n}^i$ consequentemente serão ou normais ou contidos no plano YZ de espalhamento, isto é:

$$n^1 = (X00) \qquad \bar{n}^1 = (X00)$$

$$n^2 = (0YZ) \qquad \bar{n}^2 = (0YZ)$$

De acôrdo com a tabela 4 do capitulo II, os tensores Brillouin correspondentes têm a forma seguinte, (aqui, como em todo o trabalho adotamos a convenção de que os símbolos (.) e - (0) representem respectivamente componentes iguais e diferentes de zero) :

$$\left(g_{\alpha\gamma}\right)_{T_\alpha} = \begin{pmatrix} . & . & 0 \\ & . & 0 \\ & & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & XZ \\ & . & YZ \\ & & . \end{pmatrix}$$

$$\left(g_{\alpha\gamma}\right)_{L_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ & 0 & . \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XX & . & . \\ & YY & . \\ & & ZZ \end{pmatrix}$$

Êstes valôres juntamente com as possíveis polarizações levam a tabela (I - 1d) a qual dá informação sôbre a possibilidade ou não de que o efeito ocorra em função da geometria utilizada .

Tabela I - 1d

Polarização da luz incidente	Polarização da luz espalhada	Linhas Brillouin possíveis	
		T	L
(X00)	(X00)	-	XX
(X00)	(0YZ)	XZ	-
(0YZ)	(X00)	ZX=XZ	-
(0YZ)	(0YZ)	YZ=ZY	YY,ZZ

Assim vemos que além de darem as regras de seleção os tensores Brillouin são imprescindíveis tanto na determinação da polarização da luz incidente e observada como na interpretação dos resultados experimentais.

Se tanto a luz incidente como a espalhada forem polarizadas na direção (X00) o espalhamento é nulo o que representamos pelo símbolo (-).

Outra importante vantagem é que êsses tensores permitem que ao analisarmos os resultados experimentais, reconheçamos -

qual a polarização do fonon observado. No caso analisado acima, verifica-se que uma linha Brillouin para a qual a luz incidente e a luz espalhada são polarizadas na direção (X00) será forçosamente devida a um fonon polarizado longitudinalmente (L). Um raciocínio análogo pode ser feito para os demais casos completando-se dessa forma a análise desejada.

Empregaremos uma notação bastante cômoda para a descrição da geometria de espalhamento Raman, esta após ter sido adotada por Tell e outros (1966) foi amplamente utilizada na literatura Raman.

Ela consiste na utilização de quatro letras para descrever nesta ordem a direção da luz incidente, a direção de sua polarização, a direção da polarização da luz espalhada e a direção de propagação da luz espalhada, sendo que as segunda e terceira delas são colocadas entre parêntesis. Assim,

X(YZ)Y

significa luz incidente na direção X, polarizada segundo Y e luz espalhada na direção Y polarizada segundo Z.

Observe-se que esta nomenclatura tem a vantagem de que o têrmo contido entre parêntesis corresponde fìsicamente ao de mesma forma no tensor Raman, possibilitando assim o imediato reconhecimento dos casos em que se deve esperar ou não que haja espalhamento.

Como o mesmo ocorre com o tensor Brillouin, passaremos a adotar essa nomenclatura também para o espalhamento Brillouin.

e - Modos Puros

Seja $\vec{S}_\theta$ a direção de propagação de ondas elásticas em um meio cristalino anisotrópico e seja $\vec{e}$ o vetor de polarização a elas associado. Denominam-se, direções de propagação de vibrações associadas à polarização pura, ou simplesmente, direções de modos puros, àquelas direções para as quais:

$$\vec{S}_\theta \wedge \vec{e} = 0 \qquad (I - 1e)$$

ou

$$\vec{S}_\theta \wedge \vec{e} = 1 \qquad (I - 2e)$$

Êsses modos de vibração classificam-se em longitudinal ou transversal segundo a êles se apliquem respectivamente as equações (I - 1e) ou (I - 2e).

Pelas razões já expostas durante a introdução, consideramos particularmente, aquelas direções do cristal que permitam a propagação simultânea de um modo puramente longitudinal e dois transversais não havendo portanto polarizações mistas.

Um método para a determinação dessas direções foi sugerid por Borgnis(1955) . Suas idéias foram aplicadas por Brugger (1964) em cujo trabalho encontram-se ainda as correspondentes polarizações e velocidades de fase.

Seus resultados foram por nós utilizados na determinação dos componentes do tensor $g_{\alpha\beta}$ para cristais não piezo elétricos, pertencentes aos sistema cúbico, tetragonal, hexagonal, romboedral e ortorrômbico.

A linha geral de cálculo adotada durante a determinação dos tensores $\left[g_{\alpha\beta}\right]$ foi a seguinte:

1º) Determinação dos valôres de $h_{\alpha\beta,\gamma\eta}$ segundo a expressão (I - 11b).

2º) Substituição dêsses valôres na equação (I - 13b).

Por essa razão os tensores Brillouin serão sempre simétricos .

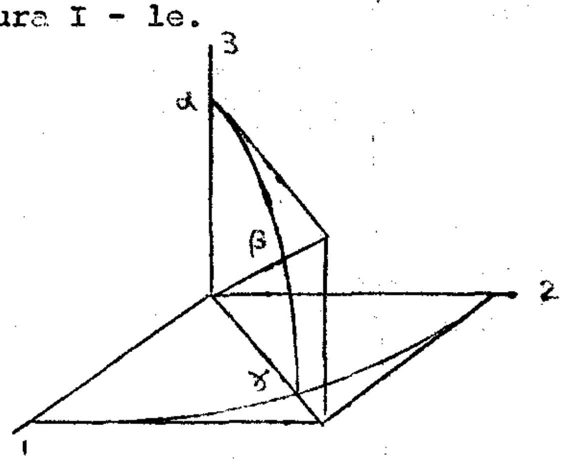
Na representação qualitativa dêsses tensores, bem como na de todos os demais, envolvidos em seu cálculo, foi utilizada a seguinte notação:

. - elementos nulos
0 - elementos não nulos
0—0 - elementos iguais
0—● - elementos de mesmo módulo e de sinais contrários.

Entre parêntesis, ao lado de cada matriz, encontra-se seu número de elementos independentes.

Cristais cúbicos

Nêste caso existem 3 direções de propagação correspondentes a modos puros β,γ e α cujos respectivos índices são (1,1,1), (1,1,0) e (1,0,0) além de tôdas as que lhes são relacionadas pelas operações de simetria do sistema. As direções β, γ e α são mostradas na figura I - 1e.



O tensor dielétrico é da forma:

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ & E_1 & 0 \\ & & E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ & 0 & . \\ & & 0 \end{pmatrix} (1)$$

Devido às diferenças apresentadas na forma das matrizes que representam as constantes de Pockell, as diferentes classes desta simetria reunem-se em dois grupos:

Grupo I - classes 43m, 432 e m 3m

Grupo II - classes 23, m 3

Em cada caso, a forma da matriz representativa dos coeficientes de Pockell é :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Grupo I

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Grupo II

Para ambos os grupos, a equação (I -11b) reduz-se então a:

$$K_{\alpha\beta,\gamma\eta} = -E_1^2\, P_{\alpha\beta,\gamma\eta}$$

Tanto para o sistema cúbico como para os demais a substituição dêsses valôres em I - 11b, assume uma forma mais simples fazendo-se a seguinte troca na nomenclatura até agora adotada para os sub índices

$\alpha\beta$ ou $\gamma\eta$

nomenclatura	antiga	11	22	33	23,32	13,31	12,21
nomenclatura	nova	1	2	3	4	5	6

De acôrdo com a equação (I - 11b) as componentes $g_{\alpha\beta,\gamma\eta}$ serão dadas tanto para o grupo I como para o grupo II por:

$$g_{11} = \frac{-E^2}{2^{3/2}}\left[P_{11}e_1S_{\theta_1} + P_{12}e_2S_{\theta_2} + P_{21}e_3S_{\theta_3}\right]$$

$$g_{22} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} \left[p_{21} e_1 S_{\theta_1} + p_{11} e_2 S_{\theta_2} + p_{12} e_3 S_{\theta_3} \right]$$

$$g_{33} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} \left[p_{12} e_1 S_{\theta_1} + p_{21} e_2 S_{\theta_2} + p_{11} e_3 S_{\theta_3} \right]$$

$$g_{12} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} \left[e_1 S_{\theta_2} + e_2 S_{\theta_1} \right] p_{44} = g_{21}$$

$$g_{32} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} \left[e_2 S_{\theta_3} + e_3 S_{\theta_2} \right] p_{44} = g_{23}$$

$$g_{31} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} \left[e_1 S_{\theta_3} + e_3 S_{\theta_1} \right] p_{44} = g_{31}$$

Para o grupo I, $p_{12} = p_{21}$

Os valôres das polarizações e_i e das componentes do vetor unitário $\vec{S}_\theta$ (direção de propagação do fonon) são fornecidos pela tabela I.

Tanto nesta como nas demais tabelas dêste capítulo foi usada a seguinte notação para a designação dos modos j.

L = longitudinal

T = transversal degenerado

T_h = transversal contido no plano 1 - 2

T_3 = transversal segundo o eixo 3

T_v = transversal normal ao T_h correspondente.

Letras gregas: possíveis direções de propagação dos fonons de polarização pura.

Assim por exemplo:

αT_h corresponde a : fonons transversalmente polarizado no plano 1 - 2 propagando-se segundo a direção q .

TABELA 1 - Componentes dos vetores $\vec{S}\theta$ e $\vec{e}$, correspondentes a cristais cúbicos C_I e C_{II}

Modo(j)	S_{θ_i}	e_i
T_α (degenerado)	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \mathrm{sen}\theta$ $e_3 = 0$
L_α	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
L_β	$S_{\theta_1} = 1/3^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 1/3^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 1/3^{1/2}$	$e_1 = 1/3^{1/2}$ $e_2 = 1/3^{1/2}$ $e_3 = 1/3^{1/2}$
T_β (degenerado)	$S_{\theta_1} = 1/3^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 1/3^{1/2}$	$e_1 = -2^{-1/2}(\cos\theta + 3^{-1/2}\mathrm{sen}\theta)$ $e_2 = 2^{-1/2}(\cos\theta - 3^{-1/2}\mathrm{sen}\theta)$

T_β (degenerado)	$S_{\theta_3} = 1/3^{1/2}$	$e_3 = (2/3)^{1/2} \operatorname{sen}\theta$
L_γ	$S_{\theta_1} = 1/2^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 1/2^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 1/2^{1/2}$ $e_2 = 1/2^{1/2}$ $e_3 = 0$
$T_{h\gamma}$	$S_{\theta_1} = 1/2^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 1/2^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 1/2^{1/2}$ $e_2 = 1/2^{1/2}$ $e_3 = 0$
$T_{3\gamma}$	$S_{\theta_1} = 1/2^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 1/2^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$

O cálculo de $g_{\alpha\beta}$ leva aos valôres apresentados nas tabelas 2 e 3 sendo a primeira referente ao grupo I e a segunda ao grupo II. Essas tabelas contêm todos os valôres não nulos de $g_{\alpha\beta}$.

TABELA 2 - Valôres de $g_{\alpha\beta}$ não nulos correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes ao grupo - C_I

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
T_α	$g_{32} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{44}\ \mathrm{sen}\theta$ $g_{31} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{44} \cos\theta$
$L\alpha$	$g_{11} = g_{22} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{12}$ $g_{33} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{11}$
L_β	$g_{11} = g_{22} = g_{33} = \frac{-E^2}{3 \times 2^{3/2}} (p_{11} + 2p_{12})$ $g_{12} = g_{23} = g_{13} = \frac{-E^2}{3 \times 2^{1/2}} p_{44}$
T_β (degenerado)	$g_{11} = \frac{-E^2}{12} \left[3^{1/2} \cos\theta + \mathrm{sen}\theta \right] (p_{12} - p_{11})$ $g_{22} = -g_{11}$ $g_{33} = \frac{-E^2}{6} (p_{11} - 2p_{12})\ \mathrm{sen}\theta$ $g_{12} = \frac{E^2}{6} p_{44}\ \mathrm{sen}\theta$

T_β (degenerado)	$g_{32} = \frac{-E^2}{12}\,(3^{1/2}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,p_{44}$ $g_{13} = \frac{-E^2}{12}\,(\operatorname{sen}\theta-(3)^{1/2}\cos\theta)\,p_{44}$
L_γ^-	$g_{11} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}\,(p_{11}+p_{12})$ $g_{22} = g_{11}$ $g_{33} = \frac{-E^2}{2^{3/2}}\,p_{12}$ $g_{12} = \frac{-E^2}{2^{3/2}}\,p_{44}$
$T_{h\gamma}$	$g_{11} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}\,(p_{12}-p_{11})$ $g_{22} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}\,(p_{12}+p_{11})$
$T_{3\gamma}$	$g_{13} = g_{23} = \frac{-E^2}{4}\,p_{44}$

TABELA 3 - Valôres de $g_{\alpha\Gamma\beta}$ não nulos , correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes ao grupo C_{II}

Modo	Componente $g_{\alpha\beta} = g_{n\beta}$
Modo (j) T_α degenerado	$g_{23} = \frac{-\acute{E}^2}{2^{3/2}} p_{44} \operatorname{sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{44} \cos\theta$
L_α	$g_{11} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{21}$ $g_{22} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{12}$ $g_{33} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{11}$
L_β	$g_{11} = \frac{-E^2}{3x2^{3/2}} (p_{11}+p_{12}+P_{21})$ $g_{22} = g_{33} = g_{11}$ $g_{12} = \frac{-E^2}{3x2^{1/2}} p_{44}$ $g_{23} = g_{13} = g_{12}$

T_{β} degenerado	$g_{11} = \frac{-E^2}{12}\left[3^{1/2}\cos\theta(p_{12}-p_{11})+\mathrm{sen}\theta(2p_{21}-p_{12}-p_{11})\right]$ $g_{22} = \frac{-E^2}{12}\left[3^{1/2}\cos\theta(p_{11}-p_{21})+\mathrm{sen}\theta(2p_{12}-p_{21}-p_{11})\right]$ $g_{33} = \frac{-E^2}{12}\left[3^{1/2}(p_{21}-p_{12})\cos\theta+(2p_{11}-p_{21}-p_{12})\mathrm{sen}\theta\right]$ $g_{12} = \frac{E^2}{6} p_{44}\ \mathrm{sen}\theta$ $g_{32} = \frac{-E^2}{12}\left(3^{1/2}\cos\theta+\mathrm{sen}\theta\right) p_{44}$ $g_{13} = \frac{-E^2}{12}\left(\mathrm{sen}\theta-(3)^{1/2}\cos\theta\right) p_{44}$
L_{γ}	$g_{11} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}(p_{11}+p_{12})$ $g_{22} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}(p_{11}+p_{21})$ $g_{33} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}(p_{12}+p_{21})$ $g_{12} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{44}$
$T_{h\gamma}$	$g_{11} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}(p_{12}-p_{11})$ $g_{22} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}(p_{21}+p_{11})$ $g_{33} = \frac{-E^2}{2^{5/2}}(p_{21}-p_{12})$

TABELA 4 - Forma do Sensor Brillouin para fonons propagando-se em cristais cúbicos segundo direções de propagação de modos puros.

Modo(j)	GRUPO C_{I} $g_{\alpha\beta} \not\equiv g_{\beta\alpha}$	GRUPO C_{II} $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
T_{α}	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$
L_{α}	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$
L_{β}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$
T_{β}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(5)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$
L_{β}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$

$T_{h\gamma}$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \circ \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$
$T_{3\gamma}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \circ \end{pmatrix}_{(1)}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \circ & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(1)}$

<u>Simetria tetragonal</u>

Tanto para cristais pertencentes a esta simetria, bem como para os demais uniaxiais (simetrias hexagonal e trigonal), o tensor constante dielétrico adquire a forma

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad ([illegible])$$

Consequentemente, a equação (I-11b) reduz-se para todos os cristais uniaxiais, à forma:

$$K_{\alpha\beta,\gamma\eta} = E_{\alpha\alpha} p_{\alpha\beta,\gamma\eta} E_{\beta\beta}$$

Devido às diferenças apresentadas na forma das matrizes que representam as constantes de Pockell, as classes desta simetria reunem-se em [illegible] grupos:

Grupo T_I : incluindo as classes 4[illegible], 4mm, 5[illegible]m, 4/mmm.

Grupo T_{II} : incluindo as classes 4, $\bar{4}$, 4/m

A forma assumida pelos tensores de Pockell para cada um dêsses grupos é:

Grupo T_I

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{pmatrix} \qquad (7)$$

onde $x = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})$

Grupo T_{II}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Nestas tabelas 5 e 6 usou-se

$$A = C_{11}-2C_{44}-C_{13}$$

$$B = C_{11}-2C_{66}-C_{12}$$

$$C = C_{33}-2C_{44}-C_{13}$$

$$b = \frac{C_{11}-2C_{66}-C_{12}}{4C_{16}}$$

tem-se que:

$$u_1=-b+(1+b^2)^{1/2}+2^{1/2}\left[1+b^2-b(1+b^2)^{1/2}\right]^{1/2}$$

$$u_2=-b-(1+b^2)^{1/2}+2^{1/2}\left[1+b^2+b(1+b^2)^{1/2}\right]^{1/2}$$

$$\sigma_{1,2}=\frac{A}{C}(u_{1,2}^2+1)+\frac{2B}{C}\frac{u_{1,2}^2(u_{1,2}^2+1)}{u_{1,2}^4-6u_{1,2}^2+1}$$

$$\bar{\xi}_{1,2}=(1+u_{1,2}^2)^{1/2}$$

$$\xi_{1,2}=(1+u_{1,2}^2+v_{1,2}^2)^{1/2}$$

$$M=\frac{C^{1/2}}{(2A-B+2C)^{1/2}} \qquad M_1=\frac{C^{1/2}}{(A+C)^{1/2}}$$

$$N=\frac{(2A-B)^{1/2}}{(2A-B+2C)^{1/2}} \qquad N_1=\frac{A^{1/2}}{(A+C)^{1/2}}$$

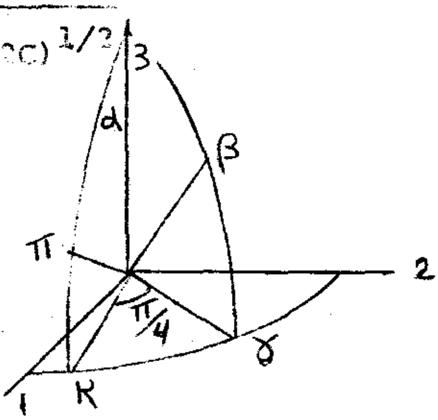


Fig. 1-2e

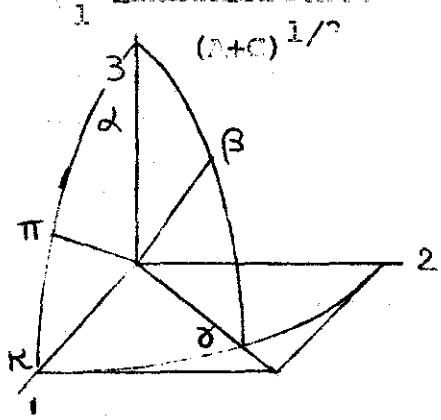


Fig.1-3e

As tabelas 5 e 6 indicam através de seuas componentes as direções de propagação de modos puros os quais estão representados nas figuras 1-2e e 1-3e.

TABELA 5 - Componentes dos vetores $\vec{S}\theta$ e $\vec{e}$, em função das constantes elásticas c_{ij}, correspondentes ao grupo T_I

Direção de prop. dos modos puros		Polarização
αL	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_3 = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
αT (degenerado)	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_3 = 1$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \mathrm{sen}\theta$ $e_3 = 0$
βL	$S_1 = M$ $S_2 = M$ $S_3 = N$	$e_1 = M$ $e_2 = M$ $e_3 = N$
βT_h	$S_1 = M$ $S_2 = M$ $S_3 = N$	$e_1 = -1/2^{1/2}$ $e_2 = 1/2^{1/2}$ $e_3 = 0$
βT_v	$S_1 = M$ $S_2 = M$ $S_3 = N$	$e_1 = -N/2^{1/2}$ $e_2 = -N/2^{1/2}$ $e_3 = M/2^{1/2}$
πL	$S_1 = M_1$ $S_2 = 0$ $S_3 = N_1$	$e_1 = M_1$ $e_2 = 0$ $e_3 = N_1$

πT_2	$S_1 = \dot{M}_1$ $S_2 = 0$ $S_3 = N_1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1$ $e_3 = 0$
πT_v	$S_1 = M_1$ $S_2 = 0$ $S_3 = N_1$	$e_1 = -N_1$ $e_2 = 0$ $e_3 = M_1$
γL	$S_1 = 1/2^{1/2}$ $S_2 = 1/2^{1/2}$ $S_3 = 0$	$e_1 = 1/2^{1/2}$ $e_2 = 1/2^{1/2}$ $e_3 = 0$
γT_h	$S_1 = 1/2^{1/2}$ $S_2 = 1/2^{1/2}$ $S_3 = 0$	$e_1 = -1/2^{1/2}$ $e_2 = 1/2^{1/2}$ $e_3 = 0$
γT_3	$S_1 = 1/2^{1/2}$ $S_2 = 1/2^{1/2}$ $S_3 = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
KL	$S_1 = 1$ $S_2 = 0$ $S_3 = 0$	$e_1 = 1$ $e_2 = 0$ $e_3 = 0$
KT_2	$S_1 = 1$ $S_2 = 0$ $S_3 = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1$ $e_3 = 0$

KT_3	$S_1 = 1$ $S_2 = 0$ $S_3 = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$

TABELA 6 - Componentes dos vetores $\vec{S}$ e $\vec{e}$, em função das constantes elásticas c_{ij}, correspondentes ao grupo T_{II}

Direção de propagação de modos puros		Polarização
αL	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_3 = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
αT (degenerado)	$S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $S_3 = 1$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \operatorname{sen}\theta$ $e_3 = 0$
βL	$S_1 = 1/\xi_1$ $S_2 = u_1/\xi_1$ $S_3 = v_1/\xi_1$	$e_1 = 1/\xi_1$ $e_2 = u_1/\xi_1$ $e_3 = v_1/\xi_1$
βT_h	$S_1 = 1/\xi_1$ $S_2 = u_1/\xi_1$ $S_3 = v_1/\xi_1$	$e_1 = -u_1/\xi_1$ $e_2 = 1/\xi_1$ $e_3 = 0$
βT_v	$S_1 = 1/\xi_1$ $S_2 = u_1/\xi_1$ $S_3 = v_1/\xi_1$	$e_1 = -v_1/\bar{\xi}_1\xi_1$ $e_2 = -u_1v_1/\bar{\xi}_1\xi_1$ $e_3 = \bar{\xi}_1/\xi_1$
πL	$S_1 = 1/\xi_2$ $S_2 = u_2/\xi_2$ $S_3 = v_2/\xi_2$	$e_1 = 1/\xi_2$ $e_2 = u_2/\xi_2$ $e_3 = v_2/\xi_2$

πT_h	$S_1 = 1/\xi_2$ $S_2 = u_2/\xi_2$ $S_3 = v_2/\xi_2$	$e_1 = -u_2/\xi_2$ $e_2 = 1/\xi_2$ $e_3 = 0$
πT_V	$S_1 = 1/\xi_2$ $S_2 = u_2/\xi_2$ $S_3 = v_2/\xi_2$	$e_1 = -v_2/\bar{\xi}_2\xi_2$ $e_2 = -u_2 v_2/\bar{\xi}_2\xi_2$ $e_3 = \xi_2/\xi_2$
γL	$S_1 = 1/\bar{\xi}_1$ $S_2 = u_1/\bar{\xi}_1$ $S_3 = 0$	$e_1 = 1/\bar{\xi}_1$ $e_2 = u_1/\bar{\xi}_1$ $e_3 = 0$
γT_h	$S_1 = 1/\bar{\xi}_1$ $S_2 = u_1/\bar{\xi}_1$ $S_3 = 0$	$e_1 = -u_1/\bar{\xi}_1$ $e_2 = 1/\bar{\xi}_1$ $e_3 = 0$
γT_3	$S_1 = 1/\bar{\xi}_1$ $S_2 = u_1/\bar{\xi}_1$ $S_3 = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
KL	$S_1 = 1/\bar{\xi}_2$ $S_2 = u_2/\bar{\xi}_2$ $S_3 = 0$	$e_1 = 1/\bar{\xi}_2$ $e_2 = u_2/\bar{\xi}_2$ $e_3 = 0$
KT_h	$S_1 = 1/\bar{\xi}_2$ $S_2 = u_2/\bar{\xi}_2$ $S_3 = 0$	$e_1 = -u_2/\bar{\xi}_2$ $e_2 = 1/\xi_2$ $e_3 = 0$
KT_3	$S_1 = 1/\bar{\xi}_2$ $S_2 = u_2/\bar{\xi}_2$ $S_3 = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$

Segundo I - 11b, as componentes $g_{\alpha\beta}$ serão dads para cristais tetragonais em geral por:

$$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{11}e_1S_{\theta_1}+p_{12}e_2S_{\theta_2}+p_{13}e_3S_{\theta_3}+p_{16}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1})\right]$$

$$g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{13}(e_1S_{\theta_1}+p_{11}e_2S_{\theta_2}+p_{13}e_3S_{\theta_3}-p_{16}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1})\right]$$

$$g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}}\left[p_{13}(e_1S_{\theta_1}+e_2S_{\theta_2})+p_{33}e_3S_{\theta_3}\right]$$

$$g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{66}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1})+p_{16}(e_1S_{\theta_1}-e_2S_{\theta_2})\right] = g_{21}$$

$$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{44}(e_2S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_2})+p_{45}(e_1S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_1})\right] = g_{32}$$

$$g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{44}(e_1S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_1})-p_{45}(e_2S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_2})\right] = g_{31}$$

Estas expressões simplificam-se quando aplicadas ao Grupo T_I pois nêsse caso $p_{16}=p_{61}=p_{45}=0$

O cálculo dos $g_{\alpha\beta}$ leva os valôres apresentados nas tabelas 7 e 8 sendo a primeira referente ao grupo T_I e a segunda ao grupo T_{II}. Essas tabelas contém todos os valôres não nulos de $g_{\alpha\beta}$.

TABELA 7 - Valôres de $g_{\alpha\beta}$ não nulos correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes ao grupo - T_I

Modo	componentes $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{13} = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT (degenerado)	$g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} p_{44} \operatorname{sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} p_{44} \cos\theta$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \left[(p_{11}+p_{12}) M^2 + p_{13} N^2\right] = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} \left[2M^2 p_{13} + N^2 p_{33}\right]$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{1/2}} M^2 p_{66}$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{1/2}} MN\, p_{44} = g_{13}$
βT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2 M}{4} (p_{12}-p_{11}) = -g_{22}$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{4} N\, p_{44} = -g_{13}$

βT_v	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{4} MN\ (2p_{13}-p_{11}-p_{12}) = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2\ MN}{2}\ (p_{33}-p_{13})$ $g_{12} = \frac{E_1^2 MN}{4}\ p_{66}$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{4}\ (2M^2-N^2)p_{44} = g_{13}$
πL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\ (M_1^2\ p_{11}+N_1^2\ p_{13})$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\ (M_1^2\ p_{12}+N_1^2\ p_{13})$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}}\ (M_1^2\ p_{13}+N_1^2\ p_{33})$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{1/2}}\ M_1N_1\ p_{44}$
πT_2	$g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\ M_1\ p_{66}$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\ N_1\ p_{44}$

πT_v	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} M_1 N_1 \ (p_{13}-p_{11})$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} M_1 N_1 \ (p_{13}-p_{12})$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} M_1 N_1 \ (p_{33}-p_{13})$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (M_1^2 - N_1^2) \ P_{44}$
L	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} (p_{11}+p_{12}) = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{13}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{66}$
γT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} (p_{12}-p_{11}) = -g_{22}$
γT_3	$g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{4} p_{44} = g_{13}$
KL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{11}$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{12}$

KL	$g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{13}$
KT_2	$g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{66}$
KT_3	$g_{13} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{44}$

TABELA 8 - Valôres do $g_{\alpha\beta}$ não nulos correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes ao grupo - T_{II}

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \cdot p_{13} = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT (degenerado)	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} (p_{44}\text{sen}\theta + p_{45}\cos\theta)$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} (p_{44}\cos\theta - p_{45}\text{sen}\theta)$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_1^2}\left[p_{11}+u_1(p_{12}u_1+2p_{16})+v_1^2\ p_{13}\right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_1^2}\left[p_{12}+u_1(p_{11}u_1-2p_{16})+v_1^2\ p_{13}\right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\xi_1^2}\left[p_{13}(1+u_1^2)+p_{33}\ v_1^2\right]$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_1^2}\left[2u_1p_{66}+(1-u_1^2)\ p_{16}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3v_1}{2^{1/2}\xi_1^2} (u_1p_{44}+p_{45})$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3v_1}{2^{1/2}\xi_1^2} (p_{44}-u_1p_{45})$

βT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_1^2}\left[u_1(p_{12}-p_{11})+(1-u_1^2)p_{16}\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_1^2}\left[(1-u_1^2)p_{66}-2u_1p_{16}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3v_1}{2^{3/2}\xi_1^2}(p_{44}-u_1p_{45})$ $g_{13} = \frac{E_1E_3v_1}{2^{3/2}\xi_1^2}(u_1p_{44}+p_{45})$
βT_v	$g_{11} = \frac{-E_1^2v_1}{2^{3/2}\xi_1^2\bar{\xi}_1}\left[\bar{\xi}_1^2p_{13}-p_{11}-u_1(u_1p_{12}+2p_{16})\right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2v_1}{2^{3/2}\xi_1^2\bar{\xi}_1}\left[\bar{\xi}_1^2p_{13}-p_{12}-u_1(u_1p_{11}-2p_{16})\right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2v_1}{2^{3/2}\xi_1^2\bar{\xi}_1}\left[\bar{\xi}_1^2p_{33}-(1+u_1^2)p_{13}\right]$ $g_{12} = \frac{-E_1^2v_1}{2^{3/2}\bar{\xi}_1\xi_1^2}\left[(u_1^2-1)p_{16}-2u_1p_{66}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\xi_1^2\bar{\xi}_1}\left[(\bar{\xi}_1^2-v_1^2)\ (u_1p_{44}+p_{45})\right]$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\xi_1^2\bar{\xi}_1}(\bar{\xi}_1^2-v_1^2)\left[p_{44}-u_1p_{45}\right]$
πL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_2^2}\left[p_{11}+v_2^2p_{13}+u_2(u_2p_{12}+2p_{16})\right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_2^2}\left[p_{12}+v_2^2p_{13}+u_2(u_2p_{11}-2p_{16})\right]$

πL	$g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\xi_2^2}\left[(1+u_2^2)\ P_{13} + v_2^2\ P_{33}\right]$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_2^2}\left[2u_2\ P_{66} + (1-u_2^2)\ P_{16}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{1/2}\xi_2^2} v_2 (u_2\ P_{44} + P_{45})$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{1/2}\xi_2^2}\ v_2\ (P_{44} - v_2\ P_{45})$
πT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_2^2}\left[u_2(P_{12} - P_{11}) + (1-u_2^2)\ P_{16}\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\xi_2^2}\left[(1-u_2^2)\ P_{66} - 2u_2\ P_{16}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}\xi_2^2}\ v_2\ (P_{44} - u_2\ P_{45})$ $g_{13} = \frac{E_1 E_3}{2^{3/2}\xi_2^2}\ v_2\ (u_2\ P_{44} + P_{45})$
πT_v	$g_{11} = \frac{+E_1^2 v_2}{2^{3/2}\xi_2^2 \bar{\xi}}\left[u_2^2 P_{12} + P_{11} + 2u_2 P_{16} - \bar{\xi}_2^2 P_{13}\right]$ $g_{22} = \frac{+E_1^2 v_2}{2^{3/2}\xi_2^2 \bar{\xi}_2}\left[P_{12} + u_2^2\ P_{11} - 2u_2\ P_{16} - \bar{\xi}_2^2 P_{13}\right]$ $g_{33} = \frac{\mp E_3^2 v_2}{2^{3/2}\xi_2^2 \bar{\xi}_2}\left[\bar{\xi}_2^2\ P_{33} - (u_2^2 + 1)\ P_{13}\right]$

πT_v	$g_{12} = \frac{-E_1^2 v_2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2 \xi_2^2}\left[(u_2^2-1)p_{16}-2u_2p_{66}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\xi_2^2\bar{\xi}_2}\ (\bar{\xi}_2^2-v_2^2)\ (u_2p_{44}+p_{45})$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\xi_2^2\bar{\xi}_2}\ (\bar{\xi}_2^2-v_2^2)\ (p_{44}-u_2p_{45})$
γL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_1^2}\left[p_{11}+u_1(u_1p_{12}+2p_{16})\right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_1^2}\left[p_{12}+u_1(u_1p_{11}-2p_{16})\right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_1^2}\ (1+u_1^2)p_{13}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_1^2}\left[2u_1p_{66}+(1-u_1^2)p_{16}\right]$
γT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_1^2}\left[u_1(p_{12}-p_{11})+(1-u_1^2)p_{16}\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_1^2}\left[(1-u_1^2)p_{66}-2u_1p_{16}\right]$
γT_3	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\bar{\xi}_1}\ (u_1p_{44}+p_{45})$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\bar{\xi}_1}\ (p_{44}-u_1p_{45})$

KL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2^2}\left[p_{11} + u_2(u_2 p_{12} + 2p_{16})\right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2^2}\left[p_{12} + u_2(u_2 p_{11} - 2p_{16})\right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2^2}(1+u_2^2)p_{13}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2^2}\left[2u_2 p_{66} + (1-u_2^2)p_{16}\right]$
KT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2^2}\left[u_2(p_{12} - p_{11}) + (1-u_2^2)p_{16}\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\xi}_2^2}\left[(1-u_2^2)p_{66} - 2u_2 p_{16}\right]$
KT_3	$g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}\bar{\xi}_2}(u_2 p_{44} + p_{45})$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}\bar{\xi}_2}(p_{44} - u_2 p_{45})$

TABELA 9 --Forma do tensor Brillouin para fonons propagando-se em cristais tetragonais segundo direções de propagação de modos puros.

<table>
<tr><th>Modo</th><th colspan="2">Sempre simétricas</th></tr>
<tr><td></td><td>Grupo T_I</td><td>Grupo T_{II}</td></tr>
<tr><td>αL</td><td colspan="2">$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$</td></tr>
<tr><td>αT
(degenerado)</td><td colspan="2">$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$</td></tr>
<tr><td>βL</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$</td></tr>
<tr><td>βT_h</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \bullet \\ & \bullet & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$</td></tr>
<tr><td>βT_v</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$</td></tr>
</table>

πL	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$
π	$T_2 \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$	$T_h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$
πT_v	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$
γL	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$	
γT_h	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(1)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$
γT_3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(1)}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$
KL	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$

K	$T_2 \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(1)}$	$T_h \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$
KT_3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(1)}$	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$

Simetria Hexagonal.

Tratando-se de uma simetria uniaxial o tensor dielétrico apresenta-se aqui a mesma forma que cristais tetragonais.

Devido a diferenças apresentadas na forma das matrizes que representam as constantes de Pockell as classes desta simetria reunem-se em 2 grupos:

Grupo H_I : incluindo as classes $\bar{6}m2$, 6mm, 6mmm

Grupo H_{II}: incluindo as classes 6, $\bar{6}$, 6/m.

A forma assumida pelos tensores de Pockell para cada um dêsses grupos é:

Grupo H_I Grupo H_{II}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X \end{pmatrix} \quad (6) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & 0 & \cdot \\ \bullet & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & X \end{pmatrix} \quad (8)$$

onde $X = \frac{1}{2}\ (p_{11} - p_{12})$

A tabela 10 indica através de suas componentes, tanto as direções de propagação de modos puros como as correspondentes polarizações para os dois grupos (H_1 e H_{II}). Foi adotada a mesma notação que para o grupo T_I (no que se refere aos valores de M_I e N_I).

Para ambos grupos desta simetria existem 3 direções de propagação para fonons puros as quais são representadas pela figura 1-4e

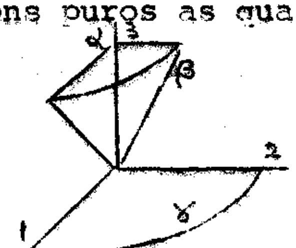


Fig. 1-4e

TABELA 10 - Componentes dos vetores $\vec{S}_\theta$ e $\vec{e}$, em função das constantes elásticas c_{ij}, correspondentes a cristais pertencentes à simetria hexagonal

Direção de propagação de modos puros Modo	$\vec{S}\theta$	Polarização
αL	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
αT (degenerado)	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \operatorname{sen}\theta$ $e_3 = 0$
βL	$S_{\theta_1} = M_1 \cos\theta$ $S_{\theta_2} = M_1 \operatorname{sen}\theta$ $S_{\theta_3} = N_1$	$e_1 = M_1 \cos\theta$ $e_2 = M_1 \operatorname{sen}\theta$ $e_3 = N_1$
βT_V	$S_{\theta_1} = M_1 \cos\theta$ $S_{\theta_2} = M_1 \operatorname{sen}\theta$	$e_1 = -N_1 \cos\theta$ $e_2 = -N_1 \operatorname{sen}\theta$

βT_v	$S_{\theta_3} = N_1$	$e_3 = M_1$
βT_h	$S_{\theta_1} = M_1 \cos\theta$ $S_{\theta_2} = M_1 \operatorname{sen}\theta$ $S_{\theta_3} = N_1$	$e_1 = -\operatorname{sen}\theta$ $e_2 = \cos\theta$ $e_3 = 0$
γL	$S_{\theta_1} = \cos\theta$ $S_{\theta_2} = \operatorname{sen}\theta$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \operatorname{sen}\theta$ $e_3 = 0$
γT_h	$S_{\theta_1} = \cos\theta$ $S_{\theta_2} = \operatorname{sen}\theta$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = -\operatorname{sen}\theta$ $e_2 = \cos\theta$ $e_3 = 0$
γT_3	$S_{\theta_1} = \cos\theta$ $S_{\theta_2} = \operatorname{sen}\theta$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$

Nesta tabela foi adotada a mesma nomenclatura que para o grupo T_I no que se refere aos valôres de M_1 e N_1.

Segundo 2-14 as componentes de $g_{\alpha\beta}$ serão dadas por:

$$g_{11}=\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{11}e_1S_{\theta_1}+\bar{p}_{12}e_2S_{\theta_2}+p_{13}e_3S_{\theta_3}+p_{16}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1})\right]$$

$$g_{22}=\frac{-E_1^2}{2^{5/2}}\left[p_{12}e_1S_{\theta_1}+p_{11}e_2S_{\theta_2}+p_{13}e_3S_{\theta_3}-p_{16}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1})\right]$$

$$g_{33}=\frac{-E_3^2}{2^{3/2}}\left[p_{13}(e_1S_{\theta_1}+e_2S_{\theta_2})+p_{33}e_3S_{\theta_3}\right]$$

$$g_{12}=\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{66}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1})+p_{16}(e_2S_{\theta_2}-e_1S_{\theta_1})\right]=g_{21}$$

$$g_{23}=\frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{44}(e_2S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_2})+p_{45}(e_1S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_1})\right]=g_{32}$$

$$g_{13}=\frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{44}(e_1S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_1})-p_{45}(e_2S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_2})\right]=g_{31}$$

Estas expressões simplificam-se quando aplicadas ao grupo H_I pois nêsse caso $p_{16}=p_{45}=0$

e tanto para H_I
como H_2 :

$$p_{66}=\frac{1}{2}(p_{11}-p_{12})$$

O cálculo dos $g_{\alpha\beta}$ leva aos valôres apresentados nas tabelas 10 e 11 sendo a primeira referente ao grupo H_I e a segunda ao H_{II}. Essas tabelas contêm todos os valôres não nulos de $g_{\alpha\beta}$.

TABELA 11 - Valôres das componentes $g_{\alpha\beta}$ correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes à simetria hexagonal, grupo H_I

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{13} = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT (degenerado)	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} p_{44} \operatorname{sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} p_{44} \cos\theta$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \left[M_1^2 (p_{11}\cos^2\theta + p_{12}\operatorname{sen}^2\theta) + N_1^2 p_{13} \right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \left[M_1^2 (p_{12}\cos^2\theta + p_{11}\operatorname{sen}^2\theta) + N_1^2 p_{13} \right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} (M_1^2 p_{13} + N_1^2 p_{33})$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} (p_{11}-p_{12}) M_1^2 \operatorname{sen}2\theta$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3M_1N_1}{2^{1/2}} p_{44} \operatorname{sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3M_1N_1}{2^{1/2}} p_{44} \cos\theta$

βT_v	$g_{11} = \frac{E_1^2 M_1 N_1}{2^{3/2}} (p_{11}\cos^2\theta + p_{12}\mathrm{sen}^2\theta - p_{13})$ $g_{22} = \frac{E_1^2 M_1 N_1}{2^{3/2}}\ p_{12}\cos^2\theta + p_{11}\mathrm{sen}^2\theta - p_{13})$ $g_{33} = \frac{-E_3^2 M_1 N_1}{2^{3/2}} (p_{33} - p_{13})$ $g_{12} = \frac{+E_1^2 M_1 N_1}{2^{5/2}} (p_{11} - p_{12})\ \mathrm{sen}\ 2\ \theta$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (M_1^2 - N_1^2)\ p_{44}\mathrm{sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (M_1^2 - N_1^2)\ p_{44}\cos\theta$
βT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2 M_1}{2^{3/2}} (p_{12} - p_{11})\ \mathrm{sen}\ 2\theta = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2 M_1}{2^{5/2}} (p_{11} - p_{12})\ \cos\ 2\theta$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3 N_1}{2^{3/2}}\ p_{44}\cos\theta$ $g_{13} = \frac{+E_1 E_3 N_1}{2^{3/2}}\ p_{44}\mathrm{sen}\theta$
γL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{11}\cos^2\theta + p_{12}\mathrm{sen}^2\theta)$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{12}\cos^2\theta + p_{11}\mathrm{sen}^2\theta)$

γL	$g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{13}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} (p_{11}-p_{12}) \text{ sen } 2\theta$
γT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} (p_{12}-p_{11}) \text{ sen } 2\theta = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} (p_{11}-p_{12}) \cos 2\theta$
γT_3	$g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} p_{44} \text{ sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} p_{44} \cos\theta$

TABELA 12 - Valôres das componentes $g_{\alpha\beta}$ correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes à simetria hexagonal, Grupo H_{II}

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{13} = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT (degenerado)	$g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (p_{44} \operatorname{sen}\theta + p_{45} \cos\theta)$. $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (p_{44} \cos\theta - p_{45} \operatorname{sen}\theta)$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \left[M_1^2 (p_{11} \cos^2\theta + p_{12} \operatorname{sen}^2\theta + p_{16} \operatorname{sen} 2\theta) + p_{13} N_1^2 \right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \left[M_1^2 (p_{12} \cos^2\theta + p_{11} \operatorname{sen}^2\theta - p_{16} \operatorname{sen} 2\theta) + p_{13} N_1^2 \right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} (M_1^2 p_{13} + N_1^2 p_{33})$ $g_{12} = \frac{-E_1^2 M_1^2}{2^{5/2}} \left[(p_{11} - p_{12}) \operatorname{sen} 2\theta - 2 p_{16} \cos 2\theta \right]$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3 M_1 N_1}{2^{7/2}} (p_{44} \operatorname{sen}\theta + p_{45} \cos\theta)$

βL	$g_{13} = \frac{-E_1E_3M_1N_1}{2^{1/2}} (p_{44}\cos\theta - p_{45}\mathrm{sen}\theta)$
βT_v	$g_{11} = \frac{+E_1^2M_1N_1}{2^{3/2}} (p_{11}\cos^2\theta + p_{12}\mathrm{sen}^2\theta - p_{13} + p_{16}\mathrm{sen}\ 2\theta)$ $g_{22} = \frac{E_1^2M_1N_1}{2^{3/2}} (p_{12}\cos^2\theta + p_{11}\mathrm{sen}^2\theta - p_{13} - p_{16}\mathrm{sen}\ 2\theta)$ $g_{33} = \frac{-E_3^2M_1N_1}{2^{3/2}} (p_{33} - p_{13})$ $g_{12} = \frac{E_1^2M_1N_1}{2^{5/2}} \left[(p_{11} - p_{12})\mathrm{sen}\ 2\theta - 2p_{16}\cos\ 2\theta\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3(M_1^2 - N_1^2)}{2^{3/2}} (p_{44}\mathrm{sen}\theta + p_{45}\cos\theta)$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3(M_1^2 - N_1^2)}{2^{3/2}} (p_{44}\cos\theta - p_{45}\mathrm{sen}\theta)$
βT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2M_1}{2^{3/2}} \left[(p_{12} - p_{11})\mathrm{sen}\ 2\theta + p_{16}\cos\ 2\theta\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2M_1}{2^{5/2}} \left[(p_{11} - p_{12})\cos\ 2\theta + p_{16}\mathrm{sen}\ 2\theta\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3N_1}{2^{3/2}} (p_{44}\cos\theta - p_{45}\mathrm{sen}\theta)$ $g_{13} = \frac{+E_1E_3N_1}{2^{3/2}} (p_{44}\mathrm{sen}\theta + p_{45}\cos\theta)$

γL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{11}\cos^2\theta + p_{12}\mathrm{sen}^2\theta + p_{16}\mathrm{sen}\ 2\theta)$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{12}\cos^2\theta + p_{11}\mathrm{sen}^2\theta - p_{16}\mathrm{sen}\ 2\theta)$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{13}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} \left[(p_{11}-p_{12})\mathrm{sen}\ 2\theta - 2p_{16}\cos\ 2\theta\right]$
γT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} \left[(p_{12}-p_{11})\mathrm{sen}\ 2\theta + p_{16}\cos\ 2\theta\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{5/2}} \left[(p_{11}-p_{12})\cos\ 2\theta + 2p_{16}\mathrm{sen}\ 2\theta\right]$
γT_3	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} (p_{44}\mathrm{sen}\theta + p_{45}\cos\theta)$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} (p_{44}\cos\theta - p_{45}\mathrm{sen}\theta)$

TABELA 13 - Forma do tensor Brillouin para fonons propagando-se em cristais hexagonais segundo direções de modos puros.

Modo(j)	Grupos H_I e H_{II} $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$	Modo(j)	Grupos H_I e H_{II} $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$	βT_h	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$
αT (degenerado)	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$	γL	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$
βL	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$	γT_h	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$
βT_v	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$	γT_3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$

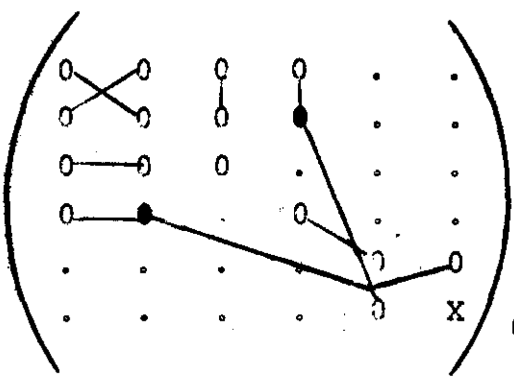
Simetria Romboedral ou Trigonal

Devido a diferenças apresentadas na forma das matrizes que representam as constantes de Pockell, as classes desta simetria reunem-se em dois grupos:

Grupo R_I incluindo as classes 32, 3m , $\bar{3}$m

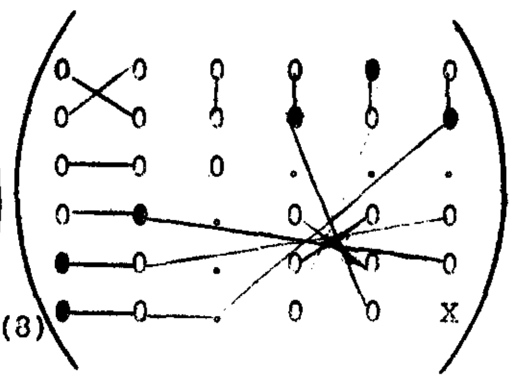
Grupo T_{II} incluindo as classes 3 , $\bar{3}$

A forma assumida pelos tensores de Pockell para cada um dêsses grupos é:



(8)

Grupo R_I



(12)

Grupo R_{II}

onde $X = \frac{1}{2} (p_{11} - p_{12})$

As tabelas 13 e 14 indicam através de suas componentes, tanto as direções de propagação de modos puros como as correspondentes polarizações para os dois grupos.

As direções de propagação de modos puros são 3 , de acôrdo com as figuras 1-5e e 1-6e e foram designadas por α β e γ .

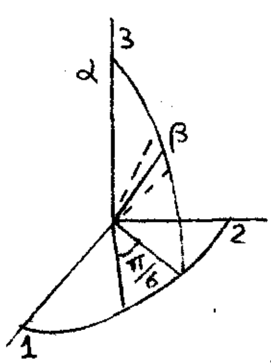


Fig. 1-5e

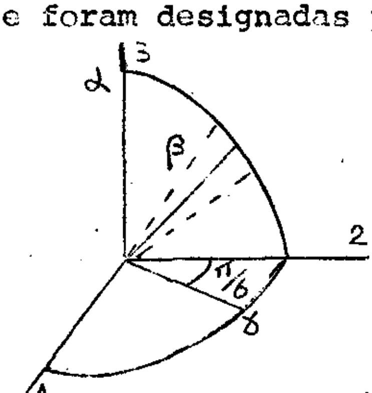


Fig. 1-6e

Nas tabelas que se seguem foi usada a seguinte notação:

K - obtido através da equação:

$$K^3 + 3\,\frac{-C_{14}}{(C_{33}-2C_{44}-C_{13})}\,K^2 - \frac{(C_{11}-2C_{44}-C_{13})}{(C_{33}-2C_{44}-C_{13})}\,K - \frac{C_{14}}{(C_{33}-2C_{44}-C_{13})}=0$$

$$x = (1 + K^2)^{1/2}$$

ν'' - obtido através da equação:

$$\cot 2\nu'' = \frac{C_{11}-2C_{44}-C_{13}}{4C_{14}}$$

$$p^3-3\,\frac{C_{15}}{C_{14}}\,p^2 - 3p + \frac{C_{15}}{C_{14}} = 0$$

q - obtido através da equação:

$$q^3 - \frac{3(p^2+1)}{3p^2-1}\,\frac{C_{14}}{C}\,q^2 - (p^2+1)\,\frac{A}{C}\,q + \frac{(p^2+1)^3}{3p^2-1}\,\frac{C_{14}}{C} = 0$$

onde:

$$A = C_{11} - 2C_{44} - C_{13}$$

$$C = C_{33} - 2C_{44} - C_{13}$$

$$\psi = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$$

$$\bar{\psi} = (1 + p^2)^{1/2}$$

m - obtido através da equação:

$$m^3 + 3\frac{C_{14}}{C_{15}} m^2 - 3m - \frac{C_{14}}{C_{15}} = 0$$

Ademais :

$$m = \frac{1}{p} = tg\omega$$

sendo que:

$$tg\ 3\omega = \frac{C_{15}}{C_{14}}$$

$$n = (1 + m^2)^{1/2}$$

ν' - obtido através da equação :

$$\cot 2\nu' = \frac{m\ (m^2 - 3)}{(m^2 + 1)^{1/2}} \quad \frac{C_{11} - 2C_{44} - C_{12}}{4C_{14}}$$

TABELA 14 - Componentes dos vetores $\vec{S\theta}$ e $\vec{e}$, em função das constantes elásticas c_{ij}, correspondentes ao grupo R_I

Modo(j)	Direção de propagação dos modos puros ($\vec{S\theta}$)	Polarização ($\vec{e}$)
αL	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
αT (degenerado)	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \mathrm{sen}\theta$ $e_3 = 0$
βL	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 1/x$ $S_{\theta_3} = K/x$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1/x$ $e_3 = K/x$
βT_1	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 1/x$ $S_{\theta_3} = K/x$	$e_1 = 1$ $e_2 = 0$ $e_3 = 0$
βT_V	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 1/x$ $S_{\theta_3} = K/x$	$e_1 = 0$ $e_2 = -K/x$ $e_3 = 1/x$

γL	$S_{\theta_1} = 1/2$ $S_{\theta_2} = 3^{1/2}/2$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 1/2$ $e_2 = 3^{1/2}/2$ $e_3 = 0$
$\gamma T'$	$S_{\theta_1} = 1/2$ $S_{\theta_2} = 3^{1/2}/2$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = -(3^{1/2}\cos\nu'')/2$ $e_2 = (\cos\nu'')/2$ $e_3 = \mathrm{sen}\nu''$
$\gamma T''$	$S_{\theta_1} = 1/2$ $S_{\theta_2} = 3^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = (3^{1/2}\mathrm{sen}\nu'')/2$ $e_2 = -(\mathrm{sen}\nu'')/2$ $e_3 = \cos\nu''$

TABELA 15 - Componentes dos vetores $\vec{S}_0$ e $\vec{e}$ em função das constantes elásticas c_{ij}, correspondentes ao grupo R_{II}

Modo j	Direção de propagação dos modos puros .	Polarização
αL	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
αT (degenerado)	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = \cos\theta$ $e_2 = \mathrm{sen}\,\theta$ $e_3 = 0$
βL	$S_{\theta_1} = p/\psi$ $S_{\theta_2} = 1/\psi$ $S_{\theta_3} = q/\psi$	$e_1 = p/\psi$ $e_2 = 1/\psi$ $e_3 = q/\psi$
βT_h	$S_{\theta_1} = p/\psi$ $S_{\theta_2} = 1/\psi$ $S_{\theta_3} = q/\psi$	$e_1 = -1/\psi$ $e_2 = p/\psi$ $e_3 = 0$

βT_v	$S_{\theta_1} = p/\psi$ $S_{\theta_2} = 1/\psi$ $S_{\theta_3} = q/\psi$	$e_1 = -pq/\bar{\psi}\psi$ $e_2 = q/\bar{\psi}\psi$ $e_3 = \bar{\psi}/\psi$
γL	$S_{\theta_1} = m/n$ $S_{\theta_2} = 1/n$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = m/n$ $e_2 = 1/n$ $e_3 = 0$
$\gamma T'$	$S_{\theta_1} = m/n$ $S_{\theta_2} = 1/n$ $S_{\theta_3} = n/\theta$	$e_1 = -(\cos\nu')/n$ $e_2 = (m\cos\nu')/n$ $e_3 = \operatorname{sen}\nu'$
$\gamma T''$	$S_{\theta_1} = m/n$ $S_{\theta_2} = 1/n$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = (\operatorname{sen}\nu')/n$ $e_2 = -(m\operatorname{sen}\nu')/n$ $e_3 = \cos\nu'$

Segundo 2-14 as componentes $g_{\alpha\beta}$ serão dadas por:

$$g_{11}=\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{11}e_1S_{\theta_1}+p_{12}e_2S_{\theta_2}+p_{13}e_3S_{\theta_3}+p_{14}(e_2S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_2})\right]+$$

$$\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{16}(e_1S_{\theta_2}+e_2S_{\theta_1}) - p_{25}(e_3S_{\theta_1}+e_1S_{\theta_3})\right]$$

$$g_{22}=\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[p_{12}e_1S_{\theta_1}+ p_{11}e_2S_{\theta_2}+ p_{13}e_3S_{\theta_3}- p_{14}(e_2S_{\theta_3}+ e_3S_{\theta_2})\right]+$$

$$\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[-p_{16}(e_1S_{\theta_2}+ e_2S_{\theta_1}) + p_{25}(e_3S_{\theta_1}+ e_1S_{\theta_3})\right]$$

$$g_{33}=\frac{-E_3^2}{2^{3/2}}\left[p_{31}\ (e_1S_{\theta_1}+ e_2S_{\theta_2}) + p_{33}e_3S_{\theta_3}\right]$$

$$g_{12}=\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[\frac{p_{11}-p_{12}}{2}\ (e_1S_{\theta_2}+ e_2S_{\theta_1}) + p_{14}(e_1S_{\theta_3}+ e_3S_{\theta_1})\right]+$$

$$\frac{-E_1^2}{2^{3/2}}\left[-p_{16}(e_1S_{\theta_1}- e_2S_{\theta_2}) + p_{25}(e_2S_{\theta_3}+ e_3S_{\theta_2})\right]$$

$$g_{23}=\frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{41}(e_1S_{\theta_1}- e_2S_{\theta_2}) + p_{44}(e_2S_{\theta_3}+ e_3S_{\theta_2})\right]+$$

$$\frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{52}(e_1S_{\theta_2}+ e_2S_{\theta_1}) + p_{45}(e_1S_{\theta_3}+ e_3S_{\theta_1})\right]$$

$$g_{13}=\frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[p_{41}(e_1S_{\theta_2}+ e_2S_{\theta_1}) + p_{44}(e_1S_{\theta_3}+ e_3S_{\theta_1})\right. +$$

$$\frac{-E_1E_3}{2^{3/2}}\left[P_{52}(-e_1S_{\theta_1}+e_2S_{\theta_2}) - P_{45}(e_2S_{\theta_3}+e_3S_{\theta_2})\right]$$

Ao usar essas expressoẽs para as classes pertencentes ao Grupo R_I ê importante lembrar que naquêles casos:

$$P_{16} = P_{25} = P_{52} = P_{45} = 0$$

As componentes $g_{\alpha\beta}$ para R_I e R_{II} encontram-se nas tabelas **16** e **17**.

TABELA 16 - Valôres de $g_{\alpha\beta}$ correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes ao grupo R_I

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{13} = g_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT (degenerado)	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{14} \operatorname{sen}\theta = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{14} \cos\theta$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} p_{44} \operatorname{sen}\theta$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} p_{44} \cos\theta$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2} x^2} \left[p_{12} + K (K p_{13} + 2 p_{14}) \right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2} x^2} \left[p_{11} + K (K p_{13} - 2 p_{14}) \right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2} x^2} (p_{31} + K^2 p_{33})$

βL	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}x^2} \quad (2Kp_{44} - p_{41})$
βT_1	$g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}x} \left[\frac{(p_{11}-p_{12})}{2} + K\, p_{14} \right]$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}x} \left[p_{41} + K\, p_{44} \right]$
βT_v	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}x^2} \left[K(p_{13} - p_{12}) + (1 - K^2)\, p_{14} \right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}x^2} \left[K(p_{13} - p_{11}) - (1 - k^2)\, p_{14} \right]$ $g_{33} = \frac{-E_3^2\, K}{2^{3/2}\, x^2} \quad (p_{33} - p_{31})$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\, x^2} \left[Kp_{41} + (1 - K^2)\, p_{44} \right]$
γL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{7/2}} \quad (p_{11} + 3p_{12})$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{7/2}} \quad (p_{12} + 3p_{11})$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} \quad p_{31}$

γL	$g_{12} = \frac{-E_1^2\ 3^{1/2}}{2^{5/2}}\ (p_{11} - p_{12})$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{5/2}}\ p_{41}$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3\ 3^{1/2}}{2^{5/2}}\ p_{41}$
$\gamma T'$	$g_{11} = \frac{-E_1^2\ 3^{1/2}}{2^{7/2}} \left[\cos \nu''(p_{12} - p_{11}) + 2p_{14}\ \mathrm{sen}\nu'' \right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{7/2}} \left[2p_{14}\mathrm{sen}\nu'' - (p_{11} - p_{12})\ \cos\nu'' \right]$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3\ 3^{1/2}}{2^{5/2}}\ (p_{44}\ \mathrm{sen}\nu'' - p_{41}\ \cos\nu''$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{5/2}}\ (p_{44}\ \mathrm{sen}\nu'' - p_{41}\ \cos\nu'')$
$\gamma T''$	$g_{11} = \frac{-E_1^2\ 3^{1/2}}{2^{7/2}} \left[(p_{11} - p_{12})\ \mathrm{sen}\nu'' + 2p_{14}\ \cos\nu'' \right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{7/2}} \left[(p_{11} - p_{12})\ \mathrm{sen}\nu'' + 2p_{14}\ \cos\nu'' \right]$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3\ 3^{1/2}}{2^{5/2}}\ (p_{44}\ \cos\nu'' - p_{41}\ \mathrm{sen}\nu'')$

$\gamma T''$	$g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{5/2}} \; (p_{41} \operatorname{sen} \nu'' + p_{44} \cos \nu'')$

TABELA 17 - Valôres das componentes $g_{\alpha\beta}$ correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes ao grupo R_{II}

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{13} = g'_{22}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT (degenerado)	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{14} \operatorname{sen}\theta - p_{25} \cos\theta) = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{14} \cos\theta + p_{25} \operatorname{sen}\theta)$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (p_{44} \operatorname{sen}\theta + p_{45} \cos\theta)$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (p_{44} \cos\theta - p_{45} \operatorname{sen}\theta)$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2} \psi^2} \left[p_{11} p^2 + p_{12} + p_{13} q^2 + 2(p_{14} q + p_{16} p - p_{25} pq) \right]$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2} \psi^2} \left[p_{12} p^2 + p_{11} + p_{13} q^2 - 2(p_{14} q + p_{16} p - p_{25} pq) \right]$

βL	$g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\psi^2}\left[p_{31}(p^2+1) + p_{33}q^2\right]$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\psi^2}\left[(p_{11}-p_{12})p-p_{16}(p^2-1)+2(p_{14}pq+p_{25}q)\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\psi^2}\left[p_{41}(p^2-1)+2(p_{44}q+p_{52}p+p_{45}pq)\right]$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\psi^2}\left[2(p_{41}p+p_{44}pq-p_{45}q) - p_{52}(p^2-1)\right]$
βT_h	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\psi^2}\left[(p_{12}-p_{11})p+p_{14}pq+p_{16}(p^2-1)+p_{25}q\right] = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\psi^2}\left[\frac{p_{11}-p_{12}}{2}(p^2-1)-p_{14}q+2p\,p_{16}+p_{25}pq\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\psi^2}\left[-2p\,p_{41}+p_{44}\,pq+(p^2-1)p_{52}-p_{45}\,q\right]$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\psi^2}\left[(p^2-1)p_{41}-p_{44}\,q+2p\,p_{52}-pq\,p_{45}\right]$

	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\psi}\psi^2}\left[pq(P_{25}q-P_{11}p-2P_{16})+q(P_{13}\bar{\psi}^2-P_{12}-P_{14}q)+\bar{\psi}^2(P_{14}-P_{25}p)\right]$
	$g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\psi}\psi^2}\left[pq(2P_{16}-P_{12}p-P_{25}q)+q(P_{14}q-P_{11}+P_{13}\bar{\psi}^2)+\bar{\psi}^2(P_{25}p-P_{14})\right]$
βT_V	$g_{33} = \frac{-E_3^2\ q}{2^{3/2}\bar{\psi}\psi^2}\left[P_{33}\bar{\psi}^2-(p^2+1)P_{31}\right]$
	$g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\psi}\psi^2}\left[pq(pP_{16}-qP_{14}-P_{11}+P_{12})-q(P_{16}+qP_{25})+\bar{\psi}^2(pP_{14}+P_{25})\right]$
	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\bar{\psi}\psi^2}\left[-pq(pP_{41}+2P_{52}+qP_{45})+q(P_{41}-qP_{44})+\bar{\psi}^2(P_{44}+pP_{45})\right]$
	$g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\bar{\psi}\psi^2}\left[pq(pP_{52}-qP_{44}-2P_{41})+q(qP_{45}-P_{52})+\bar{\psi}^2(pP_{44}-P_{45})\right]$

γL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2} \left(m^2 p_{11} + 2mp_{16} + p_{12}\right)$ $g_{22} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2} \left(m^2 p_{12} - 2mp_{16} + p_{11}\right)$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}n^2} \left(m^2 + 1\right) p_{31}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2} \left[(p_{11} - p_{12})m - (m^2 - 1)\, p_{16}\right]$ $g_{23} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}n^2} \left[(m^2 - 1)\, p_{41} + 2m\, p_{52}\right]$ $g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}n^2} \left[2m\, p_{41} + (1 - m^2)\, p_{52}\right]$
$\gamma T'$	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2} \left\{ \cos\nu' \left[m(p_{12} - p_{11}) + (m^2 - 1)\, p_{16}\right] + n \operatorname{sen}\nu' (p_{14} - m\, p_{25}) \right\} = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2} \left\{ \cos\nu' \left[(m^2 - 1) \frac{(p_{11} - p_{12})}{2} + 2m\, p_{16}\right] + n \operatorname{sen}\nu' (p_{25} + m\, p_{14}) \right\}$

$\gamma T'$	$g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}n^2}\left\{\cos\nu'\left[(m^2-1)\,p_{52}-2m\,p_{41}\right]+n\,\mathrm{sen}\nu'(p_{44}+m\,p_{45})\right\}$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}n^2}\left\{\cos\nu'\left[(m^2-1)p_{41}+2m\,p_{52}\right]-n\,\mathrm{sen}\nu'(p_{45}-m\,p_{44})\right\}$
$\gamma T''$	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2}\left\{\mathrm{sen}\nu'\left[m(p_{11}-p_{12})+(1-m^2)p_{16}\right]+n\cos\nu'(p_{14}-m\,p_{25})\right\} = -g_{22}$ $g_{12} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}n^2}\left\{\mathrm{sen}\nu'\left[(1-m^2)\frac{(p_{11}-p_{12})}{2}-2m\,p_{16}\right]+n\cos\nu'(p_{25}+m\,p_{14})\right\}$ $g_{23} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}n^2}\left\{\mathrm{sen}\nu'\left[2m\,p_{41}+(1-m^2)p_{52}\right]+n\cos\nu'(p_{44}+m\,p_{45})\right\}$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}n^2}\left\{\mathrm{sen}\nu'\left[(1-m^2)p_{41}-2m\,p_{52}\right]+n\cos\nu'(m\,p_{44}-p_{45})\right\}$

TABELA 18 - Forma do tensor Brillouin para fonons propagando-se segundo direções de modos puros em cristais rombo edrais.

Modo(j)	Grupo R_I	Grupo R_I
αL	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$	
αT (degenerado)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$	
βL	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$
β	$T_l \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(2)}$	$T_h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$
βT_v	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$

γL	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$
$\gamma T'$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$
$\gamma T''$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_{(4)}$

Simetria Ortorrômbica

Para esta simetria o tensor dielétrico contêm três componentes diferentes de zero tendo a forma:

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ & E_2 & 0 \\ & & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Quanto ao tensor de Pockell, para tôdas as classes, ou seja, ([illegible], $m\,m^2$ $\frac{2}{m}$ $\frac{2}{m}$ $\frac{2}{m}$))

adquire a forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

A tabela 18 indica , através de suas componentes, tanto as direções de propagação de modos puros como as correspondentes polarizações

Nêste caso, existem 7 dessas direções as quais são indicadas na Figura 1-7e e foram designadas por (α) (β) (π (γ) (K_1) 1
e (k_2) π_2

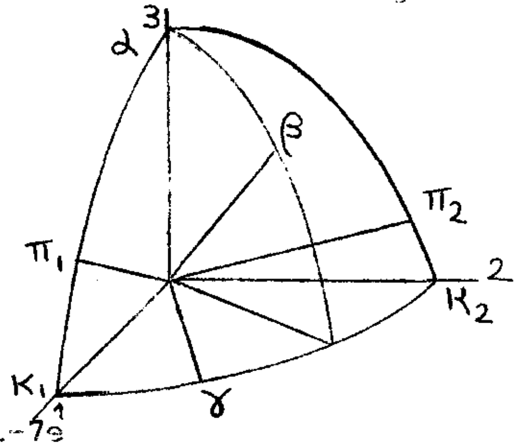


Fig. 1-7e

Na tabela 18 foi utilizada a notação:

$$x = (1 + r^2 + s^2)^{1/2}$$

$$\bar{x} = (1 + r^2)^{1/2}$$

onde:

$$r = \left(\frac{A_1C_1 - A_1C_2 - B_1C_1}{A_2C_2 - A_2C_1 - B_2C_2} \right)^{1/2}$$

$$s = \left(\frac{B_1B_2 - A_1B_2 - A_2B_1}{A_2C_2 - A_2C_1 - B_2C_2} \right)^{1/2}$$

$A_1 = c_{11} - 2c_{55} - c_{13}$ $\quad B_1 = c_{11} - 2c_{66} - c_{12}$ $\quad C_1 = c_{33} - 2c_{55} - c_{13}$

$A_2 = c_{22} - 2c_{44} - c_{23}$ $\quad B_2 = c_{22} - 2c_{66} - c_{12}$ $\quad C_2 = c_{33} - 2c_{44} - c_{23}$

ν - obtido através da equação:

$$\cot 2\nu = \frac{(h-f)\,(1+r^2)^2 + (f-g)\,(1+r^2+s^2-r^2s^2)}{(g-f)\,2rs\,(1+r^2+s^2)^{1/2}}$$

onde:

$f = c_{44} + c_{23}$ $\quad g = c_{55} + c_{12}$ $\quad h = c_{66} + c_{12}$

Segundo 2-14 as componentes $g_{\alpha\beta}$ serão dadas por:

$$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} (p_{11}\, e_1\, S_{\theta_1} + p_{12}\, e_2\, S_{\theta_2} + p_{13}\, e_3\, S_{\theta_3})$$

$$g_{22} = \frac{-E_2^2}{2^{3/2}} (p_{21}\, e_1\, S_{\theta_1} + p_{22}\, e_2\, S_{\theta_2} + p_{23}\, e_3\, S_{\theta_3})$$

$$g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} (p_{31}\, e_1\, S_{\theta_1} + p_{32}\, e_2\, S_{\theta_2} + p_{33}\, e_3\, S_{\theta_3})$$

$$g_{12} = \frac{-E_1 E_2}{2^{3/2}} (e_1\, S_{\theta_2} + e_2\, S_{\theta_1})\, p_{66} = g_{21}$$

$$g_{23} = \frac{-E_2 E_3}{2^{3/2}} (e_2\, S_{\theta_3} + e_3\, S_{\theta_2})\, p_{44} = g_{32}$$

$$g_{13} = \frac{-E_1 E_3}{2^{3/2}} (e_1\, S_{\theta_3} + e_3\, S_{\theta_1})\, p_{55} = g_{31}$$

Os resultados obtidos através da aplicação dessas expressões para as componentes $g_{\alpha\beta}$ correspondentes às direções de propagação de modos puros encontram-se na tabela 20.

TABELA 19 - Componentes dos vetores $\vec{S}_0$ e $\vec{e}$, em função das constantes elásticas c_{ij}, correspondentes a cristais pertencentes à simetria ortorrômbica.

Modo(j)	Direção de propagação de modos puros ($\vec{S}_\theta$)	Polarização ($\vec{e}$)
αL	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
αT_1	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 1$ $e_2 = 0$ $e_3 = 0$
αT_2	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 1$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1$ $e_3 = 0$
βL	$S_{\theta_1} = 1/\rho$ $S_{\theta_2} = r/\rho$ $S_{\theta_3} = s/\rho$	$e_1 = 1/\rho$ $e_2 = r/\rho$ $e_3 = s/\rho$

$\beta T'$	$S_{\theta_1} = 1/\rho$ $S_{\theta_2} = r/\rho$ $S_{\theta_3} = s/\rho$	$e_1 = -(\text{sen }\nu + r\cos\nu)/\bar{\rho}\rho$ $e_2 = (-rs\text{ sen }\nu + \rho\cos\nu)/\bar{\rho}\rho$ $e_3 = (\text{sen }\nu)\bar{\rho}/\rho$
$\beta T''$	$S_{\theta_1} = 1/\rho$ $S_{\theta_2} = r/\rho$ $S_{\theta_3} = s/\rho$	$e_1 = (r\rho\text{ sen}\nu - s\cos\nu)/\bar{\rho}\rho$ $e_2 = -(\rho\text{ sen}\nu + rs\cos\nu)/\bar{\rho}\rho$ $e_3 = (\cos\nu)\bar{\rho}/\rho$
$\pi_1 L$	$S_{\theta_1} = C_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = A_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$	$e_1 = C_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$ $e_2 = 0$ $e_3 = A_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$
$\pi_1 T_2$	$S_{\theta_1} = C_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = A_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1$ $e_3 = 0$
$\pi_1 T_v$	$S_{\theta_1} = C_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = A_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$	$e_1 = -A_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$ $e_2 = 0$ $e_3 = C_1^{1/2}/(A_1+C_1)^{1/2}$

$\pi_2 L$	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = C_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$ $S_{\theta_3} = A_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$	$e_1 = 0$ $e_2 = C_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$ $e_3 = A_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$
	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = C_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$ $S_{\theta_3} = A_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$	$e_1 = 1$ $e_2 = 0$ $e_3 = 0$
	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = C_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$ $S_{\theta_3} = A_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$	$e_1 = 0$ $e_2 = -A_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$ $e_3 = C_2^{1/2}/(A_2+C_2)^{1/2}$
γL	$S_{\theta_1} = B_2^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $S_{\theta_2} = B_1^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = B_2^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $e_2 = B_1^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $e_3 = 0$
γT_h	$S_{\theta_1} = B_2^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $S_{\theta_2} = B_1^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = -B_1^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $e_2 = B_2^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $e_3 = 0$

γT_3	$S_{\theta_1} = B_2^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $S_{\theta_2} = B_1^{1/2}/(B_1+B_2)^{1/2}$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
K_1L	$S_{\theta_1} = 1$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 1$ $e_2 = 0$ $e_3 = 0$
K_1T_2	$S_{\theta_1} = 1$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1$ $e_3 = 0$
K_1T_3	$S_{\theta_1} = 1$ $S_{\theta_2} = 0$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$
K_2L	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 1$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 1$ $e_3 = 0$

K_2T_1	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 1$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 1$ $e_2 = 0$ $e_3 = 0$
K_2T_3	$S_{\theta_1} = 0$ $S_{\theta_2} = 1$ $S_{\theta_3} = 0$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 1$

Nesta tabela :

$$\xi = (1 + r^2 + s^2)^{1/2}$$

$$\xi = (1 + r^2)^{1/2}$$

onde:

$$r = \left(\frac{A_1C_1-A_1C_2-B_1C_1}{A_2C_2-A_2C_1-B_2C_2}\right)^{1/2}$$

$$s = \left(\frac{B_1B_2-A_1B_2-A_2B_1}{A_2C_2-A_2C_1-B_2C_2}\right)^{1/2}$$

$A_1 = C_{11}-2C_{55}-C_{13}$ $\quad$ $B_1 = C_{11}-2C_{66}-C_{12}$ $\quad$ $C_1 = C_{33}-2C_{55}-C_{13}$

$A_2 = C_{22}-2C_{44}-C_{23}$ $\quad$ $B_2 = C_{22}-2C_{66}-C_{12}$ $\quad$ $C_2 = C_{33}-2C_{44}-C_{23}$

TABELA 20 - Valôres dos componentes $g_{\alpha\beta}$ correspondentes a fonons puros propagando-se em cristais pertencentes à simetria ortorrômbica.

Modo	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
αL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}} p_{13}$ $g_{22} = \frac{-E_2^2}{2^{3/2}} p_{23}$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}} p_{33}$
αT_1	$g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}} p_{55}$
αT_2	$g_{23} = \frac{-E_2E_3}{2^{3/2}} p_{44}$
βL	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\rho^2}(p_{11} + r^2 p_{12} + s^2 p_{13})$ $g_{22} = \frac{-E_2^2}{2^{3/2}\rho^2}(p_{21} + r^2 p_{22} + s^2 p_{23})$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\rho^2}(p_{31} + r^2 p_{32} + s^2 p_{33})$

βL	$\varepsilon_{12} = \frac{-E_1E_2r}{2^{1/2}\rho^2} P_{66}$ $\varepsilon_{23} = \frac{-E_2E_3rs}{2^{1/2}\rho^2} P_{44}$ $\varepsilon_{13} = \frac{-E_1E_3s}{2^{1/2}\rho^2} P_{55}$
βT'	$\varepsilon_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\beta}\rho^2} \left[\mathrm{sen}\nu(s_\rho{}^2P_{13}-P_{11}-r^2sP_{12})+r\cos\nu (\rho\ P_{12} - P_{11})\right]$ $\varepsilon_{22} = \frac{-E_2^2}{2^{3/2}\bar{\beta}\rho^2} \left[\mathrm{sen}\nu(s_\rho{}^2P_{23}-P_{21}-r^2sP_{22})+r\cos\nu (\rho\ P_{22} - P_{21})\right.$ $\varepsilon_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\bar{\beta}\rho^2} \left[\mathrm{sen}\nu(s_\rho{}^2P_{33}-P_{31}-r^2sP_{32})+r\cos\nu (\rho\ P_{32} - P_{31})\right.$

βT'	$\varepsilon_{12} = \frac{-E_1E_2r}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[\cos\nu\ (\frac{\rho-r}{r}) - \operatorname{sen}\nu(s+1)\right]\ p_{66}$ $\varepsilon_{23} = \frac{-E_2E_3}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[\rho s\ \cos\nu + ({}^{2}-s^2)r\ \operatorname{sen}\nu\right] p_{44}$ $\varepsilon_{13} = \frac{-E_2E_3}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[(\rho^2-s)\ \operatorname{sen}\nu - rs\ \cos\nu\right]\ p_{55}$
βT"	$\varepsilon_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[r\rho\ \operatorname{sen}\theta(p_{11}-p_{12})+s\ \cos\nu(\rho^2p_{13}- -r^2p_{12} - p_{11})\right]$ $\varepsilon_{22} = \frac{-E_2^2}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[r\rho\ \operatorname{sen}\nu(p_{21}-p_{22})+s\ \cos\nu(\rho^2p_{23}- - r^2p_{22} - p_{21})\right]$ $\varepsilon_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[r\rho\ \operatorname{sen}\nu\ (p_{31}-p_{32})+s\ \cos\nu(\rho^2p_{33}- - r^2p_{32} - p_{31})\right.$

$\beta T''$	$g_{12} = \frac{-E_1E_2}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[\rho\ \mathrm{sen}\nu(r^2 - 1) - 2rs\ \cos\nu\right] P_{66}$ $g_{23} = \frac{-E_2E_3}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[r\ \cos\nu(\bar{\rho}^2 - s^2) - s\ \ \mathrm{sen}\nu\right] P_{44}$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3}{2^{3/2}\bar{\rho}\rho^2}\left[\cos\nu(\bar{\rho}^2 - s^2) + sr\rho\ \mathrm{sen}\nu\right] P_{55}$
$\pi_1 L$	$g_{11} = \frac{-E_1^2}{2^{3/2}(A_1+C_1)}\ (C_1\ P_{11} + A_1\ P_{13})$ $g_{22} = \frac{-E_2^2}{2^{3/2}(A_1+C_1)}\ (C_1\ P_{21} + A_1\ P_{23})$ $g_{33} = \frac{-E_3^2}{2^{3/2}(A_1+C_1)}\ (C_1\ P_{31} + A_1\ P_{33})$ $g_{13} = \frac{-E_1E_3(A_1C_1)^{1/2}}{2^{1/2}(A_1+C_1)}\ P_{55}$
$\pi_1 T_1$	$g_{12} = \frac{-E_1E_3C_1^{1/2}}{2^{3/2}(A_1+C_1)^{1/2}}\ P_{66}$ $g_{23} = \frac{-E_2E_3A_1^{1/2}}{2^{3/2}(A_1+C_1)^{1/2}}\ P_{44}$

$\pi_1 T_v$	$\varepsilon_{11} = \dfrac{-E_1^2(A_1C_1)^{1/2}}{2^{3/2}(A_1+C_1)} \quad (p_{13} - p_{11})$ $\varepsilon_{22} = \dfrac{-E_2^2(A_1C_1)^{1/2}}{2^{3/2}(A_1+C_1)} \quad (p_{23} - p_{21})$ $\varepsilon_{33} = \dfrac{-E_3^2(A_1C_1)^{1/2}}{2^{3/2}(A_1+C_1)} \quad (p_{33} - p_{31})$ $\varepsilon_{13} = \dfrac{-E_1E_3(C_1-A_1)}{2^{3/2}(A_1+C_1)} \quad p_{55}$
$\pi_{-2} L$	$\varepsilon_{11} = \dfrac{-E_1^2}{2^{3/2}(A_2+C_2)} \quad (C_2\ p_{12} + A_2\ p_{13})$ $\varepsilon_{22} = \dfrac{-E_2^2}{2^{3/2}(A_2+C_2)} \quad (C_2\ p_{22} + A_2\ p_{23})$ $\varepsilon_{33} = \dfrac{-E_3^2}{2^{3/2}(A_2+C_2)} \quad (C_2\ p_{32} + A_2\ p_{33})$ $\varepsilon_{23} = \dfrac{-E_2E_3(A_2C_2)^{1/2}}{2^{1/2}(A_2+C_2)} \quad p_{44}$

$\pi_2 T_1$	$\varepsilon_{12} = \dfrac{-E_1 E_2 C_2^{1/2}}{2^{3/2}(A_2+C_2)^{1/2}} P_{66}$ $\varepsilon_{13} = \dfrac{-E_1 E_3 A_2^{1/2}}{2^{3/2}(A_2+C_2)^{1/2}} P_{55}$
$\pi_2 T_v$	$\varepsilon_{11} = \dfrac{-E_1^2 (A_2 C_2)^{1/2}}{2^{3/2}(A_2+C_2)} (P_{13} - P_{12})$ $\varepsilon_{22} = \dfrac{-E_2^2 (A_2 C_2)^{1/2}}{2^{3/2}(A_2+C_2)} (P_{23} - P_{22})$ $\varepsilon_{33} = \dfrac{-E_3^2 (A_2 C_2)^{1/2}}{2^{3/2}(A_2+C_2)} (P_{33} - P_{32})$ $\varepsilon_{23} = \dfrac{-E_2 E_3 (C_2 - A_2)}{2^{3/2}(A_2+C_2)} P_{44}$
γL	$\varepsilon_{11} = \dfrac{-E_1^2}{2^{3/2}(B_1+B_2)} (B_2 P_{11} + B_1 P_{12})$ $\varepsilon_{22} = \dfrac{-E_2^2}{2^{3/2}(B_1+B_2)} (B_2 P_{21} + B_1 P_{22})$

γL	$g_{33} = \dfrac{-E_3^2}{2^{3/2}(B_1+B_2)} \; (B_2\, P_{31} + B_1\, P_{32})$ $g_{12} = \dfrac{-E_1E_2(B_1B_2)^{1/2}}{2^{1/2}(B_1 + B_2)} \; P_{66}$
γT_h	$g_{11} = \dfrac{-E_1^2(B_1B_2)^{1/2}}{2^{3/2}(B_1+B_2)} \; (P_{12} - P_{11})$ $g_{22} = \dfrac{-E_2^2(B_1B_2)^{1/2}}{2^{3/2}(B_1+B_2)} \; (P_{22} - P_{21})$ $g_{33} = \dfrac{-E_3^2(B_1B_2)^{1/2}}{2^{3/2}(B_1+B_2)} \; (P_{32} - P_{31})$ $g_{12} = \dfrac{-E_1E_2(B_2-B_1)}{2^{3/2}(B_1+B_2)} \; P_{66}$
γT_3	$g_{23} = \dfrac{-E_2E_3B_1^{1/2}}{2^{3/2}(B_1+B_2)^{1/2}} \; P_{44}$ $g_{13} = \dfrac{-E_1E_3B_2^{1/2}}{2^{3/2}(B_1+B_2)^{1/2}} \; P_{55}$

K_1L	$g_{11} = \dfrac{-E_1^2}{2^{3/2}} P_{11}$ $g_{22} = \dfrac{-E_2^2}{2^{3/2}} P_{21}$ $g_{33} = \dfrac{-E_3^2}{2^{3/2}} P_{31}$
K_1T_2	$g_{12} = \dfrac{-E_1E_2}{2^{3/2}} P_{66}$
K_1T_3	$g_{13} = \dfrac{-E_1E_3}{2^{3/2}} P_{55}$
K_2L	$g_{11} = \dfrac{-E_1^2}{2^{3/2}} P_{12}$ $g_{22} = \dfrac{-E_2^2}{2^{3/2}} P_{22}$ $g_{33} = \dfrac{-E_3^2}{2^{3/2}} P_{32}$
K_2T_1	$g_{12} = \dfrac{-E_2E_3}{2^{3/2}} P_{44}$
K_2T_3	$g_{23} = \dfrac{-E_2E_3}{2^{3/2}} P_{44}$

TABELA 21 - Forma do tensor Brillouin para fonons propagando-se em cristais ortorrômbicas, segundo direções de modos puros.

Modo(j)	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$	Modo(j)	$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha\beta}$
αL	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_3$	$\pi_1 L$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_4$
αT_1	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_1$	$\pi_1 T_1$	$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}$
αT_2	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_1$	$\pi_1 T_v$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_4$
βL	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\pi_2 L$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\beta T'$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_6$	$\pi\ {}_2T_1$	$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}$
$\beta T''$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_6$	$\pi\ {}_2T_v$	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}_4$
γL	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_4$	K_1T_3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_1$
γT_h	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_4$	K_2L	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_3$
γT_3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}$	K_2T_1	$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_1$

K_1L	$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}_3$	K_2T_3	$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & 0 \\ & & \cdot \end{pmatrix}_1$
K_1T_2	$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}_1$		

CAPÍTULO II

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

2-1 ASPECTOS GERAIS

Consideremos um meio líquido ou cristalino. A finalidade básica da montagem experimental a ser descrita consiste na observação do espalhamento Brillouin em tal meio. Seu planejamento constou de três etapas.

1) Escolha da fonte de luz: o afastamento em frequência devido ao espalhamento é de mesma ordem que a frequência das ondas acústicas no meio, ou seja, $\Delta\omega \approx 2cm^{-1}$. A largura de linha da luz incidente deve ser portanto pelo menos uma ordem de grandeza menor que êsse valor. Isto para que não haja no espectro final, superposição entre as linhas Rayleigh e Brillouin (Stokes e anti-Stokes) de mesma ordem.

A interpretação do espectro final dependerá, como já foi mostrado, da geometria de espalhamento, a qual só ficará bem determinada se a direção da luz incidente (e consequentemente a luz espalhada) também forem bem determinadas.

Usou-se então como fonte de luz um laser de He-Ne que a pesar de multimodo apresentou uma largura de linha de $0,0?cm^{-1}$ (espectro I). Outras características dêsse laser são : intensidade máxima = 60mw, comprimento = ?m, fonte de alimentação = 4000volts,

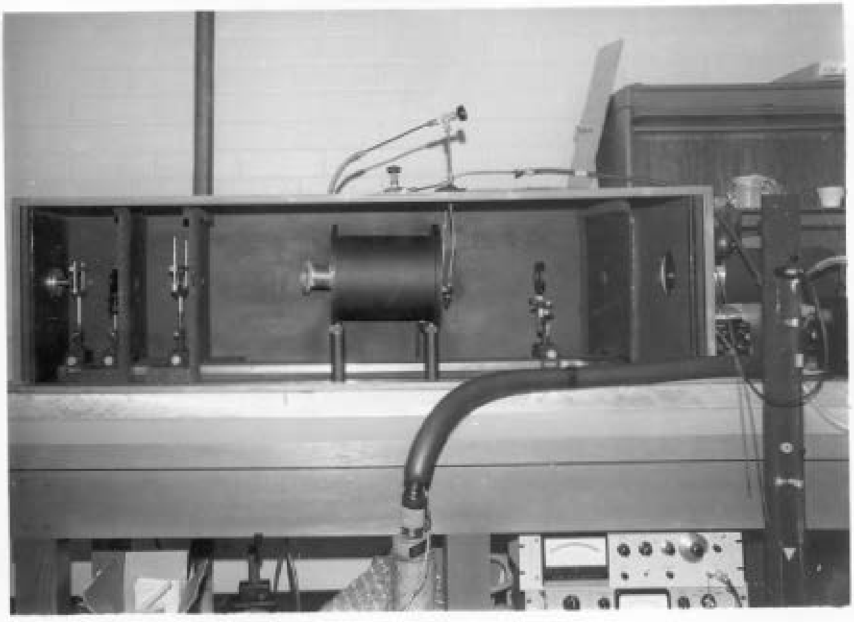
2) Separação das frequências componentes da luz espalhada: a separação espectral entre as linhas Rayleigh e Brillouin exige o emprêgo de um instrumento de alto poder de resolução . Isso foi por nós conseguido através de um interferômetro Fabri-Perot de placas planas. Nêsse aparelho a variação de caminho ótico ou seja a frequência por êle transmitida foi obtida como uma consequência da variação contínua da pressão entre seus espelhos. Para tanto encerrou-se o instrumento em uma câmara ligada simultâneamente a uma bomba de vácuo e a um manômetro que produzia um sinal elétrico linearmente proporcional à pressão medida, alimentando o eixo x de um registrador xy.

3) <u>Sistema de detecção</u> : a detecção da luz espalhada foi realizada por um electrômetro (C.C.) . Assim a luz transmitida pelo interferômetro foi focalizada no foto cátodo (S-20) de uma foto multiplicadora refrigerada e ultra sensível (ITT FW- 130) . O sinal emitido por esta , após ampliado pelo eletrômetro, é levado ao eixo Y do mesmo registrador ao qual nos referimos anteriormente.

O resultado final fornecido por êste registrador, a menos de um fator constante na frequência, é o gráfico da intensidade versus frequência, isto é, o espectro da luz espalhada que se deseja medir.

Uma visualização do equipamento empregado é fornecida pelas fotos abaixo. (II-1a) e (II-1b) (II -1c) e (II -1d) apresentadas no fim dêste capítulo

II-1a



2-2) Detalhes experimentais.

a) Alinhamento do sistema ótico.

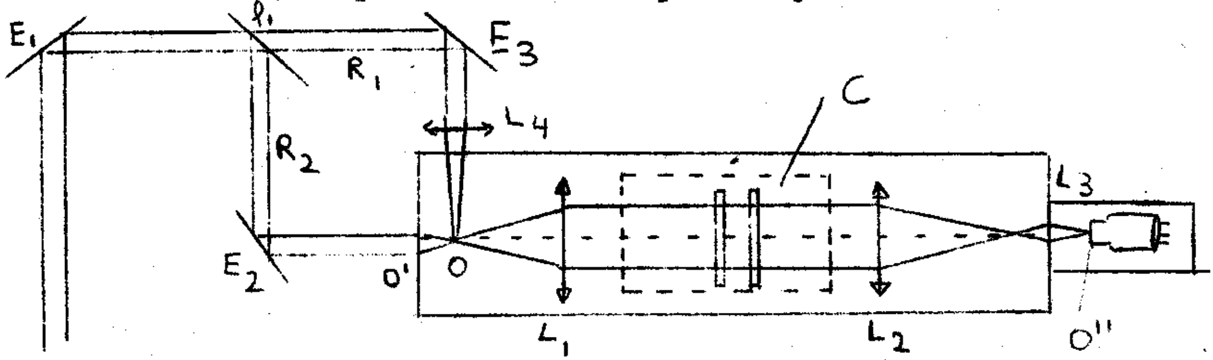
Uma das dificuldades encontradas na observação de espalhamento , tanto Raman quanto Brillouin, sôb ângulos quaisquer,consiste do alinhamento do sistema ótico. Isso se deve a que a intensidade da luz segundo a direção de espalhamento é em geral - muito baixa. Essa dificuldade foi completamente eliminada através do procedimento a ser descrito a seguir. Como mostra a figura abaixo, a luz proviniente do laser, após refletir-se no espelho E_1 é dividida pela lâmina de vidro 1 nos raios 1 e 2.

O raio 2 é desviado pelo espelho E_2 de modo a propagar - se em uma direção coincidente ao eixo do sistema. Êste eixo, como veremos fica determinado pelo centro de espalhamento e pelo - foto cátodo.

Ao atravessar a objetivaO' o raio 2 converge para o ponto O, centro de espalhamento, originando-se assim uma frente de onda esférica. Sua transformação na frente de onda plana necessária à configuração Fabri-Perot, é realizada pela lente L_1 .

Com as lentes L_2 e L_3 , a qual encontra-se no interior - da caixa foto multiplicadora, a imagem de O é projetada finalmente sôbre o foto cátodo.

A confirmação de que o ponto O corresponde realmente ao - fôco da lente L_1 é obtida colocando-se o interferômetro no interior da câmara C, de modo a que seus espêlhos sejam normais ao eixo do sistema , o qual deve ainda passar pelo seu centro .



Ilumina-se então o sistema e recebe-se sôbre um anteparo colocado a uma distância d da lente L_2 ($d < d_2$) , a luz transmitida pelo Fabri Perot. Essa imagem deve ser uma mancha luminosa de intensidade uniforme a qual, ao variar-se a pressão no interior de C, varia periòdicamente, desde zero até um máximo de luminosidade. Se ao invêz disso, sôbre o anteparo aparecerem anéis concêntricos, significa que a frente de onda transmitida por L_1 não é plana havendo pois necessidade de um realinhamento dessa lente.

A entrada de luz para a foto multiplicadora foi controlada através do emprêgo de um "shutter" colocado em sua caixa na posição S.Êste, devido ao raio luminoso 2 ser muito intenso deve permanecer fechado durante esta fase do alinhamento.

O ajuste da lente L_2 é feito movendo-a com auxílio de controles micrométricos de modo a que a imagem O' de O coincida exatamente com o centro do "shutter". Seguindo-se êste procedimento sòmente luz proviniente de O converge em O''.

Com auxílio da lente L_4 faz-se então incidir sôbre O, o feixe de luz 1 refletido em E_3 . A posição dêsse espelho e de L_4 determinam o ângulo de espalhamento .

Afim de realizarem-se as medidas desejadas, o material a ser observado é colocado em O e impede-se a entrada no sistema do feixe 2. Tem-se então a certeza de que sòmente chegará a O'' luz proviniente do feixe 1 e que passe por O, ou seja luz espalhada segundo θ. Como esta é de baixa intensidade o "shutter " é então aberto permitindo-se assim sua chegada ao foto cátodo.Move-se então a lente L_3 até que a imagem de O' coincida exatamente com o foto cátodo, o que é feito com o auxílio da leitura do eletrômetro.

Embora a lente L_3 esteja no interior da caixa da foto-multiplicadora, esta foi provida de controles especiais, os quais permitiram movimentar L_3 do exterior da caixa.

b) Variação da pressão entre os espelhos e manômetro

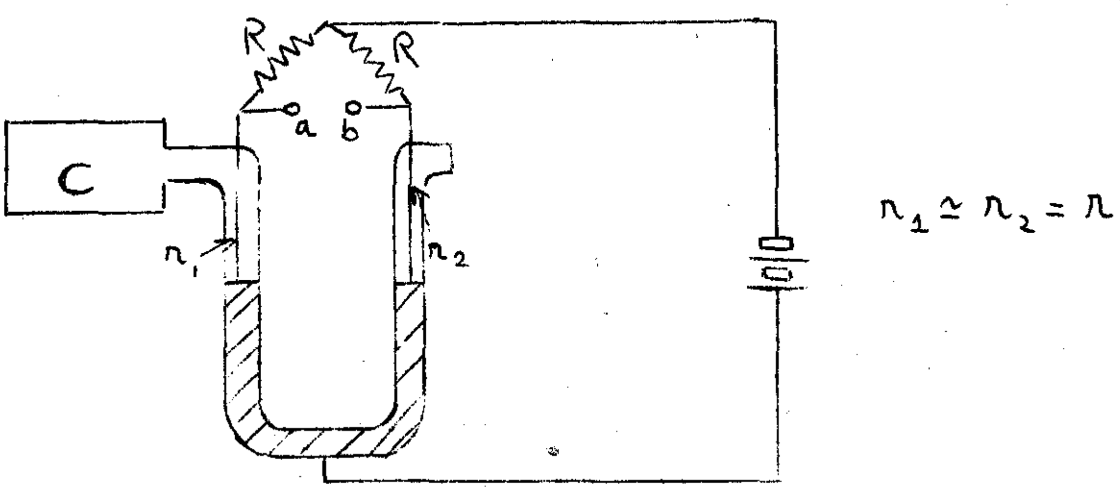
A variação da pressão entre os espelhos do interferôme -

-tro foi conseguida colocando-o sôbre uma plataforma horizontal, contida no interior da câmara C. Esta câmara constou essencialmente de um cilindro de aluminio tendo suas extremidades fechadas por duas tampas removíveis. Estas são providas de janelas óticas afim de permitirem a passagem da luz. Como pode ser visto na foto (II-1a) a primeira dessas janelas é inclinada com respeito ao eixo do sistema afim de evitar reflexões fantasmas no interferômetro.

A pressão no interior de C é variada através de sua ligação a uma bomba de vácuo, e de uma entrada de ar controlada por uma válvula de agulha.

A medida dessa pressão foi feita usando-se um manômetro (fotos II-2a e II- 3a) especialmente construido para essa experiência por sujestão do Dr.C.A.Arguello. Consta êsse aparelho de um tubo de vidro com cêrca de 1m de comprimento e 0,5cm de diâmetro interno, dobrado em forma de U. Êsse tubo é atravessado interiormente por um fio de platina o qual encontra-se parcialmente "shuntado" por uma certa quantidade de mercúrio e em sua base é colocado um contacto de tungsteno.

Seu funcionamento é esquematizado pela figura seguinte



[illegible]: esquema do circuito elétrico ligado ao manômetro utilizado.

Bàsicamente tem-se uma ponte formada pelas resistências r_1 e r_2 correspondentes às partes não shuntadas do fio de platina e por duas resistências R, pràticamente iguais, uma das -

quais é variável afim de facilitar a calibração do manômetro. Essa ponte estará em equilíbrio sempre que a pressão fôr a mesma nos dois ramos do tubo, isto é, sempre que a câmara C estiver à pressão atmosférica. Caso contrário, devido a diferença de altura da coluna de mercurio em cada um dos ramos do tubo de vidro a ponte se desiquilibrará dando em cosequência origem a um sinal elétrico entre os pontos a e b, onde está localizado o registrador já referido anteriormente.

Uma vêz que a frequência selecionada pelo interferômetro varia linearmente com a pressão em C, poderá ser identificada com o sinal elétrico entre a e b, se êste também variar linearmente com a pressão.

Supondo-se que a impedância entre a e b (entrada do registrador) é prâticamente infinita vemos com auxílio de II-1b que:

$$V_a = \frac{V}{R+r+\Delta r}(r + \Delta r)$$

$$V_b = \frac{V}{R + r - \Delta r}(r - \Delta r)$$

Tomando-se $R >> r \pm \Delta r$ (II -1b)

temos: $V_a - V_b = \frac{2r}{R} V$

Como r é diretamente proporcional à variação de pressão em C, a equação (II-1b) representa a condição necessária e suficiente, para que $(V_a - V_b)$ varie linearmente com a pressão entre os espelhos do interferômetro.

c) Interferômetro.

Como jáfoi dito, a análise espectral da luz espalhada foi realizada com o auxílio de um interferômetro Fabri-Perot de espelhos planos e paralelos.

Como este aparelho é amplamente descrito em vários textos sòmente serão fornecidos aqui os detalhes específicos dos parâmetros que empregamos.

Êsses são respectivamente, o intervalo espectral f, a finesse F e o poder de resolução $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ os quais guardam entre si a relação:

$$\Delta\nu = \frac{f}{F} \qquad \text{II-1c}$$

Considerando o índice de refração do meio entre os espelhos igual a 1, o intervalo espectral é dado por:

$$f \; seg^{-1} = \frac{C}{2L} \; seg^{-1}$$

isto é, a variação entre dois máximos consecutivos de interferência (f) é inversamente proporcional à distância entre os espelhos (L).

Partindo-se da relação

$$mu\,\lambda = c$$

chega-se a

$$f = \frac{1}{2L} \; cm^{-1} = \frac{\lambda^2}{2L} \; \AA$$

A finesse do aparelho, também presente em (II-1c) depende em primeiro lugar do grau de polimento ou figura de mérito das superfícies a serem espelhadas. A máxima finesse possível quando-se utilizam espelhos polidos a $\frac{\lambda}{n}$ é n/2.

A influência da refletividade é dada por

$$F = \pi\sqrt{R}\,(1-R) \qquad \text{(II-3c)}$$

Poder da resolução elevado pode então ser obtido fazendo-se: $F \rightarrow$ o maior possível - substratos bem polidos

alta refletividade

$f \rightarrow$ o menor possível $\rightarrow$ L grande.

Os fatôres que limitam a escolha dos valôres a serem usados são os seguintes:

f - embora pequeno deve ser pelo menos 4 ou 5 vêzes maior que a variação de frequência a ser observada, como indica a figura (II-1c).

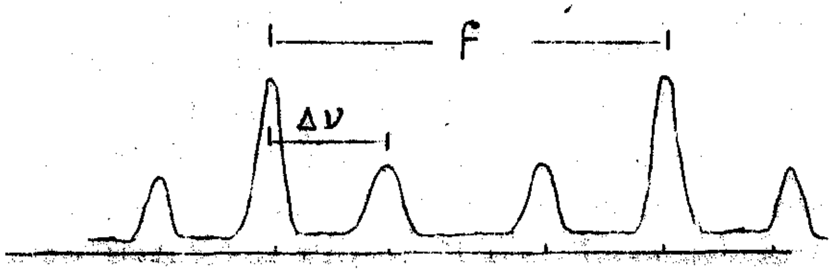


Fig. II-1c.

Dessa forma consegue-se separar as linhas Stokes e anti - Stokes da Rayleigh de mesma ordem, sem que haja superposição de ordens de interferência consecutivas.

Como os afastamentos Brillouin esperados foram sempre menores que $0,2\text{cm}^{-1}$ a distância mais conviniente entre os espelhos a ser usada em cada caso foi fàcilmente selecionada com o auxílio de um gráfico d-f.

Finesse F- as melhores superfícies para espelhos que podem ser adquiridas comercialmente são da ordem de $\lambda/200$ correspondendo então uma finesse máxima $F = 100$. Segundo (II-3c)isto-se dará para $R \cong 100\%$.

Se no entanto forem usadas como em nosso caso superfícies da ordem de $\lambda/20$ tem-se $F_{max} = 10$ que corresponde a $R \cong 90\%$, o qual adotamos, pois seria inútil a utilização de valôres mais elevados de R.

Ao aumentar-se a refletividade devem também ser tomadas precauções para manter elevado o valor da transmissão de pico,ou seja, da relação entre a intensidade da luz em um máximo de interferência e a intensidade obtida no mesmo ponto retirando-se os espelhos.

Essa grandeza, desprezando-se as reflexões nas superfí - cies não espelhadas, é dada pela expressão

$$T = \left(1 - \frac{A}{1 - R} \right)^2 \qquad \text{(II-4c)}$$

onde A é a absorção devida às superfícies espelhadas.

O valor de A é pràticamente nulo para as superfícies refletoras multi dielétricas por nós adotadas.

Embora a refletividade desejada possa ser em geral obtida através de deposição metálica, essa técnica apresenta no caso vários incovenientes. A inivitável absorção então presente, leva a valôres de T muito baixos, dificultando grandemente a observação e medida do espalhamento.

O espelhamento multi dielétrico fornece superfícies cuja refletividade permanece inalterada por longos períodos de tempo , enquanto que isso não ocorre quando se usa a deposição metálica. Nêste caso a oxidação do metal empregado faz com que com o tempo R tenha o seu valor gradativamente diminuido e A aumentado, alterando-se assim as características do interferômetro. Êste fa - tor é de grande importância quando utiliza-se como fonte luminosa o laser de He-Ne. Os metais capazes de darem $R \alpha 93\%$ para $\lambda = 6\,328 A^{o}$, como se sabe, são o aluminio o qual apresenta uma absorção muito alta e a prata a qual oxida muito ràpidamente.

A reflexão nas superfícies não espelhadas foi minimizada depositando-se sôbre elas uma camada de expessura correspondente a $\frac{\lambda}{4}$ de MgF_2 o qual apresenta um índice de refração baixo (1,38) . As superfícies têm então sua refletividade diminuida de 4% a 1% a - proximadamente.

Apesar dessa precaução é indispensável ainda que essas - superfícies não sejam paralelas às espelhadas. Caso contrário - sua refletividade, embora baixa, pode dar origem à um segundo e indesejável conjunto de interferência o qual, devendo-se a um valor diferente de L não coincidirá com a interferência principal. Como conseqûência são detectados "picos fantasmas" que confundem os resultados registrados dificultando assim a sua análise.

A distância entre os espelhos não ultrapassou em nenhuma de nossas medidas ao valor L= cm. Em cada uma delas o paralelismo entre os espelhos foi mantido através da construção de separadores, que embora bastante simples e ecônomicos mostraram-se de grande eficiência. Cada um dêles consta de trêz esferas de rolamento de alta precisão, igualmente distanciados entre si e mantidos sôbre pressão entre dois anéis cortados em lâmina de cobre. A diversidade de raios com que tais esferas podem ser obtidas deu-nos suficiente liberdade na escolha do melhor valor de L a ser empregado em cada medida.

A verificação da eficiência dêsses separadores foi feita de maneira convencional. Uma vêz colocados em sua posição entre os espelhos observa-se o conjunto de interferência transmitido pelo aparelho quando sôbre êle incide luz monocromática. O instrumento é então ajustado de modo a que tal conjunto permaneça inalterado para o observador quando este move ligeiramente a cabeça em tôdas as direções possíveis com respeito ao centro do espelho. Êste resultado sòmente é obtido quando os espelhos estiverem perfeitamente paralelos. A certeza de que o paralelismo se manteve durante todo tempo em que se processaram as medidas foi obtida realizando-se a comprovação descrita, imediatamente antes e depois das mesmas.

Como consequência do não paralelismo entre os espelhos, observa-se a ausência de simetria apresentada pelo espectro final, das linhas Stokes e anti -Stokes com respeito a linha Raileigh. Convém ressaltar no entanto que tal assimetria pode-ser devido não sòmente a esta causa, como a imperfeições em geral no alinhamento do sistema ótico.

SISTEMA DE DETECÇÃO

Os resultados experimentais por nós obtidos usando o sistema de detecção fotomultiplicadora-eletrometro provaram ser - tão bom ou melhores que aquêles obtidos por outros autores através do uso da técnica de contagem de pulsos. Além de evitarem-se tôdas as dificuldades eletrônicas relacionadas com essa técnica, a aparelhagem necessária para detecção por corrente contínua é bastante mais econômica.

O único cuidado especial que mostrou-se necessário durante as medidas, constou em variar a pressão entre as placas do - interferômetro o mais lentamente possível. Sendo assim, o tempo de duração de cada medida, correspondendo a uma variação consecutiva de pressão de aproximadamente meia atmosfera foi de cêrca de 1 hora.

Com isto, evitaram-se os êrros provenientes da elevada - constante de tempo ligada às escalas mais altas do eletrômetro (10^{-9} a 10^{-11} Ampéres).

CUIDADO COM AS AMOSTRAS

No caso de medidas do efeito Brillouin em líquidos a - maior dificuldade encontrada consta da eliminação do efeito Tindal devido à existência de partículas em suspensão. Êste pode ser se não eliminado suficientemente diminuido pela filtragem-a vácuo e destilação dos líquidos a serem utilizados. No caso de cristais é conveniente sempre que possível a utilização de superfícies livres de rugosidades. Em nosso caso, a superfície recém clivada das amostras foi recoberta por uma lamínula de - microscópio sobreposta a uma fina camada de óleo.

A maior deficuldade que encontramos, no entanto, ao trabalhar com amostras cristalinas, relacionou-se com o espalhamento da luz por imperfeições no seu interior. Isto aumenta de várias ordens de grandeza a intensidade da linha Rayleigh frequentemente impossibilitando por completo a observação das linhas - Brillouin.

O reconhecimento da existência dêsse defeito pode ser feito fàcilmente antes mesmo de realizar-se qualquer medida. Basta para tanto iluminar a amostra a ser observada com a luz proveniente do laser. Sòmente se esta a atravessar sem visível espalhamento em todo o interior do material, a quantidade de defeitos é plenamente tolerável e o efeito Brillouin poderá ser provavelmente detectado.

Exemplos dêsse comportamento serão apresentados na secção seguinte.

RESULTADOS E DISCUÇÃO

Espectro I - espectro da fonte luminosa.

Êste espectro fornece a medida da largura da linha do laser HeNe multimodo utilizado.

O espectro foi obtido com a luz proveniente do laser diretamente focalizada no centro de espalhamento. Com auxílio de filtros para proteção da foto multiplicadora conseguimos que o máximo de intensidade atingisse sòmente a escala de 10^{-9} A. do eletrômetro.

Como

$$L = 1{,}746\text{cm}$$

vem

$$f = 1/2L = 0{,}286 \text{ cm}^{-1} \qquad \text{(II-1e)}$$

o qual no gráfico corresponde a f = 20 divisões (II-2e)

(Tomamos como unidade as divisões do papel usado no registrador. Leituras foram feitas nos espectros originais e não nas cópias apresentadas).

Como o valor da largura da linha l do laser é igual a largura média do pico observado a partir do gráfico vem,

$$l = 21 \text{ divisões} \qquad \text{(II-3e)}$$

Consequentemente, levando-se em consideração (II-1e,2e,3e) chega-se ao valor:

$$l = 0{,}0306$$

Êste resultado garante a possibilidade de serem detectados os espalhamentos esperados, isto é, afastamentos em frequência entre 2 cm^{-1} e 0,1 cm^{-1}.

FINESSE

Esta grandeza é medida experimentalmente pela relação

$$F = \frac{f}{l}$$

Segundo o espectro I tem-se então que

$$F = \frac{0{,}286}{0{,}306} = 0{,}94$$

Êste valor está em bom acôrdo com o valor calculado a partir da figura de mérito das placas do interferômetro que é 10.

ESPECTROS (IIa,IIb,IIc,IId)- ESPECTROS BRILLOUIN EM LÍQUIDOS

Com a série de espectros II pretendemos mostrar como variações tanto no tratamento do meio como na utilização do equipamento podem deturpar o resultado final.

A tabela seguinte fornece as características ligadas a cada um dêsses espectros.

ESPALHAMENTO BRILLOUIN OBSERVADO A 90° EM LÍQUIDOS

ESPECTRO -	L(cm^{-1})	f(cm^{-1})	f(div.)	ΔK_B(div.)	ΔK_B(cm^{-1})
IIa-Benzeno	0,20	2,50	61,0	25$\pm$0,25	0,102$\pm$0,009
IIb-Tolueno	1,74	0,28			
IIc-Tolueno	0,32	1,65	68,5	8,5$\pm$0,25	0,205$\pm$0,006
IId-	Resultado apresentado por A. Chiao and B.P.Stoicheff (1964).				

O espectro do benzeno (II-a) mostra o resultado do efeito Tindal devido a partículas em suspensão do meio. Êsse superpõe-se durante todo o tempo ao efeito em observação. Como resultado aparece uma espécie de ruído na linha traçada pelo registrador. Essa deformação entra como fator de êrro na medida do afastamento de vez que impede a determinação exata dos máximos dos picos registrados.

Êsse gráfico apresenta, ainda que não muito acentuada outra imperfeição. A distância entre os espêlhos é muito grande com respeito ao afastamento em frequência a ser medido. Isto é fàcilmente dedutível da superposição das linhas Stokes e anti-Stokes na região central do espectro, bastante afastadas da linha Rayleigh.

O caso limite dêste tipo de imperfeição é registrado pelo gráfico IIb. Nêste as linhas Stokes e anti-Stokes encontram-se completamente superpostas dando a impressão da existência de um só pico, o que pode acarretar grandes preocupações ao observador menos avisado!

Essas dificuldades as quais podem ser também notadas nas curvas apresentadas por Chiao e Stoicheff (1964-espectro II-d) são completamente eliminadas no espectro II-c. Para tanto foram tomadas duas medidas: o meio (Tolueno) foi devidamente filtrado a vácuo e a distância entre os espelhos calculada de modo a que os afastamentos esperados fôssem a cêrca de 1/7 do correspondente afastamento espectral ou seja $f \approx 7\,\Delta\omega$. A simetria quase perfeita apresentada por êste espectro é uma consequência tanto do alinhamento total como do bom resultado que se obtém ao usar esferas de rolamento de alta precisão como separadores dos espelhos do interferômetro.

Espectros IIIa, IIIb, IIIc.

Em virtude da maior dificuldade apresentada para a observação do efeito Brillouin em sólidos do que em líquidos, realizamos algumas medidas em materiais já observados anteriormente por outros autores. Os resultados obtidos, possibilitam uma comparação da técnica que empregamos com as demaís, A série de gráficos III, constam de espectros Brillouin devidos ao espalhamento sob um ângulo de 90° em monocristais de KCl (II-a) α quartzo (III-b) e (III-c) o qual , embora cristalino, é isotrópico .

As características experimentais ligadas a cada um dos espectros dessa série, são fornecidas pela tabela 2.

Tabela 2

Material	Espectros	Eletrômetro (A)	L cm	f (GH)	ω (GH)
α- quartzo K Cl	III-a	$3x10^{-11}$	2,00	75	28,15 ± 0,33
Polimetil Metacrilado	III-b	$3x10^{-11}$	0,6	25	12,4 ± 0,30
	III-c	$3x10^{-111}$	0,6	25	9,8 ± o,27

Os valôres encontrados para essas substâncias por outros autores foram

(1966) Benedek K Cl - 12,93 ± 0,06 Gh
(1968) Pine 28,058 GH
(1969) E,A. Fredman e A.J. Ritger 9,58 GH

Valôres êstes bem próximos aos nossos.

Espectro IV -a e IV-b

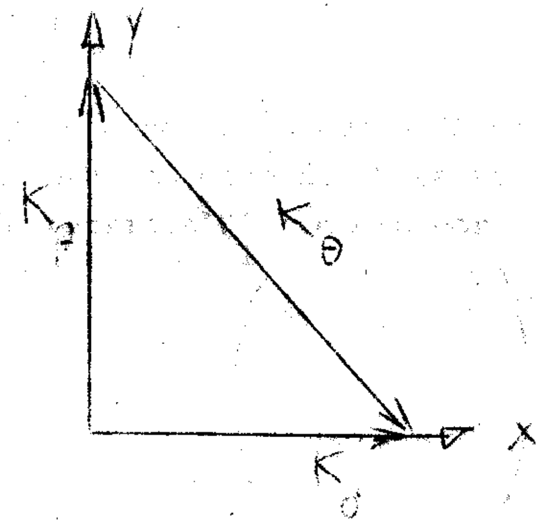
Os espectros apresentados pela série IV correspondem aos resultados obtidos durante a observação do espalhamento a 90° devi

-do a fonons propagando-se na direção (1, -1,0) em um mono cristal cúbico de Na Cl.

A geometria utilizada é dada por X(ZZ)Y.
Esquemàticamente

$$\vec{K}_0 - \vec{K}_f = \vec{K}_\theta$$

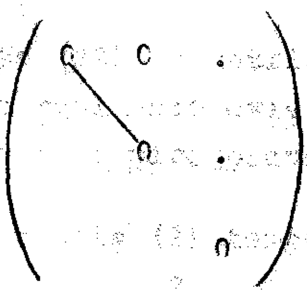
$\theta = 90^o$

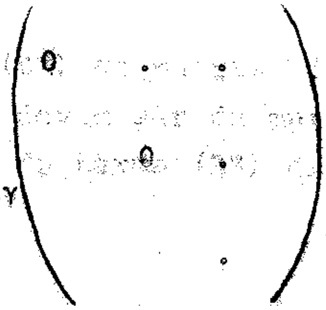


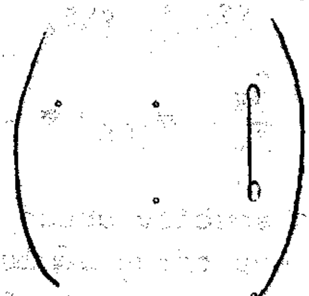
- eixo z perpendicular ao de espalhamento.

Aproveitaremos os resultados obtidos com NaCl para exemplificar a utilização das regras de seleção obtidas no primeiro capítulo.

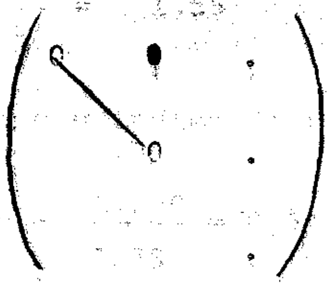
Segundo a tabela (14), as matrizes Brillouin ligadas ao espalhamento por fonons propagando-se segundo a direção (1,1,0) são:

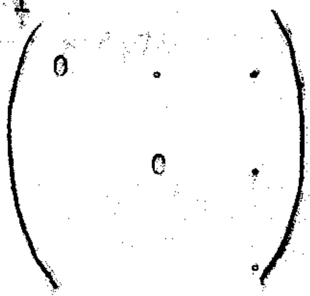
L_γ


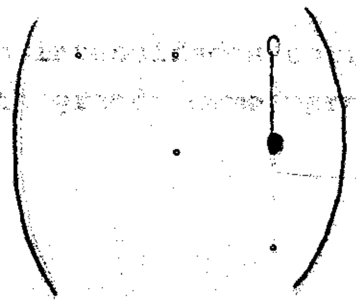
$T^{h\gamma}$


$T3_\gamma$


Sua aplicação à fonons propagando-se segundo (1,-1,0) implica uma rotação de 180° em torno ao eixo x. Essa rotação uma vêz as matrizes B_1 leva às matrizes B'_1 dadas por

L'_γ


Th_γ


B_γ


Logo, os resultados apresentados pelos gráficos iV correspondem ao espalhamento devido a fonons puramente longitudinais-(zz).

Realizamos também experiências segundo as geometrias - X(YZ)Y, X(YX)Y E X(ZX)Y, sendo que para os três casos no espectro final constatamos sòmente a presença da linha Rayleigh .

Concluimos então que a intensidade dos picos da provinien tes dos têrmos (YZ) da matriz $T'3\gamma$ (YX) da matriz $L'\gamma$, (ZX) da matriz $T'3\gamma$, se realmente existentes, devem ser de muito menor intensidade que a do pico proveniente do têrmo (ZZ) da matriz $L'\gamma$.

Pela tabela (2) temos que:

$$L\gamma = g_{33} = \frac{-E^2 p_{12}}{2^{3/2}} = g_{22} \quad \cdots \quad g_{12} = \frac{-E^2}{2^{3/2}} p_{44} = g_{xy}$$

$$T3\gamma = g_{13} = g_{23} = \frac{-E^2}{4} p_{44} = g_{xz} = g_{yz}$$

Comparando êsses valôres com os resultados achados experimentalmente, concluimos então que se $p_{44} \neq 0$ então $p_{44} = p_{12}$.

Esta relação foi confirmada por Hermann Leibssle (1969) que apresenta os seguintes valôres

$$p_{44} \frac{n^3}{2} = -1,55 \qquad p_{12} \frac{n^3}{2} = 4,74$$

onde n = índice de refração

$$\text{Logo: } \frac{p_{12}^2}{p_{44}^2} = \frac{19.09}{2.25} = 8,5$$

ou seja, a relação entre as intensidades correspondentes é de 8 para 1, fator suficientemente grande como para justificar nossos resultados.

COMPARAÇÃO ENTRE OS ESPECTROS IV. 1 IV-b

O que se pretende ressaltar com a apresentação dêsses - espectros é a influência dos defeitos do cristal sôbre o resultado final. Assim, procurou-se manter para ambos as mesmas condições experimentais, variando-se sòmente o ponto no interior do - cristal utilizado como centro de espalhamento.

Para (IV-a) o raio incidente atravessou o cristal sem se tornar visível. Em IV-b ao contrário, possivelmente devido a - defeitos uma coloração rosada adquirida pelo cristal ao ser a - travessada pelo feixe luminoso. A distância L para ambas foi - 0,6 logo $f = 0{,}84\,cm^{-1} = 25{,}6$ GH. De II-a medimos f= 40 divisões $\Delta K_B = 8{,}75 \pm 0{,}25$ divisões o que corresponde a -

$8{,}7 \pm 0{,}1$ GH ou $0{,}308 \pm 0{,}001\ cm^{-1}$

NÚMERO DE LINHAS BRILLOUIN OBTIDAS EXPERIMENTALMENTE

Embora teòricamente sejam previstas 6 linhas no espectro - Brillouin de um cristal sòmente duas são registradas em todos os resultados até a presente data. Isto se deve a que:

1) De acôrdo com as regras de seleção, nem sempre as 6 linhas podem ser observadas com a mesma geometria.

2) Quando possíveis de serem observadas com a mesma geometria - essas linhas são muito próximas em frequência, sua resolução,sua exigindo portanto uma montagem experimental especial, a qual deveria fornecer um poder de resolução muito mais elevado.

Pesquisas futuras

Algumas das possibilidades de pesquisas futuras nêste campo são:

1) Comprovação mais detalhada das regras de seleção por nós introduzidas.

2) Cálculo de regras de seleção análogas para cristais - piezo elétricos

3) Análise teórica e verificação experimental, atravéz da observação do efeito Brillouin , de fonons de polarização.

BIBLIOGRAFIA

Lord Rayleigh, (1971), Phil.Mag. 41, 107; 41, 477

(1899), Phil. Mag.47,375.

M.Von Smoluchowski, (1908), Ann. Phisik ; 25, 205.

A. Einstein, (1910); Ann. Phisic; 33, 1275.

P. Debye, (1912); Ann. Phisik; 39, 789.

L. Brillouin, (1914); Compt. Rend. 158, 1331

L. Brillouin, (1922); Ann. Phys. (Paris); 17, 88.

E. Gross, (1930); Nature; 126, 201 - 126, 400 - 126, 603

(1932); " ; 129, 722

E.H.L.Meyer and W. Ramm; (1932); Phisic. Z., 33, 270

(1934) " , 35, 111, 756

M. Leontowitsch and S.Mandelstam Jr. (1931), Phys.Zeit. Sowjet 1, 317

(1932);Zeit. f. Phys.75,350

Ig.Tamm; (1930), Zeit. f. Phys. 60, 345

P. Debye and F.W.Sears;(1932); Proc. Natl. Acad. Sci. 18, 409.

C.V.Raman and N.Nath,(1935), Proc. Indian Acad. A2, 406; A2, 413

(1936); Proc. Indian Acad. A3, 75; A3, 119

A3, 459.

R.S.KRISHNAN; (1955); Proc. Indian Acad. Sci., A41, 91

R.S.KRISHNAN; (1947); Proc. Indian Acad. Sci. A26, 399.

P. Theimer; (1951); Proc. Phys. Soc. 64, 1012

(1952); Proc. Phys. Soc. 65, 38

Max Born and Kun Huang; (1966); "Dinamical Theory of Cristal Lattices"
The International Series of Monographs on Physics -Oxford At the Claredon Press.

R.C.C.Leite e S.P.S. Porto (1964) J. Opt. Soc. of America, 54, 981

Benedek, J. Lastovka, Fritsch and T. Greitak (1964), J. Opt. Soc. Am. 54, 1284

L. Cecchi, (1964), Tese de doutoramento - Montpelier, França

A. Chiao and B.P. Stoicheff; (1964) J. Opt. Soc. Am. 54, 1286

R. Loudon; (1964), Advan. Phys. 13, 423

Ovander; (1960)

K.Brugger, (1965), Journal of App. Phys. 36-3(759)

T.C. Damen, S.P.S. Porto, B.Tell (1965), Physical Review, 142-1(570).

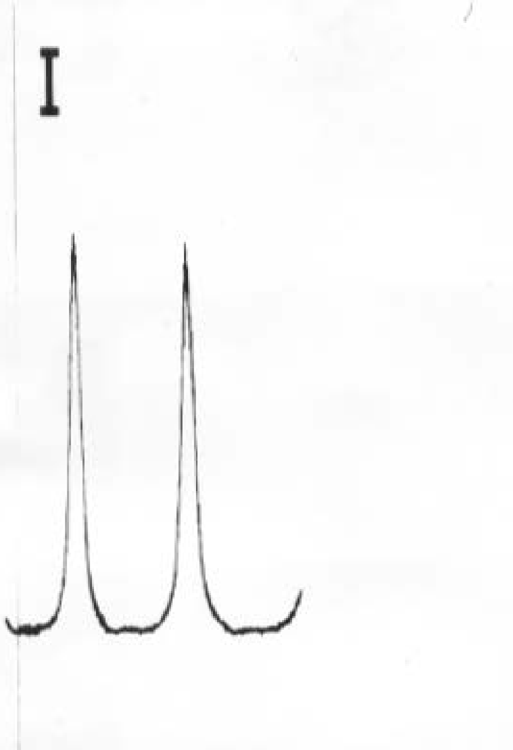
F.E. Borgniss; (1955), Physical Review, 98 - 4(1000)

Hermann Leibssle; (1960), Zutschrift Fur Kristallographie, 114,516

E.A. Fredman e A.J. Ritger; (1969), "Technical Repart nº8, Chem. Dep., Stevens Institute of Technology, N. Jersey - May 9, 586H

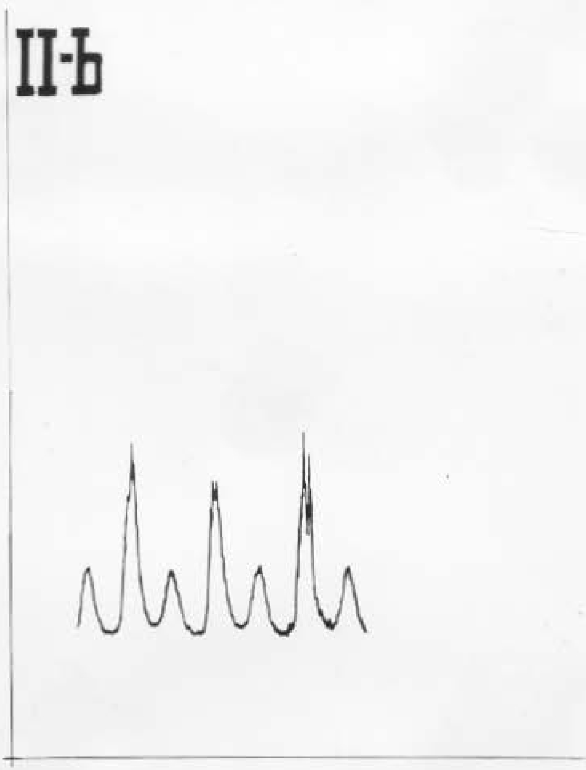
G.B. Benedek and K. Fritsch; (1966), The Physical Review-Vol.149 nº2, 647-662; 16 set.

Georges E. Durand and Alan S. Pine (1968), IEEE Journal of Quantum Eletronics, Vol.QE1 nº9 set.

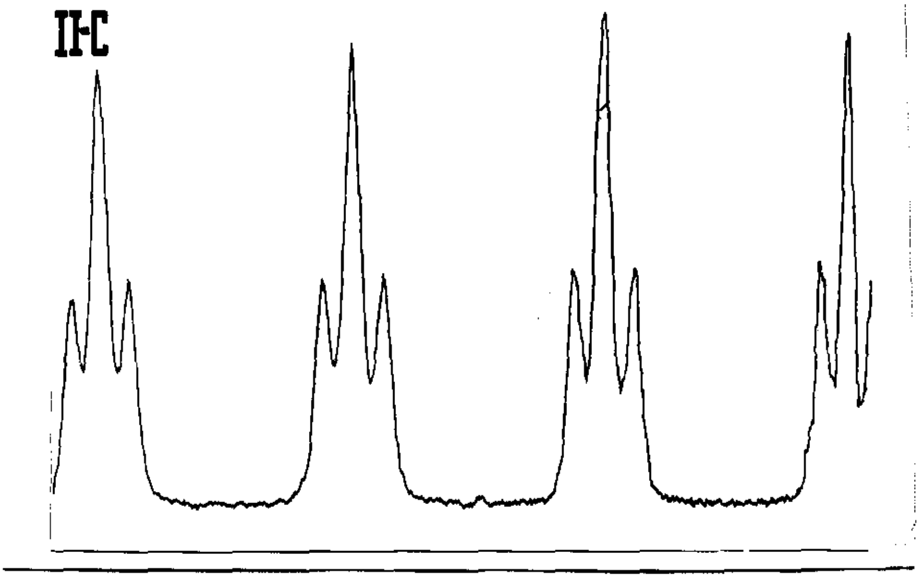

I

II-a

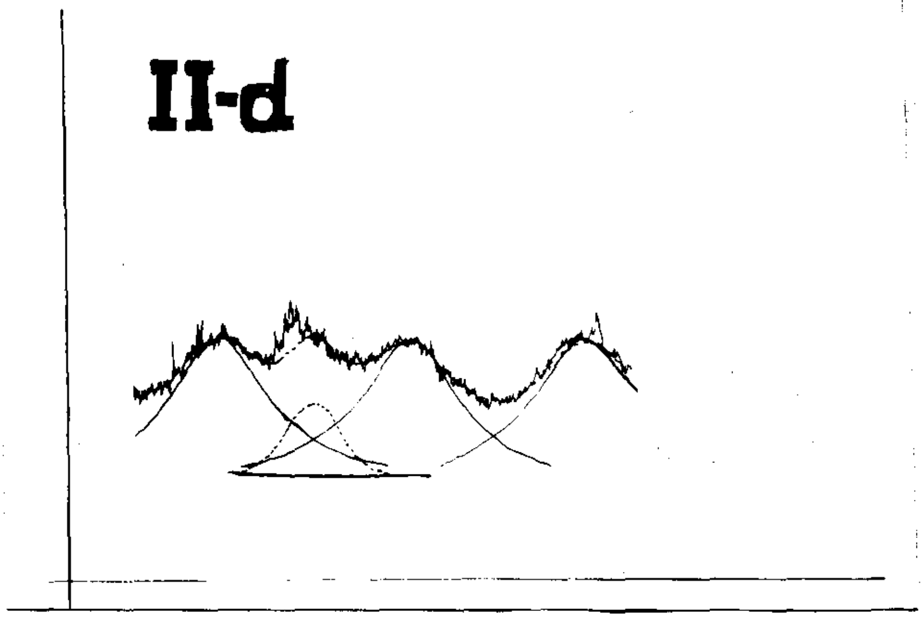
II-b

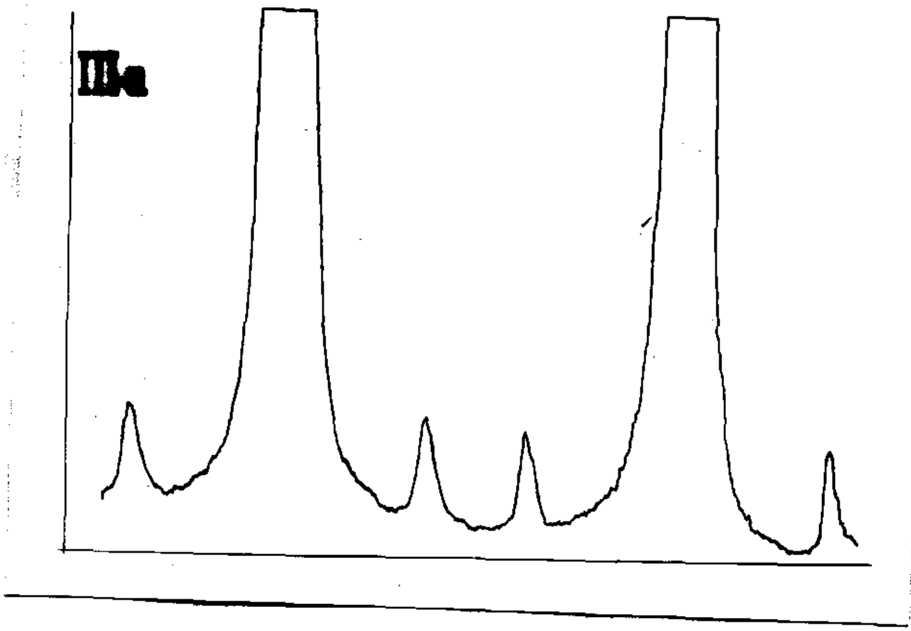


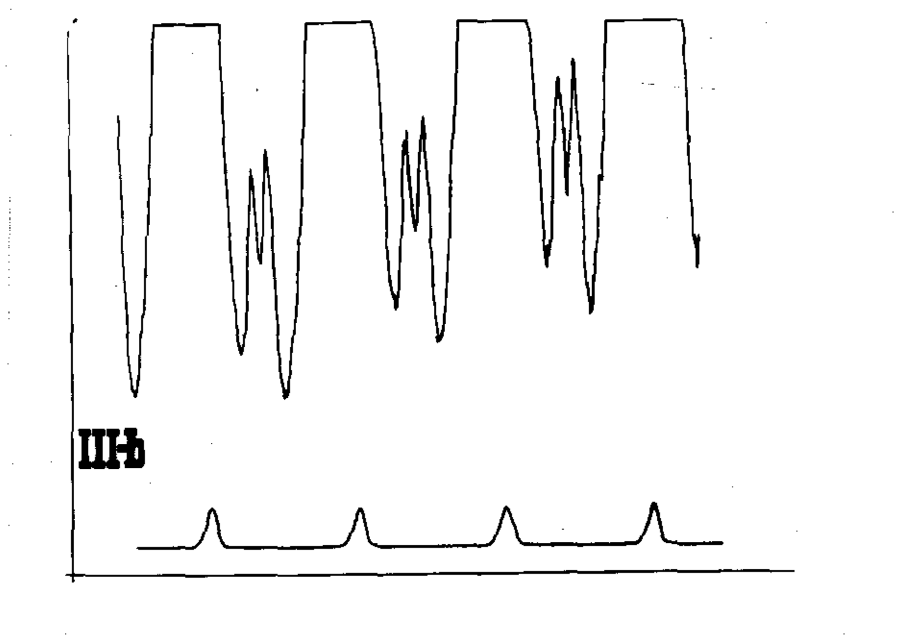
II-C

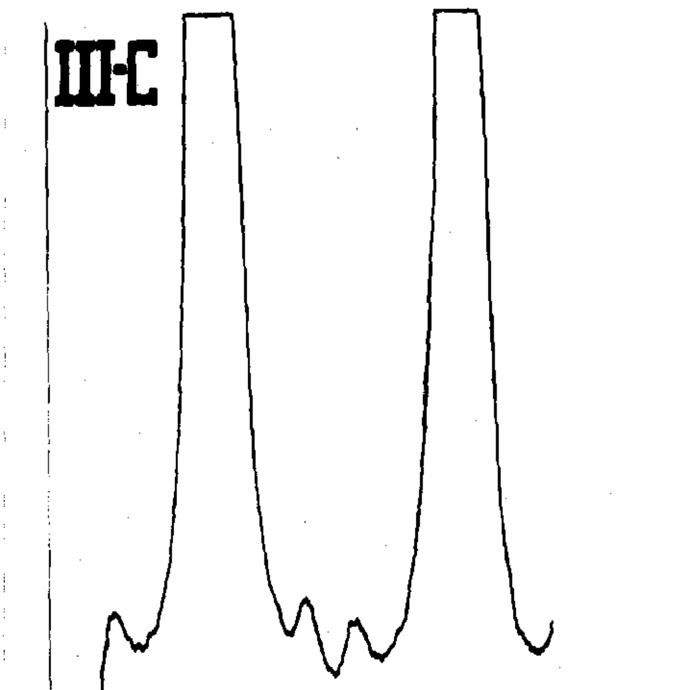


II-d

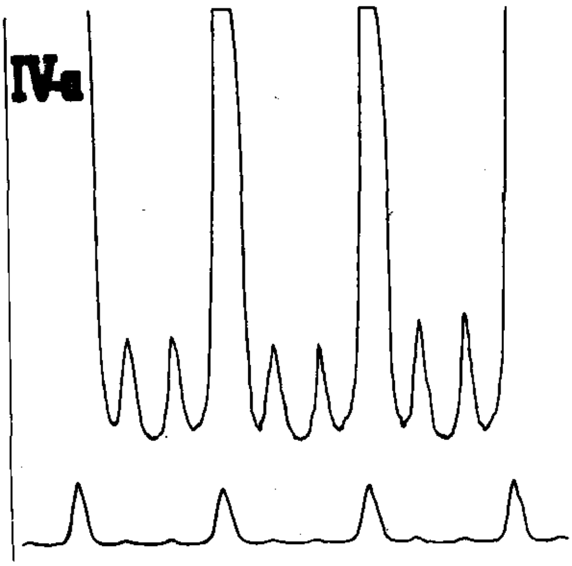



III-a


III-b


III-C

IVa



IVb