

"SOBRE A TERMODINÂMICA DOS 'BURACOS NEGROS FORTES' E SUAS
POSSÍVEIS APLICAÇÕES"

Vilson Tonin Zanchin

Prof. Dr. Erasmo Recami

Orientador

*Este exemplar
corresponde à redação
final da Tese defendida
pelo aluno Vilson Tonin Zanchin e
aprovado pelo Conselho Julgador
17/07/87 Erasmo Recami*

Dissertação apresentada ao Insti-
tuto de Física "Gleb Wataghin" co-
mo requisito parcial à obtenção do
título de Mestre em Física.

Julho/87

AGRADECIMENTOS

- Ao grupo de Física-Matemática do IMECC - Unicamp, pelas discussões e sugestões; e principalmente pelo amigável acolhimento por parte do grupo, quando eu estava em busca de um espaço para desenvolver o meu trabalho.

- Ao professor Recami, sem a orientação do qual este trabalho não teria sido possível.

- Ao professor Adolfo, pelo incentivo e apoio.

- Ao CNPq e ao IFGW, pelo suporte financeiro.

-A todos os amigos (e inimigos) que consciente ou inconscientemente colaboraram de alguma forma para que eu chegasse até aqui.

A todos aqueles que lutam para se superarem, e para superar os preconceitos e o egoísmo em favor da VERDADE e da LIBERDADE dos povos.

Para Lizethe e Vinícius.

RESUMO

Neste trabalho nós inicialmente fazemos uma revisão de uma teoria unificada das interações gravitacionais e fortes, baseada nos métodos geométricos da Relatividade Geral, segundo a qual hádrons podem ser considerados como soluções "tipo buraco negro" de novas equações de campo propostas para descreverem simultaneamente dois campos métricos tensoriais (o gravitacional ordinário e o 'forte'). [Com o objetivo de estender a termodinâmica de Bekenstein-Hawking aos "buracos negros fortes" (BNF) mencionados acima, nós fazemos também uma análise das soluções relevantes das equações de Einstein com termo cosmológico. Em seguida estudamos as principais propriedades dos horizontes de eventos e descrevemos a termodinâmica dos buracos negros gravitacionais (BNG).]

Feito isso, retomamos a teoria unificada e, analisando as soluções de nossas equações de campo, completamos a generalização da termodinâmica dos BNG aos nossos BNF e mostramos que: (i) a termodinâmica dos BNF parece requerer uma nova expansão de nosso cosmos depois de seu 'Big Crunch' (i.e.: uma recontração deve ser seguida por uma nova "criação"); (ii) uma estrela colapsante de massa M aproximadamente entre 3 a 5 massas solares, uma vez que atingiu a densidade de estrela de nêutrons, pode re-explodir tendendo a formar um objeto (ra-diante) com diâmetro da ordem de 1 a 3 dias-luz; (iii) a temperatura "hadrônica" associada aos hádrons (tratados como BNF) é da ordem de 10^{12} K, sendo que os mesmos devem evaporar (decair) via radiação de Hawking num tempo que concorda com o tempo de decaimento dos hádrons frente à interação forte. Mas, para hádrons que ficam numa trajetória tipo Regge, a temperatura hadrônica é nula e assim pode-se explicar a sua estabilidade com respeito às interações fortes.

ABSTRACT

In this work we initially put forth an improved version of a unified approach to gravitational and strong interactions, based on the geometrical methods of General Relativity. According to it, hadrons can be regarded as "black hole type" solutions of new field equations proposed to describe two tensorial metric fields (the ordinary gravitational field and the 'strong' one). [Then, with the purpose of extending the Bekenstein-Hawking thermodynamics to the abovementioned "strong black holes" (SBH), we also analyse some solutions of the Einstein equations with cosmological term, relevant to our present scope. After wards, we study the main properties of the event horizons and describe the gravitational black hole (GBH) thermodynamics.]

At this point, we go back to the unified approach and, by performing a generalization of GBH thermodynamics to our SBH, we show that: (i) the SBH thermodynamics seems to require a new expansion of our cosmos after its 'Big-Crunch' (i.e.: a recontraction of our cosmos has to be followed by a new "creation"); (ii) a collapsing star with mass M approximately in the range 3 to 5 solar masses, once overtaken the neutron-star density, could re-explode tending to form a (radiating) object with a diameter of the order of 1 light-day: thus failing to create a GBH; (iii) the "hadronic" temperature associated to hadrons (when regarded as SBH) is of the order of 10^{12} °K, but it vanishes for hadrons lying on Regge-like trajectories.

INTRODUÇÃO

1.1

CAPÍTULO I: Uma Teoria Unificada das Interações Gravitacional

e Forte.....1

1.1 - Introdução.....1

1.2 - Sobre a Covariância das Leis Físicas por Dilatações Glo-
bais do Espaço Tempo.....3

1.3 - Hádrons como "Micro-Universos" Fortes.....6

1.4 - Generalização dos Princípios de Equivalência e de Mach....12

1.5 - O Espaço-tempo no Interior do Hádron.....15

1.5.1 - Formalização da Teoria.....16

1.5.2 - Confinamento dos Constituintes Hadrônicos.....20

1.5.3 - "Liberdade Assintótica" dos Constituintes.....25

CAPÍTULO II: As Equações de Einstein com Termo Cosmológico e suas

Soluções Relevantes.....28

II.1 - Introdução.....28

II.2 - O Espaço de Minkowski e sua Estrutura no Infinito:
Diagramas de Penrose.....30

II.2.1 - Os Infinitos de um Espaço-tempo.....34

11.3 - Os Espaços de Sitter e Anti-de Sitter: Estruturas Assintóticas.....	39
11.3.1 - O Espaço de Sitter e os Horizontes Cosmológicos.....	44
11.3.2 - O Espaço Anti - de Sitter: Ausência de Horizontes.....	48
11.4 - O Espaço de Schwarzschild: Estrutura Assintótica e Horizontes.....	51
11.5 - Outras Soluções das Equações de Einstein: Comparação dos Diagramas de Penrose.....	59
11.5.1 - A Solução de Reissner - Nordström.....	60
11.5.2 - A Solução de Kerr.....	61
11.5.3 - A Solução de Kerr - Newman.....	68

CAPÍTULO III: A Estrutura dos Horizontes de Eventos; Buracos Negros e Termodinâmica.....	70
III.1 - Introdução.....	70
III.2 - O Horizonte de Eventos: Definições para os Casos Estático e Estacionário.....	71
III.3 - O Teorema das Áreas ou Segundo Princípio da Mecânica dos Buracos Negros.....	79
III.4 - O Colapso Gravitacional e os Buracos Negros.....	83
III.5 - Buracos Negros e Termodinâmica.....	86
III.5.1 - Analogia com a Termodinâmica: Os Quatro Princípios da Mecânica dos Buracos Negros.....	88
III.5.2 - Entropia e Informação: O Papel da Mecânica Quântica e a Relação Formal entre Entropia	

CAPÍTULO IV: O Espaço-tempo nas Vizinhanças de um Hádron..... .101

IV.1 - Introdução.....	101
IV.2 - As Equações de Campo nas Vizinhanças de um Hádron.....	102
IV.3 - Aproximação Linear e o Vácuo para as Vizinhanças de um Hádron.....	107
IV.4 - Limite Estático e Comportamento Yukawiano: λ Atrativo ($\lambda > 0$).....	111
IV.5 - Limite Estático e Comportamento Yukawiano: λ Repulsivo ($\lambda < 0$).....	113
IV.6 - O Limite de Campo Forte.....	116
IV.6.1 - A Solução de Schwarzschild - de Sitter: Hádrons como Buracos Negros Fortes	119
IV.6.2 - A Solução de Kerr-de Sitter, seus Horizontes e o Raio dos Hádrons.....	124
IV.7 - A Gravidade Superficial para os BNF.....	129

CAPÍTULO V: A Termodinâmica dos BNF: Possíveis Aplicações.....133

V.1 - Introdução.....	133
V.2 - A Lei das Áreas ou Segundo Princípio da Termodinâmica para os BNF.....	135
V.3 - Entropia e Temperatura de um BNF.....	143
V.4 - Consequências do Segundo Princípio da Termodinâmica dos BNF.....	146

V.4.1 - O Colapso de uma Estrela.....	147
V.4.2 - O "Big-Crunch" do Cosmos.....	150
V.5 - A Termodinâmica dos BNF e as Partículas Elementares.....	151
V.5.1 - Sobre a Estabilidade dos Hádrons Frente à Inte- ração Forte: Uma Possível Diferença Entre Mésons e Bárions.....	153
V.5.2 - Sobre a Estrutura Interna dos BNF.....	156
APÊNDICE A: A Aproximação Linear Para as Equações de Campo nas Vizinhanças de um Hádron.....	159
APÊNDICE B: Sobre as Equações de Campo nas Vizinhanças de um Hádron.....	171
APÊNDICE C: Equações de Einstein-Yukawa: Hádrons como Buracos Negros Fortes.....	176
REFERÊNCIAS.....	182

Recentemente algumas tentativas têm sido feitas no sentido de se unificar as interações gravitacionais e fortes, usando os métodos geométricos da Relatividade Geral (RG). Em tais abordagens tem-se usado alguns resultados da RG, e aplicado aos hádrons, sem uma demonstração precisa de sua validade geral.

Em vista disso, nós nos propomos então a: (i) fazer uma revisão de uma das abordagens referidas acima, aquela devido a Recami, Caldirola e colaboradores; (ii) verificar se a termodinâmica dos buracos negros tem validade também para essa teoria unificada.

Para isso, nós iniciamos fazendo, no capítulo 1, uma análise de uma teoria clássica unificada das interações gravitacionais e fortes, proposta inicialmente por Caldirola, Pavšič e Recami (CPR). Tal teoria baseia-se no postulado da covariância das leis físicas frente a dilatações globais do espaço-tempo, e nas 'coincidências dos grandes números': em especial, inspira-se no fato que a razão entre o raio de Hubble do universo e o raio de um hádron é aproximadamente igual à razão entre a intensidade da interação forte e da gravitacional.

Nós fazemos, então, uma descrição dos principais fatos que sugerem a unificação proposta por CPR. Em seguida, baseados no postulado da covariância das leis físicas frente a dilatações globais do espaço-tempo [Postulado I - seção (1.2)], nós derivamos as relações dos grandes números, que foram encontradas heurísticamente por Weyl, Dirac, e Eddington, entre outros.

Depois disso e de observar as várias semelhanças entre o campo gravitacional e o campo forte descritas na seção (1.3), nós so-

mos levados a pensar em um hádron como sendo um objeto similar (no sentido físico-geométrico) ao nosso próprio cosmos. Em especial, assim como no interior do nosso cosmos valem as equações de Einstein da gravitação, postulamos equações análogas às de Einstein (mas devidamente re-escaladas) para o interior de um hádron. Em tais equações, o tensor de matéria ordinário das equações do campo gravitacional T é "substituído" pelo tensor de matéria forte $S=NT$ ($N \approx 10^{41} G$), e a constante cosmológica Λ é substituída pela constante hadrônica $\lambda [\approx (10^{41})^2 \Lambda]$: ver capítulo I.

A partir desses resultados nós estudamos o comportamento das geodésicas seguidas por constituintes de teste no espaço interior a um hádron, obtendo naturalmente um potencial de confinamento, a liberdade assintótica dos constituintes, e uma relação do tipo das relações de Regge para os hádrons estáveis [seções (I.4.1), (I.5.2) e (I.43)].

Após essa revisão da teoria de CPR, onde fazemos também vários melhoramentos, deveríamos estudar as propriedades do espaço-tempo nas vizinhanças de um hádron, como ele aparece em nosso espaço. Para tal tarefa é necessário usar um formalismo um pouco mais elaborado da relatividade geral. Por isso, antes de tratarmos desse problema, nós fazemos, nos capítulos II e III, um estudo das ferramentas que são necessárias para desenvolver tal trabalho.

* * *

No capítulo II estudamos as soluções relevantes das equações de campo de Einstein com termo cosmológico (Λg), onde particularizamos os seguintes casos:

1) O espaço de Minkowski - obtido fazendo o tensor de matéria $T=0$ em

todo o espaço-tempo e também $\Lambda = 0$.

Em conexão com esse espaço, introduzimos alguns conceitos e definições importantes, como o de infinito espacial I^0 ; infinitos tipo-tempo passado e futuro: I^- e I^+ , respectivamente; e infinitos nulos passado e futuro: $\mathcal{I}^-$ e $\mathcal{I}^+$. Também, usando transformações de coordenadas adequadas, transformando os infinitos do espaço-tempo em quantidades finitas, construímos o diagrama de Penrose para o espaço de Minkowski.

2) Os espaços de Sitter e anti-de Sitter - obtidos fazendo-se $T=0$ em todo o espaço-tempo. Nesse caso nós também construímos o diagrama de Penrose, evidenciando a existência de horizontes de eventos, que estão diretamente ligados a "singularidades" do tensor métrico e que serão de grande importância no desenvolvimento do nosso trabalho. Ressaltamos a principal diferença entre o espaço de Sitter (o qual apresenta horizontes de eventos), e o de anti-de Sitter (que não os apresenta), e descrevemos algumas características desses horizontes.

3) Os espaços de Schwarzschild e de Reissner-Nordström - É a esses espaços assintoticamente chatos que dedicamos maior atenção. Construímos os diagramas de Penrose e evidenciamos que os horizontes nesses casos são superfícies nulas fechadas e de 'red-shift' infinito, as quais contém superfícies "fechadas e presas" no seu interior. Tudo isso é feito estudando-se a máxima extensão analítica que cada espaço pode ter. Nós mostramos que o espaço de Reissner-Nordström tem dois horizontes de eventos, em $r = r_{\pm}$; contudo, estudamos somente as propriedades do horizonte externo $r=r_+$ ($r_+ > r_-$) o qual tem as mesmas características que o horizonte do espaço de Schwarzschild, que ocorre em $r=2m$.

4) Espaços de Kerr e de Kerr-Newman - Esses espaços são ditos estacio-

nários, por incluírem movimento de rotação nos corpos fonte. Nós descrevemos as principais características do espaço de Kerr que representa um espaço axialmente simétrico. A estrutura dos diagramas de Penrose desses espaços é semelhante àquela do espaço de Reissner-Nordström, pois todos eles apresentam dois horizontes de eventos.

O ponto fundamental no estudo desses espaço-tempos é conhecer as características do espaço-tempo no exterior de corpos massivos estáticos (Schwarzschild), estáticos carregados (Reissner-Nordström), estacionários (Kerr) e estacionários carregados (Kerr-Newman).

O estudo do espaço de Sitter é feito principalmente para se entender o significado físico do horizonte de eventos, que nesse caso é de mais fácil compreensão.

No final da análise resulta uma comparação entre todos os espaços enumerados acima, principalmente usando os respectivos diagramas de Penrose e os vetores de Killing, onde mostramos algumas "causas" da existência (ou não) de horizontes de eventos em cada espaço-tempo.

* * *

Depois dos estudos do capítulo II, nós dedicamos o capítulo III ao estudo das propriedades dos horizontes de eventos e do espaço-tempo no seu interior - buracos negros - nos espaços assintoticamente chatos.

Iniciamos estudando detalhadamente as características dos horizontes de eventos nos casos estático e estacionário, dando uma definição mais precisa, mostrando que eles são superfícies nulas, e que, portanto, agem como membranas semi-permeáveis para efeitos causais; 1.

e., os horizontes de eventos deixam passar geodésicas tipo-tempo ou nulas (com um sentido definido no tempo) somente em uma direção.

Nós mostramos ainda, na seção (III.2), que, no caso de um espaço-tempo estático, toda superfície de red-shift infinito é também uma superfície nula e, portanto, um horizonte de eventos. A recíproca não é verdadeira: ou seja, uma superfície nula fechada não é necessariamente uma superfície de red-shift infinito, nem mesmo no caso estático.

Depois de definirmos o conceito de horizonte de eventos e de buracos negros (BN), nós mostramos na seção (III.3) que a área da superfície dos horizontes de eventos não decresce para o futuro. Tal resultado é conhecido pelo nome de Teorema de Hawking, Lei das Áreas, ou ainda Segundo Princípio da Mecânica dos Buracos Negros, em analogia com o Segundo Princípio da Termodinâmica.

Na seção (III.4), nós descrevemos algumas das características esperadas dos buracos negros formados através de um colapso gravitacional.

Com a lei das áreas, mais o conceito de gravidade superficial, que é introduzido na seção (III.5), é possível fazer uma analogia entre os princípios da termodinâmica e os "quatro princípios da mecânica dos BN", como é mostrado no quadro (III.1). Existe, portanto, uma analogia muito forte entre entropia (S) e a área (A) do horizonte de eventos, e entre a temperatura (T) e a gravidade superficial (K) de um BN.

O conceito de entropia (S_g) de um BN pode ser entendido do ponto de vista da teoria de informação, onde S_g é associada à quantidade de informação perdida a respeito do corpo que colapsou dando origem ao BN. Porém, usando-se somente a física clássica fica impossível encontrar uma relação formal para S_g , a qual parece não ter sentido,

pois a entropia do BN do ponto de vista clássico pode tender a infinito. Mas, usando o princípio de incerteza e a mecânica quântica, mostra-se que tal quantidade deve ser finita.

Na verdade, depois dos resultados obtidos por Hawking (usando a mecânica quântica) que um BN pode emitir radiação como um corpo negro a uma temperatura característica $T = \hbar \kappa / 2\pi k c$, é possível encontrar uma relação entre a área do horizonte de eventos e a entropia do BN: $S_B = kc^3 A / 4\hbar G$. E assim, conforme mostramos na seção (III.5), fica válido um Segundo Princípio da Termodinâmica generalizado a respeito da entropia S de um sistema composto por buracos negros e matéria ordinária: $S = S_B + S_m \geq 0$, onde S_m é a entropia da matéria ordinária que circunda os BN.

* * *

De posse de todas as ferramentas desenvolvidas nos capítulos II e III, nós dedicamos o capítulo IV ao estudo das propriedades do espaço-tempo nas vizinhanças de um hádron, em nosso cosmos.

Então, nós modificamos adequadamente as equações de Einstein com termo cosmológico, de modo a introduzir nessas equações mais um campo tensorial (o campo $\mathbf{g}$) além do gravitacional $\mathbf{e}$. Porém, as equações são escritas em função de uma única métrica total g , a qual é uma 'composição' das duas primeiras. Obviamente, as nossas novas equações de campo se reduzem às equações originais de Einstein para partículas que não carregam carga forte.

Além do mais, para partículas hadrônicas, nas vizinhanças de um hádron nós encontramos duas situações: 1) a primeira é que suficientemente longe do hádron fonte, onde o campo forte é suficientemente "fraco", podem-se linearizar as equações de campo, escolhendo a mé-

trica total g como sendo a soma das duas métricas $e \cong \eta$ e s , sendo que nesse limite obtemos o potencial Yukawiano correto para a interação entre duas partículas hadrônicas; 11) a segunda situação é muito próximo ao hádron, onde o campo forte é dominante: nesse caso podemos assumir que a métrica total g é aproximadamente igual à métrica forte s . Essas discussões são feitas na seção (IV.2).

Em conexão com a aproximação linear, a qual é analisada detalhadamente no apêndice A, nós estudamos, na seção (IV.3), como melhor definir o vácuo para as vizinhanças de um hádron, sendo que o mesmo não pode ser definido simplesmente fazendo o tensor de matéria igual a zero. Nesse ponto vale salientar a importância do termo cosmológico nas equações de campo, sem o qual muitos dos resultados obtidos não seriam possíveis.

Já, em conexão com a definição do tensor métrico forte s , nós damos, no apêndice B, um exemplo onde a escolha feita inicialmente e usada em alguns trabalhos, tomando-se a métrica total g como a soma da métrica gravitacional e mais a métrica forte s , não é consistente com o modelo físico adotado, e que em geral essa escolha vale somente para a aproximação linear.

Obviamente, muito longe do hádron fonte, nossas equações de campo se reduzem àsquelas de Einstein, mesmo para partículas hadrônicas de teste.

Depois de estudarmos o limite de "campo fraco", nós analisamos [ver seção (IV.6)] as soluções conhecidas das nossas equações no "limite de campo forte". Nesse limite, já se conhece uma série de soluções (estáticas e estacionárias) dessas equações que são úteis para nós. Ao analisarmos essas soluções encontramos que os hádrons podem ser associados a "buracos negros" que ocorrem em cada solução, ou seja, os hádrons podem ser tratados como buracos negros fortes (BNF) de vá-

rios tipos. P.e.:

1) A solução de Schwarzschild - de Sitter apresenta um BNF estático com raio da ordem de 1 fm. Ele pode, portanto, ser associado a hádrons sem spin e sem carga elétrica.

2) A solução de Reissner-Nordström - de Sitter é a versão carregada da solução (1), que também apresenta um BNF, o qual pode ser associado a um hádron sem spin mas com carga elétrica não nula.

3) A solução de Kerr - de Sitter apresenta um BNF estacionário com momento angular L e, portanto, é associável a um hádron de spin não nulo (mas sem carga elétrica).

4) A solução de Kerr-Newman - de Sitter é a versão carregada da solução (3) acima que apresenta um BNF estacionário e carregado, o qual é associado a um hádron com spin e carga elétrica não nulos.

Depois de obter esses resultados, nós encerramos o capítulo IV definindo para os BNF o conceito de gravidade superficial forte, e encontramos que ela parece ser nula para BNF associados a hádrons que ficam numa das trajetórias de Regge.

* * *

A partir disso, nós procedemos, no capítulo V, à generalização da termodinâmica dos buracos negros gravitacionais (BNG) aos nossos buracos negros fortes. Explicitamente, mostramos na seção (V.2) que a lei das áreas (ou Teorema de Hawking, ou ainda Segundo Princípio

da Mecânica dos BNG) vale também para os BNF. Tal validade está relacionada com o fato que nossas equações de campo ainda preservam a covariância geral frente a transformações arbitrárias de coordenadas.

Depois de ter mostrado essa validade, e de ter introduzido o conceito de gravidade superficial para os BNF de modo análogo com os BNG, a generalização da termodinâmica mencionada acima segue diretamente: ou seja, nós definimos na seção (V.3) os conceitos de entropia e temperatura hadrônicas (ou fortes) também para os BNF. Em seguida, analisamos algumas possíveis consequências dessa termodinâmica dos BNF na cosmologia e no âmbito das partículas elementares.

Em particular, na seção (V.4), aplicamos o Segundo Princípio ao colapso gravitacional: i) de uma estrela, ii) de uma massa tão grande quanto a do nosso cosmos. No primeiro caso, os resultados não são de todo conclusivos. Mas, no caso de um colapso esfericamente simétrico e homogêneo, obtemos que uma estrela de massa M no intervalo $3M_{\odot} \leq M \leq 5M_{\odot}$ não chega a formar um BNG antes disso a estrela "evapora" dando origem a um novo objeto com raio R no intervalo $1 \leq R \leq 3$ dias luz. No segundo caso, encontra-se que não há formação de singularidade futura, sendo que a "super-bola" de $\sim 10^{80}$ nêutrons que se forma durante o colapso deve "re-explodir" gerando um "novo cosmos" com raio $R \gg \bar{R}$, onde $\bar{R} \approx 10^{25}$ m (o qual é da mesma ordem de grandeza do raio de Hubble do universo, como estimado atualmente). Ou seja, o universo deve realizar uma sucessão de ciclos de expansão/contração, todos tomando lugar no interior do raio $r_s = 2GM/c^2 \approx 2 \times 10^{27}$ m, sem atingir singularidades futura nem passada.

Na seção (V.5), estudamos as consequências da termodinâmica dos BNF aplicada às partículas elementares. Nós iniciamos mostrando que a temperatura hadrônica característica T_f é da ordem de 10^{12} K, e que, por isso, hádrons ordinários devem ter uma vida média muito cur-

ta. Há, porém, situações especiais em que T_F pode ser nula. Por exemplo, obtém-se que a gravidade superficial forte κ_F (e portanto a temperatura hadrônica T_F) é nula para hádrons que ficam numa trajetória de Regge onde $m^2 = Q^2 + a^2$ ($a=L/mc$). Mostra-se também que um BNF sem spin e sem carga elétrica pode ter uma temperatura T_F nula, desde que se escolha adequadamente o sinal da constante cosmológica Λ (e, consequentemente, da constante hadrônica λ).

Assim, encontramos que os píons (e possivelmente toda a família dos mésons) devem estar associados a BNF com uma constante hadrônica repulsiva ($\lambda < 0$), enquanto que os nucleons (e possivelmente toda a família dos bárions) podem ser associados a uma constante atrativa ($\lambda > 0$).

Para encerrar o capítulo V, analisamos brevemente o problema da existência de singularidades no interior dos BNF, e verificamos que os mesmos em geral podem ser livres de singularidades e, portanto, podem ter uma estrutura interna como os hádrons.

UMA TEORIA UNIFICADA DAS INTERAÇÕES GRAVITACIONAL E FORTE

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uma revisão da teoria que convencionalmente chamaremos teoria de "CPR": uma teoria unificada das interações gravitacional e forte, proposta inicialmente por Recami e Caldirola (Caldirola, Pavšič and Recami [13]), e que procura descrever a estrutura dos hádrons e as interações fortes usando os métodos geométricos da relatividade geral (RG). Tal teoria tenta uma abordagem clássica unificada para os campos gravitacional e forte - este último também sendo considerado como um campo tensorial (ver Grushin et al. [42]). Ela consegue resultados análogos a outras duas teorias de "Strong-Gravity" desenvolvidas separadamente: uma devida principalmente a C. Sivaram e K. P. Sinha (ver Sivaram and Sinha [94] e referências aí contidas), e a segunda desenvolvida por A. Salam e colaboradores (ver p.e. Salam [90], Salam e Strathdee [91] e suas referências).

Do ponto de vista formal, no entanto, a teoria de "CPR" é (em alguns aspectos) parecida com a teoria bi-métrica da gravitação de N. Rosen (ver p.e. Rosen [87,88,89]), no sentido que ambas envolvem equações de campo com duas métricas quando na vizinhança de partículas elementares.

Nós revisaremos a teoria de CPR nos pontos mais essenciais, fazendo melhoramentos em vários deles, com a finalidade de dar uma forma consistente à teoria, a fim de estudarmos, nos próximos capítulos, se as suas consequências (em particular, se a termodinâmica dos buracos negros aplicada às partículas elementares) realmente têm validade.

Na seção (1.2) abordaremos os fatos principais que justificam as bases da teoria de CPR, a qual se baseia no postulado que as leis físicas sejam covariantes frente a "dilatações globais" do espaço-tempo.

Em seguida, seção (1.3), veremos que os hádrons podem ser considerados como micro-universos, similares ao nosso cosmos, e obtemos de uma maneira sistemática as "relações dos grandes números" (que conectam o nosso universo com os micro-universos), até agora derivadas apenas heurísticamente por Weyl [102], Eddington [31], Dirac [28,29], Klein [57], Jordan [55], entre outros. Devemos esclarecer, no entanto, que na teoria de "CPR" a "numerologia" conecta o cosmos gravitacional (nosso cosmos) com os micro-cosmos "fortes" (hádrons); i.e., relaciona as interações gravitacionais com as interações fortes; enquanto Dirac [28] sugere relacionar as interações gravitacionais com as eletromagnéticas (as únicas interações suficientemente conhecidas na época da formulação de sua teoria).

Discutiremos, na seção (1.4), sobre como estender os Princípios de Equivalência e de Mach ao interior dos hádrons (considerados como micro-universos), sem o que ficaria impossível geometrizar o campo forte no interior deles. Trataremos, também, da generalização desses princípios para a vizinhança dos hádrons como eles aparecem em nosso cosmos.

Na seção (1.5), tratando da "geometrização" do campo forte

no espaço-tempo interior ao hádron, escreveremos as "equações de campo" para tal campo forte (que são as próprias equações de Einstein "re-escaladas"). A partir daí, usando as equações das geodésicas para os constituintes dos hádrons, veremos num exemplo simples, que a teoria de CPR produz naturalmente o "confinamento" e a "liberdade assintótica" para tais constituintes.

Para encerrar a revisão da teoria, seria necessário estudar o problema da geometrização do campo forte para a micro-vizinhança de um hádron, como observado em nosso espaço-tempo. Porém, a formulação originalmente proposta apresenta alguns problemas (p.e. o de não ser completamente compatível com o modelo físico proposto - ver apêndice B), de forma que necessitamos apresentar uma nova formulação que seja consistente com o modelo físico. Além do mais, para tratar de tal problema de forma mais precisa, é necessário usarmos algumas "ferramentas" e alguns conceitos que somente serão introduzidos nos capítulos II e III. Por isso, nós deixamos essa tarefa para ser atacada separadamente no capítulo IV, onde trataremos disso demoradamente.

1.2 - SOBRE A COVARIANÇA DAS LEIS FÍSICAS POR DILATAÇÕES GLOBAIS DO ESPAÇO-TENPO

Começaremos a discussão lembrando o fato que as equações de Maxwell do eletromagnetismo apresentam a propriedade de serem covariantes (mantém a mesma forma: para definições precisas de covariança

e invariância ver Scanavini [92]) frente a transformações conformes, em particular, frente a dilatações globais do espaço-tempo (ver a seguir); desde que, quando na presença de cargas, estas sejam também adequadamente "dilatadas". Algo semelhante (porém de uma forma mais geral) ocorre com as equações do campo gravitacional, isto é: as equações de Einstein também são covariantes sob dilatações globais do espaço-tempo, desde que, quando na presença de matéria e do termo cosmológico, eles sejam também dilatados adequadamente (com base nas relevantes considerações dimensionais). Em outras palavras, pode-se usar o fato que as equações de Einstein não contém um "comprimento fundamental", de forma que elas podem, a priori, descrever espaço-tempos de cosmos com qualquer tamanho.

Aqui, antes de mais nada, podemos citar o próprio Einstein [33] que, referindo-se a sua última teoria unificada, em seu último trabalho científico escreveu: <<Das equações de campo pode-se imediatamente derivar o que segue: Se $g(x)$ é uma solução das equações de campo, então $g(x/\alpha)$ também é solução, onde α é uma constante positiva (soluções similares). Vamos, por exemplo, supor que $g(x)$ represente um cristal de tamanho finito mergulhado num espaço-tempo chato. Nós então teríamos um outro universo com um segundo cristal, exatamente similar ao primeiro, mas dilatado, tendo as suas dimensões lineares α vezes maiores. Enquanto nos confinamos em um universo com apenas um cristal, não encontramos nenhuma dificuldade. Nós percebemos somente que o tamanho de tal cristal (padrão de comprimento) não é fixado pelas equações de campo...>>.

Com base na covariância das equações de Maxwell do eletromagnetismo, e das equações de Einstein da gravitação mencionada acima, nós podemos então postular:

Postulado_I: As leis físicas são covariantes também frente a dilatações globais do espaço-tempo definidas por:

$$x' = \alpha x; \quad (1.1)$$

onde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, e α é uma constante positiva (que não depende de x). Em relação ao postulado I, note-se que uma dilatação do espaço-tempo, isto é do universo, por um fator α é equivalente a uma "contração" dos padrões de comprimento e de tempo pelo fator $1/\alpha$; e exigir que as leis físicas sejam covariantes frente a tais contrações parece óbvio.

Devemos, no entanto, mencionar que com o postulado acima se faz necessário estender os grupos de covariância ordinários também pela inclusão de dilatações. Essa exigência pode ser esclarecida considerando o seguinte. Quando os físicos do passado trataram de fenômenos eletromagnéticos (além dos fenômenos mecânicos), foi necessário abandonar a relatividade galileana em favor da relatividade de Einstein [isto é, passar do grupo $O(3)$ ao grupo $O(3,1)$]. Visto que agora nos confrontamos com fenômenos nucleares e sub-nucleares (especialmente com interações fortes), pode ser necessário procurar por uma "nova" relatividade, mais ampla.

Dentro da presente abordagem, o primeiro passo será usar as equações de Einstein como base para deduzir modelos cosmológicos que descrevam não somente o nosso cosmos como também outros "micro-cosmos" adequadamente contraídos (ou mesmo outros "super-cosmos" adequadamente dilatados). São esses fatos que investigaremos nas próximas seções, em conexão com o problema da estrutura interna dos hádrons.

O segundo passo referente - como já dissemos - ao exterior do hádron, será considerado detalhadamente no capítulo IV.

1.3 - HÁDRONS COMO "MICRO-UNIVERSOS" FORTES

Juntamente com o postulado I feito anteriormente (i.é., covariância das leis físicas frente a dilatações globais do espaço-tempo), vamos lembrar algumas relações empíricas conhecidas e comumente referidas como "coincidências dos grandes números". Uma delas é que a razão R/r entre o raio de Hubble do nosso universo (cosmos gravitacional), $R \approx 10^{26}$ m, e o raio característico das partículas sub-nucleares, $r \approx 10^{-15}$ m, é aproximadamente igual à razão s/S entre a intensidade s do campo nuclear forte e S do campo gravitacional. Mais especificamente, calcula-se:

$$S/s \approx (Gm^2/\hbar c)/(Ng^2/\hbar c) \approx 10^{-41},$$

$$r/R \approx (10^{-15} \text{ m})/(10^{26} \text{ m}) \approx 10^{-41}, \quad (1.2)$$

onde G é a constante universal gravitacional, e m representa a carga (=massa) gravitacional do hádron de referência (p.e. píon ou nucleon). O número puro $d \equiv Ng^2/\hbar c$, é o quadrado da constante de acoplamento forte, sendo que N é uma constante que desempenhará o papel de "constante universal forte", e g a carga forte do hádron de referência considerado (ver a seguir). Nós podemos considerar, por exemplo, o acoplamento $\pi\pi\rho$ (onde $d \approx 3$), ou entre $p\rho\pi$ (onde $d \approx 14$) (ver também Caldirola and Recami [15] e Recami [73]).

Na verdade, o valor da razão r/R é a única "entrada" necessária para deduzir não somente a "coincidência" numérica precedente $S/s \approx r/R$, mas também uma série de outras "coincidências de grandes números", analogamente ao que foi obtido por Caldirola, Pavšič e Recami.

mi [13], com base no postulado I e fazendo $\mathcal{L}$ da relação (I.1) igual a r/R (sendo que x são as coordenadas originais que descrevem o nosso cosmos, e x' as coordenadas que descreverão, então, o interior de um hádron de referência). Toda essa "numerologia", cujas relações mais importantes rederivaremos a seguir, é obtida mais exatamente quando tomamos o pión como hádron de referência; em tal caso $Ng^2/hc \approx 3$ (acoplamento $\pi\pi\rho$). No que segue, então, a massa 'm' referir-se-á à massa de um pión.

Os fatos empíricos mencionados acima (ver também o que segue), mais a propriedade do campo nuclear forte de ser sempre atrativo e associado a equações não lineares (onde os "quanta" do campo são também fontes do próprio campo), leva-nos a pensar que existe uma similaridade físico-geométrica entre os campos gravitacional e forte. Assim, se escolhermos:

$$\mathcal{L} \equiv r/R \approx S/s \approx 10^{-41}, \quad (I.3)$$

onde $\mathcal{L}$ é o "fator de dilatação" que aparece na equação (I.1) [seção (I.2)], a relação (I.3) transformará o nosso universo, com raio de Hubble R , num outro espaço-tempo (micro-universo), com "raio de Hubble forte" r e, conseqüentemente, levará o campo gravitacional no campo forte [ver final desta seção, e seção (I.5)].

Tomemos inicialmente o pión como "hádron de referência" e estudemos algumas conseqüências do postulado I e da escolha (I.3).

Usando a relação (I.2) junto com (I.3) vem:

$$Ng^2 = Gm^2\mathcal{L} \approx 10^{41} Gm^2. \quad (I.4)$$

Analisando a relação (I.4) do ponto de vista dimensional ve-

remos que surgem duas possibilidades:

1) Se escolhermos unidades tais que $[g] \equiv [m]$ e $m=g$, encontramos:

$$N = G/\alpha \approx \hbar c/m_p^2. \quad (1.5)$$

2) Ao contrário, se escolhermos as unidades de forma que $[N]=[G]$, e se fizermos ainda $G=N=1$, obtemos:

$$g = m/\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{\hbar c}, \quad (1.6)$$

onde a segunda igualdade ($g \approx \sqrt{\hbar c/G}$) é, a priori, uma "coincidência" numérica; a mesma igualdade resulta, porém, usando a equação (1.5) com $g = m/\sqrt{\alpha}$; ou seja:

$$g \approx \sqrt{\hbar c/G} = \text{massa de Planck}. \quad (1.7)$$

Isso nos mostra que a massa de Planck pode ser vista como nada mais que a carga forte do hádron em unidades adequadas. Porém, quando tiramos da experiência que os quarks parecem ser os verdadeiros portadores da carga forte, e definimos $g \approx n\bar{g}$, ($n=2,3$), a quantidade $\bar{g}$ sendo a magnitude média da carga forte dos quarks (ver Caldirola, Pavšič e Recami [13,14] e Caldirola e Recami [15]), então a equação (1.7) parece valer mais corretamente para $\bar{g}$; ou seja: a massa de Planck parece ser simplesmente a magnitude da carga forte dos quarks (em unidades adequadas).

O fato bem conhecido que as forças gravitacionais tornam-se tão intensas como as "fortes", para massas tão grandes como a massa de Planck, na presente teoria significa simplesmente que a gravidade for-

te criada nos "micro-universos" fortes (i.e., no interior dos hádrons), por quarks, é exatamente o campo forte.

Tais considerações preliminares levam a pensar que os "mini-buracos negros" preditos por alguns autores, tendo como sua massa a massa de Planck, seriam simplesmente identificados com os hádrons (ou melhor, com os quarks) que têm a massa de Planck como massa forte.

Por hora, vejamos algumas implicações do postulado I estabelecido na seção (1.2).

Considere-se uma equação representando uma lei física válida no interior do nosso cosmos (p.e. equações de Maxwell, ou eqs. de campo de Einstein). Então, essa equação, pelo postulado I, manterá a mesma forma inicial frente a dilatações do tipo das representadas pela equação (1.1), e representará uma lei física válida também no interior de micro-cosmos similares ao nosso, mas contraídos por um fator $1/\alpha$.

Esse fato tem consequências importantes. Por exemplo, vamos adotar um modelo oscilatório (big-bang cíclico) para nosso cosmos, com um intervalo de tempo Δt de um ciclo completo da ordem de 10^{18} s. Então, o tempo de uma oscilação do micro-cosmos obtido pela contração do nosso universo pelo fator $1/\alpha$, será (pela eq. [1.1]):

$$\Delta \tau = \alpha \Delta t \approx 10^{-41} 10^{18} \text{ s} \approx 10^{-23} \text{ s}, \quad (1.8)$$

onde α é definido pela eq. (1.3).

Note-se que $\Delta \tau \approx 10^{-23}$ s é da mesma ordem de grandeza do tempo de decaimento de partículas elementares via interação forte. Isso é facilmente entendido pois a vida média $\Delta \tau$ das partículas instáveis frente a uma dada interação é inversamente proporcional a intensidade da interação; e como a intensidade da interação forte s é $1/\alpha$ vezes maior do que a interação gravitacional S , segue que $\Delta \tau = \alpha \Delta t$.

Observe-se ainda que, se o cosmos "inicial" é estável (modelo oscilatório) com um tempo Δt gasto num ciclo expansão/recontração, então o "cosmos final" obtido pela contração do primeiro também deve ser estável e com um ciclo de expansão/contração de ordem de $\Delta \tau = \alpha \Delta t$.

Uma "coincidência numérica" muito importante surge se considerarmos que, para um hádron típico, o período $\Delta \tau$ dado pela eq. (1.8) (para um micro-universo oscilante) define uma frequência característica $\nu = (\Delta \tau)^{-1} \approx 10^{23}$ Hz. Esse número é da mesma ordem de grandeza que a frequência de Broglie ν_0 obtida a partir da relação de de Broglie-Einstein $E_0 = h\nu_0$, onde $E_0 = m_0 c^2$ é a energia de repouso de um hádron (p. e. de um píon). Este fato, juntamente com a conjectura que a fase da oscilação dos hádrons pode ser uma "variável escondida", pode ter consequências importantes também no âmbito das tentativas de se entender a Mecânica Quântica a partir de teorias clássicas.

Outra relação importante, que pode ser entendida com base na presente teoria "scale-covariant", é a relação de Eddington (a qual é obtida na seção [1.5.1]) entre a massa do universo $M(u)$ e a massa típica de um hádron $m(h)$:

$$M(u) = m(h)/\alpha^2 \approx 10^{82} m(h). \quad (1.9)$$

Podemos ainda derivar mais uma "coincidência" muito interessante. Considere, por exemplo, que o nosso universo seja fechado com um raio $R \leq R_s \equiv 2GM/c^2$. Contraíndo nosso cosmos pelo fator $1/\alpha$, a relação (1.9) nos diz que a massa $M(u)$ passa a $m(h)$ (massa do hádron). Além do mais, as considerações dimensionais anteriores mostraram [eq. (1.5)] que G , pela contração, passa a $G/\alpha = N$. Obtemos, então, que o hádron tem como raio máximo:

$$r_g = 2Nm(h)/c^2.$$

(1.10)

Tal raio é da ordem de 10^{-15} m (= 1 fermi; dentro da flexibilidade permitida na escolha do valor exato para α), que é da mesma ordem de grandeza do raio conhecido dos hádrons.

Note que R_s é o "raio de Schwarzschild" (ver cap. II) de uma massa igual aquela do universo, enquanto que r_g assumirá o sentido de "raio de Schwarzschild forte" do hádron considerado (ver o cap. IV).

Antes de prosseguir, vale observar mais uma vez que toda a "numerologia dos grandes numeros" é deduzida a partir do postulado I, juntamente com a razão $r/R \equiv \alpha$, que fixa o fator de escala na relação (1.1). Note-se que para isso nós precisamos entrar com ambos R e r como os raios máximos do cosmos e do hádron correspondente (ou então com os raios médios), respectivamente. De forma que α é independente do tempo. Assim, ao identificarmos $Ng^2/Nm^2 = 1/\alpha$, na equação (1.3), nós obtemos - nessa formulação e com nossas hipóteses - uma constante G que não varia com o tempo cósmico (ver Caldirola and Recami [16] e Recami [75]).

Nós pareremos aqui de nos preocuparmos com a "numerologia": para mais detalhes ver Caldirola, Pavšič e Recami [13]. Todas essas "coincidências" tornam razoável o postulado I e nos estimulam a prosseguir desenvolvendo a presente teoria (tratando os hádrons como objetos similares ao nosso cosmos).

I.4 - GENERALIZAÇÃO DOS PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA E DE MACH

Antes de irmos adiante e extendermos a relatividade geral, precisamos estender - como já dissemos - o Princípio de Mach e o de Equivalência para incluir também os micro-cosmos.

Para simplificar a discussão, consideraremos o "limite clássico": isto é, o limite de baixas velocidades, campo fraco e distâncias "intermediárias"; então deve valer a mecânica clássica de Newton. Nesse caso, no interior do nosso cosmos vale também, aproximadamente, a lei da gravitação universal de Newton:

$$F_g = - G M_1 M_2 / r^2, \quad r \ll 10^{26} \text{ m.} \quad (I.11)$$

Agora, dilatando o espaço tempo por um fator $\mathcal{L} = 10^{-41}$, através de considerações dimensionais simples concluímos que a equação (I.11) resulta:

$$F_g = - G M_1 M_2 / \mathcal{L} r^2; \quad r \ll 10^{-15} \text{ m.} \quad (I.12)$$

Usando o postulado I podemos escrever (I.12) na mesma forma que (I.11), ou seja:

$$F_g = - N g_1 g_2 / r^2; \quad r \ll 10^{-15} \text{ m.} \quad (I.13)$$

Na equação (I.13), N é a constante da gravitação forte, g_1 e g_2 representam as cargas fortes dos dois corpos em estudo, e r é a distância entre eles. Note-se que, depois das discussões do início desta seção, se $N = G/\mathcal{L}$ com $[N]=[G]$, então $[g]=[m]$ e $g=M$; logo g_1 e g_2

são exatamente M_1 e M_2 , respectivamente. Por outro lado, se escolhermos as unidades tais que $N=G=1$, as equações (1.11) e (1.12) resultam:

$$F_G = - M_1 M_2 / r^2, \quad (1.11a)$$

$$F_S = - g_1 g_2 / r^2 \quad (1.12a)$$

onde, $g_1 \equiv M_1 / \sqrt{\alpha}$ e $g_2 \equiv M_2 / \sqrt{\alpha}$, conforme a equação (1.6).

Nesse ponto, vamos observar o seguinte:

1) Se nós contraírmos somente o cosmos gravitacional ("inicial"), então passamos das interações gravitacionais às interações fortes.

2) Se contraírmos não somente o cosmos, mas também as unidade de medida, isto é, se o observador e seus instrumentos de medida contraírem junto com o cosmos, então a equação (1.11) não somente é covariante, mas também invariante. Isto significa que um observador imaginário no interior do hádron, usando padrões de medida contraídos por um fator $r(h)/R(u)$, deveria descrever forças agindo no interior daquele "universo forte" exatamente como nós descrevemos as interações gravitacionais, no interior de nosso cosmos. Essa conclusão será usada na seção (1.5), quando escreveremos as equações de campo para o interior de um hádron.

Fica, então, possível e imediato generalizar o princípio de Mach para o interior dos micro-universos: Para um observador interno, a inércia de qualquer constituinte do hádron é originada por suas interações com todos os outros constituintes daquele universo; mas as interações agora são fortes, e não mais gravitacionais (-Princípio de Mach generalizado). Então, a massa inercial m_i dos constituintes do hádron coincide com sua carga forte g , e não com sua carga gravitacional

(massa). Notamos, então, que esta última afirmação nada mais é do que o Princípio de Equivalência (generalizado).

Temos, assim, generalizados os dois princípios necessários para formular nossa teoria. A generalização do Princípio de Mach e do Princípio de Equivalência está resumida no parágrafo anterior. Isso significa, na presente linguagem e na aproximação referida acima, que no interior do hádron (universo forte) vale, por exemplo, a relação:

$$F = m_I a = g a = N g g_0 / r^2, \quad (1.13a)$$

de forma que:

$$a = N g_0 / r \quad \text{e} \quad m_I = g. \quad (1.13b)$$

Em vista disso, podemos claramente geometrizar também o campo forte no interior do hádron, visto que lá o papel de massa inercial é desempenhado pela massa forte, e não pela massa gravitacional.

Agora, quando um constituinte sai do interior de um hádron até grandes distâncias dele (se esse processo é permitido), sua massa inercial decrescerá por um fator $\sqrt{\alpha} \approx 10^{-20}$ (com $N=G=1$), visto que temos:

$$\begin{array}{lll} m_I = g & , & m_I = M \\ \text{(interior)} & & \text{(exterior)} \end{array} \quad g \approx 10^{20} M. \quad (1.14)$$

As condições prévias valem somente se podemos fazer uso de uma relação tipo $m_I a = N g g_0 / r^2$. Ora, tal equação pode não valer no exterior (nas vizinhanças) de um hádron, pois nesse caso a partícula de teste está na presença de dois campos: o gravitacional e o forte (ver

o capítulo IV). Por isso, pode parecer que na micro-vizinhança exterior ao hádron surgiriam problemas quanto a possibilidade de se geometrizar o "campo forte" nessa região.

Porém, nessa micro-vizinhança, o "constituente" de teste ainda sente a interação forte, e isso nos leva a pedir que a sua massa inercial ainda coincida com a sua carga forte (enquanto ele está sujeito ao campo forte). Dessa forma, é também possível geometrizar o campo forte no exterior de um hádron; sendo que nessas circunstâncias o campo a ser geometrizado - como veremos - será uma "soma" do campo forte propriamente dito (devido a carga forte g do hádron), com o campo gravitacional (devido a massa m). Para mais detalhes ver cap. IV.

1.5 - O ESPAÇO-TEMPO NO INTERIOR DO HÁDRON

Como nos lembram as discussões da seção (1.3), nós temos dois problemas distintos para resolver. O primeiro diz respeito ao espaço interior ao hádron, cuja geometrização do campo será discutida a seguir. O segundo problema é o da descrição de um hádron como ele aparece no nosso espaço, isto é, no espaço do nosso cosmos. Este problema é mais difícil devido à presença dos dois campos (gravitacional e forte), e será tratado separadamente no capítulo IV.

1.5.1 - FORMALIZAÇÃO DA TEORIA

Das discussões precedentes resulta que podemos considerar que as interações agindo no interior do universo gravitacional (entre constituintes do cosmos), e no interior dos universos fortes (entre os constituintes dos hádrons), são governadas pelas mesmas leis covariantes por dilatações; ou seja, as interações fortes podem ser derivadas a partir das interações gravitacionais, usando-se o postulado I.

No interior do nosso cosmos escolheremos, como normalmente, as equações de campo de Einstein com termo cosmológico.

$$R - gR/2 - \Lambda g = - k_0 GT, \quad (1.15)$$

onde $k_0 \equiv 8\pi/c^4$; g é a métrica do espaço-tempo (com assinatura -2); Λ é a "constante cosmológica" ($|\Lambda| \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$); $R = [R_{\mu\nu}]$ é o tensor de Ricci, definido conforme Rindler [81]; $R = R^\mu_\mu$ é o escalar de curvatura (contração do tensor de Ricci); e T é o tensor de energia-momento da matéria, que para um fluido perfeito, por exemplo, é dado por (ver p.e. Weinberg [101], Zel'dovich e Novikov [103]):

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

onde T é diferente de zero somente no interior da distribuição do fluido, ρ é a densidade do fluido e p a pressão. No caso de uma "nuvem de poeira" (fluido incoerente), o tensor de energia momento é:

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_\mu U_\nu, \quad (1.17)$$

onde U [tanto em (1.16) como em (1.17)] é a quadri-velocidade de cada partícula do fluido.

A equação (1.15) vale no interior de nosso cosmos, quando somente interações gravitacionais estão presentes.

A métrica obtida pela solução de (1.15) para uma distribuição estática e esfericamente simétrica de carga gravitacional (massa), nas coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ) é uma "solução de Schwarzschild com termo cosmológico" (ver p.e. Anderson [5], ver também o capítulo 11); isto é:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)dt^2 - dr^2/f(r) - r^2 d\Omega, \\ f(r) &= 1 - 2m/r + \Lambda r^2/3, \\ d\Omega &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

A solução (1.18) vale para a região exterior a uma distribuição esfericamente simétrica qualquer de matéria (teorema de Birkhoff), onde $T=0$. Nesse caso $m=GM/c^2$, onde M é a massa total do corpo considerado.

Vamos agora "dilatar" o espaço-tempo, junto com a fonte e com o termo cosmológico, por um fator $\alpha = 10^{41}$, conforme o que vimos nas seções anteriores. Assim, considerações dimensionais simples mostram que a equação (1.18) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= f_1(r')dt'^2 - dr'^2/f_1(r') - r'^2 d\Omega', \\ f_1 &= 1 - 2m\alpha/r' + \Lambda r'^2/3 \alpha^2, \\ d\Omega' &= d\Omega. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Já sabemos, conforme vimos na seção (1.3), que contraindo o espaço-tempo do cosmos gravitacional por um fator $1/\alpha = 10^{41}$ (isto é,

"dilatando" o cosmos por um fator $\mathcal{L}$, nós passamos do cosmos gravitacional ao micro-cosmos forte; i.e., das interações gravitacionais às interações fortes. A solução (1.19) descreve, então, um constituente esfericamente simétrico não mais do cosmos, mas de um hádron. Agora, pelo postulado I a equação (1.18), depois da contração ($x' = \mathcal{L}x$), pode também ser escrita na forma:

$$ds'^2 = f_2(r') dt'^2 - dr'^2/f_2(r') - r'^2 d\Omega',$$

$$f_2(r') = 1 - 2g_0/r' + \lambda r'^2/3, \quad (1.20)$$

onde $g_0 \equiv Ng/c^2$, a quantia g sendo a massa forte do corpo resultante pela contração do original, N a constante de gravitação forte, e λ a constante cosmológica forte (ou constante_hadrônica - obtida pela contração da constante cosmológica gravitacional Λ).

A equação (1.20) se aplica ao interior de um hádron e descreve a mesma situação física que a equação (1.19); elas, na verdade, devem ser idênticas, daí obtemos:

$$\lambda = \Lambda/\mathcal{L}^2 \approx 10^{82} \Lambda \approx 10^{30} \text{ m}^{-2},$$

$$m \mathcal{L} = g_0. \quad (1.21)$$

Agora, escolhendo unidades tais que tenhamos massa gravitacional = massa forte, resulta (como vimos anteriormente): $N = G/\mathcal{L}$, e usando isso em (1.21) obtemos:

$$m \mathcal{L} = GM \mathcal{L}/c^2 = g_0 = Ng/c^2 = Gg/\mathcal{L} c^2,$$

ou seja:

$$g = \mathcal{L}^2 M. \quad (1.22)$$

A relação (1.22) nos diz, por exemplo, que se partimos inicialmente com $M=m(u)$ = massa do universo, depois da contração obtemos:

$$g \cong (10^{-41})^2 M(u) \cong m(h), \quad (1.23)$$

ou seja, o universo contraído resulta com uma massa g igual à massa do hádron, e conseguimos assim entender essa já famosa relação de Eddington [a qual é mencionada na seção (1.3)] entre a massa dos hádrons e a massa do universo.

Vale observar aqui que a relação (1.22) não representa uma relação numérica entre a massa gravitacional e a carga forte de uma partícula constituinte simplesmente, pois o postulado I refere-se a contrações (dilatações) do cosmos como um todo, e não de somente parte dele. Aquela relação somente tem sentido se M se referir à massa total do cosmos e g à massa forte total do hádron (a qual, nas unidades que estamos usando, coincide com sua massa gravitacional).

A relação entre carga forte e carga gravitacional de um constituinte é, obviamente, aquela dada pela equação (1.14). Tal relação é descrita em Caldirola, Pavšič e Recami [13], como sendo "do ponto de vista externo". Para fins de cálculo, no entanto, frequentemente usaremos unidades tais que tenhamos massa gravitacional = carga forte, tanto para hádrons como para constituintes, de forma que $N = G/\mathcal{L}$.

Neste ponto, podemos fazer mais um postulado:

Postulado II - As equações do campo forte para o interior dos hádrons (as eq. de Einstein contraídas) são:

$$R - gR/2 - \lambda g = -k_0 S, \quad (1.24)$$

onde:

$$\lambda = \Lambda / \mathcal{L}^2 \approx 10^{82} \Lambda, \quad (1.25)$$

$$S \equiv NT = GT / \mathcal{L}.$$

Note-se que as relações (1.25) seguem diretamente das equações (1.15), por considerações dimensionais.

Obviamente, a solução das equações (1.24) com $S=NT=0$, com simetria esférica e nas coordenadas (t, r, θ, φ) , é dada pela relação (1.20). Note-se que o vácuo no interior do nosso universo e no interior de um hádron são definidos basicamente da mesma maneira ($T=0$), já que $S=0$ implica em $T=0$.

Todavia, para uma descrição de um hádron do "ponto de vista externo", $S=0$ não é suficiente para obtermos vácuo, pois ainda resta o termo λg , que pode, por exemplo, ser interpretado como um fluido perfeito com densidade $\rho = -p/c^2 = -c^2 \lambda / 8\pi N$ [ver as discussões da seção (IV.3)].

Vamos, agora, ver algumas consequências importantes das discussões acima, especialmente do postulado II.

1.5.2 - CONFINAMENTO DOS CONSTITUINTES HADRÔNICOS

Vamos, aqui, estudar o comportamento de "constituintes de teste" do hádron na métrica (1.20), que é uma solução de (1.24). A métri-

ca (I.20) descreve o espaço-tempo na vizinhança de um constituinte-fonte do hádron (por ex. um quark), de carga forte g_0 (ou $g=g_0 c^2/N$), esfericamente simétrico e centrado em $r=0$.

Considere-se, então, um "constituente de teste" no interior do hádron, com carga forte g' e com velocidade $v \ll c$, no campo gerado por exemplo por um quark (isto é, pelo constituinte do hádron com carga forte g).

Seja, então, a equação da geodésica seguida pelo constituinte de teste,

$$d^2 x^\mu / ds^2 + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu (dx^\rho / ds) \cdot (dx^\sigma / ds) = 0, \quad (I.26)$$

onde,

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = g^{\mu\nu} (g_{\nu\rho,\sigma} + g_{\nu\sigma,\rho} - g_{\rho\sigma,\nu}) / 2 \quad (I.27)$$

e onde p.e. " $g_{\nu\rho,\sigma}$ " representa a derivação parcial ordinária de $g_{\nu\rho}$ com relação a x^σ .

A equação (I.26) pode ser escrita explicitamente na forma:

$$d^2 x^\mu / ds^2 = - \Gamma_{00}^\mu (dx^0 / ds)^2 - \Gamma_{0i}^\mu (dx^0 / ds) (dx^i / ds) + \\ - \Gamma_{ij}^\mu (dx^i / ds) (dx^j / ds) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (I.28)$$

Agora, com $x=(ct, x^1, x^2, x^3)$, vemos que $dx^0/ds = O(1)$, $dx^i/ds = O(v/c)$. Assim, o último termo em (I.28), é proporcional a (v/c) e pode ser prontamente desprezado; o segundo termo em geral é da ordem de v/c , e, a menos que Γ_{0i}^μ seja pequeno, ele não pode ser desprezado (Γ_{0i}^μ é pequeno no caso de campo fraco e forças não muito altas: ver apêndice A). Nós, no entanto, suporemos que v/c seja muito pequeno, de modo que podemos considerar importante somente o primeiro termo do lado direito da eq. (I.28). Assim, resulta:

$$d^2 x^\mu / ds^2 = - \Gamma_{00}^\mu (dx^0/ds)^2.$$

Mas, dentro da aproximação que estamos considerando vale:

$$ds^2 \cong g_{00} dx^0{}^2.$$

Daí, podemos escrever:

$$d^2 x^\mu / dx^0{}^2 \cong - \Gamma_{00}^\mu,$$

ou seja:

$$d^2 x^\mu / dt^2 = -c^2 \Gamma_{00}^\mu. \quad (1.29)$$

Da equação (1.27) vem:

$$\Gamma_{00}^\mu = g^{\mu\nu} (g_{\nu 0,0} + g_{0\nu,0} - g_{00,\nu})/2.$$

Consideremos agora uma métrica estática e diagonal como aquela da equação (1.20). Então, $g_{\mu\nu,0} = 0$ e $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, e encontramos:

$$\Gamma_{00}^\mu = - g^{\mu\nu} (g_{00,\nu})/2 = \begin{cases} 0, & \text{para } \mu=0; \\ - g^{\mu\mu} (g_{00,\mu})/2, & \text{para } \mu=1,2,3. \end{cases}$$

Utilizando esse resultado na eq. (1.29), resulta:

$$d^2 x^i / dt^2 = - c^2 \Gamma_{00}^i, \quad (i=1,2,3).$$

Contudo, nós estamos com um problema à simetria esférica, onde: $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$; então, para o caso de movimento radial

(i.e., θ e φ constantes) e com $(dr/dt) \ll c$, nós obtemos a "aceleração radial" do constituinte de teste:

$$d^2r/dt^2 = -c^2 \Gamma_{00}^1 = c^2 g^{11} (\partial g_{00} / \partial r) / 2.$$

Visto que $g^{11} = 1/g_{11}$ (no caso de métrica diagonal), e usado a equação (1.20), temos:

$$g_{00} = 1 - 2g_0/r + \lambda r^2/3 = -g^{11}.$$

Assim,

$$d^2r/dt^2 = -c^2(1 - 2g_0/r^2 + \lambda r^2/3)(g_0/r^2 + \lambda r/3). \quad (1.30)$$

Agora, nas coordenadas (r, t) de um observador "assintótico" (longe da fonte no interior do hádron), d^2r/dt^2 é uma aceleração radial. Note-se então que, na linguagem da dinâmica, se multiplicarmos a equação (1.30) pela carga forte g' da partícula de teste obtemos a força radial que age sobre ela no campo gerado pela carga g , ou seja:

$$F \equiv g' d^2r/dt^2 = -c^2 g' (1 - 2g_0/r + \lambda r^2/3)(g_0/r^2 + \lambda r/3). \quad (1.30a)$$

Segue, então, que para "grandes distâncias" no interior do micro-universo considerado ($r \lesssim 1$ fm), a força F se reduz a:

$$F \approx -c^2 g' \lambda r (1 + \lambda r^2/3)/3, \quad (1.31)$$

a qual é uma força central atrativa que contém o termo $F_1 = -kr$; o módulo de F_1 aumenta proporcionalmente com r , produzindo assim o confinamen-

to dos constituintes do hádron no seu interior (além de tender a produzir movimentos harmônicos).

Para fins práticos, podemos tomar g' também como sendo a carga de um quark. Nesse caso, a aproximação (I.30) é ainda mais grosseira, pois a equação da geodésica vale apenas aproximadamente para $|g'| \cong |g|$; mas as relações acima ainda têm sentido se $v \ll c$, visto que nessa condição vale o "limite Newtoniano" da teoria.

Notemos ainda que, para $r \cong 1$ fm, o primeiro termo em (I.31) domina o segundo, resultando assim:

$$F \cong -c^2 g' \lambda r / 3.$$

Isso significa que, aplicando os métodos da relatividade geral à estrutura dos hádrons, obtém-se, de uma maneira natural, um potencial radial de confinamento.

Substituindo $|g'| \cong m_p / 3 = (1,67/3) \times 10^{-27}$ Kg, $\lambda \cong 10^{30} \text{ m}^{-2}$ e $r \cong 10^{-15}$ m, em (I.31), encontra-se (para os quarks mais leves): $F \cong 2$ toneladas; um valor da mesma grandeza daquele determinado fenomenologicamente através de análises dos dados experimentais (ver p.e. Arthur [6] e Edwards et al. [32]).

Note-se, ainda, que o termo realmente dominante para "grandes" valores de r em (I.31) é o termo com λ^2 e, portanto, há confinamento tanto para λ positivo como para λ negativo.

1.5.3 - "LIBERDADE ASSINTÓTICA" DOS CONSTITUINTES

Voltemos agora à fórmula (1.30) e tentemos obter a "liberdade assintótica" para as constituintes do hádron.

Consideremos aqui o limite daquela equação para r pequeno, i.e., para $r \ll 1$ fm. A eq. (1.30) então pode ser aproximada como:

$$d^2r/dt^2 = -c^2 g_0 (1 - 2g_0/r)/r^3 \quad (1.32)$$

O potencial (radial) correspondente a (1.32) é:

$$V(r) = -c^2 g_0/r + 2c^2 g_0^2/r^2 \cong -c^2 g_0/r, \quad (1.33)$$

ou, em unidades onde $[g]=Kg$:

$$V(r) \cong -Ng/r. \quad (1.33a)$$

Vamos adicionar a (1.33) o "termo de energia cinética", atribuindo um momento angular L à partícula de teste considerada (g') em relação a fonte de carga g :

$$V(r) \cong -Ng/r + (L/g')^2/2r^2. \quad (1.34)$$

Observe-se que, no caso que estamos tratando, o momento angular L será o momento angular total (ou spin) do méson considerado. Então, para dois quarks com $|g|=|g'| \cong m_p/3$ obtemos que $V=0$ em:

$$r_0 \cong L^2/2Ng^3. \quad (1.35)$$

Ou seja: os dois quarks podem mover-se, um em volta do outro, em órbitas circulares estáveis centradas no centro de massa do sistema, sendo que os quarks são praticamente livres para órbitas de raios próximos a r_0 .

Pode-se mostrar que o "potencial" radial que é obtido das equações das geodésicas, no caso em que o constituinte-de-teste orbita o constituinte-fonte com momento angular L e com órbitas fechadas estáveis, reduz-se ao termo de energia cinética da equação (1.34) quando tomamos a aproximação para $L/gc \ll r$ e o limite de campo fraco. Isto é, o termo de energia cinética em (1.34) é uma aproximação do termo "correto" obtido da RG sem aproximações. Essa aproximação é boa quando $L/gc \ll r$ e no limite de campo fraco.

Agora, se para um quark planetário relativamente ao quark fonte temos $L \approx \hbar$, então encontra-se (ver Caldirola e Recami [15]) que $V=0$ para $r \approx 0,01$ fm.

Ao contrário, se supormos que o raio de estabilidade (no caso de bárions quando $N \approx 10^{40}$ G e $g \approx 1/3$ da massa do nucleon) seja da ordem de 1/100 do "raio de Schwarzschild forte" ($r_s = 2Nm/c^2 \approx 10^{-15}$ m) do hádron, então a equação (1.35) produz:

$$L \approx K g^2, \quad K \approx N/10c. \quad (1.36)$$

A equação (1.36) é do tipo das "relações de Regge" entre a massa e o momento angular das partículas estáveis. Ela, na verdade, é a versão dinâmica de uma relação que surge a partir de argumentos termodinâmicos para hádrons estáveis frente a interação forte (ver capítulo V).

Assim, a introdução de micro-universos para descrever a estrutura interna dos hádrons, através de nossa teoria com G independen-

te do tempo (ver Caldirola and Recami [16] e Recami [75]), permite-nos evitar o uso de modelos fenomenológicos como os chamados MIT ou SLAC "bag-models".

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN COM TERMO COSMOLÓGICO E SUAS SOLUÇÕES RELEVANTES

II.1 - INTRODUÇÃO

Antes de considerarmos as principais características do espaço-tempo nas vizinhanças de um hádron é necessário desenvolver as ferramentas básicas para tal fim. Com o objetivo de introduzir uma série de conceitos indispensáveis para realizar o nosso trabalho, nós nos propomos a fazer uma exposição, na forma adequada ao escopo do trabalho, dos pontos relevantes da teoria da relatividade geral, de forma que possamos empreender a nossa tarefa adequadamente e de maneira consistente.

Nós iniciaremos estudando algumas soluções das equações de Einstein com termo cosmológico, enumerando as suas principais características, evidenciando a existência de "singularidades métricas" (que são os horizontes de eventos) e construindo os diagramas de Penrose em cada caso, para melhor entendermos a estrutura no infinito de cada espaço-tempo.

O primeiro caso a ser considerado é o espaço de Minkowski,

que é sem dúvidas o mais simples e que não apresenta maiores dificuldades em entendê-lo. Isso é feito na seção (II.2).

Em seguida analisamos as soluções de Schwarzschild [seção (II.4)], de Sitter [seção (II.3)], e na seção (II.5) as soluções de Reissner-Nordström, Kerr e de Kerr-Newman. Em cada caso, estudamos as principais características do espaço-tempo, construindo os respectivos diagramas de Penrose e evidenciando a existência (ou não) de horizontes de eventos em cada uma das soluções.

A forma mais geral das equações de Einstein da gravitação num espaço-tempo (M, g) é:

$$R - g R/2 + \Lambda g = -(8\pi G/c^4)T, \quad (II.1)$$

onde Λ é a constante cosmológica ($|\Lambda| \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$), a métrica local lorentziana (g) tem assinatura (-2) . T é algum tensor de energia momento especificado, o qual obedece um certo número de postulados (como a "causalidade local") e alguma condição sobre a energia (p.e.: $T_{00} > 0$; ver mais adiante); R é o tensor de Ricci, e $R (= g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta})$ o escalar de curvatura.

Em geral, as soluções de (II.1) representam espaço-tempos (M, g) , obtidos com $T=0$; com $T = E$ — o tensor de energia-momento eletromagnético; com T descrevendo um fluido perfeito; etc...

Vale dizer ainda, em relação a equação (II.1), que o sinal "menos" no lado direito da igualdade depende principalmente da assinatura da métrica (se $+2$ ou -2), e também da definição do tensor de Ricci R (que é obtido a partir do tensor de Riemann através de uma contração de dois dos seus índices).

A métrica g que é solução de (II.1), com $T=0$, para o espaço-tempo exterior a uma distribuição esfericamente simétrica de massa, e

nas coordenadas tipo Schwarzschild (t, r, θ, φ) , pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = (1 - 2m/r - \Lambda r^2/3) dt^2 - dr^2 / (1 - 2m/r - \Lambda r^2/3) - r^2 d\Omega, \quad (11.2)$$

onde

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (11.3)$$

m é proporcional a massa M do corpo com simetria esférica, situado em $r=0$ (Evidentemente, nesse caso a solução (11.2) somente vale para pontos no exterior de tal corpo).

A forma (11.2) é conhecida como métrica de Schwarzschild-de Sitter. Ela tem três casos importantes, que são: i) $m=0$ e $\Lambda=0$, resultando na métrica chata ou de Minkowski; ii) $m \neq 0$ e $\Lambda=0$, resultando na métrica de Schwarzschild; iii) $m=0$ e $\Lambda \neq 0$, resultando na métrica de Sitter ($\Lambda > 0$) ou anti-de Sitter ($\Lambda < 0$). A seguir estudaremos em detalhe cada um dos três casos.

11.2 - O ESPAÇO DE MINKOWSKI E SUA ESTRUTURA NO INFINITO:

DIAGRAMAS DE PENROSE

O espaço-tempo de Minkowski é na verdade o espaço-tempo da relatividade especial. É uma variedade R^4 com uma métrica lorentziana chata η , que nas coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) é dada por (11.2), com $m=0$ e $\Lambda=0$, ou seja:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega. \quad (11.4)$$

Em termos das coordenadas naturais do R^4 (x^0, x^1, x^2, x^3) onde $x^0 = ct$, $x^1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $x^2 = r \sin\theta \sin\varphi$, $x^3 = r \cos\theta$, a métrica da eq. (11.4) toma a forma ($c=1$):

$$ds^2 = dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (11.5)$$

A equação (11.4) é aparentemente singular em $r=0$ e $\sin\theta = 0$. Isso significa por exemplo que, para r e t fixos, o comprimento de arco dl dado por:

$$dl^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

é nulo no ponto $r=0$, ou onde $\sin\theta = 0$, para qualquer variação finita das coordenadas θ e φ (no primeiro caso) e φ (no segundo caso). Ou seja, nos pontos onde $\sin\theta = 0$ nós nunca "sairemos do lugar" se nos movermos somente na direção φ . Esse exemplo simples serve para ilustrar um tipo de singularidade coordenada a qual não é uma singularidade física, mas que é devido às coordenadas escolhidas (que não são admissíveis naqueles pontos).

Para se entender a estrutura global de um espaço-tempo em estudo é preciso conhecer sua estrutura "próximo ao infinito". Assim, para estudar a estrutura do infinito no espaço de Minkowski usaremos a representação dada por Penrose desse espaço, e daremos definições de algumas regiões do infinito válidas também para qualquer espaço-tempo em geral.

Primeiro, consideremos um novo sistema de coordenadas obtido escolhendo a coordenada nula avançada v e a retardada u , definidas

por:

$$v = t + r,$$

$$u = t - r.$$

(11.6)

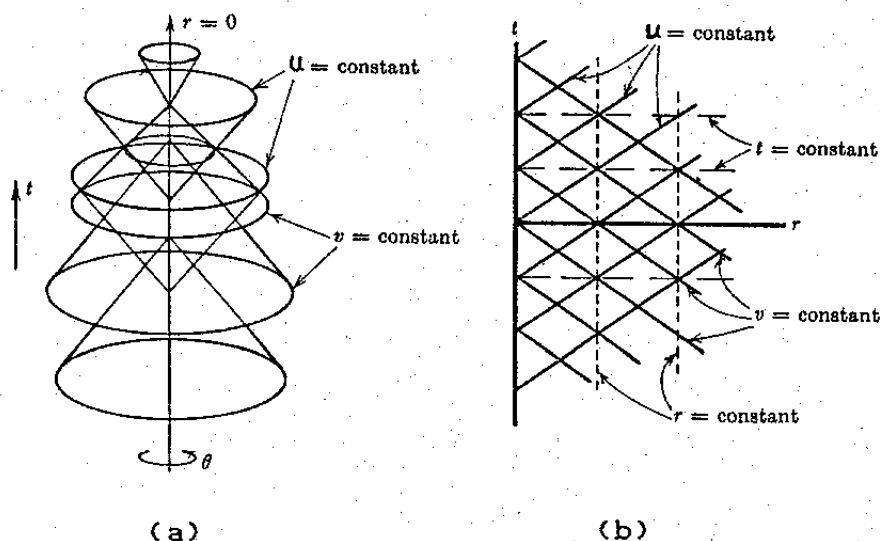


FIGURA (11.1)

O espaço de Minkowski. A coordenada nula $u(v)$ é a coordenada retardada (avanzada).

a) As superfícies coordenadas u e v , com uma dimensão suprimida.

b) O plano (t, r) . Cada ponto representa uma superfície esférica (bi-esfera) de raio r .

Com isso obtemos:

$$t = (v + u)/2 ;$$

$$r = (v - u)/2,$$

(11.7)

$$dt^2 - dr^2 = (dv+du)^2/4 - (dv-du)^2/4 ,$$

ou:

$$dt^2 - dr^2 = dvdu.$$

A métrica (II.4) então toma a forma:

$$ds^2 = dvdu - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (II.8)$$

com r dado em (II.7).

O fato que dv^2 e du^2 não aparecem em (II.8) é porque as superfícies $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ são superfícies nulas, conforme pode ser visto na figura (II.1).

Agora, podemos transformar os infinitos em valores finitos, definindo:

$$\begin{aligned} v = t + r &= \text{tg}[(\psi + \xi)/2], \\ u = t - r &= \text{tg}[(\psi - \xi)/2]. \end{aligned} \quad (II.9)$$

com,

$$-\pi < \psi + \xi < \pi \quad ; \quad -\pi < \psi - \xi < \pi \quad ; \quad \xi \geq 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned} dv &= \sec^2[(\psi + \xi)/2](d\psi + d\xi)/2, \\ du &= \sec^2[(\psi - \xi)/2](d\psi - d\xi)/2. \end{aligned}$$

Então:

$$dvdu = \sec^2[(\psi + \xi)/2]\sec^2[(\psi - \xi)/2](d\psi^2 - d\xi^2)/4,$$

e a métrica de Minkowski (II.8) resulta, nessas coordenadas,

$$ds^2 = \sec^2[(\psi + \xi)/2]\sec^2[(\psi - \xi)/2](d\psi^2 - d\xi^2)/4 + r^2 d\Omega, \quad (II.10)$$

com:

$$r^2 = (v-u)^2/4 = \{ \operatorname{tg}[(\psi+\xi)/2] - \operatorname{tg}[(\psi-\xi)/2] \}^2/4, \text{ ou}$$

$$r^2 = (\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b)/4.$$

onde,

$$a \equiv (\psi + \xi)/2 \quad ; \quad b \equiv (\psi - \xi)/2.$$

Depois de algumas manipulações algébricas simples, a expressão para r^2 pode ser posta na seguinte forma:

$$r^2 = \{ \sec^2[(\psi + \xi)/2] \sec^2[(\psi - \xi)/2] \sin^2 \xi \} / 4.$$

Assim, podemos escrever a eq. (11.10) na forma:

$$ds^2 = \{ \sec^2[(\psi + \xi)/2] \sec^2[(\psi - \xi)/2] d\bar{s}^2 \} / 4, \quad (11.11)$$

onde,

$$d\bar{s}^2 = d\psi^2 - d\xi^2 - \sin^2 \xi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (11.12)$$

Neste ponto, estamos em condições de introduzir alguns conceitos a respeito dos "infinitos", para melhor entender a estrutura do espaço-tempo. As definições dadas abaixo são devidas principalmente a Penrose [66,67] (ver também Hawking and Ellis [51]).

11.2.1 - OS INFINITOS DE UM ESPAÇO-TEMPO

Em conexão com o espaço-tempo de Minkowski, vamos dar algumas

definições que serão muito úteis em todo nosso trabalho.

A métrica lorentziana g permite-nos separar todos os pontos $p \in M$ em três classes. Sendo $v \in T_p$ (o espaço tangente a M em p), v será dito:

- a)- Tipo-tempo, se $g(v,v) > 0$ [$g(v,v) \equiv g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$].
- b)- Tipo-luz ou nulo, se $g(v,v) = 0$.
- c)- Tipo-espaço, se $g(v,v) < 0$.

Analogamente, podemos definir curvas e superfícies tipo-tempo, tipo-espaço e nulas.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva C^1 em M , e seja v_p o vetor tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $p \in \mathcal{C}$. Assim a curva $\mathcal{C}$ poderá ser:

- a) Tipo-tempo, se v_p for tipo-tempo e não zero para todo $p \in \mathcal{C}$.
- b) Nula, se v_p for nulo e não zero para todo $p \in \mathcal{C}$.
- c) Tipo-espaço, se v_p for tipo-espaço para todo $p \in \mathcal{C}$.
- d) Não tipo-espaço, se v_p não for tipo-espaço para todo $p \in \mathcal{C}$ (i.e., se v_p for tipo-tempo ou nulo), com v_p não zero.
- e) Não nulo, se v_p for não nulo (e não zero) para todo $p \in \mathcal{C}$ (i.e., se v_p for tipo-espaço ou tipo-tempo).
- f) Não tipo-tempo, se v_p for não zero e não tipo-tempo para todo $p \in \mathcal{C}$ (i.e., se v_p for nulo ou tipo-espaço).

Depois desses preliminares, podemos dar as definições dos "infinitos" necessárias para o desenvolvimento do presente trabalho.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer.

Definição 1: $I^+(A,B) = \text{O futuro cronológico de A relativo a B}$: é a sé-

rie de todos os pontos em B que podem ser atingidos a partir de A por uma curva tipo-tempo em B , dirigida para o futuro. $I^+(A, M) \equiv I^+(A)$ (que será um conjunto aberto).

Definição 2: $I^-(A, B) =$ O passado cronológico de A relativo a B : é o conjunto de todos os pontos que podem ser atingidos a partir de A por uma curva tipo-tempo em B , dirigida para o passado. $I^-(A, M) \equiv I^-(A)$.

Definição 3: $J^+(A, B) =$ O futuro causal de A relativo a B : é a união de $A \cap B$ com o conjunto de todos os pontos que podem ser atingidos a partir de A por uma curva não tipo-espaço em B , dirigida para o futuro. $J^+(A, M) \equiv J^+(A)$.

Definição 4: $J^-(A, B) =$ O passado causal de A relativo a B : é a união de $A \cap B$ com o conjunto de todos os pontos que podem ser atingidos a partir de A por uma curva não tipo-espaço em B , dirigida para o passado. $J^-(A, M) \equiv J^-(A)$.

$J^+(A, M) \equiv J^+(A)$ é a região do espaço-tempo M que pode ser afetada causalmente por eventos em A . Analogamente, $J^-(A)$ é a região do espaço-tempo cujos eventos podem influenciar causalmente eventos em A .

Em particular, para melhor entender as definições dadas acima e as que daremos abaixo, podemos considerar o espaço de Minkowski [ver figura (II.2)].

Retomemos para isso, novamente, as definições (II.9):

$$v = t + r = \operatorname{tg}[(\psi + \xi)/2],$$

$$u = t - r = \operatorname{tg}[(\psi - \xi)/2]. \quad (\text{II.9a})$$

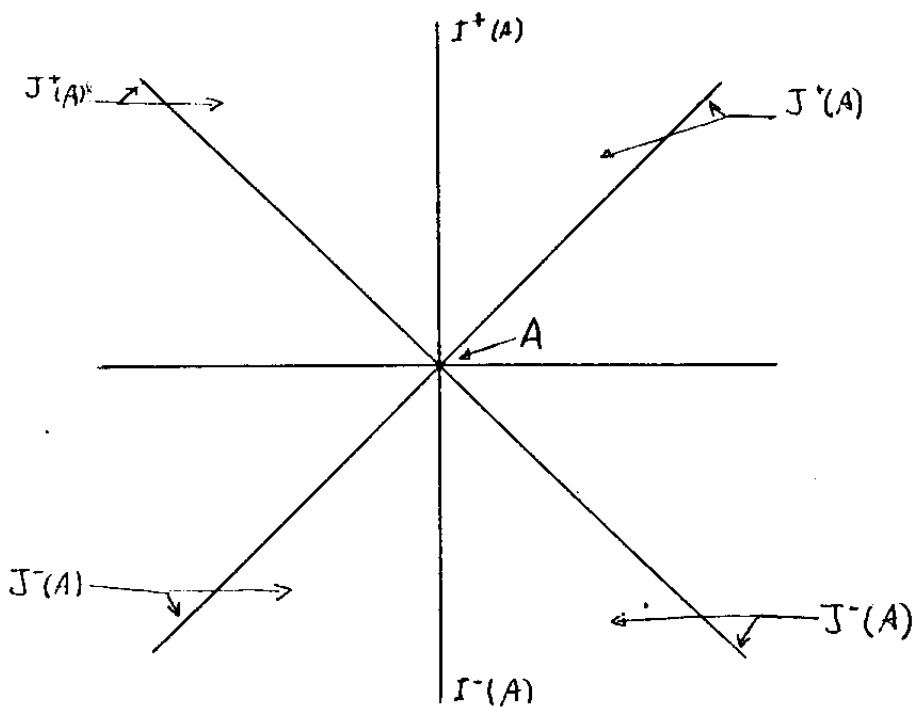


FIGURA (II.2)

Futuro e passado cronológico [$I^+(A)$, $I^-(A)$] e futuro e passado causal [$J^+(A)$, $J^-(A)$] no espaço de Minkowski.

Definimos então:

i^+ = "infinito futuro tipo-tempo":

A região $t \rightarrow \infty$ com r finito; é a região para qual se estendem as linhas tipo-tempo.

i^- = "infinito passado tipo-tempo":

A região $t \rightarrow -\infty$ com r finito; é a região da qual provém as linhas tipo-tempo.

i^0 = "infinito tipo-espaço":

A região $r \rightarrow \infty$ com t finito; é a região para a qual "cortes" tipo-espaço se estendem.

$\mathcal{I}^+$ = "infinito nulo futuro":

A região $v = t + r \rightarrow \infty$ com $u = t - r$ finito; é a região para a qual linhas geodésicas nulas dirigidas para o futuro se estendem.

$\mathcal{I}^-$ = "infinito nulo passado":

A região $u = t - r \rightarrow -\infty$ com $v = t + r$ finito; é a região da qual provém as linhas geodésicas nulas dirigidas para o futuro.

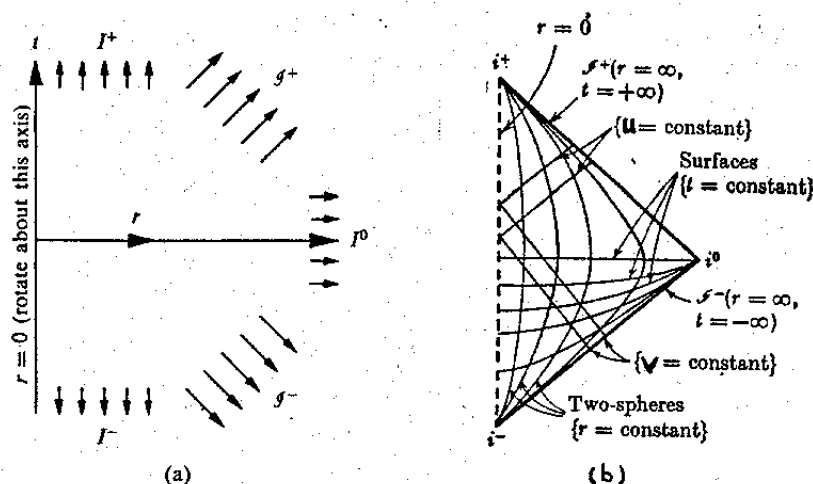


FIGURA (11.3)

O espaço de Minkowski: a) Nas coordenadas usuais (t, r, θ, φ) ; b) Nas coordenadas (11.9). As regiões do infinito I^+ , I^- , I^0 , $\mathcal{I}^+$ e $\mathcal{I}^-$ são mostradas. Linhas nulas radiais fazem um ângulo de 45° com o eixo vertical.

Para ilustrar essas definições consideremos a figura (11.3), em especial a figura (11.3b), que mostra o espaço de Minkowski representado nas coordenadas $(\chi, \xi, \theta, \varphi)$. Nós vemos de tal figura que qualquer geodésica tipo-tempo aproxima-se de I^+ (I^-) para valores infinitamente grandes do parâmetro afim: assim podemos considerar qualquer geodésica tipo-tempo como originando-se em I^- e terminando em I^+ . De

maneira análoga, podemos considerar que as geodésicas nulas se originam em $\mathcal{I}^-$ e terminam em $\mathcal{I}^+$. Note-se que curvas não geodésicas não satisfazem a essas regras. Nós percebemos, então, que as considerações deste parágrafo justificam os nomes dados acima.

A estrutura do infinito de qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico pode ser representado por diagramas do tipo apresentado na figura (11.3b) (que são conhecidos como diagramas de Penrose).

11.3 - OS ESPAÇOS DE SITTER E ANTI-DE SITTER: ESTRUTURAS ASSINTÓTICAS

Apresentaremos sucintamente algumas características desses espaços, principalmente do espaço de Sitter, uma vez que este apresenta o que se conhece pelo nome de "horizonte de eventos", que é um conceito de grande importância e nesse caso é de fácil compreensão.

Tais espaços têm curvatura constante e são caracterizados por:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})/12, \quad (11.13)$$

onde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Riemann, e $R = R^\alpha{}_\alpha$ é o escalar de curvatura.

O tensor de Einstein é:

$$E \equiv R - gR/2 = -Rg/4. \quad (11.14)$$

Depois da equação (II.1), podemos tratar esses espaços como soluções das equações de campo com $\Lambda = R/4$, ou seja, para um fluido perfeito com densidade ρ e pressão p constantes e dadas por:

$$\rho = -pc^2 = Rc^2/32\pi G.$$

O espaço com curvatura constante $R=0$ é o espaço de Minkowski. Se $R > 0$ o espaço é dito espaço de Sitter, se $R < 0$ é o espaço anti-de Sitter.

Vamos analisar aqui o espaço de Sitter. A métrica desse espaço é aquela obtida da equação (II.2) fazendo-se $m = 0$.

$$ds^2 = F dt^2 - dr^2/F - r^2 d\Omega^2, \quad (II.15)$$

onde,

$$F = F(r) = 1 - \Lambda r^2/3. \quad (II.15a)$$

Esse espaço-tempo é mais facilmente visualizado como a pseudo-esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - u^2 = a^2, \quad (II.16)$$

onde,

$$a^2 = 3/\Lambda, \quad a > 0, \text{ e com:}$$

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = r \cos\theta,$$

e,

$$w = a\sqrt{F} \cosh(t/a),$$

$$u = a\sqrt{F} \sinh(t/a); \quad \text{para } r < a.$$

ou:

$$\begin{aligned} w &= a\sqrt{|F|} \sinh(t/a), \\ u &= a\sqrt{|F|} \cosh(t/a); \quad \text{para } r > a. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Com isso, obtemos:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega,$$

e:

$$\begin{aligned} dw &= -[r \cosh(t/a)/a\sqrt{|F|}] dr + \sqrt{|F|} \sinh(t/a) dt; \\ du &= -[r \sinh(t/a)/a\sqrt{|F|}] dr + \sqrt{|F|} \cosh(t/a) dt, \end{aligned}$$

para $r < a$. Enquanto que,

$$\begin{aligned} dw &= [r \sinh(t/a)/a\sqrt{|F|}] dr + \sqrt{|F|} \cosh(t/a) dt; \\ du &= [r \cosh(t/a)/a\sqrt{|F|}] dr + \sqrt{|F|} \sinh(t/a) dt, \end{aligned}$$

para $r > a$.

Em maneira compacta:

$$\begin{aligned} du^2 - (dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) &= Fdt^2 - [r^2/Fa^2 + 1] dr^2 - r^2 d\Omega \\ &= Fdt^2 - dr^2/F - r^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Ou seja, a métrica (11.15) resulta:

$$ds^2 = du^2 - (dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (11.18)$$

Note-se que o infinito futuro nulo $\mathcal{I}^+$ é a região $u + w \rightarrow \infty$, com $u - w$ finito; e o infinito nulo passado $\mathcal{I}^-$ é a região $u - w \rightarrow -\infty$, com $u + w$ finito.

Assim, seguindo Hawking and Ellis [51], se introduzirmos novas coordenadas $(t', \chi, \theta, \varphi)$ na pseudo-esfera, pelas relações:

$$\begin{aligned} a \sinh(t'/a) &= u, \\ a \cosh(t'/a) \cos \chi &= w, \\ X \cos \theta &= z, \\ X \sin \theta \cos \varphi &= x, \\ X \sin \theta \sin \varphi &= y, \end{aligned}$$

onde,

$$X = a \cosh(t'/a) \sin \chi. \quad (11.19)$$

Obtemos, assim, que $\mathcal{I}^+$ é a região $t' \rightarrow \infty$, e que $\mathcal{I}^-$ é a região $t' \rightarrow -\infty$.

Vamos agora encontrar a métrica nessas novas coordenadas. Então, usando as relações (11.19) nós encontramos:

$$dz^2 + dy^2 + dx^2 = dX^2 + X^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

com,

$$dX = \sinh(t'/a) \sin \chi dt' + a \cosh(t'/a) \cos \chi d\chi.$$

E mais,

$$du = \cosh(t'/a) dt',$$

$$dw = \sinh(t'/a) \cos \chi dt' - a \cosh(t'/a) \sin \chi d\chi.$$

O que implica em:

$$\begin{aligned} du^2 + dX^2 &= [\sinh^2(t'/a) dt'^2 + a \cosh(t'/a) d\chi^2] (\sin^2 \chi + \cos^2 \chi), \\ du^2 - (dX^2 + dw^2) &= [\cosh^2(t'/a) - \sinh^2(t'/a)] dt'^2 \\ &\quad - a^2 \cosh^2(t'/a) d\chi^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, usando as relações relevantes obtidas acima, encontramos que a métrica (II.18) nas coordenadas (II.19) toma a seguinte forma:

$$ds^2 = dt'^2 - a^2 \cosh^2(t'/a) [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega]. \quad (\text{II.20})$$

A figura (II.4) mostra o diagrama de Penrose para o espaço de Sitter.

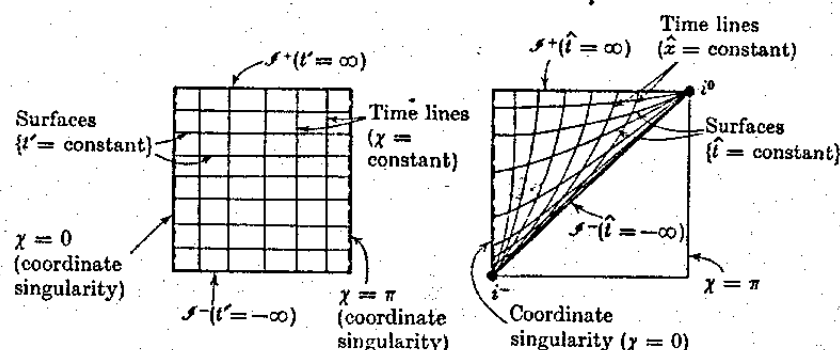


FIGURA (II.4)

Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Sitter. Cada ponto é uma bi-esfera de área $2\pi \sin^2\chi$. Linhas nulas estão a 45° .

Conforme falamos, a região $\mathcal{I}^+$ é definida como $u+w \rightarrow \infty$ com $u - w$ finito; então, depois das relações (II.19), vem que $\mathcal{I}^+$ é a região $t' \rightarrow \infty$. Da mesma forma, se a região $\mathcal{I}^-$ é definida por $u-w \rightarrow -\infty$ com $u + w$ finito, obtemos que $\mathcal{I}^-$ é a região $t' \rightarrow -\infty$. O infinito tipo-espaço i^0 , e os infinitos tipo-tempo passado i^- e futuro i^+ não são mostramos na figura (II.4): eles não podem ser definidos em termos das coordenadas (II.19).

Para isso, consideremos a transformação:

$$\hat{t} = a \ln[V/a]; \quad \hat{x} = ax/V; \quad \hat{y} = ay/V; \quad \hat{z} = az/V;$$

$$V \equiv w + u. \quad (11.21)$$

Nessas coordenadas a métrica (11.18) toma a forma:

$$ds^2 = d\hat{t}^2 - \exp[2\hat{t}/a](d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2). \quad (11.22)$$

Agora, I^0 é a região $\hat{t} \rightarrow \infty$, com $\underline{u}$ finito [$\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$].

Isso somente ocorre quando x, y, z, u e w são finitos, mas com $w+u \rightarrow 0$; essa condição exige que $\hat{t} \rightarrow -\infty$. Assim, depois das relações (11.19), vemos que I^0 ocorre em $\chi = \pi$, $t' \rightarrow \infty$.

Por sua vez, $I^\pm$ é a região $\hat{t} \rightarrow \pm\infty$ com $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ finitos. I^- é obtido fazendo $w + u \rightarrow 0$ com x, y e $z \rightarrow 0$; ou seja, quando $\chi = 0$ e $t' \rightarrow -\infty$. O I^+ é obtido por $u + w \rightarrow \infty$ com $x, y, z \rightarrow 0$; ou seja, isso ocorre em $\chi = 0$ com $t' \rightarrow \infty$.

11.3.1 - O ESPAÇO DE SITTER E OS HORIZONTES COSMOLÓGICOS

De posse dessas ferramentas, vamos analisar um pouco o espaço de Sitter e procurar identificar a origem do seu "horizonte de eventos futuro".

Consideremos a figura (11.4), que mostra o diagrama de Penrose para o espaço de Sitter. O diagrama apresenta, para linhas tipo-tempo e nulas, um infinito 'nulo' que é tipo-espaço tanto no futuro

como no passado, em pleno contraste com o espaço de Minkowski onde esses infinitos são nulos (ver a seguir). Essa diferença corresponde a existência de horizontes de partículas e horizontes de eventos para famílias de observadores geodésicos no espaço-tempo de Sitter. O "horizonte das partículas" representa a história das partículas que ficam no limite de observação de um observador O [ver figura (II.5a)]. Tal horizonte separa as partículas que podem ser vistas por O , a partir de um dado evento p , daquelas que não podem ser vistas por O a partir de p . Note-se que p é o evento onde o cone de luz da criação de uma partícula que fica no horizonte intersepta a linha da vida de O . No espaço de Minkowski todas as partículas são vizíveis em qualquer evento da linha da vida de O , se O movimenta-se ao longo de geodésicas tipo-tempo. Desde que considerarmos somente famílias de geodésicas tipo-tempo, pode-se pensar que a existência do horizonte de partículas é uma consequência do fato que o infinito passado nulo $\mathcal{J}^-$ é tipo-espaço [ver a figura (II.5)].

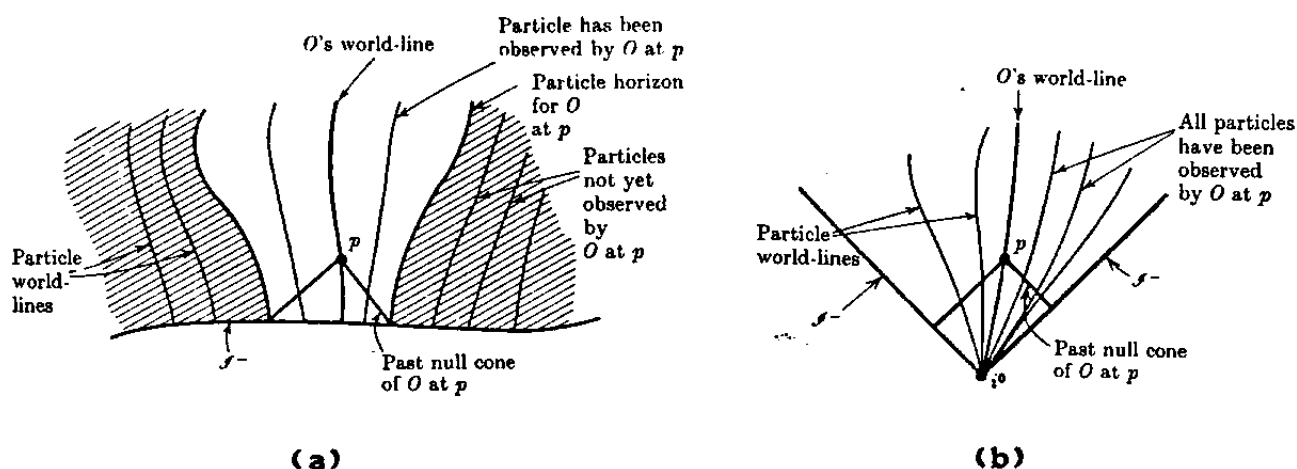


FIGURA (II.5)

- a) O horizonte de partículas definido por uma congruência de curvas geodésicas quando o infinito passado nulo $\mathcal{J}^-$ é tipo-espaço.
- b) Ausência de tal horizonte se $\mathcal{J}^-$ for nulo.

Ora, todos os eventos fora do cone de luz (cone nulo) passado de p são eventos que não foram, e não são, observados por O até o tempo representado por p . Mas há um limite O^+ na linha da vida de O em $\mathcal{G}^+$. No espaço-tempo de Sitter, o cone nulo passado desse ponto O^+ é um limite entre eventos que serão observáveis para O em algum tempo, e eventos que nunca serão observados por O . É o limite (a fronteira) do passado da linha da vida de O . É uma superfície conhecida pelo nome de horizonte de eventos futuro, ou simplesmente "horizonte de eventos" [ver figura (II.6a)].

Note-se que, no espaço de Minkowski, o cone nulo limite de qualquer observador geodésico inclui o espaço-tempo completo, de forma que não há eventos que o observador nunca seja capaz de ver. Porém, se um observador move-se com aceleração uniforme, ele poderá ter um horizonte de eventos futuro [fig. (II.6b)].

Em vista disso, pode-se pensar na existência do horizonte de eventos para um observador geodésico como sendo uma consequência do fato que o infinito futuro nulo $\mathcal{G}^+$ é tipo-espaço. Pode-se concluir, também, que, quando um observador segue uma linha tipo-tempo que intersepta $\mathcal{G}^+$, existirá para esse observador um horizonte de eventos [ver figura (II.6b)]; todavia, pode existir um horizonte de eventos para O mesmo que sua linha da vida não atinja $\mathcal{G}^+$. Isso acontece, por exemplo, no espaço de Schwarzschild conforme veremos mais adiante.

Para cada observador geodésico no espaço de Sitter há um horizonte de eventos diferente, conforme "observadores" O e Q na figura (II.6a). Além do mais, tanto O como Q não podem observar além de algum dado ponto na linha da vida do outro. Por exemplo, o observador O não pode ver eventos posteriores a r na linha da vida de Q : e O vê um "red-shift" que se aproxima de infinito quando observa eventos na linha de Q que se aproximam de r . Isto é, passa um tempo próprio infinit-

to na linha de O a partir de um dado ponto p até que ele observe r ; mas passa somente um tempo próprio finito na linha de Q , de um dado evento até r (o qual é um evento normal em sua linha da vida).

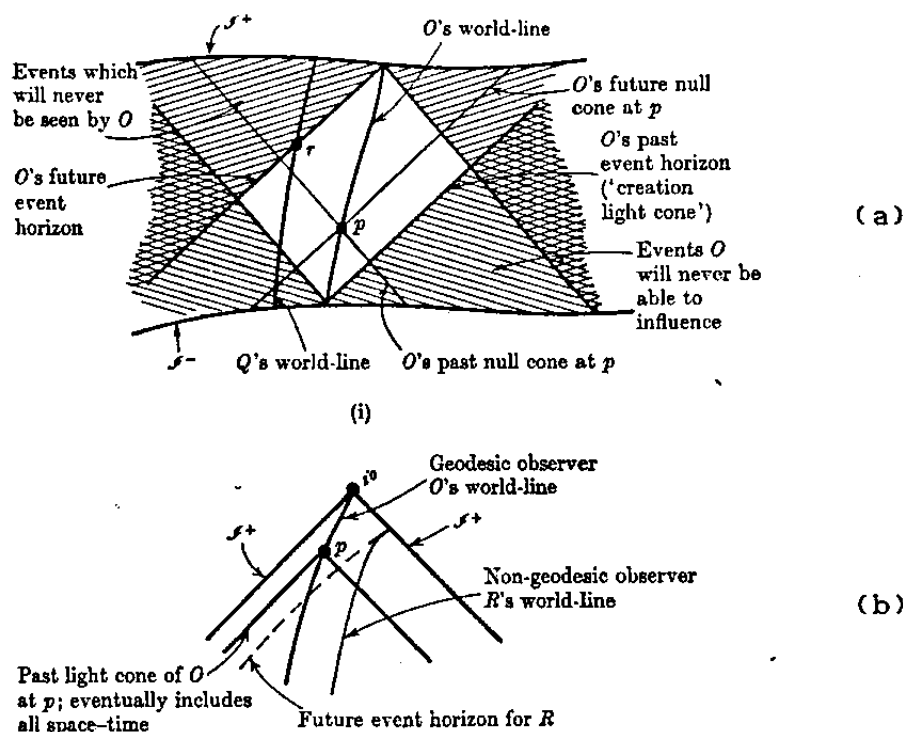


FIGURA (11.6)

- a) O horizonte de eventos futuro para uma partícula O , que existe quando o infinito futuro nulo $\mathcal{J}^+$ é tipo-espaço; também, o horizonte de eventos passado que existe quando o infinito passado nulo $\mathcal{J}^-$ é tipo-espaço.
- b) Se o infinito futuro consiste de um $\mathcal{J}^+$ nulo e um i^+ , não há horizonte de eventos futuro para um observador geodésico O . Porém, um observador R acelerado pode ter um horizonte de eventos.

Agora, se quisermos obter o conjunto máximo de eventos no espaço-tempo que O pode influenciar, basta tomar o cone de luz futuro

do ponto limite da linha da vida de O no infinito passado nulo $\mathcal{J}^-$. Ou seja, tomamos a fronteira do futuro de tal linha da vida, que nada mais é do que o cone de luz do evento da criação de O . Esse cone de luz é o horizonte de eventos passado, e tem existência não trivial para um observador geodésico somente se for tipo-espaço [ver figura (11.6a)].

11.3.2 - O ESPAÇO ANTI-DE SITTER: AUSÊNCIA DE HORIZONTES

O espaço de curvatura constante com $R < 0$ é chamado espaço anti-de Sitter. A métrica desse espaço pode ser obtida da métrica do espaço de Sitter, equação (11.15), substituindo Λ por $-\Lambda$; ou seja:

$$ds^2 = (1 + \Lambda r^2/3)dt^2 - dr^2/(1 + \Lambda r^2/3) - r^2 d\Omega. \quad (11.23)$$

O espaço-tempo anti-de Sitter é descrito pela pseudo-esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 - u^2 = -a^2, \quad (11.24)$$

com:

$$3/\Lambda = -a^2, \quad (a > 0); \quad (11.25)$$

e,

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

$$w = a(1 + r^2/a^2)^{1/2} \cos(t/a),$$

$$u = a(1 + r^2/a^2)^{1/2} \sin(t/a). \quad (II.26)$$

Sendo que a métrica (II.23) nessas coordenadas se escreve:

$$ds^2 = du^2 + dw^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (II.27)$$

Uma propriedade da transformação (II.26) é que ela admite curvas tipo-tempo fechadas. Por exemplo: considere-se um observador "estacionário" num ponto $r, \theta, \varphi = \text{constante}$. A medida que o tempo t passa, a história do observador recomeça depois de (passado) um tempo $\Delta t = 2\pi a$. Essa propriedade "indesejada" na transformação (II.26) é facilmente evitada modificando a transformação topologicamente. Se "desenrola-se" o círculo S^1 (para obter seu espaço de cobertura R^1), obtém-se uma cobertura do espaço de anti-de Sitter que não contém curvas tipo-tempo fechadas. A expressão <<desenrolar o círculo S^1 >> mencionada acima pode ser esclarecida considerando-se o hiperboloide $w^2 + u^2 - z^2 = a^2$ como um "rolo" de forma hiperboloidal: quando se dá uma volta no círculo $z = \text{constante}$ ($t: t_0 \rightarrow t_0 + 2\pi a$), nós desenrolamos uma camada do "rolo" e estaremos na camada seguinte, e não de volta ao ponto inicial (de modo que não ocorrem mais problemas de causalidade).

O espaço-tempo anti-de Sitter tem uma série de outras particularidades, como o fato de não apresentar horizonte de eventos, e outras mais [ver figura (II.7)]. A ausência de horizontes está intimamente ligada a não existência de "singularidades" na métrica. Nós veremos a seguir que o horizonte de eventos do espaço de Sitter ocorre em $r = \sqrt{3/\Lambda}$, onde $g^{\Lambda\Lambda} = -1/g_{\Lambda\Lambda} = 0$. Uma "singularidade" desse tipo não ocorre para $\Lambda < 0$ (métrica de anti-de Sitter) e, portanto, não ocorre

também um horizonte de eventos.

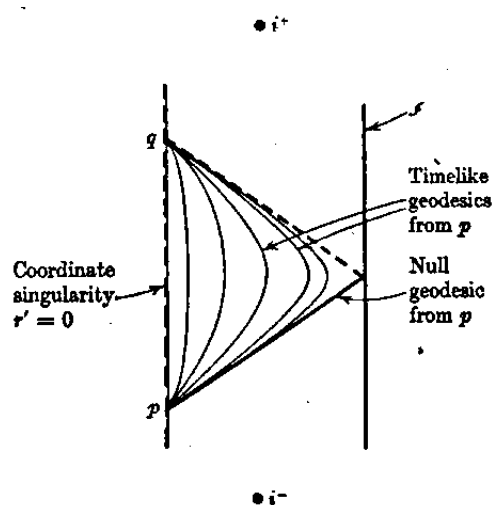


FIGURA (11.7)

O diagrama de Penrose do espaço de anti-de Sitter. Os "infinitos" consistem de uma superfície tipo-tempo $\mathcal{I}$ e de pontos disjuntos i^+ e i^- . As projeções de algumas geodésicas tipo-tempo e nulas são mostradas.

Nós não nos demoraremos mais em considerar as características do espaço anti-de Sitter aqui. Ao invés disso, consideraremos outras soluções das equações de Einstein que sejam de mais interesse.

11.4 - O ESPAÇO DE SCHWARZSCHILD: ESTRUTURA ASSINTÓTICA E HORIZONTES

A métrica do espaço-tempo de Schwarzschild pode ser obtida a partir de (11.2) pondo $\Lambda = 0$, ou seja:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - dr^2/(1 - 2m/r) - r^2d\Omega, \quad (11.28)$$

onde,

$$r > 2m. \quad (11.29)$$

Essa métrica descreve um espaço-tempo com um corpo estático de massa M ($M = mc^2/G$) e centrado em $r=0$. Contudo, nós consideraremos agora o corpo como puntual de modo que estudaremos a máxima extensão que o espaço com a métrica (11.28) possa ter.

A forma (11.28) tem uma singularidade em $r=2m$, mas ela é apenas resultado de um "defeito" nas coordenadas que estamos usando, pois, através das transformações ($G = 1, c = 1$)

$$\begin{aligned} v &= t + r^*, \\ w &= t - r^*, \end{aligned} \quad (11.30)$$

onde:

$$r^* = \int dr/(1 - 2m/r) = r + 2m \ln|r - 2m|.$$

De (11.30) vem:

$$dt = (dv + dw)/2; \quad dr = (dv - dw)(1 - 2m/r)/2.$$

E, usando (v, r, θ, φ) , obtemos:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dv^2 - 2dv dr - r^2 d\Omega \quad (= g'), \quad (II.31)$$

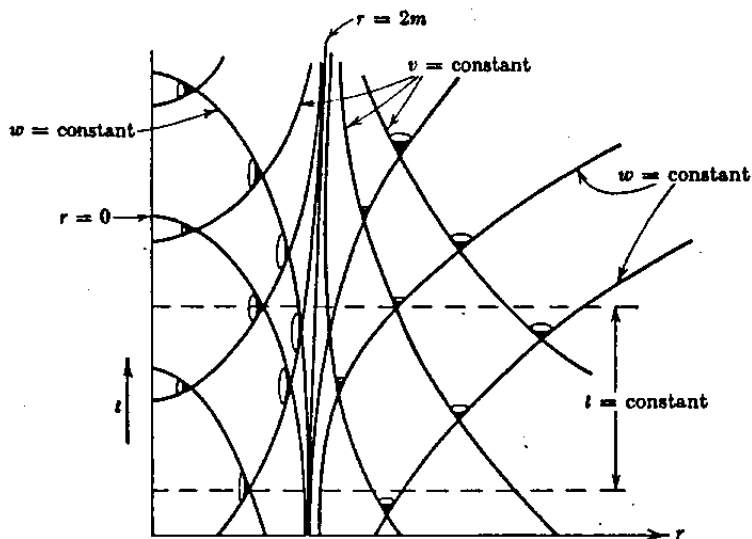
ou, usando (w, r, θ, φ) :

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dw^2 + 2dw dr - r^2 d\Omega \quad (= g''). \quad (II.32)$$

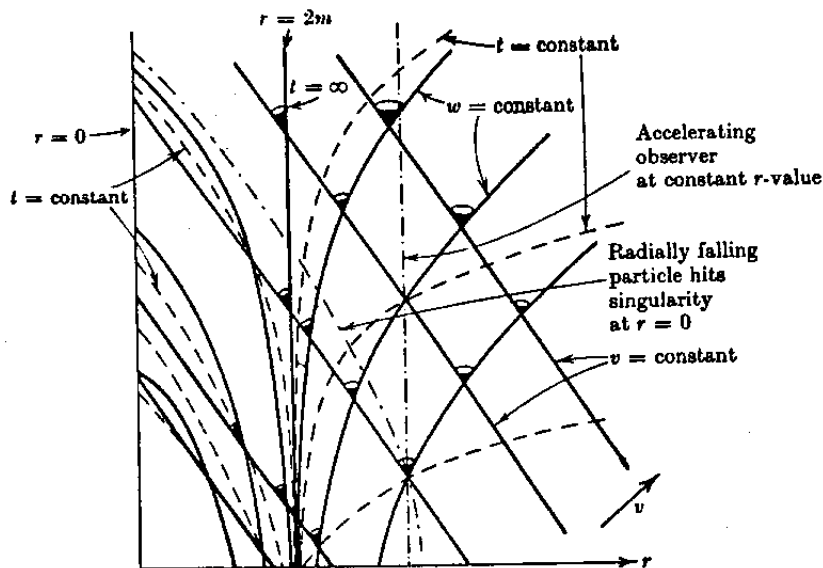
As formas (II.31) e (II.32) são conhecidas como formas de Eddington-Finkelstein (ver Eddington [30] e Finkelstein [35]).

A métrica (II.31) é analítica numa variedade M' definida pelas coordenadas (v, r, θ, φ) na qual $0 < r < \infty$. A forma (II.32) é analítica em M'' definida pelas coordenadas (w, r, θ, φ) com $0 < r < \infty$. A variedade M com coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ) é a região $2m < r < \infty$ tanto de M' como de M'' . A região de (M', g') com $0 < r < 2m$ é isométrica à região da métrica de Schwarzschild com $0 < r < 2m$. Da mesma forma, a região $0 < r < 2m$ de (M'', g'') é isométrica a região $0 < r < 2m$ de (M, g) : mas, neste último caso a isometria inverte a direção do tempo.

Nas variedades M' e M'' a superfície $r=2m$ é uma superfície nula, como pode ser visto do diagrama de Eddington-Finkelstein [figura (II.8)]. Essa superfície age como uma membrana semi-permeável para efeitos causais, deixando curvas tipo-tempo ou nulas dirigidas para o futuro passar somente no sentido de r decrescente em M' ; e nenhuma curva tipo-tempo ou nula dirigida para o passado pode cruzar para a região interna ($r < 2m$), a partir da região externa ($r > 2m$). Já em M'' a superfície $r=2m$ deixa passar no sentido de r decrescente somente curvas tipo-tempo ou nulas dirigidas para o passado; ou seja, ela deixa cruzar curvas tipo-tempo ou nulas dirigidas para o futuro somente no sentido de r crescente.



(a)



(b)

FIGURA (11.8)

Seção (θ, φ) constantes da solução de Schwarzschild:

a) Singularidade aparente em $r=2m$ quando coordenadas (t, r) são usadas.

b) Diagrama de Eddington-Finkelstein obtido usando as coordenadas (v, r) -linhas a 45° são linhas de v constante. A superfície $r=2m$ é uma superfície nula na qual $t = \infty$.

Para se obter o diagrama de Eddington-Finkelstein nas coordenadas (w, r) basta inverter a figura (11.8b) e trocar $v \leftrightarrow w$.

Podem-se fazer ambas as extensões definidas pelas transformações (II.30) simultaneamente. Para isso, consideremos (M, g) nas coordenadas (v, w, θ, φ) ; a métrica toma a forma:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dv dw - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (II.33)$$

onde r é definido por:

$$r + 2m \ln|r - 2m| = (v - w)/2.$$

Consideremos agora a transformação:

$$\begin{aligned} t' &= (\exp[v/4m] - \exp[w/4m])/2, \\ x' &= (\exp[v/4m] + \exp[w/4m])/2. \end{aligned} \quad (II.34)$$

Com isso, a métrica (II.33) toma a forma de Kruskal [58]:

$$ds = 16m^2 \exp[-r/2m] (dt'^2 - dx'^2)/r - r^2 d\Omega \quad (=g^*), \quad (II.35)$$

com r determinado implicitamente por:

$$x'^2 - t'^2 = (r - 2m) \exp[r/2m]. \quad (II.36)$$

Seja (M^*, g^*) , M^* sendo a variedade definida pelas coordenadas $(t', x', \theta, \varphi)$ e g^* a métrica (II.35). A região I de (M^*, g^*) definida por $x' > |t'|$ é isométrica à (M, g) . Isto é, é isométrica à região da solução de Schwarzschild com $r > 2m$. Por outro lado, a região $x' > -t'$ [regiões I e II na figura (II.9)] é isométrica à extensão avançada de Eddington-Finkelstein (M', g') . Da mesma forma, a região definida

por $x' > t'$ [regiões I e II' na figura (II.9)] é isométrica à extensão retardada de Eddington-Finkelstein (M'', g'') . Há também a região I', definida por $x' < -|t'|$ que é também isométrica com a solução de Schwarzschild (M, g) com $r > 2m$. Essa região pode ser considerada como um outro universo assintoticamente chato no outro lado da "garganta" de Schwarzschild (ver p.e. Füller and Wheeler [38]). Vale observar que não há curvas tipo-tempo ou nulas que vão da região I para a região I', de forma que é impossível conectá-las causalmente.

Todas as curvas tipo-tempo ou nulas dirigidas para o futuro que cruzam a parte da superfície $r = 2m$ representada por $t' = x'$ atingem a singularidade num tempo $t' = [2m + (x')^2]^{1/2}$, onde $r = 0$. Similarmemente, curvas tipo-tempo ou nulas dirigidas para o passado que cruzam $t' = -x'$ atingem outra singularidade em $t' = -[2m + x'^2]^{1/2}$, onde novamente $r = 0$.

Pode-se obter a estrutura no infinito e construir o diagrama de Penrose da extensão de Kruskal, definindo novas coordenadas nulas avançadas e retardadas, v'' e w'' por:

$$\begin{aligned} v' &= t' + x' = 2m \operatorname{tg}(v''); \\ w' &= t' - x' = 2m \operatorname{tg}(w''), \end{aligned} \quad (II.37)$$

ou, também, novas coordenadas ψ e ξ por:

$$\begin{aligned} t' + x' &= 2m \operatorname{tg}[(\psi + \xi)/2]; \\ t' - x' &= 2m \operatorname{tg}[(\psi - \xi)/2]. \end{aligned} \quad (II.38)$$

De onde segue que:

$$v'' = (\psi + \xi)/2 \quad \text{e} \quad w'' = (\psi - \xi)/2.$$

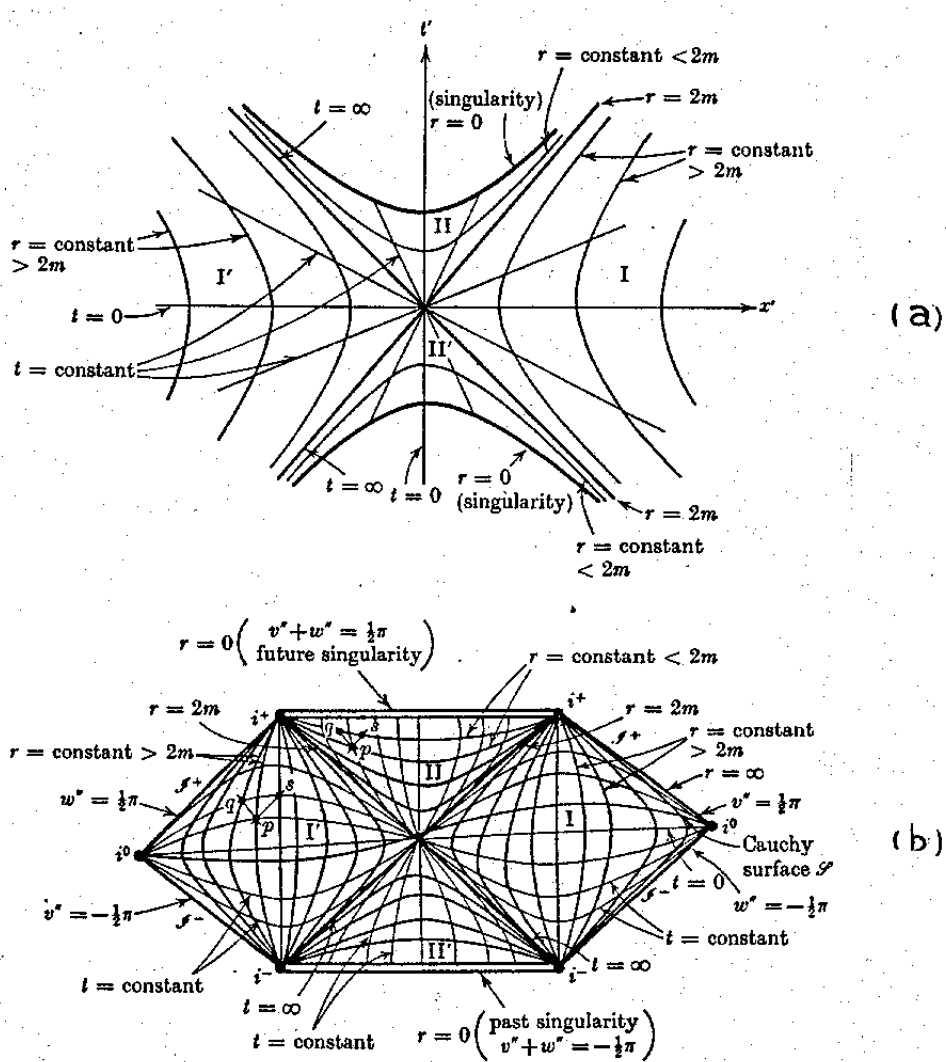


FIGURA (11.9)

A máxima extensão analítica da métrica de Schwarzschild. As coordenadas θ e φ foram eliminadas; linhas nulas aparecem a $+45^\circ$.

a) O diagrama de Kruskal, mostrando as duas regiões assintoticamente chatas I e I', e as regiões II e II' nas quais $r < 2m$.

b) O diagrama de Penrose, mostrando o infinito conforme, bem como as duas singularidades.

No caso de (11.37), a métrica (11.35) toma a forma:

$$ds^2 = (32m^3/r) \exp[-r/2m] \sec^2(v'') \sec^2(w'') dv'' dw'' - r^2 d\Omega, \quad (11.39)$$

com

$$t'^2 - x'^2 = -(r - 2m)\exp[r/2m] = 2m \operatorname{tg}(v'')\operatorname{tg}(w''). \quad (11.40)$$

E, no caso de (11.38), a métrica (11.35) resulta:

$$ds^2 = (32m^3/4r)\exp[-r/2m]\sec^2[(\psi+\xi)/2]\sec^2[(\psi-\xi)/2] \times \\ \times (d\psi^2 - d\xi^2) - r^2 d\Omega, \quad (11.41)$$

com

$$t'^2 - x'^2 = -(r-2m)\exp[r/2m] = \operatorname{tg}[(\psi+\xi)/2]\operatorname{tg}[(\psi-\xi)/2], \quad (11.42)$$

e onde deve-se escolher:

$$-\pi < v'' + w'' < \pi, \quad -\pi/2 < v'' < \pi/2 \quad \text{e} \quad \pi/2 < w'' < 3\pi/2.$$

O diagrama de Penrose é mostrado na figura (11.9b) onde as coordenadas w'' e v'' são particularizadas, e na figura (11.10) com as coordenadas ψ e ξ particularizadas.

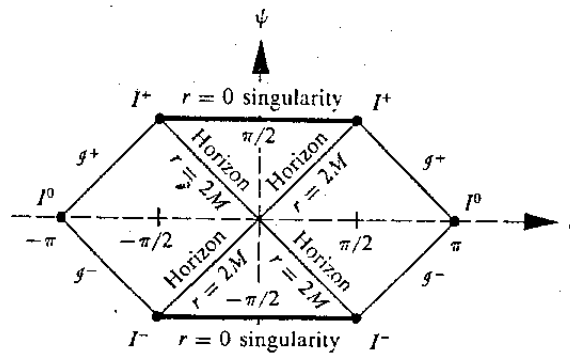


FIGURA (11.10)

O espaço-tempo de Schwarzschild representado nas coordenadas $(\psi, \xi, \theta, \varphi)$ das equações (11.38).

É interessante comparar o diagrama de Penrose da figura (II.9b) com o mesmo diagrama para o espaço-tempo de Minkowski (figura [II.3]): No caso da figura (II.9b) tem-se infinitos futuro, passado e nulos para cada uma das regiões assintoticamente chatas I e I'.

Se considerarmos o cone de luz futuro de qualquer ponto exterior a $r=2m$, as geodésicas radiais dirigidas para fora encontram o infinito espacial, mas geodésicas dirigidas para o interior encontram a singularidade futura (em $r = 0$). Se os pontos ficam internos a $r=2m$, ambas as geodésicas atingem a singularidade, e todo o futuro do ponto acaba na singularidade. Assim, a singularidade pode ser evitada somente por partículas fora da região $r=2m$; mas, uma vez que uma partícula atinja a região interior a $r=2m$, ela não mais poderá evitar a singularidade. Esse fato está ligado a existência de bi-esferas que são superfícies fechadas e "presas". Considere-se qualquer bi-esfera (superfície esférica) como, por exemplo, o "ponto" p da figura (II.9b), e duas bi-esferas q e s formadas por fótons emitidos radialmente para fora, e para dentro, respectivamente, em algum instante em p . A área de q (que é $4\pi r^2$) será maior que a área de p , e a área de s será menor que a área de p se as três esferas ficarem em uma região $r > 2m$. Entretanto, se elas ficarem numa região onde $r < 2m$, as áreas de q e s serão ambas menores que a área de p . Nesse caso dizemos que p é uma superfície fechada e presa. A existência de superfícies fechadas e presas é uma consequência do fato que as superfícies $r = \text{constante}$ são tipo espaço, e a existência de singularidades está intimamente relacionada com a existência de tais superfícies.

Nós vimos que, no espaço de Minkowski, não há horizonte de eventos para observadores geodésicos, mas que para observadores acelerados pode haver (figura [II.6b]). Note-se que existe um horizonte de eventos no diagrama de Schwarzschild para observadores em $r > 2m$. To-

davia, observadores estacionários em $r > 2m$ no espaço de Schwarzschild não são geodésicos. Assim, percebe-se que, em espaços assintoticamente chatos, parece ser comum a existência de um horizonte de eventos para observadores não geodésicos.

11.5 - OUTRAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E SEUS HORIZONTES: COMPARAÇÃO DOS DIAGRAMAS DE PENROSE

Para encerrar este capítulo, vamos analisar mais algumas soluções das equações de Einstein, cujas variedades apresentam regiões assintoticamente chatas com propriedades semelhantes às do espaço de Schwarzschild.

As soluções que veremos a seguir são: (i) a solução de Reissner-Nordström, obtida a partir de um tensor $T=E$ dado pelo tensor de energia-momento eletromagnético (para campo estático); (ii) a solução de Kerr, que pode ser obtida a partir da solução de Schwarzschild através de uma "transformação de coordenadas" adequada (ver p.e. Newman [61]); e por fim veremos (iii) a solução de Kerr-Newman, que é obtida de forma análoga a solução de Kerr.

11.5.1 - A SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM

A primeira solução mais simples, depois da solução de Schwarzschild, é a devida a Reissner [80] e Nordström [63], cuja métrica nas coordenadas (t, r, θ, φ) é da forma:

$$ds^2 = (1 - 2m/r + Q^2/r^2) dt^2 - dr^2 / (1 - 2m/r + Q^2/r^2) - r^2 d\Omega. \quad (11.43)$$

Essa solução representa o espaço-tempo exterior a um corpo estático, eletricamente carregado, sendo que m representa a massa e Q a carga do corpo. A métrica apresenta, além da singularidade real $r=0$, duas outras em r_+ e r_- :

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}, \quad (11.44)$$

desde que $Q^2 < m^2$. Essas singularidades podem ser removidas de maneira análoga ao caso de Schwarzschild (ver p.e. Graves and Brill [41] e Carter [17]). Assim como no caso de Schwarzschild, r_+ e r_- são superfícies nulas e representam também horizontes de eventos. Em especial, r_+ representa o horizonte de eventos para observadores na região assintoticamente chata $r > r_+$, e será de interesse nos estudos que faremos a seguir a respeito de buracos negros.

O diagrama de Penrose da solução de Reissner-Nordström é mostrado mais adiante, na figura (11.11), onde pode-se fazer uma comparação com a solução de Kerr, que será analisada a seguir.

11.5.2 - A SOLUÇÃO DE KERR

Outra solução conhecida, que apresenta regiões assintoticamente chatas na variedade, é a solução de Kerr [56] cuja métrica nas coordenadas de Boyer e Lindquist [11] (t, r, θ, φ) é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - (2mr/Z)(a \sin^2\theta d\varphi - dt)^2 - Z(dr^2/D + d\theta^2) - (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (11.45)$$

onde:

$$Z(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad D(r) = r^2 - 2mr + a^2. \quad (11.46)$$

Essa solução representa o espaço-tempo exterior a um objeto massivo que gira sobre si mesmo, sendo que m representa a massa, e ma ($=L$) o momento angular do corpo como medido do infinito (ver Boyer and Price [12]). Os diagramas de Penrose das soluções de Reissner-Nordström e de Kerr são mostrados nas figuras (11.11) e (11.12) respectivamente (ver Hawking and Ellis [51]).

Na solução de Kerr existem dois valores de r : r_+ e r_- ,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (11.47)$$

em que o coeficiente $D(r)$ se anula. Essas superfícies são similares às superfícies $r = r_+$ e $r = r_-$ na solução de Reissner-Nordström [ver figura (11.11)].

As regiões I, nos diagramas de Penrose, representam regiões assintoticamente chatas onde $r > r_+$. As regiões II ($r_- < r < r_+$) contém superfícies fechadas e presas. As regiões III ($-\infty < r < r_-$) contém uma singularidade, em $r=0$.

Para entender melhor o significado das "pseudo-singularidades" em r_+ e r_- encontradas nas soluções acima, vamos analisar o comportamento dos vetores de Killing admitidos em cada solução.

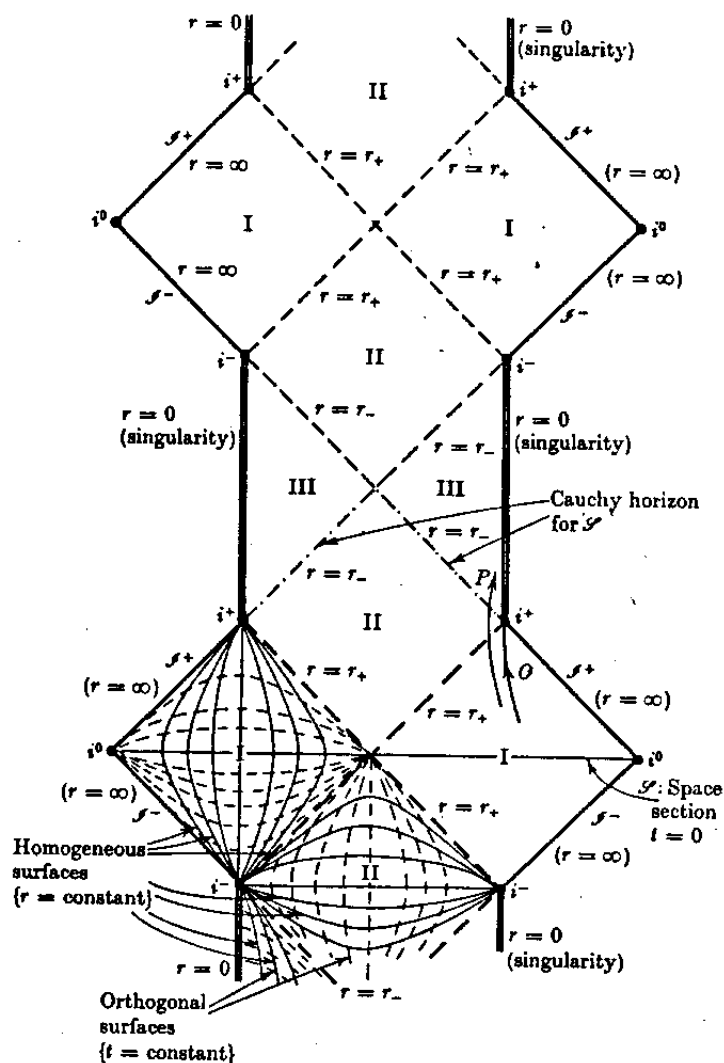
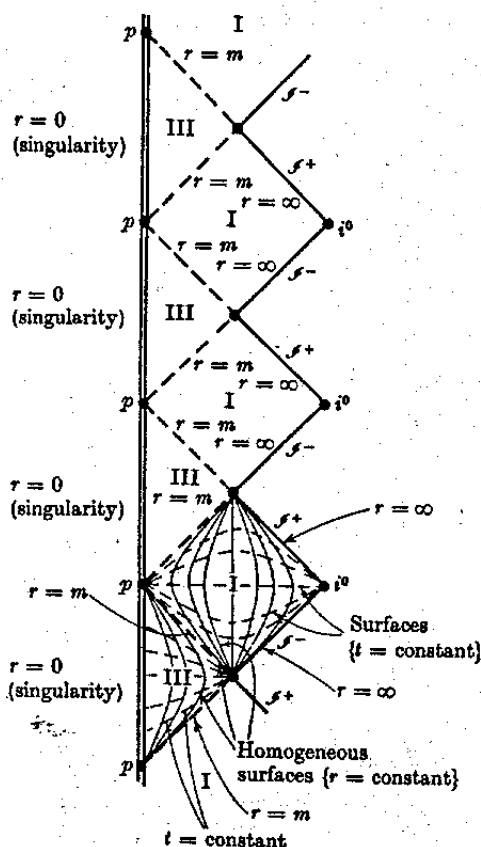
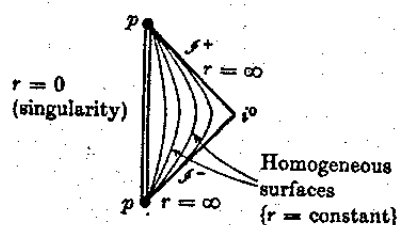


FIGURA (11.11a)

Diagrama de Penrose da máxima extensão analítica da solução de Reissner-Nordström com $Q^2 < m^2$: Uma cadeia infinita de regiões assintoticamente chatas I ($\infty > r > r_+$) são conectadas por regiões II ($r_+ > r > r_-$) e regiões III ($r_- > r > 0$); cada região III é limitada por uma singularidade tipo-tempo em $r = 0$.



(I)



(II)

FIGURA (II.11b)

Diagramas de Penrose da máxima extensão analítica da solução de Reissner-Nordström com:

i) $Q^2 = m^2$: Uma cadeia infinita de regiões I ($\infty > r > m$) conectadas por regiões III ($m > r > 0$). Os pontos p não são parte da singularidade de $r = 0$: são na verdade pontos no infinito.

ii) $Q^2 > m^2$: Não há singularidade coordenada em $r > 0$, e consequentemente não há horizonte de eventos.

As soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom, devido a simetria por translações temporais, admitem, cada uma, um vetor de Killing K_t de componentes $K_t^\mu = \delta_t^\mu$. A solução de Kerr admite no máximo dois vetores de Killing independentes (ver Carter [18]). Há uma única

combinação linear K_t desses vetores de Killing que é tipo-tempo para valores arbitrariamente grandes de $|r|$. Há outra combinação linear única K_φ desses vetores que é zero no eixo de simetria. As órbitas dos vetores de Killing K_t definem sistemas de referência estacionários; isto é, um objeto movendo-se ao longo dessas órbitas aparecerá estacionário em relação ao infinito. As órbitas do vetor de Killing K_φ são curvas fechadas e correspondem à simetria rotacional da solução. Os dois vetores de Killing admitidos pela solução de Kerr são E_t e E_φ , com componentes δ_t^μ e δ_φ^ν , respectivamente, tal que nas coordenadas (t, r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} E_t \cdot E_t &= g_{tt} = (1 - 2mr/Z) = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2mr)/Z, \\ E_t \cdot E_\varphi &= g_{t\varphi} = (2mr a \sin^2 \theta)/Z, \\ E_\varphi \cdot E_\varphi &= g_{\varphi\varphi} = [D a^2 \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2] \sin^2 \theta / Z; \end{aligned} \quad (11.48)$$

note-se que E_φ é nulo em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Os vetores Killing K_t^S de Schwarzschild e K_t^R de Reissner-Nordström nas coordenadas (t, r, θ, φ) são tais que:

$$\begin{aligned} K_t^S \cdot K_t^S &= g_{\mu\mu}^S K_t^\mu K_t^\mu = g_{tt}^S = 1 - 2m/r, \\ K_t^R \cdot K_t^R &= g_{\mu\mu}^R K_t^\mu K_t^\mu = g_{tt}^R = 1 - 2m/r + Q^2/r^2. \end{aligned} \quad (11.49)$$

O vetor K_t da solução de Kerr que é tipo-tempo para grandes valores de r é a combinação linear:

$$K_t = E_t + \Omega E_\varphi \quad (11.50)$$

com

$$K_t \cdot K_t = g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi} > 0. \quad (11.51)$$

Isso é válido se, para r grande (onde $g_{tt} \rightarrow 1$ e $g_{t\varphi} \rightarrow 0$), $\Omega^2 g_{\varphi\varphi} < 1$, ou seja, $\Omega = 0$ (Ω pode ser considerada como a velocidade angular de uma partícula ao redor do corpo fonte).

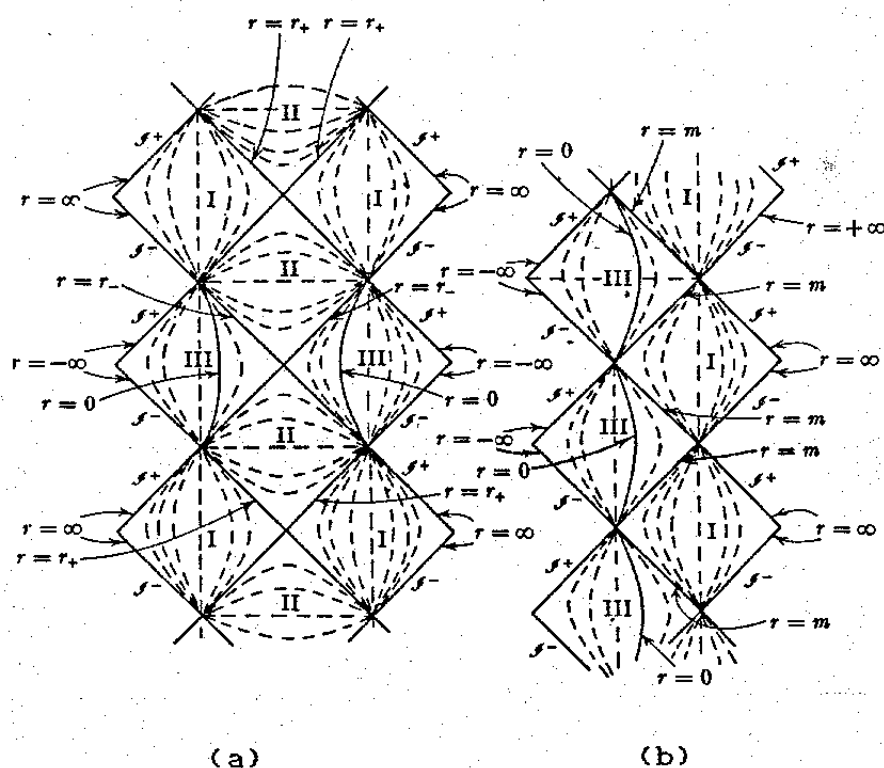


FIGURA (11.12)

A estrutura conforme da solução de Kerr ao longo do eixo de simetria nos casos:

a) $0 < a^2 < m^2$: As regiões I, II e III são divididas por $r = r_+$ e $r = r_-$.

b) $a^2 = m^2$: As regiões I e III são divididas por $r = 2m$.

As linhas pontilhadas são de r constante.

Nas soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström, o vetor de Killing K_t que é tipo-tempo para grandes valores de r é tipo-tempo em toda a região I, tornando-se nulo em $r = 2m$ e $r = r_+$ respectivamente.

te. Essas são superfícies nulas, o que significa que uma partícula que cruza uma dessas superfícies na direção futura não pode retornar novamente à região original. Elas são a fronteira da região da qual partículas podem escapar para o infinito $\mathcal{I}^+$ de uma particular região I; e são chamadas os **HORIZONTE DE EVENTOS** daquele $\mathcal{I}^+$. Essas superfícies são os horizontes de eventos futuros, no sentido que foram definidos para o espaço de de Sitter, para um observador movendo-se em qualquer das órbitas do vetor Killing K_t na região I.

Já, como pode ser visto depois das equações (II.48) e (II.51), na solução de Kerr o vetor de Killing K_t ($\Omega = 0$) é tipo-espaço numa região exterior a $r = r_+$, chamada **ERGOSFERA** [ver figura (II.13)]. O limite externo da ergosfera é a superfície onde g_{tt} vai a zero; ou seja, é a superfície $r = r_0$ onde:

$$r_0 = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Na superfície $r=r_0$, K_t é nulo. Essa superfície é conhecida como a superfície do limite estacionário, visto que ela é a fronteira da região na qual partículas descrevendo uma curva tipo-tempo podem seguir uma órbita do vetor de Killing K_t , e assim permanecer em repouso com relação ao infinito. No interior de $r = r_0$, para que a equação (II.51) seja satisfeita é necessário que Ω seja diferente de zero e positiva; isto é, todos os observadores no interior de $r = r_0$ tem que orbitar o corpo com velocidade angular positiva (i.e., na direção em que o corpo gira). O limite estacionário $r = r_0$ é uma superfície tipo-tempo, exceto nos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, onde ela coincide com a superfície $r = r_+$. Então, com exceção desses pontos, partículas podem cruzá-la nos dois sentidos.

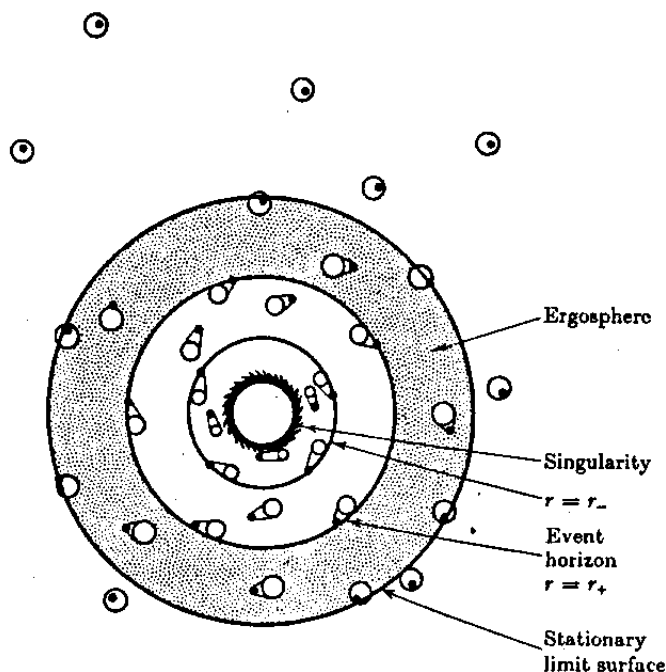


FIGURA (II.13)

O plano equatorial ($\theta = \pi/2$) de uma solução de Kerr com $m^2 > a^2$. Os círculos representam a posição da frente de onda um pequeno intervalo de tempo após a emissão da luz dos pontos escuros.

Então, a superfície $r = r_0$ não é o horizonte de eventos para $\mathcal{J}^+$. Na verdade, o horizonte de eventos é a superfície $r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$, visto que ela é uma superfície fechada e nula (ver figura [II.13]). Na superfície $r = r_0$, o vetor de Killing K_t é nulo, e os pontos representando as órbitas das emissões de luz ficam sobre a frente de onda. Porém, a frente de onda fica parcialmente dentro e parcialmente fora da superfície $r = r_0$; é então possível para partículas seguindo uma curva tipo-tempo escapar para o infinito dessa superfície. Em $r = r_+$ o vetor de Killing K_t é tipo-espaço, e a frente de onda correspondente a um ponto nessa superfície fica inteiramente no seu interior. Assim, partículas que seguem curvas tipo-tempo não podem atingir o infinito, a

partir de pontos em $r = r_+$. A superfície $r = r_+$ é então o horizonte de eventos para .

Embora o vetor de Killing ξ_t seja tipo-espaço também na ergosfera, existe uma combinação linear de ξ_t e ξ_φ que satisfaz a equação (11.51) [a qual representa a quadri-velocidade de um observador que orbita o objeto em estudo com velocidade angular Ω], e que é tipo-tempo nessa região, enquanto que para a região interior a $r=r_+$ nenhum valor de Ω satisfaz a (11.51), e consequentemente nenhum observador pode orbitar a região $r < r_+$ mantendo-se em $r = \text{constante}$.

11.5.3 - A SOLUÇÃO DE KERR-NEWMAN

A última solução assintoticamente chata das equações de Einstein que trataremos nesse capítulo é a solução de Kerr-Newman (ver Newman et al. [62]). Exatamente da mesma forma que a solução de Reissner-Nordström pode ser pensada como uma versão da solução Schwarzschild na presença de carga elétrica, analogamente as soluções de Kerr-Newman são uma família de soluções de Kerr com carga elétrica. Nas coordenadas de Boyer-Lindquist a métrica de Kerr-Newman é:

$$ds^2 = dt^2 - (2mr/Z)(a \sin^2\theta d\varphi - dt)^2 - Z(dr^2/D + d\theta^2) - (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (11.52)$$

onde,

$$Z(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad (11.53a)$$

$$D(r) = r^2 - 2mr + a^2 + Q^2 . \quad (11.53b)$$

Aqui 'm' e 'a' tem o mesmo significado que nas soluções de Kerr, e Q representa a carga elétrica, da mesma maneira que na solução de Reissner-Nordström.

Comparando as eqs. (11.45) e (11.46) com (11.52) e (11.53), vemos que as duas soluções somente diferem pela presença do termo Q em (11.53b). A variedade definida pelas coordenadas de Boyer e Lindquist (t, r, θ, φ) , e com a métrica (11.52) que define o espaço de Kerr-Newman, tem uma superfície de limite estacionário que coincide com a do espaço de Kerr em $r = r_0 = m + \sqrt{(m^2 - a^2 \cos^2 \theta)}$; e tem "singularidades coordenadas" em $r = r_+$ e $r = r_-$ onde:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2} . \quad (11.54)$$

Então, a superfície $r = r_+$ é o horizonte de eventos para $\mathcal{G}^+$.

Segue de todas essas semelhanças, que as propriedades globais do espaço de Kerr-Newman são muito similares àsquelas do espaço de Kerr.

A ESTRUTURA DOS HORIZONTES DE EVENTOS; BURACOS NEGROS E TERMODINAMICA

III.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo II caracterizamos os horizontes de eventos como superfícies nulas e, dessa forma, linhas tipo-tempo com direção definida no tempo podem cruzá-las somente em uma direção. Por exemplo, partículas seguindo linhas tipo-tempo dirigidas para o futuro podem cruzar a superfície $r = 2m$ no espaço de Schwarzschild (ou $r = r_+$ nos espaços de Reissner-Nordström, de Kerr e de Kerr-Newman) somente no sentido de r decrescente.

Talvez, o exemplo mais simples e mais comum de uma superfície com as características citadas acima é o cone nulo do futuro no espaço de Minkowski, onde linhas tipo tempo dirigidas para o futuro podem (se estiverem fora do cone de luz) cruzar a superfície $t=r$ ($c=1$) somente na direção de t crescente; e uma vez dentro do cone de luz não podem mais sair dele.

A diferença mais importante entre a superfície $t=r$ do espaço de Minkowski e os horizontes de eventos que consideraremos aqui é que: (1) a primeira é uma superfície aberta e que inclui todo espaço-tempo

futuro de um observador, não o impedindo de observar todas as partículas que seguem trajetórias tipo-tempo nesse espaço; enquanto que: (ii) os segundos, como será visto na seção (III.2), são superfícies fechadas no espaço e incluem somente uma parte do espaço-tempo futuro de um observador, impedindo-o de observar eventos que ocorrem além de tal horizonte.

Tais horizontes de eventos, sendo superfícies fechadas, definem um lugar geométrico de pontos que ficam em seu interior. Tal lugar geométrico é conhecido pelo nome de buraco negro (BN), por razões que veremos na seção (III.4).

Na seção (III.3) trataremos da lei das áreas (teorema de Hawking), conhecida também como segundo princípio da dinâmica dos buracos negros.

Para finalizar, na seção (III.5) trataremos das analogias entre a termodinâmica e a física dos buracos negros, encontrando que podemos associar a eles o conceito de temperatura e entropia, de um modo bem definido.

III.2 - O HORIZONTE DE EVENTOS: DEFINIÇÕES PARA OS CASOS ESTATICO E ESTACIONARIO

É necessário estudar mais detalhadamente algumas propriedades gerais dos horizontes de eventos, para que no final desta seção possamos dar uma definição mais precisa para essas "superfícies nulas

fechadas".

Vamos, por simplicidade, iniciar considerando um problema estático. Uma métrica estática admite um vetor de Killing tipo tempo E cujas componentes satisfazem:

$$E_{\mu;\nu} + E_{\nu;\mu} = 0, \quad (III.1)$$

onde ';' representa a derivação covariante.

Pode-se, nesse caso, definir observadores e fontes estáticas como sendo aqueles com quadri-velocidade dada por:

$$U = E / (E_\alpha E^\alpha)^{1/2}. \quad (III.2)$$

A frequência f que um observador com quadri-velocidade U atribui a um raio luminoso com vetor tangente a geodésica N é: $f = U^\mu N_\mu$, de modo que o desvio para o vermelho ("red-shift") da luz emitida pela fonte F e observada em O é dado pela relação:

$$f_O / f_F = (N_\mu U^\mu)_O / (N_\nu U^\nu)_F, \quad (III.3)$$

onde o subscrito "O" se refere ao observador e "F" à fonte. Depois da equação (III.2), para observadores e fontes estáticas, a equação (III.3) fica:

$$f_O / f_F = (N_\mu E^\mu)_O (E_\alpha E^\alpha)^{1/2}_O / (N_\nu E^\nu)_F (E_\beta E^\beta)^{1/2}_F. \quad (III.4)$$

Agora, é fácil mostrar que $N_\mu E^\mu$ é uma constante ao longo de uma geodésica nula, pois que:

$$(E_{\mu} N^{\mu})_{;\nu} E^{\nu} = N^{\mu} E_{\mu;\nu} E^{\nu} + E_{\mu} N^{\mu}_{;\nu} E^{\nu}. \quad (III.5)$$

Mas, da equação da geodésica para N^{μ} vem $N^{\mu}_{;\nu} = 0$; e, da anti-simetria de $E_{\mu;\nu}$ (eq. [III.1]), segue que $E_{\mu;\nu} N^{\mu} E^{\nu} = 0$. Logo:

$$(E_{\mu} N^{\mu})_{;\nu} E^{\nu} = 0,$$

ou seja, $E_{\mu} N^{\mu}$ é constante ao longo da geodésica nula de vetor tangente N ; e a equação (III.4) fica :

$$f_0 / f_c = \sqrt{(E_{\alpha} E^{\alpha})_c} / \sqrt{(E_{\beta} E^{\beta})_c}. \quad (III.4a)$$

Nós vimos, no caso da métrica de Schwarzschild, que o vetor de Killing que é tipo-tempo no infinito, E , é nulo na superfície de Schwarzschild $r=2m$; i.e., $E_{\mu} E^{\mu} = 0$ no horizonte de eventos. Assim, um análogo da superfície de Schwarzschild é a superfície S_0 dada por $E_{\mu} E^{\mu} = 0$ (no caso de métrica estática em geral); em S_0 a equação (III.4a) produz um red-shift infinito. Lá não é definida nenhuma quadri-velocidade tipo-tempo U , significando que não podem existir observadores estáticos e que, próximo de S_0 , o red-shift pode ser arbitrariamente grande com relação ao infinito espacial. Em vista disso, uma superfície onde $E_{\mu} E^{\mu} = 0$, é uma superfície do limite estacionário, pois em S_0 não pode existir um observador estático com relação ao infinito espacial.

Agora, o que vimos até aqui não nos mostra que superfícies como S_0 sejam candidatas a horizonte de eventos, pois como dissemos anteriormente, estes devem ser superfícies nulas. Em geral uma superfície Σ é nula quando:

$$(\bar{\nabla} \Sigma)^2 = 0, \quad (III.6)$$

onde o símbolo $\bar{\nabla}$ representa o gradiente: $(\bar{\nabla} \Sigma)^2 \equiv \Sigma_{;\mu} \Sigma^{;\mu} = g^{\mu\nu} \Sigma_{;\nu} \Sigma_{;\mu}$.

Consideremos então as famílias de superfícies Σ dadas por (caso estático):

$$E_\mu E^\mu = \text{constante}. \quad (III.7)$$

Vamos supor que o gradiente de $E_\mu E^\mu$ não se anule em Σ . Então, o vetor n definido por:

$$2n_\mu = (E_\sigma E^\sigma)_{;\mu} = (E_{\sigma;\mu} E^\sigma + E^\sigma_{;\mu} E_\sigma) = 2E_{\sigma;\mu} E^\sigma, \quad (III.8)$$

é não zero e normal a Σ .

Segue então que E fica em Σ , visto que ele é normal a n , pois:

$$n \cdot E \equiv n_\mu E^\mu = E_{\nu;\mu} E^\nu E^\mu = 0,$$

(onde usamos a anti-simetria de $E_{\nu;\mu}$).

A magnitude de n é:

$$n_\mu n^\mu = E_{\nu;\mu} E^\nu E_\sigma E^{\sigma;\mu} = (E_{\nu;\mu} E_\sigma) (E^\nu E^{\sigma;\mu}). \quad (III.9)$$

Agora, usando a condição para congruência normal

$$E_\mu E_{\nu;\sigma} + E_\sigma E_{\mu;\nu} + E_\sigma E_{\mu;\nu} = 0,$$

vem que a equação (III.9) pode ser escrita como:

$$\eta_{\mu} n^{\mu} = E_{\mu} E^{\mu} (E_{\delta;\epsilon} E^{\delta;\epsilon}) / 2. \quad (\text{III.10})$$

Concluimos, então, que $\eta_{\mu} n^{\mu}$ se anula quando $E_{\mu} E^{\mu}$ é zero (com $E_{\delta;\epsilon} E^{\delta;\epsilon}$ finito). Logo, a superfície S_0 onde $E_{\mu} E^{\mu} = 0$ é também uma superfície nula e, portanto, um horizonte de eventos.

Para exemplificar, consideremos o caso estático, cuja métrica pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \quad (\text{III.11})$$

com g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ sendo funções somente de r e onde $g_{\varphi\varphi} = g_{\theta\theta} \sin^2 \theta$.

Nesse caso, o vetor de Killing E tem componentes $E = \delta_t^{\mu}$; então:

$$E_{\mu} E^{\mu} = g_{tt},$$

$$\eta_{\mu} = [(E_{\delta} E^{\delta})_{;\mu}] / 2 = (\partial g_{tt} / \partial r) / 2,$$

e obtemos:

$$\eta_{\mu} n^{\mu} = g^{rr} (\partial g / \partial r)^2 / 4.$$

Agora, das equações de Einstein no caso de simetria esférica, obtemos (ver apêndice B):

$$g^{rr} (\partial g_{tt} / \partial r) + g^{rr} g_{tt} / r + g_{tt} / r = - 8\pi G r T_r^r g_{tt} / c^4.$$

Assim, na superfície $r = r_0$, onde $g_{tt}(r) = 0$, vem que $g^{rr} g_{tt} \rightarrow g^{rr} g_{tt,r} \cdot r$; e então: ou $g^{rr}(r_0) \rightarrow 0$ com $g_{tt,r}$ finito, ou $g_{tt,r} = 0$ com g^{rr} finito. Isso mostra explicitamente que a superfície de red-shift infi-

nito (onde $g_{tt} = 0$) é uma superfície nula.

Agora, todas as superfícies nulas são "membranas semi-permeáveis" para efeitos causais, sendo que geodésicas tipo-tempo ou nulas dirigidas para o futuro podem cruzar tais superfícies somente em uma direção. Toda a superfície tal como S_0 , acima, tem essas propriedades: elas contém, em cada ponto, exatamente uma direção nula (que é também normal à superfície), mas não contém nenhum vetor tipo-tempo. O cone de luz do futuro fica inteiramente em um lado da superfície nula.

Nós acabamos de mostrar que toda a superfície de "red-shift" infinito é necessariamente uma superfície nula, no caso de uma métrica estática; mas em geral isso não é verdade.

Em primeiro lugar, uma superfície nula Σ é determinada pela equação (III.6), i.e.,

$$(\bar{\nabla} \Sigma)^2 = 0,$$

e isso nem sempre coincide com um red-shift infinito, nem mesmo no caso estático. Voltando à métrica (III.11) vemos que qualquer superfície $f(r, \theta, \varphi)$ que satisfaça a

$$g^{rr} (\partial f / \partial r)^2 + (\partial f / \partial \theta)^2 / r^2 + (\partial f / \partial \varphi)^2 / r^2 \sin^2 \theta = 0,$$

é certamente uma superfície nula. Por exemplo, a superfície definida por $r = r_s$, onde r_s é raiz de:

$$g^{rr}(r, \theta, \varphi) = g^{rr}(r) = 0, \quad (\text{III.12})$$

é uma superfície nula. Agora, se $g_{tt}(r_s)$ for diferente de zero, essa não será uma superfície de red-shift infinito (o exemplo mais simples

em que isso acontece é, novamente, a superfície $t = r$ do espaço de Minkowski). No entanto, a eq. (III.12) ainda define um horizonte de eventos (no caso estático), pois o cone de luz do futuro deve ficar inteiramente em um lado dessa superfície. Além do mais, $r=r_g$ será certamente uma superfície fechada. Ou seja, o importante é que superfícies tais como S_0 , onde $E_\mu E^\mu = 0$, não se estendem para o infinito espacial onde $E_\mu E^\mu = 1$ (em espaços assintoticamente chatos): assim, os raios de luz que ela contém não vêm do infinito e nem mesmo podem escapar para o infinito. Na verdade, essas geodésicas nulas "ficam paradas", no sentido que seu vetor tangente N é paralelo a E (o vetor de Killing que define as idéias de "estático", de "em repouso", ou de independência temporal nessa métrica). Vemos que superfícies como Σ definidas por $g^{rr} = 0$, mesmo que $g_{tt} = 0$, também não se estendem para o infinito espacial, onde $g^{rr} = -1$. Assim, superfícies como S_0 ou Σ são superfícies nulas fechadas que podem definir os buracos negros, conforme mencionamos anteriormente.

Um segundo exemplo importante onde o horizonte de eventos e a superfície de red-shift infinito (em relação ao infinito espacial) não coincidem é o caso da solução de Kerr. Nesse caso o red-shift infinito ocorre em r_0 que é solução de:

$$g_{tt} = 0, \text{ isto é: } r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

$$r_0 = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

enquanto que o horizonte é em (ver Vishveshwara [96] e Boyer e Lindquist [11]):

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2},$$

que é a solução de (ver também capítulo II):

$$r^2 - 2mr + a^2 = 0, \text{ ou seja: } g^{rr} = 0.$$

Nós temos assim entendido o significado do horizonte de eventos. Precisamos no entanto de uma definição mais precisa, a fim de estudarmos mais detalhadamente suas propriedades e as dos buracos negros que veremos a seguir.

Vamos focalizar nossa atenção em uma variedade espaço-temporal específica, e seleccionar uma região assintoticamente chata específica, p. e. uma particular região I do diagrama de Penrose da variedade [como na figura (II.11a)].

Na linguagem do capítulo II, a região assintoticamente chata (universo externo) tem um infinito tipo-tempo futuro I^+ , um infinito tipo tempo passado I^- , um infinito tipo-espaço I^0 , um infinito nulo futuro $\mathcal{J}^+$, e um infinito nulo passado $\mathcal{J}^-$. Pode também possuir buracos negros (regiões interiores aos horizontes de eventos). As superfícies de todos os buracos negros (horizontes de eventos) separam o universo exterior, que pode mandar sinais para o infinito nulo futuro $\mathcal{J}^+$, do interior dos buracos negros, que não pode.

Podemos então definir:

Definição 1 - A união de todos os horizontes de eventos futuros (superfícies de todos os BN) é a região $J^-(\mathcal{J}^+)$; i.e., é a fronteira do domínio $J^-(\mathcal{J}^+)$, região que pode mandar curvas causais dirigidas para o futuro para $\mathcal{J}^+$.

Essa definição é útil principalmente no caso de espaços assintoticamente chatos. Porém, pode-se dar outras definições, como por exemplo:

Definição 2 - Seja C uma curva tipo-tempo que tem um ponto extremo futuro no infinito tipo-tempo futuro I^+ . Então, o horizonte de eventos é a região $I^-(C)$, ou seja, é a fronteira do passado cronológico da curva C . Essa curva pode ser pensada como a liha da vida de um observador que permanece fora do buraco negro, e que não é acelerado para o infinito. O horizonte de eventos é, então, a fronteira da região do espaço-tempo que ele pode ver se esperar tempo suficiente. Essa definição é importante, porque pode ser generalizada para incluir espaços que não são assintoticamente chatos (ver p.e. Gibbons and Hawking [40]).

III.3 - O TEOREMA DAS AREAS OU SEGUNDO PRINCÍPIO DA DINÂMICA DOS BURACOS NEGROS

Nós iniciamos esta seção mencionando alguns resultados devidos a Penrose, que possibilitam a prova do teorema das áreas, e que resultaram num teorema conhecido como teorema de Penrose (ver Penrose [69] e Misner et al. [59]).

1. O horizonte de eventos $H \equiv J^-(\mathcal{I}^+)$ é gerado por geodésicas nulas que não têm pontos extremos futuros e que, pelo menos para um intervalo finito do parâmetro afim, ficam sempre em H .

2. Quando seguido para o passado, um gerador pode deixar o horizonte H entrando em $J^-(\mathcal{I}^+)$, que é o passado causal do infinito futuro nulo $\mathcal{I}^+$.

3. Uma vez que um gerador seguido para o futuro entra em H a partir de $J^-(\mathcal{I}^+)$ em um ponto C [uma cáustica de $J^-(\mathcal{I}^+)$], ele não mais deixará H nem mesmo interseparará outro gerador. Os geradores podem cruzar-se somente na cáustica, onde eles entram em H .

4. Através de cada evento não-cáustico de H passa somente um gerador (a menos de um fator de normalização do parâmetro afim).

A partir desse teorema, Hawking [44,45,46] mostrou que, para espaços assintoticamente chatos, a área da superfície do horizonte de eventos não decresce quando nos deslocamos para o futuro. Uma prova simples desse teorema, conhecido como teorema de Hawking ou como a "lei das áreas" dos buracos negros, será dada abaixo.

TEOREMA DAS ÁREAS: A área total da seção transversal do horizonte de eventos $H \equiv J^-(\mathcal{I}^+)$ não pode decrescer para o futuro. Ou, equivalentemente, se S_1 e S_2 são superfícies tipo-espaco, com S_2 inteiramente no futuro de S_1 , então a área da seção transversal de H em sua interseção em S_2 não pode ser menor que a área da seção transversal em S_1 .

Segue diretamente desse teorema que um buraco negro nunca pode bifurcar-se; e se dois buracos negros se fundem, dando origem a um novo buraco negro, a área da superfície do último é maior que a soma das áreas dos dois originais.

O teorema pode ser representado por:

$$\delta A \geq 0 \quad \text{em qualquer processo físico.} \quad (\text{III.13})$$

Para dar a prova do teorema de Hawking para um espaço-tempo assintoticamente chato, devemos considerar a equação de Landau-Raychaudhuri (ver Hawking and Ellis [51]) para a expansão θ das geodésicas nulas que são os geradores do horizonte de eventos.

$$d\hat{\theta}/dp = R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu - \sigma^2 - \hat{\theta}^2, \quad (\text{III.14})$$

onde p é o parâmetro afim, N é todo vetor nulo, σ é o cisalhamento ('shear'), e R é o tensor de Ricci.

Então, de (III.14) vemos que, enquanto $R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0$ para qualquer vetor nulo N , $d\hat{\theta}/dp$ será sempre negativo e, fatalmente, depois de um intervalo finito do parâmetro afim, as geodésicas nulas vizinhas se interseptarão, violando assim o teorema de Penrose enunciado anteriormente. O teorema só não é violado se os geradores atingirem uma singularidade antes de se cruzarem. Se isso acontecer, há formação de uma "singularidade nua", quebrando com a possibilidade de se prever o futuro: pois numa singularidade toda a física deixa de valer. Para evitar esses problemas, somos levados a supor que o horizonte não atinge uma singularidade ou, equivalentemente, que o espaço-tempo não possui singularidades nuas (i.e. nenhuma singularidade visível de $\mathcal{J}^+$). Dessa forma, $d\hat{\theta}/dp$ nunca deve se tornar negativo. As geodésicas nulas que em algum ponto atingem uma expansão negativa imediatamente deixam o horizonte H .

Consideremos então um feixe de geodésicas nulas vizinhas que sejam geradores do horizonte de eventos. Esses geradores devem ter uma expansão $\hat{\theta}$ não negativa, $d\hat{\theta}/dp \geq 0$, para poderem continuar em H . Assim, a área da seção transversal do feixe considerado não pode decrescer quando nos movemos para o futuro. Visto que novos feixes podem ser criados, mas nenhum destruído, a área da seção transversal do horizonte $\dot{J}^-(\mathcal{J}^+)$ não pode decrescer para o futuro, ou seja:

$$\dot{A} \geq 0, \quad \text{para qualquer processo físico.}$$

Para uma demonstração detalhada desses teoremas podemos ci-

tar Hawking and Ellis [51] e Misner et al. [59]. Na verdade é necessário um pouco mais do que simplesmente a condição $R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0$ para que o teorema das áreas (eq. [III.13]) seja válido. Em geral, o espaço-tempo precisa admitir uma superfície parcial de Cauchy S , onde deve-se ter $R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0$ em todo ponto; e que o espaço seja regular e previsível a partir de S .

Contudo, essas condições podem ser substituídas por:

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0, \quad (\text{III.15})$$

(na presença de constante cosmológica ou não) onde V é todo vetor tipo-tempo. Vale salientar que em todas as nossas discussões estamos assumindo que não hajam curvas tipo-tempo fechadas no espaço-tempo considerado.

A condição (III.15) é satisfeita se

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq T_\omega V_\rho V^\rho / 2, \quad (\text{III.16})$$

enquanto que a condição:

$$R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0 \quad (N \text{ qualquer vetor nulo}), \quad (\text{III.17})$$

implica em:

$$T_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \geq 0. \quad (\text{III.18})$$

Para que (III.18) seja satisfeita é suficiente que T_{00} , como medido por qualquer observador em qualquer ponto do espaço-tempo, seja não negativo. A condição (III.16) é mais restritiva. Por exemplo, para

as equações de Einstein com termo cosmológico;

$$R - gR/2 + \Lambda g = -8\pi T, \quad (III.19)$$

a condição (III.16) exige que:

$$T_{00} + T_{ii} \geq 0 ; \quad T_{00} + \sum_{i=1}^3 T_{ii} - \Lambda/4\pi \geq 0. \quad (III.20)$$

O que, por exemplo, no caso de um fluido perfeito, e em coordenadas locais, resulta:

$$\rho + p_i \geq 0 ; \quad \rho + \sum_{i=1}^3 p_i - \Lambda/4\pi \geq 0, \quad (III.21a)$$

onde p são as pressões principais e ρ a densidade da matéria.

III.4 - O COLAPSO GRAVITACIONAL E OS BURACOS NEGROS

Depois de discutir algumas características dos horizontes de eventos, vamos considerar agora a existência de tais horizontes relacionados com objetos extremamente compactos (formados a partir do colapso de estrelas de massas elevadas, $M \geq 3M_\odot$), ou com grandes distribuições de massa (como no caso do próprio universo) que podem apresentar um horizonte de eventos.

Considere-se, por exemplo, uma esfera de densidade uniforme

e raio R . Sua massa é $4\pi R^3 \rho / 3$; e assim o seu raio de Schwarzschild é $r_s = 2GM/c^2 = 8\pi GR^3 \rho / 3c^2$. Para que r_s seja maior que R , é necessário simplesmente que:

$$8\pi GR^3 \rho / 3c^2 > R \quad \therefore \quad R > (3c^2 / 8\pi G \rho)^{1/2}. \quad (III.21)$$

Ou seja, esferas de qualquer densidade podem ter um horizonte de eventos, desde que R seja suficientemente grande. Por exemplo, o raio de Schwarzschild do sol é aproximadamente 3×10^3 m; o de uma galáxia típica de massa da ordem de 10^{42} Kg é 10^{15} m; no caso de uma massa tão grande como 10^{54} Kg ($\sim$ massa do universo), o raio de Schwarzschild é da ordem de 2×10^{27} m, ou seja, é maior que o "raio de Hubble" do universo, qual estimado atualmente.

De grande importância em nosso trabalho são os buracos negros formados a partir do colapso de objetos como, por exemplo, estrelas. Os detalhes do colapso gravitacional não nos interessam aqui: nós daremos simplesmente as características de um objeto que tem seu horizonte de eventos "visível". Para mais detalhes, ver p.e. Zel'dovich e Novikov [103], Weinberg [101] ou Misner et al. [59].

Então, como um objeto que colapsa aparece para um observador O que fique a uma grande distância dele? Se o colapso é esfericamente simétrico a resposta é clara, visto que pelo teorema de Birkhoff a solução das equações de Einstein fora do corpo é a solução de Schwarzschild. Consideremos então um observador O' situado sobre a superfície do corpo (ver figura [III.1]). Depois de um dado evento na linha da vida do observador O' , ele passa para o interior de $r=2m$ em um intervalo de tempo-próprio finito, digamos $\Delta\tau$, (conforme medido por O'). Tal observador não perceberá nada diferente ao passar por $r=2m$. Entretanto, depois que ele passa a superfície $r=2m$ não será mais visível ao

observador O que se mantém externo a $r=2m$. Por outro lado, por mais que o observador O espere, ele nunca verá O' em um tempo posterior ao intervalo $\Delta\tau$ medido pelo "relógio" de O' . Em vez disso, O verá o relógio de O' se tornar cada vez mais lento e atingir $\Delta\tau$ assintoticamente. Dito de outra forma, o relógio de O medirá um tempo infinito até que O' atinja $r=2m$. Isso significa que a frequência de luz recebida de O' terá um grande desvio para o vermelho e, como consequência,

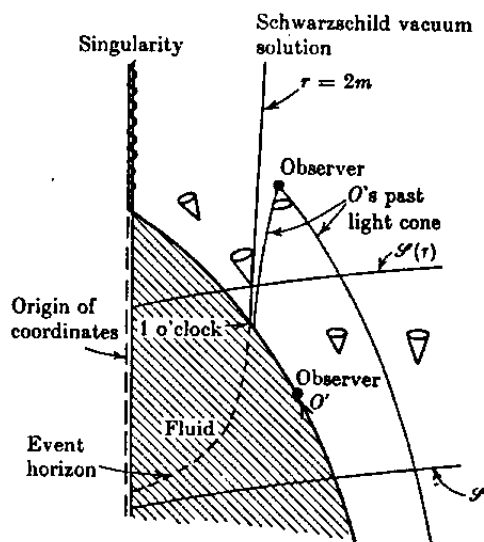


FIGURA (III.1)

O colapso gravitacional (esfericamente simétrico) de uma estrela.

Um observador O que fica longe de $r=2m$ nunca vê uma esfera de fluido colapsando além de um certo tempo $\Delta\tau$ (digamos 1 hora) na história de um observador O' na superfície da esfera.

a) O diagrama de Eddington-Finkelstein.

b) O diagrama de Penrose.

um grande descréscimo de intensidade. Assim, embora a superfície da estrela nunca desapareça para O , ela torna-se muito rapidamente tão

"apagada" que na prática se torna invisível. A escala de tempo para a estrela desaparecer, depois de começar a "apagar-se" a partir do centro, é da ordem do tempo gasto para a luz percorrer uma distância de $2GM/c^2$ (ver Ames and Thorne [1]), onde M é a massa do corpo colapsado.

Nós ficamos, então, com um objeto que, para fins práticos, é invisível. Porém, ele terá a mesma massa (de Schwarzschild) que apresentava antes do colapso, e produzirá o mesmo campo gravitacional que antes. Pode-se, então, detectar a sua presença pelos seus efeitos gravitacionais (como: os efeitos nas órbitas de corpos vizinhos, a deflexão da luz que passa próximo a ele), ou ainda através de ondas de rádio ou raios X produzidos pela "queda" de gás em tal objeto.

No caso de colapso esfericamente simétrico ocorre uma singularidade na região $r < 2m$, da qual a luz não pode escapar para o infinito. Assim, um observador fora de $r=2m$ nunca verá essa singularidade, e a mesma não pode afetar a capacidade de se prever o futuro na região assintoticamente chata do espaço-tempo.

Todavia, nós não nos preocuparemos aqui com os problemas de singularidades; estudaremos apenas algumas características importantes dos buracos negros.

III.5 - BURACOS NEGROS E TERMODINAMICA

Um buraco negro exhibe a interessante tendência de aumentar a área da superfície de seu horizonte quando sujeito a qualquer trans-

formação. Isto foi primeiramente notado por Floyd e Penrose [36]. Eles sugeriram que um acréscimo na área do horizonte poderia ser uma característica geral da evolução dos buracos negros. Por outro lado, Christodoulou [23] mostrou que, num processo que resulte na absorção de uma partícula por um buraco negro (BN) de Kerr, existe uma quantidade chamada massa irreduzível M_{irr} que nunca decresce. M_{irr} pode no máximo permanecer constante, em casos limites chamados processos reversíveis. Na verdade, M_{irr} é proporcional à raiz quadrada da área de um BN de Kerr. Todos esses resultados são válidos também para buracos negros de Kerr carregados (ver Christodoulou and Ruffini [24]).

Além disso, por um caminho completamente diferente, conforme vimos anteriormente, Hawking [44,45,46] deu uma prova geral de que a área da superfície do BN não pode decrescer para o futuro em nenhum processo físico.

Vemos disso tudo que as mudanças em um BN geralmente acontecem na direção da área crescente. Isso sugere uma forte analogia entre a entropia e a área da superfície de um BN. Parece, então, ser útil considerar a física dos buracos negros do ponto de vista da termodinâmica. O conceito de energia do BN é bem claro, e as observações acima indicam ser possível introduzir-se o conceito de entropia do BN.

Quem primeiro se dedicou a essa tarefa foi J. Bekenstein [9,10], o qual construiu o análogo da expressão do primeiro princípio da Termodinâmica para os BN, e procurou relacionar a área da superfície do BN com a quantidade de informação contida no BN e não acessível a um observador externo. Ou seja, relacionou a área do BN com sua entropia no sentido da teoria da informação.

É importante, então, sabermos que tipo de informação podemos ter a respeito de um BN. A resposta a essa questão é a seguinte: Quando um buraco negro é formado por um colapso gravitacional ele, muito

rapidamente, se estabiliza num estado estacionário caracterizado por apenas três parâmetros: a massa M , o momento angular L e a carga elétrica Q (mais uma carga pseudo-escalar que deve estar contida em Q). Esse é o "no-hair theorem" (ver Hawking and Ellis [51], Hawking [45], Israel [52], Carter [19], Robinson [82,83], Muller Zum Hagen et al. [60]).

III.5.1 - ANALOGIA COM A TERMODINAMICA: OS QUATRO PRINCÍPIOS DA FÍSICA DOS BURACOS NEGROS

Nós explicitaremos aqui a forte analogia entre a física dos processos envolvendo buracos negros e a termodinâmica ordinária. Construiremos os análogos para entropia e temperatura de um buraco negro girante e carregado, cujo horizonte se localiza em r_+ , onde:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}; \quad a = L/M. \quad (\text{III.22})$$

Nesse caso conhecemos a relação entre os parâmetros L , M e Q e a área da superfície do BN de Kerr-Newman:

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2) = 4\pi [(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2})^2 + a^2]. \quad (\text{III.23})$$

Podemos assim procurar uma expressão para o BN análoga à expressão termodinâmica:

$$dE = TdS - PdV. \quad (III.24)$$

Isolando a massa em (III.23), vem:

$$M = [A/16\pi + 4\pi L^2/A + Q^2/2 + \pi Q/A]^{1/2}. \quad (III.25)$$

Diferenciando essa relação, podemos escrever (ver p.e. Smarr [95], Christodoulou [23]):

$$dM = \Theta dA + \Omega dL + \Phi dQ, \quad (III.26)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Theta &= (1/32\pi - 2\pi L^2/A^2 - \pi Q^2/A^2), \text{ ou} \\ \Theta &= (r_+ - M)/2A = \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}/2A; \\ \Phi &= (Q/2 + 2\pi Q^3/A) = 4\pi Qr_+/A; \\ \Omega &= 4\pi L/A = L/2Mr_+. \end{aligned} \quad (III.27)$$

A expressão $\Omega dL + \Phi dQ$ em (III.26) é a análoga de $-PdV$ em (III.24), e representam o trabalho feito sobre o BN por um agente externo que aumenta o momento angular do BN por dL e sua carga elétrica por dQ . As quantidades Ω e Φ representam a velocidade angular e o potencial elétrico do BN, respectivamente. A equação (III.26) comparada com (III.24) também sugere que a área A pode ser um múltiplo da entropia termodinâmica S , e que Θ seja o análogo da temperatura termodinâmica T (visto que, depois de (III.27), Θ é não negativa exatamente como T).

Na verdade, a função Θ que aparece em (III.26) é um múltiplo da "gravidade superficial" χ do BN (ver p.e. Badeen, Carter and Hawking [8]):

$$\Theta = \chi/8\pi.$$

(III.28)

A gravidade superficial pode ser definida como segue (ver Bardeen et al. [8] e Wald [99]). Um buraco negro estacionário admite um vetor de Killing K que é normal ao seu horizonte:

$$K = E_t + \Omega_H E_\varphi,$$

(III.29)

onde E_t é o vetor de Killing tipo-tempo translacional (estacionário) e E_φ é o vetor de Killing axial (rotacional). A quantia Ω_H é chamada de velocidade angular do horizonte de eventos: ela é constante no horizonte (ver Carter [20]) conforme a fórmula (III.27d). Visto que o horizonte é uma superfície nula e K é normal ao horizonte, nós temos: $K.K=0$ no horizonte. Então $\text{grad}(K.K)$ também é normal ao horizonte, de forma que existe uma função escalar χ tal que:

$$\text{grad } K.K = -2 \chi K, \quad (\text{no horizonte}).$$

Ou, em termos das componentes,

$$(K^\nu K^\nu)_{;\mu} = -2 \chi K_\mu.$$

(III.30)

Pode-se obter uma forma mais explícita para a gravidade superficial χ (ver Wald [99]):

$$\chi^2 = - (K^\mu{}_{;\nu}) (K_\mu{}^{;\nu}) / 2$$

ou ainda,

$$\chi^2 = \lim [- (K^\nu K^\sigma{}_{;\nu}) (K^\mu K_{\sigma;\mu}) / K^\alpha K_\alpha],$$

(III.31)

onde "lim" significa que devemos tomar o limite quando nos aproximamos do horizonte. Agora,

$$a^{\sigma} = (K^{\nu} K^{\sigma}_{;\nu}) / (-K^{\mu} K_{\mu}),$$

é a aceleração de uma órbita de K . Assim, no caso estático, em que $K = E_t$, o termo $V = \sqrt{-K_{\mu} K^{\mu}}$ é o fator de "red-shift", e Va é a força que deve ser exercida a partir do infinito para manter uma massa unitária de teste em repouso no ponto considerado, onde $a = \sqrt{a^{\sigma} a_{\sigma}}$. Logo, $\mathcal{K}$ é o valor limite dessa força no horizonte: é a gravidade superficial do buraco negro. Note-se que a é a força exercida localmente, e torna-se infinita no horizonte. Para um BN estacionário $\Omega_H \neq 0$, e uma partícula de teste não pode ser mantida estacionária com relação ao infinito próximo ao horizonte; mas $\mathcal{K}$ é ainda referido como gravidade superficial.

Para um buraco negro de Kerr carregado, a gravidade superficial é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} / [2M(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2] = \\ \mathcal{K} &= 4\pi (r_+ - M) / A, \end{aligned} \quad (III.32)$$

que, comparada com a equação (III,27a), dá exatamente a eq. (III.28).

Pode ser mostrado que para um buraco negro estacionário a gravidade superficial é constante no horizonte (cf. eq. (III.32), ver também Carter [20], Hawking [46], Wald [99], Badeen et al. [8]).

Nós temos encontrado, assim, pelo menos três princípios da física dos BN que são muito fortemente análogos aos princípios da termodinâmica:

O Princípio Zero: A gravidade superficial χ de um buraco negro estacionário é constante sobre o horizonte;

O Primeiro Princípio: Para um buraco negro estacionário vale a relação (III.26) entre a área A e o momento angular L do horizonte, a massa M e a carga elétrica Q do BN:

$$dM = \chi dA/8\pi + \Omega dL + \Phi dQ; \quad (\text{III.33})$$

O Segundo Princípio: A área A do horizonte de eventos de cada buraco negro não decresce com o tempo i.e.:

$$\delta A \geq 0. \quad (\text{III.34})$$

Prosseguindo com a analogia, pode-se postular:

O Terceiro Princípio: É impossível atingir $\chi = 0$ por qualquer processo físico com um número finito de operações.

Esse princípio (ou lei) é bastante "diferente" dos outros, no sentido que não há até o momento uma prova matemática rigorosa para ele. Porém, vemos explicitamente que para um BN estático vale $\chi \sim 1/M$; é portanto impossível atingir $\chi = 0$, pelo menos com um número finito de operações.

Por outro lado, para um BN de Kerr-Newman χ somente vai a zero no caso extremo $M^2 = a^2 + Q^2$. Cálculos explícitos mostram que, quanto mais próximo se chega da relação $M^2 = a^2 + Q^2$, mais difícil ainda é nos aproximarmos um pouco mais (ver Bardeen [7], Christodoulou [23], Wald [98]), em concordância com o Terceiro Princípio da Termodinâmica.

Todavia, o análogo da versão alternativa do terceiro princípio ($S \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$) não é satisfeita na física dos BN, visto que A (o análogo da entropia S) pode permanecer finito, ou mesmo tender a infinito, quando χ (o análogo da temperatura T) tende a zero.

Uma outra razão para acreditar no terceiro princípio da física dos BN (ver Hawking [47]) é que se pudéssemos reduzir χ a zero através de uma sequência finita de operações, então, possivelmente, poder-se-ia prosseguir com o processo um pouco mais, aproximando-se a produção de uma singularidade nua. Se isso acontecer, é quebrada a suposição de predicabilidade assintótica do espaço-tempo, a qual é a base de muitos dos resultados na física dos BN, incluindo o segundo princípio.

A forte analogia entre os princípios da física dos BN, descritos acima, e as leis ordinárias da Termodinâmica é mostrada claramente no quadro abaixo:

Princípio	Termodinâmica	Buracos Negros
Zero	T constante em todo sistema em equilíbrio térmico.	χ constante na superfície de um BN estacionário.
Primeiro	$dE = TdS + PdV + dN.$	$dM = \chi dA/8\pi + \Omega dL + \Phi dQ.$
Segundo	$\delta S \geq 0$ em q/quer processo.	$\delta A \geq 0$ em q/quer processo.
Terceiro	Impossível atingir $T = 0$ num processo físico.	Impossível atingir $\chi = 0$ num processo físico.

A relação expressa no quadro acima parece ser muito mais que uma mera analogia, pois, por exemplo, na expressão para a primeira lei os termos $\Omega dL + \Phi dQ$ são o análogo dos termos de trabalho $-PdV + \mu dN$ (onde μ é o potencial químico). Na verdade o termo ordinário de rotação ΩdL , bem como o termo de energia potencial eletrostática ΦdQ , estariam presentes na expressão do primeiro princípio da termodinâmica ordinária (se eles fossem relevantes). O termo dA aparece no primeiro princípio da física dos BN da mesma maneira que dS aparece na primeira lei da termodinâmica: exceto que é multiplicado por $\chi/8\pi$ em vez de T . Mas, χ pode muito bem desempenhar o papel de temperatura, já que satisfaz propriedades análogas. Além do mais, a área A satisfaz o mesmo princípio que a entropia S .

Contudo, a sugestão mais forte de que as relações entre os princípios (ou leis) dos BN e os princípios da termodinâmica sejam mais do que uma mera analogia, vem do fato que E e M não são, meramente, análogos entre si na formulação do primeiro princípio, mas representam a mesma quantidade física: a energia total ($c=1$).

Tudo isso encorajou os físicos a tentarem formular a termodinâmica dos buracos-negros. Notemos, no entanto, que a temperatura termodinâmica de um BN, de acordo com a relatividade geral clássica é zero absoluto, pois um BN é um absorvedor perfeito mas não emite nada. Parece haver, portanto, uma contradição na analogia descrita acima:

$$E \longleftrightarrow M; \quad T \longleftrightarrow \alpha\chi; \quad S \longleftrightarrow A/8\pi\alpha. \quad (III.35)$$

Se a temperatura termodinâmica do BN for proporcional a χ , então ele deve emitir a radiação característica de um corpo negro a temperatura $\alpha\chi$. Por outro lado, se o buraco negro realmente não emite nada, então $T = 0$, e o conceito de entropia não tem sentido.

III.5.2 - ENTROPIA E INFORMAÇÃO: O PAPEL DA MECÂNICA QUÂNTICA E A RELAÇÃO FORMAL ENTRE ENTROPIA E A ÁREA DE UM BH.

Vamos, então, analisar as analogias (III.35) mais demoradamente. Iniciemos estudando o conceito de entropia. Do ponto de vista da teoria de informação, a entropia S de um sistema está relacionada com a quantidade de informação (não acessível a um observador) contida no sistema (ver Shannon and Weaver [93], Jaynes [53,54] e Davies [25]).

Se um sistema é altamente ordenado, então sua entropia é baixa. Tal sistema requer uma grande quantidade de informação para descrevê-lo, o que equivale a dizer que o sistema tem uma grande quantidade de informação acessível. Isso nos leva à identificação:

Informação $\longleftrightarrow$ Entropia negativa, ou:

Entropia positiva $\longleftrightarrow$ Perda de informação;

$$\Delta S = - \Delta I. \quad (\text{III.36})$$

Quando um sistema torna-se desordenado, sua entropia cresce e seu estado requer menos informação para ser descrito.

Agora, quando um buraco negro é formado pelo colapso gravitacional, pelo "no-hair theorem" ele rapidamente entra num estado estacionário (ou quase-estacionário, como veremos a seguir) caracterizado por apenas três parâmetros: a massa M , o momento angular L e a carga Q . A pergunta é então: Quanta informação foi perdida a respeito do corpo quando do colapso?

Do ponto de vista clássico o corpo que colapsou para dar

origem a um BN poderia ser constituído de um grande número de partículas indefinidamente pequenas: por exemplo fótons e neutrinos de energia arbitrariamente baixa. Assim, a informação perdida é muito grande, essencialmente é ilimitada, resultando uma entropia que tende a infinito. Dessa forma o conceito de entropia S_g de um buraco negro não teria sentido, e a temperatura T_g , que é definida por:

$$1/T_g = [\partial S_g / \partial M]_{L,Q} , \quad (III.37)$$

seria identicamente nula.

Porém, se considerarmos a granulidade da matéria e os efeitos quânticos, a situação se modifica grandemente. Por exemplo, nós não podemos escolher partículas de energia arbitrariamente pequena para contruir o BN, por causa da relação entre energia e comprimento de onda compton:

$$E = mc^2 = \hbar c / \lambda_c , \text{ ou: } m = E = \hbar / \lambda_c \quad (c=1), \quad (III.38)$$

e do princípio de incerteza.

Num extremo, o comprimento de onda λ_c tem que ser menor que o tamanho do BN se quisermos tratar a partícula de energia E (e massa m) como sendo localizada no interior do BN. Escolhendo $\lambda_c \approx 2M$ (raio de um BN de Schwarzschild) obtemos um mínimo para a massa relativística da partícula, da ordem de $\hbar/M$. Então, o número máximo de tais partículas necessárias para construir um BN de massa M é $N \approx M/m \approx M^2 / \hbar$. Atribuindo em torno de um "bit" de informação para cada partícula que tomou parte no colapso, podemos então estimar a entropia como sendo:

$$S_g = -\Delta I = \alpha k M^2 / \hbar, \quad (III.39)$$

onde k é a constante de Boltzmann, e α é um número puro, da ordem da unidade, a ser calculado a partir da teoria quântica.

Visto que, para um BN de Schwarzschild, vale: $A = 16\pi M^2$, vem que:

$$S_g = \alpha k A / 16 \pi \hbar \quad (III.40)$$

e,

$$1/T_g = 2\alpha k M / \hbar,$$

ou seja:

$$T_g = \hbar / 2\alpha k M = 2\hbar \chi / \alpha k, \quad (III.41)$$

onde $\chi = 1/4M$ é a gravidade superficial do BN de Schwarzschild.

Obtivemos, então, através de uma análise quântica, que S_g é proporcional a A , e T_g é proporcional a χ , conforme previsto pelas "leis" clássicas da física dos BN.

Porém, o que essa entropia S_g e essa temperatura T_g significam fisicamente? Atribuir uma temperatura a algum sistema implica que ele pode estar em equilíbrio térmico com um reservatório de calor que o circunde. Para isso, um BN deveria emitir calor na mesma razão que ele o observe. Além do mais, se um BN pode emitir energia, sua massa M pode diminuir e assim também sua área A , e consequentemente sua entropia S_g [cf. eq. (III.40)], violando a segunda lei da física dos BN.

Mas a diminuição de S_g é aceitável se a entropia S_m da vizinhança aumentar: é necessário então encontrar um segundo princípio generalizado, que inclua buracos negros e a matéria ordinária situada na vizinhança. Isto é, precisamos mostrar que $S_g + S_m$ nunca decrece com o tempo (S_m sendo a entropia da matéria e radiação fora do BN).

Agora, dada a entropia de um sistema como função da energia E , e dos vários outros parâmetros macrocópicos do sistema ($V, N, \dots$),

pode-se definir a temperatura como $T^{-1} = (\partial S / \partial E)_{V, N, \dots}$. Assim, define-se a temperatura de um BN conforme a eq. (III.37).

$$T_g^{-1} = \partial S / \partial M_{h,g} . \quad (\text{III.37a})$$

O segundo princípio generalizado é então equivalente ao requerimento que o calor não possa "fluir" de um sistema "mais frio" para um sistema "mais quente".

Consideremos uma situação em que o BN esteja envolto por uma radiação de corpo negro a temperatura T_m . Para qualquer T_m não nulo, haverá algum acréscimo dessa radiação (de partículas com massa de repouso qualquer) para o interior do BN. Se $T_m > T_g$, segue da definição de temperatura que o decréscimo em S_m , causado pelo acréscimo de radiação no interior do BN, é menor que o acréscimo em S_g ; e o segundo princípio generalizado vale. Porém, se $T_m < T_g$, o acréscimo de radiação no interior do BN viola o segundo princípio. Nós temos, no entanto, duas maneiras de resolver o problema:

- a) T_g é identicamente nulo. Nesse caso S_g é infinito e o conceito de entropia de um BN é sem sentido;
- b) O BN deve emitir radiação térmica com alguma temperatura não nula.

O primeiro caso é o que ocorre numa teoria puramente clássica, como já mencionamos, na qual o BN pode absorver mas não emitir. Porém, levando em consideração efeitos quânticos, Hawking [48,49] mostrou que os BN realmente emitem radiação térmica a uma temperatura T_g (ver também Hartle and Hawking [43], Page [65], Gerlach [39]), dada pela relação:

$$T_g = \hbar \chi / 2 \pi k c, \quad (\text{III.42})$$

onde χ é a "gravidade superficial" do BN.

Este fato permite provar o segundo princípio generalizado e estabelecer que a entropia do BN é finita, conforme obtivemos por considerações heurísticas anteriormente (ver Hawking [50], Davies [26], Frolov [37]). Se $T_m > T_g$, o acréscimo de radiação no interior do BN é maior que sua emissão e o aumento em S_g é menor que a diminuição em S_m ; enquanto que, se $T_m < T_g$, a emissão é maior que a 'absorção', e o acréscimo em S_m é maior que a diminuição em S_g : e o segundo princípio fica válido novamente.

O resultado quântico que a temperatura do BN é $\chi/2\pi$ ($c = 1$, $\hbar = 1$, $k = 1$) permite-nos integrar a primeira lei

$$dM = \chi dA/8\pi + \Omega dL + \Phi dQ \equiv T_g dS_g + \Omega dL + \Phi dQ;$$

ou seja:

$$\chi dA/8\pi = T_g dS_g = \chi dS_g/2\pi.$$

Integrando essa última relação, obtemos:

$$S_g = A/4 + C_0, \quad C_0 = \text{constante}.$$

Se fizermos a hipótese de que $S_g \rightarrow 0$ quando $A \rightarrow 0$, vem:

$$S_g = A/4.$$

Escrevendo nas unidades do SI, vem:

$$T_g = \hbar \chi / 2\pi k c \tag{III.44a}$$

$$d(Mc^2) = \chi c^2 dA/8\pi G + \Omega dL + \Phi dQ \tag{III.44b}$$

$$S_g = kc^3 A/4\hbar G. \tag{III.44c}$$

$$\Phi = Q_{\text{r}} / A \epsilon_0.$$

(III.44d)

Assim, com a mecânica quântica aplicada aos BN, obtém-se uma definição consistente da entropia de um BN como proporcional a área do horizonte de eventos. De certa forma, a mecânica quântica permite provar a proporcionalidade entre a área e a entropia para um BN (fato que é sugerido pela própria relatividade clássica). Mais do que isso, ela permite calcular a constante de proporcionalidade entre A e S_{g} , o que deixa claro que as relações entre a termodinâmica e a física dos BN (que a partir de agora trataremos como termodinâmica dos BN) são muito mais do que meras analogias: Υ e T , ou A e S , definem conceitos físicos idênticos, o de temperatura e o de entropia, respectivamente.

O ESPAÇO-TEMPO NAS VIZINHANÇAS DE UM HÁDRON

IV.1 - INTRODUÇÃO.

Nós vimos, no capítulo I, como é possível geometrizar também o campo forte no espaço interior ao hádron, considerado como um microcosmos similar ao nosso universo. Aqui, tentaremos fazer o mesmo no espaço-tempo usual do nosso cosmos, em particular para as vizinhanças de um hádron; onde na verdade estamos na presença dos dois campos de nosso interesse: o campo gravitacional e o campo forte.

Para poder geometrizar o campo forte nas vizinhanças de um hádron-fonte, nós fazemos uso do fato que, naquela região, um "hádron de teste" (ou um "constituinte" de teste) ainda sofre a influência daquele campo: e dessa forma pedimos mais uma vez que a massa inercial do hádron de teste (que reage às forças fortes) coincida com sua carga forte, e não com sua massa gravitacional.

Nós não nos preocuparemos neste trabalho em como definir a topologia do espaço-tempo como um todo, mas, como observado por Recami [73], podemos adotar, tanto para nosso cosmos como para hádrons, modelos cosmológicos tipo Friedmann. Tais modelos podem ser mergulhados num espaço-tempo chato de cinco dimensões (ver Rosen [85] e Szekeres [96]), e são compatíveis com o princípio de Mach (Raine [71]). Pode-se

dessa forma considerar as partes espaciais do cosmos e hádrons como mergulhados num espaço chato quadri-dimensional V (além do tempo). Intuitivamente, consideram-se então as interseções da parte espacial dos hádrons com a parte espacial do universo; essas interseções são superfícies bi-dimensionais ordinárias (p.e. superfícies esféricas). São a essas "interseções" que chamaremos, de agora em diante, simplesmente de "hádrons".

Aqui, usaremos os resultados do capítulo I para tentarmos fazer a "geometrização" do campo forte no espaço-tempo exterior às superfícies esféricas que mencionamos acima. Isto é, ainda usando os métodos da relatividade geral, em especial utilizando os estudos feitos no capítulo II, estudaremos as propriedades do espaço-tempo nas vizinhanças de um hádron, como observado em nosso espaço; onde procuraremos dar uma interpretação geométrica 'simultânea' para os campos forte e gravitacional.

IV.2 - AS EQUAÇÕES DE CAMPO NAS VIZINHANÇAS DE UM HÁDRON.

Precisamos, antes de mais nada, encontrar "novas" equações de campo que sejam válidas (em nosso espaço-tempo usual) na presença de matéria com ambas as massas (ou cargas): carga gravitacional e carga forte. Tais equações somente serão diferentes das equações de Einstein usuais nas vizinhanças muito próximas ao hádron (onde o campo forte se faz sentir): e assim possivelmente em distribuições de maté-

ria a altas densidades. Na procura por essas novas equações de campo procederemos heurísticamente: vimos que a "curvatura" (ou melhor a métrica) do espaço-tempo interior ao hádron é determinada pela distribuição de matéria forte e pela constante cosmológica forte (ou constante hadrônica) λ , conforme equações (1.24). Em nosso cosmos, obviamente, o hádron influencia a métrica g do espaço-tempo através de sua massa, conforme as equações de Einstein, gerando um campo métrico gravitacional e que é aproximadamente "chato" i.e., $e \approx \eta$, que em coordenadas adequadas pode ser posta na forma: $\eta = \text{diag} (1, -1, -1, -1)$. Porém, pela nossa teoria o hádron-fonte deve influenciar, e de um modo muito mais intenso, o espaço-tempo na sua vizinhança através de sua carga forte total g e da constante hadrônica λ , gerando um campo tensorial forte s . Todavia, essa influência deve ser de maneira tal que λ e g somente contribuam para distâncias espaciais muito pequenas do hádron. Ou seja, na métrica total, que chamamos g , λ e g devem aparecer somente em termos que se anulem rapidamente para grandes distâncias espaciais do hádron.

O fato que nós estamos na presença de dois campos métricos poderia sugerir desenvolver uma teoria do tipo da última "teoria bi-métrica" da gravitação de Nathan Rosen [86,87,88,89]. Nós desejamos, porém, considerar os nossos dois campos métricos como constituindo uma única métrica a qual tenha sentido físico direto: uma métrica total g , e tratá-las de maneira compacta e "simultânea" através de uma única equação de campo, a qual generalize a eq. de Einstein. Além disso, a nossa abordagem é uma "bi-scale theory": uma teoria com duas escalas; e dois tipos de partículas são considerados: (a) um tipo que carrega somente massa gravitacional, com fator de escala intrínseco $\alpha = 1$, e que está sujeita somente ao campo gravitacional e ; (b) e outro tipo que carrega carga forte (além de massa gravitacional), com um

fator de escala intrínseco $\alpha \approx 10^{-41}$, e que está sujeita também ao campo forte g (cf. capítulo I: ver também, p.e., Caldirola et al. [13], Reami [67] e suas referências). As partículas do segundo tipo são, naturalmente, os hádrons, e é a eles que a presente teoria se aplica.

Vamos analisar nosso problema um pouco mais a fundo. No que segue, vamos supor que o hádron-fonte tenha simetria esférica, ou aproximadamente esférica, de forma que as distâncias espaciais possam ser representadas por uma coordenada radial r , sendo que assumiremos o hádron centrado em $r = 0$. Consideremos então um hádron-fonte fixo e um outro hádron (ou constituinte) de teste movendo-se livremente [ambos, naturalmente, no espaço-tempo ordinário do nosso cosmos]. Quando a partícula de teste está muito longe do hádron-fonte ($r \gg 1$ fm), ela não percebe a existência deste: tal fato nos diz que a mesma sentirá somente o campo e , seguindo geodésicas determinadas somente por e . Por outro lado, muito próximo ao hádron ($r \approx 1$ fm), a partícula de teste seguirá as geodésicas determinadas pela métrica total g ; mas, na verdade, nesse caso a métrica total praticamente coincide com a métrica forte g , uma vez que a massa gravitacional do hádron e a constante cosmológica Λ são desprezíveis frente a massa forte g e a constante hadrônica λ .

Assim, pelas argumentações dos últimos três parágrafos, vemos que pode-se escolher uma métrica forte g que satisfaça as seguintes condições:

$$1) \quad g \longrightarrow \eta, \text{ para } r \gg 1 \text{ fm ('longe' do hádron);} \quad (\text{IV.1a})$$

$$11) \quad g \longrightarrow g, \text{ para } r \lesssim 1 \text{ fm (muito próximo ao hádron).} \quad (\text{IV.1b})$$

Essa escolha se justifica pelo fato que muito longe do há-

dron-fonte devemos ter somente a métrica gravitacional determinada pelas equações de Einstein (como já dissemos): o que é implicado pela condição (IV.1a); enquanto que aproximando-se do hádron as propriedades do espaço-tempo tendem a depender unicamente das grandezas "fortes" associadas ao hádron-fonte.

Devemos escrever, então, equações de campo que sejam geralmente covariantes, compatíveis com as condições (IV.1a) e (IV.1b) e que na aproximação linear produzam equações de campos tensoriais que possam descrever partículas de spin 2 conforme equações de Fierz-Pauli [34].

Portanto, para descrever o nosso espaço tempo na presença dos dois campos métricos tensoriais g e s , propomos as seguintes equações de campo:

$$R + \lambda s + \Lambda g = -k_0 (S - gS/2 + GT - gGT/2), \quad (IV.2)$$

onde $k_0 = -8\pi/c^4$, S é o tensor da matéria forte (assim como T pode ser chamado de tensor de matéria gravitacional); s é a métrica forte e pode ser pensada como a contribuição para a métrica total devido a presença da carga forte dos hádrons, e deve satisfazer as condições (IV.1).

Note-se explicitamente que as nossas eqs. de campo (IV.2) valem quando a partícula de teste é uma partícula hadrônica (dotada de cargas seja gravitacional, seja forte). No caso de uma partícula de teste que carrega somente massa gravitacional, as nossas equações se reduzem àsquelas de Einstein.

Consideremos agora o caso mais relevante para nós, isto é, aquele das vizinhanças de um hádron fonte. Nessa situação podemos desprezar, como já dissemos, os termos Λg e GT , e assim, nossas equações

resultam:

$$R + \lambda s = -k_0 (S - gS/2), \quad (IV.3)$$

as quais podem também ser postas na forma:

$$R - gR/2 + \lambda F = -k_0 S, \quad (IV.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} F &= s - gs/2, \\ s &= s_{\mu}^{\nu} = g^{\mu\nu} s_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (IV.5)$$

As equações (IV.3)-(IV.4) são formas canônicas das nossas novas equações de campo, onde com relação a elas podemos fazer a seguinte observação: Se a constante λ aparecesse multiplicando g o cosmos inteiro colapsaria para distâncias da ordem de 1 fm, pois as equações (IV.3) se reduziriam, essencialmente, às eqs. (I.24). Ao contrário, podemos esperar que o termo λs nos garanta que somente o campo s colapse para dimensões da ordem de 1 fm, de forma que as condições (IV.1) (juntamente com a definição de vácuo que daremos a seguir) nos assegurem que λ não influencie o espaço-tempo para distâncias muito maiores que 1 fm. Com isto, para distâncias muito grandes do hádron nós recuperamos, novamente, as equações de Einstein.

Note-se, no entanto, que as eqs. (IV.3) não são as únicas compatíveis com nossas exigências, em especial o tensor s pode ter várias definições. Para uma definição alternativa que foi proposta inicialmente por Caldirola et al. [13] ver o apêndice B.

Para mais esclarecer o que falamos e para justificarmos melhor as escolhas (IV.1) e (IV.3), vamos procurar soluções dessas equações e interpretá-las adequadamente.

IV.3 - APROXIMAÇÃO LINEAR E O VÁCUO PARA AS VIZINHANÇAS DE UM HÁDRON

Vamos considerar aqui a condição (IV.1a), onde $s \longrightarrow \eta$; ou seja: queremos encontrar a métrica total g na vizinhança de um hádron, mas suficientemente longe dele, de modo a podermos considerar o campo forte como suficientemente "fraco", e a poder adotar a aproximação linear das nossas equações. Nessa situação, a métrica g pode ser considerada como a simples soma:

$$g = (e + s)/2, \quad \text{com } e \cong \eta, \quad (IV.6)$$

onde o coeficiente $(1/2)$ é um "fator de normalização" escolhido de forma a obtermos $g \cong \eta$ quando $e \longrightarrow \eta$ e $s \longrightarrow \eta$.

A métrica forte, por sua vez, pode ser escrita na forma:

$$s \cong \eta + f, \quad (IV.7)$$

onde f é uma perturbação de primeira ordem em relação a η , tal que $s \longrightarrow \eta$ para grandes distâncias (tipo-espaco) do hádron (p.e., $r \gg 1\text{fm}$).

Dentro desse limite, e com a escolha (IV.6), é óbvio que podemos tomar também a métrica total g da mesma forma (IV.7). Na verdade, segue das equações (IV.6) e (IV.7) que:

$$g \cong \eta + f/2, \quad (IV.8)$$

onde $f/2$ é ainda, obviamente, uma perturbação de primeira ordem em η .

Vale repetir que a escolha (IV.6) é justificada (nesse limite) porque podemos linearizar as equações de campo (IV.3), e faz sen-

tido então tomar a métrica total como a soma de duas partes: uma sendo a métrica gravitacional $g \approx \eta$ e a outra sendo a forte $g \approx \eta + f$. Em vista disso a métrica total vem a ser a soma (aproximadamente) da métrica chata (η), mais uma perturbação ($f/2$) devida exclusivamente ao campo forte.

Na aproximação linear, ou de campo fraco, que estamos tratando mostra-se que em primeira ordem em $f/2$ e suas derivadas vem (ver p.e. Rindler [81] e apêndice A):

$$R = \square(f/2)/2, \quad (IV.9)$$

onde $\square$ é o operador D'alambertiano ($\equiv \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$). Com as condições:

$$(\mathfrak{F}_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu \mathfrak{F}^\alpha{}_\alpha/2)_{;\nu} = 0, \quad (IV.9a)$$

onde a vírgula representa a derivada parcial ordinária.

Com isso, as equações (IV.3) resultam em:

$$\square f + 4\lambda(\eta + f) = -4k_0(S - \eta S/2),$$

ou seja,

$$\square f + 4\lambda f = -4k_0(\tilde{S} - \eta \tilde{S}/2), \quad (IV.10)$$

onde

$$\tilde{S} = S - \lambda\eta/k_0 \quad (IV.11)$$

Nós falamos anteriormente que as equações de campo em sua aproximação linear devem reduzir-se às equações para um campo tensorial. Agora, "no vácuo" as equações (IV.10) resultam:

$$\square f + 4\lambda f = 0.$$

(IV.12)

As equações (IV.12) descrevem um campo tensorial massivo f com 10 componentes, visto que f é simétrico. Contudo, as condições (IV.9a) eliminam 4 dessas componentes, restando portanto ainda 6 componentes independentes. Se o "termo de massa" 4 não estivesse presente, então as equações (IV.13) seriam invariantes frente a transformação de gauge: $f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu;\nu} - \epsilon_{\nu;\mu}$ (ver o apêndice A), o que eliminaria mais quatro das seis componentes de f , restando somente duas componentes independentes e fisicamente significantes.

Todavia, na presença do termo de massa, a invariança de gauge é quebrada e restam ainda seis componentes que devem ter um sentido físico direto. Elas são as componentes que por intermédio do processo de quantização dão origem a partículas de massa $m = 2\hbar\sqrt{\lambda}/c$, em estados de spin $\pm 2, \pm 1, 0$ (como componentes do estado de spin 2), e um estado verdadeiramente escalar (com spin 0) o qual pode ser eliminado com a condição:

$$f = g^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = 0. \quad (IV.13)$$

Porém, em geral a condição (IV.13) não é satisfeita (ver p.e. Sivaram e Sinha [59]), e continuamos com seis componentes de f independentes e que portanto devem ter sentido físico direto: os cinco estados relativos ao spin 2, mais a componente escalar.

Vamos agora, em conexão com as equações (IV.10) e (IV.11), discutir a definição de vácuo para as equações (IV.3).

No capítulo I mencionamos o fato que a definição usual de vácuo $T = 0$ não era conveniente para o caso dos hádrons (quando analisados do "ponto de vista externo"), visto que mesmo com $S = 0$ ($T = 0$)

as equações (1.24) ainda descrevem micro-cosmos com um escalar de curvatura $R = 2$: o que de certa forma é equivalente a um micro-cosmos com uma distribuição de massa com densidade constante $\rho = -c^2 \lambda / 8\pi N$. Isso, para um observador externo ao hádron, em nosso espaço, corresponde a uma região do espaço-tempo onde há uma grande densidade de matéria, bem diferente do vácuo que é esperado "macroscopicamente" fazendo $T = 0$.

Essa diferença entre vácuo macroscópico e o vácuo no interior de um micro-cosmos pode ser pensada como dando origem a um "efeito de Arquimedes", o qual faz com que dois constituintes no interior do hádron interajam muito mais fortemente do que se estivessem fora dele, em nosso espaço. Este fato pode ser interpretado dizendo que a massa das partículas é maior no interior do hádron do que em nosso espaço. Para ver isso mais claramente basta considerar a eq. (1.6) (cap. 1), que é obtida a partir de (1.2) com a escolha: $[N] = [G]$ e $N=G=1$. Nesse caso obtemos,

$$g = m/\sqrt{\lambda}.$$

Assim, pode-se dizer que a massa de uma partícula é $1/\sqrt{\lambda}$ ($\sim 10^{20}$) vezes maior no interior do hádron do que fora dele (ver tb. Caldirola et al. [13]).

Dessas considerações é natural, portanto, que o vácuo para as vizinhanças do hádron onde o campo forte ainda se faz sentir (e então, onde o efeito Arquimedes ainda existe), não seja definido simplesmente como $S = 0$.

De fato, enquanto para um observador externo as equações (1.24) exigem que o vácuo para o interior do micro-universo (hádron) seja definido como:

$$S = NT = - \lambda g/k_0, \quad (IV.14)$$

as equações (IV.3) exigem, razoavelmente, que o vácuo para as vizinhanças de um hádron seja definido com $\tilde{S} = 0$, e não com $S = 0$; ou seja (ver também Nugayev [85]):

$$S = NT = - \lambda \eta/k_0. \quad (IV.15)$$

Todos esses resultados serão muito úteis e terão consequências muito importantes quando tratarmos da "termodinâmica dos buracos negros fortes", no capítulo V.

IV.4 - LIMITE ESTATICO E COMPORTAMENTO YUKAWIANO: λ ATRATIVO ($\lambda > 0$).

Vamos agora encontrar soluções para (IV.12). Para isso, tomemos e.g. um sistema de referência fixo no hádron-fonte, e vamos tratá-lo como uma partícula puntual localizada em $r=0$. Assim o problema é estático e tem simetria esférica; logo, podemos tomar $\tilde{S}$ (e não S) na forma:

$$\tilde{S} = \text{diag} (c^4 \rho, 0, 0, 0) \quad (IV.16)$$

e que produz (ver apêndice A):

$$\tilde{S} - \eta \tilde{S}/2 = \text{diag} [c^2 \rho(c^2, 1, 1, 1)/2] \quad (\text{IV.17})$$

onde ρ é a densidade de matéria forte [$\rho = g \delta(r)$].

Como o campo é estático, resulta $\square f = -\nabla^2 f$, e as equações (IV.12) podem ser escritas como:

$$\nabla^2 f - 4\lambda f = 4k_c (\tilde{S} - \eta \tilde{S}/2), \quad (\text{IV.18})$$

o que produz, depois da equação (IV.17):

$$f_{cc}/c^2 = f_{11} = f_{22} = f_{33},$$

$$\nabla^2 f_{cc} - 4\lambda f_{cc} = 16\pi \rho(r).$$

Assim,

$$f_{cc} = -4g \exp[-m_0 r]/r, \quad (\text{IV.19})$$

onde $m_0 \equiv 2\sqrt{\lambda}$, e g é a carga forte do hádron considerado, em unidades adequadas.

Se indentificarmos $m_0 \equiv m_\pi c/\hbar$, encontramos:

$$m_\pi = 2\hbar\sqrt{\lambda}/c \equiv m_\pi. \quad (\text{IV.20})$$

Dessa forma, lembrando que no caso ordinário para campo fraco e baixas velocidades (i.e., no limite estático) podemos escrever:

$$g_{cc} \cong (1 + 2V/c^2)c^2. \quad (\text{IV.21})$$

Mas, usando (IV.8), vem:

$$g_{00} = c^2 + f_{00}/2,$$

o que produz um campo escalar $V = f_{00}/2$ com o comportamento Yukawiano correto, para $\lambda > 0$:

$$V = -g \exp[-m_0 r]/r. \quad (IV.22)$$

Com isso, obtivemos também o importante resultado, nesse caso simples, que todas as componentes de f vão realmente a zero quando $r \gg 1$ fm, conforme pedimos em (IV.1a).

IV.5 - LIMITE ESTATICO E COMPORTAMENTO YUKAWIANO: λ REPULSIVO ($\lambda < 0$).

Na seção (IV.4) mostramos que nossas equações de campo linearizadas produzem corretamente, no limite estático, o potencial yukawiano. Contudo, isso somente acontece se $\lambda > 0$ nas eqs. (IV.3); o que parece limitar a constante hadrônica a assumir somente valores positivos.

Vale observar no entanto, que nossa teoria não fixa, a priori, um sinal para λ ; ao contrário, as dilatações globais do espaço-tempo introduzidas no capítulo I deixam invariantes, obviamente, o sinal de todas as grandezas "iniciais". Assim, se o espaço-tempo inicial admite uma constante cosmológica Λ repulsiva, o mesmo acontece com o espaço-tempo contraído. Dessa forma, nada impede a princípio que se

possa associar aos hádrons constantes hadrônicas tanto atrativas [conforme seção (IV.4)], quando repulsivas.

Para esclarecer esse fato vamos retomar as equações (IV.6) e (IV.7):

$$g = (\bullet + s)/2; \quad \text{com } \bullet \equiv \eta, \quad (\text{IV.6a})$$

$$s \equiv \eta + f. \quad (\text{IV.7a})$$

Não há nenhum fato que impõe a escolha do sinal "mais" nessas duas equações; ou seja, em vez da métrica total ser "definida" como a soma de $\bullet$ e s podemos escolher que g seja a diferença:

$$g = 2\bullet - s, \quad (\text{IV.23})$$

juntamente com a escolha:

$$\bullet \equiv \eta - f', \quad (\text{IV.24})$$

o que produz:

$$g \equiv \eta + f'. \quad (\text{IV.25})$$

Vale observar, novamente, que os coeficientes numéricos em (IV.23) e (IV.24) são escolhidos de forma a obtermos $g \equiv \eta$ quando $\bullet$ e $s \longrightarrow \eta$, da mesma maneira que na seção (IV.3).

Note-se que se fizermos $f' = f/2$ a escolha final (IV.25) resulta idêntica ao caso descrito na seção (IV.3) (cf. eqs. [IV.8]). Assim, seguindo o mesmo procedimento que naquele caso vem:

$$R \cong \square f' / 2; \quad (IV.26)$$

$$(f'_{,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} f'_{,\nu} / 2)_{,\nu} = 0. \quad (IV.26a)$$

Então, levando as equações (IV.24) e (IV.26) nas eqs. (IV.3) obtemos:

$$\square f' - 2\lambda f' = -2k_0 (\tilde{S} - \eta \tilde{S}/2) \quad (IV.27)$$

onde, da mesma forma que antes, temos:

$$\tilde{S} = S - \lambda \eta / k_0. \quad (IV.28)$$

Agora, para encontrar o limite estático procedemos da mesma forma que na seção (IV.4), onde tínhamos:

$$\tilde{S} = \text{diag} (c^4 \rho, 0, 0, 0) \quad (IV.29)$$

Também com f' aproximadamente estático vale $\square f' \cong -\nabla^2 f'$; então obtemos as seguintes equações (análogas às eqs. [IV.18]):

$$\nabla^2 f' + 2\lambda f' = 2k_0 (\tilde{S} - \eta \tilde{S}/2) \quad (IV.30)$$

Vemos, assim, que a única diferença importante entre (IV.30) e (IV.18) é o sinal em frente ao termo contendo λf . Dessa forma, enquanto as eqs. (IV.18) produzem o comportamento Yukawiano correto do potencial para λ atrativo ($\lambda > 0$); as equações (IV.30) produzem o potencial de Yukawa correto para λ repulsivo ($\lambda < 0$), uma vez que (IV.25) e (IV.8) com $f' = f/2$ são idênticas. Na solução da equação (IV.30) encontramos $m_0 = \sqrt{2\lambda}$ [e não $m = 2\sqrt{\lambda}$ como em (IV.19)].

Segue dessa discussão que podemos associar aos hádrons tanto $\lambda > 0$ quanto $\lambda < 0$, simplesmente mudando as escolhas: das eqs. (IV.6a) e (IV.7a) se $\lambda > 0$, para as eqs. (IV.23) e (IV.24) se $\lambda < 0$.

Esse fato sugere que podemos (teoricamente) obter duas famílias de hádrons: uma para $\lambda > 0$ e outra para $\lambda < 0$. Essas duas famílias poderiam ser: i) a família dos mésons e; ii) a família dos bárions. Para mais detalhes a respeito desse fato, ver seção (IV.6) e o cap. V.

IV.6 - O LIMITE DE CAMPO FORTE.

Conforme já mencionamos, uma partícula de teste que carrega carga forte (além de carga gravitacional) segue geodésicas no espaço-tempo curvo, cuja curvatura é determinada pela distribuição de matéria através de sua carga forte e de sua massa. A idéia de se geometrizar o campo forte faz pensar, como já dissemos, na existência de duas métricas. Vale porém ressaltar, uma vez mais, que o sentido físico está com as linhas geodésicas que são as trajetórias de partículas livres no espaço-tempo. Estas linhas geodésicas, quando representam o movimento de um hádron de teste (o qual sente o campo forte e o campo gravitacional), definem uma única métrica, que chamamos de métrica total g desde o começo. É essa métrica que tem sentido físico direto. Somente de maneira aproximada, quando $r \rightarrow r_h + \epsilon$, se podem aproximar as geodésicas de g com as de g . Quando se consideram partículas de teste sem carga forte, então nós caímos no caso ordinário da RG usual. Assim,

vê-se que é natural que muito longe do hádron-fonte a métrica total coincida com a métrica gravitacional; e que muito próximo dele a métrica total "se confunda" com a forte, conforme foi escolhido nas relações (IV.1).

Já vimos que do "ponto de vista externo" um hádron é a região interior a uma superfície bi-dimensional (tipo-espaco) fechada $\mathcal{S}$. Vimos também, no Capítulo I, que o espaço-tempo interior a essa superfície (que chamamos de hádron, para simplificar) é descrito pela métrica forte $s = g$. Por outro lado, nas vizinhanças do hádron (em nosso espaço) temos duas métricas (e e s). Porém, se assumirmos a condição (IV.1b), vemos que muito próximos à superfície $\mathcal{S}$ teremos, novamente, apenas uma métrica, a métrica forte $s \cong g$. De fato, pra $r \rightarrow r_h$, onde r_h é o raio que identifica a superfície $\mathcal{S}$ (i.e., r_h é o raio do hádron: sempre pensando nele como tendo simetria esférica, ou aproximadamente esférica), o campo forte é dominante e deve determinar completamente as características do espaço-tempo. Isso faz plausível a condição (IV.1b). Agora, usando essa condição nas equações (IV.3) resulta:

$$R + \lambda g = -k_0(S - gS/2). \quad (IV.31)$$

A superfície $r=r_h$ que limita o hádron em nosso espaço, parece ser uma superfície de descontinuidade, pois ela separa uma região interior [$r < r_h$, descrita pela interação forte, pela constante hadrônica λ , e com uma distribuição de carga forte ρ_g] de uma região exterior [$r > r_h$, descrita por interações gravitacionais, pela constante cosmológica Λ , e com uma distribuição de massa gravitacional ρ_m - além de λ , N e ρ_g , nas vizinhanças de r_h]. Na figura (IV.1), a superfície $\mathcal{S}$, que é identificada por $r = r_h$, é o conjunto dos pontos de "descontinuidade" do espaço-tempo que separa o interior (caracterizado por

λ , N e β_g) do exterior do hádron (caracterizado por Λ , G e β_m).

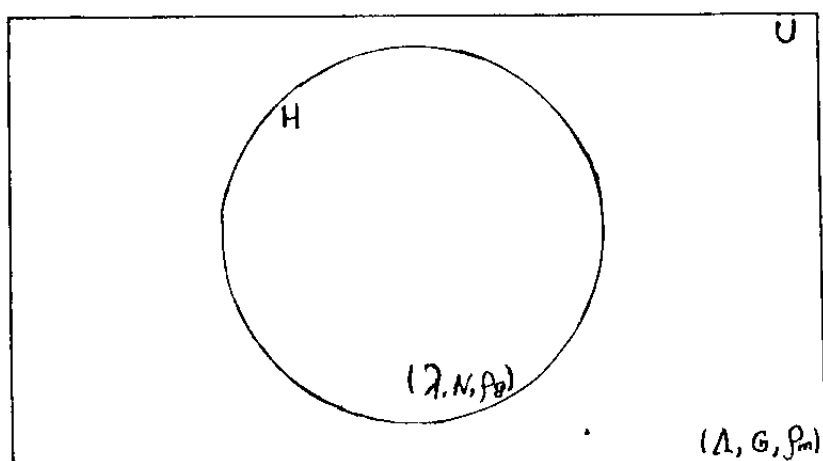


FIGURA (IV.1)

A superfície $\mathcal{S}$ que separa o interior do hádron do nosso espaço.

é razoável, então, supor que sobre a superfície $\mathcal{S}$ e nas vizinhanças dela não tenhamos uma distribuição de massa (ou carga forte) estável, de forma que essa superfície não pode conter partículas massivas estacionárias; ou seja, $S = 0$ em $\mathcal{S}$. Além do mais, nós esperamos ser possível encontrar as superfícies como $\mathcal{S}$, a partir das nossas equações de campo. Isto é, através das eqs. de campo (IV.31) devemos poder encontrar o "raio" do hádron.

Para isto nós vamos estudar as soluções de:

$$R + \lambda g = 0, \quad (IV.31a)$$

obtida de (IV.31), fazendo-se $S = 0$.

As soluções exatas mais simples de (IV.31) já conhecidas e de grande importância no presente trabalho serão estudadas a seguir.

IV.6.1 - A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD - DE SITTER: HÁDRONS COMO BURACOS NEGROS FORTES.

Essa solução é do tipo da solução de Schwarzschild com termo cosmológico, cuja métrica nas coordenadas (t, r, θ, φ) é (ver p.e. Rindler [81]):

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(r) dt^2 - 1/F(r) dr^2 - r^2 d\Omega, \\ F(r) &= 1 - 2g/r + \lambda r^2/3, \\ d\Omega &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (IV.32)$$

onde g é a massa forte ($N=1, c=1$) do hádron considerado. No sistema internacional (S.I.), com a escolha [carga forte]=[massa], $g = Ng'/c^2$, onde g' é a carga forte do hádron expressa em Kg.

A solução (IV.32) descreve o espaço-tempo exterior a uma partícula com carga forte g , com simetria esférica, centrada em $r=0$ e com carga elétrica nula. Para o caso de uma partícula carregada (com simetria esférica) com carga Q , devemos considerar a solução de Reissner-Nordström - de Sitter :

$$\begin{aligned} ds^2 &= F_1(r) dt^2 - 1/F_1(r) dr^2 - r^2 d\Omega, \\ F_1(r) &= 1 - 2g/r + Q^2/r^2 + \lambda r^2/3, \end{aligned} \quad (IV.33)$$

onde, no S.I., $Q^2 = Nq^2/4\pi\epsilon_0 c^4$, sendo q a carga elétrica da partícula-fonte medida em Coulomb.

Vale observar, no entanto, que (IV.33) não é solução da eq. (IV.31) (com $S = 0$), mas é solução de:

$$R - gR/2 - \lambda g = -k_0 NE, \quad (IV.34)$$

onde E é o tensor de energia-momento do campo eletromagnético, e não forte.

Vamos estudar primeiramente a métrica (IV.32). Ela apresenta singularidades nos pontos onde $F(r) = 0$. Consideremos então a singularidade em $r=r_3$, onde r_3 é a maior raiz de (para $\lambda > 0$, ou $\lambda < 0$):

$$1 - 2g/r + \lambda r^2/3 = 0. \quad (IV.35)$$

Nós consideraremos neste trabalho somente o maior valor de r onde haja uma singularidade métrica, pois é essa maior raiz que define o horizonte de eventos para o infinito futuro nulo $\mathcal{I}^+$.

A superfície $r=r_3$ define um horizonte de eventos "forte" H_f . Conforme vimos no capítulo II, H_f é uma superfície bi-dimensional ordinária que é semi-permeável para efeitos causais. Isto é, geodésicas tipo-tempo e nulas dirigidas para o futuro podem cruzá-la somente em um sentido. As principais características dos horizontes de eventos já foram estudadas. Vale porém observar, uma vez mais, que a métrica (II.32) [bem como qualquer solução de (IV.31)] é relevante somente para partículas de teste portadoras (também) de carga forte quando estiverem muito próximas do hádron-fonte; assim, o horizonte H_f confina somente objetos hadrônicos (com carga forte não nula).

Logo, a superfície $r=r_3$, sendo uma superfície nula, confina os constituintes no seu interior, e além disso os únicos objetos que podem "morar" em $r=r_3$ são os que seguem geodésicas nulas. Isso implica que realmente $S(\text{matéria}) = 0$ em H_f . Nós vemos então que o horizonte forte H_f é, na verdade, a superfície que separa o hádron do universo externo, a qual pode ser identificada então com a superfície $\mathcal{S}$ da fi-

gura (IV.1).

Observe-se agora que (IV.35) sempre tem uma solução r maior que zero para $\lambda > 0$, a qual fica entre 0 e $2g$, ou seja:

$$\begin{aligned} r &= (X^{-1/2} - X^{1/2}) / \sqrt{\lambda}, \\ X &= -3g\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{9g^2\lambda + 1}. \end{aligned} \quad (IV.36)$$

Para um nucleon ordinário temos: $\lambda \cong 10^{10} \text{ m}^{-2}$; $g \cong 10^{-15} \text{ m}$ (ver Caldirola, Pavšič e Recami [13]); o que produz:

$$r_s \cong 10^{-16} \text{ m} = 1 \text{ fm}. \quad (IV.37)$$

Nós obtemos, então, que o raio do horizonte de eventos que ocorre na métrica (IV.32) é da mesma ordem de grandeza que o raio dos hádrons. Esse fato, juntamente com outros fatos fundamentais (como p. e. o confinamento), sugere que os hádrons possam ser associados a "buracos negros" obtidos a partir das soluções de (IV.31); i.e., hádrons são objetos tipo buracos negros fortes (BNF).

É preciso esclarecer que, por exemplo, o horizonte H_f definido por $r=r_s$, não é um "horizonte cosmológico" no sentido descrito na seção (II.3.1); isto porque a métrica (IV.32) vale somente muito próximo ao hádron, onde $\mu \cong g$. Para distâncias um pouco maiores vale a aproximação feita nas seções (IV.4) e (IV.5), pois o campo forte "cai" muito rapidamente com o aumento de r . Então a métrica no espaço-tempo exterior a um hádron é da forma (ver apêndice A):

$$ds^2 = F(r) dt^2 - 1/F(r) dr^2 - r^2 d\Omega \quad (IV.38a)$$

para $r-r_s \rightarrow 0^+$, e:

$$ds^2 = (1-2g_0 \exp[-m_0 r]/r) dt^2 - (1-2g_0 \exp[-m_0 r]/r) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (IV.38b)$$

para $r \gg r_s$; onde, em geral, $g_0 = g$.

A forma (IV.38b) vale na região onde $2g \exp[-m r] \ll 1$. Agora, para $r = r_s \sim 1$ fm, resulta:

$$2g_0 \exp[-m_0 r]/r \approx 1. \quad (IV.39)$$

Dessa maneira, podemos pensar que a métrica no exterior de um hádron seja da forma (IV.38b) em praticamente todo espaço-tempo (para $r > r_s$); e que em $r = r_s$ a forma válida seja (IV.38a), a qual é a forma que devemos usar para encontrar o raio dos hádrons, pois ela é obtida a partir do limite de campo forte.

Um hádron "estático" (em repouso e sem spin) com carga elétrica q é descrito pela métrica (IV.33). Nesse caso, o horizonte de eventos e , portanto, o raio do hádron é identificado por:

$$1 - 2g/r + Q^2/r^2 + \lambda r^2/3 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda r^4/3 + r^2 - 2gr + Q^2 = 0. \quad (IV.40)$$

Agora, para hádrons ordinários o termo Q é desprezível em relação aos outros (com exceção dos mésons leves — p.e. dos píons, onde Q^2 possivelmente tem relevância). Dessa forma, a raiz positiva de (IV.40) é da mesma ordem de grandeza que a raiz de (IV.35). Isso significa que hádrons sem spin têm praticamente o mesmo raio, não importa se têm carga elétrica ou não.

Para completar as observações a respeito da solução estática

carregada, vale dizer que a métrica para $r > r_g$ nesse caso também é da forma (IV.38b), pois, como já dissemos, podemos desprezar o termo que contém Q^2 .

Obtivemos então que no caso estático (hádron com spin zero) o espaço-tempo exterior ao hádron é do tipo do espaço de Schwarzschild para $r \rightarrow r_h + \epsilon$; mesmo que em geral (para $r > r_h$) em nosso caso a "curvatura" tende a zero mais rapidamente que no caso de Schwarzschild. O mais importante em tudo isso é que o espaço-tempo nas vizinhanças do hádron tem características suficientemente próximas daquelas da região do espaço de Schwarzschild com $r > 2M$. Assim, o diagrama de Penrose da região assintoticamente chata do espaço-tempo exterior a um hádron sem spin é da mesma forma que o diagrama na região assintoticamente chata do espaço de Schwarzschild (região I na figura [III.9]). Então, podemos nos valer das muitas propriedades conhecidas desse espaço-tempo para estudar as propriedades dos hádrons.

É necessário salientar, no entanto, que a região $r < r_h$ para um hádron é muito diferente da região $r < 2M$ do espaço-tempo de Schwarzschild. Por exemplo: um hádron não contém uma singularidade em $r=0$ conforme ocorre para o espaço de Schwarzschild; ou seja, um hádron pode ter uma estrutura interna (ver o capítulo V), enquanto que nada se pode saber a respeito da estrutura interna de um buraco-negro ordinário.

IV.6.2 - A SOLUÇÃO DE KERR - DE SITTER, SEUS HORIZONTES E O RAIO DOS HÁDRONS

Claramente as soluções estudadas na última seção não servem para descrever hádrons com spin diferente de zero. Para isso devemos considerar soluções de (IV.31) que levem em conta o momento angular (ou spin) da partícula fonte e os efeitos da "rotação" dessa fonte no espaço-tempo exterior a ela.

As soluções de (IV.31) que levam em conta esses efeitos são conhecidas como soluções de Kerr - de Sitter; e em coordenadas tipo Boyer-Lindquist (t, r, θ, φ) a métrica é da forma (ver Carter [21]):

$$ds^2 = -Z[dr^2/D(r) + d\theta^2/D(\theta)] - D(\theta) \overset{r \sin^2 \theta}{[a dt - (r^2 + a^2) d\varphi]^2/ZC_-} - D(r)[dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2/ZC_+, \quad (IV.41)$$

onde:

$$Z(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (IV.42a)$$

$$D(r) = (r^2 + a^2)(1 + \lambda r^2/3) - 2gr, \quad (IV.42b)$$

$$D(\theta) = 1 - \lambda a^2 \cos^2 \theta/3, \quad (IV.42c)$$

$$C_{\pm} = 1 - \lambda a^2/3, \quad (IV.42d)$$

sendo que g é a massa forte e ' ga ' o momento angular (spin) L do hádron considerado. No sistema S.I., com a escolha $[g] = [m]$, temos $g = Ng'/c$; $a = L/g'c$ (g' é a carga forte medida em Kg).

A métrica (IV.41) descreve, então, o espaço-tempo no exterior de um hádron com carga forte g e momento angular $L = ga$. O espaço-tempo M associado a métrica (IV.41) tem um horizonte de eventos em r_s (ver capítulo II), onde r_s é a maior raiz positiva de:

$$g^{rr} = 0,$$

ou seja:

$$D(r) = (r^2 + a^2)(1 + \lambda r^2/3) - 2gr = 0. \quad (IV.43)$$

Para $\lambda=0$, (IV.43) tem duas raízes positivas:

$$r_{\pm} = g \pm \sqrt{g^2 - a^2}. \quad (IV.44)$$

Assim, o raio do hádron (do horizonte de eventos) é $r = r_+$. Ocorre que para hádrons pesados o termo $\lambda r_s^2/3$ é, em geral, razoavelmente menor que 1 [p.e. para um nucleon temos $\lambda r_s^2/3 = O(10^{-2})$]; logo a presença dele em (IV.43) não deve modificar muito os valores dados por (IV.44). Isso não é, em geral, verdadeiro para hádrons leves quando $\lambda r_s^2/3$ pode ser da ordem da unidade (p.e. para um píon, $\lambda r_s^2/3 \cong 1$). Agora, para um nucleon comum obtemos que:

$$r_s \cong r_+ \cong 1 \text{ fm}. \quad (IV.45)$$

Encontramos, então, que o raio r_s dos nucleons está muito próximo do seu "raio médio" $\bar{r}$, determinado experimentalmente através de análises de dados experimentais que envolvem a interação forte. Isto é verdadeiro dentro da "margem de erro" devido ao fato que não conhecemos com precisão os valores das constantes N e λ . Naturalmente, nós supomos que o raio r represente o raio efetivo do hádron considerado, mostrado através das interações fortes.

Como já falamos acima, a aproximação (IV.44) não tem validade geral. Dessa forma, um hádron com spin diferente de zero pode, em

geral, ser considerado como um buraco negro forte de Kerr - de Sitter com raio $r=r_+$, a maior raiz positiva de (IV.43).

Para hádrons com carga elétrica não nula, devemos considerar a solução de Kerr - Newman - de Sitter, cuja métrica nas coordenadas (t, r, θ, φ) tem a mesma forma que (IV.41) e (IV.42), apenas com a eq. (IV.42b) substituída por:

$$D(r) = (r^2 + a^2)(1 + \lambda r^2/3) - 2gr + Q^2, \quad (\text{IV.46})$$

onde $Q^2 = Nq^2/4\pi\epsilon_0 c^4$, e q é a carga elétrica do hádron considerado (no sistema S.I.).

Aqui, quando $\lambda r_+^2/3$ é desprezível frente à unidade, resulta que r_+ , o raio do horizonte de eventos que caracteriza o hádron, é $r = r_+$, onde:

$$\begin{aligned} r_+ &= g/C_+ \pm \sqrt{g^2 - (a^2 + Q^2)C_+} / C_+, \\ C &= 1 + \lambda a^2/3. \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

Em geral, um hádron com carga forte g , spin ' ga ' e carga elétrica Q , pode ser associado a um buraco negro forte de Kerr-Newman-de Sitter, cujo raio r_+ é a maior raiz positiva de:

$$D(r) = (r^2 + a^2)(1 + \lambda r^2/3) - 2gr + Q^2 = 0. \quad (\text{IV.48})$$

É importante notar que todos os raios r_+ que definimos acima têm aproximadamente a mesma ordem de grandeza, ou seja, $r \approx 1$ fm.

Devemos observar também que para hádrons de spin 1/2 (ou melhor, para os nucleons) temos:

$$\lambda a^2/3 \approx 10^{-2}.$$

Com isso, podemos desprezar $\lambda a^2/3$ frente a unidade nas eqs. (IV.47) e (IV.48). Nós percebemos, então, que para distâncias espaciais muito próximas de um hádron (especialmente de um bárion), o espaço-tempo tem aproximadamente as mesmas características que o espaço de Kerr (ou de Kerr-Newman) para $r \approx r_+$ (ver capítulo II, fig. [II.12]). Isso não significa que seja assim também para $r \gg r_s$, pois nesse caso deveríamos procurar soluções na aproximação de campo fraco (cf. eqs. [IV.10]), mas sem desprezar o "movimento de rotação" (spin) da fonte.

De qualquer forma, o spin não deve ter influência até distâncias muito grandes do hádron, de maneira que o espaço-tempo para $r \gg r_s$ é assintoticamente chato; sendo que as características dessa região nesse caso são bem próximas das descritas acima para o caso estático da seção (IV.6.1).

O mais importante de tudo o que foi visto acima é o resultado que os hádrons em geral podem realmente ser associados a objetos tipo buracos negros fortes relativos às soluções das eqs. (IV.31). Nós analisaremos com mais detalhes esse fato, e suas consequências, no capítulo V.

Antes de irmos adiante notemos que, em geral, temos o seguinte:

a) Para $\lambda \geq 0$:

a1) Para $g^2 > R_d$:

As duas raízes positivas de (IV.48) r_1 e r_2 ficam entre r_+ e r_- , onde:

$$r_{\pm} = g/C_{\pm} \pm \sqrt{g^2 - (a^2 + Q^2)C_{\pm}} / C_{\pm}; \quad C = 1 + \lambda a^2/3. \quad (IV.49)$$

$$Rd = 8C_{+} \sqrt{Q^2 + a^2}/9.$$

a2) Para $g^2 = Rd$:

Há somente uma raiz $r_0 \equiv r_1 = r_2$.

a3) Para $g^2 < Rd$:

Não há raízes reais positivas e, portanto, não existe um horizonte de eventos.

b) Para $\lambda < 0$ e $C_{+} > 0$:

b1) Para $g^2 > Rd$:

Existem três raízes positivas; uma delas, r_0 , entre 0 e r_{-} , as outras duas, r_1 e r_2 , ambas maiores que (mas muito próximas de) r_{+} , onde $r_{\pm}$ são dados por (IV.49).

b2) Para $g^2 = Rd$:

As duas raízes maiores coincidem: $r_1 = r_2$.

b3) Para $g^2 < Rd$:

Há somente uma raiz positiva em r_0 (próxima a r_{-}).

c) Para $\lambda < 0$ e $C_{+} < 0$:

Há sempre duas raízes positivas entre 0 e r_{+} .

d) Para $\lambda < 0$ e $C_{+} = 0$:

Há sempre uma raiz positiva entre 0 e $(Q^2 + a^2)/2g$.

Das observações dos últimos parágrafos concluímos que podemos separar os hádrons em pelo menos duas classes: a primeira classe (β) com $\lambda > 0$, e a segunda (μ) com $\lambda < 0$.

Agora, se tomarmos $2g \approx 10^{-15} \text{ m}$ como o raio de um hádron de

referência, nós vemos que os hádrons da classe β são caracterizados por um raio que normalmente fica entre $g \cong 0,5 \text{ fm}$ e $2g \cong 1 \text{ fm}$, enquanto que os da classe μ têm raios normalmente menores que $0,5 \text{ fm}$. Isso porém não é regra geral, pois depende do fator $C_+ = 1 + \lambda a^2/3$.

IV.7 - A GRAVIDADE SUPERFICIAL PARA OS BNF

Nós iniciamos observando que pode-se definir a gravidade superficial dos buracos negros fortes de Kerr-Newman-de Sitter, χ_f , da mesma maneira que no caso de Kerr-Newman do capítulo II. Assim, no caso em que $|\lambda r_s^2/3| \ll 0$, encontramos:

$$\chi_f = [g^2 - (a^2 + Q^2)C_+]^{1/2}/r_0^2 C_+, \quad (\text{IV.50})$$

onde,

$$r_0^2 = (a^2 + r_s^2)/C_+, \quad (\text{IV.51})$$

e onde r_s é o raio do horizonte de eventos, que nós escolhemos como sendo a maior raiz de $g^{rr} = 0$.

Para um BNF estático da seção (IV.6.1) a gravidade superficial é definida da mesma forma que no caso ordinário (ver a equação [III.31]); assim obtemos:

$$\chi_f^2 = -\lim (g^{tt}g^{rr}(\partial g_{tt}/\partial r)^2/4). \quad (\text{IV.52})$$

Então, a partir das relações (IV.32) e (IV.33) obtemos, respectivamente:

$$\chi_f^S = (g + \lambda r_s^3/3)/r_s^2 = (1/r_s + \lambda r_s)/2, \quad (IV.53)$$

$$\chi_f^R = (g + \lambda r_s^2/3 - Q^2/r_s)/r_s^2 = (1/r_s + \lambda r_s - Q^2/r_s^2), \quad (IV.54)$$

onde r_s é a maior raiz positiva de $g^{rr}=0$, em cada caso.

Quanto às raízes positivas menores que r_s , nós a princípio não atribuímos nenhum significado especial às mesmas; uma vez que para $r < r_s$ em geral a métrica é diferente, pois não temos mais $S = 0$. Ou seja, o hádron é suposto ter uma estrutura interna, de forma que as equações anteriores (p.e. a eq. [IV.48]) não são válidas para determinar as raízes menores. Mas se $S = 0$ também para r suficientemente menor que r_s , digamos até $r=r_-$ da eq. (IV.49), então essas raízes menores realmente existem e podemos atribuir algum sentido físico também a elas. Todavia, nós não trataremos desse problema aqui.

A fórmula (IV.50) pode ser usada em alguns casos, mas para vermos como a situação se modifica quando o termo $\lambda r_s^2/3$ é importante, consideremos o caso simples seguinte.

Como vimos acima, para $\lambda > 0$ normalmente temos duas raízes, r_1 e r_2 . Consideremos aqui, para simplificar, o caso em que as duas raízes coincidem: $r_1 = r_2 \equiv r_s$, onde

$$\lambda r_s^4/3 + C_+ r_s^2 - 2gr_s + Q^2 + a^2 = 0; \quad C_+ = 1 + \lambda a^2/3. \quad (IV.55)$$

Seja, então, $y_1 = -\lambda r_s^4/3$ e $y_2 = C_+ r_s^2 - 2gr_s + Q^2 + a^2$. Se r_s é único, então y_1 e y_2 são tangentes em r_s , conforme pode ser visto através dos gráficos de y_1 e y_2 , ou seja:

$$2C_+ r_g - 2g = -4 \lambda r_g^3/3.$$

Substituindo em (IV.55) vem:

$$C_+ r_g^2 - 3gr_g + 2(Q^2 + a^2) = 0,$$

cujas soluções (única) é:

$$r_g = 3g/2C_+ = \sqrt{2(Q^2 + a^2)/C_+}. \quad (IV.56)$$

Comparando com o caso onde $|\lambda r_g^2/3| \ll 1$, onde a raiz única é obtida quando $r_g \approx g \approx [(Q^2 + a^2)C_+]^{1/2}$, vemos que o termo $\lambda r_g^2/3$ modifica sensivelmente os resultados.

Note-se que a gravidade superficial, para um buraco negro forte de Kerr-Newman-de Sitter [nas coordenadas (t, r, θ, φ)], é basicamente a derivada de g^{rr} em relação a r . Assim, a gravidade superficial é nula quando o zero de g^{rr} é um dos seus pontos de mínimo ou de máximo.

Além do mais, segue de (IV.50) que para o caso $|\lambda r_g^2/3| \ll 1$ a gravidade superficial é nula quando a raiz de (IV.48) é única. Analogamente, a gravidade superficial de um BNF de Kerr-Newman-de Sitter é nula em geral quando:

$$g^2 = 8C_+ (Q^2 + a^2)/9; \quad (IV.57)$$

ou seja, a gravidade superficial é nula para hádrons que ficam numa trajetória de Regge ($g^2 \approx Q^2 + a^2$).

Esse é apenas um resultado preliminar de uma série de resul-

tados interessantes que obteremos no capítulo V. Em particular, encontraremos que os hádrons da classe μ parecem ser os mésons, enquanto que os da classe β podem ser os bárions.

O resultado que os bárions que ficam numa trajetória de Regge são associados a buracos negros fortes com gravidade superficial nula será muito útil quando tratarmos da termodinâmica dos buracos negros fortes aplicada às partículas elementares (no capítulo V). Lá veremos que também os mésons podem ser BNF com gravidade superficial nula [cf. eqs. (IV.53) e (IV.54)].

A TERMODINÂMICA DOS BURACOS NEGROS FORTES (BNF): POSSÍVEIS APLICAÇÕES

V.1- INTRODUÇÃO

Uma primeira indicação de que os hádrons podem ser considerados como objetos tipo buracos negros, mais especificamente como buracos negros fortes (BNF), foi obtida (ver p. e. Recami [73] e Recami and Castorina [77]) considerando as soluções das equações de Einstein-Yukawa (cf. p.e. Roos [88]), i.e. equações do tipo:

$$R - gR/2 = -k_0 N T_y; \quad k_0 = 8\pi/c^4, \quad (V.1)$$

onde T_y é o tensor de energia-momento obtido a partir do potencial (escalar) de Yukawa

$$V(r) = -g \exp[-m_0 r]/r. \quad (V.2)$$

Para detalhes desse tratamento ver o apêndice C (ver também Recami [72,74], Sivaram e Sinha [89]).

No capítulo IV nós mostramos que os hádrons em geral podem ser considerados como soluções tipo "BNF" das equações de campo

(IV.31), que são propostas para descrever os campos gravitacional e forte "simultaneamente". O tensor R em (IV.31) descreve a curvatura total (devida aos dois campos) e pode ser chamado de tensor de Ricci total; e R de escalar de curvatura total.

O tratamento dado por nós no capítulo IV é potanto muito diferente daquele que toma por base a equação (V.1). Em nosso caso resulta que o campo forte (g) é verdadeiramente geometrizado, no sentido que partículas hadrônicas de teste seguirão geodésicas do espaço-tempo; enquanto que no caso de (V.1) tais partículas ainda não seguem geodésicas, mas o campo forte age exercendo uma força adicional sobre a partícula (análogo ao que acontece com uma partícula carregada eletricamente dentro da teoria da RG padrão).

Agora, o fato que podemos tratar os hádrons como BNF nos leva a pensar na possibilidade de generalizar a termodinâmica dos buracos negros gravitacionais ordinários (BNG) aos nossos BNF. Algumas aplicações dessa termodinâmica dos BNF já foi tentada e sugerida (ver p.e. Ammiraju et al. [2]). Mas nenhuma demonstração explícita foi dada de que essa termodinâmica era válida. Nós veremos a seguir que a generalização dos resultados dos BNG para os BNF é muito delicada. Por exemplo, é geralmente aceito que um BNG não tem estrutura interna (i. e., um BNG contém uma singularidade no seu interior), enquanto que nossos BNF realmente precisam ter uma estrutura interna conforme os hádrons.

Porém, como veremos a seguir, é possível generalizar a termodinâmica dos BNG aos BNF com alguns teoremas em singularidades sendo violados de forma que um BNF pode ainda ter uma estrutura interna. O próprio Hawking (Hawking and Ellis [51], pg. 96) sugere que, quando o raio de curvatura do espaço-tempo torna-se menor que 10^{-15} m, a curvatura é tão grande que essa região espaço-temporal pode ser considerada

como uma "singularidade". Nesse caso, de acordo com nossa abordagem, um hádron por si só já conta como uma "singularidade estendida": e o esforço dos físicos em entender a estrutura interna das partículas elementares pode ser visto, na verdade, como um esforço para se entender a estrutura dessas "quase-singularidades". Assim, nossa teoria "scale-covariant" é uma tentativa de resgatar a validade das leis físicas, mesmo nas situações de curvatura tão extrema como no interior e na vizinhança de um hádron.

V.2 - A LEI DAS ÁREAS OU SEGUNDO PRINCÍPIO DA TERMODINÂMICA PARA OS BNF

Para começar, é necessário mostrar que o teorema de Penrose (ver seção [III.3]) tem validade também aqui: i.e., que os geradores do horizonte de eventos (forte) H_f são geodésicas nulas, sem pontos extremos futuros, que nunca se encontram e ficam sempre em H_f . Essa generalização é imediata, pois o teorema depende apenas da estrutura causal do espaço-tempo; e, uma vez que o horizonte H_f é uma superfície nula (ver capítulos III e IV) e o espaço-tempo (M) que estamos considerando aqui é orientável no tempo, o referido teorema tem validade. É necessário observar, uma vez mais, que nossa teoria diz respeito apenas às partículas portadoras de carga forte (além de carga gravitacio-

nal)). E, mesmo se não existem partículas hadrônicas que viajam à velocidade da luz, as geodésicas fortes nulas são bem definidas.

Depois disso, tentemos generalizar a Segunda Lei da Termodinâmica dos BNG ao nosso caso. Tal "Segundo princípio" diz: << A superfície do horizonte de eventos nunca decresce, para o futuro, em qualquer processo físico. Em particular, se dois buracos negros (BN) colidem formando um único BN, então a área do novo buraco será maior que a soma das áreas dos dois primeiros >>. Daí resulta que um BN não pode bifurcar-se dando origem a dois ou mais novos buracos negros:

$$\delta A \geq 0. \quad (V.2)$$

A prova desse teorema devido a Hawking já foi dada a seção (III.3), e assume que o espaço-tempo seja regular e previzível, e que seja válida a desigualdade seguinte:

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0, \quad (V.3)$$

para todo vetor tipo-tempo ou nulo V .

Ora, em geral, qualquer espaço-tempo assintoticamente chato M é regular e predizível desde que não hajam singularidades nuas (vizíveis do infinito nulo futuro $\mathcal{J}^+$). Em todos os espaço-tempos considerados no capítulo IV, e que podem descrever os hádrons, não há singularidades nuas, porque existe no mínimo um horizonte de eventos que esconde a singularidade que por ventura possa existir. Por outro lado, como veremos a seguir, possivelmente nossos espaço-tempos não apresentam singularidades, porque as condições necessárias para suas formações não são em geral todas satisfeitas.

Por enquanto, vamos voltar a tratar do Segundo Princípio.

Para isso, consideremos mais uma vez a equação de Raychaudhuri-Landau (seção [III.3]), ou então o "focusing theorem" (Misner et al. [19]):

$$d^2\sqrt{A_\alpha}/dp^2 = R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu - \sigma^2, \quad (V.4)$$

onde A_α é a área da seção transversal do feixe α de "geodésicas nulas vizinhas" geradoras do horizonte de eventos; N é todo vetor nulo; σ é o cisalhamento ("shear"); e p é o parâmetro afim.

Assim, se a condição (V.3) é satisfeita, a eq. (V.4) resulta:

$$d^2\sqrt{A_\alpha}/dp^2 \leq 0. \quad (V.5)$$

A equação (V.4) é basicamente a mesma que a equação para a expansão das geodésicas nulas vizinhas num espaço-tempo M (eq. de Raychaudhuri-Landau). Agora, a condição (V.5) implica que, se a derivada primeira de $\sqrt{A_\alpha}$ for negativa em algum evento P , então a partir desse ponto ela será sempre negativa, e $\sqrt{A_\alpha}$ atingirá valor zero depois de um intervalo finito do parâmetro afim p . Isso somente não viola o teorema de Penrose referido acima [e descrito na seção (III.3)] se as geodésicas geradoras do horizonte de eventos H_f atingirem uma singularidade antes de se intersectarem. Nesse caso haveria a formação de uma singularidade nua, e nossos BNF se reduziriam a um ponto. Assim, com a hipótese da predicabilidade assintótica futura (i.e., não há singularidades nuas) do espaço-tempo, nós encontramos que:

$$d\sqrt{A_\alpha}/dp \geq 0. \quad (V.6)$$

Como (V.6) vale para todos os feixes α , conclui-se que a área total A_f da seção transversal do horizonte H_f não pode decrescer

quando nos movemos para o futuro, ou seja:

$$\delta A_f \geq 0 \quad \text{em qualquer processo f\u00edsico.} \quad (V.7)$$

Resta portanto analisar se a condi\u00e7\u00e3o (V.3) \u00e9 satisfeita no espa\u00e7o-tempo M em estudo.

Observemos, antes de mais nada, que para obtermos (V.6) usou-se a eq. (V.4), a qual \u00e9 v\u00e1lida para todo vetor nulo N . N\u00f3s ent\u00e3o vemos ser suficiente que seja satisfeita a condi\u00e7\u00e3o:

$$R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0 \quad (V.8)$$

em todo M , para todo vetor nulo N , mesmo que (V.8) n\u00e3o seja v\u00e1lida para vetores tipo-tempo t .

N\u00f3s j\u00e1 sabemos, do cap\u00edtulo 1, que o tensor de mat\u00e9ria forte S (conforme definido naquele cap\u00edtulo) satisfaz as mesmas condi\u00e7\u00f5es que T , uma vez que temos: $S \equiv NT$. Vamos ent\u00e3o assumir, por enquanto, para S as mesmas condi\u00e7\u00f5es aceitas para T (cf. Hawking and Ellis [51]); isto \u00e9, vamos supor que S satisfa\u00e7a a condi\u00e7\u00e3o fraca de energia:

$$S_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \geq 0, \quad (V.9)$$

para todo vetor nulo N .

No caso de um fluido perfeito, por exemplo, quando pode-se expressar as componetes do tensor de energia momento T (ou S) com rela\u00e7\u00e3o a uma base ortonormal $(e_0, e_1, e_2, e_3; e_0$ tipo-tempo) na forma:

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \quad (V.10)$$

então a condição (V.9) implica em:

$$\rho + p_i \geq 0. \quad (V.11)$$

Note-se que, quando (V.9) é satisfeita para todo vetor tipo-tempo ou nulo V (que é a verdadeira condição fraca de energia, conforme definida por Hawking and Ellis [51]):

$$S_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (V.12)$$

a desigualdade (V.11) deve ser substituída por:

$$\rho + p_i \geq 0; \quad \rho \geq 0. \quad (V.13)$$

Em nosso caso, no entanto, é suficiente a condição (V.9), a qual é menos restritiva que a segunda [eq. (V.12)].

Assim, usando as nossas eqs. de campo (IV.3), vem:

$$(R_{\mu\nu} + \lambda s_{\mu\nu}) N^\mu N^\nu = -k_0 (S_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} S^\alpha_\alpha / 2) N^\mu N^\nu;$$

ou seja (como $g_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = 0$):

$$(R_{\mu\nu} + \lambda s_{\mu\nu}) N^\mu N^\nu = -k_0 S_{\mu\nu} N^\mu N^\nu; \quad (V.14)$$

ou ainda:

$$R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq -\lambda s_{\mu\nu} N^\mu N^\nu; \quad (S=0). \quad (V.14a)$$

Na relação (V.14) temos duas situações limites considerando as condições (IV.1) que o campo s satisfaz:

i) No limite $s \rightarrow g$ o termo $s_{\mu\nu} N^\mu N^\nu$ se anula e resulta da eq. (V.14a) que a condição (V.3) é satisfeita, pois nesse limite vale também a condição assumida em (V.12) para o tensor de matéria forte S (ver a seguir).

ii) No limite de campo fraco temos: $s \approx \eta + f$ onde $|f_{\mu\nu}| \ll 1$, e podemos usar as relações (IV.7) e (IV.24), i.e.:

$$s \approx \eta \pm f, \quad "+" \text{ para } \lambda > 0 \text{ e } "-" \text{ para } \lambda < 0. \quad (V.15)$$

Nesse caso, podemos escrever a equação (V.14) na forma:

$$[R_{\mu\nu} + \lambda(\eta_{\mu\nu} \pm f_{\mu\nu})] N^\mu N^\nu = -k_0 (S_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} S^\alpha_\alpha / 2) N^\mu N^\nu,$$

ou:

$$(R_{\mu\nu} \pm \lambda f_{\mu\nu}) N^\mu N^\nu = -k_0 (\tilde{S}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \tilde{S}^\alpha_\alpha / 2) N^\mu N^\nu, \quad (V.16)$$

onde, conforme a equação (IV.11) da seção (IV.3), temos:

$$\tilde{S} = S - \lambda \eta / k_0. \quad (V.17)$$

Nós vimos, no capítulo IV, que o vácuo nas vizinhanças de um hádron é obtido fazendo-se $\tilde{S}=0$ (e não $S=0$); ou seja, fazendo-se [depois da eq. (V.17)] $S = \lambda \eta / k_0$. Assim, o papel de tensor de matéria forte nesse caso é desempenhado por $\tilde{S}$ (e não por S). Por isso, nós pe-

dimos que o tensor $\tilde{S}$ (e não S) satisfaça a condição fraca de energia (V.12), i.e.:

$$\tilde{S}_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \geq 0, \quad N_\mu N^\mu = 0. \quad (V.18)$$

Então, levando a condição (V.18) em (V.16), encontramos:

$$(R_{\mu\nu} \pm \lambda f_{\mu\nu}) N^\mu N^\nu = -k_0 S_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0. \quad (V.19)$$

Agora, se $\tilde{S}=0$, o termo do lado direito de (V.14) $[k_0 S_{\mu\nu} N^\mu N^\nu]$ domina o termo $\pm \lambda f_{\mu\nu} N^\mu N^\nu$. Obtemos então que a condição (V.3) é válida sempre que $\tilde{S} \neq 0$.

Por outro lado, no caso de $\tilde{S}=0$, da eq. (V.19) vem:

$$R_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq \mp \lambda f_{\mu\nu} N^\mu N^\nu. \quad (V.20)$$

Mas das eqs. (IV.8) e (IV.25) segue que:

$$f = 2(g - \eta). \quad (V.21)$$

Além do mais, visto que o sinal "menos" em (V.20) vale para $\lambda < 0$, enquanto que o sinal "mais" vale para $\lambda > 0$, podemos escrever:

$$\pm \lambda f_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = |\lambda| f_{\mu\nu} N^\mu N^\nu. \quad (V.22)$$

E então, usando (V.21) obtemos:

$$|\lambda| f_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = 2|\lambda| (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}) N^\mu N^\nu = -2|\lambda| \eta_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \leq 0. \quad (V.23)$$

Logo, substituindo (V.23) em (V.20) vem:

$$R_{\mu\nu} N^{\mu} N^{\nu} \leq 0. \quad (V.3bis)$$

Nós obtivemos então que a condição (V.3) é satisfeita, pelo menos no caso simples de um problema estático como o discutido acima.

Note-se, antes de prosseguir, que a equação de "focusing" [eq. (V.4)] se aplica a um feixe $\mathcal{L}$ de geodésicas vizinhas (geradoras do horizonte de eventos forte). Portanto, seria suficiente analisar o que acontece localmente com $R_{\mu\nu} N^{\mu} N^{\nu}$. É fato bem conhecido que localmente pode-se escolher coordenadas de forma a reduzir a métrica g na métrica chata η . Agora, desde que seja mantida a covariância geral das nossas equações de campo, segue que a escolha $g = \eta$ implica em fazer $s = \eta$ [cf. eqs. (IV.7) e (IV.24) e cf. $s \rightarrow g$ no limite de campo forte]. Assim, desde que o tensor de matéria forte S satisfizer a condição fraca de energia [eq. (V.18)], segue de (V.19) que a condição (V.3) é sempre satisfeita localmente.

Nós concluímos imediatamente que a área da seção transversal de um feixe $\mathcal{L}$ qualquer de geodésicas vizinhas geradoras não decresce para valores "futuros" do parâmetro afim p . E daí a lei das áreas para os BNF segue diretamente.

Com a condição (V.8) satisfeita, segue da discussão anterior que a área A da superfície do horizonte de eventos dos BNF não diminui com o tempo, e podemos realmente generalizar a termodinâmica dos BNG para os nossos BNF. Ou seja, podemos relacionar a entropia S_F do BNF com a área A , da mesma forma que no caso dos BNG. Aqui também, obviamente, a entropia S_F pode ser associada à quantidade de informação "perdida" a respeito dos constituintes do hádron em relação à informação que teríamos deles se fossem livres.

Do ponto de vista puramente clássico, a entropia de um BNF também seria infinita, pois poderíamos construí-los usando um número infinitamente grande de partículas com energia (e carga forte) arbitrariamente pequena, de forma que o número de configurações internas (bem como a informação perdida) poderia tender ao infinito. Porém, mais uma vez o princípio de incerteza impõe um limite nesse número, pois o comprimento de onda Compton λ_c das partículas constituintes deve ser (no máximo) da ordem do diâmetro do BNF, se quisermos considerá-las como localizadas no seu interior. Isto é:

$$\lambda_c = \hbar/mc \approx 2r_s ,$$

de onde tiramos que:

$$m \approx \hbar/2cr_s , \tag{V.24}$$

o que para um nucleon ($r_s \approx 1$ fm) produz $m \approx 3 \times 10^{-28}$ Kg, ou seja, um valor praticamente da mesma ordem de grandeza que a massa do próprio nu-

cleon.

Vemos assim que um hádron tem um número finito de configurações internas, e conseqüentemente uma entropia S_f finita (de forma que o conceito de entropia de um BNF pode ter sentido). É interessante notar que o princípio de incerteza parece limitar também a nossa possibilidade de observarmos a estrutura interna dos hádrons, pois, por exemplo, depois de (V.24) um nucleon comum parece composto de muito poucas partículas mais elementares.

Conforme já discutimos no caso dos BNG, para que o nosso conceito de entropia de um BNF tenha sentido, o BNF deve emitir "radiação térmica" como um corpo negro com a temperatura (ver Hawking [50]):

$$T_f = [\partial S_f / \partial g]^{-1} , \quad (V.25)$$

onde g é a carga forte do BNF. Se usarmos unidades tais que $[g]=[M]$, então (V.25) se escreve na forma:

$$T_f = c^2 [\partial S_f / \partial m]^{-1} . \quad (V.26)$$

Como o espaço-tempo que estamos considerando é assintoticamente chato, certamente podemos assumir aqui o resultado obtido por Hawking [49] [ver seção (III.5)]. Assim, um BNF deve emitir partículas como um corpo negro com temperatura dada por:

$$T_f = \hbar \mathcal{K} / 2\pi k c , \quad (V.27)$$

onde $\mathcal{K}$ é a gravidade superficial forte do BNF, e k a constante ^{de} Boltzmann.

Procedendo da mesma forma que para os BNG, nós encontramos a seguinte relação entre a área A do horizonte de eventos e a entropia S_f do BNF:

$$S_f = kc^3 A / 4\hbar N. \quad (V.28)$$

Para encontrar (V.28) basta observar que temos, por exemplo (ver seção [IV.7]),

$$\chi_f = c^2 (\lambda r_s + 1/r_s) / 2, \quad (V.29)$$

onde r_s é tal que:

$$r_s - 2Ng/c^2 + \lambda r_s^3 / 3 = 0. \quad (V.30)$$

De (V.30) obtemos (λ constante):

$$dm \equiv dg = c^2 (\lambda r_s + 1/r_s) dA / 16\pi N = \chi_f dA / 8\pi N, \quad (V.31)$$

onde

$$A = 4\pi r_s^2.$$

Comparando (V.31) com a relação termodinâmica

$$dE = TdS + \text{termos de trabalho},$$

e usando T_f dado por (V.27), obtemos:

$$c^2 \chi_f dA / 8\pi N = \hbar \chi_f dS_f / 2\pi kc,$$

ou seja:

$$dS_f = kc^3 dA/4Nh.$$

(V.32)

Se supormos que $S_f \longrightarrow 0$ quando $A \longrightarrow 0$, resulta de (V.32), por integração, exatamente a relação (V.28).

Encontramos assim a relação entre a área da superfície do horizonte de eventos e a entropia associada a um BNF. Isso solidifica o Segundo Princípio da física dos BNF que é o Segundo Princípio da termodinâmica na linguagem dos buracos negros (agora formalmente generalizado). Além do mais, depois da equação (V.32), vê-se que (V.31) nada mais é do que o Primeiro Princípio da termodinâmica dos BNF.

Podemos ainda, usando a relação (V.27), e de forma análoga com o caso dos BNG, formular o Princípio Zero e o Terceiro Princípio da termodinâmica dos BNF. Isto, porém, não nos trará novos resultados; de forma que é mais interessante agora tratarmos de algumas aplicações dessa termodinâmica generalizada, em especial do Segundo princípio, a alguns fenômenos físicos relevantes: como veremos a seguir.

V.4 - CONSEQUÊNCIAS DO SEGUNDO PRINCÍPIO DA TERMODINÂMICA DOS BNF

Para iniciar, vamos observar que os resultados que obteremos nesta seção dependem somente da lei das áreas (eq [V.7]), independente de a relação da área A com a entropia S_f ser válida ou não. Tudo o que supomos nesta seção é que a superfície do horizonte de eventos forte satisfaça a lei das áreas (conforme mostramos anteriormente), e que os

BNF tenham uma estrutura interna, de forma que possam realmente ser associados a hádrons.

A lei das áreas (ou segundo princípio da mecânica dos BNF) aplicada a dois BNF interagentes nos diz que, se os dois buracos iniciais colidem e se fundem originando um único novo buraco forte, a área da superfície do horizonte de eventos do BNF final (A) é maior (ou no mínimo igual) a soma das áreas dos buracos originais ($A_1 + A_2$):

$$A \geq A_2 + A_1. \quad (V.33)$$

V.4.1 - O COLAPSO DE UMA ESTRELA

Consideremos inicialmente o colapso de uma estrela E com simetria esférica e massa maior que aproximadamente três massas solares. Como se sabe, pela teoria padrão, tal estrela não estabiliza como estrela de nêutrons e colapsa para raios cada vez menores. Estamos interessados no caso em que E (ou melhor, o seu caroço central) atinge a densidade da matéria nucleônica antes de colapsar além do seu horizonte gravitacional (em $r_g = 2GM/c^2$); i.e., quando sua densidade média $\rho_{BN} = 3c^6/(32\pi G^3 M^2)$ é maior que a densidade $\rho_n \approx 10^{15} \text{ g/cm}^3$ da matéria nuclear, ou seja:

$$3c^6/(32\pi G^3 M^2) \geq 10^{15} \text{ g/cm}^3. \quad (V.34)$$

A relação (V.34), no caso de um colapso homogêneo, quando M é a massa total da estrela, produz:

$$M \lesssim 5M_{\odot}. \quad (V.35)$$

Assim, se a massa M da estrela satisfazer a

$$3M_{\odot} \lesssim M \lesssim 5M_{\odot}, \quad (V.36)$$

quando a estrela atingir o estado de estrela de nêutrons os nêutrons constituintes colapsariam entre eles dando origem a novos "super-nêutrons": e esse processo deve satisfazer a lei das áreas. Então, depois da relação (V.33), a área dos novos "super-nêutrons" seria maior que $N A_n$: onde N é o número de nêutrons envolvidos no processo, e A_n a área da superfície de um nêutron.

Dessa forma, se todos os nêutrons colapsam entre si, o segundo princípio da termodinâmica dos BNF exige que no final o novo "super-nêutron" tenha uma área $A > N A_n$, onde N é o número de nêutrons originais da estrela ao atingir seu estado de estrela de nêutrons.

Nós obtemos então, nesse modelo simples, que uma estrela colapsante, de massa M entre $3M_{\odot} \lesssim M \lesssim 5M_{\odot}$, não torna-se um buraco negro gravitacional, mas tende a re-explodir dando origem a um novo objeto com "horizonte-forte" com raio da ordem de R , onde:

$$1 \lesssim R \lesssim 3 \text{ dias-luz}. \quad (V.37)$$

Naturalmente, tal explosão será complicada pelo fato que os "super-nêutrons" devem evaporar (ver Hawking [48,49], de Witt [27]) exatamente como esperado para BNF genéricos.

Algumas considerações a respeito da evaporação dos BNF serão feitas mais adiante, na seção (V.5).

Por ora, devemos notar ainda que o intervalo representado pela equação (V.36) não deve ser tomado tão seriamente; pois ele depende muito fortemente da forma do colapso. Na verdade tal intervalo é função da densidade crítica ρ_c da matéria nuclear além da qual os nêutrons começam a se juntar. Além do mais, as conclusões dependem muito do que se passa na região central da estrela, pois essa é a região que primeiro atinge a densidade crítica. Sendo assim, nem toda a massa de E é relevante, porque a explosão pode iniciar a ocorrer mesmo antes que toda massa de nêutrons se funda (colapse).

Por exemplo, se em vez de escolhermos $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$, identificarmos ρ_c com a densidade $\underline{d}$ do caroço central da estrela de nêutrons, dada pela fórmula padrão $\underline{d} \approx 0,823(M/M_\odot)^2 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$, então o intervalo permitido na equação (V.36) desaparece, visto que a condição $\rho_{BN} > \underline{d}$ produz o vínculo $M \leq 2,2 M_\odot$. Todavia, esse resultado também não é de todo conclusivo, pois, como dissemos, a massa que entra na expressão para ρ_{BN} normalmente deve ser apenas uma parte da massa de E; e isso eleva o valor máximo $M \leq 2.2 M_\odot$ obtido acima.

Claramente, então, a questão se o fenômeno descrito no início desta seção acontece ou não na natureza é ainda um problema aberto, visto que ele depende crucialmente da equação de estado escolhida para estudar o colapso da estrela.

V.4.2 - O "BIG-CRUNCH" DO COSMOS

Vamos analisar agora o caso mais interessante correspondente ao colapso de uma massa tão grande quanto a do nosso cosmos, $M \approx 10^{54}$ Kg. Nesse caso as dificuldades encontradas acima não aparecem, visto que o raio de Schwarzschild é tão grande ($r_s \approx 1,5 \times 10^{27}$ m) que nós temos de nos considerar no interior de tal horizonte; i.e., devemos tratar do colapso como ocorrendo no interior desse "buraco negro cósmico".

Assim, se na fase de contração nosso cosmos U em algum estágio atinge o estado de uma super-estrela de nêutrons com $\sim 10^{80}$ nêutrons, então a equação (V.33) exige que no final o objeto formado deve ter uma área

$$A_u \gg 10^{80} A_n.$$

Ou seja, a super-bola de nêutrons re-explodirá tendendo a formar um novo objeto com raio

$$R_u \gg \bar{R},$$

onde $\bar{R} \approx 2 \times 10^{25}$ m, que é próximo do valor presentemente aceito para o "raio de Hubble" do nosso cosmos, mas é ainda pelo menos duas ordens de grandeza menor que o raio de Schwarzschild r_s ; o qual deve ser considerado, de acordo com nossa teoria, como o "raio" de expansão máxima do nosso universo. Nós podemos então ter ciclos sucessivos de expansão/contração, todos tomando lugar no interior do horizonte cósmico r_s .

Essa indicação da termodinâmica é a única conhecida por nós até agora que permite prever fisicamente que o universo dá origem a

"uma nova criação", depois de sua contração. Note-se que nessa abordagem não existem singularidades passada (inicial) nem futura (final) na história do cosmos (cf. também Rosen [87,88,89]): de modo que as leis físicas não deixam de valer na vizinhança temporal de tal "Big-Crunch" não singular.

Note-se também que tais simples conclusões podem não ser livres de críticas se, por exemplo, durante o colapso do nosso cosmos houver a geração de um número muito grande de fótons (antes que o cosmos atinja a fase de uma "super-bola" de nêutrons), de forma que eles carreguem grande parte da entropia gerada pelo colapso. Esses fótons podem impedir a re-explosão do universo, já que eles não obedecem a equação (V.24). Nós observamos, contudo, que (V.24) decorre da lei das áreas dos BNF e, desde que o universo em sua fase de estrela de nêutrons tenha $N \approx 10^{60}$ nêutrons, os resultados acima parecem independentes da quantidade de fótons gerado pelo colapso; porque não dependem explicitamente da lei da entropia, mas sim das leis das áreas.

V.5 - A TERMODINÂMICA DOS BNF E AS PARTÍCULAS ELEMENTARES

Nós vimos, no capítulo precedente, como se podem obter certas características dos hádrons, quando tratados como buracos negros fortes dentro do contexto da nossa abordagem clássica unificada das interações gravitacionais e fortes. Nas primeiras seções deste capítulo completamos a generalização da Termodinâmica para os BNF. Aqui, fa-

remos um estudo mais aprofundado das consequências de tal termodinâmica no âmbito das partículas elementares.

De acordo com a seção (V.3) qualquer hádron corresponde a um BNF cuja entropia e temperatura são, respectivamente:

$$S_f = kc^3 A / 4\hbar N \quad (V.38)$$

$$T_f = \hbar \chi_f / 2\pi kc, \quad (V.39)$$

onde A é a área da superfície do hádron (BNF) e χ_f sua "gravidade forte" superficial.

Segue imediatamente de (V.39) e (V.29) que para um hádron ordinário a temperatura T_f é da ordem de

$$T_f \cong 10^{12} \text{ } ^\circ\text{K}. \quad (V.40)$$

Então, de acordo com as discussões do capítulo III, um hádron em geral deve emitir a radiação característica de um corpo negro a temperatura T_f . Sendo assim, ele deve "evaporar" em um tempo $\Delta\tau$ muito curto; ou seja: $\Delta\tau$ deve ser da ordem do tempo de decaimento das partículas elementares frente a interação forte ($\Delta\tau \cong 10^{-23} \text{ s}$), conforme o que obtemos no capítulo I.

Note-se entretanto que, assim como um corpo negro absorve fótons e emite um espectro característico somente de fótons, e

um buraco negro gravitacional "absorve" qualquer partícula que tenha carga gravitacional e emite um espectro característico de qualquer partícula, um BNF, por sua vez, "absorve" somente partículas portadoras de carga forte (partículas hadônicas) e portanto deve emitir um espectro característico de partículas hadrônicas somente. Então, não se espera que um hádron "evapore" (fortemente), pela emissão de partícu-

las que não sejam hádrons.

Esses resultados podem ser usados para tentar explicar alguns fenômenos que ocorrem em altas energias, como é o caso dos eventos "Centáuro" e "Chiron" da fenomenologia dos raios cósmicos (ver Ammiraju et al. [2]).

V.5.1 - SOBRE A ESTABILIDADE DOS HÁDRONS FRENTE A INTERAÇÃO FORTE; UMA POSSÍVEL DIFERENÇA ENTRE MÉSONS E BÁRIONS

Obtivemos acima que um hádron em geral deve decair fortemente em um tempo muito curto emitindo outros hádrons. Como, então, explicar a estabilidade (em relação às interações fortes) dos nucleons, dos píons ou dos outros hádrons que tem vida média $\Delta\tau \gg 10^{-23}$ s; i.e., que não decaem via interações forte?

A resposta para esta questão é simples se considerarmos o fato observado no capítulo IV a respeito da gravidade superficial de certos BNF (i.e., de certos hádrons). Nós dissemos lá que a gravidade superficial de um bárion que fica numa trajetória de Regge é nula (cf. equações [IV.50] e [IV.57]):

$$a^2 = 9g^2/8C_+ - Q^2, \quad \text{com } g = Nm/c^2;$$

então;

$$L^2/g^2c^2 = 9 N^2g^2/8C_+ c^4 - Q^2 \quad ; \quad C_+ = 1 + \lambda a^2/3, \text{ ou seja;}$$

$$L^2 = (9/8C_+) N^2 g^4 / c^4 - Q^2 g^2 c^2. \quad (V.41)$$

Assim, nesse caso, a temperatura T_f de tais bárions é nula e eles não decaem via interação forte.

A mesma conclusão pode ser tirada também para os mésons que tenham carga elétrica não nula (ainda tomando $\lambda > 0$). Isso pode ser obtido considerando a gravidade superficial forte para tal BNF que é (ver eq. [IV.54]):

$$\kappa_f = c^2 (2g + 2\lambda r_s^3/3 - 2Q^2/r_s) / 2\dot{r}_s^2, \quad (V.42)$$

onde r_s é a maior raiz da equação:

$$\lambda r_s^4/3 + r_s^2 - 2gr_s + Q^2 = 0. \quad (V.43)$$

Então, a gravidade forte superficial (V.42) é nula se

$$g^2 = 8Q^2/9C_+, \quad (V.44)$$

onde λ e g estão relacionados por:

$$g = \sqrt{2/3\lambda} (X^{4/3} - X^{2/3}),$$

com

$$X = g\sqrt{\lambda}/6 \pm \sqrt{g^2\lambda/6 + 1}.$$

Todavia, se substituirmos o valor aproximado da nossa abordagem para N em $Q^2 = Nq^2/4\pi\epsilon_0 c^4$, da eq. (V.44) obtemos: $m \approx 10^{-39} \text{ Kg}$; ou seja, aquela relação não é satisfeita para os píons, os quais devem ser BNF do tipo dos buracos de Reissner-Nordström - de Sitter (ver o

capítulo IV).

Além do mais, isso não explica a estabilidade do píon neutro.

Contudo, se admitimos que λ pode ser negativo [ver a seção (IV.5)], então de (V.42) com $Q=0$ vem:

$$V_f = c^2(2g + 2\lambda r_s^3/3)/2r_s^2.$$

Assim, T_f será nulo quando

$$g = -\lambda r_s^3/3 = |\lambda| r_s^3/3,$$

o que ocorre em $r_s = \sqrt{3g/|\lambda|}$; o que, pela relação (V.43) com $Q=0$, implica em:

$$g = 1/3\sqrt{|\lambda|}, \text{ ou seja:}$$

$$\lambda = 1/9g^2, \text{ e:}$$

$$r_s = 1/\sqrt{|\lambda|}. \quad (V.45)$$

Concluimos então que os píons também são estáveis dentro de nosso modelo, desde que para eles tivermos $\lambda < 0$.

A relação (V.45) está em bom acordo com as previsões feitas empiricamente no capítulo I.

É interessante notar, então, que todos os píons (e possivelmente todos os mésons) parecem ser uma família de hádrons caracterizados por $\lambda < 0$; enquanto que os bárions poderiam ser caracterizados por uma constante hadrônica positiva: $\lambda > 0$.

As consequências e o significado físico desse fato ainda não

foram investigados por nós. Isto, juntamente com muitas outras aplicações da nossa termodinâmica generalizada que se podem fazer às partículas elementares, são tarefas para estudos futuros.

Os resultados descritos acima são apenas uma amostra dos muitos fatos interessantes que se podem obter a partir do tratamento dos hádrons como BNF.

V.5.2 - SOBRE A ESTRUTURA INTERNA DOS BNF

Pode-se levantar um problema em relação às aplicações feitas nas seções anteriores, no que diz respeito a estrutura interna dos hádrons (tratados como BNF), e dos "super-hádrons" que se formam no colapso de uma estrela ou do cosmos.

É normalmente aceito que um buraco negro gravitacional contém uma singularidade no seu interior (normalmente em $r=0$) e nenhuma estrutura interna. Essas conclusões seguem principalmente da solução de Schwarzschild (que não é muito realística). Nesse caso, uma vez que entra-se no buraco negro, nenhuma força poderá evitar de atingirmos a singularidade, que é alcançada num tempo próprio finito.

Porém, para mostrar que um espaço-tempo M contém uma singularidade, usa-se a hipótese que (numa métrica com assinatura -2):

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0, \text{ para } V_\mu V^\mu \geq 0. \quad (V.45)$$

Tal condição implica que o tensor de energia-momento T deve satisfazer a "condição forte" da energia:

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq T_{\alpha\alpha} V_\mu V^\mu / 2 ; \quad V_\mu V^\mu \geq 0. \quad (V.46)$$

Agora, nós encontramos anteriormente que um hádron pode, por exemplo, ter uma métrica que em $r < r_g$ é dada por:

$$ds^2 = F(r) dt^2 - dr^2/F(r) - r^2 d\Omega ,$$

$$F(r) = 1 - 2g/r + \lambda r^2/3, \quad (V.47)$$

que é associada a um corpo de simetria esférica com carga forte g centrado em $r=0$, mais um fluido perfeito, com densidade ρ e pressão p dadas por $\rho = -p = -\lambda/8\pi$, que preenche todo espaço-tempo exterior ao corpo e interior ao hádron. Esse tensor de energia-momento não satisfaz a condição (V.46), embora ainda satisfaça a "condição fraca" de energia:

$$T_{\mu\nu} K^\mu K^\nu \geq 0 , \text{ para } K_\mu K^\mu = 0. \quad (V.48)$$

Ocorre que a condição (V.46) é necessária para que tenham validade os teoremas a respeito de singularidades (ver Hawking and Ellis [51]). Assim, um comportamento livre de singularidade em $r=0$ dos nosso BNF é permitido, visto que há violação daqueles teoremas (ver também Wenda e Shitong [100]).

Dessa forma, um BNF pode ter uma estrutura interna (como um hádron), e os super-hádrons formados no colapso de estrelas e do cosmos serão objetos com uma verdadeira distribuição de massa em seu interior; mas ainda serão objetos tipo BNF.

Nós vemos então que o fato de obtermos um "big-crunch" não singular em nossa abordagem é, também, uma consequência da violação de teoremas relevantes em singularidades quando na presença de matéria a densidades muito altas; ou (o que é equivalente) na presença de energias muito altas.

A APROXIMAÇÃO LINEAR PARA AS EQUAÇÕES DE CAMPO NAS VIZINHANÇAS DE UM HÁBRON

O objetivo deste apêndice é encontrar a aproximação linear para as equações de campo modificadas propostas para descrever o campo gravitacional juntamente com o campo forte. Ou seja, vamos supor, em conexão com as discussões do capítulo IV, que estamos na presença de um campo total (gravitacional mais o forte) que seja suficientemente fraco; i.e., numa região do espaço-tempo que difere muito pouco do espaço chato de Minkowski (p.e., nas vizinhanças de um hádrón, mas suficientemente longe dele); então nós podemos por:

$$g \cong \eta + h \tag{A1}$$

onde nas coordenadas cartesianas usuais temos $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, e os "h's" são considerados tão pequenos que produtos deles podem ser desprezados. Podemos também assumir que as primeiras e segundas derivadas dos h's sejam da mesma ordem de grandeza que os próprios h's: As derivadas primeiras dos "g's" [ou, depois de (A1), dos h's] medem a força inercial mais a gravitacional que agem nas partículas, e as derivadas segundas medem a curvatura do espaço-tempo.

Com a escolha (A1), mais as condições mencionadas acima sobre o tensor h, nós mostraremos que o tensor de Ricci pode ser aproximado

por:

$$R \cong \square h/2, \quad (A2)$$

com

$$(h_{\mu}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} h/2)_{;\nu} = 0 \quad ; \quad h = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (A3)$$

Para encontrar as relações (A2) e (A3) vamos tomar inicialmente as nossas equações de campo [eqs. (IV.3) do capítulo IV] sem o "termo cosmológico" λg ; mais adiante nós voltamos a nos preocupar com este termo. Tomemos então as equações

$$R_{\mu\nu} = -k_0 (S_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} S_{\alpha}^{\alpha}/2), \quad (A4a)$$

as quais também podem ser postas na forma

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\alpha}^{\alpha}/2 = -k_0 S_{\mu\nu}, \quad (A4b)$$

onde

$$k_0 = -8\pi/c^4.$$

Agora, o tensor de Ricci e a conexão Riemanniana (numa base coordenada) podem ser escritos na forma:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}, \quad (A5)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})/2, \quad (A6)$$

onde ", " denota a derivação parcial ordinária.

Depois de (A1) vem;

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = (h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\alpha\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha})/2. \quad (A7)$$

Agora é fácil ver que os termos que envolvem produtos dos "Γ's" no tensor de Ricci são de segunda ordem nas derivadas dos h's e portanto desprezíveis; p.e.:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} &= g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}(h_{\delta\mu,\nu} + h_{\delta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\delta})(h_{\gamma\alpha,\beta} + h_{\beta\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\beta})/4 \\ &= O(h_{\mu\nu}^2).\end{aligned}$$

Portanto, em primeira ordemem "h" podemos escrever:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &\cong g^{\alpha\beta}[(h_{\beta\mu,\alpha\nu} + h_{\beta\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\alpha,\beta\nu})/2 - (h_{\beta\mu,\nu\alpha} + h_{\beta\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\alpha,\beta\nu})/2], \\ R_{\mu\nu} &\cong g^{\alpha\beta}(h_{\mu\nu,\beta\alpha} - h_{\beta\alpha,\mu\nu} + h_{\beta\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\alpha,\beta\nu})/2.\end{aligned}\quad (A8)$$

Agora, temos também (p.e.):

$$g^{\alpha\beta}h_{\beta\nu,\mu\alpha} \equiv h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\beta\nu,\mu\alpha} + O(h_{\nu\mu}^2) \quad (A9)$$

Assim (p.e.):

$$h^{\alpha}_{\nu} = g^{\alpha\beta}h_{\beta\nu} = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})h_{\beta\nu} = \eta^{\alpha\beta}h_{\beta\nu} - h^{\alpha\beta}h_{\beta\nu}.$$

Dessa forma, podemos fazer o levantamento (abaixamento) de índices usando somente as partes principais de $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$; i.e., usando $\eta^{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$.

Assim, o tensor de Ricci fica

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &\cong \eta^{\alpha\beta}(h_{\beta\alpha,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\beta\alpha} - h_{\beta\nu,\mu\alpha} - h_{\mu\alpha,\beta\nu})/2, \quad \text{ou:} \\ R_{\mu\nu} &\cong (h^{\alpha}_{\alpha,\mu\nu} + \square h_{\mu\nu} + h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - h_{\mu,\beta\beta})/2,\end{aligned}\quad (A10)$$

onde $\square h_{\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta}h_{\mu\nu,\alpha\beta} = (\partial^2/c^2\partial t^2 - \nabla^2)$; $h^{\alpha}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$.

Agora, se definirmos

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h^\alpha_\alpha / 2, \quad \text{segue que:} \quad (\text{A11})$$

$$h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} = \gamma^\alpha_{\nu,\mu\alpha} + \delta^\alpha_\nu h^\alpha_{\mu\alpha} / 2 = \gamma^\alpha_\nu + h^\alpha_{\mu\nu} / 2, \quad (\text{A12})$$

$$h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} = \gamma^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + \delta^\alpha_\mu h^\alpha_{\nu\alpha} / 2 = \gamma^\alpha_\mu + h^\alpha_{\nu\mu} / 2. \quad (\text{A13})$$

Usando isso em (A10), vem:

$$R_{\mu\nu} \approx (\square h_{\mu\nu} - \gamma^\alpha_{\mu,\nu\alpha} - \gamma^\alpha_{\nu,\mu\alpha}) / 2. \quad (\text{A14})$$

Então, as equações de campo (A4a) podem ser escritas na forma

$$\square h_{\mu\nu} - \gamma^\alpha_{\mu,\nu\alpha} - \gamma^\alpha_{\nu,\mu\alpha} = -16\pi (S_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} S^\alpha_\alpha / 2) / c^4. \quad (\text{A15})$$

Note-se que desprezamos o termo $h_{\mu\nu} S^\alpha_\alpha$ no segundo membro de (A15) pois ele é de segunda ordem em h , como pode ser visto pelo que segue.

Das equações (A4) vem;

$$R^\alpha_\alpha = -8\pi (S^\alpha_\alpha - \delta^\alpha_\alpha S^\alpha_\alpha / 2) / c^4. \quad (\text{A16})$$

De (A16) obtemos

$$R^\alpha_\alpha = k_0 S^\alpha_\alpha.$$

Como nós assumimos que R^α_α é da ordem de " h ", obtemos que o termo $k_0 S^\alpha_\alpha$ também é da ordem de h . Logo, o termo $8\pi S^\alpha_\alpha h_{\mu\nu} / c^4$ em (A16)

é de segunda ordem em h e pode ser desprezado.

Agora, já sabemos que as equações de campo (A4) não determinam unicamente as dez componentes de $g_{\mu\nu}$ devido as 4 identidades (de Bianchi)

$$(R^\nu_\mu - \delta^\nu_\mu R^\alpha_\alpha/2)_{;\nu} = 0,$$

que reduzem as 10 equações de (A4) para apenas $10-4=6$ equações funcionalmente independentes, deixando-nos com 4 graus de liberdade nas 10 componentes desconhecidas de $g_{\mu\nu}$. Esses graus de liberdade correspondem ao fato que, se $g_{\mu\nu}$ é uma solução das equações (A4), então $g'_{\mu\nu}$ também é solução, onde $g'_{\mu\nu}$ é determinado de $g_{\mu\nu}$ por uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'$. Tais transformações de coordenadas envolvem quatro funções arbitrárias $x'(x)$, dando exatamente 4 graus de liberdade para as soluções de (A4).

Em vista disso, podemos fazer uma transformação de coordenadas de forma que os termos em " γ " na equação (A14) possam ser eliminados. A transformação mais geral que ainda nos deixa com um campo fraco é da forma:

$$x' = x + \epsilon(x), \quad (A17)$$

onde $\epsilon^\mu_{;\nu}$ é no máximo da mesma ordem de grandeza de h^μ_ν .

A métrica no novo sistema de coordenadas é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu + \epsilon^\alpha_{;\mu}) (\delta^\beta_\nu + \epsilon^\beta_{;\nu}) g'_{\alpha\beta},$$

ou:

$$g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\beta} \epsilon^\beta_{;\nu} + g'_{\alpha\nu} \epsilon^\alpha_{;\mu} + O(\epsilon^2).$$

Mas, como assumimos que $\epsilon_{\mu,\nu}$ é da ordem de $h_{\mu\nu}$, vem:

$$g_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu,\nu} + \epsilon_{\nu,\mu}. \quad (A18)$$

Além do mais; $g'_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$; logo:

$$h'_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu,\nu} - \epsilon_{\nu,\mu},$$

ou seja:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu,\nu} - \epsilon_{\nu,\mu}. \quad (A19)$$

Usando (A19) na relação

$$\gamma'_{\mu,\nu} = (h'_{\mu}{}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} h^{\alpha}{}_{\alpha}/2)_{,\nu}$$

obtemos,

$$\gamma'_{\mu,\nu} = (h_{\mu}{}^{\nu} - \epsilon^{\nu}{}_{,\mu} - \epsilon_{,\mu}{}^{\nu})_{,\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} (h^{\alpha}{}_{\alpha} - 2\epsilon^{\alpha}{}_{,\alpha})_{,\nu}/2,$$

$$\gamma'_{\mu,\nu} = (h_{\mu}{}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} h^{\alpha}{}_{\alpha}/2)_{,\nu} - \epsilon_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \epsilon^{\nu}{}_{,\mu\nu} + \epsilon^{\alpha}{}_{,\alpha\nu} \delta_{\mu}^{\nu};$$

ou ainda:

$$\gamma'_{\mu,\nu} = \gamma_{\mu,\nu} - \square \epsilon_{\mu}. \quad (A20)$$

Se escolhermos ϵ_{μ} tal que $\square \epsilon_{\mu} = \gamma_{\mu,\nu}$, nós fazemos $\gamma'_{\mu,\nu} = 0$ e a equação (A10), nesse novo sistema de coordenadas, resulta:

$$R_{\mu\nu} \equiv \square h_{\mu\nu}/2, \quad (A21)$$

com as condições (de gauge)

$$(h_{\mu}{}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} h^{\alpha}{}_{\alpha}/2)_{,\nu} = 0, \quad (A22)$$

onde abandonamos o uso da "linha" que diferenciava um sistema de coordenadas do outro. As relações (A21) e (A22) foram usadas no capítulo IV.

Podemos aqui fazer uma comparação com o eletromagnetismo: As equações de Maxwell são invariantes frente a transformação de Gauge do tipo:

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \varphi_{,\mu}, \quad (\text{A23})$$

onde φ é uma função escalar qualquer. Se A_{μ} é solução das equações de Maxwell:

$$\square A_{\mu} - A^{\beta}_{,\mu\beta} = -J_{\mu}, \quad (\text{A24})$$

então $A_{\mu} + \varphi_{,\mu}$ também é.

As quatro equações (A24) para os quatro A_{μ} desconhecidos não os determinam unicamente, porque o lado esquerdo dessas equações são relacionadas por uma identidade diferencial análoga às identidades de Bianchi:

$$(\square A^{\mu} - A^{\beta,\mu}_{,\beta})_{,\mu} = 0. \quad (\text{A25})$$

Assim, o número de equações funcionalmente independentes é somente $4-1=3$, e há um grau de liberdade na solução para os A_{μ} . Para eliminar esse grau de liberdade, na prática escolhe-se uma função de gauge particular. Por exemplo, impondo o Gauge de Lorentz nos campos:

$$A^{\mu}_{,\mu} = 0. \quad (\text{A26})$$

Além do grau de liberdade associado às equações (A25), existe outro associado com a covariância das equações (A24) frente a trans-

formação de gauge $A'_\mu = A_\mu - \varphi_{,\mu}$. Assim, nós na verdade ficamos com $3 - 1 = 2$ graus de liberdade, os quais correspondem a ondas eletromagnéticas polarizadas com helicidade +1 e -1.

Se A_μ não satisfaz (A26) podemos tomar

$$A'_\mu = A_\mu + \varphi_{,\mu}, \quad (\text{A27})$$

e escolher φ tal que $A'^\mu{}_{,\mu} = 0$; isto é:

$$\square \varphi = - A^\mu{}_{,\mu}. \quad (\text{A28})$$

A equação (A28) tem várias soluções para φ , pois para cada solução particular φ pode-se adicionar sempre soluções da homogênea $\square \varphi = 0$; i.e., a condição de Lorentz não remove totalmente a ambiguidade no campo.

Nas equações (A4) acontece algo análogo conforme já mencionamos, em especial na aproximação linear, encontra-se que as equações (A14) são invariantes frente a transformação de gauge dada em (A19)

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}, \quad (\text{A19b})$$

onde ε_μ é escolhido de modo a satisfazer

$$\square \varepsilon_\mu = (h^\nu{}_\mu - \delta^\nu_\mu h^\lambda{}_\lambda / 2)_{,\nu}. \quad (\text{A29})$$

Então, nós temos quatro graus de liberdade associados à covariância de (A14) frente a transformação de gauge (A19b), e outros quatro devido às identidades de Bianchi (A22). Ou seja, das dez componentes de h somente restam duas que devem ter um sentido físico direto

(que são as componentes das ondas gravitacionais com helicidade +2 e -2).

As equações (A29) não determinam completamente $\mathcal{E}_\mu$ pela mesma razão discutida acima para o caso de φ no eletromagnetismo.

Vamos agora retornar às nossas equações de campo com o termo cosmológico:

$$R_{\mu\nu} + \lambda s_{\mu\nu} = -k_0 (s_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} s^{\alpha}_{\alpha}/2). \quad (A30)$$

De acordo com o que foi discutido no capítulo IV, para a aproximação de campo fraco podemos tomar s na mesma forma que g [cf. p.e. eq.(IV.7)]:

$$s_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Então as eqs. (A30) se escrevem na forma:

$$R + \lambda h = -k_0 (\tilde{S} - \eta \tilde{S}/2), \quad (A31)$$

onde

$$\tilde{S} = S + c^4 \lambda \eta / 8\pi. \quad (A32)$$

Então, escolhendo coordenadas adequadas, i.e. escolhendo h tal que satisfaça as condições (A22), podemos escrever as eqs.(A31) na forma:

$$\square h_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu} = -2k_0 (\tilde{S}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \tilde{S}^{\alpha}_{\alpha}/2), \quad (A33)$$

com

$$(h^{\nu}_{\mu} - \delta^{\nu}_{\mu} h^{\alpha}_{\alpha}/2)_{,\nu} = 0. \quad (A34)$$

Obviamente, ainda podemos escolher coordenadas que satisfa-

cam (A33) e (A34) mesmo quando na presença do "termo cosmológico" λh . A única novidade ocorre quando fixamos o tensor $S_{\mu\nu}$ (p.e. fazendo $S=0$); então as equações linearizadas (A31) não são mais invariantes frente a transformação de gauge (A19b). Isso todavia não nos causa maiores problemas. Com a "perda" dessa invariância nós perdemos os 4 "graus de liberdade" associados à invariância das eqs. (A31) frente a transformação (A19b), e ficamos somente com os 4 graus de liberdade associados às equações (A34).

Assim nós passamos, de uma situação com $(10-4)-4=2$ componentes de $h_{\mu\nu}$ fisicamente significantes, para uma situação com $10 - 4 = 6$ componentes independentes e, portanto, com 6 componentes de $h_{\mu\nu}$ que devem ter um sentido físico direto.

Então, de acordo com as necessidades do capítulo IV, vamos procurar soluções de (A33) escolhendo a situação onde a "fonte" é estática (e onde as pressões são nulas). Nesse caso o campo é estático $\square h_{\mu\nu} = -\nabla^2 h_{\mu\nu}$, e (A33) reduz-se a

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} - 2\lambda h_{\mu\nu} = 2\kappa_0 (\tilde{S}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} S^{\lambda}_{\lambda}/2). \quad (A35)$$

Além do mais, o tensor de matéria forte $\tilde{S}_{\mu\nu}$, para pontos externos à fonte, é dado por:

$$\tilde{S} = \text{diag}(c^4 \rho, 0, 0, 0), \quad (A36)$$

onde ρ é a densidade de matéria forte (em unidades adequadas).

Obtemos então (com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(c^2, -1, -1, -1)$):

$$\tilde{S}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} S^{\lambda}_{\lambda}/2 = \text{diag}[c^2 \rho/2 (c^2, 1, 1, 1)]. \quad (A37)$$

Agora, fazendo $\rho_v = g \delta(r)$ e substituindo (A37) em (A35), resulta (para $\lambda > 0$):

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{00}/c^2 = -2g e^{-\sqrt{2\lambda}r} / r. \quad (A38)$$

Note-se que até aqui usamos coordenadas cartesianas. Porém o problema a ser resolvido, i.e. aquele de um hádron estático centrado na origem, tem simetria esférica (supondo o hádron esférico); assim precisamos, dentro do possível, adaptar os resultados precedentes para coordenadas polares esféricas.

Podemos partir das equações (A35) e (A36), que mantêm a mesma forma quando mudamos de coordenadas cartesianas para esféricas. Já as eqs. (A35) tomam a forma:

$$\tilde{S}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} S^2/2 = \text{diag} [c^2 \rho_v/2 (1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)], \quad (A39)$$

pois agora $\eta = \text{diag}(c^2, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$.

Então, levando (A39) em (A35) encontra-se, entre outras,

$$h_{11} = h_{00}/c^2, \quad (A40)$$

com h_{22} e h_{33} satisfazendo:

$$\nabla^2 h_{22} - 2\lambda h_{22} = 0; \quad (A41a)$$

$$\nabla^2 h_{33} - 2\lambda h_{33} = 0; \quad (A41b)$$

e portanto:

$$h_{22} = h_{33}. \quad (A42)$$

Então, para h_{00} e h_{11} , usando (A35), (A39) e (A40), obte-

mos:

$$h_{11} = h_{00}/c^2 = -2g e^{-\sqrt{2\lambda}r}/r, \quad (A43)$$

que é basicamente o resultado obtido no capítulo IV.

SOBRE AS EQUAÇÕES DE CAMPO NAS VIZINHANÇAS DE UM HÁDRON

O propósito deste apêndice é analisar a definição dada em Caldirola, Pavšic and Recami [13] para o "campo métrico tensorial forte", que nós chamamos de s no capítulo IV.

As equações de campo para as vizinhanças de um hádron propostas inicialmente eram:

$$R + \lambda s = -k_0(s - g S/2), \quad (B1)$$

onde R, λ, k_0, s , e $S=s$ têm as mesmas definições dadas no capítulo I.

O campo métrico s foi definido (p.e., em Caldirola, Pavšič and Recami [13]) dizendo que a métrica total g deveria ser a soma:

$$g = e + s, \quad (B2)$$

onde e é a métrica gravitacional. Assim, para a vizinhança de um hádron pode-se escrever:

$$g \equiv \eta + s, \quad (B3)$$

onde $e \equiv \eta$.

A equação (B1) também pode ser escrita na forma:

$$R_{\mu\nu} + \lambda S_{\mu\nu} = -\kappa_0 (S_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} S^\alpha{}_\alpha/2); \quad (B4)$$

ou ainda;

$$R^\nu{}_\mu - \delta^\nu{}_\mu R^\alpha{}_\alpha = -\kappa_0 S^\nu{}_\mu - \lambda (S^\nu{}_\mu - \delta^\nu{}_\mu S^\alpha{}_\alpha/2), \quad (B5)$$

onde: $S^\nu{}_\mu = g^{\alpha\beta} S_{\mu\alpha}$; $S^\alpha{}_\alpha = g^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$.

Vamos agora tomar as equações (B5) e fazer $S_{\mu\nu}=0$ (i.e., no vácuo, p.e. nas vizinhanças de um hádron). Assim;

$$R^\nu{}_\mu - \delta^\nu{}_\mu R^\alpha{}_\alpha/2 \equiv G^\nu{}_\mu = -\lambda (S^\nu{}_\mu - \delta^\nu{}_\mu S^\alpha{}_\alpha/2), \quad (B5a)$$

É bem conhecido que $G^\nu{}_\mu$ satisfaz as condições

$$G^\nu{}_{\mu;\nu} = 0, \quad (B6)$$

onde ";" denota derivação covariante. Assim, por consistência, devemos pedir que:

$$F^\nu{}_{\mu;\nu} = 0, \quad (B7)$$

onde

$$F^\nu{}_\mu = -\lambda (S^\nu{}_\mu - \delta^\nu{}_\mu S^\alpha{}_\alpha/2). \quad (B8)$$

Porém, o nosso problema é estático ($g_{\mu\nu,0}=0$; $g_{0i}=0$; $i=1,2,3$) e tem simetria esférica; logo podemos escolher coordenadas do tipo Schwarzschild (t, r, θ, φ); assim o tensor métrico total g pode ser escrito na forma:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(e^{\mu^{(u)}}, -e^{\nu^{(r)}}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta). \quad (\text{B9})$$

Com essa escolha podemos calcular o tensor G_{μ}^{ν} , obtendo (ver p.e. Rindler [81]):

$$G_0^0 = -e^{-\nu}/r + \bar{e}/r^2 - 1/r^2; \quad (\text{B10a})$$

$$G_1^1 = e^{-\mu}/r + \bar{e}/r^2 - 1/r^2; \quad (\text{B10b})$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \bar{e} [\mu'/2 - \mu\nu'/4 + \mu''/4 - (\mu' - \nu')/r], \quad (\text{B10c})$$

onde $' \equiv \partial/\partial r$.

Notemos que G_{μ}^{ν} dado por (B10a-c) são funções somente de r ; o mesmo deve ocorrer, então, com F_{μ}^{ν} [cf. eq. (B8)]. Assim, a equação (B7), com $\mu = 1$ produz [cf. eq. (B9)]:

$$F_{1;\nu}^{\nu} = \mu' F_1^1/2 + F_{1,r}^1 + 2F_{1,r}/r - \mu' F_0^0/2 - 2F_2^2/r, \quad (\text{B11})$$

onde usamos o fato que, por (B10c), $F_2^2 = F_3^3$.

Como foi suposto inicialmente, $s_{\mu\nu}$ é também um tensor métrico, associado ao campo forte; então, devido à simetria do problema, pode ser escrito na mesma forma que $g_{\mu\nu}$. Assim, tem-se:

$$s_{\alpha}^{\alpha} = s_0^0 + s_1^1 + C; \quad (\text{B12a})$$

$$C \equiv s_2^2 + s_3^3, \quad (\text{B12b})$$

Logo, pela equação (B8), obtemos:

$$F_0^0 = -\lambda(s_3^3 - s_1^1 - C)/2, \quad (\text{B13a})$$

$$F_1^1 = -\lambda(s_i - s_0^0 - c)/2, \quad (B13b)$$

$$F_2^2 = +\lambda(s_2^2 - s_0^0/2 - s_{i/2} - c/2), \quad (B13c)$$

$$F_3^3 = \lambda(s_2^3 - s_0^0/2 - s_{i/2} - c/2). \quad (B13d)$$

Mas esses resultados, junto com (B10c), implicam que $F_2^2 = F_3^3$; e então: $s_2^2 = s_3^3 = c/2$; logo:

$$F_2^2 = F_3^3 = -\lambda(s_0^0 + s_i)/2. \quad (B13e)$$

Usando (B13a) e (B13b) em (B5) e depois levando em consideração (B10a) e (B10b), obtemos:

$$\left. \begin{aligned} -\nu' \bar{e}^{\nu}/n + \bar{e}^{\nu}/n^2 - 1/n^2 &= -\lambda(s_0^0 - s_i - c)/2, \\ \mu' \bar{e}^{\nu}/n + \bar{e}^{\nu}/n^2 - 1/n^2 &= -\lambda(s_i - s_0^0 - c)/2, \end{aligned} \right\} \quad (B14)$$

ou seja:

$$\mu' - \nu' = (\bar{e}^{\nu} - 1)/n. \quad (B15)$$

Além do mais, substituindo (B13a-c) em (B11), resulta:

$$[\lambda(s_0^0 - s_i + c)/2]_{,n} + \lambda\mu'(s_0^0 - s_i)/2 + 2\lambda(c/2 - s_i)/n = 0;$$

ou;

$$(s_0^0 - s_i + c)_{,n} + \mu'(s_0^0 - s_i) - 4s_i/n + 2c/n = 0. \quad (B16)$$

Vamos agora tentar resolver essas equações, especificamente (B14), com a condição (B16).

Usando o que foi inicialmente sugerido nas equações (B2) e (B3), podemos escrever:

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \quad (B17)$$

onde - como já dissemos - $e \equiv \eta$ é o campo tensorial gravitacional e s um novo campo tensorial associado ao campo forte. Note-se que, com a escolha (B17), levando em conta (B9) e escrevendo η em coordenadas polares esféricas, obtemos que as condições (B12) são satisfeitas. Dessa forma as equações importantes (B14) e (B16) ficam válidas e podem ser usadas para encontrar g na forma (B17).

Observemos agora que, com a presente escolha das coordenadas, C pode ser somente uma constante, uma vez que pelas eqs. (B9) e (B17) temos:

$$g_{22} = s_{22} + \eta_{22} \therefore s_{22} = g_{22} - \eta_{22} = -(r^2 - C_0 r^2) = (C_0 - 1)r^2,$$

onde C_0 é uma constante. Logo:

$$s_2^2 = s_3^2 = (C_0 - 1)/2, \text{ e } C = C_0 - 1.$$

Em especial, se as coordenadas forem tais que $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$, como foi escolhido acima, então resulta $s_2^2 = s_3^2 = C/2 = 0$.

Assim, com a escolha (B17), obtemos:

$$\begin{aligned} s_0^0 &= g^{00} s_{00} = \bar{e}^\mu (e^\mu - 1) = 1 - e^\mu, \\ s_1^1 &= g^{11} s_{11} = -e^{-\nu} (-e^\nu + 1) = 1 - e^{-\nu}. \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (B16), vem:

$$(\bar{e}^\nu - e^\mu)_{,n} + \mu' (\bar{e}^\nu - e^\mu) - 4(1 - \bar{e}^\nu)/r + 2C/r = 0;$$

o que produz:

$$-\nu' e^{-\nu} + \mu' e^{-\nu} = 4(1 - \bar{e}^\nu)/r - 2C/r,$$

ou:

$$\mu' - \nu' = 4(e^\nu - 1)/r - 2Ce^\nu/r. \quad (B18)$$

Comparando com (B15) resulta:

$$4(e^\nu - 1) - 2Ce^\nu = 2(e^\nu - 1);$$

de onde obtemos que:

$$e^\nu = 1/(1 - C). \quad (B19)$$

Levando (B19) em (B15) ou (B18), vem $\mu' = 2C/r$; ou:

$$e^\nu = Kr^{2C}; \quad K = \text{constante}. \quad (B20)$$

Notemos que os resultados (B19) e (B20) são incompatíveis com o nosso modelo físico. A única solução possível de um modo geral seria a métrica chata. Assim, depois dos resultados do cap. IV, somos levados a concluir que a escolha (B17) tem sentido somente quando s é fraco (cf. apêndice A).

EQUAÇÕES DE EINSTEIN-YUKAWA: HÁDRONS COMO BURACOS NEGROS FORTES

Nós rederivaremos aqui resultados obtidos por Recami e Castorina [77] (ver também Recami [73] e suas referências), que sugerem ser possível associar os hádrons a "buracos negros fortes".

O procedimento que seguiremos aqui é um pouco diferente do que foi seguido no restante do trabalho. Nesse apêndice, ainda, procuraremos soluções das equações de Einstein ordinárias (na vizinhanças de um hádron): somente que o tensor de matéria-energia forte associado ao campo forte é definido de maneira análoga ao caso eletromagnético, conforme veremos a seguir.

Consideremos para isso uma fonte de campo forte estático, cujo campo é do tipo Yukawiano:

$$\psi = -g e^{-m_0 r} / r, \quad (C1)$$

onde $m_0 = m_\pi c/\hbar$.

Agora, procedendo de maneira análoga ao caso do eletromagnetismo, podemos definir uma densidade de energia $u=u(r)$ para o potencial de Yukawa.

A expressão (C1) é análoga à expressão para o potencial Coulombiano:

$$V(r) = -e/4\pi\epsilon_0 r. \quad (C2)$$

No caso do eletromagnetismo, a energia potencial de um grupo de objetos, que interagem através do potencial (C2), é

$$W_e = 1/2 \iint \rho_e(\vec{x}) \frac{\rho_e(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x d^3x', \quad (C3)$$

onde $\rho_e(\vec{x})$ é a densidade de carga elétrica.

Assim, para o potencial de Yukawa podemos, analogamente, escrever:

$$W = 1/2 \iint \rho_g(\vec{x}) \frac{\rho_g(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{-m_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x d^3x', \quad (C4)$$

onde $\rho_g(\vec{x})$ é a densidade de carga forte.

Agora, (C4) pode ser escrita como:

$$W = 1/2 \int \rho_g(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d^3x, \quad (C5)$$

onde

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho_g(\vec{x}') \frac{e^{-m_0|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \quad (C6)$$

é o potencial de Yukawa.

Temos, porém,

$$\nabla^2 (e^{-m_0 r}/r) = m_0^2 e^{-m_0 r}/r - 4\pi \delta(r). \quad (C7)$$

Assim, aplicando ∇^2 a ambos os lados de (C6) e usando (C7), obtemos:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = m_0^2 \varphi(\vec{x}) - 4\pi \rho_3(\vec{x}). \quad (C8)$$

Substituindo $\rho_3(x)$ de (C8) em (C5), obtemos:

$$W = \frac{1}{2} \int [-\nabla^2 \varphi(\vec{x}) + m_0^2 \varphi(\vec{x})] \cdot \frac{\varphi(\vec{x})}{4\pi} d^3x. \quad (C9)$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito de (C9), vem:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int [|\nabla \varphi|^2 + m_0^2 |\varphi|^2] d^3x. \quad (C10)$$

Então, a "densidade de energia" para o campo potencial de Yukawa é

$$U(r) = [|\nabla \varphi|^2 + m_0^2 |\varphi|^2] / 8\pi. \quad (C11)$$

Usando (C1) em (C11) obtemos:

$$U(r) = g^2 e^{-2m_0 r} (2m_0^2 + 2m_0/r + 1/r^2) / 8\pi r. \quad (C12)$$

Nós estamos procurando a métrica nas vizinhanças de uma partícula com carga forte não nula. Assim, supondo simetria esférica e situação estática, podemos escrever:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (e^{\mu(r)}, -e^{\nu(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta), \quad (C13)$$

$g_{\mu\nu}$ sendo o tensor métrico fundamental, $\mu(r)$ e $\nu(r)$ devem ainda ser determinados.

O tensor de "energia-momento forte" nesse caso pode ser escrito na forma:

$$\tilde{T}_\mu^\nu = \text{diag} (u(r), 0, 0, 0). \quad (C14)$$

Usando (C12), (C13) e (C14) nas equações de Einstein,

$$R_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu R_\lambda^\lambda/2 = -8\pi \tilde{T}_\mu^\nu/c^4, \quad (C15)$$

encontramos (ver apêndice B):

$$-8\pi u(r)/c^4 = -\bar{e}^{-\nu} \nu'/r + \bar{e}^{-\nu}/r^2 - 1/r^2; \quad (C16)$$

$$0 = \bar{e}^{-\nu} \mu'/r + \bar{e}^{-\nu}/r^2 - 1/r^2, \quad (C17)$$

onde " ' " $\equiv d/dr$.

Escrevendo $y = \exp[-\nu]$ em (C16) e usando (C12), vem:

$$y'r + y = 1 - d^2 e^{-2m_0 r} (2m_0^2 + 2m_0/r + 1/r^2), \quad (C18)$$

cuja solução é:

$$\bar{e}^{-\nu(r)} = y = 1 - 2l/r - m_0 d^2 e^{-2m_0 r}/r + d^2 e^{-2m_0 r}/r^2, \quad (C19)$$

onde $d^2 = g^2/c^4$, $m_0 = m_\pi c/\hbar$, e l é uma constante de integração relacionada com a carga forte do hádron fonte.

Tendo $\nu(r)$ em (C19) podemos calcular $\mu(r)$, escrevendo (C17) na forma:

$$\mu'(r) = (1/y - 1)/r. \quad (C20)$$

Agora, o "raio de Schwarzschild forte" seria individualizado por;

$$e^{-\nu(r)} = 0 \quad ; \quad e^{\mu(r)} = 0. \quad (C21)$$

Mais em geral (ver o capítulo III), ainda no caso de simetria esférica, um "horizonte" do tipo de Schwarzschild pode ser caracterizado por:

$$e^{-\nu(r)}. \quad (C22)$$

Assim, usando essa condição em (C19), por exemplo no caso dos nucleons, com $\ell \approx g/c^2$, $\exp [-\nu]$ se anula para dois valores de r : r_1 e r_2 , com:

$$r_1 \approx 1 \text{ fm} \quad ; \quad r_2 \approx 10^{-2} \text{ fm}.$$

O raio r_1 é da mesma ordem de grandeza que o raio mostrado pelos hádrons através da interação forte; ao segundo valor r_2 podem ser dado vários significados (ver p.e. Ammiraju et al. [21]).

REFERÊNCIAS

- [1] - Ames, W.L. and Thorne, K.S. (1968): "The optical appearance of a star that is collapsing through its gravitational radius". The Astrophysical Journal 151, 659-670.
- [2] - Ammiraju, P.; Recami, E. and Rodrigues Jr., W.A. (1983): "Chirons, Geminons, Centauros, decays into pions: A phenomenological and theoretical analysis". Il Nuovo Cimento ZBA, 172-203.
- [3] - Ammiraju, P.; Recami, E. and Rodrigues Jr., W.A. (1986): "Centauro events and a possible new strong interactions". Relatório Interno nº 350 - IMECC- Unicamp, Campinas.
- [4] - Ammiraju, P., Roversi, J.A.; Recami, E. and Rodrigues Jr., W.A. (1986): "Hadronic mass spectra in a unified approach of strong and gravitational interactions". Relatório Interno nº 351 - IMECC - Unicamp, Campinas.
- [5] - Anderson, J.L. (1976): "Principles of Relativity Physics". Academic Press, New York - N.Y.
- [6] - Arthur, R. (1981): "Recent experimental advances in positronium research". Review of Modern Physics 53, 127-165.
- [7] - Bardeen, J.M. (1970): "Kerr metric black holes". Nature 226, 64-65.
- [8] - Bardeen, J.M.; Carter, B. and Hawking, S.W. (1973): "The four laws of black hole mechanics". Communication in Mathematical Physics 31, 1161-1170.
- [9] - Bekenstein, J.D. (1973): "Black holes and entropy". Physical Review D7, 2333-2346.

- [10]- Bekentein, J.D. (1974): "Generalized second law of thermodynamics in black hole physics". Physical Review D9, 3292-3300.
- [11]- Boyer R.H. and Lindquist, R.W. (1967): "Maximal analytical extension of the Kerr metric". Journal of Mathematical Physics 8, 265-281.
- [12]- Boyer, R.H. and Price, T.G. (1965): "An interpretation of the Kerr metric in general relativity". Proceedings of Cambridge Philosophical Society 61, 531-534.
- [13]- Caldirola, P.; Pavšič, M. and Recami, E. (1978): "Explaining the large numbers by a hierarchy of 'universes': A unified theory of strong and gravitational interactions". Il Nuovo Cimento 48B, 205-271.
- [14]- Caldirola, P.; Pavšič, M. and Recami, E. (1978): "Classical quark confinement from general relativity". Physics Letters A66, 9-12.
- [15]- Caldirola, P. and Recami, E. (1978): "A theory of strong interactions 'from' general relativity". Lettere al Nuovo Cimento 24, 565-571.
- [16]- Caldirola, P. and Recami, E. (1980): "A 'large number' theory with constant G". Lettere al Nuovo Cimento 22, 156-160.
- [17]- Carter, B. (1966): "The complete analytic extension of the Reissner-Nordstrom metric in the special case $e^2 = m^2$ ". Physics Letters 21, 423-424.
- [18]- Carter, B. (1970): "The commutation property of a stationary axisymmetric system". Communications in Mathematical Physics 17, 233-288.
- [19]- Carter, B. (1971): "Axisymmetric black holes has only two degrees of freedom". Physical Review Letters 26, 331-333.
- [20]- Carter, B. (1973): "Properties of the Kerr metrics", in "Black

holes", ed. by B.S. Dewitt and C.M. Dewitt. Gordon and Breach (New York, London, Paris).

- [21]- Carter, B. (1973): In "Les Astre Occlus". Gordon and Breach, N.Y.
- [22]- Castorina, P. and Recami, E. (1978): "Hadrons as compounds of bradyon particles and tachyons". Lettere al Nuovo Cimento 22, 195-201.
- [23]- Christodoulou, D. (1970): "Reversible and irreversible transformations in black hole physics". Physical Review Letters 25, 1596-1597.
- [24]- Christodoulou, D. and Ruffini, R. (1971): "Reversible transformations of a charged black hole". Physical Review D4, 3553-3555.
- [25]- Davies, P.C.W. (1974): "The Physics of time Asymetry". Surrey University Press/University of California Press. California, Illinois.
- [26]- Davies, P.C.W. (1978): "Thermodynamics of black holes". Reports Progress on Physics 42, 1313-1355.
- [27]- Dewitt B.S. (1975): "Quantum field theory in curved space-time". Physics Reports C19, No 6, 295.
- [28]- Dirac, P.A.M. (1978): "A new basis for cosmology". Proceedings of the Royal Society A165, 199-208.
- [29]- Dirac, P.A.M. (1974): "Cosmological models and the large numbers hypothesis". Proceedings of the Royal Society A338, 439.
- [30]- Eddington, A.S. (1924): "A comparation of Whitehead's and Einstein's formulas". Nature 113, 192-
- [31]- Eddington, A.S. (1958): "The Expanding Universe". University of Michigan Press (Ann Arbor, Michigan).

- [32]- Edwards, C. et al. (1982): "Observation on an η_c' candidate state with mass 3592 ± 5 MeV". Physical Review Letters 48, 70-73.
- [33]- Einstein, A. (1955): Prefácio para "Cinquant'anni di Relatività". Ed. por M. Pantaleo (Giunti, Florence).
- [34]- Fierz, M. and Pauli, W. (1939): "On relativistics wave equations for particles of arbitrary spin in an eletromagnetic field". Proceedings of the Royal Society A173, 211-232.
- [35]- Finkelstein, D. (1958): "Past-future asymetry of the gravitacional fields of a point particle". Physical Review 110, 965-967.
- [36]- Floyd, R.M. and Penrose, R. (1971): "Extraction of rotational energy from a black hole". Nature 229, 177-179.
- [37]- Frolov, V.P. (1976): "Black holes and quantum processes in them". Uspekhi Fizicheskikh Nauk 118, 473-503; Soviet Physics USPEKHI 19, 244-262.
- [38]- Fuller, R.W. and Wheeler, J.A. (1962): "Causality and multiply conected space-time". Physical Review 128, 919-929.
- [39]- Gerlach, U.H. (1976): "The mechanism of balck-body radiation from an incipient black hole". Physical Review D14, 1479-1510.
- [40]- Gibbons, G.W. and Hawking, S.W. (1976): "Cosmological horizons, thermodynamics, and particle creations". Physical Review D15, 2738-2751.
- [41]- Graves, J.C.. and Brill, D.R. (1960): "Oscillatory character of Reissner-Nordstrom metric for an ideal charged whormhole". Physical Review 120, 1507-1513.
- [42]- Grushin, V.F.; Leikin, E.M.; Rotvian, A. and Shikanyan, A.A. (1984): "Eletric quadrupole photoexcitation of Δ_{33} and experimental confirmation of the tensor interaction of quarks."

Pis'ma Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki 39,
491-492; JETP Letters 39, 597-598.

- [43]- Hartle, J.B. and Hawking, S.W. (1976): "Path-Integral derivation of black hole radiance". Physical Review D13, 2188-2203.
- [44]- Hawking, S.W. (1971): "Gravitational radiation from colliding black holes". Physical Review Letters 26, 1344-1346.
- [45]- Hawking, S.W. (1972): "Black holes in general relativity". Communication in Mathematical Physics 25, 151-166.
- [46]- Hawking, S.W. (1973): "The event horizon". In "Black_Holes". Proceedings of 1972 session of Ecole d'été de Physique Théorique. Gordon and Breach, New York.
- [47]- Hawking, S.W. (1973): "The analogy between black hole mechanics and thermodynamics". Sixth Texas Symposium on Relat. Astrophysics; ed. by D.J. Hegyi. New York Academy of Sciences, 268-271.
- [48]- Hawking, S.W. (1974): "Black hole explosions?". Nature 248, 30.
- [49]- Hawking, S.W. (1975): "Particle creation by black holes". Communication in Mathematical Physics 43, 199-220.
- [50]- Hawking, S.W. (1976): "Black holes and thermodynamics". Physical Review D13, 191-197.
- [51]- Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R. (1973): "The_large_scale_structure_of_space-time". Cambridge University Press, Cambridge, U. K.
- [52]- Israel, W. (1967): "Event horizons in vacuum space-times". Physical Review 164, 1776-1779.
- [53]- Jaynes, E.T. (1957): "Information theory and statistical mechanics". Physical Review 106, 620-630.
- [54]- Jaynes, E.T. (1957): "Information theory and statistical mechanics II". Physical Review 108, 171-190.

- [55]- Jordam, P. (1949): "Formation of the stars and development of the universe". *Nature* 164, 637-640.
- [56]- Kerr, R.P. (1963): "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics". *Physical Review Letters* 11, 237-238.
- [57]- Klein, O. (1971): "Arguments concerning relativity and cosmology". *Science* 171, 339-345.
- [58]- Kruskal, M.D.- (1960): "Maximal extension of Schwarzschild metric". *Physical Review* 119, 1743-1745.
- [59]- Misner, C.W.; Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. (1973): "Gravitation and Cosmology". W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- [60]- Muller Zum Hagen, H.; Robinson, D.C. and Selfert, H.J. (1973): "Black holes in static vacuum space-times". *General Relativity and Gravitation* 4, 53-78.
- [61]- Newman, E.T. (1975): "Rotation in general relativity". *Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi'* (1978), ed. by R. Giacconi and R. Ruffini (North-Holland Publishing Company, Amsterdam - N.Y. - Oxford), 555-561.
- [62]- Newman, E.T.; Couch, E.; Chinnapared, K.; Exton, A.; Prakash, A. and Torrence, R. (1965): "Metric of a rotating charged mass". *Journal of Mathematical Physics* 6, 918-919.
- [63]- Nordström, G. (1918): "On the energy of the gravitational field in Einstein's theory". *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* 20, 1238-1245.
- [64]- Nugayev, R.M. (1985): "Particle creation by a black hole as a consequence of quantum field effects in flat space-time". *Nuovo Cimento* 86B, 90-96.
- [65]- Page, D.N. (1976): "Particle emissions from a black hole: massless particles from a uncharged, nonrotating hole". *Physical*

- [66]- Penrose, R. (1964): "Conformal treatment of infinity". in "Relativity, Groups and Topology". Ed. by C.M. Dewitt e B.S. Dewitt; Les Houches Summer School, 1963 (Gordon and Breach, New York), 565-584.
- [67]- Penrose, R. (1965): "Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour". Proceedings of the Royal Society A284, 159-203.
- [68]- Penrose, R. (1965): "Gravitational collapse and space-time singularities". Physical Review Letters. 14, 57-59.
- [69]- Penrose, R. (1968): "Structure of space-time". in "Battelle Rencontres". Ed. by C.M. Dewitt and J.A. Wheeler (Benjamin, NY), 121-235.
- [70]- Penrose, R. (1975): "Gravitational collapse: A review". in "Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, ed. by R. Giacconi and Ruffini (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, N.Y., Oxford, 1978), 566-582.
- [71]- Raine, D.J. (1975): "Mach's principle in general relativity". Monthly Notices of Royal Astronomical Society 171, 204-214.
- [72]- Recami, E. (1979): " ", in "Relatività, Quanta and Cosmology in the Development of the Scientific Thought of A. Einstein", ed. by F. de Finis and M. Pantaleo, Vol II (Johnson Rep. Co., New York), 537-597.
- [73]- Recami, E. (1982): "Confinement and hadron-hadron interactions by general relativistic methods", in "Quarks and the Nucleus": Progress in Particle and Nuclear Physics, vol. VIII, ed. by Sir D. Wilkinson (Pergamon Press, Oxford, 1982), 401-411.
- [74]- Recami, E. (1982): "Elementary particles as micro-universes", in

"Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy and Theoretical Biology, ed. by A. Van der Merwe (Plenum Publishing corporation, 1983), 377-396.

- [75]- Recami, E. (1983): "A modified large number theory with constant G ". Foundations of Physics 13, 341-346.
- [76]- Recami, E. (1986): "Classical tachyons and possible applications". La Rivista del Nuovo Cimento 6, sec. 12.
- [77]- Recami, E. and Castorina, P. (1976): "On quark confinement: hadrons as <<strong black holes>>". Lettere al Nuovo Cimento 22, 347-350.
- [78]- Recami, E. and Tonin-Zanchin, V. (1986): "Does thermodynamics require a new expansion after the 'Big-crunch' of our cosmos?". Physics Letters B177, 304-309.
- [79]- Recami, E.; Martínez, J.M. and Tonin-Zanchin, V. (1986): "Does thermodynamics require our cosmos to undergo a serie of expansion/contraction cycles?", in "Progress in Particle and Nuclear Physics", vol. XVII (Pergamon Press, Oxford, 1986), 143-151.
- [80]- Reissner, H. (1916): "Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der Einsteinschen theorie". ("On the special gravitation of the eletric field givem by Einstein's theory"). Annalen der Physik 50, 106-120.
- [81]- Rindler, W. (1977): "Essential Relativity". 2th ed. Springer-Verlag (N.Y., Heidelberg, Berlin).
- [82]- Robinson, D.C. (1974): "Classification of black holes with electromagnetic fields". Physical Review D10, 458-460.
- [83]- Robinson, D.C. (1974): "Uniqueness of the Kerr black hole". Physical Review Letters 34, 905-906.
- [84]- Roos, D.K. (1972): "Elementary particles and general relati-

vity". Il Nuovo Cimento 8A, 603-610.

- [85]- Rosen, J. (1965): "Embbeding of various relativistic riemannian spaces in pseudo-euclidean spaces". Review of Modern Physics 37, 204-214.
- [86] Rosen, N. (1974): "A theory of gravitation". Annals of Physics 84, 455-473.
- [87]- Rosen, N. (1979): "Bimetric general relativity". Lettere al Nuovo Cimento 25, 266-270.
- [88]- Rosen, N. (1980): in Proceedings of the International School of Cosmology an Gravitation, ed by P.G. Bergmam and V. de Sabata (Plenum Press, N.Y.)
- [89]- Rosen, N. and Falik, D. (1980): "Particle field in bimetric general relativity". The Astrophysical Journal 239, 1024-1031; "The collapsed state of a star". The Astrophysical Journal 239, 1032-1035.
- [90]- Salam, A. (1978): in "Proceedings of the 19th International Conference on High-Energy Physics" (Tokyo, 1978), 937.
- [91]- Salam, A. and Strathdee (1977): "Class of solutions for the strong-gravity equations". Physical Review D16, 2668-2672.
- [92]- Scanavini, M.E.F. (1986): "Covarianca, Invarianca e Princípio de Relatividade"; Tese de Doutorado. IMECC - Unicamp, Campinas (relator: W. A. Rodrigues Jr.).
- [93]- Shannon, C.E. and Weaver, W. (1949): "The mathematical theory of communications". University of Illinois Press, Urbana.
- [94]- Sivaram, C. and Sinha, K.P. (1979): "Strong spin-two interactions and general relativity". Physics Reports 51, n°3.
- [95]- Smarr, L. (1973): "Mass formula for Kerr black holes". Physical Review Letters 30, 71-73.
- [96]- Szekeres, P. (1966): "Embedding properties of general relativis-

- tic manifolds". Il Nuovo Cimento 63A, 1062-1076.
- [97]- Vishveshwara, C.V. (1968): "Generalization of the 'Schwarzschild surface' to arbitrary static and stationary metrics". Journal of Mathematical Physics 9, 1319-1322.
- [98]- Wald, R.M. (1974): "Energy limits in Penrose process". The Astrophysical Journal 191, 231-237.
- [99]- Wald, R.M. (1984): "General Relativity". University of Chicago Press, Chicago - Illinois, cap. XII.
- [100]- Wenda, S. and Shitong, Z. (1985): "Globally regular solutions of a Schwarzschild black hole and Reissner-Nordstrom black hole". General Relativity and Gravitation 17, 729-746.
- [101]- Weinberg, S. (1972): "Gravitation and Cosmology". John Wiley and Sons. Inc. New York (N.Y.).
- [102]- Weyl, H. (1919): "Eine neue erweiterung der relativitätstheorie" ("A new extension to the relativity theory"). Annalen der Physik 59, 101-133.
- [103]- Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I.D. (1971): "Relativistic Astrophysics", vol.1: "Stars and Relativity". University of Chicago Press, Chicago-Illinois.