



Gustavo Silva Wiederhecker

Controle e Interação de Fônons e Fótons em Fibras Ópticas de Cristal Fotônico

*Este exemplar corresponde
à redação final da tese de
doutorado defendida pelo
aluno Gustavo Silva Wiederhecker
e aprovada pela comissão
julgadora.*

15/05/2008

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física
Gleb Wataghin para obtenção do título de Doutor em
Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Hugo Luis Fragnito

Campinas, SP
2008

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

W635c	Wiederhecker, Gustavo Silva Controle e interação de fônons e fótons em fibras ópticas de cristal fotônico / Gustavo Silva Wiederhecker. -- Campinas, SP : [s.n.], 2008. Orientador: Hugo Luis Fragnito. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin". 1. Espalhamento Brillouin. 2. Cristais fotônicos. 3. Cristais fonônicos. 4. Fibras ópticas. I. Fragnito, Hugo Luis. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título. (vsv/ifgw)
-------	--

- **Título em inglês:** Control and interaction of phonons and photons in photonic crystal fibers
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 - 1. Brillouin scattering
 - 2. Photonic crystals
 - 3. Phononic crystals
 - 4. Optical fibers
- **Área de Concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**
 - Prof. Hugo Luis Fragnito
 - Prof. Christiano José Santiago de Matos
 - Prof. Michal Lipson
 - Prof. Carlos Henrique de Brito Cruz
- **Data da Defesa:** 15/05/2008
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **GUSTAVO SILVA WIEDERHECKER - RA 001795**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 15/05/2008.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Hugo Luis Fragnito – DEQ/IFGW/UNICAMP
(Orientador do Candidato)

Prof. Dr. Christiano José Santiago de Matos
LF/UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

Profª. Drª. Michal Lipson
CORNELL UNIVERSITY, NY,USA

Prof. Dr. Carlos Henrique de Brito Cruz
DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Newton Cesário Frateschi
DFA/IFGW/UNICAMP

Resumo

Neste trabalho são investigadas técnicas para controlar o confinamento de fótons e fônons em fibras ópticas de cristal fotônico (PCF). Utilizando métodos numéricos robustos para resolver as equações de Maxwell, um novo tipo de PCF com núcleo tubular é proposto. Simulações e experimentos demonstram que esta estrutura confina a luz em um buraco de ar com diâmetro de apenas 110 nm. A figura de mérito para efeitos não-lineares nesta pequena região é 10 bilhões de vezes maior do que no caso de um feixe gaussiano altamente focalizado e 100 vezes maior que o atual estado-da-arte em fibras de *band-gap* fotônico. Também é analisada teoricamente uma fibra PCF do tipo kagomé. Modelos que explicam suas complexas características de guiamento são investigados de forma analítica e numérica. No que diz respeito à fônons em PCFs, é investigado o espalhamento Brillouin copropagante e contra-propagante. Em particular, são demonstradas maneiras de reduzir a interação acusto-óptica nos casos de co- e retro-espalhamento. Também é demonstrada a presença de band-gaps fonônicos nestas estruturas. Finalmente, é investigado o controle óptico coerente de modos acústicos nestas fibras, mostra-se que é possível amplificar ou frear modos acústicos com frequência de oscilação na faixa de GHz.

Palavras-chave: Espalhamento Brillouin, Cristal Fotônico, Cristal Fonônico, Fibras Ópticas.

Abstract

Techniques that may allow control and tight confinement of photons and phonons in photonic crystal fibers (PCFs) are investigated in this thesis. By means of robust numerical methods to solve Maxwell equations, a new kind of PCF with a tubular core is proposed. Simulations and experimental results show that such structure is able to confine light tightly inside the 100 nm bore, the nonlinear figure of merit for such tiny bore is found to be 10 billion fold larger than the focused Gaussian beam counterpart, it is also 100 times larger than the state-of-the-art hollow core photonic band-gap fibers. The guidance mechanism of kagomé structure hollow-core PCF is also investigated, simple models are proposed to explain most of the experimentally observed features and compared to full numerical simulations. In what concerns phonons, both forward and backward Brillouin scattering is investigated in PCFs. It is demonstrated how one may suppress both using such fibers. It is also shown the existence of complete band-gaps for in-plane propagation in the PCF cladding. Another set of experiments show that one can perform coherent optical control of the acoustic modes of such fibers, 100-fold amplification or almost complete suppression of GHz oscillations is achieved.

Keywords: Brillouin scattering, Photonic Crystals, Phononic Crystals, Optical Fibers.

Agradecimentos

Foi indispensável, ao longo destes anos na UNICAMP, o apoio e amizade que recebi das diversas pessoas que interagi dentro e fora de Barão Geraldo. Guardo um carinho imenso por todas elas. Foi por estas, acima de tudo, que este tempo se tornou sólido e inesquecível na minha memória. Não tenho dúvidas que alguns nomes faltarão aqui, nem por isso foram menos importantes.

Aos amigos que fizeram-me enxergar mais longe:

André Guimarães, Andrés Rieznik, Pedro Frejlich, Thiago e Guilherme Alegre, Ivan Struchiner, André Gal, Carla Azimonte, Paulo Dainese, Fernando Garcia, Rodrigo Pereira, Wendel Lopes, José Adolfo, Mariana Musa, Saulo Aidar e Cris Dacanal, Nádia Rosa, Alê, Paula Gneri e Peter. E todos os outros que, apesar de não listados, sabem da sua importância!

Toda a turma do Groto que me introduziu ao prazer das rodas de samba.

Aos Professores que tiveram demasiada paciência com as minhas indagações, especialmente: Marco Aurélio Lima, Cláudio Lenz e Rubens Brito.

CPG: Maria Ignêz, Cássia, Armando e colegas. Vocês tornam a pós-graduação possível.

Meu orientador Hugo Fragnito. Por sua amizade, críticas explícitas e confiança. Hoje vejo o valor da "física de guardanapo". Valeu!

Aos companheiros de laboratório: José Manuel e Diego Marconi. Foi difícil! Mas conseguimos dividir o laboratório e ficar numa boa. Ao Vagner Cardoso que heroicamente tentava regular a entropia do lab. Ao parceiro Cristiano Cordeiro pelas pedaladas (e também pelas várias PCFs estudadas nesta tese).

Aos professores e pesquisadores da engenharia elétrica: Antonio Frasson (Universidade Federal do Espírito Santo), Hugo Figueroa (UNICAMP), Vitaly Félix Rodríguez-Esquerre e José Patrocínio da Silva. Sem a contribuição e o compartilhamento de códigos deste pessoal, jamais teria desenvolvido os programas de elementos finitos essenciais para esta tese.

À Vânia Rosa, que só conheci profundamente na reta final. Contudo, foi apenas com seu amor e carinho que consegui dar minhas últimas braçadas de forma sustentável. Te amo gatitita.

Finalmente agradeço a minha família que, apesar dos oito anos longe de casa, sempre se esforçaram para manter nossos laços atados. Primos, tias, tios e avós, vocês fizeram por onde. Como diriam... um especial pro meu Pai, minha Mãe e minhas irmãs Laura e Isa, amo vocês!

Aos meus pais e queridas irmãs.

Nota

Em razão dos diversos pacotes numéricos e gráficos utilizados na produção do conteúdo desta dissertação, foi tomada a liberdade de utilizar o ponto (.) como separador decimal. Todos os gráficos e números apresentados no texto seguirão esta convenção.

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xxv
Glossário	xxvii
Lista de Símbolos	xxvii
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxix
1 Introdução	1
1.1 Uma breve história...	1
1.2 Como chegamos aqui?	2
1.3 Organização dos capítulos	5
1.3.1 Corpo	5
1.3.2 Apêndices	7
2 Controle da luz em guias de onda	9
2.1 Introdução	9
2.2 Equação de onda em guias dielétricos	9
2.2.1 Equação de ondas nos guias: autofunções (modos)	11
2.2.2 Condições de contorno - continuidade dos campos	12
2.2.3 Nomenclatura de modos	13
2.3 Guias cilíndricos - fibras ópticas	14
2.3.1 Distribuição de energia	17
2.3.2 Dispersão de velocidade de grupo	20
2.4 Fibras de cristal fotônico	25
2.5 Conclusões	27
3 Confinando luz em dimensões sub-lambda	29
3.1 Introdução	29
3.2 Princípio físico	29
3.2.1 Guia "slot"	30
3.2.2 Guia Tubular	31
3.3 PCF com núcleo tubular: demonstração experimental	37

3.3.1	<i>Design</i> das fibras	37
3.3.2	Fabricação e experimentos	42
3.4	Conclusões	49
4	Guiamento em fibras kagomé	51
4.1	Introdução	51
4.2	Densidade de estados	52
4.3	Modelos de hexágonos e anéis concêntricos	54
4.4	Comparação com a estrutura Kagomé	56
4.5	Conclusões	60
5	Interação entre luz e som	61
5.1	Introdução	61
5.2	Propagação de ondas acústicas	61
5.2.1	Equação de movimento	61
5.2.2	Equação de onda para o vetor deslocamento	63
5.2.3	Condições de contorno	63
5.3	Relações de dispersão em guias de onda	64
5.4	Efeito acusto-óptico	66
5.5	Cinemática da interação	67
5.5.1	Retro-espalhamento	67
5.5.2	Co-espalhamento	69
5.5.3	Conservação de energia	70
5.6	Teoria de perturbação: <i>coupled mode theory</i>	70
5.6.1	Acoplamento induzido por modos acústicos	72
5.6.2	Conservação de energia	73
5.6.3	Acoplamento ressonante: conservação de momento	73
5.7	Excitação de ondas acústicas	75
5.7.1	Excitação térmica	75
5.7.2	Excitação óptica: Eletrostrição	75
5.8	Conclusões	76
6	Co-espalhamento Brillouin	77
6.1	Introdução	77
6.2	Guia cilíndrico	78
6.2.1	Regras de seleção	78
6.2.2	Modos acústicos	79
6.2.3	Perturbação e acoplamento	80
6.2.4	Montagem experimental	82
6.3	Fibras de cristal fotônico	85
6.3.1	Baixa fração de ar	86
6.4	PCF com núcleo tubular	87
6.5	PCFs altamente birrefringentes	89
6.5.1	Experimentos	91

6.5.2	Simulações	93
6.6	Conclusões	101
7	Controle coerente de modos acústicos	103
7.1	Introdução	103
7.2	Eletrostrição	104
7.2.1	Força de eletrostrição	104
7.2.2	Excitação impulsiva de modos	105
7.3	Espalhamento da luz	107
7.4	Excitação impulsiva dos modos de um cilindro	108
7.5	Experimento: Excitação impulsiva em PCFs	109
7.6	Controle coerente de modos vibracionais	111
7.6.1	Resultados experimentais	112
7.6.2	Comparação com os resultados teóricos	115
7.7	Conclusões	117
8	Espalhamento Brillouin estimulado	119
8.1	Introdução	119
8.2	Montagem experimental	119
8.3	Resultados	120
8.3.1	SBS em bulk e fibras convencionais	120
8.3.2	SBS em PCFs	121
8.4	Teoria	125
8.4.1	Modelo do guia cilíndrico	125
8.4.2	Simulações numéricas com o FEM	126
8.5	Conclusões	128
9	Conclusão geral	129
	Referências bibliográficas	132
A	Materiais e métodos	143
A.1	Geração de super-contínuo	143
A.2	Controle coerente	143
A.2.1	Parte óptica	143
A.2.2	Modulação do laser de bombeio	144
A.2.3	Equipamentos de RF	146
A.3	Espalhamento Brillouin	146
B	Equações características	149
B.1	Matriz dos coeficientes para o guia cilíndrico	149
B.2	Matriz dos coeficientes para o guia tubular	151

C	Propagação oblíqua em meios periódicos	153
C.1	Estados de Bloch-Floquet	153
C.2	Densidade de estados	153
D	Notação e propriedades acústicas de sólidos	157
D.1	Notação	157
D.2	Tensores de propriedades mecânicas	159
D.2.1	Tensor de dureza	159
D.2.2	Tensor de viscosidade	160
D.2.3	Tensor acusto-óptico	161
D.2.4	Tensor de eletrostrição	161
D.3	Força de eletrostrição	162
D.3.1	Forma simplificada	162
D.4	Distribuição espacial da força de eletrostrição	164
E	Equação de onda acústica	167
E.1	Equação de onda para o deslocamento	167
E.2	Excitação de modos acústicos	169
E.2.1	Evolução temporal das amplitudes dos modos acústicos	169
E.2.2	Solução da equação	169
F	Teoria de perturbação	171
F.1	Perturbação da constante dielétrica	171
F.2	Teoria de perturbação eletromagnética	172
F.2.1	Perturbação harmônica no espaço e no tempo	175
F.2.2	Acoplamento contra-direcional	175
F.2.3	Acoplamento co-direcional	176
F.2.4	Perturbação de um único modo	177
G	Modos acústicos do guia cilíndrico	179
G.1	Modos R_{0m}	180
G.2	Modos TR_{2m}	180
G.3	Elementos do coeficiente de acoplamento	181
G.3.1	Família axial-radial	182
G.3.2	Família torsional-radial	182
H	Método dos Elementos Finitos	185
H.1	Equação vetorial de Helmholtz e sua "forma fraca"	186
H.2	Discretização	187
H.2.1	Elementos isoparamétricos e funções de base escalares	189
H.2.2	Funções de base vetoriais	192
H.2.3	Equação matricial de autovalores	196
H.2.4	PMLs	198
H.3	Equação de onda elástica	199

Lista de Figuras

2.1	Guia de onda eletromagnético.	10
2.2	Geometria do guia cilíndrico (fibra óptica). Os índices de refração do cilindro interno e da casca são, respectivamente, n_1 e n_2 . A curva vermelha representa o campo elétrico do modo fundamental ao longo do eixo horizontal. O diâmetro do cilindro interno será denotado por $d = 2a$. A extensão da casca em cinza é infinita na direção radial.	14
2.3	Soluções da equação característica (eq. 2.16) para um guia circular com casca infinita. A linha pontilhada em cinza em $V \approx 2.405$ representa a transição entre o regime monomodo e multimodo.	17
2.4	Distribuição espacial de intensidade, $S_z(x, y)$, do modo HE_{11} para uma fibra com $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d = 1 \mu\text{m}$ (a) $\lambda = d/2$. b) $\lambda = 2d$. Os campos vetoriais em preto indicam a polarização do campo elétrico.	18
2.5	(a) Fração de potência contida no núcleo (curvas pretas) e na casca (curvas vermelhas) do guia de onda cilíndrico para duas configurações de índice de refração. As linhas sólidas representam o caso $n_1 = 1.45$ e as linhas pontilhadas $n_2 = 2.0$. (b) Figura de mérito para não-linearidade ($\log_{10} \xi$), em função da razão d/λ , para diferentes índices de refração do núcleo. Em vermelho $n_1 = 2.0$ e em preto $n_1 = 1.45$	20
2.6	Impacto do diâmetro do núcleo na dispersão em um fibra óptica convencional (a&b, $n_1 = 1.45 \times (1.01)$, $n_2 = 1.45$ e $d_0 = 8.8 \mu\text{m}$) e uma altamente não-linear (c&d, $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d_0 = 2.0 \mu\text{m}$). (a,c) Dispersão de guia de onda. (b,d) Dispersão total. A legenda à direita mostra os diâmetros utilizados.	24
2.7	Geometria típica da seção transversal de uma fibra óptica de cristal fotônico. O período dos buracos de ar na casca é Λ e o diâmetro destes buracos é d . O paralelogramo em vermelho indica a célula unitária que forma a casca.	26
2.8	Dispersão do índice de refração efetivo do modo fundamental da casca.	27
2.9	Distribuição de potência ($ S_z(x, y) $) do modo fundamental da casca de uma PCF com $\delta = 0.5$	27
3.1	Ilustração da descontinuidade do campo elétrico na interface entre dois dielétricos ε_1 (amarelo) e ε_2 (azul), neste caso $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. A inserção mostra o perfil do campo elétrico normal (linha azul) à superfície entre os dois materiais, note que a razão entre a amplitude desta componente é dada pela razão entre as constantes dielétricas, como na eq. 3.1.	30

- 3.2 Geometria e modos eletromagnéticos do guia *slot* da referência [1]. (a) Seção transversal do guia, os índices de refração são $n_1 = 3.48$ (Silício) e $n_2 = 1.45$ (Sílica). (b,c) Distribuição de intensidade (S_z) e orientação dos dois primeiros modos do guia *slot*, modo *quase-TE* em (b) e *quase-TM* em (c). As cores dos vetores e a escala de cores-falsas acompanham a variação de intensidade do campo. A escala transversal é dada em μm 31
- 3.3 Geometria do guia tubular. Os índices de refração do cilindro interno, do ânulo e da casca são, respectivamente, n_0 , n_1 e n_2 . A curva vermelha representa o campo elétrico do modo fundamental ao longo do eixo horizontal - note que neste caso, devido às dimensões escolhidas, o campo não se concentra na região central. O diâmetro interno do tubo será denotado por $d = 2a$, e o diâmetro externo por $D = 2b$. A extensão da casca é infinita na direção radial. 32
- 3.4 Soluções da equação característica (eq. 3.4) para um guia tubular com casca infinita. Foram escolhidos $n_0 = n_2 = 1$, $n_1 = 1.45$ e a relação de raios $a/b = 0.2$ 34
- 3.5 Distribuição de energia no guia tubular com parâmetros $a = 0.2 \mu\text{m}$, $b = 1.0 \mu\text{m}$, e $n_0 = n_2 = 1.0$. O eixo horizontal representa razão D/λ , obtido alterando o valor de λ (a) Fração de potência contida no ânulo (curvas vermelhas) e na casca (curvas azuis) do guia de onda tubular. As linhas sólidas representam o caso $n_1 = 1.45$ e as linhas pontilhadas $n_1 = 2.0$. (b) Fração de potência no interior do tubo para os mesmo contraste de índice. 34
- 3.6 Distribuição do fluxo de potência ($S_z(x, y)$) do modo fundamental (HE_{11x}) para um tubo com diâmetro externo $D = 2 \mu\text{m}$ com $n_1 = 1.45$, $n_0 = n_2 = 1.0$ e $a/b = 0.2$. (a) $\lambda = D/2$. (b) $\lambda = 2D$. Os campos vetoriais em preto indicam a polarização do campo elétrico. 35
- 3.7 (a) Figura de mérito para não-linearidades em função da razão entre o diâmetro do ânulo e o comprimento de onda (D/λ) para diferentes relações de raio (a/b). Em todas os casos $n_1 = 1.45$. As curvas sólidas representam a FdM no interior do tubo (eq. 3.5a) e as curvas tracejadas no ânulo (eq. 3.5b). (b) Perfil do fluxo de potência (S_z) do modo fundamental para diferentes valores da razão D/λ ($a/b = 0.2$). 36
- 3.8 Dispersão do guia tubular altamente não-linear ($n_0 = 1.0$, $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $D = 1 \mu\text{m}$). (a) Dispersão de guia de onda. (b) Dispersão total. As linhas sólidas representam a dispersão para diferentes diâmetros do buraco central (veja legenda à direita); a curva cinza tracejada representa a dispersão material da sílica; a curva preta pontilhada representa a dispersão do guia cilíndrico mostrada na curva vermelha da figura 2.6c&d ($n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d = 1.0 \mu\text{m}$). 37
- 3.9 Geometria e parâmetros utilizados no design da PCF com núcleo tubular. Λ representa a separação entre os buracos da casca, d_{clad} representa o diâmetro destes buracos e d_{bore} representa o diâmetro do buraco central. 38
- 3.10 Dispersão de velocidade de grupo em uma PCF com núcleo tubular ($\Lambda = 2 \mu\text{m}$). Os diferentes gráficos estão associados a diferentes valores do parâmetro $\delta = d_{clad}/\Lambda$. O valor correspondente está indicado no canto superior esquerdo de cada gráfico. As curvas coloridas em cada gráfico representam diferentes valores do diâmetro do buraco central, os valores correspondentes são mostrados na legenda à direita. 39

- 3.11 Fração de potência no buraco central da PCF. Os diferentes gráficos estão associados a diferentes valores do diâmetro do buraco central d_{bore} . O valor correspondente está indicado no canto superior esquerdo de cada gráfico. As curvas coloridas em cada gráfico representam diferentes valores do parâmetro $\delta = d_{clad}/\Lambda$, os valores correspondentes são mostrados na legenda à direita. 40
- 3.12 Figura de mérito para efeitos não-lineares dentro do buraco central da PCF tubular. Em todas as figuras as diferentes linhas sólidas representam valores distintos do diâmetro relativo dos buracos de ar na casca (δ). (a) $d_{bore} = 0.2 \mu\text{m}$. (b) $d_{bore} = 0.4 \mu\text{m}$. (c) $d_{bore} = 0.6 \mu\text{m}$. (d) $d_{bore} = 0.8 \mu\text{m}$ 41
- 3.13 Perdas de confinamento para PCF com núcleo tubular com $\delta = 0.6$ e quatro camadas de buracos de ar na casca. As diferentes curvas representam valores distintos do diâmetro do buraco central (veja legenda à direita). 41
- 3.14 Imagens SEM da seção transversal das PCFs fabricadas. (a) PCF #1, $\Lambda = 650 \text{ nm}$, $d_{bore} = 110 \text{ nm}$ e $d_{core} = 950 \text{ nm}$. (b) PCF #2, $\Lambda = 750 \text{ nm}$, $d_{bore} = 150 \text{ nm}$ e $d_{core} = 920 \text{ nm}$ (c) PCF #3, $\Lambda = 880 \text{ nm}$, $d_{bore} = 205 \text{ nm}$ e $d_{core} = 1080 \text{ nm}$. (d) PCF #3 com uma magnificação maior. 43
- 3.15 Diagrama experimental do interferômetro montado para medir a GVD. SC representa a fonte de super-contínuo, F representa o filtro interferométrico, $M_{1,2}$ representam espelhos fixos, $BS_{1,2}$ são divisores de feixe (*beam-splitter*), $O_{1,2,3,4}$ representam objetivas de microscópio; CC é um espelho duplo acoplado a um motor de passo; $ESMF$ é uma fibra PCF do tipo ESM; FD é um fotodiodo; PC é o computador que adquire os dados e controla o motor de passo, movimentando CC . A trajetória do feixe de luz é representado por preto quando ambos feixes estão presentes, o traço azul representa a trajetória no braço b ; o traço vermelho representa a trajetória do feixe no braço a . ΔX representa o deslocamento do espelho CC 43
- 3.16 Franjas de interferência típicas para diferentes comprimentos de onda do filtro interferométrico. Estas franjas foram obtidas para PCF#1 (Fig. 3.14a) com comprimento de 3 cm 45
- 3.17 Posição do espelho (X_{ab} na eq3.7) em função do comprimento de onda central do filtro interferométrico. (a) PCF #1, $L_f = 28.27 \text{ cm}$. (b) PCF #2, $L_f = 32.78 \text{ cm}$. (c) PCF #3, $L_f = 18.39 \text{ cm}$ 46
- 3.18 Dispersão da velocidade de grupo para as fibras mostradas na figura 3.14. Os pontos representam os valores experimentais e as linhas sólidas os valores obtidas na simulação. As curvas pretas, vermelhas e azuis estão associadas às PCFs #1, #2, e #3, respectivamente. O aumento do diâmetro do buraco central diminui os valores da dispersão e desloca o pico do GVD para frequências mais baixas. 47
- 3.19 Imagem de campo-próximo do modo fundamental da PCF #3. As três imagens na linha superior referem-se à $\lambda = 700 \text{ nm}$ e as situadas na linha inferior referem-se à $\lambda = 1050 \text{ nm}$. A coluna do meio (figuras c e d) são imagens experimentais do campo-próximo. As imagens da esquerda (a,b) representam a componente z do vetor de Poynting calculadas exatamente na superfície da fibra. As imagens da coluna da direita (e,f) representam a componente z do vetor de Poynting calculada a 30 nm da superfície da fibra. Os contornos brancos e pretos representam a seção transversal da fibra usada nas simulações. 48

- 4.1 1. (a). Rede kagomé periódica, as linhas pretas representam a sílica e a região branca representa o ar. (b) Densidade de estados (DOS) para a estrutura kagomé calculada para uma faixa de frequências normalizadas $k_0\Lambda = 44-148$. As regiões em branco representam uma alta DOS, as regiões em preto representam baixa DOS, contudo, em nenhum ponto a DOS se anula. A linha horizontal em verde representa a linha do ar, a linha tracejada quase-vertical é um exemplo de um modo dos suportes, a linha horizontal pontilhada representa uma ressonância dos buracos hexagonais de ar. 53
- 4.2 Distribuição de potência ($|S_z(x, y)|$) de dois modos da estrutura periódica kagomé mostrada na fig. 4.1a. À esquerda, é mostrado um modo concentrado nos suportes de vidro. À direita, é mostrado um modo acoplado dos buracos de ar com modos dos suportes de vidro. 54
- 4.3 (a). Estrutura completa de uma fibra kagomé com núcleo formada pela remoção de uma célula da casca. Os hexágonos mostrados em (b) estão destacados em preto. (b) Aproximação de hexágonos concêntricos para a estrutura kagomé completa, obtida através de remoção dos suportes que conectam os hexágonos adjacentes. (c) Aproximação circular para o modelo hexagonal mostrado em (b), formado de círculos concêntricos que conservam o perímetro e a espessura do modelo hexagonal. 55
- 4.4 Índice de refração efetivo e perdas de confinamento (dB/m) para o modo fundamental do modelo de anéis (linhas sólidas) e hexágonos (pontos), as geometrias são mostradas na fig. 4.3. 56
- 4.5 Estrutura da fibra kagomé com duas camadas usada nas simulações. As regiões em cinza representam o vidro e as brancas representam ar. As dimensões são aquelas descritas na seção 4.3. Para atingir o máximo de correspondência com a fibra real, as quinças da casca são arredondadas com um raio de curvatura de $0.2 \mu\text{m}$ 57
- 4.6 Perdas de confinamento do modo fundamental da fibra kagomé com duas e quatro camadas. Para comparação, as curvas do modelo com um e dois anéis concêntricos também é mostrada. 58
- 4.7 Componentes do campo elétrico (E_x, E_y, E_z , da esquerda para direita) do modo óptico fundamental ($\hat{x}$ -polarizado) guiado pela estrutura da fibra kagomé com duas camadas mostrada na fig. 4.5. Na linha superior têm-se: $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, o índice de refração efetivo calculado foi $n_{eff} = 0.99766 + 2.0 \times 10^{-7}i$; na linha inferior: $\lambda = 1.7 \mu\text{m}$ e $n_{eff} = 0.99752 + 1.1 \times 10^{-5}i$. A amplitude de todas as componentes foram normalizadas pelo valor máximo da componente E_x 59
- 4.8 Componente E_z do campo elétrico do modo óptico fundamental ($\hat{x}$ -polarizado, $\lambda = 1.7 \mu\text{m}$) em uma escala diferente da mostrada na fig. 4.7. Note que no fim da segunda camada da casca periódica (destacada com linha pontilhada), a energia acoplada nos modos dos suportes de vidro são irradiadas para o exterior da estrutura. 59
- 5.1 Forças atuando nas faces de um cubo elementar de um sólido sob tensão T , $\hat{e}_{1,2,3}$ representam os eixos do sistema de coordenadas. 62
- 5.2 Relações de dispersão normalizadas para os modos da família axial-radial de um cilindro de sílica fundida com raio a . As curvas coloridas em vermelho, e laranja, respectivamente, as velocidades de propagação de ondas de compressão e cisalhamento. 65

5.3	Elipsóide de índices definido pela equação 5.7.	65
5.4	Diagrama de vetores de onda para a interação acusto-óptica. A interpretação deste diagrama é feita no texto.	68
5.5	Relação de dispersão para os modos de um cilindro de sílica fundida (veja figura 5.2). As linhas verticais pontilhadas, representam a condição de <i>phase-matching</i> para o retro- e co-espalhamento Brillouin.	70
6.1	Distribuição espacial dos modos R_{01} (esquerda) e R_{02} (direita). Em ambos casos, a polarização é radial e a fibra se dilata e contrai uniformemente ao longo do período de oscilação. A escala vertical e horizontal representa a distância do eixo em m. . . .	79
6.2	Distribuição espacial dos modos TR_{21} (esquerda) e TR_{22} (direita). Em ambos casos, a polarização está na direção 0° - 90° , como podemos notar pela direção do campo vetorial em preto. Para estes modos, a fibra se dilata em uma direção ao mesmo tempo que se contrai na direção ortogonal. A escala vertical e horizontal representa a distância do eixo em m	80
6.3	Diagrama da montagem experimental para medida do espalhamento polarizado. PC ₁ : controlador de polarização, BS: divisor de feixe, O _{1,2} , O'_{1,2}: objetivas de microscópio, $\lambda/4$: lâmina quarto de onda, PD: fotodiodo	83
6.4	Diagrama da montagem experimental para medida do espalhamento inter-polarizado. PC ₁ : controlador de polarização, O _{1,2} , O'_{1,2}: objetivas de microscópio, $\lambda/4$: lâmina quarto de onda, Pol.: polarizador, PD: fotodiodo.	83
6.5	Comparação entre o espectro de co-espalhamento despolarizado de uma fibra óptica convencional (Corning SMF28 - em preto) e a dependência espectral do coeficiente de acoplamento para os modos de um cilindro de sílica 125 μm de diâmetro externo e núcleo de 8.2 μm	85
6.6	Sobreposição entre o modo óptico (curva preta) e a perturbação induzida pelos modos TR_{21} (curva vermelha) e o modo $TR_{2,22}$ (curva verde).	86
6.7	Modos acústicos de uma PCF com baixa fração de ar na casca, diâmetro externo $D = 30 \mu\text{m}$, $\Lambda = 1.53 \mu\text{m}$, e $d = 0.82 \mu\text{m}$. A parte (a) mostra o modo quase- R_{01} ($\Omega = 117 \text{ MHz}$), a parte (b) o modo quase- R_{05} ($\Omega = 890 \text{ MHz}$) e em (c) o modo quase- R_{07} ($\Omega = 1224 \text{ MHz}$)	87
6.8	Imagens SEM da região próxima ao núcleo das PCFs investigadas. As barras brancas na imagem correspondem a 1 μm ; Os núcleos destas fibras possuem, aproximadamente, 1.7 μm de diâmetros.	87
6.9	Espectro de espalhamento despolarizado para as PCFs mostradas na Fig. 6.8. A escala vertical é logarítmica. Em (a) pode-se identificar fortes picos de espalhamento provenientes de modos acústicos da casca ($\sim 250 \text{ MHz}$), mas também picos de alta frequência em torno de 1.53 GHz. Em (b), apesar das ressonâncias da casca ($\sim 250 \text{ MHz}$) serem tão fortes quanto em a), nenhum pico é observado em altas frequências.	88
6.10	Geometria utilizada nas simulações e espectro de espalhamento calculado pela eq. 6.11.	89
6.11	Modos acústicos e perturbação $\Delta\epsilon_6$ calculados numericamente.	90
6.12	Imagens SEM da seção transversal das fibras investigadas; as figuras estão todas na mesma escala.	91

6.13	Espectro de co-espalhamento Brillouin para quatro PCFs (os parâmetros geométricos são mostrados na tabela 6.1) e imagens SEM das fibras. Ressonâncias da casca externa e da casca periódica aparecem abaixo de 1.1 GHz e ressonâncias do núcleo aparecem acima. Os modos confinados pela casca periódica são marcados com as letras a—d.	92
6.14	Espectro de espalhamento e geometria das PCF#3a, #3b e #3c.	93
6.15	Geometria e malha utilizada no cálculo dos modos da PCF#1. A casca externa da fibra (não mostrada nas figuras) possui 110 μm	94
6.16	Componentes do campo elétrico para os modos ópticos da PCF#1. Da esquerda para direita estão, $\Re\{E_x\}$, $\Re\{E_y\}$, $\Im\{E_z\}$. A linha superior corresponde ao modo $\hat{x}$ -polarizado, $n_{eff} = 1.41588$, e a linha inferior ao modo $\hat{y}$ -polarizado, com $n_{eff} = 1.41450$	95
6.17	Comparação entre os resultados experimentais observados para a PCF#1 e a previsão teórica obtida com a teoria de modos acoplados. As linhas verdes pontilhadas indicam os modos que serão mostrados nas figuras 6.18 e 6.19.	95
6.18	Distribuição espacial dos modos confinados pela casca externa e perturbação da constante dielétrica da estrutura mostrada na Fig. 6.15.	96
6.19	Distribuição espacial do modo de maior acoplamento ($\Omega = 893$ MHz) e perturbação da constante dielétrica da estrutura mostrada na Fig. 6.15.	97
6.20	Geometria e malha utilizada no cálculo dos modos da PCF#4. A geometria da esquerda representa a estrutura real da fibra, a casca externa da fibra (não mostrada na figura) possui 100 μm	98
6.21	Componentes do campo elétrico para os modos ópticos da PCF#4. Da esquerda para direita estão, $\Re\{E_x\}$, $\Re\{E_y\}$, $\Im\{E_z\}$. A linha superior corresponde ao modo $\hat{x}$ -polarizado, $n_{eff} = 1.36462$, e a linha inferior ao modo $\hat{y}$ -polarizado, com $n_{eff} = 1.35366$	98
6.22	Comparação entre os resultados experimentais observados para a PCF#4 e a previsão teórica obtida com a teoria de modos acoplados. Os círculos em magenta indicam os modos que serão mostrados nas figuras 6.18 e 6.19.	99
6.23	Distribuição espacial dos modos acústicos $\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right)$ da estrutura idealizada (6.20(b)). Os dois modos à esquerda estão dentro do band-gap da casca periódica, portanto, não penetram na mesma. O modo à direita, está fora do <i>band-gap</i> e, nitidamente, penetra na casca periódica.	100
6.24	Geometria da célula unitária e estrutura de bandas fonônicas da PCF#4.	100
7.1	Distribuição espacial das componentes da força de eletrostrição para um campo óptico polarizado ao longo da direção $\hat{x}$. À esquerda temos o termo $\propto \gamma_{12} \nabla \cdot (\Psi\rangle \cdot \Psi\rangle)$ e à direita o termo $\propto \gamma_{44} \nabla \cdot (\Psi\rangle \cdot \langle\Psi)$	105
7.2	(a) Coeficiente de excitação dos modos acústicos para diferentes valores de diâmetro externo de uma fibra óptica (o diâmetro do modo óptico é mantido fixo ~ 8 μm); em preto $d = 125$ μm , em verde $d = 62.5$ μm , em azul $d = 25$ μm , em vermelho $d = 10$ μm . (b) Resposta temporal normalizada da perturbação do índice de refração da mesma fibra para $d = 125$ μm (curva preta) e $d = 10$ μm (curva vermelha) fibra dada pela equação.	109

- 7.3 Diagrama da montagem experimental para excitação impulsiva de modos vibracionais. PC_{1,2,3}: controladores de polarização, AM: modulador de amplitude, RFA: amplificador de radio-frequência, 70/30: acoplador de fibra (70 % laser de bombeio, 30 % laser de prova), O_{1,2}, O'_{1,2}: objetivas de microscópio, $\lambda/4$: lâmina quarto de onda, Pol.: polarizador, TF: filtro espectral sintonizável, EDFA: amplificador óptica a fibra dopada com érbio, PD: fotodiodo. 110
- 7.4 Imagem SEM da secção transversal das fibras PCF utilizadas nos experimentos. a) PCF #1, o período da casca é $\Lambda_1 = 1.67\mu m$ e o diâmetro do núcleo é $d_1 = 1.27\mu m$. b) PCF #2, o período da casca é $\Lambda_1 = 1.92\mu m$ e o diâmetro do núcleo é $d_1 = 1.75\mu m$. As duas figuras estão na mesma escala e a barra branca corresponde a $1\mu m$. As figuras pequenas no canto estão fora de escala e mostram a microestrutura completa das fibras. 111
- 7.5 Excitação impulsiva dos modos vibracionais da PCF #1 e PCF #2. a,b) Resposta temporal detectada no laser de prova quando um único pulso excita a fibra. c,d) Espectro de potência obtido por transformada de Fourier correspondendo às formas temporais mostradas em a e b, respectivamente. O pico inicial em todas as formas temporais são devidos a resposta eletrônica (efeito Kerr) e foram excluídas dos dados antes de calcular a FFT. 112
- 7.6 Controle coerente de modos acústicos; a linha superior está relacionada à PCF #1 e a inferior à PCF #2. a) Resposta temporal detectada no laser de prova quando um único pulso excita a fibra (curva azul), dois pulsos separados por 260 ps (curva vermelha) e dois pulsos separados por 512 ps (curva verde). c) O mesmo que na figura a) porém a fibra utilizada foi a PCF # 2 e a separação entre os pulsos foi de 329 ps na curva vermelha e 658 ps na curva verde. b,d) Espectro de potência obtido por transformada de Fourier correspondendo às formas temporais mostradas em a e b, respectivamente. As setas acompanhadas de números indicam o fator multiplicativo usado nas curvas para propósitos de visualização. O pico inicial em todas as formas temporais são devidos a resposta eletrônica (efeito Kerr) e foram excluídas dos dados antes de calcular a FFT. 113
- 7.7 Excitação multi-pulsos de modos acústicos. (a) Resposta temporal da PCF#1 quando excitada por um pulso (curva vermelha) e um trem de 27 pulsos (curva preta). (b) Mesmo que (a) para PCF #2. (c) FFT obtida da resposta da PCF#1 para um pulso (curva pontilhada vermelha) e uma seqüência de 27 pulsos (curva preta sólida); a seta indica o fator multiplicativo utilizada na curva vermelha. (d) Evolução da amplitude da FFT para o modo em 1.96 GHz como função do número de pulsos de bombeio. Os dados pretos e vermelhos representam a PCF#1 e PCF#2, respectivamente. Os pontos representam os dados experimentais, as linhas pontilhadas representam a amplificação ideal (eq. 7.14), e as linhas sólidas representam a amplificação com saturação $S = 0.06$ (eq. 7.15). 115

7.8	Excitação por eletrostrição (eq. 7.8) e modulação de índice de refração (eq. 7.13) calculadas numericamente para a PCF#1. (a) Excitação com bombeio linearmente polarizado (curva azul) e circularmente polarizado (curva vermelha); as setas indicam os modos com maior eficiência de excitação, mostrados na Fig. 7.9. (b) Partes real (curva pontilhada vermelha) e imaginária (curva sólida preta) da transformada de Fourier da modulação do índice de refração (eq. 7.13); a inserção mostra a reposta temporal correspondente.	116
7.9	Distribuição espacial da perturbação da constante dielétrica para os modos da PCF#1 destacados na Fig. 7.8.(a) $\Delta\epsilon_{xy}(x, y)$ para o modo quase- TR_{21} em $\Omega = 1.956$ GHz. (b) $\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy}$ para o modo quase- R_{01} em $\Omega = 2.318$ GHz. A linha preta sólida representa os contornos da geometria não-deformada usada para calcular os modos. A parte colorida, segundo a escala à direita, é deformada de acordo com a vetor deslocamento de cada modo, indicando o movimento da fibra para estes modos.	117
8.1	Diagrama da montagem experimental para medida do espalhamento Brillouin estimulado. PC _{1,2,3} : controladores de polarização, O _{1,2} : objetivas de microscópio, EDFA _{1,2} : amplificadores a fibra dopada com Érbio. PD: fotodiodo.	120
8.2	Aspectos gerais do espalhamento Brillouin em PCFs.	122
8.3	Medidas e limiar de intensidade e evolução do espectro com a potência do laser. . . .	124
8.4	Relações de dispersão para os modos do guia cilíndrica da família axial-radial, as linhas em azul e vermelho representa as velocidades longitudinal e de cisalhamento. (a) Cilindro com diâmetro de 1.22 μm . (b) Diâmetro de 9.27 μm	126
8.5	Evolução do espectro de retro-espalhamento Brillouin como função do diâmetro do cilindro de vidro. Pode-se notar nesta figura o aparecimento de vários picos na espectro quando o diâmetro é reduzido. O espectro foi calculado através do coeficiente de acoplamento acusto-óptico (eq. 6.11). A escala vertical está em decibéis.	127
8.6	Modos acústicos da PCF #1.	128
9.1	Capa do livro " <i>Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo</i> " de Galileo Galilei. . .	130
A.1	Fotografia da parte da montagem para geração do espectro super-contínuo. A PCF é destacada em azul. O laser de Nd:YAG é destacado em amarelo.	144
A.2	Fotografia da parte da montagem que envolve a parte óptica. A PCF é destacada em azul. As partes nas quais o feixe se propaga-se no espaço livre são realçadas em vermelho.	145
A.3	Fotografia da parte da montagem que envolve a modulação do laser de bombeio. . . .	145
A.4	Fotografia da parte da montagem que envolve os equipamentos de RF utilizados para gerar e detectar os sinais elétricos.	146
B.1	Comportamento das funções que definem a equação característica 2.17 para diferentes valores de w no intervalo $0 \leq u \leq V$; em preto $w = V$, em vermelho $w = V/10$ e em azul $w = V/20$. (a) Função F_{TE} . (b) Função F_{TM} . (c) Função $F_{TE}F_{TM}$. (d) Produto das funções $F_{TE}F_{TM}$ em vermelho e a função $F_{m=1}$ em verde; os círculos azuis indicam as soluções que representam a família HE_{1n} ; em preto as soluções da família EH_{1n}	150

C.1	Células unitárias da casca da PCF. (a) Célula unitária no espaço real, definida pelos vetores $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$; o módulo dos vetores $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ define o tamanho Λ da célula, o diâmetro dos buracos de ar é d . (b) Célula unitária no espaço recíproco, definida pelos vetores $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$; a região verde denota a primeira zona de Brillouin, a região vermelha representa a zona irreduzível de Brillouin; os pontos Γ , M , e K são os pontos de alta simetria da estrutura [2].	154
F.1	Solução das equações acopladas para o caso de retro-espalhamento, a região cinza indica a região de interação ($0 < z < L$); as condições de contorno utilizadas são $a_1(0) = 1$, $a_2(L) = 0$. As curvas vermelhas e azuis representam $a_1(z)$ e $a_2(z)$, respectivamente: as linhas sólidas são obtidas com $\Delta\beta = 0$, as linhas tracejadas com $\Delta\beta L = 8$. Note que quando a condição de phase-matching não é satisfeita, a energia é transferida periodicamente de uma onda para outra.	176
F.2	Solução das equações acopladas para o caso de co-espalhamento, a região cinza claro indica a região de interação ($0 < z < L$); as condições de contorno utilizadas são $a_1(0) = 1$, $a_2(L) = 0$, $K_{11} = K_{22}$ e $K_{12}L = 4$. As curvas vermelhas e azuis representam $a_1(z)$ e $a_2(z)$, respectivamente. A região destacada em cinza escuro representa o regime de acoplamento fraco ($gz \ll 1$), na qual a energia transferida entre os modos ainda não oscilou nenhum período.	177
H.1	Discretização da seção transversal de uma estrutura utilizando elementos triangulares.	188
H.2	Polinômios interpoladores de Lagrange de 1ª ordem.	190
H.3	Polinômios interpoladores de Lagrange de 2ª ordem.	191
H.4	Elemento triangular curvilíneo.	193
H.5	Funções de Nedelec do tipo CT/LN.	194
H.6	Funções de Nedelec de segunda ordem (LT/QN)	195
H.7	Exemplo da geometria das PMLs (em amarelo). O valor de ϵ utilizado nas equações H.28 deve ser o mesmo do material que é adjacente a ela (região azul)	199

Lista de Tabelas

3.1	Valores dos coeficientes do ajuste polinomial mostrado na figura 3.17. O polinômio é da forma $y = A + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + B_3\lambda^3 + B_4\lambda^4$, sendo que as unidades de λ e y são expressas, respectivamente, em nm e mm.	45
6.1	Parâmetros geométricos médios das fibras da Fig. 6.12.	91
8.1	Parâmetros e medidas das fibras investigadas.	124
D.1	Correspondência entre os índices contraídos (I) e os índices convencionais (ij)	158

Lista de Acrônimos e Símbolos

DOS	-	<i>Density of photonic states</i> (densidade de estados fotônicos)
EDFA	-	<i>Erbium-doped fiber amplifier</i> (amplificador a fibra dopada com Érbio)
FBS	-	<i>Forward Brillouin Scattering</i> (espalhamento Brillouin co-propagante)
FEM	-	<i>Finite Element Method</i> (método dos elementos finitos)
NSOM	-	<i>Near-field scanning optical microscope</i> (microscópio óptico de campo próximo)
PCF	-	<i>Photonic Crystal Fiber</i> (fibra de cristal fotônico)
PML	-	<i>Perfectly matched layer</i> (camada perfeitamente casada)
RIT	-	Reflexão interna total
SBS	-	<i>Stimulated Brillouin Scattering</i> (espalhamento Brillouin estimulado)
SEM	-	<i>Scanning electron microscope</i> (microscópio eletrônico de varredura)
SRS	-	<i>Stimulated Raman Scattering</i> (espalhamento Raman estimulado)

E	-	Vetor campo elétrico
D	-	Vetor deslocamento elétrico
B	-	Vetor indução magnética
H	-	Vetor campo magnético
P	-	Polarização elétrica
ϵ_0	-	Permissividade do vácuo
μ_0	-	Permeabilidade magnética
ϵ	-	Tensor de permissividade elétrica relativa
μ	-	Tensor de permeabilidade magnética relativa
$\Delta\epsilon$	-	Tensor de perturbação dielétrico
r	-	Vetor posição
L_{eff}	-	Comprimento de interação efetivo
n_{eff}	-	Índice de refração efetivo de um guia de onda
β	-	Constante de propagação ao longo do eixo z
λ	-	Comprimento de onda no vácuo
k_0	-	Número de onda no vácuo
D	-	Dispersão de velocidade de grupo
T	-	Tensor de stress
u	-	Vetor deslocamento mecânico
S	-	Tensor de tensões
V_l	-	Velocidade acústica longitudinal
V_s	-	Velocidade acústica de cisalhamento

Trabalhos Publicados Pelo Autor

Revistas Indexadas

1. Dainese P., Russell P. St. J., Wiederhecker G. S., Joly N., Fragnito H.L., Laude V., Khelif A. "Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber". *Optics Express* Vol. 14, No. 9, Pg: 4141-4150, 2006
2. Dainese P., Russell P. St. J., Joly N., Knight J. C., Wiederhecker G.S., Fragnito H.L., Laude V., Khelif A. "Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber". *Nature Physics* Vol. 2, No.6, Pg. 388-392, 2006.
3. Wiederhecker G.S., Cordeiro C. M. B., Couny F., Benabid F., Maier S. A., Knight J. C., Cruz C. H.B., Fragnito H.L. "Field enhancement within an optical fibre with a subwavelength air core". *Nature Photonics* Vol. 1, No.2, Pg. 115-118, 2007.
4. Pearce G.J., Wiederhecker G.S., Poulton C.G., Burger S., Russell P.St. J. "Models for guidance in kagome-structured hollow-core photonic crystal fibres". *Optics Express* Vol. 15, No. 9, Pg: 12680-12685, 2007
5. Wiederhecker G.S., Brenn A., Russell P. St. J., Fragnito H. F. "Coherent Control of Ultra-High Frequency Acoustic Resonances in Photonic Crystal Fibers". *Physical Review Letters* 100, 203903, 2008.

Conferências

1. Dainese, P., Russell, P. St. J., Wiederhecker, G. S., Joly, N., Fragnito, H. L. Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber In: Conference on Lasers and Electro-Optics, 2006, Long Beach. CLEO/QELS 2006 Technical Digest CD-Rom, 2006.
2. Wiederhecker, G. S., Brenn, A., Hundertmark, H., Russell, P. St. J., Fragnito, H. L. Controlling Acousto-Optic Interactions in Photonic Crystal Fiber with Sub-Wavelength Core In: Conference on Lasers and Electro-Optics, 2007, Baltimore. CLEO/QELS 2007 Technical Digest CD-Rom (paper CThFF2), 2007.
3. Wiederhecker, G. S., Cordeiro, C. M. B., Couny, F, Benabid, F., Knight, J. C., Maier, S., Fragnito, H. L., CRUZ, C. H. B. Sub-Wavelength Intensity Profiles and Field Enhancement within an Optical Fiber In: Conference on Lasers and Electro-Optics, 2007 CLEO/QELS 2007 Technical Digest CD-Rom (paper CWF6), 2007.
4. Wiederhecker, G. S., Brenn, A., Russell, P. St. J., Fragnito, H. L. Coherent Control of Ultra-High Frequency Acoustic Resonances in Photonic Crystal Fibers. In: Conference on Lasers and Electro-Optics, 2008, San Jose. CLEO/QELS 2008 Technical Digest CD-Rom (paper QFH3), 2007.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Uma breve história...

O estudo da interação entre a luz e as vibrações da matéria teve início nos estudos pioneiros do físico indiano Chandrasekhara Venkata Raman [3, 4] e do francês Léon Brillouin [5]. Em 16 de março de 1928, Raman abriu sua palestra na associação indiana de ciências proferindo, profeticamente, as palavras "*I propose this evening to speak to you on a new kind of radiation or light emission from atoms and molecules*". Ele reportava a primeira observação do espalhamento inelástico da luz por vibrações moleculares [3]. Nas décadas seguintes, diversos grupos no mundo dedicaram-se ao estudo destes tipos de espalhamento, culminando na descoberta dos regimes estimulados deste processos [6, 7], o espalhamento Raman estimulado (SRS - *stimulated raman scattering*) e o espalhamento Brillouin estimulado (SBS - *stimulated brillouin scattering*): a luz espalhada interage com a luz incidente resultando em uma radiação que é ressonante com a frequência da vibração, o resultado é a amplificação coerente da vibração e, conseqüentemente, da luz espalhada [8]. O impacto destas descobertas abrangeu diversas área do conhecimento científico, passando pela física, química e, mais recentemente, a biologia.

Boa parte dos resultados demonstrados neste período foram propulsionados pela descoberta da radiação laser. A alta coerência temporal (i.e., luz monocromática) e espacial da luz laser permite a focalização dos feixes de luz em regiões diminutas, possibilitando o alcance de altas intensidades jamais observadas com fontes de luz incoerentes. Contudo, mesmo usando radiação laser, a profundidade do foco de luz obtida com um conjunto ideal de lentes é sempre limitada pelo parâmetro confocal, ou comprimento de Rayleigh, $z_R = A/\lambda$, sendo A a área transversal do feixe e λ o comprimento de onda da luz. Esta simples expressão mostra que feixes intensos (área do feixe pequena) são obtidos ao preço de uma pequena profundidade de foco. Esta limitação é extremamente restritiva para efeitos não-lineares uma vez que estes crescem, tipicamente, exponencialmente com o comprimento

de interação entre a luz e a amostra de material e, portanto, a exploração destes efeitos será limitada pelo parâmetro confocal.

Em meados da década de 70, com o surgimento das primeiras fibras ópticas, foi possível circunvir esta limitação das lentes. A alta transparência óptica destas fibras e o pequeno diâmetro do núcleo que confina a luz estabeleceu um novo paradigma no estudo de não-linearidades. Nestas fibras, o comprimento de interação não é limitado à distância de Rayleigh e sim pela atenuação óptica. Nos anos seguintes, estas qualidades permitiram a descoberta e a exploração de diversos efeitos não-lineares em fibras [9, 10, 11, 12], em particular, foram observados o SBS [13] e o SRS [10]. Em razão dos longos comprimentos de interação, todas estas demonstrações foram feitas com níveis de potência óptica muito menores do aquelas necessárias para observar os mesmos efeitos em amostras volumétricas [14].

As fibras ópticas experimentaram sua própria evolução nos anos seguintes, culminando, em 1996, na concepção de um novo tipo de fibra óptica, a fibra de cristal fotônico (PCF - *photonic crystal fiber*) [15]. O grupo da universidade de *Bath*, na Inglaterra, depois de uma série de publicações [15, 16, 17, 18] chamou a atenção da comunidade para o potencial destas fibras no estudo de efeitos não-lineares. Em particular, o alto contraste de índice de refração entre o núcleo e a casca destas fibras permitiu a demonstração da radiação super-contínua com espectro de 500 THz de largura, estendendo-se do violeta ao infra-vermelho [19]. Este efeito foi utilizado por R. Holzwarth e T. Haensch e um de seus trabalhos em metrologia óptica [20]. No ano de 2005, por seus trabalhos pioneiros em metrologia de frequência óptica, Haensch dividiu metade do prêmio Nobel de Física com John Hall.

Até o início deste doutoramento, apesar das interações não-lineares de origem eletrônica e molecular (efeito Kerr e espalhamento Raman) já terem sido bastante estudadas em PCFs. Quase inexistiam estudos a respeito da interação da luz com modos acústicos destas estruturas (espalhamento Brillouin). Assim, visando compreender os aspectos então obscuros da interação entre a luz e modos acústicos nestas fibras é que foi escolhido o tema deste doutoramento.

1.2 Como chegamos aqui?

O nosso grupo se interessou por PCFs no final de 2003, almejava-se na ocasião obter uma fibra cuja dispersão permitisse a elaboração de amplificadores paramétricos de alta eficiência [9]. O então aluno de doutoramento, Paulo Clóvis Dainese, foi para *Bath* em busca desta fibra. A amplificação paramétrica requer o uso de lasers com potência contínua e elevada (~ 1 W). Estes níveis de potência geralmente são suficientes para iniciar o processo de SBS, portanto, a primeira investigação feita por Dainese foi verificar o limiar de potência óptica, P_{th} , para o início deste processo. Apesar das

fibras investigadas possuírem um núcleo de apenas $\sim 1 \mu\text{m}$, as medidas indicavam que o limiar relativo, P_{th}/A_{eff} , sendo A_{eff} a área efetiva do modo óptico era 5 vezes maior que o limiar em fibras ópticas convencionais (com diâmetro de $\sim 9 \mu\text{m}$). Esta descoberta desviou o interesse da pesquisa em amplificação paramétrica para o estudo da interação da luz com as ondas acústicas responsáveis pelo espalhamento Brillouin.

Em 2003, eu estava finalizando o curso de graduação e decidi iniciar o doutoramento nesta área. Junto ao colega Dainese, foram realizados diversos experimentos e simulações buscando compreender todos os aspectos do SBS nestas fibras. A despeito do nosso esforço, as razões precisas pelas quais o limiar de SBS era tão elevado nestas fibras só seriam completamente desvendadas dois anos depois [21]. Nesta árdua trajetória, descobrimos que o processo de espalhamento Brillouin copropagante (FBS - *forward brillouin scattering*) nestas fibras também era singular [22]. Para justificar os resultados observados, vimos a necessidade de dispor de métodos rigorosos para resolver as equações de Maxwell em PCFs. Em colaboração com os professores Hugo Figueroa (FEEC-UNICAMP) e, especialmente, o professor Antônio Frasson (Universidade federal do Espírito Santo), especialistas no método dos elementos finitos (FEM - *finite element method*), em pouco tempo dispúnhamos de um poderoso programa para encontrar os modos ópticos de guias de onda com geometria arbitrária.

A possibilidade de explorar estas equações numericamente permitiu-me testar novas idéias. No segundo semestre de 2005, assisti a uma palestra da Profa. Michal Lipson (Universidade de *Cornell*) na UNICAMP, na qual ela demonstrava a possibilidade de confinar a luz em dimensões bem menores que o comprimento de onda da luz, utilizando guias de onda de silício ($n_{Si}=3.45$) em um substrato de sílica ($n_{SiO_2}=1.45$) [1]. Algumas horas depois, constatei que tal confinamento poderia acontecer também em uma fibra óptica, caso a casca desta fibra fosse composta, simplesmente, por ar. Foi feita uma análise extensa de todas as características de confinamento desta, hipotética, fibra óptica. Os resultados mostravam que, na região visível do espectro eletromagnético, tal confinamento só seria possível em um tubo com dimensões sub-micrométricas, em particular, o diâmetro interno do tubo deveria ser da ordem 100 nm! Este valor estava bem além das dimensões de qualquer fibra óptica jamais fabricada. Em contato com o Dr. Cristiano Cordeiro, que havia voltado recentemente de um pós-doutorado em *Bath*, tentamos fabricar tal fibra utilizando vidro Boro-silicato (ou vidro de janela). Apesar da experiência em fabricação de Cordeiro, a infra-estrutura de fabricação de fibras disponível na UNICAMP não permitiu a obtenção de fibras com dimensões tão pequenas e com perdas ópticas aceitáveis.

Estas frustrações me levaram a engavetar este trabalho. No entanto, em abril de 2006, o Prof. Jonathan Knight (Universidade de *Bath*), em uma visita ao CePOF (Centro de Pesquisa em Óptica e Fotônica), analisou as minhas simulações e afirmou, categoricamente, que estas fibras poderiam ser fabricadas em sua torre de sílica, em *Bath*. Em junho do mesmo ano, eu e o colega Cordeiro, fomos

para *Bath* para fabricar esta fibra, o colega Cristiano verificou que a aposta do professor Knight estava correta. Na segunda semana de trabalho, ele fabricou uma PCF com núcleo tubular de 900 nm de diâmetro externo e, impressionantes, 110 nm de diâmetro interno. Nas três semanas seguintes, realizei toda a caracterização de diversas propriedades desta fibra. Em novembro de 2006, foi submetido um artigo apresentando estes resultados [23].

Paralelamente, eu continuava interessado nos desdobramentos da pesquisa sobre o espalhamento Brillouin. Em outubro de 2007, iniciei o "doutorado sanduíche" na universidade de *Erlangen-Nürnberg*, na Alemanha. Em Erlangen, o Prof. Philip Russell (anteriormente em *Bath*) acabara de iniciar uma divisão de fotônica no recém fundado *Max-Planck-Forschungsgruppe*. Nos dois primeiros meses de pesquisa, na espera de equipamentos comprados para realizar os experimentos sobre espalhamento Brillouin, me dediquei a escrever um programa, baseado no FEM, para resolver os modos acústicos de guias de onda. Nas vésperas do ano novo, sob o frio implacável da Baviera, pude verificar a validade do meu programa comparando seus resultados com as soluções analíticas de um guia circular.

No restante do meu estágio, investiguei experimentalmente e realizei diversas simulações numéricas¹ a cerca da interação acusto-óptica. Na ocasião, consegui demonstrar, experimentalmente, algo que o Prof. Fragnito havia sugerido desde nossas primeiras observações de co-espalhamento Brillouin em PCFs: o controle coerente de modos acústicos. No grupo do professor Russel, também tive a oportunidade de participar de longas discussões científicas sobre diversos temas de pesquisa do grupo — aquelas reuniões de grupo que, no Brasil, estão sempre vazias. Em particular me interessei pelo problema, na ocasião não resolvido, do guiamento em fibras PCF de núcleo oco do tipo kagomé. Durante os oito meses de estadia em *Erlangen*, eu e os colegas Gregory Pearce e Christopher Poulton discutimos, semanalmente, junto com o Prof. Russell, o caminho mais apropriado para compreensão dos resultados experimentais observados nesta fibra² [25]. Entre os métodos numéricos, disponíveis para a solução das equações de Maxwell em *Erlangen*, o nosso FEM mostrou-se o único capaz de gerar soluções convergentes para o problema da fibra kagomé. Uma das perguntas não respondidas para esta fibra dizia respeito a existência ou não de band-gaps fotônicos na casca destas fibras. Para respondê-la acabei familiarizando-me com métodos para implementar condições periódicas de contorno no FEM. Já de volta ao Brasil, em julho de 2007, submetemos um artigo sobre estes resultados [26].

Aqui no Brasil, com os resultados experimentais sobre a excitação coerente de modos em mãos, dediquei-me a obter simulações numéricas que concordassem com estes resultados. Os resultados

¹No grupo, estava disponível um servidor com 8 processadores *Opteron64* e 16 GB de memória, que podiam ser acessados diretamente da minha estação *Linux*, através de uma rede gigabit ethernet.

²Em particular, o Prof. Russell tinha fixação em resolver este problema, uma vez que o acompanhava desde sua publicação, na revista *Science*, do efeito Raman em uma fibra kagomé preenchida com hidrogênio gasoso [24].

deste trabalho foram submetidos para publicação em dezembro de 2007 [27]. Nos meses finais que restavam do meu doutoramento, continuei a colaborar com o Prof. Russell, em particular me dediquei a modelar os resultados observados pelo colega Andre Brenn, em *Erlangen*, sobre o co-espalhamento Brillouin em PCFs altamente birrefringentes. Um artigo está sendo redigido sobre estes resultados.

1.3 Organização dos capítulos

1.3.1 Corpo

O capítulo 2 apresenta os aspectos básicos da propagação da luz em guias de onda, as equações de Maxwell e a equação de onda são apresentadas em sua forma vetorial completa. Para ilustrar as características gerais de guias de onda com alto contraste de índice de refração, a solução analítica de um guia circular é explorada. As propriedades ópticas lineares e não-lineares deste guia são analisadas, em particular, o regime de propagação altamente difrativo (quando o comprimento de onda é da mesma ordem do diâmetro do guia) é destacado. Mostra-se que, o alto contraste de índice de refração, associado a diâmetros sub-micrométricos, podem alterar de forma fundamental as propriedades ópticas de guias de onda. O capítulo é finalizado apresentando como as propriedades básicas das fibras ópticas de cristal fotônico viabilizam a exploração destes limites.

No capítulo 3, é investigada a possibilidade de ir além do limite de confinamento imposto pela difração. Buscando inspiração na descontinuidade dos campos eletromagnéticos na interface entre dois dielétricos, é proposto um guia cilíndrico tubular capaz de confinar a luz no interior da região vazia do tubo. É demonstrado que, em razão da descontinuidade do campo elétrico, o modo óptico fundamental deste guia concentra-se fortemente no interior vazio do tubo. Sobretudo, em razão das dimensões nanométricas desta região, a intensidade óptica é amplificada, no ar, por diversas ordens de grandeza. Na sequência, é apresentada uma PCF que comporta-se de forma análoga ao guia tubular e, após uma análise completa das propriedades ópticas desta fibra, o capítulo é finalizado apresentando as PCFs fabricadas e as medidas experimentais realizadas. Os aspectos mais importantes destes resultados foram publicados na revista *Nature Photonics* [23].

O capítulo 4 investiga, teoricamente, o guiamento de fibras PCF de núcleo oco do tipo kagomé. A complexa propagação luminosa nestas fibras é fatorada em modelos mais simples, formando uma base para a compreensão das características de guiamento observadas nestas fibras [25]. A densidade de estados fotônicos da casca periódica é calculada para se obter a informação sobre a existência de *band-gaps* fotônicos. A inexistência destes *gaps* é demonstrada e, para compreender a origem das baixas perdas observadas nos experimentos, duas estruturas simples, formadas por anéis de vidro concêntricos, são estudadas. Os resultados previstos por estes modelos são comparados à simulação

completa da estrutura da fibra, a boa concordância entre os resultados confirma a validade da estratégia adotada. Os principais resultados deste capítulo foram publicados na revista *Optics Express* [26]

No **capítulo 5**, são estabelecidos os fundamentos da propagação de ondas acústicas em guias de onda, também são apresentados os fundamentos da interação entre luz e som. Como almeja-se estudar guias de alto contraste de propriedades mecânicas (i.e., PCFs), não são feitas aproximações escalares da equação de onda acústica ou do acoplamento acusto-óptico, este tratamento resulta em uma teoria vetorial de modos acoplados. É ilustrado como esta teoria se aplica no tratamento do co- e retro-espalhamento Brillouin. O capítulo é finalizado mostrando as possíveis fontes de excitação dos modos acústicos nestas fibras: a excitação térmica e a eletrostrição.

Dando continuidade a teoria apresentada no capítulo 5, o **capítulo 6** se concentra no co-espalhamento Brillouin espontâneo. As soluções analíticas para os modos ópticos e acústicos são exploradas para ilustrar as características básicas deste processo de espalhamento. São descritos os conceitos e as técnicas experimentais utilizadas para medir a luz co-espalhada. Na sequência, o espalhamento em dois tipos de fibras PCFs é investigado: uma delas é a fibra PCF desenvolvida no capítulo 3. O outro tipo consiste em um conjunto de PCFs altamente birrefringentes com diferentes frações de ar na casca, a análise teórica dos diversos espectros de espalhamento medidos permite compreender o complexo sistema acústico que resulta da estrutura transversal das PCFs. Parte dos resultados deste capítulo foram apresentados na *CLEO Europe 2007*

No capítulo 7, são apresentados resultados sobre a excitação óptica impulsiva de modos acústicos. É feita uma apresentação precisa da força de eletrostrição para campos ópticos arbitrários, exemplificada no caso de guias cilíndricos. É demonstrada, experimentalmente, a excitação impulsiva de modos acústicos em PCFs (estes resultados foram publicados na revista *Optics Express* [22]). Mostra-se que é possível controlar, coerentemente, os modos acústicos destas fibras através de uma sequência ressonante de pulsos. Esta técnica é utilizada para amplificar ou frear modos acústicos de alta frequência ($> \text{GHz}$) confinados em PCFs. Parte deste capítulo foram publicados na revista *Physical Review Letters* [27].

O capítulo 8 mostra resultados experimentais, apoiados por simulações, do retro-espalhamento Brillouin estimulado em PCFs. É investigado o espalhamento Brillouin estimulado em um conjunto de PCFs com núcleos de diferentes diâmetros. Verifica-se que o limiar de potência para o espalhamento é aumentado por 5 vezes em PCFs com núcleo de $\sim 1 \mu\text{m}$. Uma síntese dos resultados deste capítulo foi publicada na revista *Nature Physics* [21]

1.3.2 Apêndices

No **apêndice B** são mostradas as equações características (do guia cilíndrico e do guia tubular) que surgem quando impõe-se as condições de contorno nas equações de Maxwell. Estes resultados apóiam os capítulos 2 e 3.

O **apêndice C** discute a propagação da luz em dielétricos com seção transversal periódica. São apresentados os estados de Bloch-Floquet e algumas propriedades do arranjo hexagonal que forma a casca das PCFs, sendo também definida a densidade de estados fotônicos de uma estrutura periódica. Estes resultados estão relacionados aos capítulos 2 e 4.

No **apêndice D** é apresentada a notação de índices contraídos para tensores simétricos e são detalhadas diversas propriedades relacionadas à propagação de ondas acústicas em materiais isotrópicos. Também é apresentada a força de eletrostrição. Estes resultados apóiam o conteúdo dos capítulos 5, 7 e 8.

O **apêndice E** mostra uma dedução detalhada da equação de onda acústicas, também mostra o procedimento de solução desta equação para excitação óptica impulsiva de modos acústicos. Estas demonstrações suplementam o conteúdo dos capítulos 5 e 7.

No **apêndice F**, a teoria vetorial de perturbação das equações de Maxwell é desenvolvida escrevendo-as como um problema generalizado de autovalores. Emprega-se um formalismo análogo àquele usado em mecânica quântica. Estas deduções complementam a apresentação dos capítulos 5, 6, 7 e 8.

O **apêndice G** mostra as soluções analíticas dos modos acústicos de uma guia circular. Também são exploradas as simetrias do tensor de perturbação dielétrica induzido por estes modos. Em particular são destacadas as famílias axial-radial e torsional-radial. Este apêndice complementa a análise apresentada nos capítulos 6, 7 e 8.

Finalmente, o **apêndice H** apresenta o método dos elementos finitos utilizado em quase todas as análises numéricas desta tese. O método é aplicado às equações de Maxwell utilizando funções de base vetoriais, a formulação é geral e vale, inclusive, para os guias compostos por materiais com anisotropia completa e/ou materiais absorvedores. Além disso, é desenvolvida a formulação para ondas acústicas em meios completamente anisotrópicos, também com possibilidade de absorção.

Capítulo 2

Controle da luz em guias de onda

2.1 Introdução

Os estudos pioneiros sobre a propagação da luz em guias de onda ocorreram, basicamente, no final dos anos 60 e ao longo dos anos 70. Boa parte destes resultados encontram-se compilados nos excelentes livros de Snyder & Love [28], Marcuse [29] e Unger [30]. Contudo, alguns aspectos mais modernos destes guias, estão dispersos em dezenas de artigos publicados nos anos 90 ou em alguns livros como o do polonês Mrozowski [31]. Neste capítulo será apresentada uma compilação de resultados que formam a base para compreensão dos principais aspectos destes guias, que são importantes para a compreensão desta tese. Em particular, enfatiza-se as características que são fundamentais na propagação da luz em fibras ópticas de cristal fotônico.

2.2 Equação de onda em guias dielétricos

Na região óptica do espectro eletromagnético, o comprimento de onda da luz é da ordem de microns (10^{-6} m) e, portanto, geralmente fala-se de guias de onda com dimensões transversais de alguns microns e de dimensões longitudinais de, pelo menos, centenas de microns. Na figura 2.1 é ilustrado um guia de onda arbitrário junto ao sistema de coordenadas adotado nesta tese.

As equações de Maxwell na ausência de dispersão temporal e espacial, no domínio da frequência

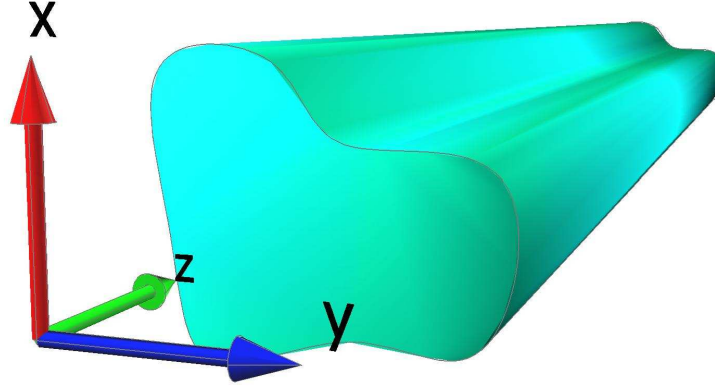


Fig. 2.1: Guia de onda eletromagnético.

(convenção $e^{-i\omega t}$), são dadas por [32]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.1d)$$

sendo que o deslocamento elétrico é dado por $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, o vetor indução magnética por $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ e a densidade de fluxo de corrente é dada por $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Como serão abordados exclusivamente meios dielétricos, pode-se considerar a condutividade nula (i.e., $\sigma = 0$). A escolha do eixo longitudinal do guia de onda como na figura 2.1 torna conveniente separar operador ∇ em suas componentes longitudinal e transversal, $\nabla = \nabla_t + \hat{z} \partial_z$. Pode-se então reescrever as equações de Maxwell na seguinte forma,

$$\nabla_t \times \mathbf{E} + \hat{z} \times \partial_z \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (2.2a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H} + \hat{z} \times \partial_z \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (2.2b)$$

Esta forma das equações é interessante, permitindo escrevê-las em termos de operadores [31]. Rearranjando os termos nas equações 2.2, pode-se escrevê-las na forma matricial

$$\mathbf{A} |\Psi\rangle = -i\partial_z \mathbf{B} |\Psi\rangle, \quad (2.3)$$

sendo que o ket $|\Psi\rangle$ representa, de forma abstrata, a distribuição transversal do campo eletromagnético

como função da coordenada z e, de forma concreta, representa o vetor coluna

$$|\Psi\rangle \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y)(z) \\ \mathbf{H}(x, y)(z) \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

os operadores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são dados por [31]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \omega\epsilon_0\boldsymbol{\epsilon} & -i\nabla_t \times \\ i\nabla_t \times & \omega\mu_0\boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{z} \times \\ \hat{z} \times & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5b)$$

Note que a equação 2.3 é análoga à equação de onda de Schrödinger, sendo que a derivada em z exerce o papel da derivada temporal. Apesar da notação de "bra-ket" introduzida acima poder aparentar uma mera questão estética, é muito poderosa e conveniente. Assim como na mecânica quântica (MQ), pode-se desenvolver facilmente a teoria de perturbação estacionária ou dependente de z , que corresponderia em MQ à perturbação dependente do tempo. Neste desenvolvimento é importante ter-se uma notação compacta, permitindo explorar a física da interação sem perder-se nas complicadas expressões vetoriais que tipicamente decorrem das equações de Maxwell [29].

2.2.1 Equação de ondas nos guias: autofunções (modos)

Em guias de onda perfeitos, existe simetria contínua de translação ao longo do eixo $\hat{z}$. O teorema de Bloch-Floquet [2] permite tomar a dependência dos campos, com a coordenada z , na forma seguinte forma, para uma alguma constante de propagação β ,

$$e^{i\beta z} |\Psi\rangle. \quad (2.6)$$

Substituindo este *ansatz* na eq. 2.3, obtém-se o seguinte problema Hermitiano generalizado de autovalores [31],

$$\mathbf{A} |\Psi\rangle = \beta \mathbf{B} |\Psi\rangle, \quad (2.7)$$

Os autovalores da equação 2.7 e suas respectivas autofunções dependerão do tipo de guia onda estudado. Entretanto, baseando-se em propriedades básicas de operadores lineares (como $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$) em espaços vetoriais de Hilbert [31], pode-se aprender algumas propriedades básicas das soluções deste problema. Foge do escopo desta tese rever as propriedades de espaços vetoriais, entretanto, são ressaltadas abaixo algumas propriedades básicas do problema 2.7 quando as propriedades dos

materiais ϵ e μ são representadas por matrizes reais e simétricas [33, 31]:

- Os autovalores β são reais sempre que $\langle \Psi | \mathbf{B} | \Psi \rangle \neq 0$ ¹.
- A relação de ortogonalidade entre dois modos $|\Psi_i\rangle$ e $|\Psi_j\rangle$ com constante de propagação β_i e β_j , tais que $\beta_i \neq \beta_j$, é dada por $\langle \Psi_i | \mathbf{B} | \Psi_j \rangle = 0$.
- As autofunções formam um base completa neste espaço vetorial.
- Para modos localizados (i.e., modos guiados), as constantes de propagação β_n são discretas com autofunções $|n\rangle$. No caso geral, quando considera-se modos de radiação, o espectro da equação 2.7, pode formar um contínuo [29, 31]. Neste caso os autovalores β_n são complexos e o operador $\mathbf{B}$ não é positivo-definido.

2.2.2 Condições de contorno - continuidade dos campos

As condições de contorno satisfeitas pelos campos eletromagnéticos podem ser deduzidas a partir da forma integral das equações de Maxwell [32], estabelecendo vínculos entre as componentes dos campos na interface entre dois materiais:

- As componentes normais dos campos $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma, \quad (2.8a)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0, \quad (2.8b)$$

sendo que σ é a densidade superficial de carga na interface entre o meio 1 e 2 e $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície que separa os dois meios. No caso de materiais dielétricos, $\sigma = 0$, portanto, as componentes normais dos campos $\mathbf{D} \cdot \hat{n}$ e $\mathbf{B} \cdot \hat{n}$ serão contínuas. Esta continuidade da componente $\mathbf{D} \cdot \hat{n}$ será de fundamental importância para entendermos um dos principais resultados gerados durante este doutoramento [23].

- As componentes tangenciais dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ satisfazem a relação,

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.9a)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (2.9b)$$

sendo que $\mathbf{J}_s$ é a densidade superficial de corrente na interface entre os meios. Na interface entre dielétricos $\mathbf{J}_s$ também é nulo, portanto, as componentes tangenciais de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são contínuas.

¹Isto nem sempre é verdade porque o operador $\mathbf{B}$ não é positivo-definido; neste caso podem existir modos com autovalores complexos.

2.2.3 Nomenclatura de modos

Existem diferentes maneiras de rotular as autofunções do problema representado pela eq. 2.7 [31, 34]. A mais difundida na literatura é baseada na existência, ou não, de todas as componentes dos campos eletromagnéticos. As soluções de um guia metálico preenchido por um dielétrico isotrópico e homogêneo formam a base para esta nomenclatura,

- *TEM* (Transverse Electric Magnetic): $E_z = H_z = 0$
- *TE* ou *H* (Transverse Electric): $E_z = 0$
- *TM* ou *E* (Transverse Magnetic): $H_z = 0$

Quando o meio é heterogêneo em apenas uma das direções cartesianas existem cinco componentes não-nulas, duas delas são longitudinais (E_z, H_z). Neste caso usa-se um sobrescrito indicando a direção na qual a componente do campo se anula. Por exemplo, o rótulo TE^x representa um modo que não possui a componente E_x do campo elétrico.

Na maior parte dos casos, entretanto, as seis componentes dos campos são não-nulas e o critério de rotulação não é óbvio. Estes modos são designados modos híbridos. Quando um modo híbrido é muito semelhante a um dos modos designados acima, utiliza-se o prefixo "quase" adicionado ao rótulo do modo puro. Quando a semelhança com um modo "puro" não é óbvia, utiliza-se os símbolos *EH* ou *HE* para denominar um modo híbrido. Um modo é denominado *EH* ou *HE* dependendo da semelhança deste à um modo *E* ou *H* no limite em que os materiais que definem o guia gradualmente se tornam homogêneos. Entretanto, existem controvérsias na literatura a respeito de critérios para nomenclatura [31].

No caso de guias cilíndricos existe um critério definido por Snitzer [35], que é adotado na literatura de fibras ópticas em geral. Neste critério os modos são designados pelos símbolos EH_{mn} e HE_{mn} . A distinção entre *EH* e *HE* é baseada no comportamento da razão entre as componentes longitudinais no limite de frequências altas ($\omega \rightarrow \infty$):

$$\text{se } \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-\frac{\mu_0 \omega H_z}{\beta E_z} \right] = -1, \text{ modo } HE \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-\frac{\mu_0 \omega H_z}{\beta E_z} \right] = 1, \text{ modo } EH \end{cases}$$

Os subscritos m, n são associados, diretamente, com as soluções da equação característica obtida quando se impõe as condições de contorno na interface entre o cilindro interno e a casca externa. As componentes dos campos em coordenadas cilíndricas são funções de Bessel e o índice m denota a ordem da função de Bessel que descreve as componentes longitudinais (E_z, H_z). O índice m também coincide com o número de variações cíclicas dos campos na direção azimutal ($\cos m\theta$ ou $\sin m\theta$). O índice n representa as diferentes soluções da equação característica em ordem crescente de frequência.

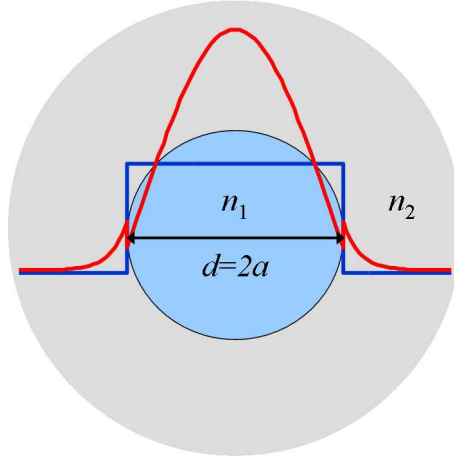


Fig. 2.2: Geometria do guia cilíndrico (fibra óptica). Os índices de refração do cilindro interno e da casca são, respectivamente, n_1 e n_2 . A curva vermelha representa o campo elétrico do modo fundamental ao longo do eixo horizontal. O diâmetro do cilindro interno será denotado por $d = 2a$. A extensão da casca em cinza é infinita na direção radial.

2.3 Guias cilíndricos - fibras ópticas

O formalismo desenvolvido na seção 2.2.1 é interessante para analisar propriedades fundamentais das equações de Maxwell em guias de onda arbitrários. Entretanto, quando deseja-se resolver problemas simples, como a propagação em guias cilíndricos compostos por materiais isotrópicos, é mais conveniente utilizar outra formulação. Nesta seção será considerada a fibra óptica mostrada na Fig. 2.2 (um guia formado por dois materiais concêntricos com índices de refração distintos tal que $n_1 > n_2$).

Pode-se manipular as equações 2.1a para deduzir equações de onda desacopladas para os campos eletromagnéticos,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k^2 \epsilon \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.10a)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) - k^2 \mu \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.10b)$$

sendo $k=2\pi/\lambda$ o número de onda no vácuo. Como a sílica é um material dielétrico, isotrópico e não-magnético, pode-se tomar $\mu = \mathbf{1}$ e $\epsilon = n^2$, onde n é o índice de refração. Com estas suposições, pode-se manipular as equações 2.10, reescrevendo-as na seguinte forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 n^2 \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 n^2 \mathbf{H} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H})$$

Usando as equações 2.1a, 2.1c e separando o operador ∇ em suas componentes transversal e longitudinal (i.e., $\nabla^2 = \nabla_t^2 - \beta^2$) pode-se escrever as equações de onda 2.10 na forma

$$\nabla_t^2 \mathbf{E} + (k^2 n^2 - \beta^2) \mathbf{E} = -\nabla \left[\frac{1}{n^2} (\nabla n^2) \cdot \mathbf{E} \right] \quad (2.12a)$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{H} + (k^2 n^2 - \beta^2) \mathbf{H} = i\omega (\nabla n^2) \times \mathbf{E} \quad (2.12b)$$

Assim, nota-se que a variação espacial do índice de refração (i.e., ∇n^2) atua como fonte para os campos eletromagnéticos. Esta variação é, portanto, responsável pelo acoplamento das componentes dos campos eletromagnéticos. Para a fibra óptica da Fig. 2.2, n é uma função degrau dada por

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & \text{se } r < a \\ n_2, & \text{se } r \geq a \end{cases}. \quad (2.13)$$

Em razão da homogeneidade do índice de refração para $r \neq a$, o lado direito das equações 2.12 se anulam para $r \neq a$, desacoplando as componentes dos campos. Neste caso, cada uma das componentes dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ satisfazem a equação escalar bidimensional de Helmholtz nas diferentes regiões do guia,

$$\left[\nabla_t^2 + (k^2 n_j^2 - \beta^2) \right] \begin{pmatrix} E_i \\ H_i \end{pmatrix} = 0, \text{ para } i = x, y, z \quad (2.14)$$

Por conveniência, as componentes longitudinais dos campos são escolhidas como incógnita. Uma vez resolvida a equação para as componentes longitudinais, é possível obter as demais componentes dos utilizando as equações de Maxwell [28]. Como busca-se modos localizados no núcleo, são escolhidas soluções na forma

$$E_z(r, \theta) = \begin{cases} A_1 J_m(u_\rho^z) \cos(m\theta), & \text{se } r < a \\ A_2 K_m(w_\rho^z) \cos(m\theta), & \text{se } r \geq a \end{cases}, \quad (2.15a)$$

$$H_z(r, \theta) = \begin{cases} B_1 J_m(u_\rho^z) \sin(m\theta), & \text{se } r < a \\ B_2 K_m(w_\rho^z) \sin(m\theta), & \text{se } r \geq a \end{cases}. \quad (2.15b)$$

sendo que $u = a \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}$ e $w = a \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}$ são denominados números de onda transversais normalizados do núcleo e da casca, respectivamente; as funções J_m e K_m são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo. Obviamente $u^2 + w^2 = a^2 k^2 (n_1^2 - n_2^2) \equiv V^2$. O parâmetro V é denominado frequência normalizada do guia e constitui uma grandeza fundamental. Este parâmetro está ligado ao número de modos guiados pela fibra (e também de outros guias de onda) em um comprimento de onda determinado [29, 28, 36]. As constantes A_1, A_2, B_1 e B_2 são determinadas ao exigir-se continuidade

das componentes tangenciais dos campos (E_z , H_z , E_θ e H_θ) em $r = a$. Estas condições conduzem a um sistema linear para estas constantes,

$$\mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

sendo que a matriz $\mathbf{C}$ é dada no apêndice B. Soluções não-triviais do sistema 2.16 ocorrem se, e somente se, $\det(\mathbf{C}) = 0$. Este determinante pode ser escrito na seguinte forma

$$F(u, w, V) = F_{TE}F_{TM} - F_m \quad (2.17)$$

sendo que as funções F_{TE} , F_{TM} e F_m são dadas pela eq. B.2 e mostradas na Fig. B.1. Para um dado valor do parâmetro V , resolve-se a equação característica escolhendo como variável independente w e encontrando quais valores de u satisfazem a eq. 2.17. Uma vez resolvida a equação característica, recupera-se a constante de propagação β utilizando a relação

$$\beta = k \sqrt{\frac{n_1^2 w^2 + n_2^2 u^2}{u^2 + w^2}}. \quad (2.18)$$

Para modos guiados, a constante de propagação admite valores na faixa $kn_2 \leq \beta < kn_1$, portanto é conveniente definir uma constante de propagação universal,

$$B = \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{(n_1^2 - n_2^2)}}, \quad (2.19)$$

sendo que $n_{eff} \equiv \beta/k$ é denominado índice de refração efetivo do modo. Os valores de B para modos guiados estão na faixa $0 \leq B < 1$, sendo que $B = 0$ define a frequência de corte dos modos. Na figura 2.3 são mostradas as sete primeiras soluções da eq. 2.17 em termos da constante de propagação normalizada B e do parâmetro V . Nesta figura nota-se que para $V < 2.405$, o guia circular admite apenas um modo guiado. A constante de propagação deste modo aproxima-se, assintoticamente, do eixo horizontal e $B \rightarrow 0$ apenas no limite em que $V \rightarrow 0$, portanto, sua frequência de corte é nula, tornando-o o único modo do guia cilíndrico que possui frequência de corte nula.

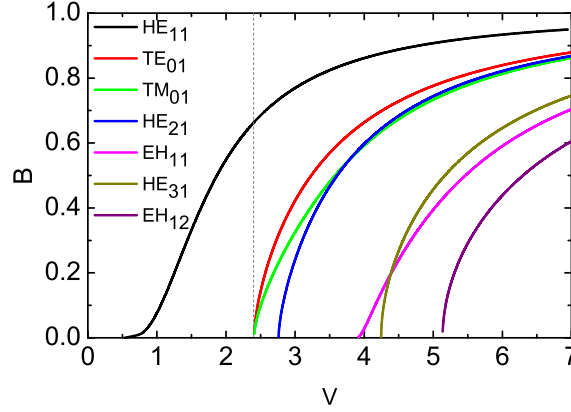


Fig. 2.3: Soluções da equação característica (eq. 2.16) para um guia circular com casca infinita. A linha pontilhada em cinza em $V \approx 2.405$ representa a transição entre o regime monomodo e multimodo.

2.3.1 Distribuição de energia

A distribuição espacial de energia no guia de onda depende, principalmente, do modo do guia no qual a luz se propaga. Entretanto, como mostra a figura 2.3, cada modo exibe um caráter altamente dispersivo. Em razão das dificuldades experimentais relacionadas à excitação de modos específicos de um guia de onda, geralmente trabalha-se na região em que os mesmos são monomodos. Nesta seção será analisada como a dispersão da curva $B(V)$, ilustrada na figura 2.3, altera a distribuição espacial de energia do modo HE_{11} .

Pode-se inferir sobre a distribuição de energia analisando os limites assintóticos da constante de propagação. Quando $B \rightarrow 0$, para um dado raio e índices de refração que definem o guia de onda, a constante de propagação $\beta \rightarrow kn_2$, ou seja, a velocidade de fase do modo ($v_\phi = \omega/\beta$) se aproxima da velocidade de fase da luz na casca (c/n_2). Isto significa que, neste limite, a maior parte da energia luminosa se concentra na casca do guia. O inverso também é verdadeiro, quando $B \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow kn_1$ e a velocidade de fase se aproxima da velocidade da luz no núcleo (c/n_1).

Isto é consistente com o fenômeno de difração, pois $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\lambda}{a} = \infty$. Portanto, quando $\lambda \gg a$ o fenômeno de difração supera o poder de confinamento do degrau de índice de refração e a energia do modo se dispersa por toda a casca do guia de onda. Para ilustrar o impacto da difração é mostrado, na figura 2.4, o fluxo de energia na direção $\hat{z}$ para o modo HE_{11} de uma fibra com os parâmetros: $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d = 2 \mu\text{m}$. A figura da esquerda mostra o caso $\lambda = d/2$ e à direita, $\lambda = 2d$; é nítida a penetração da energia na casca do guia quando o comprimento de onda fica maior que o diâmetro do guia, revelando a importância da difração neste regime de guiamento. Nesta figura também pode-se notar, observando os campos vetoriais em preto, a polarização quase linear (neste

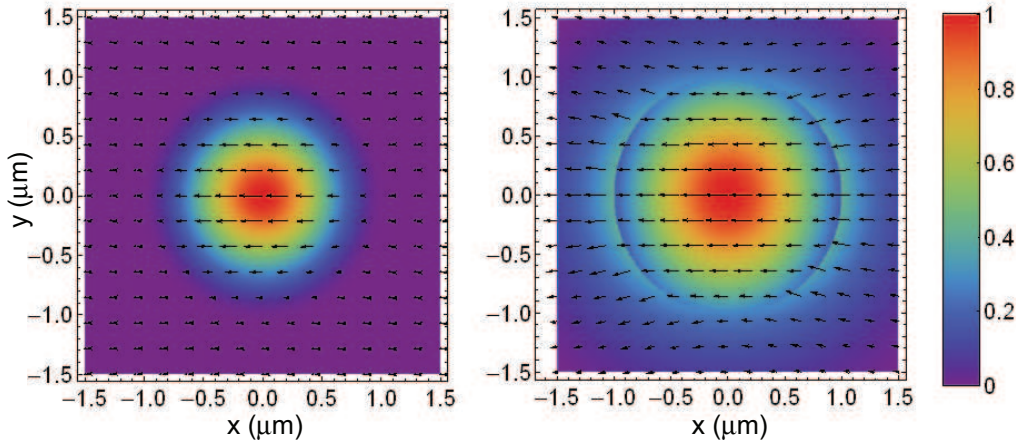


Fig. 2.4: Distribuição espacial de intensidade, $S_z(x, y)$, do modo HE_{11} para uma fibra com $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d = 1 \mu\text{m}$ (a) $\lambda = d/2$. b) $\lambda = 2d$. Os campos vetoriais em preto indicam a polarização do campo elétrico.

caso, na direção $\hat{x}$) do modo HE_{11} .

Figura de mérito para efeitos não-lineares

A importância de efeitos não-lineares na propagação da luz em guias de onda depende do material que constitui o guia. Cada classe destes efeitos² possui diferentes coeficientes não-lineares e depende de diferentes produtos do campo elétrico [39, 40]. No caso da sílica fundida, estes coeficientes são muito pequenos [41], porém, mesmo em fibras ópticas convencionais observa-se diversos destes efeitos com níveis de potência relativamente baixos. Isto é possível por causa de dois fatores básicos: o pequeno diâmetro modal ($\sim 10 \mu\text{m}$) e a baixíssima atenuação ($\sim 0.2 \text{ dB/km}$ na região de $1.55 \mu\text{m}$).

A figura de mérito para efeitos não-lineares (FdM) em amostras volumétricas (*bulk*) é dada pelo produto IL_{eff} , sendo que I é a intensidade óptica e L_{eff} é o comprimento de interação efetivo [41]. Um feixe gaussiano, altamente focalizado, com uma cintura mínima de raio w_0 possui comprimento efetivo (região na qual a intensidade óptica é alta) dado pelo comprimento de Rayleigh (ou parâmetro confocal)[42]

$$L_{eff}^{feixe} \simeq \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (2.20)$$

Portanto, o produto IL_{eff} para uma potência óptica P será dado por

$$(IL_{eff})^{feixe} \simeq \frac{P}{\pi w_0^2} \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{P}{\lambda}.$$

²Em sílica, a resposta não-linear pode ter contribuições eletrônicas e vibracionais [37, 38]. A primeira dá origem ao efeito Kerr e a segunda aos processos de espalhamento estimulado Raman e Brillouin.

Para um guia de onda, como ilustra a Fig. 2.4, a energia que viaja pelo núcleo ou casca depende do comprimento de onda. Portanto, é importante definir as frações de energia contidas em cada região do guia,

$$\eta_1 = \frac{\int_{n_{\text{núcleo}}} S_z dA}{\int_{n_{\text{tudo}}} S_z dA}, \quad (2.21a)$$

$$\eta_2 = \frac{\int_{n_{\text{casca}}} S_z dA}{\int_{n_{\text{tudo}}} S_z dA}, \quad (2.21b)$$

sendo que S_z é a componente longitudinal do vetor de Poynting e representa o fluxo de potência ao longo do guia de onda. No caso de um guia de raio a , sustentado no ar ($n_2 = 1$) e com baixa atenuação ($\alpha L \ll 1$, sendo L o comprimento do guia e α o parâmetro de atenuação), pode-se desprezar a contribuição da energia modal que viaja fora do núcleo³ e obter a seguinte expressão para o produto IL_{eff} ,

$$\begin{aligned} (IL_{eff})^{guia} &= \frac{P}{\pi a^2} \underbrace{\left(\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a S_z(r, \theta) dA}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty S_z(r, \theta) dA} \right)}_{=\eta_1} \int_0^L \exp(-\alpha z) dz \\ &= \frac{P}{\pi a^2} \eta_1 \left(\frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha} \right) \simeq \frac{P \eta_1}{\pi a^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, o aumento na figura de mérito não-linear promovida pelo guia de onda, em relação ao feixe gaussiano focalizado, é dada por

$$\xi \equiv \frac{(IL_{eff})^{guia}}{(IL_{eff})^{feixe}} = \frac{\lambda \eta_1}{\pi a^2 \alpha}. \quad (2.22)$$

Para ilustrar como estas quantidades dependem do comprimento de onda da luz, são mostradas na figura 2.5a as frações de potência η_1 e η_2 para o guia circular com $a = 1 \mu\text{m}$ e índices de refração $(n_1, n_2) = (1.45, 1.0)$ e $(n_1, n_2) = (2.0, 1.0)$. Nota-se na figura 2.5 que, quando $d/\lambda \lesssim 0.5$, a fração de energia $\eta_1 \rightarrow 0$ (curvas pretas) e a fração $\eta_2 \rightarrow 1$ (curva vermelhas), em acordo com as conclusões qualitativas obtidas na seção 2.3.1.

Na figura 2.5b é mostrada a figura de mérito ξ , para um guia com raio do núcleo $a = 1 \mu\text{m}$ $\alpha = 0.2 \text{ dB/km}$. como função da razão d/λ . O comportamento desta curva demonstra que existe um limite fundamental para o confinamento da luz em guias cilíndricos, resultado que também já foi demonstrado que este resultado também vale para outras geometrias [43]. A concentração da luz por

³Esta aproximação é razoável porque o coeficientes não-linear do ar é, tipicamente, três ordens de magnitude menor que o da sílica.

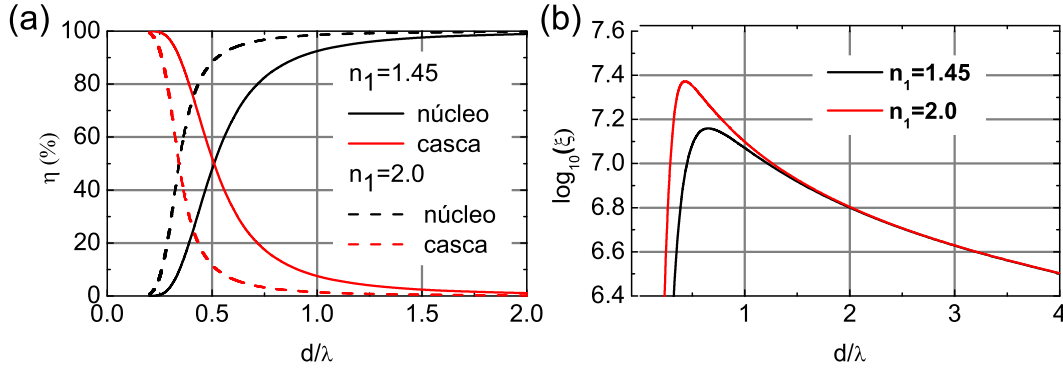


Fig. 2.5: (a) Fração de potência contida no núcleo (curvas pretas) e na casca (curvas vermelhas) do guia de onda cilíndrico para duas configurações de índice de refração. As linhas sólidas representam o caso $n_1 = 1.45$ e as linhas pontilhadas $n_2 = 2.0$. (b) Figura de mérito para não-linearidade ($\log_{10} \xi$), em função da razão d/λ , para diferentes índices de refração do núcleo. Em vermelho $n_1 = 2.0$ e em preto $n_1 = 1.45$.

reflexão interna total (RIT) em guias, com dimensão transversal da ordem do comprimento de onda da luz, impõe o limite difrativo de confinamento [44]. Todavia, o confinamento pelo guia de onda é capaz de aumentar o produto IL_{eff} , comparado com o feixe gaussiano, por mais de sete ordens de grandeza. Apesar deste aumento espetacular, o guia discutido está limitado a intensificar a luz na região central do guia (com alto índice de refração). Nem sempre isto é desejado, no capítulo 3 será discutida a possibilidade de concentrar a luz, fortemente, em regiões com baixo índice de refração (até mesmo no ar).

2.3.2 Dispersão de velocidade de grupo

Como foi discutido e ilustrado na Fig. 2.3, a constante de propagação depende dos parâmetros que definem o guia de onda. Nesta seção, será discutido o impacto destes parâmetros na velocidade de propagação da luz no modo fundamental (HE_{11}) de uma fibra óptica. Como a propagação ocorre na direção $\hat{z}$, a velocidade de grupo é dada por $v_g = \partial_\beta \omega$ [28]. Pode-se escrevê-la de forma mais conveniente em termos da constante de propagação, $v_g = (\partial_\omega \beta)^{-1}$. O atraso de grupo τ_g , que representa fisicamente o atraso por unidade de comprimento, é definido como o inverso de v_g [29],

$$\tau_g \equiv d_\omega \beta = \frac{1}{c} d_k \beta. \quad (2.23)$$

Note que o atraso de grupo tem dimensões TL^{-1} . O índice de grupo N_g (grandeza adimensional) de uma onda plana que se propaga em um material com índice de refração n é definido por

$$N_g \equiv c\tau_g = d_k\beta = d_k(kn_{eff}), \quad (2.24)$$

onde foi introduzido o índice de refração efetivo. Note que o índice de grupo é também pode ser obtido de forma análoga ao índice de refração, $N_g = c/v_g$. No caso do guia de onda circular da Fig. 2.2, escreve-se a constante de propagação β em termos dos índices de refração do núcleo, da casca e da constante de propagação universal B .

$$\beta = k \sqrt{n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) B},$$

a derivada de β é dada por

$$N_g = \frac{d\beta}{dk} = \frac{\left\{ n_2 N_2 + B(n_1 N_1 - n_2 N_2) + \frac{k}{2} d_k B (n_1^2 - n_2^2) \right\}}{\sqrt{n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) B}}, \quad (2.25)$$

sendo que N_1 e N_2 são os índices de grupo (eq. 2.24) do núcleo e da casca do guia, respectivamente. Na equação 2.25, existem contribuições para o atraso de grupo (N_g/c) oriundas da dispersão do material (n_1, n_2, N_1 , e N_2 dependem da frequência) assim como contribuições que dependem da maneira que B e $d_k B$ dependem da frequência. Esta última dependência é denominada dispersão de guia de onda e representa como o confinamento da luz, em consequência do degrau no índice de refração e da difração do feixe, altera a velocidade de propagação de pulsos de luz.

Um aspecto fundamental a ser notado na eq. 2.25 é que os termos que envolvem a constante de propagação universal e suas derivadas (B e $d_k B$) aparecem sempre ponderados pelas diferenças $n_1^2 - n_2^2$ e $n_1 N_1 - n_2 N_2$. Portanto, o atraso de grupo induzido pelo guia de onda é sempre ponderado pelo contraste entre os índices dos materiais que compõem o guia⁴. No caso de fibras ópticas convencionais, é possível obter aproximações da equação 2.25 que separam, completamente, a contribuição do guia de onda da contribuição dos materiais [45, 46, 29]. Entretanto, para as fibras estudadas nesta tese, esta aproximação não se aplica.

No caso geral, o atraso de grupo pode ser calculado através da derivada total de $\beta(n_1, n_2, k)$,

$$N_g = \frac{d\beta(n_1(k), n_2(k), k)}{dk} = \underbrace{\left(\frac{\partial\beta}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial k} + \frac{\partial\beta}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial k} \right)}_{\equiv N_{gWM}} + \underbrace{\frac{\partial\beta}{\partial k}}_{\equiv N_{gW}}. \quad (2.26)$$

⁴Esta é a razão pela qual guias de onda com alto contraste de índice introduzem bem mais dispersão que guias com baixo contraste

Pela equação 2.26 vemos que é possível isolar o atraso de grupo do guia N_{gw} (W de *waveguide*), porém, o atraso induzido pelo material ($\propto \partial_k n_1, \partial_k n_2$) está sempre acoplado com a dependência da constante de propagação com o guia de onda ($\propto \partial_{n_1} \beta, \partial_{n_2} \beta$). Na eq. 2.26, esta combinação entre material e guia é denominada N_{gwm} (WM de *waveguide e material*). Portanto, para calcular-se N_{gw} , basta resolver a eq. característica 2.17 mantendo n_1 e n_2 constantes.

A dependência do índice de grupo com a frequência está relacionada ao alargamento de pulsos no domínio do tempo. Isto motiva a definição da dispersão de velocidade de grupo (GVD - *Group velocity dispersion*), que será dada pela expressão

$$D \equiv \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{1}{c} \left(\frac{dN_g}{d\lambda} \right), \quad (2.27)$$

note que D tem dimensões de $[TL^{-2}]$. É comum expressar D em termos do índice de refração efetivo ($n_{eff} \equiv \beta/k$) usando a seguinte relação

$$D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2}, \quad (2.28)$$

note que a derivada na expressão 2.28 é total e, portanto, inclui as contribuições acopladas do material e do guia de onda.

Para ilustrar quantitativamente a influência dos diversos fatores acima discutidos, dois exemplos de guia de onda serão explorados. O primeiro trata de um guia que se assemelha à uma fibra óptica convencional e o segundo de uma guia que assemelha-se a uma fibra de cristal fotônico altamente não-linear [47]. Em ambos casos iremos explorar a relação aproximada para a dispersão, precisa apenas quando o contraste de índice de refração é pequeno [29, 45, 48]

$$D(\lambda, d) \simeq D_W(\lambda, d) + D_M(\lambda), \quad (2.29)$$

sendo que D_W é a dispersão do guia de onda, obtida assumindo que os índices de refração dos materiais são constantes. A dispersão material D_M é obtida substituindo n_{eff} na eq. 2.28 pelo índice de refração da sílica. O benefício de utilizar a relação 2.29 está na possibilidade de explorar a escalabilidade das equações de Maxwell: a dispersão de guia de onda depende apenas da razão λ/d . Portanto, uma vez calculado $D_W(\lambda, d_0)$ para um dado diâmetro d_0 , pode-se obter a dispersão de guia de onda para qualquer diâmetro $d = sd_0$ (sendo s um fator de escala) utilizando a relação [48]

$$D_W(\lambda, sd_0) = \frac{1}{s} D_W(\lambda/s, d_0). \quad (2.30)$$

Fibra convencional

Na figura 2.6a&b são mostradas as diferentes curvas de GVD para uma fibra óptica convencional ($n_1 = 1.45 \times (1.01)$, $n_2 = 1.45$) cujo diâmetro do núcleo é variado. Partindo-se do diâmetro original, $d_0 = 8 \mu\text{m}$, as diferentes curvas sólidas representam os casos: em preto $d = d_0$, em vermelho $d = d_0/2$, em verde $d = d_0/3$ e em azul $d = d_0/4$. A curva cinza pontilhada em ambas figuras representa a dispersão material da sílica pura, obtida através da formula de Sellmeyer [49].

Na figura 2.6a nota-se que a dispersão de guia de onda é amplificada e deslocada para comprimentos onda menores quando o diâmetro da fibra diminui. Este resultado pode ser facilmente antecipado analisando a expressão 2.30. A influência da dispersão de guia de onda só é substancial para valores pequenos do diâmetro. Esta sutil dependência deve-se ao baixo contraste de índice de refração nestas fibras ($\Delta \sim 1\%$).

Fibra altamente não-linear

Quando almeja-se alterar, drasticamente, a dispersão total de um guia, a discussão acima revela a existência de poucas alternativas: ou escolhe-se materiais altamente dispersivos, o que nem sempre é possível na prática, ou trabalha-se com guias com alto contraste de índice de refração. Uma maneira óbvia de escalar este contraste, sem recorrer à combinações exóticas de materiais, é utilizar como casca do guia o próprio ar ($n_2 \simeq 1$). Contudo, em razão do alto contraste de índice de refração, para garantir-se guiamento monomodo, deve-se manter $V < 2.405$ (veja Fig. 2.3). Portanto, a relação entre o diâmetro e o comprimento de onda da luz deve satisfazer a desigualdade

$$\left(\frac{d}{\lambda}\right) < \frac{2.405}{\pi \sqrt{1.45^2 - 1}} \simeq 0.73. \quad (2.31)$$

Por exemplo, para $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ a eq. 2.31 resulta em $d < 1.13 \mu\text{m}$. Como nota-se pela curva preta mostrada na figura 2.5, a figura de mérito ξ é enorme e, portanto, o guia é altamente não-linear nestas condições.

Na figura 2.6c&d são mostradas as diferentes curvas de GVD para este guia ($n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$) , obtidas variando-se o diâmetro do núcleo: em preto $d = d_0$, em vermelho $d = d_0/2$, em verde $d = d_0/3$ e em azul $d = d_0/4$. Ao contrário da dispersão em uma fibra convencional (fig. 2.6b), a dispersão total neste guia é dominada pela dispersão de guia de onda. Uma consequência marcante desta influência é que para $\lambda < 1.2 \mu\text{m}$, região na qual a dispersão da sílica é sempre normal ($D < 0$), pode-se obter dispersão anômala ($D > 0$). A demonstração experimental destes resultados culminou em uma série de publicações nos últimos anos [50, 51, 52, 53, 43].

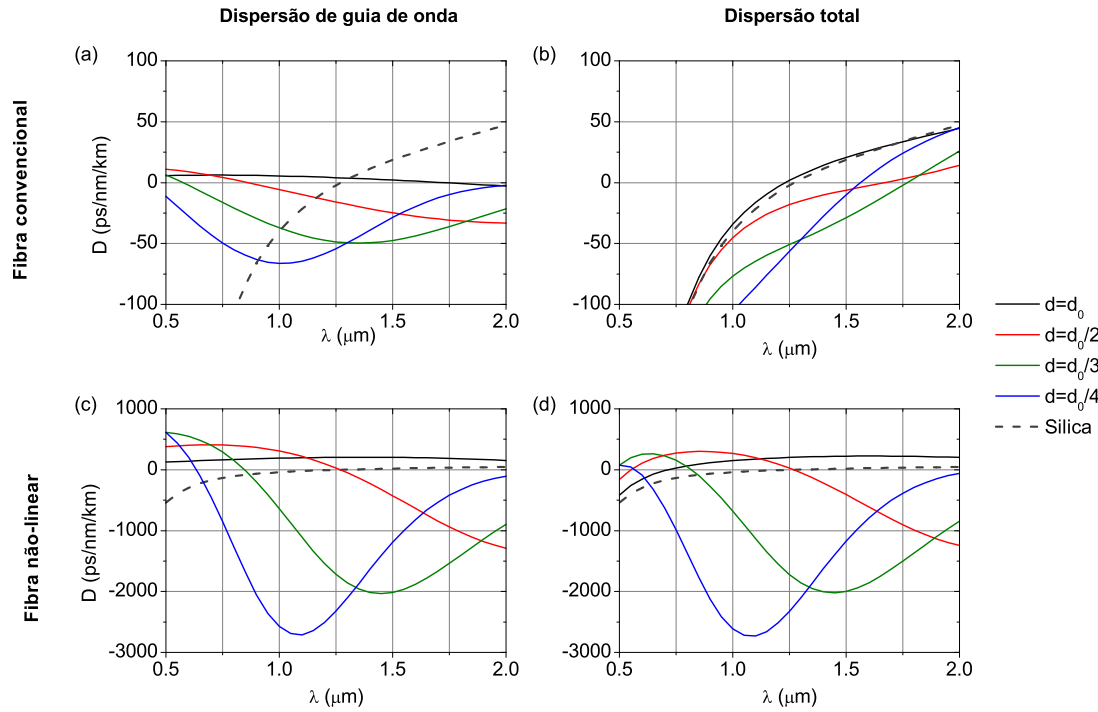


Fig. 2.6: Impacto do diâmetro do núcleo na dispersão em um fibra óptica convencional (a&b, $n_1 = 1.45 \times (1.01)$, $n_2 = 1.45$ e $d_0 = 8.8 \mu\text{m}$) e uma altamente não-linear (c&d, $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d_0 = 2.0 \mu\text{m}$). (a,c) Dispersão de guia de onda. (b,d) Dispersão total. A legenda à direita mostra os diâmetros utilizados.

2.4 Fibras de cristal fotônico

O elevado contraste de índice de refração em um guia cilíndrico possibilita amplificar, de maneira significativa, o impacto da geometria na dispersão total do guia. Sobretudo, em consequência da escalabilidade das equações de Maxwell (veja eq. 2.30), pode-se sintonizar a dispersão do guia escolhendo sua dimensão transversal. Entretanto, os regimes mais exóticos de propagação ocorrem quando o contraste de índice de refração é elevado e/ou quando a relação $d/\lambda \approx 1$. Fabricar e manipular fibras ópticas que satisfaçam estas duas condições não são tarefas triviais. A invenção das PCFs, permitiu contornar o problema da fragilidade mecânica de fibras com diâmetro tão pequeno e ofereceu, sobretudo, novos graus de liberdade geométricos para manipular a dispersão de guia de onda. Foge ao escopo desta tese revisar as inúmeras aplicações de PCFs, o leitor interessado pode recorrer a uma das referências [18, 17, 15, 54, 55, 56, 57, 58] para maiores detalhes. Contudo, serão apresentados nesta seção as definições de alguns parâmetros e propriedades de PCFs que podem ser relevantes para melhor compreensão desta tese.

Geometria

A geometria mais comum de PCFs é formada por um arranjo hexagonal de buracos de ar cuja profundidade estende ao longo do comprimento da fibra. Um "defeito" central neste arranjo define o núcleo da fibra (veja figura 2.7). Os parâmetros geométricos que definem esta estrutura são três: o período Λ dos buracos de ar na casca, o diâmetro dos buracos de ar d e o número de períodos na casca. A geometria ideal típica de uma PCF e os parâmetros acima são mostrados na Fig. 2.7. O diâmetro relativo dos buracos de ar é definido por

$$\delta \equiv d/\Lambda. \quad (2.32)$$

Para o arranjo triangular, a fração de ar na casca, definida como a razão entre a área ocupada pelos buracos e a área total da célula unitária, é dada por

$$f_{ar} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\delta^2, \quad (2.33)$$

como $0 < \delta < 1$, a fração de ar no arranjo hexagonal de buracos de ar varia entre $0 < f_{ar} < 0.907$.

Dispersão

Assim como no guia cilíndrico, a GVD em PCFs dependerá bastante do contraste de índice de refração entre o núcleo e a casca. Porém, distintamente de guias cilíndricos, o índice de refração da

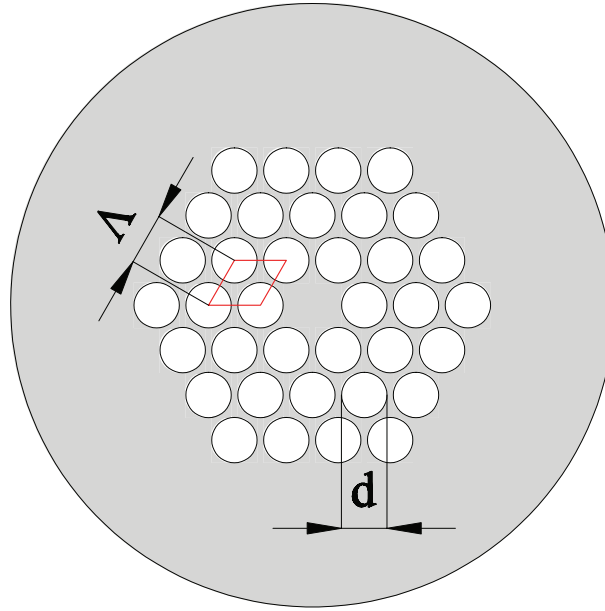


Fig. 2.7: Geometria típica da seção transversal de uma fibra óptica de cristal fotônico. O período dos buracos de ar na casca é Λ e o diâmetro destes buracos é d . O paralelogramo em vermelho indica a célula unitária que forma a casca.

luz na casca dependerá fortemente do comprimento de onda da luz, mesmo na ausência de dispersão material. A origem desta dispersão é puramente difrativa: Ao ter o comprimento de onda reduzido, a luz tende a se concentrar mais e mais na região de vidro, fazendo com que o índice de refração da casca, percebido pela luz, mude, tornando-se cada vez mais próximo do índice de refração do vidro (veja Fig. 2.8). No limite de pequenos comprimentos de onda ($\Lambda/\lambda \rightarrow \infty$), a luz é forçada a permanecer apenas na região de vidro devido à reflexão interna total. A distribuição espacial dos campos eletromagnéticos se estabilizam, fortemente concentrados no vidro (Fig. 2.9a). No limite de comprimento de ondas grandes ($\Lambda/\lambda \rightarrow 0$), a difração não permite que a luz resolva os buracos de ar e os campos evanescentes penetram profundamente nos mesmos (Fig. 2.9b), reduzindo o índice de refração percebido pela luz.

Este caráter dispersivo da casca da PCF faz com que a dispersão geométrica (i.e., a dispersão de guia de onda) seja muito forte. Além disto, o contraste de índice entre o ar e os buracos, assim como no guia cilíndrico, amplifica esta dispersão geométrica, tornando PCFs um ótimo dispositivo para controlar a dispersão [59, 60, 61, 48].

O modo fundamental desta casca periódica possui a mesma simetria do modo fundamental guiado no núcleo. Na literatura de PCFs, o modo fundamental da casca calculado no centro da zona de Brillouin (ponto M) (veja apêndice C) e é denominado *fundamental space-filling mode*, o índice de refração efetivo associado a este modo é mostrado na Fig. 2.8 como função do comprimento de onda

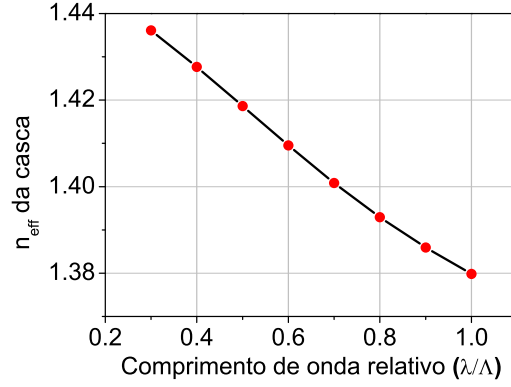


Fig. 2.8: Dispersão do índice de refração efetivo do modo fundamental da casca.

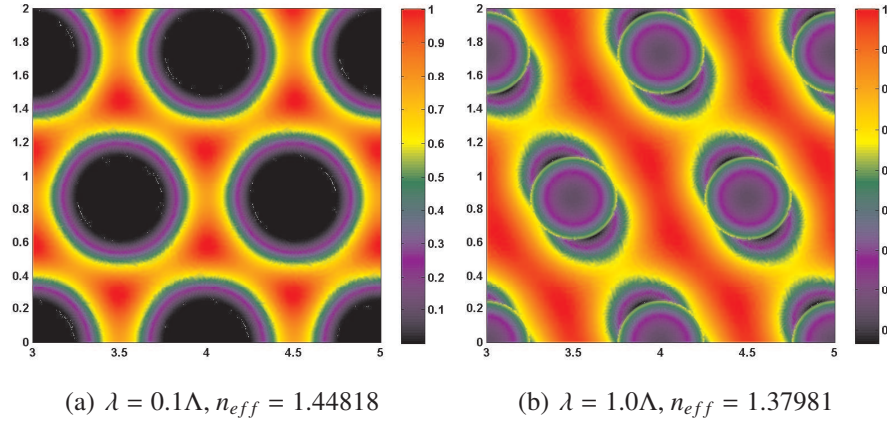


Fig. 2.9: Distribuição de potência ($|S_z(x, y)|$) do modo fundamental da casca de uma PCF com $\delta = 0.5$

normalizado λ/Λ . Na figura 2.9 é mostrada a distribuição de potência deste modo nos dois extremos do comprimento de onda relativo: à esquerda temos $\lambda = 0.1\Lambda$ e à direita $\lambda = \Lambda$. Nota-se a penetração do campo no interior dos buracos de ar quando o comprimento de onda é da ordem do período Λ .

2.5 Conclusões

Foram introduzidos neste capítulo os conceitos básicos de propagação da luz em guias de onda. Foi dada ênfase aos seguintes aspectos:

- Guias de onda possibilitam o confinamento transversal da luz por distâncias limitadas apenas pelas perdas ópticas.
- O confinamento é limitado por difração, contudo, mesmo para contrastes de índice de refração

relativamente baixos, é possível amplificar a figura de mérito para efeitos não-lineares por sete ordens de grandeza (Fig. 2.5).

- A dimensão transversal do guia e o contraste de índices de refração são fundamentais na determinação da dispersão de velocidade de grupo; guias pequenos com alto contraste conduzem a perfis inéditos de dispersão.
- O uso de fibras de cristal fotônico possibilita o controle de todos os parâmetros supracitados, sobretudo, apresentam graus de liberdade que estendem o leque de possibilidades para o estudo da interação entre luz e matéria em guias de onda.

Capítulo 3

Confinando luz em dimensões sub-lambda

3.1 Introdução

No âmbito das não-linearidades ópticas, um dos grandes desafios existentes diz respeito a possibilidade de intensificar o campo elétrico sem recorrer ao aumento da potência óptica. A maneira mais óbvia de alcançar isto é reduzir as dimensões da estrutura que confina os campos eletromagnéticos. Contudo, como foi discutido na seção 2.3.1, este confinamento é limitado pela difração. Neste capítulo será mostrado como combinar campos evanescentes com a descontinuidade do campo elétrico na interface entre dois materiais dielétricos para ir além do limite convencional imposto pela difração¹.

3.2 Princípio físico

Em virtude das condições de contorno na interface entre dois dielétricos, a componente normal do campo elétrico é descontínua (veja seção 2.2.2). Considerando-se dois meios com constantes dielétricas ϵ_1 e ϵ_2 , tal que $\epsilon_1 > \epsilon_2$ como ilustra a figura 3.1, a amplitude da componente normal do campo E será maior no meio com menor constante dielétrica. Em consequência da equação 2.8a obtém-se

$$E_2 \cdot \hat{n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cdot \hat{n}. \quad (3.1)$$

A equação 3.1 implica que, nas imediações da interface entre os dois materiais, o campo elétrico normal à interface no material ϵ_2 , será maior que o campo no material ϵ_1 por um fator igual à razão entre as constantes dielétricas. Na visão tradicional de ondas guiadas por reflexão interna total, este resultado pode parecer pouco intuitivo pois, nesta perspectiva, a luz sempre concentra-se na região de

¹Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em "Field enhancement within an optical fibre with a subwavelength air core". *Nature Photonics*, **1** (2):115-118, 2007.

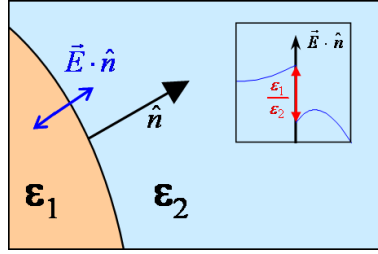


Fig. 3.1: Ilustração da descontinuidade do campo elétrico na interface entre dois dielétricos ϵ_1 (amarelo) e ϵ_2 (azul), neste caso $\epsilon_2 > \epsilon_1$. A inserção mostra o perfil do campo elétrico normal (linha azul) à superfície entre os dois materiais, note que a razão entre a amplitude desta componente é dada pela razão entre as constantes dielétricas, como na eq. 3.1.

maior constante dielétrica. Entretanto, a eq. 3.1 está em perfeito acordo com as equações de Maxwell; fisicamente, a descontinuidade dos campos garante que ocorra conservação da carga elétrica na interface entre os dois dielétricos [32]. De fato, no contexto de ondas guiadas, os campos eletromagnéticos no meio com menor índice de refração são evanescentes e, portanto, esta "anomalia" ocorre em uma escala de comprimento dada pela profundidade de penetração do campo evanescente no material ϵ_2 , que é da ordem de frações do comprimento de onda.

3.2.1 Guia "slot"

Nas referências [1, 62], foi demonstrado que pode-se explorar esta amplificação do campo elétrico em guias de onda utilizando geometrias apropriadas. Na referência [1], este conceito foi demonstrado utilizando um guia do tipo "slot", cuja geometria é mostrada na figura 3.2a. Cada uma das regiões retangulares com índice de refração n_1 forma um guia independente, cada qual com seus modos. Porém, devido a separação de apenas 50 nm entre os dois retângulos, os modos individuais de cada região se acoplam fortemente. Os modos acoplados da estrutura conjunta são denominados "supermodos" e se comportam como um único modo da estrutura conjunta [63]. Por causa da equação 3.1, os campos evanescentes destes modos são mais intensos na região com menor índice de refração (n_2).

Por exemplo, o modo quase- TE , mostrado na Fig. 3.2b, possui o vetor campo elétrico aproximadamente polarizado ao longo da direção vertical. Portanto, a descontinuidade do perfil de intensidade pode ser notada ao longo do eixo vertical. No caso do modo quase- TM (fig. 3.2c), a descontinuidade acontece ao longo do eixo horizontal. Na pequena região entre os dois guias, o campo elétrico evanescente tem contribuições do guia retangular da esquerda e do da direita. Para o modo quase- TM (Fig. 3.2c) — descontínuo ao longo do eixo horizontal — a intensidade óptica nesta região com dimensões 50×300 nm é maior que em qualquer outra parte do guia.

Este resultado é surpreendente pois demonstra que, escolhendo de forma apropriada a geometria do guia, pode-se tornar os campos evanescentes de um modo guiado mais intensos do que os campos

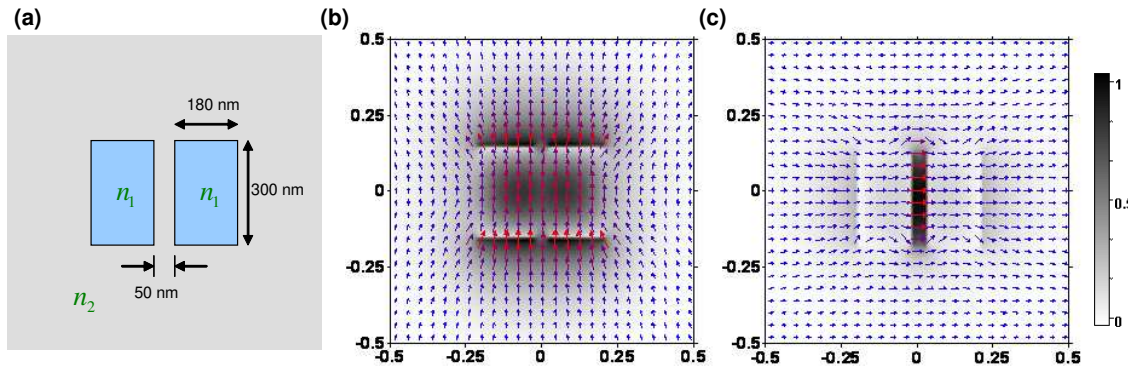


Fig. 3.2: Geometria e modos eletromagnéticos do guia *slot* da referência [1]. (a) Seção transversal do guia, os índices de refração são $n_1 = 3.48$ (Silício) e $n_2 = 1.45$ (Sílica). (b,c) Distribuição de intensidade (S_z) e orientação dos dois primeiros modos do guia *slot*, modo *quase-TE* em (b) e *quase-TM* em (c). As cores dos vetores e a escala de cores-falsas acompanham a variação de intensidade do campo. A escala transversal é dada em μm .

confinados (que neste caso estão dentro das regiões retangulares com índice de refração n_1). Para $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, apenas 30% da potência guiada pelo modo está "confinada" nesta lacuna [1]. Entretanto, a pequena área da mesma torna a intensidade óptica nesta região muito alta. Um aspecto intrigante a ser notado é que o campo elétrico está confinado em uma região muito menor que o comprimento de onda da luz comprimento de onda ($\lambda = 1.55 \mu\text{m}$). Isto sugere que o limite difrativo, que impõe uma dimensão de confinamento típica $\sim \frac{\lambda}{2n}$ (sendo n o índice de refração do meio), pode ser ultrapassado quando o confinamento de campos evanescentes é explorado.

A aplicabilidade desta região de alta intensidade é, contudo, limitada no caso de guias de óptica integrada como o da figura 3.2. Estes guias são feitos de silício sobre um substrato de dióxido de silício utilizando técnicas de crescimento de cristais seguidas de diversas etapas de pós-processamento [62]. O processo de corrosão (*etching*) do óxido para obter-se a estrutura final deixa a superfície do guia com certa rugosidade e, portanto, estes guias apresentam altos coeficientes de atenuação ($\sim 10 \text{ dB/cm}$), reduzindo o comprimento de interação efetivo e, conseqüentemente, a figura de mérito para efeitos não-lineares.

3.2.2 Guia Tubular

Com inspiração no trabalho de Almeida e colaboradores [1], decidiu-se investigar a possibilidade de explorar este tipo confinamento em uma fibra óptica. As vantagens de se ter uma fibra com estas propriedades são diversas, principalmente por causa de sua flexibilidade mecânica e atenuação óptica potencialmente baixa. Uma geometria circular (apropriada para fabricação de fibras ópticas) capaz de criar uma situação análoga àquela que acontece na lacuna do guia *slot* da figura 3.2 seria um guia

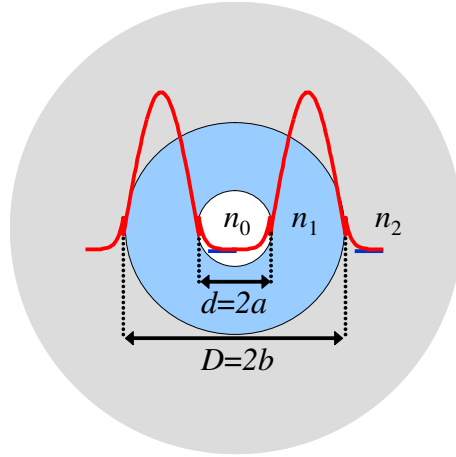


Fig. 3.3: Geometria do guia tubular. Os índices de refração do cilindro interno, do anulo e da casca são, respectivamente, n_0, n_1 e n_2 . A curva vermelha representa o campo elétrico do modo fundamental ao longo do eixo horizontal - note que neste caso, devido às dimensões escolhidas, o campo não se concentra na região central. O diâmetro interno do tubo será denotado por $d = 2a$, e o diâmetro externo por $D = 2b$. A extensão da casca é infinita na direção radial.

tubular como o ilustrado na Fig. 3.3.

Os modos deste guia podem ser obtidos de maneira análoga àquela utilizada para o guia cilíndrico da seção 2.3. Para obter-se modos guiados no anulo do tubo, que possam satisfazer as condições de contorno em $r = a, b$, supõe-se soluções para os campos longitudinais na seguinte forma [30]

$$E_z(r, \theta) = \begin{cases} A_1 I_v \left(x_b^r \right) \cos m\theta, & \text{se } r < a. \\ \left[A_2 J_v(u_b^r) + A_3 N_v \left(u_b^r \right) \right] \cos m\theta, & \text{se } a \leq r \leq b. \\ A_4 K_v \left(w_b^r \right) \cos m\theta, & \text{se } r > b. \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$H_z(r, \theta) = \begin{cases} B_1 I_v \left(x_b^r \right) \sin m\theta, & \text{se } r < a. \\ \left[B_2 J_v(u_b^r) + B_3 N_v \left(u_b^r \right) \right] \sin m\theta, & \text{se } a \leq r \leq b. \\ B_4 K_v \left(w_b^r \right) \sin m\theta, & \text{se } r > b, \end{cases} \quad (3.2b)$$

sendo que J_v, K_v são funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente; I_v, N_v são funções modificadas de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Os vetores de onda trans-

versais normalizados x, u e w são dados por

$$x = b \sqrt{\beta^2 - k^2 n_0^2}, \quad (3.3a)$$

$$u = b \sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}, \quad (3.3b)$$

$$w = b \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}. \quad (3.3c)$$

Ao impor-se as condições de contorno sobre as componentes tangenciais dos campos em $r = a, b$ chega-se ao seguinte sistema linear para os coeficientes $A_1 \rightarrow A_4, B_1 \rightarrow B_4$

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.4)$$

sendo que $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ e as submatrizes M_{ij} de dimensão 4×4 , são dadas no apêndice B. A constante de propagação normalizada e o parâmetro V para o guia tubular são definidos de forma análoga ao guia cilíndrico (veja eq. B.4). Na figura 3.4 são mostradas, em termos da constante de propagação normalizada e do parâmetro V , as soluções da equação característica para os sete primeiros modos do guia tubular². Percebe-se que a relação de dispersão dos modos do guia tubular é bastante semelhante à relação de dispersão dos modos do cilindro (Fig. 2.3), entretanto, pode-se notar alguma diferença, que será responsável por uma dispersão de velocidade de grupo bastante distinta no guia tubular.

Distribuição de energia e Figura de Mérito

Como na seção 2.3.1, define-se a fração de energia nas três regiões do guia como η_0, η_1 e η_2 , denotando a região interior, anular e exterior (casca) do guia, respectivamente (veja eq. 2.21). Na figura 3.5a são mostradas as frações de energia para dois valores distintos de $n_1 = (1.45, 2.0)$ e para os parâmetros geométricos: $a = 0.2 \mu\text{m}$ e $b = 1.0 \mu\text{m}$.

Nota-se que as frações de potência no ânulo e na casca do guia (Fig. 2.5a) se comportam de maneira análoga às frações de potência do guia cilíndrico (Fig. 3.7a), contudo, a fração de potência no interior do tubo (Fig. 3.5b) apresenta um comportamento distinto. Quando altera-se o comprimento de onda da luz λ , a razão D/λ diminui. Por causa difração, a fração de potência aumenta na região central do guia atingindo um ponto máximo que depende da geometria do guia (razão a/b) assim como do contraste de índice de refração. Quando a razão D/λ é adiante reduzida (λ grande),

²No caso do guia tubular existe uma liberdade na escolha de B e V . Como deseja-se comparar os dois guias diretamente, foi escolhida a convenção dada pela eq. B.4 pois, no limite em que o diâmetro do cilindro interno se anula, o guia tubular se degenera no guia cilíndrico.

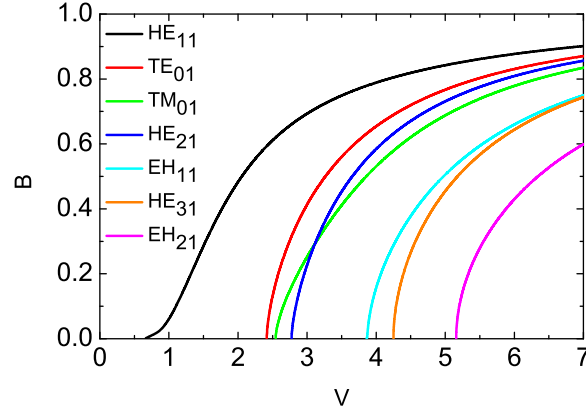


Fig. 3.4: Soluções da equação característica (eq. 3.4) para um guia tubular com casca infinita. Foram escolhidos $n_0 = n_2 = 1$, $n_1 = 1.45$ e a relação de raios $a/b = 0.2$

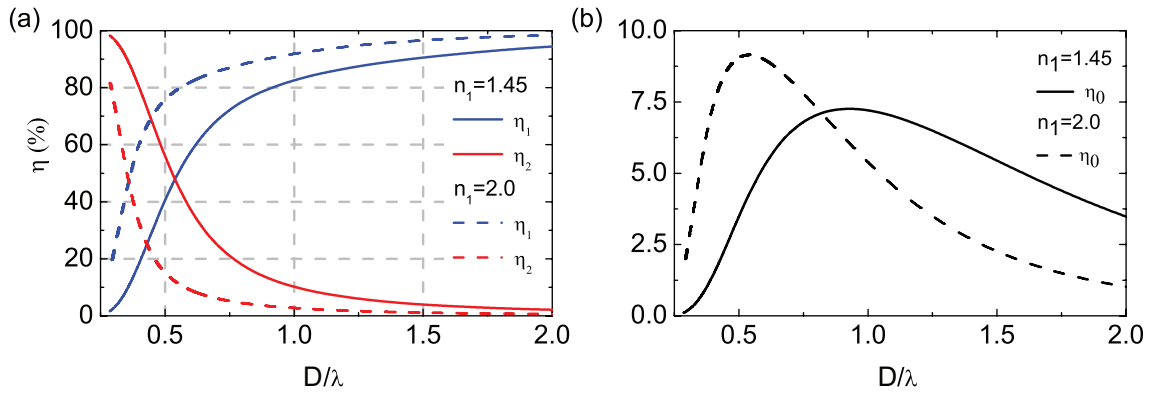


Fig. 3.5: Distribuição de energia no guia tubular com parâmetros $a = 0.2 \mu\text{m}$, $b = 1.0 \mu\text{m}$, e $n_0 = n_2 = 1.0$. O eixo horizontal representa razão D/λ , obtido alterando o valor de λ (a) Fração de potência contida no ânulo (curvas vermelhas) e na casca (curvas azuis) do guia de onda tubular. As linhas sólidas representam o caso $n_1 = 1.45$ e as linhas pontilhadas $n_1 = 2.0$. (b) Fração de potência no interior do tubo para os mesmo contraste de índice.

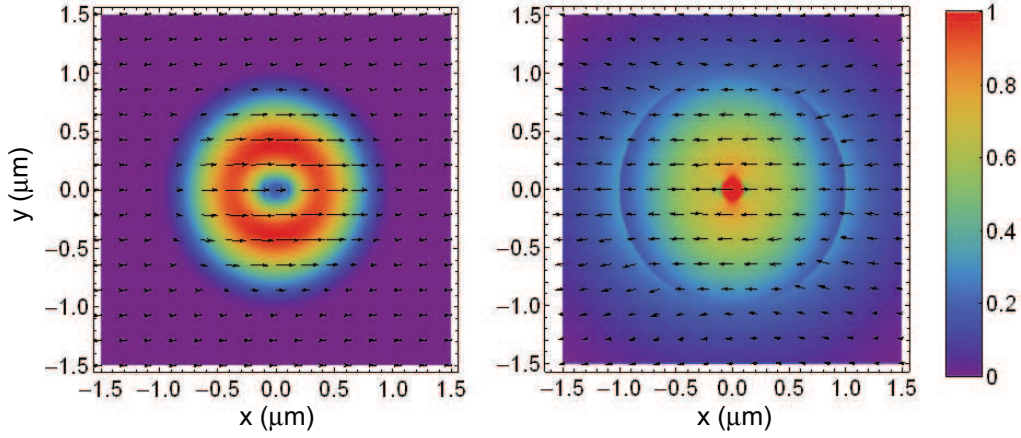


Fig. 3.6: Distribuição do fluxo de potência ($S_z(x, y)$) do modo fundamental (HE_{11x}) para um tubo com diâmetro externo $D = 2 \mu\text{m}$ com $n_1 = 1.45$, $n_0 = n_2 = 1.0$ e $a/b = 0.2$. (a) $\lambda = D/2$. (b) $\lambda = 2D$. Os campos vetoriais em preto indicam a polarização do campo elétrico.

a difração se intensifica a tal ponto que a energia do modo é expulsa para a casca do guia, reduzindo a fração de energia dentro do buraco central. Na Fig. 3.5b é mostrada esta dependência para dois valores do índice de refração do ânulo e $a/b = 0.2$. Pode-se notar que apenas uma pequena fração da potência viaja nesta região ($\lesssim 10\%$), entretanto, por causa da pequena área desta região (πa^2), a intensidade óptica é muito alta. Na figura 3.6 é mostrada a distribuição espacial do vetor de Poynting (S_z) quando $n_2 = 1.45$ para dois valores de D/λ , em (a) $\lambda = D/2$ e em (b) $\lambda = 2D$.

De forma análoga ao guia *slot*, quando o comprimento de onda é maior que a dimensão transversal do guia (regime de forte difração), o campo elétrico torna-se mais intenso na região de menor índice de refração. Entretanto, como o modo HE_{11} é, aproximadamente, linearmente polarizado, o campo é descontínuo apenas em uma das direções (no caso da figura 3.6, ao longo de y), portanto, a concentração do campo elétrico no interior do tubo não é tão extrema quanto no caso do modo quase- TM do guia *slot* (veja Fig. 3.2c). Uma vantagem do guia tubular em relação ao *slot*, no que diz respeito à polarização, é que o modo HE_{11} é duplamente degenerado e, portanto, a intensificação do campo elétrico ocorre, com a mesma intensidade, para ambas polarizações.

Para estimar a potencial não-linearidade proporcionada pela concentração da luz, foi calculada a figura de mérito ξ (definida como na eq. 2.22) para este guia com diferentes diâmetros do buraco central. Como existem duas regiões distintas que deseja-se analisar (buraco central e ânulo) serão consideradas figuras de mérito distintas para cada uma delas, a saber

$$\xi_0 = \frac{\lambda \eta_0}{\pi a^2 \alpha}, \text{ para região central,} \quad (3.5a)$$

$$\xi_1 = \frac{\lambda \eta_1}{\pi (b^2 - a^2) \alpha}, \text{ para região anular.} \quad (3.5b)$$

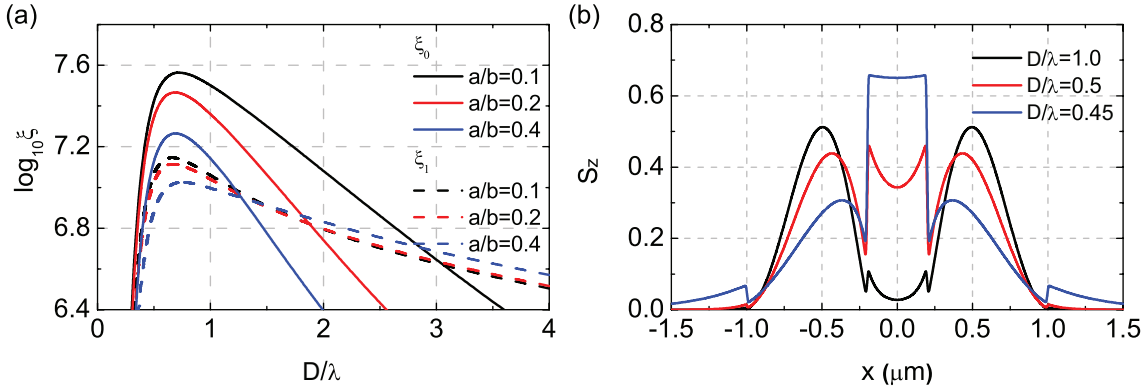


Fig. 3.7: (a) Figura de mérito para não-linearidades em função da razão entre o diâmetro do ânulo e o comprimento de onda (D/λ) para diferentes relações de raio (a/b). Em todas os casos $n_1 = 1.45$. As curvas sólidas representam a FdM no interior do tubo (eq. 3.5a) e as curvas tracejadas no ânulo (eq. 3.5b). (b) Perfil do fluxo de potência (S_z) do modo fundamental para diferentes valores da razão D/λ ($a/b = 0.2$).

Estas grandezas são mostradas na figura 3.7 em função da razão D/λ quando $n_1 = 1.45$ e os demais índices de refração são mantidos: $n_0, n_2 = 1.0$. Considera-se a atenuação $\alpha = 0.2$ dB/km. Pode-se notar que ambas FdM apresentam um pico quando $D/\lambda < 1$, regime no qual a difração é importante. Todavia, por causa da pequena área da região central, a FdM associada à esta região (ξ_0) têm valores superiores a FdM da região anular (ξ_1). Este resultado mostra que o guia tubular, assim como o *slot*, pode concentrar fortemente a energia eletromagnética transportada pelos campos evanescentes se as dimensões e comprimento de onda forem escolhidos de forma apropriada. A Fig. 3.7 mostra o perfil do fluxo de potência, ao longo da direção $\hat{x}$, para diferentes valores da razão D/λ .

Dispersão

Na figura 2.6 foi mostrado como o aumento do contraste de índice de refração entre núcleo e casca pode alterar a dispersão de guia de onda. Especialmente para núcleos pequenos, foi mostrado que a dispersão de guia de onda pode, de fato, dominar a dispersão total do guia, tornando possível obter dispersão anômala para comprimentos de onda menores que $1.2 \mu\text{m}$, região na qual a sílica apresenta dispersão normal. A geometria do guia tubular possui um grau de liberdade extra (o diâmetro interno do tubo) que torna possível sintonizar a dispersão obtida para um dado diâmetro externo do tubo.

Na figura 3.8 são mostradas as curvas de dispersão obtidas para um diâmetro externo do tubo fixo em $D = 1 \mu\text{m}$ e com diâmetro do buraco central variando gradativamente. Vemos que o aumento do diâmetro interno do tubo modifica a dispersão em dois aspectos: o pico de máxima GVD é deslocado para o vermelho e o valor máximo deste pico é reduzido. A GVD passa de anômala para normal na região espectral mostrada, quando $\lambda \gtrsim 250 \text{ nm}$. Para comparação, também é mostrada na mesma

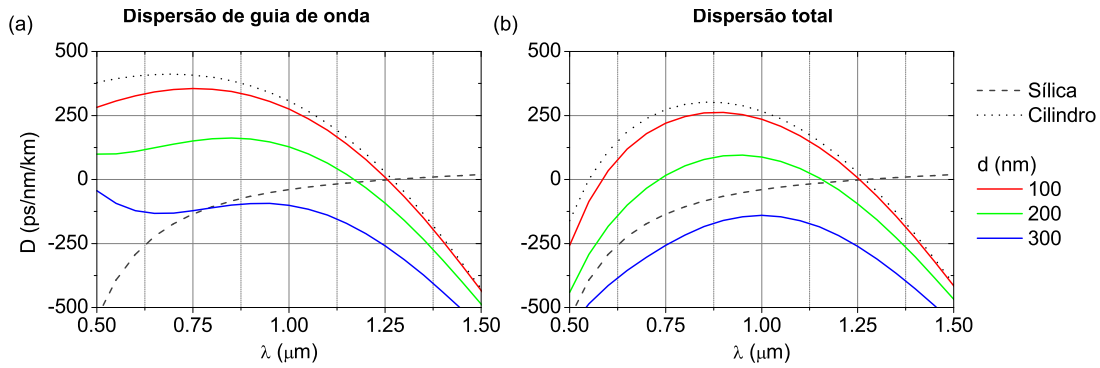


Fig. 3.8: Dispersão do guia tubular altamente não-linear ($n_0 = 1.0$, $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $D = 1 \mu\text{m}$). (a) Dispersão de guia de onda. (b) Dispersão total. As linhas sólidas representam a dispersão para diferentes diâmetros do buraco central (veja legenda à direita); a curva cinza tracejada representa a dispersão material da sílica; a curva preta pontilhada representa a dispersão do guia cilíndrico mostrada na curva vermelha da figura 2.6c&d ($n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $d = 1.0 \mu\text{m}$).

figura (curva preta pontilhada) a dispersão do guia cilíndrico com o mesmo diâmetro do tubo.

3.3 PCF com núcleo tubular: demonstração experimental

Foi demonstrado na seção 3.2 que o guia tubular é capaz de confinar a luz no interior do tubo, resultando em uma elevada figura de mérito para efeitos não-lineares. Além disto, foi mostrado que a dispersão deste guia é mais flexível do que a dispersão do guia cilíndrico (Fig. 3.8). Entretanto, todos estes efeitos só se tornam significativos para tubos com alto contraste de índices de refração entre o ânulo e as regiões adjacentes e para comprimentos de onda tais que $D/\lambda \approx 1$. Na região espectral de interesse ($\lambda > 1 \mu\text{m}$), isto implica em tubos com diâmetros sub-micrométricos sustentados no ar; do ponto de vista experimental isto é pouco prático. Os motivos principais são a fragilidade mecânica e a dificuldade de manipulação de tubos com diâmetros tão pequenos. Por exemplo, qualquer poeira que se agregue ao tubo irá causar perdas de espalhamento e absorção intoleráveis.

Para contornar estas dificuldades, foi proposto e fabricado um novo tipo de PCF com núcleo tubular (veja figura 3.9). Nesta estrutura, os problemas de fragilidade supracitados desaparecem. Sobretudo, controlando a fração de ar na casca periódica pode-se determinar o contraste de índice entre o "ânulo" e a casca externa.

3.3.1 Design das fibras

Antes de iniciar a fabricação destas fibras foram realizadas diversas simulações numéricas das equações de Maxwell buscando compreender como os parâmetros geométricos da PCF definidos na

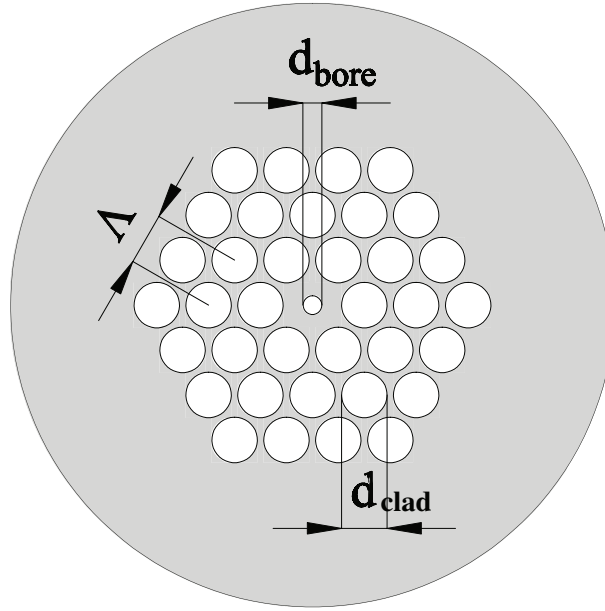


Fig. 3.9: Geometria e parâmetros utilizados no design da PCF com núcleo tubular. Λ representa a separação entre os buracos da casca, d_{clad} representa o diâmetro destes buracos e d_{bore} representa o diâmetro do buraco central.

Fig. 3.9 influenciam a FdM para efeitos não-lineares e a dispersão de velocidade de grupo. Os resultados mostrados a seguir foram todos calculados para uma PCF com período da casca $\Lambda = 2 \mu\text{m}$.

Dispersão

Assim como o guia tubular se destaca em relação ao guia cilíndrico nos aspectos dispersivos, a PCF com núcleo tubular também possui propriedades dispersivas distintas de uma PCF convencional. Na figura 3.10 são mostradas as curvas de dispersão calculadas utilizando a expressão 2.28³. Cada gráfico na Fig. 3.10 está associado a um diferente valor do parâmetro $\delta = d_{clad}/\Lambda$, representando diferentes frações de ar na casca. O diâmetro do buraco central varia entre $0 < d_{bore} < 800 \text{ nm}$, o caso $d_{bore} = 0$ (curvas pretas) representa a ausência do buraco central e, portanto, corresponde a uma PCF convencional.

Nota-se na Fig. 3.10 que o aumento do diâmetro interno do tubo induz uma grande variação da curva de dispersão. Um aspecto bastante interessante é que, para alguns valores de d_{bore} , obtém-se uma dispersão plana em uma faixa espectral que abrange toda a região $1 < \lambda < 1.6 \mu\text{m}$. Otimizando os parâmetros geométricos, é possível obter fibras com baixíssima dispersão em toda faixa espectral utilizada em telecomunicações [64].

³No cálculo destas curvas não foi feita a aproximação da eq. 2.29. A dispersão material da sílica foi calculada de acordo com a formula de Sellmeyer [49].

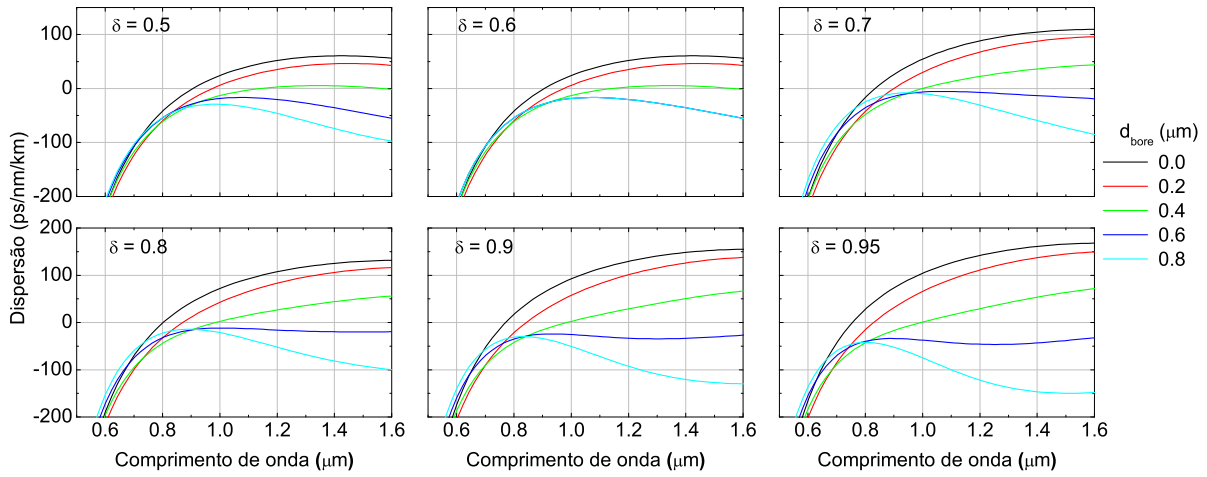


Fig. 3.10: Dispersão de velocidade de grupo em uma PCF com núcleo tubular ($\Lambda = 2 \mu\text{m}$). Os diferentes gráficos estão associados a diferentes valores do parâmetro $\delta = d_{clad}/\Lambda$. O valor correspondente está indicado no canto superior esquerdo de cada gráfico. As curvas coloridas em cada gráfico representam diferentes valores do diâmetro do buraco central, os valores correspondentes são mostrados na legenda à direita.

Figura de mérito para efeitos não-lineares

Em razão da alta dispersão da casca da PCF (veja seção 2.4), a penetração do campo na mesma pode diferir bastante do guia tubular e, portanto, o parâmetro δ tem um papel importante na FdM. Na figura 3.11 mostramos a fração de energia no interior do buraco central para diferentes parâmetros geométricos. Três tendências importantes podem ser notadas nesta figura:

1. o aumento da fração de ar na casca sempre contribui para aumentar a fração de potência contida no buraco central;
2. quanto maior o diâmetro do buraco central, maior a fração de potência no mesmo;
3. todas as curvas exibem um ponto de máximo (apesar de poder-se notá-lo apenas na figura 3.11a), ou seja, existe uma região espectral ótima para obter-se o máximo de energia dentro do buraco central.

As tendências destacadas acima são todas análogas àquelas previstas para o guia tubular discutido na seção 3.2.2, os argumentos difrativos que explicam aquele comportamento também se aplicam neste caso. A variação do parâmetro δ corresponderia, no guia tubular, à variação do índice de refração da casca. Apesar de não ter sido discutido o impacto desta variação na seção 3.2.2, a explicação da tendência (1) é óbvia: o aumento da fração de ar na casca tende a diminuir seu índice de refração

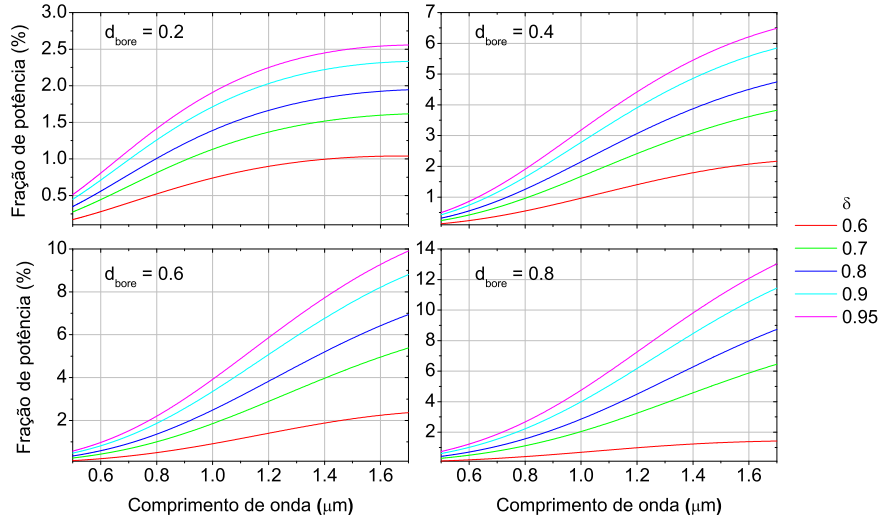


Fig. 3.11: Fração de potência no buraco central da PCF. Os diferentes gráficos estão associados a diferentes valores do diâmetro do buraco central d_{bore} . O valor correspondente está indicado no canto superior esquerdo de cada gráfico. As curvas coloridas em cada gráfico representam diferentes valores do parâmetro $\delta = d_{clad}/\Lambda$, os valores correspondentes são mostrados na legenda à direita.

efetivo (Fig. 2.8) e, conseqüentemente, a profundidade de penetração do campo eletromagnético na casca. Isto limita a região espacial em que o campo está distribuído e, como resultado, a fração de energia dentro do buraco central aumenta.

O eixo vertical dos gráficos da figura 3.11 representa a fração de potência contida no buraco central. Contudo, como foi discutido na seção 2.3.1, os efeitos não-lineares dependem da figura de mérito ξ , definida pela eq. 3.7. Na figura 3.12 são comparadas as FdMs normalizadas⁴ ($\alpha\xi/\lambda$) para diferentes diâmetros do buraco central. Apesar das baixas frações de potência mostradas na figura 3.11, a pequena área do buraco central garante (de forma análoga ao guia tubular, veja seção 3.2.2) que a intensidade óptica no interior do mesmo seja altíssima. Ao contrário da figura 3.11, na qual os valores do eixo vertical (repare nos valores da escala vertical) sempre aumentam proporcionalmente aos valores de d_{bore} , as FdMs mostradas na figura 3.12 aumentam quando d_{bore} é reduzido. Este comportamento deve-se à dependência quadrática da FdM com o inverso do diâmetro do buraco (veja eq. 3.5a).

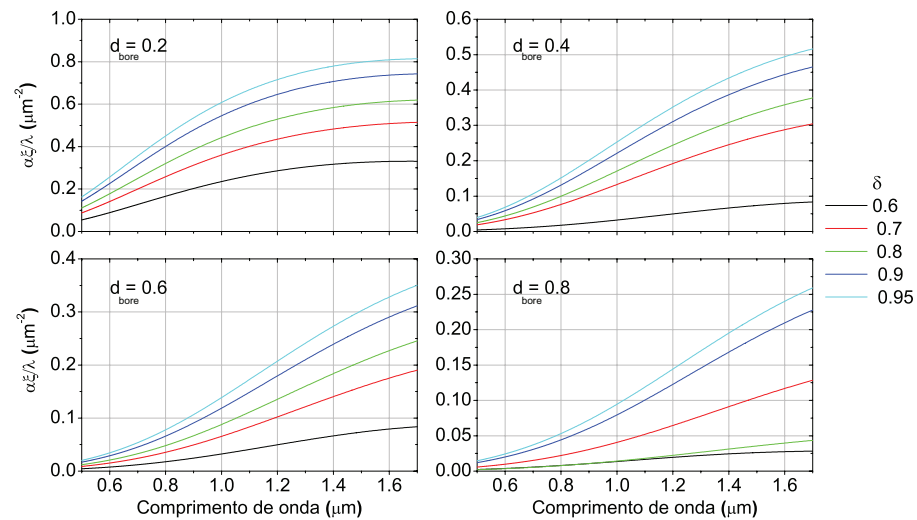


Fig. 3.12: Figura de mérito para efeitos não-lineares dentro do buraco central da PCF tubular. Em todas as figuras as diferentes linhas sólidas representam valores distintos do diâmetro relativo dos buracos de ar na casca (δ). (a) $d_{\text{bore}} = 0.2 \mu\text{m}$. (b) $d_{\text{bore}} = 0.4 \mu\text{m}$. (c) $d_{\text{bore}} = 0.6 \mu\text{m}$. (d) $d_{\text{bore}} = 0.8 \mu\text{m}$

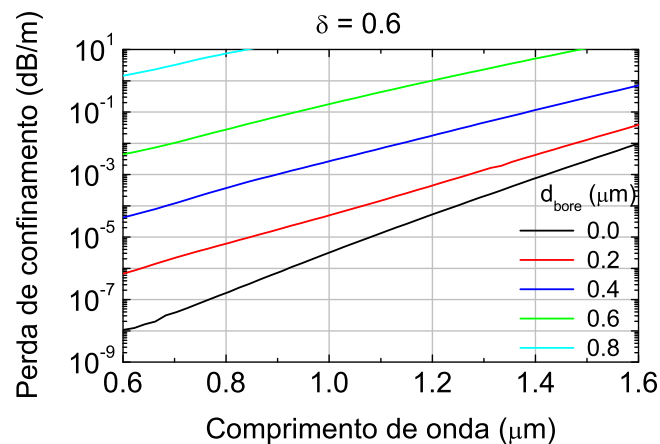


Fig. 3.13: Perdas de confinamento para PCF com núcleo tubular com $\delta = 0.6$ e quatro camadas de buracos de ar na casca. As diferentes curvas representam valores distintos do diâmetro do buraco central (veja legenda à direita).

Perda de confinamento

A presença do buraco no centro da fibra tende a aumentar a penetração do modo na casca (veja Fig. 3.6). Portanto, é importante quantificar quantos anéis de buracos de ar são necessários para evitar o tunelamento do modo para região externa à casca periódica. São mostradas na Fig. 3.13 as perdas de confinamento⁵ para uma PCF com $\delta = 0.6$ e 4 camadas de buracos de ar na casca com diferentes valores de d_{bore} . Quando aumenta-se o diâmetro do buraco central, nota-se na Fig. 3.13 um aumento significativo das perdas de confinamento. Esta figura sugere que quando utiliza-se quatro anéis de buracos, para garantir perdas menores que 0.1 dB/m, deve-se trabalhar com buracos centrais com diâmetros menores que 400 nm, caso contrário é mandatório aumentar o valor de δ .

3.3.2 Fabricação e experimentos

Foram feitos dois conjuntos de medidas para demonstrar que as previsões teóricas discutidas acima são verdadeiras. A primeira consiste na medida da dispersão de velocidade de grupo; a segunda, em medir, diretamente, o campo óptico na face da fibra utilizando um NSOM (*Near-field Scanning Optical Microscope*). Em razão da disponibilidade de apenas um fotodetector de silício no NSOM⁶, foi decidido fabricar uma fibra com as menores dimensões possíveis. Para conseguir-se fazer a imagem de campo-próximo e demonstrar que o campo elétrico tende a se concentrar no interior do buraco central, foi preciso dispor de uma fibra cuja distribuição do campo transite entre a região anular e o buraco central na faixa de frequências detectáveis pelo silício. Na figura 3.14 são mostradas imagens SEM (*Scanning Electron Microscope*) das fibras fabricadas para estes experimentos.

Medidas de dispersão de velocidade de grupo

Técnica de medida As medidas de GVD foram realizadas utilizando um interferômetro do tipo Mach-Zehnder (veja figura 3.15). A fonte de luz, com comprimento de onda central λ e largura espectral $\Delta\lambda$, oriunda de uma única fonte, é dividida em dois feixes no BS_1 , um dos feixes se propaga através do ar (braço b - em azul na Fig. 3.15), o outro se propaga pelo ar, porém, atravessa um pedaço da fibra a ser medida (braço a - em vermelho na Fig. 3.15). O atraso experimentado pela luz ao se

⁴Introduz-se a normalização α/λ pois torna-se a figura de mérito igual à intensidade normalizada (i.e., η/A sendo η a fração de potência contida em uma dada região do guia de onda com área A) (veja eq. 2.22). Neste caso a área em questão (A) é a área do buraco central.

⁵As perdas de confinamento são calculadas utilizando camadas absorventes no nosso programa de análise modal (veja apêndice H).

⁶Os fotodetectores de silício são sensíveis para comprimentos de onda na faixa de 450-1100 nm).

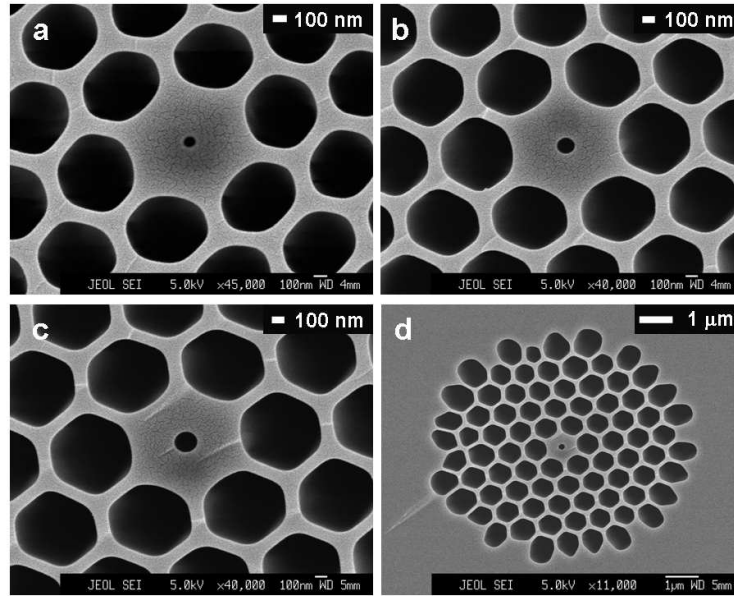


Fig. 3.14: Imagens SEM da seção transversal das PCFs fabricadas. (a) PCF #1, $\Lambda = 650$ nm, $d_{bore} = 110$ nm e $d_{core} = 950$ nm. (b) PCF #2, $\Lambda = 750$ nm, $d_{bore} = 150$ nm e $d_{core} = 920$ nm (c) PCF #3, $\Lambda = 880$ nm, $d_{bore} = 205$ nm e $d_{core} = 1080$ nm. (d) PCF #3 com uma magnificação maior.

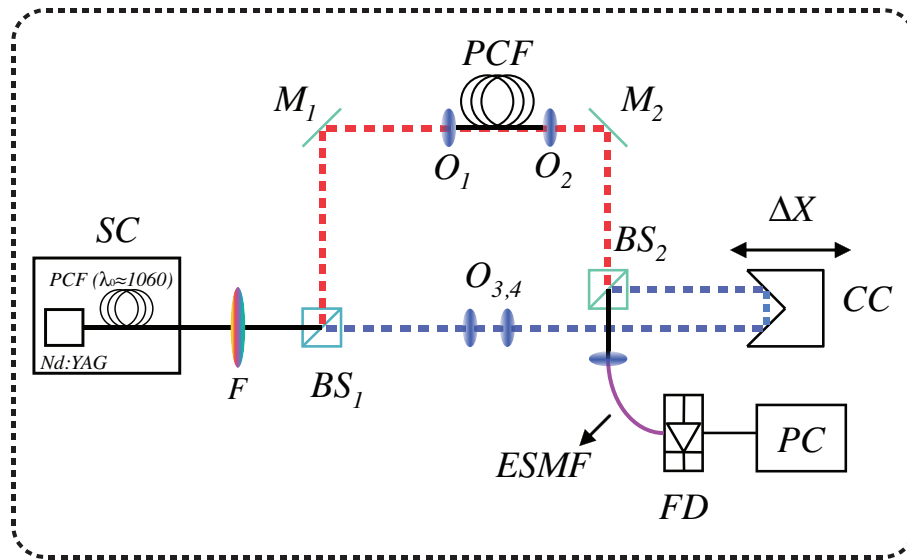


Fig. 3.15: Diagrama experimental do interferômetro montado para medir a GVD. *SC* representa a fonte de super-continuo, *F* representa o filtro interferométrico, $M_{1,2}$ representam espelhos fixos, $BS_{1,2}$ são divisores de feixe (*beam-splitter*), $O_{1,2,3,4}$ representam objetivas de microscópio; *CC* é um espelho duplo acoplado a um motor de passo; *ESMF* é uma fibra PCF do tipo ESM; *FD* é um fotodiodo; *PC* é o computador que adquire os dados e controla o motor de passo, movimentando *CC*. A trajetória do feixe de luz é representado por preto quando ambos feixes estão presentes, o traço azul representa a trajetória no braço *b*; o traço vermelho representa a trajetória do feixe no braço *a*. ΔX representa o deslocamento do espelho *CC*.

propagar por cada um dos braços será dado por

$$T_a(\lambda) = \frac{L_{ar}^a}{c} N_{ar}(\lambda) + \frac{L_f^a}{c} N_f(\lambda) \quad (3.6a)$$

$$T_b(\lambda) = \frac{L_{ar}^b}{c} N_{ar}(\lambda) \quad (3.6b)$$

sendo que $L_{ar}^{a,b}$ representa o comprimento do caminho de ar nos braços a e b , L_f^a representa o comprimento do caminho de fibra no braço a e $N_{ar,f}$ representa, respectivamente, o índice de grupo do ar e da fibra (veja eq. 2.24). Depois de serem combinados no BS_2 , os feixes são acoplados em uma PCF do tipo ESM (*Endlessly single-mode*)⁷ e então detectados pelo fotodiodo FD . Para cada comprimento de onda é feita uma varredura na posição do espelho móvel CC (*corner cube*) e gravada a potência detectada pelo fotodiodo como função da posição do espelho.

Define-se a diferença de atraso de grupo entre os dois braços $T_{ab}(\lambda)$ através da expressão,

$$T_{ab}(\lambda) \equiv T_a(\lambda) - T_b(\lambda) = \frac{L_f^a}{c} N_f(\lambda) + \frac{(L_{ar}^a - L_{ar}^b)}{c} N_{ar}(\lambda).$$

Pode-se calcular o coeficiente de dispersão D relacionando o atraso diferencial ($\Delta T_{ab} = (\partial T_{ab} / \partial \lambda) \delta \lambda$) com a variação do comprimento do braço b , $\Delta T_{ab} = 2\Delta X/c$. Como a variação espectral de $N_{ar}(\lambda)$ é desprezível, pode-se utilizar a definição da dispersão de velocidade de grupo (eq. 2.27) para escrever

$$D = \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{1}{L_f} \frac{dT_{ab}}{d\lambda} = \frac{2}{cL_f} \frac{dX_{ab}}{d\lambda}. \quad (3.7)$$

A fonte de luz utilizada no interferômetro foi um espectro super-contínuo [65, 66] gerado em uma PCF com $\lambda_0 \sim 1060$ nm. O bombeio para este processo é um laser pulsado de Nd:YAG, operando em $\lambda = 1064$ nm, no regime de *mode-locking* [67]. Este regime é induzido pela modulação passiva do fator de qualidade da cavidade (*Q-switching*). A vantagem deste tipo de fonte é a enorme densidade espectral de potência que pode ser atingida ($\sim$ mW/nm [68]), o que facilita o alinhamento do interferômetro. Para selecionar o comprimento de onda central da fonte, foram utilizados filtros interferométricos com largura de banda $\Delta\lambda \sim 10$ nm e comprimento de onda central que variava entre 500 – 1100 nm.

Resultados Na figura 3.16a são mostradas as franjas de interferência típica obtidas nas medidas. Note que a largura espacial da região onde ocorrem as franjas é da ordem do comprimento de coe-

⁷Este tipo de fibra é utilizada pois oferece maior tolerância para qualquer desvio no alinhamento entre os feixes provenientes dos dois braços. Como esta só admite um único modo de propagação, os dois feixes só poderão se acoplar no mesmo modo

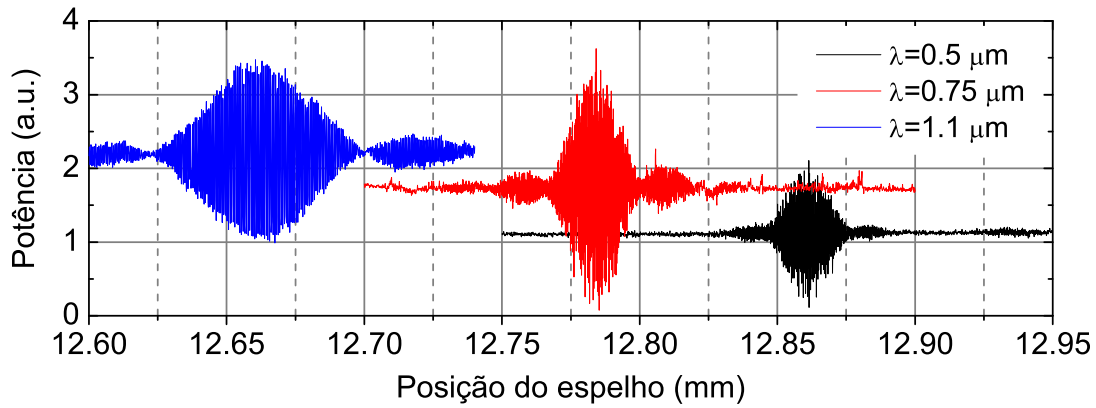


Fig. 3.16: Franjas de interferência típicas para diferentes comprimentos de onda do filtro interferométrico. Estas franjas foram obtidas para PCF#1 (Fig. 3.14a) com comprimento de 3 cm.

Parâmetro	Valor (PCF #1)	Valor (PCF #2)	Valor (PCF #3)
A	38, 14	46, 45	29, 51
B_1	-0, 14	-0, 14	-0, 05
B_2	$2, 07 \times 10^{-4}$	$1, 68 \times 10^{-4}$	$3, 64 \times 10^{-5}$
B_3	$-1, 23 \times 10^{-7}$	$-7, 38 \times 10^{-8}$	$2, 64 \times 10^{-9}$
B_4	$2, 15 \times 10^{-11}$	$3, 21 \times 10^{-12}$	$-9, 87 \times 10^{-12}$

Tab. 3.1: Valores dos coeficientes do ajuste polinomial mostrado na figura 3.17. O polinômio é da forma $y = A + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + B_3\lambda^3 + B_4\lambda^4$, sendo que as unidades de λ e y são expressas, respectivamente, em nm e mm.

rência da luz, por exemplo, para $\lambda = 1.1 \mu\text{m}$ e $\Delta\lambda = 10 \text{ nm}$ obtém-se $L_c \approx 0.12 \text{ mm}$. Trocando-se o filtro interferométrico, as franjas se deslocam; a taxa e a direção deste deslocamento determinam a GVD. Identificando a posição do espelho na qual a visibilidade das franjas é máxima (X na eq. 3.7), obtém-se os pontos em vermelho mostrados na Fig. 3.17. As curvas pretas mostradas nesta figura são obtidas através de um ajuste polinomial de quarta-ordem⁸, o polinômio e seus coeficientes são mostrados na tabela 3.1.

Utilizando a expressão 3.7, calcula-se o coeficiente de dispersão D a partir das curvas da Fig. 3.17. Os resultados para as PCFs #1 (preto), #2 (vermelho) e #3 (azul) são mostradas na figura 3.18. As barras de erro na figura 3.18 tiveram sua amplitude estimada em $\pm 10 \text{ ps/nm/km}$. Este valor foi baseado na incerteza em determinar a posição central relativa das franjas de interferência. As linhas

⁸Por causa da propagação de erros ao tomarmos derivadas numéricas, é interessante obter um bom ajuste polinomial para $\tau_g(\lambda)$ e, somente depois, calcular a derivada do polinômio obtido.

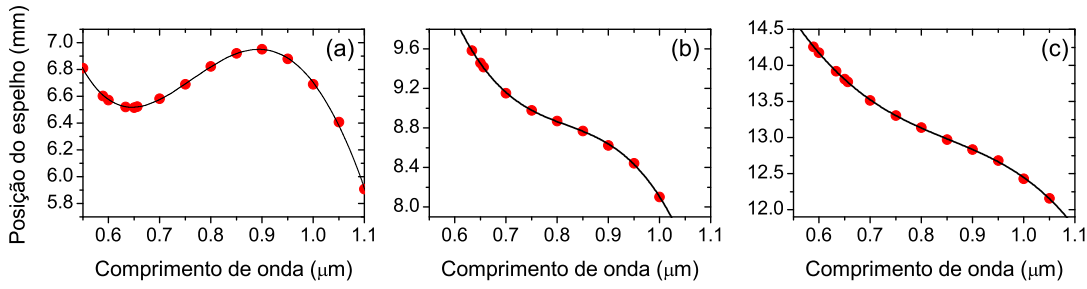


Fig. 3.17: Posição do espelho (X_{ab} na eq.3.7) em função do comprimento de onda central do filtro interferométrico. (a) PCF #1, $L_f = 28.27$ cm. (b) PCF #2, $L_f = 32.78$ cm. (c) PCF #3, $L_f = 18.39$ cm.

sólidas nesta figura representam os resultados obtidos através do método dos elementos finitos (veja apêndice H.1). Para obter-se a boa concordância entre simulações e experimento mostrada nesta figura, foi necessário utilizar a geometria exata das fibras nas simulações. A geometria foram obtidas identificando, cautelosamente, os contornos nas imagens SEM⁹.

A redução da GVD, o deslocamento para o vermelho do pico de GVD, e a transição da região de dispersão anômala ($D > 0$) para normal ($D < 0$), a medida que o buraco central aumenta, são características muito bem reproduzidas pela simulação numérica (curvas sólidas na Fig. 3.18). A boa concordância entre simulação e experimento expressam a precisão do método numérico utilizado e confirma as previsões de que a estrutura observada nas imagens de microscopia eletrônica, de fato, apresenta a resposta óptica esperada. Apesar das medidas de GVD serem quantitativas, elas constituem apenas uma evidência indireta que a luz está realmente concentrada na região do buraco central. Na segundo conjunto de medidas realizadas nestas fibras, foram obtidas informações mais diretas sobre a distribuição espacial do campo eletromagnético.

Microscopia óptica de campo próximo (NSOM - *Near-field scanning optical microscope*)

Já no ano de 1873, Ernst Abbe [69] se deu conta de que a resolução espacial de um microscópio óptico é limitada pelo comprimento de onda da luz e pela abertura numérica do conjunto condensador-objetiva do microscópio, ele mostrou que esta limitação é fundamental e independe da qualidade do microscópio. O desenvolvimento do NSOM foi motivada pela necessidade de uma técnica de imagem que retenha os diversos recursos de contraste disponíveis em microscopia óptica, porém, com uma resolução que supere o limite clássico imposto pela difração.

⁹As imagens SEM da Fig. 3.14 foram especialmente preparadas com esta finalidade. Ao preparar a superfície das fibras para microscopia eletrônica, foi depositada a quantidade mínima de ouro necessária para a obtenção de imagens. Este procedimento evita distorções nas imagens causadas por acúmulo de cargas na fibra. O microscópio eletrônico utilizado emite elétrons através de um FEG (*Field Emission Gun*) em altíssimo vácuo, permitindo operá-lo com tensão de aceleração de apenas 500 V.

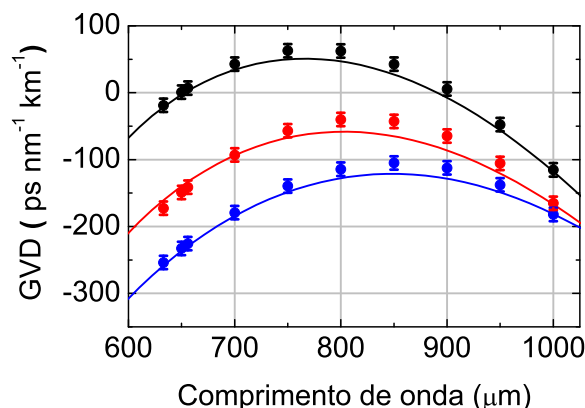


Fig. 3.18: Dispersão da velocidade de grupo para as fibras mostradas na figura 3.14. Os pontos representam os valores experimentais e as linhas sólidas os valores obtidas na simulação. As curvas pretas, vermelhas e azuis estão associadas às PCFs #1, #2, e #3, respectivamente. O aumento do diâmetro do buraco central diminui os valores da dispersão e desloca o pico do GVD para frequências mais baixas.

O campo eletromagnético emitido por qualquer fonte de luz (pela ponta de uma PCF, por exemplo) é constituído por uma parte radiante (*far-field*) e uma não-radiante (*near-field*). A parte radiante se propaga livremente pelo espaço e pode ser coletada pela objetiva de microscópio convencional, entretanto, a parte não-radiante é formada por campos evanescentes que não se propagam pelo espaço. Os campos evanescentes, discutidos anteriormente, fazem parte deste campo-próximo e, devido ao seu rápido decaimento espacial (geralmente exponencial), estes campos são compostos por componentes de Fourier de altíssima frequência espacial ($\gg \lambda^{-1}$). Fisicamente, a ausência destes campos na luz irradiada é o que conduz ao limite difrativo de resolução descoberto por Abbe.

Técnica de medida O NSOM contorna o limite de Abbe utilizando a ponta de uma fibra óptica que foi afunilada até alcançar um diâmetro típico de 50 nm. A lateral desta ponta é metalizada permitindo que a luz seja coletada apenas pela pequena abertura na ponta da fibra. Esta ponta é acoplada a um cantiléver similar ao usado em microscopia de força atômica. O cantiléver é acoplado a um posicionador piezoelétrico permitindo o controle preciso da posição da ponta da fibra em relação à amostra. Na prática, para controlar a distância vertical entre a ponta e a amostra utiliza-se um sistema de realimentação que permite a ponta varrer o plano da amostra acompanhando a topografia de sua superfície. No microscópio utilizado (*Nanonics NSOM 2000*), o sistema de realimentação é baseado na frequência ressoante de um "diapasão" acoplado à ponta coletora; a amplitude de vibração deste diapasão está intimamente relacionada com a distância entre a ponta e a superfície da amostra.

Foi utilizada como fonte de luz um espectro super-contínuo gerado da mesma maneira descrita

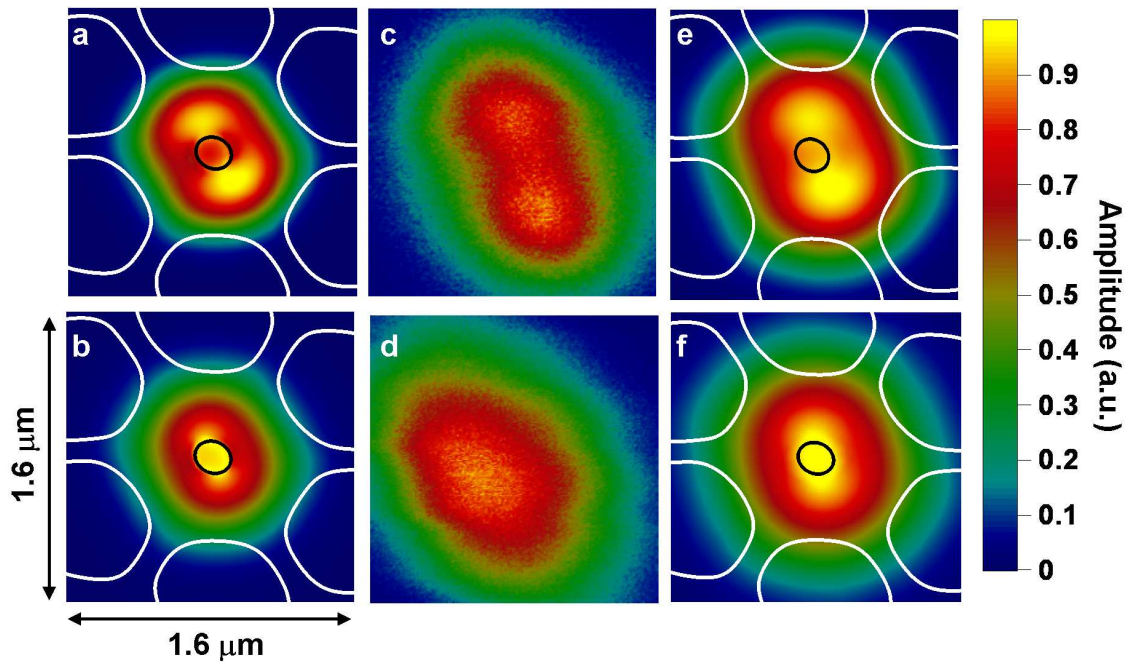


Fig. 3.19: Imagem de campo-próximo do modo fundamental da PCF #3. As três imagens na linha superior referem-se à $\lambda = 700 \text{ nm}$ e as situadas na linha inferior referem-se à $\lambda = 1050 \text{ nm}$. A coluna do meio (figuras c e d) são imagens experimentais do campo-próximo. As imagens da esquerda (a,b) representam a componente z do vetor de Poynting calculadas exatamente na superfície da fibra. As imagens da coluna da direita (e,f) representam a componente z do vetor de Poynting calculada a 30 nm da superfície da fibra. Os contornos brancos e pretos representam a seção transversal da fibra usada nas simulações.

no experimento interferométrico. Após ser filtrado (utilizando filtros interferométricos), a luz era acoplada no modo fundamental da PCF cuja extremidade de saída era montada verticalmente no NSOM. A ponta da fibra óptica do NSOM era aproximada da superfície do núcleo da fibra e uma varredura realizada em uma área de $1,6 \times 1,6 \text{ } \mu\text{m}$ com uma resolução de 170 pontos por μm . A luz coletada era então detectada por detector de Silício (tipo avalanche) de alta sensibilidade.

Resultados As medidas foram concentradas no modo fundamental da PCF #3, pois ela exibe a maior variação dos campos quando o comprimento de onda é sintonizado na região visível¹⁰. Na figura 3.19 são mostradas as distribuições de intensidade óptica calculadas e medidas. Nas partes (a) e (b), a distribuição espacial da componente z do vetor de Poynting na superfície da fibra mostra a concentração da luz no buraco central. Para comprimentos de onda menores (700 nm, linha superior), o buraco é muito grande para mostrar efeitos notáveis e a maior parte da luz se concentra no anel de sílica. Entretanto, para comprimento de onda maiores (1050 nm, linha inferior), o tamanho do buraco

¹⁰As fibras #1 & #2 possuem o buraco central tão pequeno que mesmo para comprimentos de ondas menores ($\sim 500 \text{ nm}$) a luz já se concentra no buraco central.

está bem abaixo do limite difrativo e, portanto, preenche-se de luz. Simultaneamente, o contraste de índice de refração, entre o vidro e o ar, garante que a maior intensidade ocorra no dentro do buraco. As figuras 3.19c e 3.19d mostram as imagens coletadas no NSOM em dois comprimentos de onda, 700 nm e 1050 nm, respectivamente.

Quando comparados com os resultados da simulação na coluna da esquerda da Fig. 3.19, é notória a discrepância entre os resultados teóricos e experimentais, especialmente na valor absoluto da escala. Diversos efeitos contribuem para isto:

1. Nas imagens experimentais, ocorre uma convolução entre o modo da PCF e a resposta espacial da ponta do microscópio, portanto, é esperado uma suavização dos detalhes de alta frequência;
2. Em uma estrutura tão pequena, a presença de uma ponta metalizada pode afetar o campo eletromagnético local, distorcendo o campo coletado pela ponta do NSOM.
3. O sinal óptico é coletado a uma pequena distância da superfície da fibra em consequência do sistema de realimentação do NSOM.

Para investigar esta última possibilidade, foi simulado numericamente como o modo fundamental da PCF#3 se difrata ao sair da ponta da fibra¹¹. A 30 nm da superfície da fibra existe uma melhora notável na concordância entre a teoria e os resultados experimentais. Pode-se constatar esta melhora comparando a distribuição espacial de intensidade mostrada na coluna da direita com os resultados experimentais. Quando o comprimento de onda aumenta, a distribuição de intensidade medido concorda com a tendência sugerida pelas simulações. Esta é a primeira evidencia direta de que campos evanescentes podem, de fato, ser confinados e intensificados em materiais com baixo índice de refração — ar no nosso caso — em razão do contraste de índice entre dois materiais dielétricos. Em uma publicação recente, Robinson e colaboradores confirmaram estes resultados, em um guia de silício do tipo *slot*, utilizando um método com maior resolução espacial [70].

3.4 Conclusões

Em suma, foi apresentada a teoria analítica relacionada à intensificação de campos evanescentes em guias dielétricos e os resultados experimentais que demonstram tal efeito. Destacam-se os seguintes pontos:

- A possibilidade de confinamento de campos eletromagnéticos em regiões espaciais bem menores que o comprimento de onda da luz foi demonstrado em guias circulares.

¹¹Estas simulações foram feitas utilizando o software comercial *CST Microwave Studio*.

- A despeito do baixo contraste de índice de refração entre a sílica e o ar, a figura de mérito para efeitos não-lineares é comparável com a demonstrada em um guia de onda de silício [1, 62].
- Uma fibra de cristal fotônico, com núcleo tubular, foi fabricada pela primeira vez e utilizada para demonstrar, experimentalmente, a intensificação do campo elétrico em uma região de baixo índice de refração. As medidas de dispersão de velocidade de grupo e microscopia de campo próximo apresentaram boa concordância com as simulações numéricas

A habilidade de alterar substancialmente a curva de dispersão somada a grande faixa espectral em que pode-se obter este efeito de intensificação do campo em uma região vazia (no interior do tubo) pode permitir a exploração de efeitos não-lineares, em um gás que preencha o tubo, que não seriam possíveis utilizando fibras ópticas de núcleo oco demonstradas anteriormente. Apesar de ter-se focalizado a fabricação em fibras de sílica, o uso de vidros com índices de refração maiores pode resultar em campos elétricos ainda mais intensos.

Capítulo 4

Guiamento em fibras kagomé

4.1 Introdução

A periodicidade da casca de fibras fotônicas (no plano transversal) pode criar bandas proibidas para propagação da luz (*photonic band-gaps*) [71]. Quando estes *band-gaps* são profundos o suficiente para cruzar a linha do ar em um diagrama $\omega - \beta$ ¹, eles podem permitir o guiamento da luz em fibras com núcleo oco (*hollow-core bandgap fibers*) [18]. A maior parte das fibras de núcleo oco que guiam por *band-gaps* têm sua casca formada por um arranjo no formato de colméia de abelha (*honeycomb lattice*) com alta fração de ar (tipicamente > 80 %). Esta colméia circunda o núcleo oco e pode confinar a luz quando seu comprimento de onda está dentro do *band-gap*. Contudo, resultados recentes demonstraram aspectos favoráveis de um outro tipo de PCF com núcleo oco: a fibra kagomé. Estas fibras exibem bandas largas de transmissão óptica com perdas relativamente baixas [25]. Também foram demonstradas versões desta fibra baseadas em polímeros [73]. Entretanto, apesar de existirem diversas sugestões para o mecanismo de guiamento nestas fibras (como baixa densidade de estados fotônicos na casca [71], baixa sobreposição entre os modos da casca e do núcleo [73] e *band-gaps* fotônicos de segunda ordem [25]), a origem do guiamento nestas fibras ainda não foi completamente entendido.²

Neste capítulo será demonstrado, através de simulações numéricas, que fibras kagomé do tipo descrito na referência [25] não apresentam *band-gaps* fotônicos na faixa de frequências medidas nos experimentos [24, 25]. Portanto, as perdas baixas observadas em fibras kagomé não podem ser re-

¹A linha do ar é a curva definida por $\beta = k_0$, para uma constante de propagação β e número de onda normalizado $k_0 = 2\pi/\Lambda$ [72]. Isto significa que para o "ângulo" de propagação em relação ao eixo da fibra, definido por β , a casca exibe uma banda proibida para propagação transversal. Portanto a luz não é irradiada nesta direção e é guiada ao longo da fibra.

²Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em "Models for guidance in kagome-structured hollow-core photonic crystal fibres". *Optics Express*, **15**, 12680-12685, 2007.

sultados de *band-gaps* fotônicos, tornando-as intrinsecamente distintas das fibras de núcleo oco que guiam por *band-gaps*. Para compreender o comportamento diferente destas fibras, foram desenvolvidos dois modelos que podem ser compreendidos mais facilmente que a fibra kagomé porém, ainda apresentam as características fundamentais da mesma. Um deles consiste em um conjunto de anéis hexagonais concêntricos, obtidos removendo-se seletivamente alguns "suportes" da rede kagomé; o outro modelo é bem mais simples, consistindo apenas de anéis circulares e concêntricos. É demonstrado que a dependência espectral da perda por confinamento (*leakage loss*), obtida com estes modelos, compartilha muitos dos aspectos observados na fibra kagomé. Apesar destes modelos não fornecerem uma explicação completa para o guiamento nestas fibras, eles oferecem uma base para a compreensão dos diversos aspectos deste guiamento.

4.2 Densidade de estados

A densidade de estados fotônicos (DOS - *density of states*) é uma ferramenta conveniente para examinar e apresentar as propriedades ópticas da casca de uma PCF, incluindo a existência, ou não, de *band-gaps* fotônicos sobre uma faixa de frequências de interesse, além de facilitar a identificação de ressonâncias que podem ser importantes para determinar-se as propriedades de guiamento [74, 72]. Nesta seção será mostrada e analisada a DOS calculada para uma casca periódica formada de um arranjo kagomé.

Como exemplo será considerado um arranjo kagomé infinitamente periódico formado por suportes de sílica ($n = 1.45$) com espessura $t = 0.67 \mu\text{m}$ e período $\Lambda = 11.8 \mu\text{m}$ (veja Fig. 4.1a). Estes parâmetros reproduzem, aproximadamente, a casca da fibra fabricada por Couny e colaboradores [25] e é também similar àquelas reportadas por Argyros [73]. Para calcular a densidade de estados desta rede foi empregado o FEM utilizando condições de contorno de Bloch na célula unitária (veja apêndice H). A densidade de estados resultante é mostrada na fig. 4.1b.

Várias características são evidentes na DOS da estrutura kagomé. Os modos com cuja dispersão é quase um reta vertical e, cuja extensão abrange a região superior e inferior à linha do ar, são modos dos suportes de vidro (um exemplo destes modos é destacada com uma linha tracejada em amarelo na fig. 4.1b). Abaixo da linha do ar estes modos são radiativos, porém mantém suas características dispersivas na faixa de $\beta\Lambda$ exibida no gráfico. Ressonâncias dos buracos de ar na estrutura ocorrem para valores específicos do vetor de onda transversal no ar, dado por

$$k_t^2 = k^2 - \beta^2. \quad (4.1)$$

Estas ressonâncias aparecem como linhas de alta DOS (brancas) quase-horizontais e espessas na

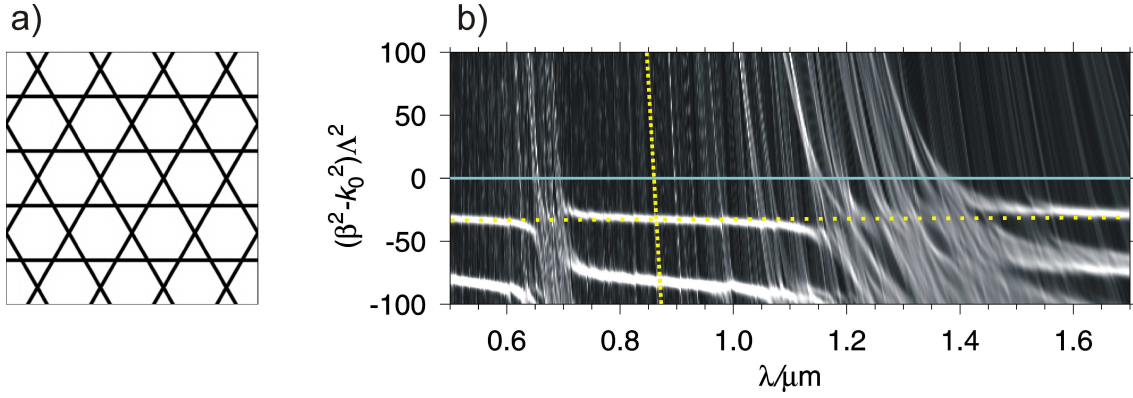


Fig. 4.1: 1. (a). Rede kagomé periódica, as linhas pretas representam a sílica e a região branca representa o ar. (b) Densidade de estados (DOS) para a estrutura kagomé calculada para uma faixa de frequências normalizadas $k_0\Lambda = 44-148$. As regiões em branco representam uma alta DOS, as regiões em preto representam baixa DOS, contudo, em nenhum ponto a DOS se anula. A linha horizontal em verde representa a linha do ar, a linha tracejada quase-vertical é um exemplo de um modo dos suportes, a linha horizontal pontilhada representa uma ressonância dos buracos hexagonais de ar.

fig. 4.1b; como é esperado para ressonâncias confinadas no ar, elas só aparecem abaixo da linha do ar. A ressonância de primeira ordem dos buracos hexagonais é destacada com uma linha pontilhada amarela na fig. 4.1b. Outro aspecto a ser notado na DOS é a existência de regiões largas de cruzamento³ próximas de $\lambda = 0.7$ e $\lambda = 1.4 \mu\text{m}$, indicando que, entre cada banda de baixa DOS, existem regiões largas nas quais pode ocorrer forte acoplamento entre os modos confinados no ar e os modos confinados nos suportes de vidro. Este acoplamento irá permitir que a luz guiada no núcleo seja irradiada na casca, resultando em perdas. Analogamente, regiões com pouco "cruzamentos" exibirão baixas perdas. Este comportamento está em acordo com os espectros de transmissão para fibras kagomé [25] e também com a análise qualitativa de Argyros [73]. Na figura 4.2 mostramos dois modos da estrutura periódica da fig. 4.1a quando $\lambda = 1.4 \mu\text{m}$. Note que o modo com $\Re\{n_{eff}\} = 0.96488$ é uma ressonância acoplada dos buracos de ar e dos suportes de vidro.

A densidade de estados mostrada na Fig. 4.1 demonstra que a fibra kagomé não exibe *band-gaps* fotônicos. Portanto, as baixas perdas observadas nestas fibras não podem ser atribuídas a este fenômeno. Entretanto, pode-se observar regiões de baixa e alta densidade de cruzamentos entre a linha do ar ($\beta = k_0$) e os modos da casca. Para incorporar toda a complexidade envolvida no guiamento desta fibra é necessário considerar sua estrutura completa, incluindo casca e núcleo. Na seção seguinte, serão apresentados dois modelos simplificados que servem como aproximações da fibra kagomé.

³Nestas regiões de cruzamento, os modos quase-verticais dos suportes de vidro se acoplam com as ressonâncias dos buracos de ar, como nota-se pela distorção das curvas nestas regiões.

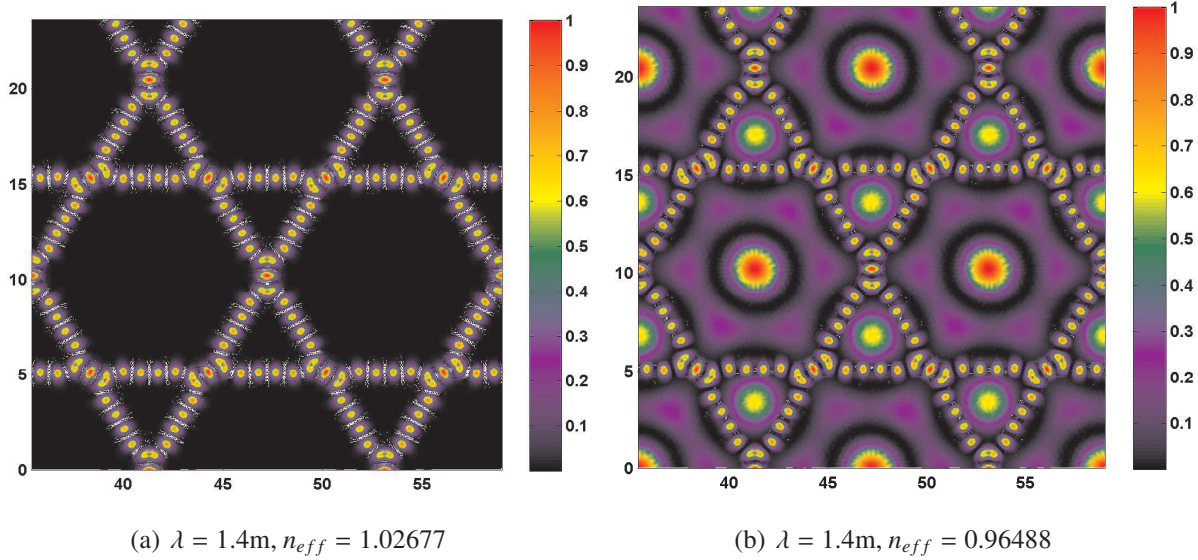


Fig. 4.2: Distribuição de potência ($|S_z(x, y)|$) de dois modos da estrutura periódica kagomé mostrada na fig. 4.1a. À esquerda, é mostrado um modo concentrado nos suportes de vidro. À direita, é mostrado um modo acoplado dos buracos de ar com modos dos suportes de vidro.

4.3 Modelos de hexágonos e anéis concêntricos

Com o intuito de investigar o guiamento em fibras kagomé, serão considerados dois modelos aproximados desta fibra. O primeiro, mais próximo da estrutura real, é um conjunto de anéis hexagonais que são obtidos através da omissão seletiva de suportes da estrutura real, como mostrado nas figuras 4.3(a) e 4.3(b). O segundo modelo, mostrado na Fig. 4.3c, é uma aproximação do primeiro, nos quais os hexágonos são substituídos por círculos. Entre os diferentes modelos foi escolhido preservar o perímetro dos anéis, a espessura dos anéis de vidro e os índices de refração. Esta escolha tem o efeito de conservar a quantidade de vidro e preservar a posição espectral das ressonâncias radiais como será discutido com mais detalhe abaixo.

Para calcular os modos do modelo hexagonal, foi utilizado o FEM com camadas perfeitamente casadas como condição de contorno absorvente (PML - *Perfectly matched layer*) (veja apêndice H). Apesar deste método poder também ser aplicado para calcular os modos do modelo de anéis concêntricos, foi utilizado um método semi-analítico baseado em matrizes de transferência em coordenadas cilíndricas [33]. Este método, além de ser ordens de grandeza mais rápido que o FEM, fornece uma maneira de checar a convergência e precisão dos resultados do FEM. A figura 4.4 mostra os resultados destes cálculos; para ambos os modelos, foi analisado o modo fundamental confinado no núcleo de ar e são mostradas as dependências espectrais da parte real do índice de refração efetivo e da perda por confinamento. É evidente que existe uma enorme similaridade entre as curvas calculadas no mo-

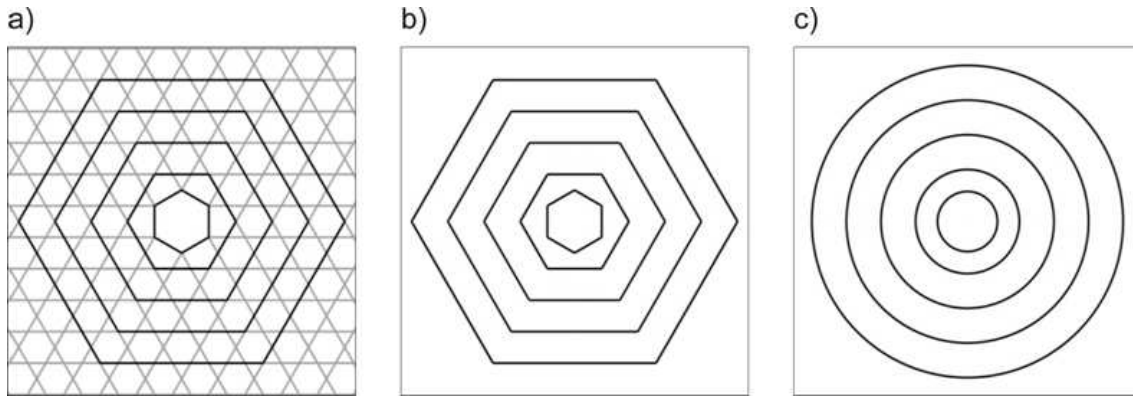


Fig. 4.3: (a). Estrutura completa de uma fibra kagomé com núcleo formada pela remoção de uma célula da casca. Os hexágonos mostrados em (b) estão destacados em preto. (b) Aproximação de hexágonos concêntricos para a estrutura kagomé completa, obtida através de remoção dos suportes que conectam os hexágonos adjacentes. (c) Aproximação circular para o modelo hexagonal mostrado em (b), formado de círculos concêntricos que conservam o perímetro e a espessura do modelo hexagonal.

delo de anéis e hexágonos concêntricos. A diferença mais notória é a presença de um "ruído" no caso do modelo hexagonal, que é atribuído ao surgimento de diversos acoplamentos fracos, entre o modo confinado no núcleo e os modos confinados nos anéis hexagonais. Estes acoplamentos não são permitidos quando existe simetria circular completa. Isto é uma consequência das quinas agudas dos hexágonos, estas quinas promovem o acoplamento de diversos modos dos anéis, resultando no acoplamento de seus modos com o modo guiado no núcleo de ar.

Os aspectos comuns aos dois modelos, que são independentes do número de anéis/hexágonos, são as regiões ressonantes de alta perda próximas de $\lambda = 0.7$ e $\lambda = 1.4$ μm . Na parte real do índice de refração (fig. 4.4a), estas ressonâncias se manifestam como "anti-crossings" entre os modos da estrutura de vidro e o modo guiado no núcleo de ar. A origem desta característica pode ser explicada simplesmente em termos de ressonâncias radiais dentro do vidro (análogas a um interferômetro *Fabry-Perot*) que forma os hexágonos e círculos. Estas ressonâncias radiais devem acontecer quando o vetor de onda transversal k_{t_g} (no interior do suporte de vidro) é tal que a mudança de fase, ao longo da espessura t ($\phi = k_{t_g} t$) é um múltiplo de π ,

$$k_{t_g} t = m\pi. \quad (4.2)$$

Como o modo guiado no núcleo propaga-se principalmente no ar, a constante de propagação do mesmo é próxima da linha do ar (i.e., $\beta \approx k$), pode-se usar a relação $k_{t_g}^2 \approx k^2 n^2 - k^2$ e, portanto, a condição de ressonância 4.2 pode ser escrita em termos do comprimento de onda ($\lambda = 2\pi/k$) na forma

$$\lambda = \frac{2t \sqrt{n^2 - 1}}{m}. \quad (4.3)$$

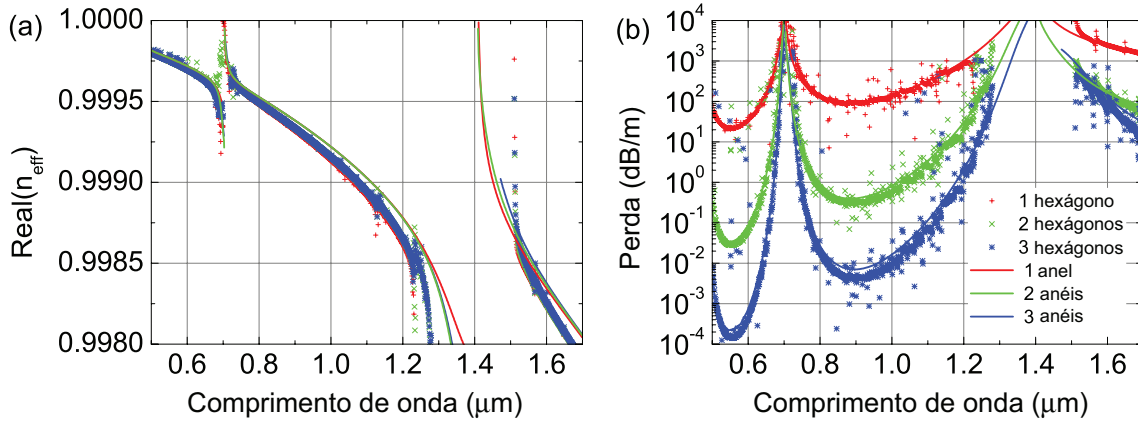


Fig. 4.4: Índice de refração efetivo e perdas de confinamento (dB/m) para o modo fundamental do modelo de anéis (linhas sólidas) e hexágonos (pontos), as geometrias são mostradas na fig. 4.3.

Usando $n = 1.45$ e $t = 0.67 \mu\text{m}$, os valores obtidos para o comprimento de onda para as duas primeiras ressonâncias são $\lambda_1 = 1.4 \mu\text{m}$ e $\lambda_2 = 0.7 \mu\text{m}$. Estes valores estão em ótima correspondência com as ressonâncias aparentes na fig. 4.4. Esta correspondência justifica a escolha de preservar o perímetro dos anéis, a espessura dos anéis de vidro e os índices de refração entre os diferentes modelos.

É importante ressaltar que na fig. 4.4, os modelos de estruturas concêntricas mostram que o aumento do número de anéis/hexágonos reduz, gradativamente, o valor mínimo das perdas. Este efeito é similar à redução da perda quando aumenta-se o número de camadas da casca em PCFs que guiam por *band-gaps*. Nos modelos considerados esta redução resulta da reflexão radial introduzida pelas camadas adicionais, análogas àquelas observadas em fibras *omni-guide* [33]. Apesar das ressonâncias previstas pela eq. 4.3 não coincidirem exatamente com as bordas das janelas de transmissão observadas experimentalmente [25], esta mesma equação indica a sensibilidade do comprimento de onda de ressonância em relação à espessura exata dos suportes de vidro.

4.4 Comparação com a estrutura Kagomé

Para estudar o guiamento em fibras kagomé com geometria realística, foi usado o FEM para calcular a perda de confinamento do modo fundamental guiado no núcleo de ar para uma fibra com duas e quatro camadas na casca. Na figura 4.5 é mostrada a estrutura com duas camadas. O cálculo da perda da estrutura com duas camadas foi feita utilizando o FEM com PMLs. Entretanto, o cálculo da estrutura com 4 camadas, por exigir uma capacidade computacional maior que a disponível no grupo, foi feita em colaboração com Sven Burger, da empresa JCMWave, utilizando um FEM com refinamento adaptativo da malha [75].

As perdas calculadas, junto com as curvas dos modelos propostos na seção 4.3, são mostradas na

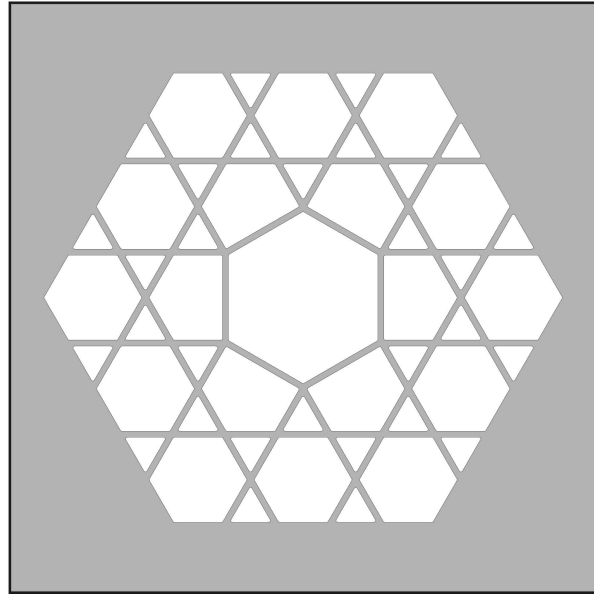


Fig. 4.5: Estrutura da fibra kagomé com duas camadas usada nas simulações. As regiões em cinza representam o vidro e as brancas representam ar. As dimensões são aquelas descritas na seção 4.3. Para atingir o máximo de correspondência com a fibra real, as quinas da casca são arredondadas com um raio de curvatura de $0.2 \mu\text{m}$.

fig. 4.6. Nota-se nesta figura que as ressonâncias situadas em $\lambda = 0.7$ e $\lambda = 1.4 \mu\text{m}$ estão presentes no espectro de fibras kagomé assim como nos modelos simplistas. Isto mostra que é possível sintonizar a posição das janelas de transmissão apenas modificando a espessura dos suportes de vidro na casca. Por outro lado, as ressonâncias serão alargadas se a espessura destes suportes variarem ao longo da estrutura. Obviamente, o impacto destas variações deve ser mais proeminente para os suportes próximos ao núcleo, região na qual os campos são mais intensos. Portanto, para minimizar as perdas é importante garantir que a estrutura é formada por suportes de espessura uniforme, incluindo aqueles que circundam o núcleo. Note que esta condição é diferente da condição para atingir perdas baixas em fibras de núcleo oco que guiam por *band-gaps* fotônicos [76]. A dependência da perda com o número de camadas na casca é diferente da observada para os modelos de anéis e hexágonos. A adição de cada camada nestes modelos reduz a perda por, aproximadamente, duas ordens de grandeza (veja figura 4.4). Contudo, as perdas da fibra kagomé com duas e quatro camadas são similares. Este comportamento sugere que a luz é capaz de propagar-se livremente na casca periódica, esta propagação ocorre através dos modos das estruturas de vidro na casca. Todavia, isto não é surpreendente: a figura 4.1 mostra que a rede kagomé não possui *band-gaps* e, portanto, a propagação na casca não é proibida. Na figura 4.7 são mostradas as partes reais das componentes do campo elétrico (E_x, E_y, E_z) do modo óptico fundamental (polarizado na direção $\hat{x}$) da estrutura kagomé da fig. 4.5; a linha superior mostra o modo calculado em $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ e a linha inferior mostra o modo em $\lambda = 1.7 \mu\text{m}$. Nos

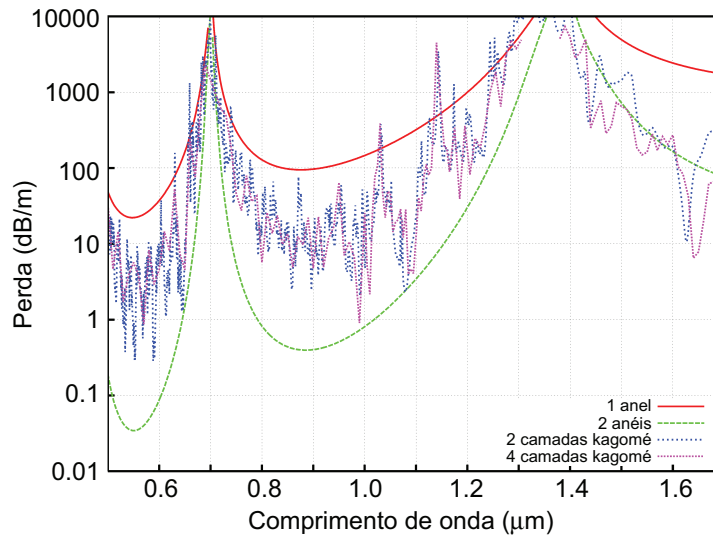


Fig. 4.6: Perdas de confinamento do modo fundamental da fibra kagomé com duas e quatro camadas. Para comparação, as curvas do modelo com um e dois anéis concêntricos também é mostrada.

dois casos pode-se notar que as componentes E_y e E_z do campo se difundem nos suportes de vidro da casca periódica, indicando o acoplamento do modo guiado no núcleo com as componentes da casca. Na Fig. 4.8 é mostrada a componente E_z do campo elétrico em uma escala espacial que engloba a casca periódica e a região de vidro externa à casca (veja Fig. 4.5). A linha tracejada indica a transição entre a casca periódica e o vidro. Note o padrão de radiação emitido pelas estruturas de vidro nesta região. É esta radiação que introduz perdas de propagação na fibra.

A figura 4.6 mostra que o modelo de hexágonos concêntricos pode apresentar guiamento com perdas muito pequenas. Assim, o valor bem mais alto da mínima perda tangível na estrutura kagomé mostrada na fig. 4.6 (nos comprimentos de onda $0.55 \mu\text{m}$ e $0.9 \mu\text{m}$), deve resultar da inclusão dos suportes de vidro que são desprezados no modelo hexagonal. Contudo, as ressonâncias de alta perda são comuns à ambas estruturas. Portanto é razoável sugerir que existe uma perda constante de aproximadamente 10 dB/m em ambas estruturas kagomé (com duas e quatro camadas) associadas com o acoplamento da luz para fora do núcleo. Este acoplamento ocorre com os modos dos suportes de vidro, desprezados nos modelos simplistas. As perdas causadas por este acoplamento estão sobrepostas à uma "perda de fundo" associada ao confinamento radial dos hexágonos. Estudos futuros detalhados sobre o acoplamento da luz com os modos destes suportes devem ser fundamentais para obtenção de perdas mais baixas em fibras kagomé.

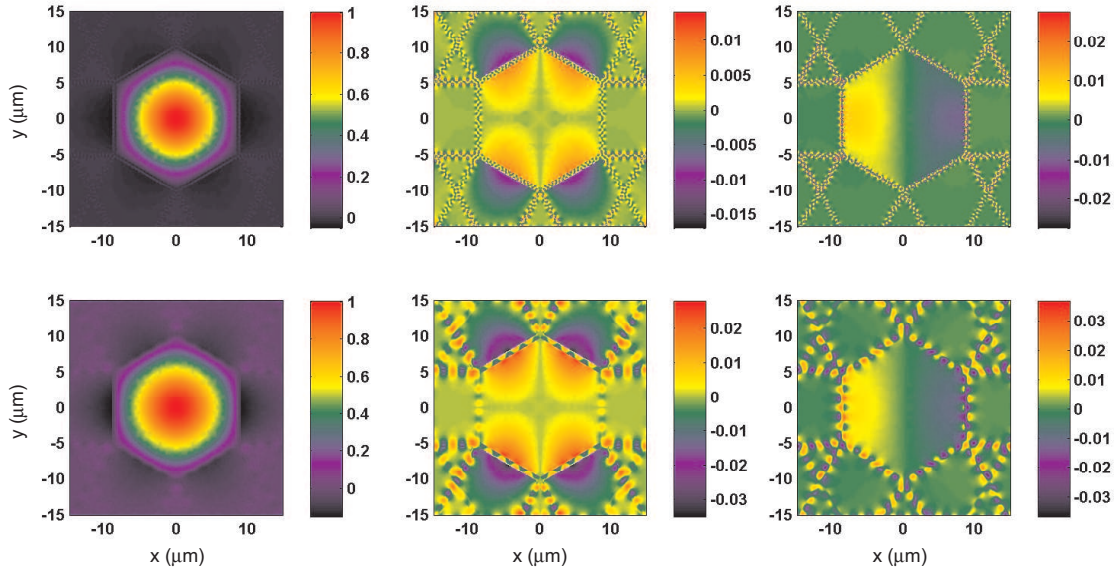


Fig. 4.7: Componentes do campo elétrico (E_x, E_y, E_z , da esquerda para direita) do modo óptico fundamental ($\hat{x}$ -polarizado) guiado pela estrutura da fibra kagomé com duas camadas mostrada na fig. 4.5. Na linha superior têm-se: $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, o índice de refração efetivo calculado foi $n_{eff} = 0.99766 + 2.0 \times 10^{-7}i$; na linha inferior: $\lambda = 1.7 \mu\text{m}$ e $n_{eff} = 0.99752 + 1.1 \times 10^{-5}i$. A amplitude de todas as componentes foram normalizadas pelo valor máximo da componente E_x .

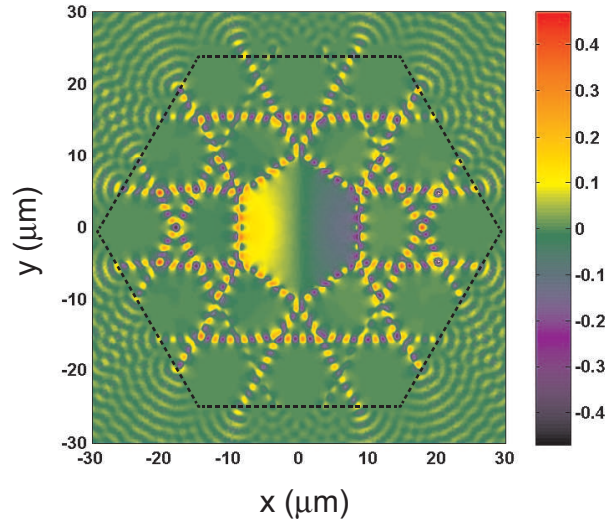


Fig. 4.8: Componente E_z do campo elétrico do modo óptico fundamental ($\hat{x}$ -polarizado, $\lambda = 1.7 \mu\text{m}$) em uma escala diferente da mostrada na fig. 4.7. Note que no fim da segunda camada da casca periódica (destacada com linha pontilhada), a energia acoplada nos modos dos suportes de vidro são irradiadas para o exterior da estrutura.

4.5 Conclusões

Foi demonstrado que modelos simples de anéis e hexágonos concêntricos explicam diversos aspectos qualitativos observados nas curvas espectrais da perda de confinamento associadas à PCFs com estrutura kagomé. Pode-se destacar os seguintes aspectos destes modelos:

- É possível estimar os limites das janelas de transmissão das fibras, apesar destes limites serem altamente sensíveis à espessura dos suportes de vidro.
- Os modelos demonstram a importância do confinamento radial no guiamento em fibras kagomé. Contudo, as perdas calculadas com a estrutura completa aparentam ser dominadas pelo acoplamento da luz com os suportes radiais que são desprezados nos modelos simplificados.

Para obter-se valores precisos das perdas e modos em fibras kagomé é necessário considerar a estrutura completa (como na fig. 4.5) e, sobretudo, utilizar métodos numéricos rigorosos como, por exemplo, o FEM. Estudos mais detalhados sobre o acoplamento da luz com os suportes da casca aparentam ser relevantes para redução das perdas nestas fibras. A motivação para estes estudos seguem das possíveis aplicações das amplas janelas de transmissão obtidas com estas fibras. Recentemente, Benabid e colaboradores demonstraram o efeito Raman em cascata em fibras kagomé preenchidas com hidrogênio; as linhas Raman geradas abrangeram impressionantes 1000 THz de largura de banda [77]. A abrangência espectral destas linhas pode ser utilizada para geração de pulsos ópticos de atosegundos (10^{-18} s).

Capítulo 5

Interação entre luz e som

5.1 Introdução

O acoplamento da luz com as vibrações mecânicas de um meio material ocorre através da variação, induzida pelas vibrações, do índice de refração do meio. Microscopicamente, estas vibrações estão associadas ao movimento dos íons que compõem o meio. O movimento destes componentes altera a distribuição eletrônica do meio e, como resultado, o índice de refração é alterado. O movimento de vibração que ocorre na escala molecular, dá origem ao espalhamento Raman [39]. O movimento coletivo deste íons, representado macroscopicamente por ondas acústicas, dá origem ao espalhamento Brillouin [39]. Em sólidos, a velocidade de propagação de ondas acústicas é da ordem 10^3 m/s, tipicamente 5 ordens de grandeza menor que a velocidade da luz. Em razão desta disparidade, ondas acústicas e eletromagnéticas casualmente interagem. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos que regem a propagação e interação de ondas acústicas e eletromagnéticas em guias de onda.

5.2 Propagação de ondas acústicas

5.2.1 Equação de movimento

A equação que governa a propagação de ondas acústicas em um meio material é dada por [78]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

sendo que $\mathbf{T}$ representa o tensor de tensão (*stress*) e $\rho(\mathbf{r})$ é a densidade do meio; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ representa o deslocamento do material. O tensor $\mathbf{T}$ é um tensor de posto 2, cada componente T_{ij} deste tensor representa a componente da força por unidade de área na direção $+\hat{e}_j$, transmitida através da face do

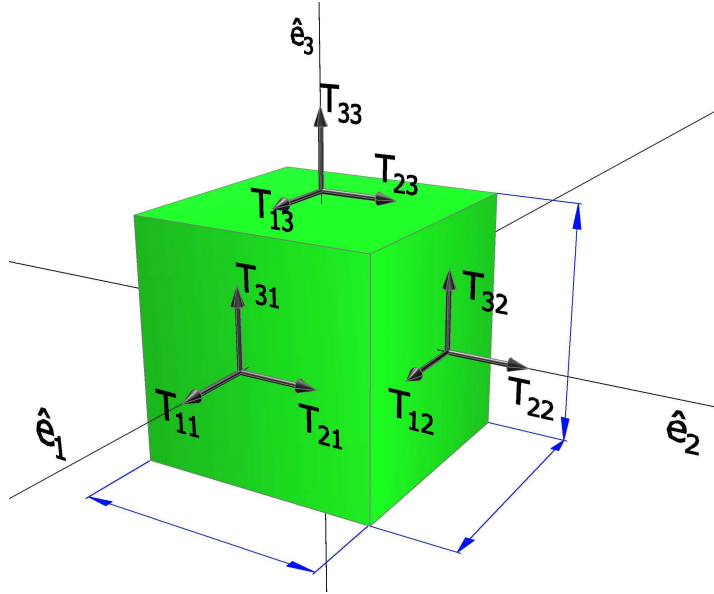


Fig. 5.1: Forças atuando nas faces de um cubo elementar de um sólido sob tensão $\mathbf{T}$, $\hat{e}_{1,2,3}$ representam os eixos do sistema de coordenadas.

cubo que é perpendicular a direção $\hat{e}_i$ (veja figura 5.1).

Para resolver a equação 5.1, é necessário dispor de uma relação constitutiva entre o tensor de tensão $\mathbf{T}$ e o deslocamento $\mathbf{u}$. Na aproximação elástica linear esta relação é dada pela lei de Hooke¹ [78, 79]

$$T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl}, \quad (5.2)$$

na qual $\mathbf{c}$ é o tensor de dureza (*stiffness*) do material e $\mathbf{S}$ é o tensor de deformação (*strain*), a deformação do material é gerada pelo gradiente de deslocamento mecânico. No caso de pequenas deformações², o tensor de deformações é definido como sendo a parte simétrica³ do gradiente do vetor deslocamento [78].

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (5.3)$$

Substituindo a eq. 5.3 na eq. 5.2, obtém-se, utilizando a eq. 5.1, a equação de onda para o vetor deslocamento.

¹É utilizada a notação de Einstein para o produto de contração entre tensores: os índices que aparecem repetidos são somados.

²Em materiais sólidos, caso deseje-se evitar a deformação permanente ou fratura do material, o gradiente de deslocamento deve ser mantido na faixa de 10^4 — 10^6 [80]. Note que $\mathbf{S}$ é uma grandeza adimensional.

³A parte anti-simétrica do gradiente de deslocamento representa rotações, que não contribuem para a dinâmica da vibração em uma teoria elástica linearizada [78].

5.2.2 Equação de onda para o vetor deslocamento

Utilizando a notação introduzida na apêndice D.1, escreve-se a equação de onda na forma simbólica,

$$\nabla \cdot [c : \nabla \mathbf{u}] = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}. \quad (5.4)$$

Como serão abordadas apenas fibras ópticas feitas de sílica fundida, a análise da equação acima será restrita ao caso em que c representa um material isotrópico. Nesta condição, existem apenas duas componentes independentes do tensor c , c_{11} e c_{12} (veja apêndice D.2.1). Portanto, a equação de onda para o vetor deslocamento pode ser escrita na forma (veja apêndice E.1)

$$-V_s^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (V_s^2 - V_l^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}. \quad (5.5)$$

sendo que $V_l = \sqrt{c_{11}/\rho}$ e $V_s = \sqrt{c_{44}/\rho}$ representam, respectivamente, as velocidades de propagação para ondas longitudinais e de cisalhamento.

A equação 5.5 mostra que, mesmo em sólidos isotrópicos, a propagação de ondas acústicas é intrinsecamente mais complicada que a propagação de ondas eletromagnéticas. A diferença surge porque as ondas acústicas, geralmente, não respeitam a condição de transversalidade (i.e., $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), dando origem a três possíveis "polarizações" para o vetor deslocamento: duas transversais e uma longitudinal.

5.2.3 Condições de contorno

Quando ondas acústicas se propagam em guias de onda, os contornos que definem o guia as refletem, dando origem a modos acústicos. Assim como no caso eletromagnético, pode ocorrer uma refração da onda ou reflexão total. A reflexão total também é análoga ao caso eletromagnético: se a superfície do guia for totalmente livre (envolto por vácuo) ou fixa, a onda será totalmente refletida, independentemente do ângulo de incidência⁴. Quando a superfície do guia é uma interface entre dois materiais, a reflexão satisfaz a lei de Snell [78]. Nesta interface só ocorrerá reflexão interna total, para uma polarização de incidência arbitrária, caso ambas velocidades de propagação no interior do guia (V_s, V_l) forem menores que as velocidades de propagação no exterior do guia. Uma situação análoga em óptica ocorre com materiais birrefringentes. Em suma, as possíveis condições de contorno para ondas elásticas em guias de onda são dadas por:

1. Interface sólido-sólido: $(\hat{n} \cdot \mathbf{T})_1 = (\hat{n} \cdot \mathbf{T})_2$.

⁴A superfície livre é análoga a condição de Neumann, que corresponde à condição para o campo magnético em uma superfície metálica perfeita. A superfície fixa é do tipo Dirichlet, e corresponde a condição para o campo elétrico em uma superfície metálica.

2. Interface livre: $\hat{n} \cdot \mathbf{T} = 0$.

3. Interface fixa: $\mathbf{u} = 0$.

No entanto, mesmo em um guia de onda cujas paredes representam condições de contorno do tipo (2) e (3), os modos acústicos serão bem mais complexos que em um guia eletromagnético com condições de contorno análogas. Isto é uma consequência da complexidade dos coeficientes de reflexão para ondas acústicas [78]. Por exemplo, mesmo em uma interface livre, a incidência de uma onda com polarização longitudinal dá origem a uma refletida que possui componentes de polarização longitudinal e de cisalhamento, causando um acoplamento entre todas as componentes do vetor deslocamento.

5.3 Relações de dispersão em guias de onda

Em guias de onda, supõem-se soluções para a eq. 5.5 na forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(x, y) \exp i(\beta_{ac} z - \Omega t), \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{u}(x, y)$ representa a dependência transversal do vetor deslocamento para um modo com constante de propagação acústica β_{ac} e frequência Ω . Em geometrias simples, é possível resolver a equação 5.5 utilizando, junto ao *ansatz* acima, a técnica de separação de variáveis. Em razão da existência simultânea dos termos de compressão ($\propto V_l$) e de cisalhamento ($\propto V_s$) na equação 5.5, as soluções serão, geralmente, híbridas. Para uma barra cilíndrica composta por materiais isotrópicos (como pode-se aproximar uma fibra óptica), o leitor interessado pode encontrar a solução detalhada da eq. 5.5 nas referências [81, 78]. No apêndice G são exploradas as soluções deste guia quando $\beta_{ac} = 0$.

Ao impor-se as condições de contorno sobre as soluções da eq. 5.5, obtém-se a relação de dispersão para a componente longitudinal do vetor de onda $\beta_{ac}(\Omega)$. Na figura 5.2 são mostradas as curvas de dispersão para os modos radiais ($u_\theta = 0$) de uma barra de sílica fundida com a superfície livre⁵. Note como as curvas de dispersão são distorcidas na Fig. 5.2. Em particular os modos simétricos exibem o efeito de "anti-crossing" quando suas curvas de dispersão aproximam-se da curva vermelha (velocidade de compressão). Este caráter está intimamente relacionado ao acoplamento das diferentes polarizações na superfície do guia [78].

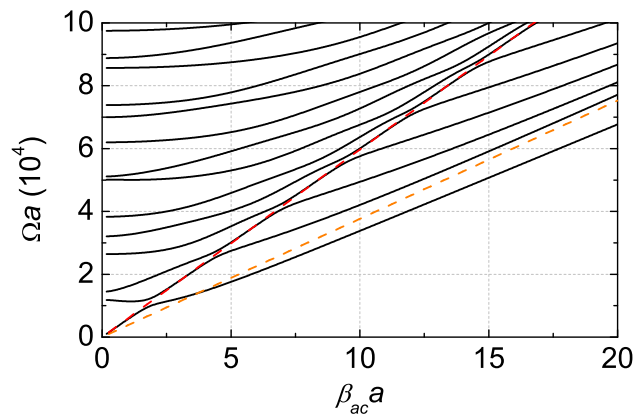


Fig. 5.2: Relações de dispersão normalizadas para os modos da família axial-radial de um cilindro de sílica fundida com raio a . As curvas coloridas em vermelho, e laranja, respectivamente, as velocidades de propagação de ondas de compressão e cisalhamento.

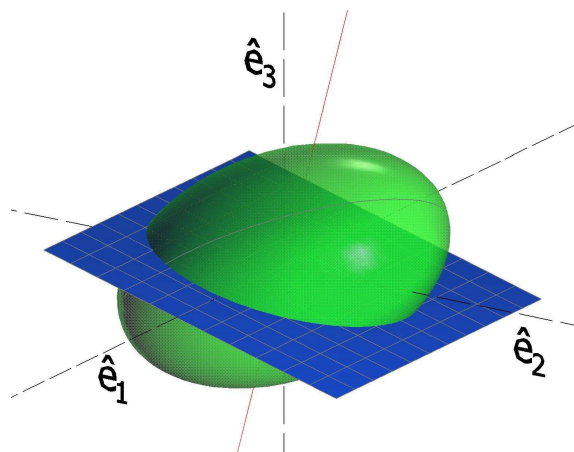


Fig. 5.3: Elipsóide de índices definido pela equação 5.7.

5.4 Efeito acusto-óptico

Como foi exposto na seção 5.2, a propagação de ondas acústicas sempre está associada a uma deformação do material. A mudança do índice de refração, devido à deformações, é conhecida como efeito acusto-óptico (ou efeito fotoelástico) [80]. Em sólidos cristalinos, a mudança do índice de refração, é determinada pelo elipsóide de índices (*index ellipsoid* ou *optical indicatrix*). Em um sistema de coordenadas qualquer (x_i, x_j) , o elipsóide de índices é representado pela equação [80, 79, 82]

$$B_{ij}x_ix_j = 1, \quad (5.7)$$

sendo que B_{ij} é denominado tensor de impermeabilidade ($\mathbf{B} \equiv [\epsilon]^{-1}$); na figura 5.3, é ilustrada a superfície definida pela equação 5.7. O efeito acusto-óptico é definido, portanto, como a variação do tensor $\mathbf{B}$ devido à deformação do material [82]

$$\Delta B_{ij} \equiv p_{ijkl}S_{kl}, \quad (5.8)$$

sendo que o tensor p_{ijkl} é denominado tensor acusto-óptico (veja apêndice D.2.3). Em uma descrição mais precisa, a deformação do meio, através do efeito acusto-óptico, distorce a forma do elipsóide de índices, alterando, conseqüentemente, a velocidade, polarização e a direção de propagação da luz no material [80]. Utilizando a definição do tensor de impermeabilidade, é possível calcular a variação da constante dielétrica induzida pela deformação de um material isotrópico (veja apêndice F.1),

$$\Delta \epsilon_{ij} = -\epsilon^2 p_{ijkl}S_{kl}, \quad (5.9)$$

sendo ϵ a constante dielétrica do meio antes de aplicar-se a deformação.

Portanto, na presença de uma deformação, um material isotrópico pode apresentar um caráter anisotrópico, a constante dielétrica (tensorial) do material deformado será dada por

$$\epsilon = \epsilon + \Delta \epsilon. \quad (5.10)$$

Logo, pode-se escrever o vetor deslocamento elétrico do meio perturbado como

$$\mathbf{D}_{pert} = \epsilon_0 (\epsilon + \Delta \epsilon) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_{ac}. \quad (5.11)$$

Ou seja, a perturbação da constante dielétrica induz uma polarização elétrica adicional no meio. Esta polarização poderá atuar como fonte nas equações de Maxwell [63, 79]. As ondas geradas por esta

⁵A superfície livre representa a condição de contorno (2) da seção 5.2.3. O análogo eletromagnético, seria um guia circular composto por material isotrópico com uma superfície metálica perfeita [32].

polarização constituem a luz espalhada pelas ondas acústicas.

5.5 Cinemática da interação

Pode-se aprender alguns aspectos da interação entre luz e ondas acústicas analisando a mesma do ponto de vista de partículas. Nesta perspectiva, um fóton incidente propagando-se por um modo com vetor de onda longitudinal $\beta_i(\omega_i)$ e frequência ω_i é espalhado em outro fóton propagando-se por um modo óptico com vetor de onda longitudinal $\beta_s(\omega_s)$ e frequência ω_s ; a partícula que promove o espalhamento é um fônon, que se propaga em um modo acústico com vetor de onda longitudinal $\beta_{ac}(\Omega)$ e frequência Ω . Em guias de onda, as relações de dispersão satisfeitas pelos vetores de onda de ambas partículas são da forma [78, 28, 79]⁶

$$\beta_i^2 + k_{t_i}^2 = \frac{n_i \omega_i}{c}, \quad (5.12a)$$

$$\beta_s^2 + k_{t_s}^2 = \frac{n_s \omega_s}{c}, \quad (5.12b)$$

$$\beta_{ac}^2 + k_{t_{ac}}^2 = \frac{\Omega}{V}. \quad (5.12c)$$

sendo que, n_i, n_s representam o índice de refração (óptico) do meio e V representa a velocidade da onda acústica⁷. As relações de conservação de energia e momento linear podem ser facilmente visualizadas em um diagrama de vetores de onda, como o da figura 5.4. O eixo horizontal está associado à parte longitudinal do vetor de onda (β) e o eixo vertical à parte transversal do mesmo (k_t). O vetor em azul representa o fóton incidente, o vermelho representa o fóton espalhado e o vetor cinza representa o vetor de onda do fônon. Por causa das relações 5.12, o lugar geométrico destes vetores são representados por círculos na figura 5.4.

5.5.1 Retro-espalhamento

Na coluna da esquerda na figura 5.4, é ilustrado o caso em que a luz é retro-espalhada do modo "azul" para o modo "vermelho". No retro-espalhamento, quando a luz é espalhada para o mesmo modo óptico incidente, porém viajando na direção $-\hat{z}$ (linha inferior, limite quase-degenerado), a variação do vetor de onda longitudinal é a máxima possível. De fato, como a frequência dos fônons são, pelo menos, três ordens de grandeza menores que as dos fótons, vale a seguinte relação para a

⁶As curvas $\beta(\omega)$ são análogas àquelas apresentadas nas figuras 2.3 e 3.4, para os modos ópticos, e na figura 5.2 para os modos acústicos.

⁷Rigorosamente, devido ao caráter híbrido dos modos acústicos, a eq. 5.12c deve ser escrita para cada uma das polarizações acústicas.

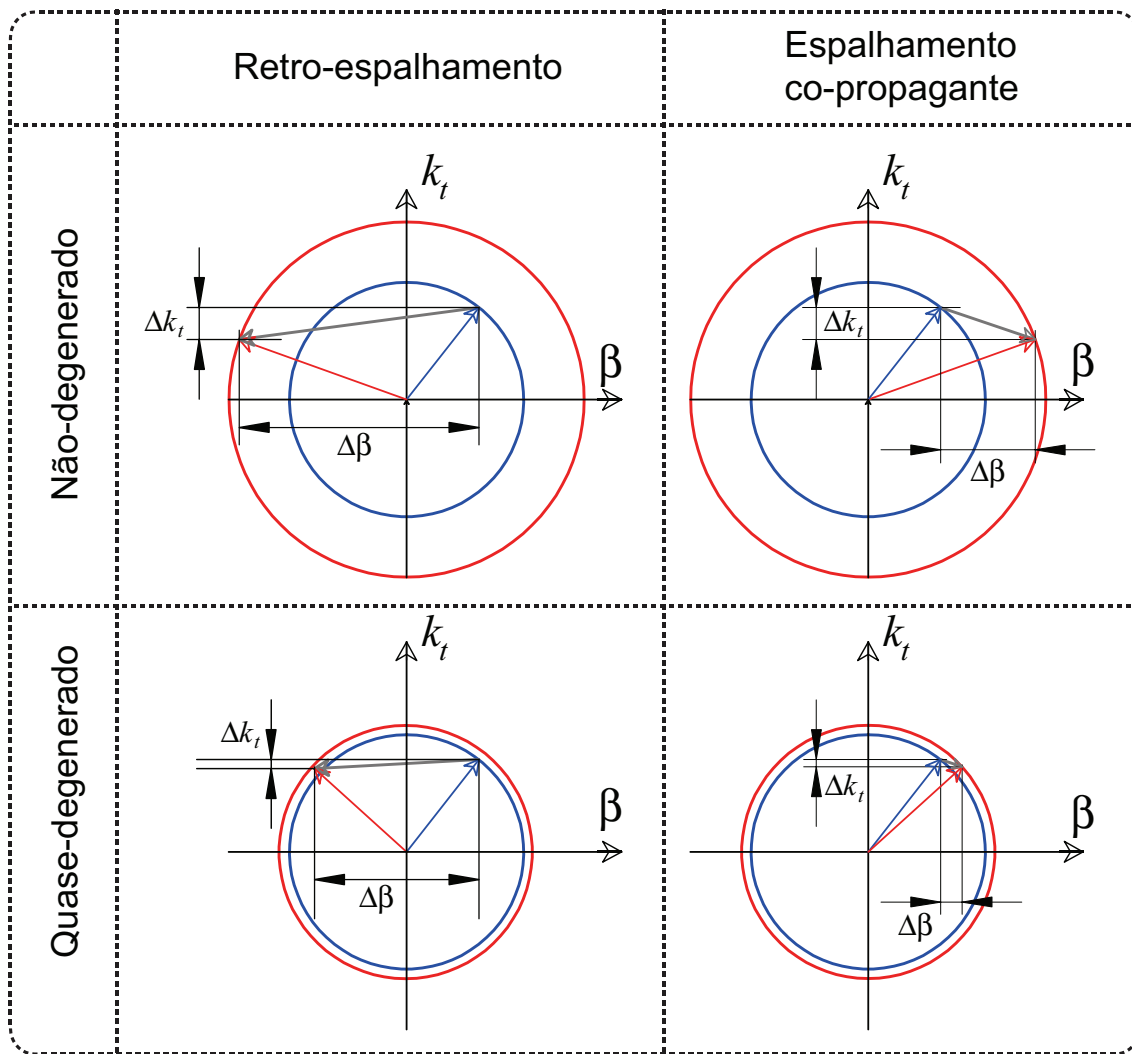


Fig. 5.4: Diagrama de vetores de onda para a interação acusto-óptica. A interpretação deste diagrama é feita no texto.

conservação de momento longitudinal, [39, 83, 41]

$$\beta_{ac} = \beta_i + \beta_s \approx 2\beta_i. \quad (5.13)$$

Os modos acústicos que satisfazem esta condição são encontrados ao traçar-se uma linha quase-vertical no diagrama de dispersão dos modos acústicos. O desvio desta linha da direção vertical deve-se a pequena dispersão óptica existente na faixa de frequências acústicas. A Fig. 5.5 mostra este diagrama para os modos de uma barra cilíndrica de sílica, junto a uma linha vertical correspondente à condição $\beta_{ac} \approx 2\beta_i$. Note neste diagrama que quando o vetor de onda acústico é grande, as curvas de dispersão dos modos tendem a ficar mais lineares. A dispersão linear torna os fônons do guia de onda mais próximos dos fônons de uma amostra volumétrica (*bulk*). Neste caso as características do espalhamento serão também similares. O retro-espalhamento não-degenerado, apesar de satisfazer uma relação próxima à 5.13, dificilmente é observado. Este caso é ilustrado na parte superior esquerda da Fig. 5.4. Isto acontece porque este tipo de espalhamento requer uma mudança não só do vetor de onda longitudinal ($\Delta\beta$), mas também do vetor de onda transversal (Δk_t). Como os modos acústicos que satisfazem a condição de casamento de fase possuem uma componente muito pequena do vetor de onda transversal, a condição transversal dificilmente é satisfeita.

5.5.2 Co-espalhamento

Na coluna da direita na figura 5.4, é ilustrado o caso em que a luz é co-espalhada do modo "azul" para modo "vermelho". Distintamente do retro-espalhamento, existe uma grande diferença na condição de conservação entre o caso não-degenerado (linha superior) e caso degenerado (linha inferior). Quando a luz é espalhada para um modo cuja constante de propagação difere substancialmente do modo incidente (caso não-degenerado), pode ocorrer uma variação substancial do vetor de onda longitudinal, neste caso o processo de co-espalhamento pode apresentar características similares ao processo de retro-espalhamento. Porém, no caso em que a luz é espalhada para o mesmo modo (caso degenerado), a variação do vetor de onda longitudinal é, na mesma ordem de aproximação da eq. 5.13, dado pela relação [39, 21]

$$\beta_{ac} = \beta_i - \beta_s \approx 0 \quad (5.14)$$

A figura 5.5 também mostra a linha vertical correspondente à condição 5.14. A frequência dos modos que satisfazem a condição de *phase-matching* é não-nula por causa do confinamento transversal do guia (i.e., $k_{tac} \neq 0$). Outro aspecto interessante da condição 5.14 pode ser apreciado escrevendo-se a velocidade de fase longitudinal dos modos acústicos, $V_\phi = \Omega/\beta_{ac}$. Como o confinamento transversal possibilita que $\Omega \neq 0$ mesmo quando $\beta_{ac} = 0$, a velocidade de fase pode ficar arbitrariamente grande quando $\beta_{ac} \rightarrow 0$. Conclui-se portanto que, as ondas acústicas que satisfazem a condição de *phase-*

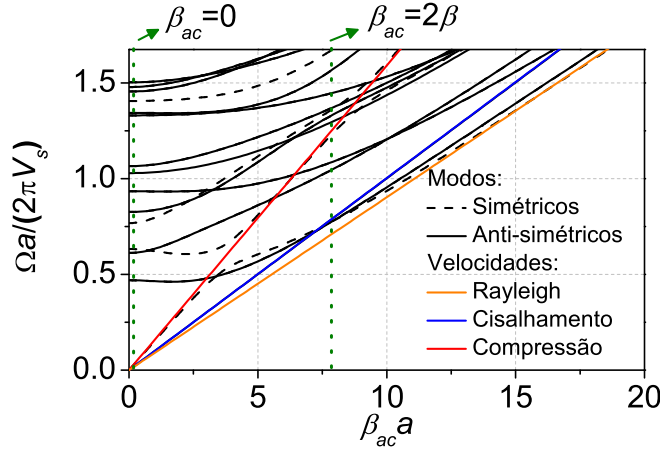


Fig. 5.5: Relação de dispersão para os modos de um cilindro de sílica fundida (veja figura 5.2). As linhas verticais pontilhadas, representam a condição de *phase-matching* para o retro- e co-espalhamento Brillouin.

matching 5.14 e interagem com a luz são àquelas que se propagam pelo guia com velocidade de fase igual à da luz. Isto torna o processo de co-espalhamento em guias fundamentalmente diferente do processo em um material infinito. Em *bulk*, a frequência de espalhamento dos modos de compressão (linha vermelha na Fig. 5.5) e cisalhamento (linha laranja na Fig. 5.5) satisfazem a condição de *phase-matching* apenas em $\Omega = 0$ e, portanto o co-espalhamento não é permitido.

5.5.3 Conservação de energia

A frequência dos fônons envolvidos na interação são definidas pelos pontos de interseção entre as curvas pontilhadas quase-verticais na Fig. 5.5 e as curvas de dispersão dos fônons. Para conservar a energia total do processo de espalhamento, a frequência do fóton espalhado deve satisfazer a relação,

$$\omega_s - \omega_i = \pm\Omega. \quad (5.15)$$

O fóton espalhado com frequência superior à do fóton incidente é denominado anti-Stokes, já o fóton com frequência inferior é denominado Stokes.

5.6 Teoria de perturbação: *coupled mode theory*

Foi mostrado na figura 5.5 que vários modos acústicos satisfazem a condição de *phase-matching*, contudo, as observações experimentais mostram que apenas alguns destes modos espalham a luz [84, 85]. Para investigar a eficiência de espalhamento e as simetrias necessárias para que o mesmo ocorra,

deve-se analisar como a perturbação da constante dielétrica, induzida pelos modos acústicos, altera as soluções das equações de Maxwell. Rigorosamente, deve-se resolver as equações de Maxwell com o termo de polarização dado pela expressão 5.11. Entretanto, uma cota superior para a ordem de grandeza do tensor $\Delta\epsilon$ (eq. 5.10) é estimada como [80]

$$\Delta\epsilon \sim pS \sim (10^{-1}) \times (10^{-5}) \sim 10^{-6}.$$

Portanto, $\Delta\epsilon \ll \epsilon$ e pode-se tratar o impacto do efeito acusto-óptico, nos modos ópticos dos guias, de onda de forma perturbativa. Formalmente, deve-se encontrar as soluções perturbadas do problema de autovalores generalizado dado pela eq. 2.3

$$(A + \Delta A) |\Psi\rangle = -i\partial_z B |\Psi\rangle, \quad (5.16)$$

sendo que os operadores A e B são dados pelas equações 2.5; o operador de perturbação ΔA é dado pela expressão⁸

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \omega\epsilon_0\Delta\epsilon\star & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No guia de onda não perturbado (i.e, $\Delta A = 0$), as soluções da equação 5.16 possuem dependência longitudinal $e^{i\beta z}$. Portanto, os modos do guia não perturbado satisfazem a equação

$$A |\Psi_n\rangle = \beta_n B |\Psi_n\rangle.$$

Para resolver a eq. 5.16 emprega-se a teoria de modos acoplados (*coupled mode theory*), que consiste em expandir o campo eletromagnético, do guia perturbado, em termos dos modos do guia não-perturbado,

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) e^{i\beta_n z} |\Psi_n\rangle, \quad (5.17)$$

sendo que, a soma em n inclui todos os modos guiados (co- e contra-propagantes). No apêndice F.2, é demonstrado que os coeficientes da expansão acima satisfazem o conjunto de equações acopladas

$$\frac{\partial a_k}{\partial z} = i \sum_n a_n K_{kn} e^{i\Delta\beta_{kn} z}, \quad (5.18)$$

⁸O símbolo $\star$ denota o produto de convolução pois $\Delta\epsilon$ é uma função do tempo. Portanto deve-se levar isto em consideração ao escrever as equações de Maxwell no domínio da frequência. O vetor deslocamento $\mathbf{D}(t) = \epsilon_0\epsilon(t)\mathbf{E}(t)$ se transforma em um produto de convolução no domínio da frequência, $F_\omega\{A(t)B(t)\} = F_\omega\{A(t)\} \star F_\omega\{B(t)\}$.

sendo que $\Delta\beta_{kn} = \beta_n - \beta_k$ e o coeficiente de acoplamento entre os modos k e n é dado pela integral de *overlap*,

$$K_{kn} = \frac{\langle \Psi_k | \Delta \mathbf{A} | \Psi_n \rangle}{\langle \Psi_k | \mathbf{B} | \Psi_k \rangle} = \frac{\omega \varepsilon_0}{4P_k} \iint \mathbf{E}_k^\dagger \cdot (\Delta \boldsymbol{\epsilon} \star) \cdot \mathbf{E}_n d^2 r. \quad (5.19)$$

na qual P_k é a potência guiada pelo k -ésimo modo óptico.

5.6.1 Acoplamento induzido por modos acústicos

O tensor de deformação total do guia é dado pela contribuição de todos os seus modos acústicos,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} \sum_m \mathbf{S}^{(m)}(x, y) e^{i\beta_{ac}^{(m)} z} \delta(\omega - \Omega_m) + c.c. \quad (5.20)$$

sendo que $\mathbf{S}^{(m)}(x, y)$ e $\beta_{ac}^{(m)}$ representam, respectivamente, o tensor de deformação e a constante de propagação associados ao m -ésimo modo acústico do guia⁹ e *c.c.* denota o complexo conjugado¹⁰. Segundo a equação 5.9, a perturbação na constante dielétrica será dada por

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} \sum_m \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y) e^{i\beta_{ac}^{(m)} z} \delta(\omega - \Omega_m) + cc, \quad (5.21)$$

sendo que a perturbação induzida pelo m -ésimo modo acústico é calculada utilizando a equação 5.9,

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y) = \mathbf{p} : \mathbf{S}^{(m)}(x, y). \quad (5.22)$$

Substituindo a equação 5.21 na expressão para o coeficiente de acoplamento (eq. 5.19), o sistema de equações acopladas dado pela equação 5.18 fica na forma

$$\frac{\partial a_k}{\partial z} = i \sum_n \sum_m a_n \left[K_{kn}^{(-m)} e^{i(\Delta\beta_{kn} - \beta_{ac}^{(m)})z} + K_{kn}^{(+m)} e^{i(\Delta\beta_{kn} + \beta_{ac}^{(m)})z} \right], \quad (5.23)$$

na qual o coeficientes de acoplamento $K_{kn}^{(\pm m)}$ são definidos como

$$K_{kn}^{(-m)} = \frac{\omega \varepsilon_0}{4P_k} \iint \mathbf{E}_k^\dagger(x, y, \omega) \cdot \left[\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(m)*}(x, y) \delta(\omega - \Omega_m) \star \right] \cdot \mathbf{E}_n(x, y, \omega) dx dy, \quad (5.24a)$$

$$K_{kn}^{(+m)} = \frac{\omega \varepsilon_0}{4P_k} \iint \mathbf{E}_k^\dagger(x, y, \omega) \cdot \left[\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y) \delta(\omega + \Omega_m) \star \right] \cdot \mathbf{E}_n(x, y, \omega) dx dy, \quad (5.24b)$$

⁹Note que introduzimos a dependência espectral (ω) do tensor de deformação.

¹⁰A introdução deste termo é necessária para garantir que a perturbação seja representada por um operador Hermitiano.

Os dois termos que aparecem na eq. 5.23 representam as componentes Stokes e anti-Stokes do processo de espalhamento.

5.6.2 Conservação de energia

A conservação de energia (eq. 5.15) decorre naturalmente da teoria de perturbação. Supondo que o modo incidente é um laser com frequência ω_i ($e^{-i\omega_i t}$) e o modo espalhado com frequência ω_s ($e^{-i\omega_s t}$), os espectros dos campos elétricos, associado a estes lasers, serão dados por

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{r}, \omega) &\propto \delta(\omega - \omega_i) \\ E_s(\mathbf{r}, \omega) &\propto \delta(\omega - \omega_s) \end{aligned}$$

Neste caso, o produto de convolução que aparece na eq. 5.24 será dado por

$$\begin{aligned} [\Delta\epsilon^{(m)*}(x, y, \omega) \star] \cdot E_s(x, y, \omega) &\propto \delta[\omega - (\omega_i - \Omega_m)] \\ [\Delta\epsilon^{(m)}(x, y, \omega) \star] \cdot E_s(x, y, \omega) &\propto \delta[\omega - (\omega_i + \Omega_m)] \end{aligned}$$

Portanto, as únicas componentes espectrais não-nulas do coeficiente de acoplamento ocorrem quando $\omega_s = (\omega_i \pm \Omega)$. Estas duas frequências são, justamente, as linhas Stokes e anti-Stokes discutidas na seção 5.5.

5.6.3 Acoplamento ressonante: conservação de momento

A equação 5.23 representa um conjunto infinito de equações diferenciais acopladas. No entanto, geralmente é relevante analisar apenas o caso em que o acoplamento é ressonante. Esta condição de ressonância é simplesmente a conservação do momento longitudinal que foi obtida na seção 5.5 utilizando argumentos cinemáticos.

$$\Delta\beta \equiv \beta_k - \beta_n \pm \beta_{ac} = 0. \quad (5.26)$$

Note que o sobrescrito (m) é descartado pois, para cada par de modos ópticos (β_k, β_n) , existe um único valor de β_{ac} que satisfaz a condição 5.26. O sinal + na equação 5.26 representa o caso Stokes, o sinal – representa o caso anti-Stokes. Existem dois casos de interesse em que pode-se simplificar bastante as equações acopladas, o primeiro é relacionado ao caso de co-espalhamento, no qual o vetor de onda longitudinal é nulo (i.e., $\beta_{ac} = 0$). O segundo caso é relacionado ao processo de retro-espalhamento ($\beta_{ac} = \pm 2\beta_i$).

Co-espalhamento

Neste caso, a condição de *phase-matching* só pode ser satisfeita se $\beta_k = \beta_n$, ou seja, a luz só espalhada para o mesmo modo óptico ou para um modo degenerado. Para os demais modos, os termos do lado direito da equação 5.23 oscilam rapidamente ao longo da direção de propagação e, portanto, podem ser desprezados. Quando, por razões de simetria, não existe acoplamento entre modos degenerados, é fácil mostrar que o efeito da perturbação é alterar índice de refração efetivo de cada modo segundo a expressão (veja apêndice F.2.4)

$$\Delta n_{eff} = \frac{1}{2n_{eff}} \frac{\iint \mathbf{E}^\dagger(x, y) \cdot \Delta \epsilon(x, y) \cdot \mathbf{E}(x, y) dx dy}{\iint \mathbf{E}_t^* \cdot \mathbf{E}_t dx dy} \quad (5.27)$$

No capítulo 6, será mostrado que a modulação do índice de refração induzida pelo co-espalhamento Brillouin em fibras ópticas, pode ser modelado pela equação 5.27.

Retro-espalhamento

Próximo da condição de *phase-matching*, apenas o acoplamento entre dois modos é de interesse, portanto o conjunto de equações 5.23 se reduz a um sistema de duas equações acopladas (veja apêndice F.2.2) ¹¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial z} &= ia_2 e^{i\Delta\beta z} K_{12} \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} &= -ia_1 e^{-i\Delta\beta z} K_{12} \end{aligned}$$

sendo que $\Delta\beta = \beta_1 + \beta_2 \pm \beta_{ac}$. A solução deste sistema de equações é dada no apêndice F.2.2. Partindo destas soluções, a potência transferida entre os modos 1 e 2 é dada por

$$P_{exc}^{(m)}(z) = \frac{|K_{12}|^2}{|K_{12}|^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2} \sin^2 \left(\sqrt{|K_{12}|^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2} z \right).$$

Quando a condição de *phase-matching* é satisfeita, a potência transferida depois de um comprimento L de interação é dada por¹²

$$P_{exc} \approx |K_{12}|^2 \quad (5.28)$$

¹¹ Considera-se aqui, o acoplamento induzido por um único modo acústico.

¹² Entendemos por acoplamento fraco que $K_{12}^{(m)} L \ll 1$ e, portanto, vale a relação $\sin(x)/x \approx 1$

5.7 Excitação de ondas acústicas

Para que os modos acústicos de um guia de onda possam espalhar a luz através do efeito acusto-óptico, é necessário que eles possuam uma amplitude de vibração não-nula. Quando a intensidade óptica da luz que se propaga pelos modos do guia é suficientemente baixa, a amplitude de vibração dos modos acústicos do guia é de origem térmica [84]. Entretanto, quando a intensidade óptica é mais elevada, a variação espacial do campo eletromagnético induz o surgimento de forças mecânicas no material [39, 83, 80]. Este efeito é conhecido como eletrostrição e pode ser usado para excitar opticamente modos de vibração em fluidos e sólidos [86, 39].

5.7.1 Excitação térmica

Segundo o teorema clássico da equipartição de energia, a energia vibracional por unidade de comprimento de cada modo acústico será dada por¹³

$$E_m = \frac{1}{2} \iint \rho \Omega_m^2 \mathbf{u}_m^* \cdot \mathbf{u}_m dx dy = \frac{k_B T}{L}, \quad (5.29)$$

sendo que k_B é a constante de Boltzman e L o comprimento do guia. Portanto, decompõe-se o movimento vibracional do guia em seus modos normais,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_m A_m \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) e^{i(\beta_{ac}^{(m)} - \Omega_m t)}.$$

Para satisfazer a restrição da eq. 5.29, a amplitude de cada modo será normalizada por

$$A_m = \frac{1}{\Omega^{(m)}} \sqrt{\frac{2k_B T}{\rho L \langle \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m \rangle}}, \quad (5.30)$$

sendo que $\langle \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m \rangle \equiv \iint \mathbf{u}_m^* \cdot \mathbf{u}_m dx dy$. No caso de espalhamento Brillouin espontâneo (induzido por vibração térmica), utiliza-se a expressão 5.30 para calcular a amplitude de cada modo acústico.

5.7.2 Excitação óptica: Eletrostrição

Quando a intensidade óptica da luz é alta o bastante, a variação espacial do campo eletromagnético induz forças ópticas no material. Em materiais isotrópicos, restrições impostas por simetria, mostram que estas forças dependem, em primeira ordem, do quadrado do campo elétrico [80]. A eletrostrição

¹³Rigorosamente, deve-se considerar a distribuição quântica da população dos estados. Contudo, na faixa de frequências acústicas de interesse, $\hbar\Omega \ll k_B T$ e, portanto, a aproximação é válida.

é considerada, incluindo-se um termo adicional na relação constitutiva para o tensor de tensões (veja apêndice D.2.4),

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} + \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top), \quad (5.31)$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é o tensor de viscosidade¹⁴, $\boldsymbol{\gamma}$ é o tensor de eletrostrição, o sobrescrito $\top$ denota o vetor transposto. Esta relação constitutiva dá origem a duas classes de forças: a força elástica e a força de viscosidade, de origens mecânicas,

$$\mathbf{F}_S = \nabla \cdot \left(\mathbf{c} : \mathbf{S} + \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right),$$

e a força de eletrostrição, de origem eletromagnética

$$\mathbf{F}_{st} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\gamma} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top)).$$

No apêndice E.1 é demonstrado que a relação constitutiva dada pela equação 5.31 conduz a seguinte equação de onda para o vetor deslocamento $\mathbf{u}$,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \left(\rho V_l^2 + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left(\rho V_s^2 + \eta_{44} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{F}_{st}, \quad (5.32)$$

na qual η_{11} e η_{44} são componentes do tensor de viscosidades.

A equação 5.32 é uma equação de onda na qual a densidade de força do lado direito tem origem no efeito de eletrostrição. A complexidade da eq. 5.32 torna muito difícil fazer um tratamento analítico exato da mesma, mesmo para guias de onda acústicos simples. Nos capítulos 7 e 8 serão discutidas as aproximações relevantes para explorar a equação 5.32.

5.8 Conclusões

Foram apresentados os conceitos básicos envolvidos na propagação de ondas acústicas em materiais sólidos isotrópicos. Os princípios da interação acusto-óptica também foram apresentados na forma apropriada para a interação em guias de onda. O impacto do efeito acusto-óptico, nos modos eletromagnéticos, foi abordado de maneira perturbativa. Esta abordagem revela que diversos aspectos desta interação podem ser compreendidas através da análise do coeficiente de acoplamento entre os modos ópticos e acústicos.

¹⁴Introduzindo o tensor de viscosidade, leva-se em consideração a dissipação mecânica.

Capítulo 6

Co-espalhamento Brillouin

6.1 Introdução

A primeira observação do co-espalhamento Brillouin (FBS - *Foward Brillouin Scattering*) foi feita há mais de 20 anos [84]. Na ocasião, Shelby e colaboradores notaram que o espectro de um laser, após se propagar por uma fibra óptica, apresentava diversos picos em torno da frequência do laser. A distância espectral entre a frequência do laser e os picos observados abrangia a faixa de 20—700 MHz. No mesmo artigo, eles demonstraram que estes picos de espalhamento eram causados por ressonâncias acústicas transversais confinadas pelo diâmetro externo das fibras estudadas ($\sim 125 \mu\text{m}$). Devido às baixas frequências e pequena amplitude, este tipo de espalhamento sempre foi considerado como uma fonte de ruído indesejável. Em particular, este efeito recebeu enorme atenção nos anos seguintes por ser um obstáculo fundamental nos experimentos de óptica quântica que visavam a compressão do ruído (*noise squeezing*) abaixo do limite quântico [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95].

Com o advento das fibras de cristal fotônico, surgiu um renovado interesse neste efeito. A casca periódica destas estruturas, formadas por inclusões aéreas na matriz de sílica (veja Fig. 2.7), altera fortemente a propagação das ondas acústicas na casca. As possibilidades de manipular a propagação das ondas acústicas nestas fibra são diversas, abrangendo a manipulação da densidade de estados acústicos [96], o confinamento simultâneo de fônons e fótons no núcleo destas fibras [97, 22] e a inibição do co-espalhamento Brillouin [98].¹

¹Parte dos resultados deste capítulo foram publicados em "Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber," *Optics Express* **14**, 4141-4150 (2006). Outra parte foi apresentada em "Controlling Acousto-Optic Interactions in Photonic Crystal Fiber with Sub-Wavelength Core-Hole," CLEO(Baltimore, MD, 2007).

6.2 Guia cilíndrico

Para ilustrar os aspectos gerais do espalhamento que seguem diretamente do formalismo desenvolvido no capítulo 5, será ilustrado, brevemente, o caso de um guia cilíndrico. Esta análise se aplica diretamente ao caso da fibra óptica convencional e, em muitos aspectos, ao caso das fibras de cristal fotônico.

6.2.1 Regras de seleção

A dependência transversal das soluções da equação de onda acústica (eq. 5.5) para um guia circular com superfícies livres possuem a forma geral (em coordenadas cilíndricas) [99, 78],

$$\mathbf{u}(r, \theta) = W_p^{(m)}(r) \begin{Bmatrix} \sin p\theta \\ \cos p\theta \end{Bmatrix} \hat{r} + \Theta_p^{(m)}(r) \begin{Bmatrix} \cos p\theta \\ -\sin p\theta \end{Bmatrix} \hat{\theta} + Z_p^{(m)}(r) \begin{Bmatrix} \sin p\theta \\ \cos p\theta \end{Bmatrix} \hat{z} \quad (6.1)$$

sendo que m e p são números inteiros; p representa a variação angular e a simetria da vibração; m representa a ordem da solução da equação característica; $W_p^{(m)}(r)$, $\Theta_p^{(m)}(r)$ e $Z_p^{(m)}(r)$ representam a dependência radial dos modos; os parênteses com diferentes funções angulares indicam que, para cada m, p (e $p \geq 1$) existem dois "estados de polarização" degenerados que são descritos pelas mesmas funções radiais [99].

O modo óptico fundamental do guia cilíndrico (HE_{11}) também possui dependência angular nas formas $\cos \theta$ (HE_{11}^x) ou $\sin \theta$ (HE_{11}^y) (veja eq. 2.15). Portanto, os coeficientes de acoplamento satisfazem as regras de seleção (veja apêndice G) [85]

$$\langle \Psi_{HE_{11}^x} | \Delta A | \Psi_{HE_{11}^x} \rangle \propto \int \begin{Bmatrix} \sin p\theta \cos^2 \theta \\ \cos p\theta \cos^2 \theta \end{Bmatrix} d\theta \propto \begin{Bmatrix} \delta_{p,0} + \delta_{p,2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.2a)$$

$$\langle \Psi_{HE_{11}^x} | \Delta A | \Psi_{HE_{11}^y} \rangle \propto \int \begin{Bmatrix} \sin p\theta \sin \theta \cos \theta \\ \cos p\theta \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix} d\theta \propto \delta_{p,2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.2b)$$

Estas relações mostram que, entre todos os modos que satisfazem a condição de *phase-matching*, apenas aqueles com $p = 0, 2$ irão, efetivamente, espalhar a luz. No caso de guias cilíndricos existem três famílias com $p = 0, 2$, elas são: R_{0m} (axial-radial), T_{0m} (torsionais) e TR_{2m} (torsional-radial). A família T_{0m} possui apenas a componente $\hat{\theta}$ do deslocamento induzindo uma tensão puramente de cisalhamento. O acoplamento desta família é fraco e, portanto, pode ter sua contribuição desprezada [100].

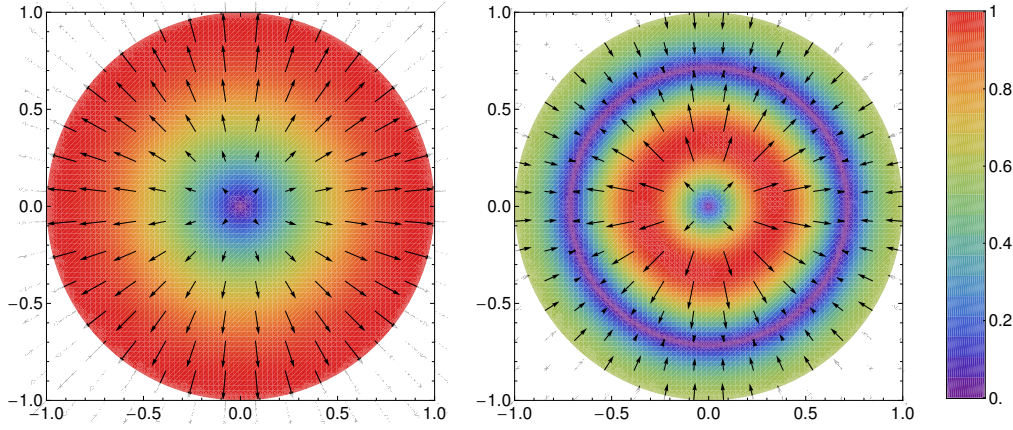


Fig. 6.1: Distribuição espacial dos modos R_{01} (esquerda) e R_{02} (direita). Em ambos casos, a polarização é radial e a fibra se dilata e contrai uniformemente ao longo do período de oscilação. A escala vertical e horizontal representa a distância do eixo em m.

6.2.2 Modos acústicos

Em razão da degenerescência dos estados de polarização do modo HE_{11} , a condição de *phase-matching* impõe que o vetor de onda longitudinal dos modos acústicos será dado pela eq. 5.14 ($\beta_{ac} = 0$, veja seção 5.5). Portanto, a análise será restrita aos modos acústicos exatamente na frequência de corte, neste caso os modos R_{0m} e TR_{2m} possuem apenas componentes transversais (i.e., $u_z = 0$). Em razão destas duas restrições, apenas três componentes do tensor de deformação serão não-nulas: S_1, S_2 e S_6 . No apêndice G são deduzidas, de forma mais detalhada, algumas propriedades destes modos. Todavia, abaixo são sintetizadas algumas propriedades básicas destes modos.

Modos R_{0m}

Os modos da família R_{0m} possuem apenas a componente radial do vetor deslocamento (i.e. $\mathbf{u} \propto \hat{r}$). Portanto, em coordenadas cilíndricas, as únicas componentes não-nulas do tensor de deformações são S_{rr} e $S_{\theta\theta}$ [84]. Na figura 6.1 é mostrado o perfil espacial do deslocamento para os modos R_{01} e R_{02} . Devido à simetria radial completa destes modos, eles não induzem acoplamento entre estados de polarização ortogonais do modo óptico, sobretudo, a modulação de fase induzida por estes modos é igual para qualquer estado de polarização do modo óptico fundamental (veja apêndice G.3).

Modos TR_{2m}

Os modos da família TR_{2m} possuem as componentes radial e azimutal do vetor deslocamento (i.e. $\mathbf{u} \propto \hat{r}, \hat{\theta}$). Portanto, as únicas componentes não-nulas do tensor de deformações são $S_{rr}, S_{\theta\theta}$ e $S_{\theta r}$ [84].

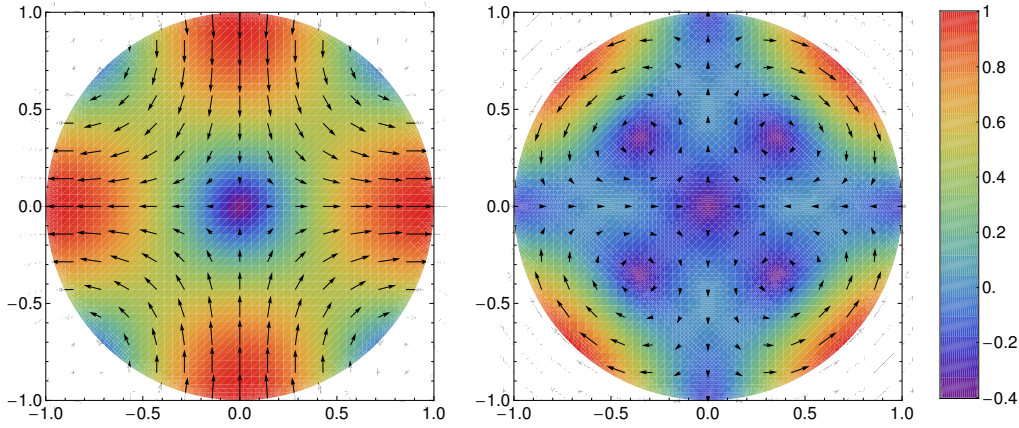


Fig. 6.2: Distribuição espacial dos modos TR_{21} (esquerda) e TR_{22} (direita). Em ambos casos, a polarização está na direção 0° - 90° , como podemos notar pela direção do campo vetorial em preto. Para estes modos, a fibra se dilata em uma direção ao mesmo tempo que se contrai na direção ortogonal. A escala vertical e horizontal representa a distância do eixo em m

Na figura 6.2 são mostradas as distribuições espaciais da amplitude de deslocamento ($\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$) para os modos TR_{21} e TR_{22} . Nesta figura apenas a polarização que oscila na direção 0° - 90° é exibida, como é discutido no apêndice G, esta polarização não acopla estados de polarização ortogonais dos modos óptico, caso eles estiverem polarizados ao longo dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Porém, distintamente dos modos R_{0m} , a modulação de fase induzida nas polarizações ópticas ao longo dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ terão sinais opostos (veja apêndice G.3).

Em razão da dupla degenerescência destes modos, sempre existe uma polarização ortogonal dos modos TR_{2m} que oscila na direção $\pm 45^\circ$. Esta polarização não modula a fase da luz polarizada ao longo dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$, no entanto, promove um acoplamento entre as polarizações $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

6.2.3 Perturbação e acoplamento

A deformação induzida pelos modos R_{0m} e TR_{2m} perturba a constante dielétrica do guia de onda. Com $\beta_{ac} = 0$, a forma geral do tensor de perturbação para estas famílias de modos acústicos é do tipo,

$$\Delta\epsilon(x, y, t) = \Delta\epsilon_m(x, y) \cos \Omega_m t. \quad (6.3)$$

Em razão dos argumentos apresentados na seção anterior, pode-se tratar o impacto destes modos com base na teoria de perturbação para um único modo óptico (veja apêndice F.2.4), ou seja, quando os modos acústicos induzem apenas uma modulação de fase dos modos propagantes (sem acoplamento inter-modal), pode-se apreciar o efeito desta modulação apenas introduzindo uma correção no índice

de refração efetivo

$$\Delta n_{eff}(t) = \delta_m \cos \Omega_m t,$$

sendo que

$$\delta_m = \frac{\langle \Psi | \Delta \epsilon_m | \Psi \rangle}{2n_{eff} \langle \Psi | \Psi \rangle}.$$

Portanto, se a luz se é acoplada na fibra em uma sobreposição linearmente polarizada dos modos, o campo elétrico total na saída da mesma é dado pela expressão

$$\mathbf{E}(t) = \Psi(x, y) \left(a_1 \cos [\beta z - \omega t + k_0 \Delta n_x(t) L] \hat{x} + a_2 \cos [\beta z - \omega t + k_0 \Delta n_y(t) L] \hat{y} \right) L, \quad (6.4)$$

Em geral, as perturbações são distintas, ou seja $\Delta n_x \neq \Delta n_y$, contudo, para os modos das famílias R_{0m} e TR_{2m} as perturbações estão correlacionadas.

Modos R_{0m}

Para a família de modos axial-radial, o movimento da seção transversal ocorre apenas na direção radial (veja figura 6.1), portanto, os elementos do tensor de perturbação nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são idênticos (veja apêndice G.3). Conseqüentemente, a modulação do índice de refração é a mesma para as polarizações $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (i.e., $\Delta n_x = \Delta n_y$). Portanto, pode-se escrever a equação 6.4 na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Psi(x, y) \cos [\beta z - \omega t + k_0 \Delta n(t) L] (a_1 \hat{x} + a_2 \hat{y}). \quad (6.5)$$

A equação acima mostra que os modos R_{0m} , de fato, induzem uma modulação pura na fase da luz. Portanto, para resolver este campo no domínio do tempo é preciso converter a modulação de fase em modulação de amplitude através, por exemplo, de um interferômetro. Outra maneira de detectar esta modulação de fase consiste em analisar diretamente o espectro da luz transmitida. Contudo, devido às baixas frequências acústicas, isto requer o uso de analisadores de espectro do tipo *Fabry-Perot*.

Modos TR_{2m}

Para a família de modos torsional-radial, o guia se comprime em uma direção enquanto se expande na direção ortogonal (veja figura 6.2). Este movimento faz com que a variação do tensor dielétrico seja positivo na direção de contração e negativo na direção de expansão (i.e., $\Delta \epsilon_{xx} = -\Delta \epsilon_{yy}$). Conseqüentemente, a modulação do índice de refração é oposta para as polarizações $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (i.e., $\Delta n_x = -\Delta n_y$).

Portanto pode-se escrever a equação 6.4 na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Psi(x, y) (a_1 \cos [\beta z - \omega t + k_0 \Delta n(t) L] \hat{x} + a_2 \cos [\beta z - \omega t - k_0 \Delta n(t) L] \hat{y}) \quad (6.6)$$

Como a modulação de cada componente de polarização é distinta, a polarização do campo dado pela eq. 6.6 oscila no tempo. Para converter esta modulação de polarização em modulação de amplitude, basta inserir um polarizador depois da fibra. A função deste elemento será projetar as duas componentes ortogonais do campo em uma mesma direção. Se a direção deste polarizador for girada por um ângulo $\hat{\alpha}$ em relação aos eixos $\hat{x}, \hat{y}$, o campo após o polarizador será dado por

$$E_\alpha(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\alpha} = \Psi(x, y) [a_1 \cos [\beta L - \omega t + k_0 \Delta n(t) L] (\hat{x} \cdot \hat{\alpha}) + a_2 \cos [\beta L - \omega t - k_0 \Delta n(t) L] (\hat{y} \cdot \hat{\alpha})]$$

Para um campo de entrada linearmente polarizado a 45° ($a_1 = a_2 = 1$), o ideal é escolher $\alpha = -45^\circ$ (ortogonal à polarização de entrada na fibra). Neste caso o campo a equação acima é simplificada e o campo de saída é modulado em amplitude,

$$E_{-45^\circ}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2\Psi(x, y)}{\sqrt{2}} \sin(\beta L - \omega t) \sin[k_0 \Delta n(t) L]. \quad (6.7)$$

Portanto, para observar o espalhamento dos modos TR_{2m} , os dois estados de polarização da fibra atuam como os braços independentes de um interferômetro. O polarizador na saída é o elemento necessário para observar-se o padrão de interferência em razão da ortogonalidade dos estados.

6.2.4 Montagem experimental

Para detectar a luz espalhada pelos modos acústicos, deve-se montar um experimento que transforme a modulação de fase ou polarização induzida pelos modos em uma modulação de amplitude. Em ambos casos é necessário fazer o batimento da luz modulada com uma amostra de referência da luz emitida pelo laser utilizado (*heterodyne detection*).

Espalhamento polarizado: família R_{0m}

Neste caso, pode-se detectar a modulação de fase utilizando um interferômetro Mach-Zehnder com a fibra a ser investigada em um dos seus braços [84, 98]. Outra maneira de detectar esta modulação de fase pura é utilizando um interferômetro de Sagnac [101]. Na figura 6.3 é ilustrado o diagrama experimental de um interferômetro do tipo Mach-Zehnder tipicamente utilizado para estas medidas. A necessidade de introduzir o braço de referência torna as medidas do espalhamento induzido por estes modos mais difícil que os modos TR_{2m} . Por conveniência, as medidas apresentadas neste capítulo

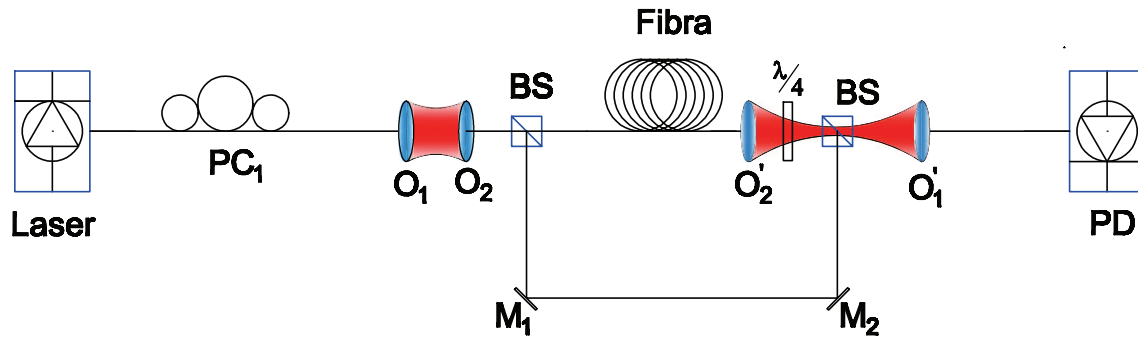


Fig. 6.3: Diagrama da montagem experimental para medida do espalhamento polarizado. PC_1 : controlador de polarização, BS: divisor de feixe, $O_{1,2}, O'_{1,2}$: objetivas de microscópio, $\lambda/4$: lâmina quarto de onda, PD: fotodiodo

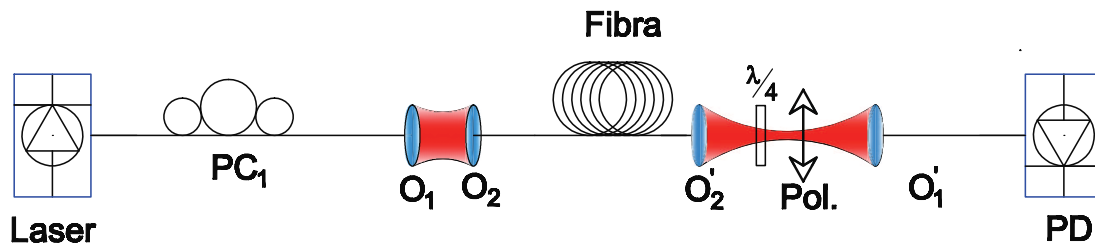


Fig. 6.4: Diagrama da montagem experimental para medida do espalhamento inter-polarizado. PC_1 : controlador de polarização, $O_{1,2}, O'_{1,2}$: objetivas de microscópio, $\lambda/4$: lâmina quarto de onda, Pol.: polarizador, PD: fotodiodo.

se concentram nos modos TR_{2m} cuja montagem experimental é detalhada abaixo.

Espalhamento inter-polarizado: família TR_{2m}

Quando a luz espalhada tem sua polarização modulada, a situação é bem mais simples experimentalmente. Para converter a modulação de polarização em modulação de amplitude, basta inserir uma lâmina $\lambda/4$ seguida de um polarizador na saída da fibra. Esta técnica é comumente utilizada em moduladores de amplitude baseados em cristais eletro-ópticos [82]. A figura 6.4 ilustra o diagrama experimental tipicamente utilizado para estas medidas.

Um laser de diodo de cavidade externa (largura de linha ~ 150 KHz) com potência da ordem de alguns mW tem seu estado de polarização ajustado para polarização linear utilizando um controlador de polarização do tipo "Mickey Mouse" (PC_1). Posteriormente, a luz é colimada utilizando a objetiva de microscópio O_1 (10 $\times$, NA 0.2) e focalizada utilizando outra objetiva O_2 . As características da objetiva O_2 dependem do tipo de fibra a ser investigada, podendo variar entre (10 $\times$, NA 0.2) para uma fibra convencional, até (60 $\times$, NA 0.8) para uma PCF altamente não-linear. Após se propagar pela fibra, a luz passa por uma lâmina $\lambda/4$, ajustada para converter o estado de saída, em geral elíptica,

para quase-linear. Em seguida a luz passa por um polarizador que é ajustado para deixar a menor quantidade possível de luz passar. Esta condição minimiza a potência média incidente no fotodiodo e minimiza o ruído *shot* gerado no fotodiodo (PD). A corrente gerada pelo fotodiodo é analisada em um analisador de espectro de radio-freqüência (*RF Spectrum analyser*).

Espectro de espalhamento

A densidade espectral do sinal medido no fotodiodo é proporcional à densidade espectral do campo espalhado [102]. Como a modulação induzida pelos modos acústicos é pequena ($\delta_m \ll 1$), pode-se utilizar a seguinte aproximação (desprezando a fase global βL),

$$E_{-45^\circ}(\mathbf{r}, t) \propto \sin(\omega t) \sin[\delta_m \sin(\Omega_m t)] \approx \delta_m \sin(\omega t) \sin(\Omega_m t) \quad (6.8)$$

O espectro deste sinal medido pelo analisador de RF é dado pela transformada de Fourier da função de autocorrelação do campo elétrico [102],

$$S_\omega(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int R_0(\tau) e^{i\omega'\tau} d\tau. \quad (6.9)$$

A função de autocorrelação é calculada como

$$R_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \mathbf{E}^*(t) \cdot \mathbf{E}(t + \tau) dt. \quad (6.10)$$

O efeito da dissipação dos modos acústicos é introduzido assumindo que a função de autocorrelação decai exponencialmente no tempo, $R(\tau) = R_0(\tau) e^{-\Gamma|\tau|}$ [102]. Pelo teorema da convolução, o espectro do sinal medido será dado por

$$S_\omega^{(m)}(\Omega) \propto |\delta_m|^2 \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Gamma_m}{(\Omega - \Omega_m)^2 + \Gamma_m^2} + \frac{\Gamma_m}{(\Omega + \Omega_m)^2 + \Gamma_m^2} \right).$$

sendo $\Omega = \omega' - \omega$. O espectro total é obtido somando a contribuição de todos os modos acústicos,

$$F(\Omega) \propto \sum_m \frac{|\delta_m|^2}{4\pi} \left(\frac{\Gamma_m}{(\Omega - \Omega_m)^2 + \Gamma_m^2} + \frac{\Gamma_m}{(\Omega + \Omega_m)^2 + \Gamma_m^2} \right) \quad (6.11)$$

A curva preta na figura 6.5 mostra o espectro de espalhamento inter-polarizado medido para uma fibra óptica convencional (Corning SMF-28) com 10 metros de comprimento. Cada pico de espalhamento está associado a um modo da família TR_{2m} . Note que a amplitude dos picos é gradualmente

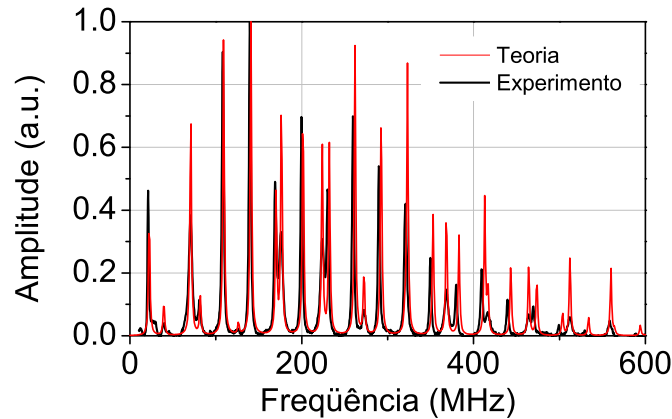


Fig. 6.5: Comparação entre o espectro de co-espalhamento despolarizado de uma fibra óptica convencional (Corning SMF28 - em preto) e a dependência espectral do coeficiente de acoplamento para os modos de um cilindro de sílica $125\ \mu\text{m}$ de diâmetro externo e núcleo de $8.2\ \mu\text{m}$.

reduzida para frequências mais altas; existem dois fatores que contribuem para este comportamento. Primeiro, quanto maior a frequência do modo acústico, maior o vetor de onda transversal associado ao mesmo. Baseando-se na figura 6.6, pode-se entender qualitativamente este comportamento: os modos de ordem mais alta exibem uma oscilação radial cada vez mais rápida, quando esta oscilação ocorre em uma escala menor que o diâmetro do modo óptico da fibra, o argumento da integral de *overlap* oscila rapidamente. Como consequência, o resultado da integração radial é reduzido, diminuindo o coeficiente de acoplamento. Segundo, como a excitação destes modos é de origem térmica a amplitude de cada modo escala com o inverso da frequência (veja eq. 5.30) contribuindo para a redução da perturbação induzida pelos modos de alta frequência. Na mesma figura, a curva vermelha representa o espectro calculado de acordo com a teoria de perturbação discutida acima. Como pode-se notar, a concordância com os resultados experimentais é ótima.

6.3 Fibras de cristal fotônico

A presença dos buracos de ar na seção transversal das fibras de cristal fotônico perturba substancialmente a propagação das ondas acústicas. Isto acontece porque as ondas acústicas que se propagam no vidro são fortemente espalhadas ao encontrarem as interfaces livres dos buracos de ar. Neste processo de espalhamento ocorre uma mistura das polarizações acústicas e, portanto, os modos não serão puramente radiais ou torsionais-radiais, entretanto, ainda será possível identificar famílias de modos análogos. Como os modos envolvidos no processo de co-espalhamento possuem $\beta_{ac} = 0$, pode-se interpretar os modos como ressonâncias de uma cavidade bi-dimensional. Para cada ressonância associa-se um comprimento de onda transversal, dado pelo inverso do vetor de onda transversal,

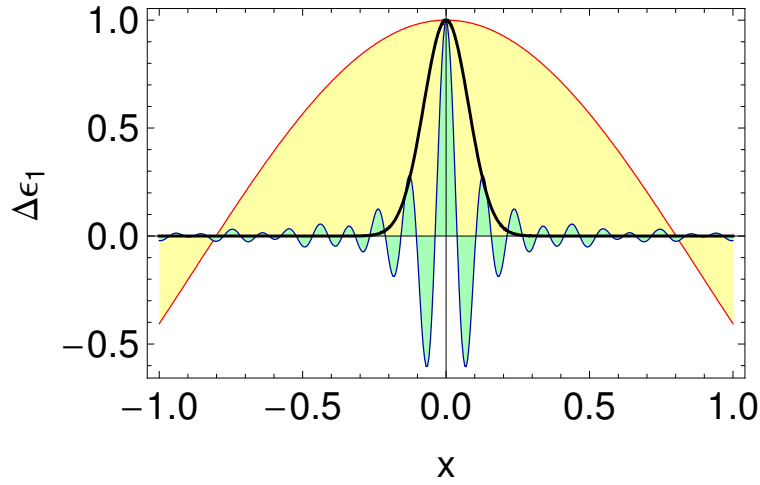


Fig. 6.6: Sobreposição entre o modo óptico (curva preta) e a perturbação induzida pelos modos TR_{21} (curva vermelha) e o modo $TR_{2,22}$ (curva verde).

$\lambda_t = \frac{2\pi}{k_t}$. Para frações de ar suficientemente baixas, os valores de λ_t se degeneram para os valores de uma cavidade circular com diâmetro D . Existem dois limites nos quais os modos acústicos de PCFs se comportam distintamente: um deles ocorre quando a fração de ar na casca periódica é baixa; o outro quando a fração de ar é muito alta, como em PCFs altamente não-lineares. A seguir serão mostrados alguns modos de uma PCF com baixa fração de ar.

6.3.1 Baixa fração de ar

Quando a fração de ar na casca da PCF é pequena, os modos acústicos confinados pela casca externa podem penetrar a casca periódica. Para os modos de baixa frequência, o comprimento de onda transversal é grande, geralmente muito maior que as dimensões típicas da estrutura da casca periódica. Estes modos penetram na casca sem sofrer muito espalhamento. Quando aumenta-se a frequência dos modos, o comprimento de onda transversal diminui até ficar com as mesmas dimensões características que definem a estrutura periódica na casca. Estes modos ainda penetram na casca, porém, são fortemente espalhados. A figura 6.7 mostra três modos da família quase- R_{0m} para uma PCF com diâmetro da casca externa $D = 30 \mu\text{m}$, $\Lambda = 1.53 \mu\text{m}$, e diâmetro dos buracos da casca $d_{clad} = 0.82 \mu\text{m}$. A parte (a) mostra o modo quase- R_{01} ($\Omega = 117 \text{ MHz}$), a parte (b) o modo quase- R_{05} ($\Omega = 890 \text{ MHz}$) e em (c) o modo quase- R_{07} ($\Omega = 1224 \text{ MHz}$). Nesta figura pode-se notar o efeito do espalhamento da casca periódica através da simetria radial dos modos. Enquanto o modo quase- R_{01} tem uma simetria radial quase perfeita, o modo quase- R_{07} é fortemente espalhado pela casca periódica e tem simetria radial quebrada. De fato, este último modo já apresenta a simetria C_6 da casca periódica.

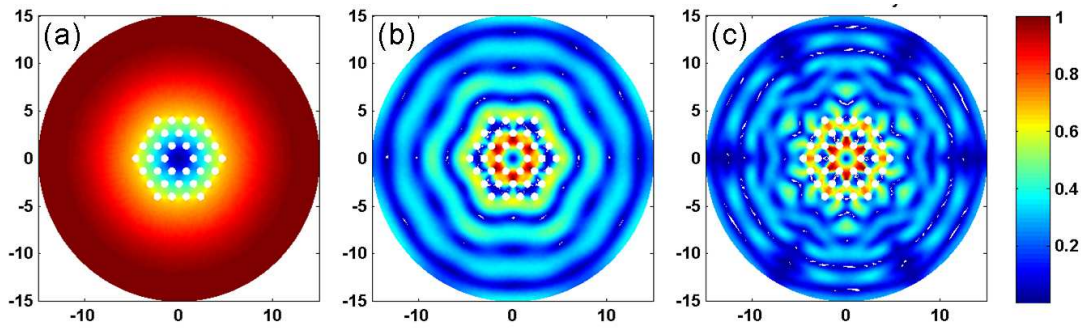


Fig. 6.7: Modos acústicos de uma PCF com baixa fração de ar na casca, diâmetro externo $D = 30 \mu\text{m}$, $\Lambda = 1.53 \mu\text{m}$, e $d = 0.82 \mu\text{m}$. A parte (a) mostra o modo quase- R_{01} ($\Omega = 117 \text{ MHz}$), a parte (b) o modo quase- R_{05} ($\Omega = 890 \text{ MHz}$) e em (c) o modo quase- R_{07} ($\Omega = 1224 \text{ MHz}$)

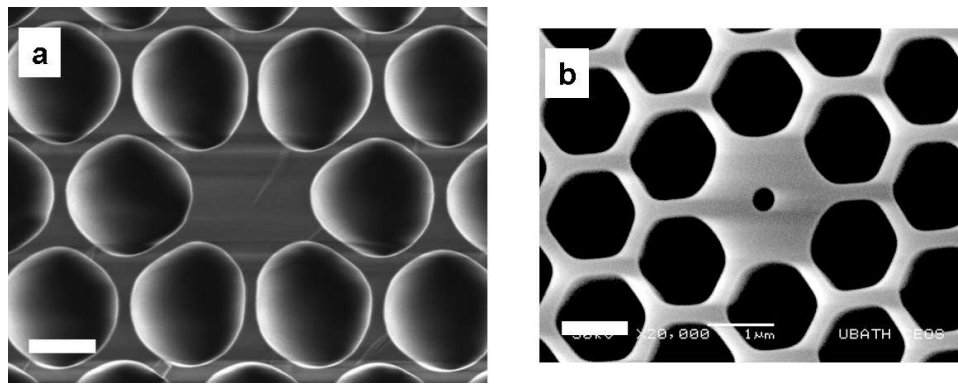


Fig. 6.8: Imagens SEM da região próxima ao núcleo das PCFs investigadas. As barras brancas na imagem correspondem a $1 \mu\text{m}$; Os núcleos destas fibras possuem, aproximadamente, $1.7 \mu\text{m}$ de diâmetros.

6.4 PCF com núcleo tubular

Nesta seção serão apresentados resultados experimentais e teóricos a respeito do co-espalhamento espontâneo das PCFs com núcleo tubular que foram apresentadas no capítulo 3. Como foi demonstrado, a presença do buraco no centro do núcleo altera fortemente a distribuição espacial do campo eletromagnético, em particular a região de maior intensidade do campo se concentra no interior do buraco de ar. A presença do buraco no centro do núcleo também altera, substancialmente, a deformação induzida pelos modos acústicos. Por exemplo, a condição de contorno na superfície deste buraco é de tensão nula e, portanto, as ondas acústicas não irão penetrar no mesmo. O resultado desta combinação é uma redução da interação acusto-óptica entre os modos acústicos de alta frequência e o modo óptico fundamental destas fibras.

Foram investigadas experimentalmente, utilizando a montagem da figura 6.4, duas fibras distintas:

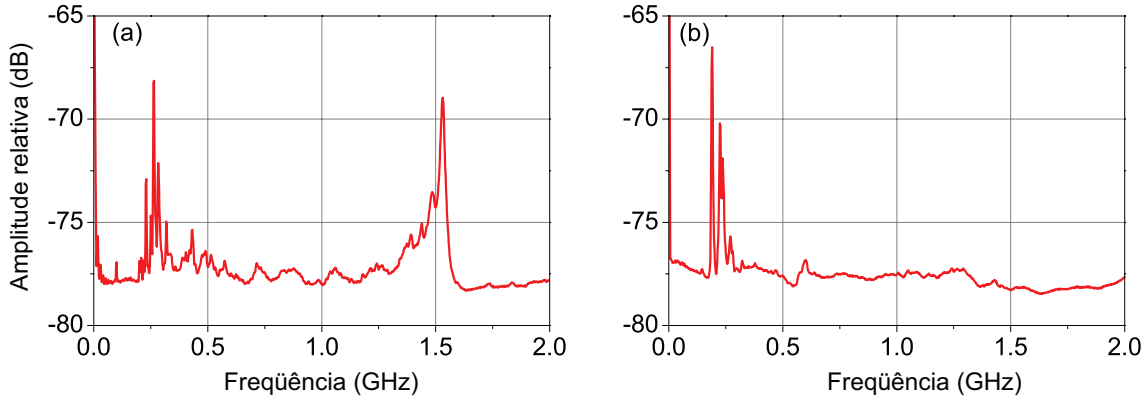


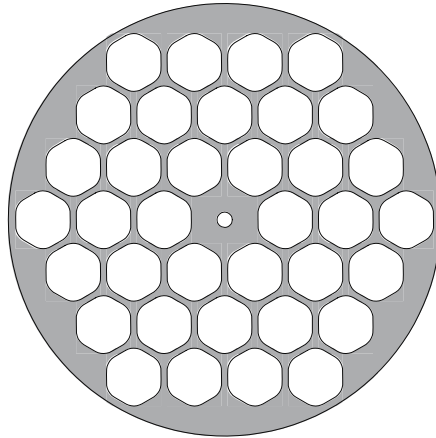
Fig. 6.9: Espectro de espalhamento despolarizado para as PCFs mostradas na Fig. 6.8. A escala vertical é logarítmica. Em (a) pode-se identificar fortes picos de espalhamento provenientes de modos acústicos da casca (~ 250 MHz), mas também picos de alta frequência em torno de 1.53 GHz. Em (b), apesar das ressonâncias da casca (~ 250 MHz) serem tão fortes quanto em a), nenhum pico é observado em altas frequências.

uma PCF convencional, altamente não-linear, com um núcleo sólido de $1.78 \mu\text{m}$ (Fig. 6.8a) e outra PCF, também altamente não-linear com núcleo de $1.68 \mu\text{m}$ porém com um buraco no centro do núcleo de, aproximadamente, 350 nm (Fig. 6.8b)². Para permitir a comparação direta dos espectros medidos em cada uma das fibras foram escolhidas fibras com o mesmo comprimento efetivo, aproximadamente ~ 8 metros. Os resultados destas medidas podem ser vistos na figura 6.9. Nota-se que apesar das duas fibras apresentarem picos de espalhamento de baixa frequência (~ 250 MHz) com similar amplitude, os modos de alta frequência (associados ao movimento do núcleo), não são observados no espectro da figura 6.9b. Esta observação sugere que a presença do buraco central reduz a eficiência de acoplamento acusto-óptica para os modos de alta frequência.

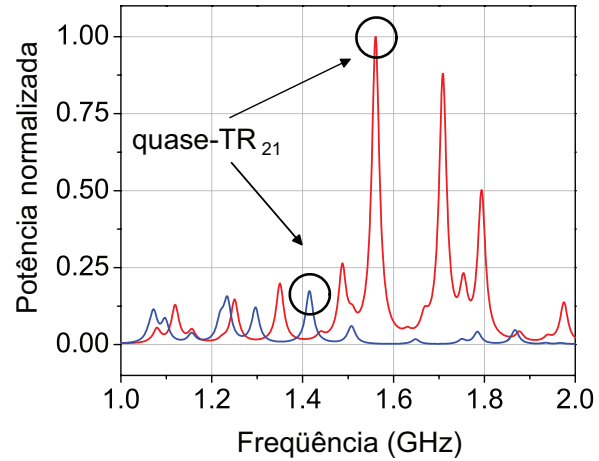
Para investigar se a supressão dos picos de espalhamento estaria mesmo associada ao pequeno buraco no núcleo, foram feitas simulações numéricas do modo óptico e dos modos acústicos destas estruturas, para as quais foi utilizado o método dos elementos finitos descrito no apêndice H. Utilizando estes modos, o espectro de espalhamento foi calculado segundo a equação 6.11. Na Fig. 6.10b são mostrados os resultados deste cálculo para uma PCF com a geometria aproximada mostrada na Fig. 6.10a com e sem o buraco central.

As figuras 6.11a&b mostram a distribuição espacial dos modos acústicos destacados na Fig. 6.10, sendo que a escala de cores representa a distribuição espacial do elemento $\Delta\epsilon_6$ do tensor de perturbação para o modo da fibra com e sem o buraco, ressaltando a forte mudança causada nos acústicos. Ao comparar os gráficos da Fig. 6.11a com aquelas da Fig. 6.11b e 6.11d, pode-se perceber que o pequeno buraco no núcleo transforma substancialmente a perturbação da constante dielétrica na região

²A fibra de núcleo sólido foi escolhida por ser, entre as disponíveis, aquela cuja estrutura mais assemelhava-se a da fibra com núcleo tubular.



(a) Geometria utilizada nas simulações. A fibra com núcleo sólido é obtida preenchendo o buraco central com vidro.



(b) A curva vermelha corresponde à fibra sem o buraco central e a curva azul com o buraco central. Os círculos em preto indicam os modos que se acoplam mais fortemente com a luz, suas distribuições espaciais são mostradas na figura 6.11.

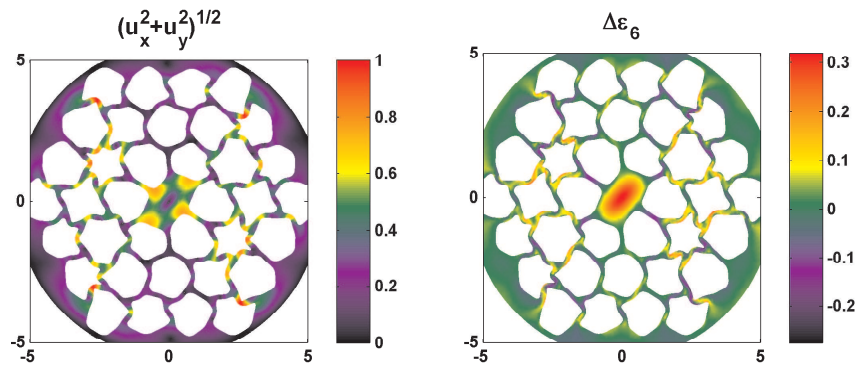
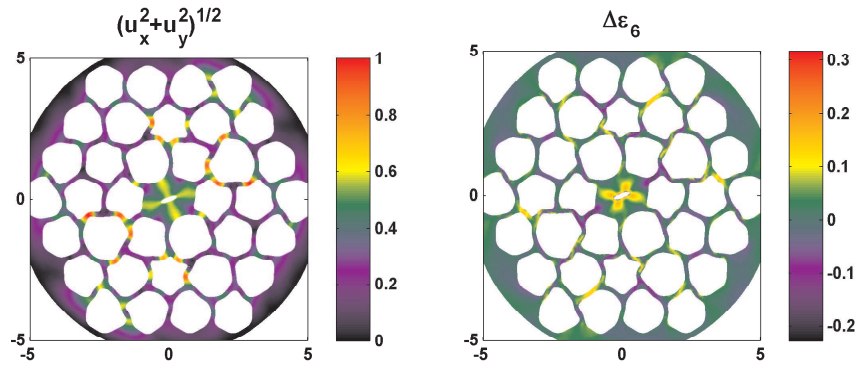
Fig. 6.10: Geometria utilizada nas simulações e espectro de espalhamento calculado pela eq. 6.11.

do núcleo. Em razão desta redistribuição das tensões acústicas, e da redistribuição do modo óptico (discutida em detalhe no capítulo 3), o acoplamento acusto-óptico é reduzido nestas fibras.

Pode-se concluir que a presença do buraco central em uma fibra, pode reduzir substancialmente o espalhamento por modos acústicos confinados no núcleo. Se estes resultados forem associados a outras técnicas para eliminar o espalhamento dos modos de casca, pode-se obter uma fibra interessante para aplicações nas quais este espalhamento é uma fonte de ruído (e.g., experimentos de *noise-squeezing* [91, 92, 93, 87] em fibras ópticas).

6.5 PCFs altamente birrefringentes

Em diversas aplicações de fibras de cristal fotônico é desejável ter um estado de polarização estável. A maneira mais simples de criar esta estabilidade é criando deformações geométricas que quebram a degenerescência do modo óptico fundamental. Nesta seção serão apresentados resultados experimentais e teóricos sobre co-espalhamento Brillouin em PCFs altamente birrefringentes. Em PCFs, a maneira mais trivial de introduzir a birrefringência é substituindo os tubos de vidro adjacentes ao núcleo por bastões (ou tubos com diferentes diâmetros internos). A figura 6.12 mostra imagens de microscopia eletrônica de um conjunto de fibras birrefringentes obtidas desta forma. Estas fibras foram fabricadas a partir da mesma preforma. As diferentes geometrias foram obtidas pressurizando-se os buracos de ar durante o puxamento das fibras. Como resultado, obtém-se fibras que apresentam,

(a) $\Omega = 1.56$ GHz(b) $\Omega = 1.415$ GHzFig. 6.11: Modos acústicos e perturbação $\Delta\epsilon_6$ calculados numericamente.

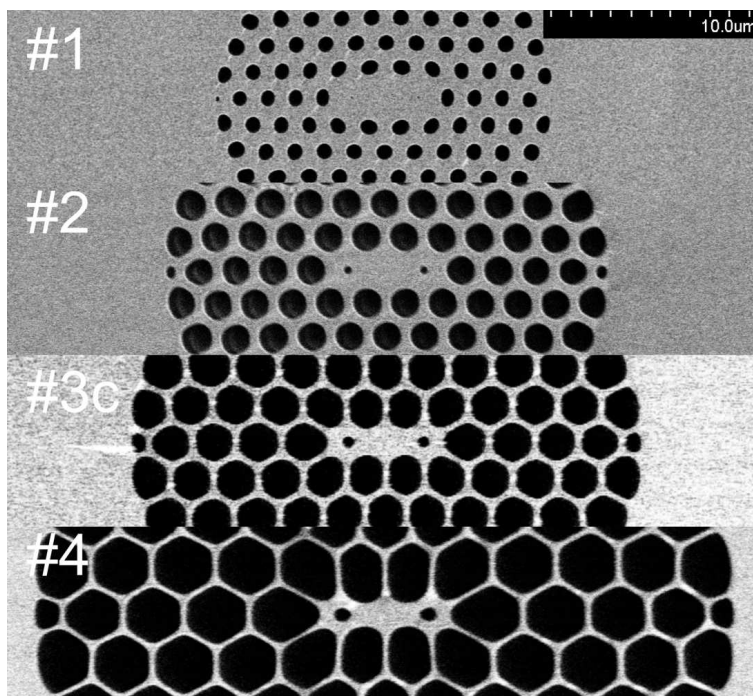


Fig. 6.12: Imagens SEM da seção transversal das fibras investigadas; as figuras estão todas na mesma escala.

aproximadamente, a mesma estrutura geométrica e dimensão do núcleo, porém com diferentes frações de ar e diâmetro da casca periódica. A fração de ar varia, aproximadamente, de 26% a 85%. Na tabela 6.1 são mostrados os parâmetros geométricos médios das fibras da Fig. 6.12.

6.5.1 Experimentos

Os resultados experimentais obtidos utilizando a montagem da Fig. 6.4 são mostrados na Fig. 6.13. A fração de ar aumenta do gráfico superior para o inferior. Distingui-se facilmente dois conjuntos de modos acústicos nesta figura: o primeiro é composto por modos de baixa frequência (<

Fibra	núcleo (μm)		Λ (μm)	Fração de ar (%)
	largura	altura		
#1	5.6	2.2	1.5	26
#2	6.1	1.8	1.9	53
#3a	6.0	1.35	2.1	70
#3b	5.9	1.3		
#3c	5.8	1.3		
#4	6.6	1.2	3.2	85

Tab. 6.1: Parâmetros geométricos médios das fibras da Fig. 6.12.

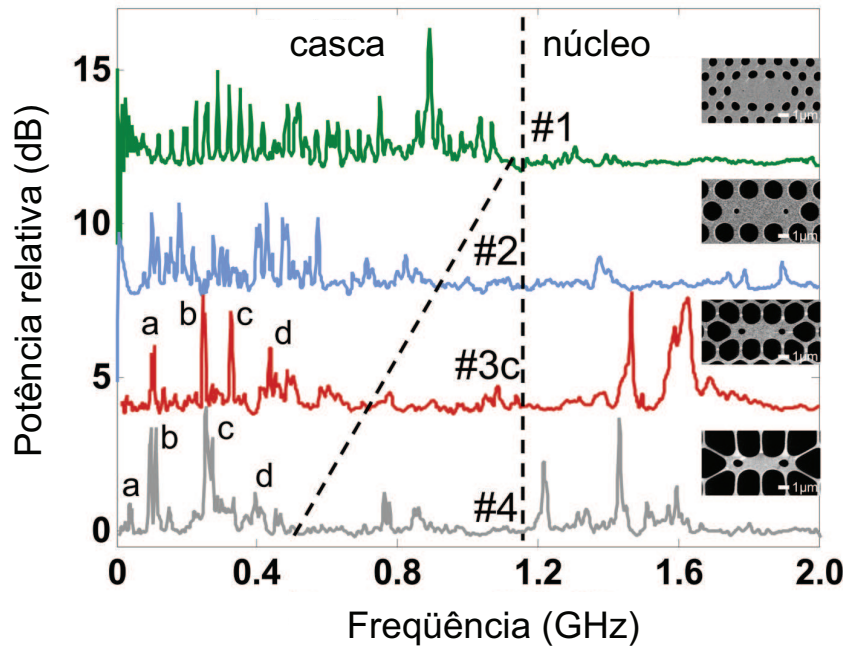


Fig. 6.13: Espectro de co-espalhamento Brillouin para quatro PCFs (os parâmetros geométricos são mostrados na tabela 6.1) e imagens SEM das fibras. Ressonâncias da casca externa e da casca periódica aparecem abaixo de 1.1 GHz e ressonâncias do núcleo aparecem acima. Os modos confinados pela casca periódica são marcados com as letras a—d.

1 GHz, ao lado esquerdo da linha pontilhada vertical). O segundo conjunto é composto por modos menos convencionais de alta frequência (> 1 GHz, ao lado direito da linha pontilhada vertical) e só são evidentes a partir da PCF#2.

Na PCF #1 (gráfico superior, com a menor fração de ar) o espectro de espalhamento não distingue-se muito do espectro observado em uma fibra convencional, com a presença de diversos picos, densamente distribuídos, na região de frequências menores que 1 GHz. Para frações de ar mais altas, a penetração dos modos confinados pela casca externa é reduzida. Simultaneamente, o contraste de propriedades mecânicas entre a casca periódica e a matriz de sílica aumenta, originando modos acústicos confinados pela casca perfurada. Por exemplo, no espectro de espalhamento da PCF #2 pode-se notar uma diversidade de picos de espalhamento, alguns espaçados densamente, outros esparsamente, isto é um reflexo da interação acusto-óptica simultânea com ambas as classes de modos. Para a PCF#3, os modos da casca externa já não conseguem penetrar a região perfurada, como resultado, os picos esparsos, que estão associados à modos acústicos confinados pela interface entre a casca periódica e a matriz de sílica, se destacam de forma proeminente.

Por outro lado, quando aumenta-se a fração de ar na casca, modos de alta frequência (> 1 GHz) começam a aparecer no espectro. Para a PCF#2 (Fig. 6.13, curva azul) existem picos fracos loca-

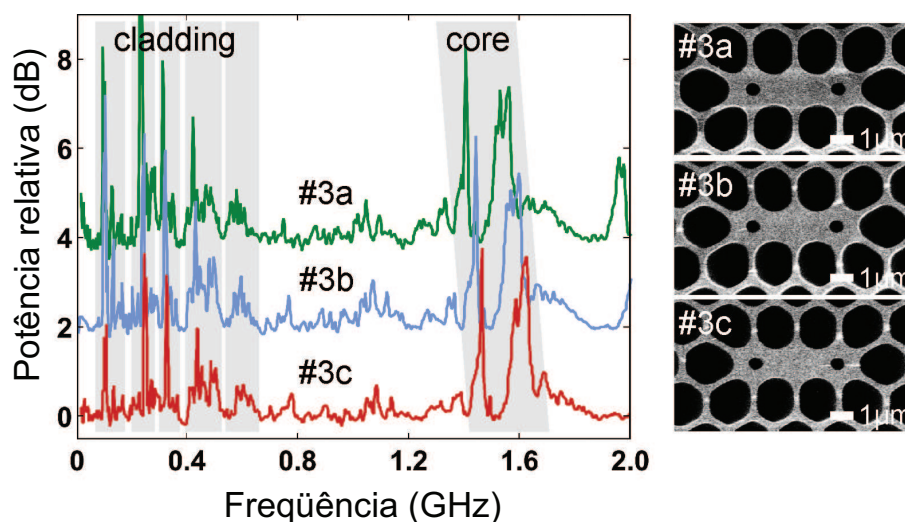


Fig. 6.14: Espectro de espalhamento e geometria das PCF#3a, #3b e #3c.

lizados em 1.375 GHz e alguns entre 1.7 e 1.9 GHz. Para a PCF#3c (Fig. 6.13, curva vermelha) existem picos proeminentes em 1.466 e 1.62 GHz. A PCF#4 exibe um espectro similar com picos proeminentes em 1.218 e 1.433 GHz. Estes modos de alta frequência estão associadas a vibrações do núcleo da fibra e das células individuais da estrutura periódica da casca.

Para melhor analisar o comportamento dos picos de alta frequência, a PCF#3 foi investigada com mais detalhe. Três fibras foram puxadas com geometrias bastante similares, PCF#3a, #3b e #3c, os espectros de espalhamento medidos são mostrados na figura 6.14 junto às imagens de microscopia eletrônica das mesmas. Apesar dos picos de baixa frequência distinguirem-se muito pouco entre as três curvas, é notável o deslocamento para o azul dos picos de alta frequência quando muda-se da PCF#3a para a PCF#3c. O deslocamento das frequências sugere a extrema sensibilidade destes modos às dimensões da fibra. Todavia, a variação suave entre as curvas exibidas na Fig. 6.14 mostram que é possível realizar uma sintonia fina das frequências de ressonância.

6.5.2 Simulações

Para mostrar que a argumentação qualitativa sobre a natureza dos picos de espalhamento é válida, os modos acústicos e ópticos das PCFs #1 e #4 foram simulados numericamente através do FEM. Utilizando a teoria de ondas acopladas apresentada no capítulo 5 consegue-se identificar os modos acústicos que espalham a luz. O espectro de espalhamento obtido teoricamente apresenta ótima concordância com os resultados experimentais.

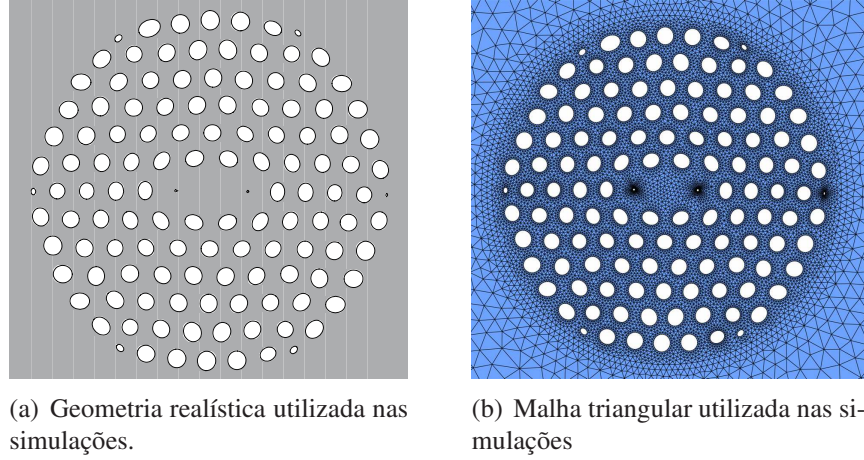


Fig. 6.15: Geometria e malha utilizada no cálculo dos modos da PCF#1. A casca externa da fibra (não mostrada nas figuras) possui $110 \mu\text{m}$.

PCF #1

A geometria utilizada nas simulações da PCF #1 são mostradas na Fig. 6.15, os índices de refração efetivos calculados para as duas polarizações do modo óptico da PCF #1 são: $n_{eff_x} = 1.41588$ e $n_{eff_y} = 1.41450$, correspondendo à uma birrefringência $\Delta n = 1.38 \times 10^{-3}$. A distribuição espacial do campo elétrico destes dois modos é mostrada na figura 6.16, a linha superior mostra o modo $\hat{x}$ -polarizado e a linha inferior mostra o modo $\hat{y}$ -polarizado. Portanto, os modos acústicos que satisfazem a condição de *phase-matching* para espalhamento inter-polarizado, são aqueles com $\beta_{ac} = k_0 \Delta n = 5585 \text{ m}^{-1}$.

Na Fig. 6.17 são mostrados os espectros da luz espalhada observados experimentalmente (linha vermelha) junto ao calculado com a eq. 6.11, utilizando $\delta_m = K_{12}^{(m)}$ (linha azul). De fato, pode-se notar uma excelente concordância com os resultados experimentais, indicando a validade da teoria e a precisão dos métodos numéricos utilizados.

No lado esquerdo das figuras 6.18 e 6.19 são mostradas a distribuição espacial $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ dos modos destacados por linhas pontilhadas verticais na figura 6.17. Em razão do perfil de deslocamento dos modos acústicos quase- TR_{2m} , a maior contribuição para o coeficiente $K_{12}^{(m)}$ vem do elemento do tensor de perturbação $\Delta\epsilon_6$. Logo, no lado direito das figuras 6.18 e 6.19, são mostradas as distribuições espaciais dos respectivos elemento $\Delta\epsilon_6(x, y)$. Os modos mostrados na figura 6.18 são confinados pela casca externa da fibra e suas frequências de ressonância escalam com o diâmetro desta casca. Apesar de não ser mostrado aqui, foi feito o cálculo do espectro de espalhamento para diferentes diâmetros da casca externa, permitindo-se verificar esta afirmação. Por exemplo, quando o diâmetro da casca externa foi reduzido à metade do seu valor original, a frequência de todos os picos de baixa frequência eram, aproximadamente, dobradas.

Por outro lado, o modo mostrado na figura 6.19 é uma ressonância simultânea do núcleo e da

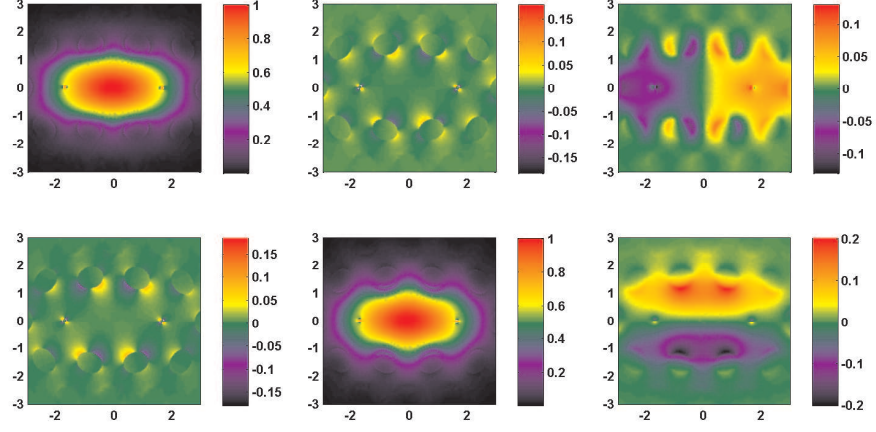


Fig. 6.16: Componentes do campo elétrico para os modos ópticos da PCF#1. Da esquerda para direita estão, $\Re\{E_x\}$, $\Re\{E_y\}$, $\Im\{E_z\}$. A linha superior corresponde ao modo $\hat{x}$ -polarizado, $n_{eff} = 1.41588$, e a linha inferior ao modo $\hat{y}$ -polarizado, com $n_{eff} = 1.41450$.

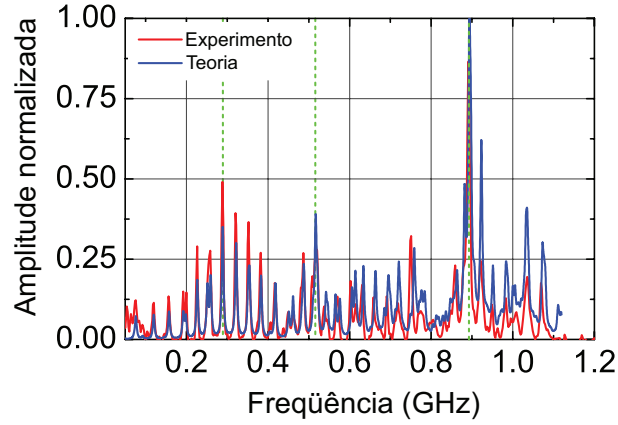


Fig. 6.17: Comparação entre os resultados experimentais observados para a PCF#1 e a previsão teórica obtida com a teoria de modos acoplados. As linhas verdes pontilhadas indicam os modos que serão mostrados nas figuras 6.18 e 6.19.

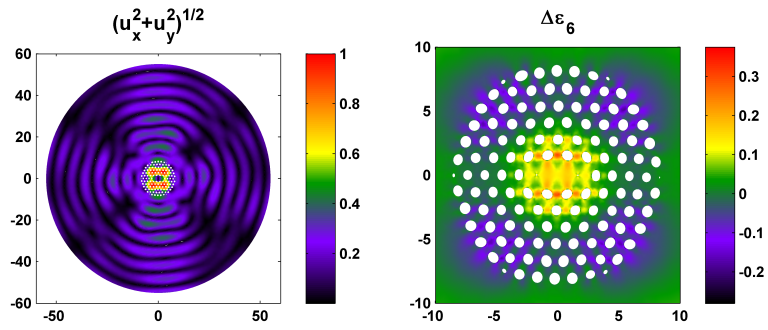
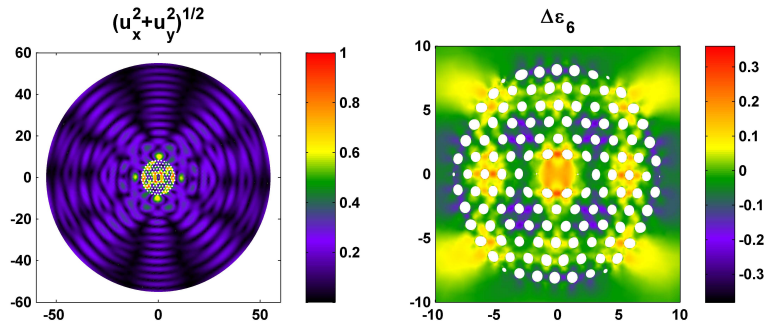
(a) $\Omega = 298$ MHz(b) $\Omega = 516$ MHz

Fig. 6.18: Distribuição espacial dos modos confinados pela casca externa e perturbação da constante dielétrica da estrutura mostrada na Fig. 6.15.

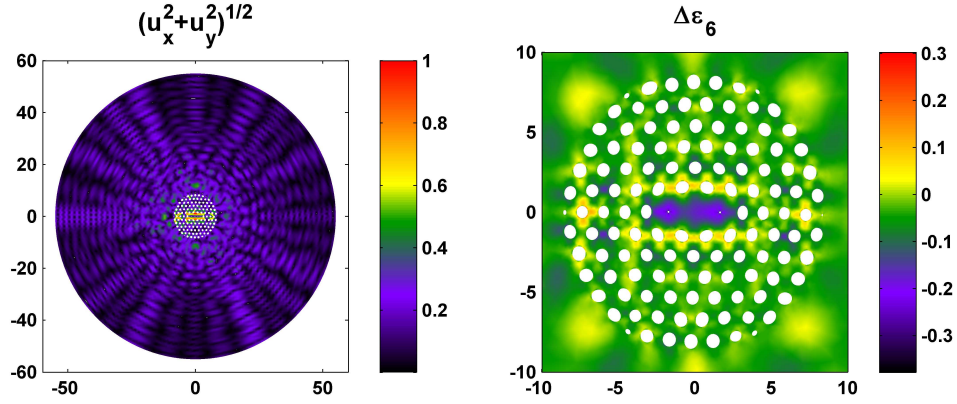


Fig. 6.19: Distribuição espacial do modo de maior acoplamento ($\Omega = 893$ MHz) e perturbação da constante dielétrica da estrutura mostrada na Fig. 6.15.

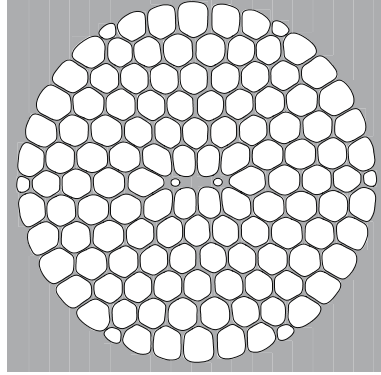
casca periódica. Este modo é confinado em razão do contraste de propriedades mecânicas entre o núcleo da fibra e a casca perfurada (veja Fig. 6.19). No entanto, este modo penetra na casca periódica, acoplando-se às vibrações da casca e, posteriormente, refrata para região sólida de sílica. Este "vazamento" de energia para casca sólida pode ser notado na figura 6.19. Esta hipótese também foi verificada analisando o espectro de espalhamento para diferentes diâmetros da casca externa. Por exemplo, no limite em que a casca externa é adjacente à casca periódica, a frequência deste modo difere apenas 0,6 % em relação a situação com a casca externa de $110 \mu\text{m}$ (887 MHz comparado com 892 MHz). Esta diferença desprezível sugere que, de fato, estes modos são ressonâncias acopladas do núcleo e da casca periódica.

PCF #4

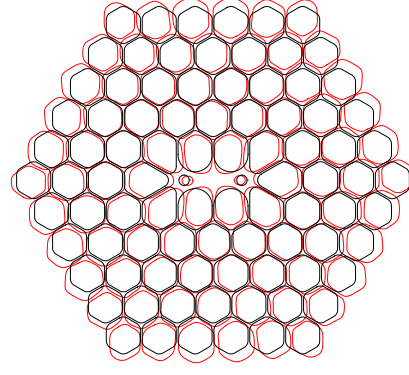
Os índices de refração efetivos calculados para as duas polarizações do modo óptico fundamental da PCF #4, utilizando a geometria da Fig. 6.20(a), foram: $n_{eff_x} = 1.36462$, $n_{eff_y} = 1.35366$, correspondendo à uma birrefringência $\Delta n = 1.095 \times 10^{-2}$. A distribuição espacial do campo elétrico destes dois modos é mostrada na figura 6.21. A linha superior mostra o modo $\hat{x}$ -polarizado (quase- HE_{11}^x) e a linha inferior, o modo $\hat{y}$ -polarizado (quase- HE_{11}^y).

Na Fig. 6.22 é mostrado o espectro da luz espalhada observado experimentalmente (linha vermelha) junto ao calculado com a eq. 6.11 utilizando $\delta_m = K_{11}^{(m)} + K_{22}^{(m)}$ (linha azul). O cálculo do espectro foi feito utilizando os modos ópticos e acústicos da estrutura real mostrada na figura 6.20. Apesar da boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais, os modos acústicos que mais se acoplam com a luz, não são possuem uma simetria exata. Isto é uma consequência das distorções da estrutura real mostrada na Fig. 6.20(a).

Para se apreciar a distribuição dos modos desta estrutura, foi elaborada uma estrutura similar,



(a) Geometria realística.



(b) Geometria idealizada (em preto) sobreposta aos contornos da geometria real (em vermelho). O último anel de buracos de ar foi removido da estrutura real.

Fig. 6.20: Geometria e malha utilizada no cálculo dos modos da PCF#4. A geometria da esquerda representa a estrutura real da fibra, a casca externa da fibra (não mostrada na figura) possui $100 \mu\text{m}$.

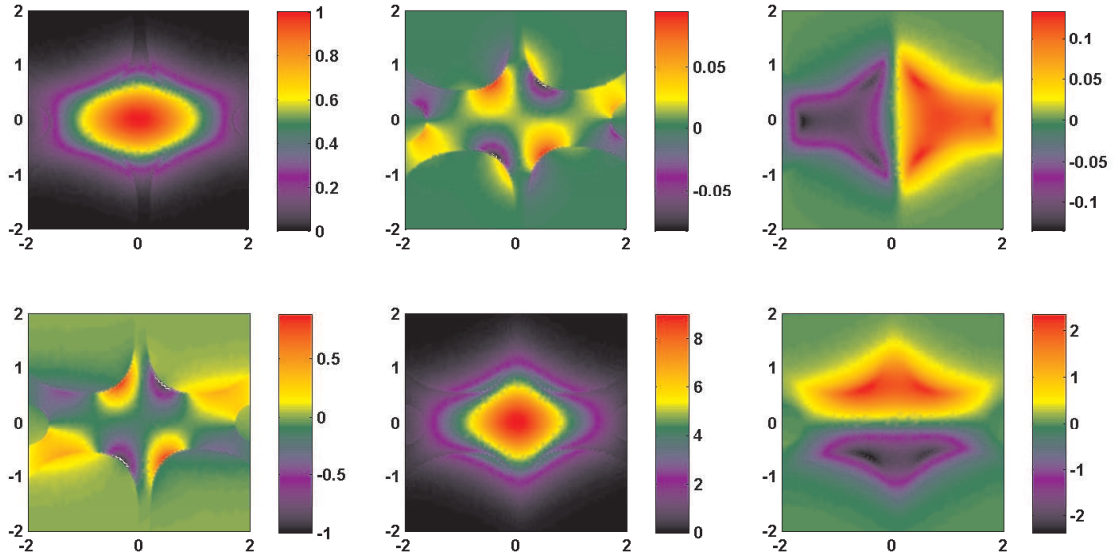


Fig. 6.21: Componentes do campo elétrico para os modos ópticos da PCF#4. Da esquerda para direita estão, $\Re\{E_x\}$, $\Re\{E_y\}$, $\Im\{E_z\}$. A linha superior corresponde ao modo $\hat{x}$ -polarizado, $n_{eff} = 1.36462$, e a linha inferior ao modo $\hat{y}$ -polarizado, com $n_{eff} = 1.35366$.

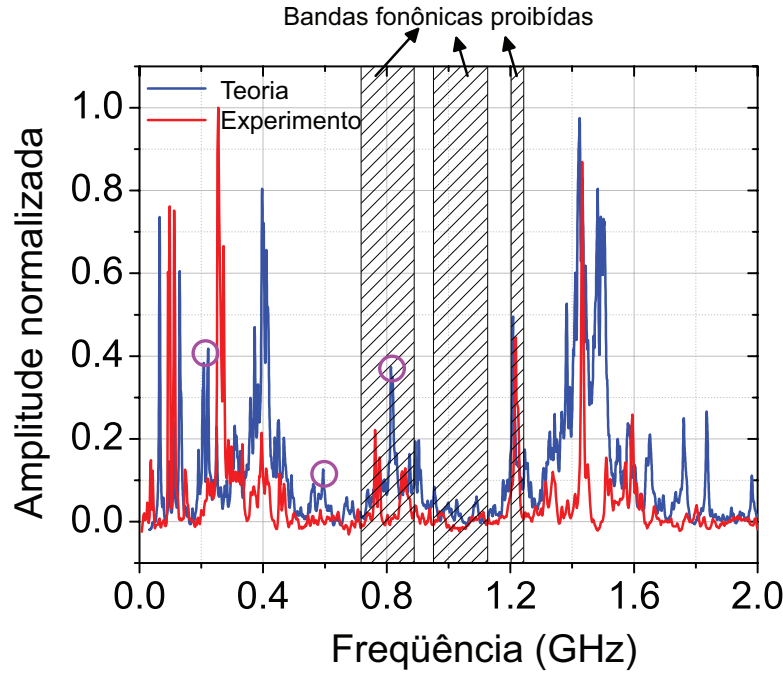


Fig. 6.22: Comparação entre os resultados experimentais observados para a PCF#4 e a previsão teórica obtida com a teoria de modos acoplados. Os círculos em magenta indicam os modos que serão mostrados nas figuras 6.18 e 6.19.

porém, perfeitamente simétrica e regular (veja Fig. 6.20(b)). A figura 6.23 mostra alguns modos da estrutura simétrica cuja frequência é próxima daqueles que aparecem de forma pronunciada no espectro de espalhamento da Fig. 6.22.

Note que os dois modos à esquerda estão compactamente confinados na região do núcleo da fibra, isto sugere que a propagação na casca periódica não é permitida na frequência destes modos. Para verificar esta possibilidade, foram utilizadas condições periódicas de contorno para se calcular a estrutura de bandas da casca da PCF#4. A Fig. 6.24(a) mostra a célula unitária utilizada nos cálculos e a Fig. 6.24(b) mostra a estrutura de bandas fonônicas para propagação no plano ($\beta_{ac} = 0$). As regiões hachuradas na Fig. 6.24(b) indicam as faixas de frequência que ocorrem *band-gaps* fonônicos. As faixas de frequência (em MHz) compreendidas pelos *gaps* são: $717 < \Delta\Omega_1 < 889$, $951 < \Delta\Omega_2 < 1127$ e $1203 < \Delta\Omega_3 < 1243$. Estas faixas de frequência também são hachuradas na Fig. 6.22, permitindo notar quais modos acústicos estão dentro do *band-gap*. No que a frequência dos modos à esquerda na Fig. 6.23 estão, de fato, dentro do *band-gap* fonônico.

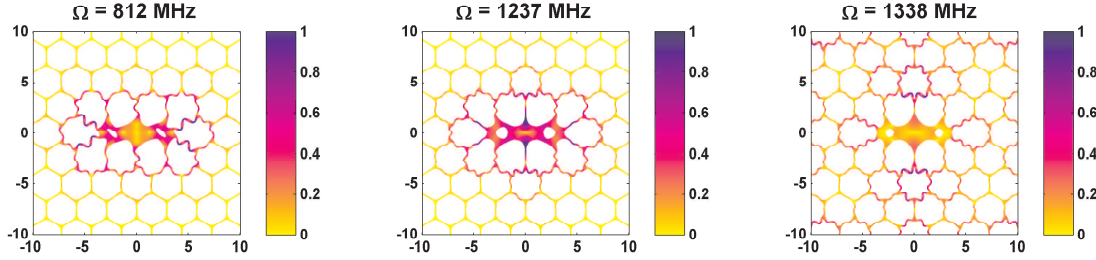
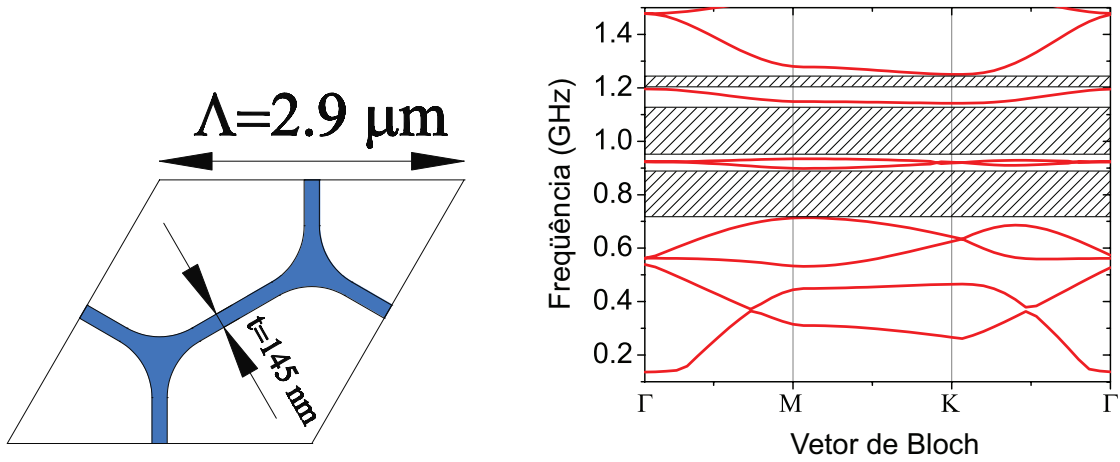


Fig. 6.23: Distribuição espacial dos modos acústicos $\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right)$ da estrutura idealizada (6.20(b)). Os dois modos à esquerda estão dentro do band-gap da casca periódica, portanto, não penetram na mesma. O modo à direita, está fora do *band-gap* e, nitidamente, penetra na casca periódica.



(a) Geometria da célula unitária utilizada para calcular a estrutura de bandas da PCF#4.

(b) Diagrama de bandas fonônicas. A célula unitária utilizada neste cálculo corresponde à casca da estrutura idealizada.

Fig. 6.24: Geometria da célula unitária e estrutura de bandas fonônicas da PCF#4.

6.6 Conclusões

Foram apresentados os aspectos fundamentais que regem o co-espalhamento Brillouin em fibras ópticas. O modelo simples do guia cilíndrico foi evocado para ilustrar a física envolvida neste processo. A interação acusto-óptica em diferentes tipos de PCF foi estudada; foram descobertas as seguintes propriedades:

- O co-espalhamento Brillouin, causado por modos de alta frequência, pode ter sua eficiência reduzida por um fator 5 utilizando as PCFs com buraco central no núcleo. Esta redução foi atribuída à redistribuição de energia dos modos ópticos e acústicos nesta fibra.
- As PCFs altamente birrefringentes não apresentaram espectros de espalhamento acústico consideravelmente diferentes de PCFs tradicionais. No entanto, o estudo feito com diferentes frações de ar permitiu o entendimento completo do papel da casca externa e da casca periódica nos modos acústicos que interagem com a luz. Sobretudo, a análise das diversas fibras permitiu a identificação de modos acústicos confinados por *band-gaps* fonônicos completos (que também existem em fibras com baixa birrefringência).

Estes resultados indicam o universo de possibilidades que estas fibras oferecem para o estudo da interação acusto-óptica. Em particular, é importante ressaltar que as altas frequências dos modos acústicos, associados ao confinamento compacto destes modos (como na Fig. 6.23), pode permitir o desenvolvimento de dispositivos acusto-ópticos de alto desempenho.

Capítulo 7

Controle coerente de modos acústicos

7.1 Introdução

Quando a intensidade luminosa é suficientemente alta, a luz deixa de ser um mero instrumento de observação dos modos vibracionais da matéria. Nesta condição, a luz espalhada espontaneamente pelos modos vibracionais do material interfere com a luz de excitação, gerando batimentos cujo período é igual ao período vibracional. Este termo de batimento é capaz de estimular coerentemente o modo vibracional em questão, dando origem aos processos de espalhamento estimulado [40, 103]. Nas últimas duas décadas se tornou possível controlar precisamente a amplitude destas vibrações utilizando pulsos ópticos cuja amplitude e fase foram especialmente preparados.

Demonstrações deste "controle coerente" foram reportados, por exemplo, sobre pares elétron-buracos (*excitons*) em poços quânticos [104], vibrações de THz em cristais [105], fotoisomerização de moléculas retinais [106], ionização multi-fótons [107] e, recentemente, em micro-cavidades ópticas [108]. Simultaneamente ao desenvolvimento destas técnicas de controle, o avanço dos processos de fabricação de estruturas na micro e nano-escala reacendeu o interesse neste campo. A pequena dimensão destas estruturas favorece o aumento das frequências de vibração [109] e a maior susceptibilidade das mesmas a forças de origem óptica [110], possibilitando a ocorrência de efeitos não-lineares de caráter mecânico em níveis moderados de potência óptica [111]. Neste capítulo será estudado o controle coerente de modos vibracionais e também demonstrado que é possível realizar tal controle sobre os modos vibracionais de fibras de cristal de fotônico altamente não-lineares (núcleo $\sim 1 \mu\text{m}$).¹

¹Parte deste capítulo foi publicada em "Raman-like scattering from Acoustic Phonons in Photonic Crystal Fibers". Outra parte foi aceita para publicação na revista *Physical Review Letters*.

7.2 Eletrostrição

A excitação óptica de modos acústicos em materiais isotrópicos pode ocorrer por causa da absorção óptica ou pela da força de eletrostrição [86, 112, 113]. Como a sílica é um material altamente transparente na região espectral de interesse, pode-se ignorar a primeira possibilidade e considerar apenas a força de eletrostrição. No apêndice E é deduzida a equação de onda para o vetor deslocamento na presença da força de eletrostrição, o resultado é dado pela eq. E.9,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \left(V_s^2 + \frac{\eta_{44}}{\rho} \partial_t \right) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \left[V_l^2 + \frac{\eta_{11}}{\rho} \partial_t \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\mathbf{F}_{st}(\mathbf{r}, t)}{\rho}, \quad (7.1)$$

sendo que a força de eletrostrição é dada pela expressão (eq. D.17),

$$\mathbf{F}_{st}(\mathbf{r}, t) = \frac{\gamma_{12}}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \gamma_{44} \nabla \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top). \quad (7.2)$$

7.2.1 Força de eletrostrição

Considerando-se que o campo elétrico viaja no modo fundamental do guia de onda, pode-se escrever

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(t) \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (7.3)$$

sendo que $E(t) = E_0 \sqrt{f(t)}$ representa a dependência temporal do campo elétrico e a função $f(t)$ representa o envelope da potência do pulso óptico²; o vetor $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r})$ representa a distribuição espacial do campo eletromagnético. Para analisar espacialmente a força de eletrostrição, separa-se as dependências espacial e temporal da mesma (veja apêndice D.3),

$$\mathbf{F}_{st}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{[|E_0|^2 f(t)]}_{F_{st}(t)} \underbrace{\left[\frac{\gamma_{12}}{2} \nabla (\boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^*) + \gamma_{44} \nabla \cdot (\boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^\dagger) \right]}_{\mathbf{F}_{st}(\mathbf{r})}. \quad (7.4)$$

No apêndice D.4 a expressão geral para a força de eletrostrição em coordenadas cilíndricas (eq. D.23) é deduzida para uma polarização arbitrária para o modo óptico,

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha_1}{2} \exp(i\beta_1 z + \phi_1) \boldsymbol{\Psi}_1 + \frac{\alpha_2}{2} \exp(i\beta_2 z + \phi_2) \boldsymbol{\Psi}_2 + c.c.$$

²Introduzimos a raiz quadrada da função $f(t)$ para que a mesma represente o envelope da potência do pulso óptico $\propto E^2(t)$.

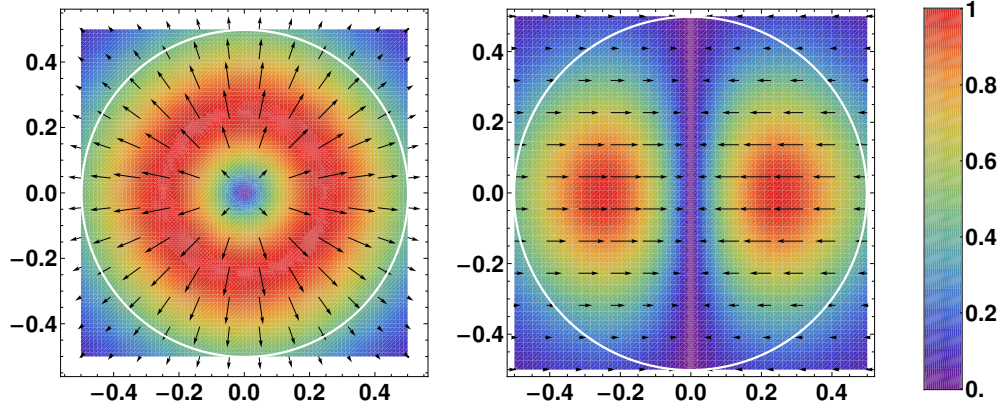


Fig. 7.1: Distribuição espacial das componentes da força de eletrostrição para um campo óptico polarizado ao longo da direção $\hat{x}$. À esquerda temos o termo $\propto \gamma_{12} \nabla (|\Psi| \cdot |\Psi|)$ e à direita o termo $\propto \gamma_{44} \nabla \cdot (|\Psi| \cdot \langle \Psi |)$.

Em particular, quando o laser de bombeio é acoplado no modo fundamental de guias cilíndricos, pode-se supor que este é, aproximadamente, linearmente polarizado e possui simetria radial,

$$\Psi_{1,2} = \begin{cases} \Psi(r) \hat{x} \\ \Psi(r) \hat{y} \end{cases}$$

Por exemplo, para o bombeio acoplado na polarização $\Psi_1 = \Psi \hat{x}$ (i.e., $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$) a expressão para a força de eletrostrição reduz-se a,

$$\mathbf{F}_{st} = \Psi \partial_r \Psi \left\{ [\gamma_{12} + \gamma_{44} (1 + \cos 2\theta)] \hat{r} + (\gamma_{44} \sin 2\theta) \hat{\theta} \right\} \quad (7.5)$$

Na figura 7.1 são mostradas as distribuições espaciais dos termos da força proporcionais a γ_{12} (à esquerda) e dos termos proporcionais a γ_{44} (à direita). Não é óbvio na equação 7.5, mas os termos proporcionais a γ_{44} apontam na direção $\hat{x}$, como é mostrado no apêndice D.4 e pode-se notar na figura 7.1.

7.2.2 Excitação impulsiva de modos

Quando pulsos ópticos cuja duração é bem menor que o período de vibração dos modos acústicos se propagam por uma fibra, seus modos acústicos são excitados impulsivamente. Para resolver a eq. 7.1 para o vetor deslocamento, expande-se este e o tensor de deformação em termos dos modos

normais de vibração,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \sum_m A_m(t) \mathbf{u}_m(x, y) e^{i\Omega_m t} + c.c. \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \sum_m A_m(t) \mathbf{S}_m(x, y) e^{i\Omega_m t} + c.c.\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação 7.1, é possível encontrar uma equação para a evolução temporal dos coeficientes da expansão [100, 113]

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial t^2} + 2\frac{\partial A_m}{\partial t} (i\Omega_m + \Gamma_m) + 2i\Omega_m \Gamma_m A_m = B_m(t), \quad (7.7)$$

sendo que $\Gamma_m = \frac{\eta_{11}}{2\rho} \left(\frac{\Omega_m}{c_l}\right)^2$ representa a atenuação temporal dos modos; os coeficientes de excitação são dados pela projeção da força de eletrostrição sobre os modos acústicos

$$B_m(t) = \frac{f(t)}{\rho} \frac{\langle \mathbf{u}_m | \mathbf{F}_{st}(\mathbf{r}) \rangle}{\langle \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m \rangle} = \frac{f(t)}{\rho} \frac{\int \mathbf{u}_m^* \cdot \mathbf{F}_{st}(\mathbf{r}) dA}{\int \mathbf{u}_m^* \cdot \mathbf{u}_m dA} \quad (7.8)$$

Para resolver a eq. 7.7 introduz-se a transformada de Fourier $A_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_m(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$. Para a excitação impulsiva, aproxima-se o pulso óptico por uma função delta,

$$f(t) = \delta\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (7.9)$$

onde foi introduzido o parâmetro t_0 que garante que $f(t)$ seja adimensional, este parâmetro estará relacionado à energia do pulso óptico. Para excitação delta, a solução da equação 7.7 é a função resposta do sistema, que é dada por (veja apêndice E.2)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = t_0 \sum_m \Phi_m X_m(t) \mathbf{u}_m(x, y). \quad (7.10)$$

sendo que o coeficiente $\Phi_m = \langle \mathbf{u}_m | \mathbf{F}_{st}(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m \rangle^{-1}$ e a função temporal é dada por

$$X_m(t) = e^{-\Gamma_m t} \frac{\sin\left[\sqrt{\Omega_m^2 - \Gamma_m^2} t\right]}{\sqrt{\Omega_m^2 - \Gamma_m^2}} \Theta(t) \quad (7.11)$$

na qual $\Theta(t)$ representa a função degrau, decorrente da condição de causalidade.

Amplitude de excitação

A equação 7.10 mostra que a amplitude de oscilação dos modos acústicos depende de dois parâmetros, Φ_m e t_0 . O primeiro determina regras de seleção pois, dependendo das simetrias dos modos ópticos e acústicos, irá permitir, ou não, a excitação de um modo acústico específico. O segundo parâmetro define a energia do pulso óptico injetado no guia, para relacionar t_0 diretamente com a energia do pulso integra-se a potência óptica no tempo

$$U_p = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = \frac{A_{eff}}{2} \epsilon_0 n^2 c |E_0|^2 t_0,$$

onde A_{eff} representa a área efetiva do modo óptico ($\langle \Psi | \Psi \rangle$), ϵ_0 é a permeabilidade do vácuo, n é o índice de refração do meio, c é a velocidade da luz no vácuo e E_0 é a amplitude do campo elétrico. Portanto, o parâmetro t_0 é dado por

$$t_0 = \frac{2U_p}{\epsilon_0 n^2 c A_{eff} |E_0|^2}$$

Nesta expressão nota-se que para uma dada energia de pulso, o coeficiente de excitação escala com o inverso da área efetiva do modo óptico e, portanto, revela a potencial vantagem de utilizar-se guias com alto confinamento eletromagnético para intensificar a excitação.

7.3 Espalhamento da luz

Uma vez calculado o vetor deslocamento dos modos excitados pela eletrostrição, pode-se utilizar a teoria de perturbação desenvolvida no capítulo 5 para calcular a modulação do índice de refração de refração induzido pelas ondas acústicas. Se substituirmos a expressão 7.10 na equação para o tensor de perturbação

$$\Delta \epsilon(x, y, t) = \mathbf{p} : \mathbf{S}(x, y, t) = t_0 \sum_m \Phi_m X_m(t) \mathbf{p} : (\nabla \mathbf{u}_m) \quad (7.12)$$

A perturbação do índice de refração efetivo é dada pela teoria de perturbação (eq. F.22), o resultado é,

$$\Delta n_{eff}(t) = \frac{1}{2n_{eff}} \frac{\langle \Psi | \Delta \epsilon(t) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

Substituindo a expressão 7.12 na equação acima, obtém-se

$$\Delta n_{eff}(t) = \frac{U_p}{\epsilon_0 n^2 \rho c n_{eff} |E_0|^2} \sum_m \left[\frac{\langle \mathbf{u}_m | \mathbf{F}_{st} \rangle}{\langle \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m \rangle} \right] \left[\frac{\langle \Psi | \mathbf{p} : (\nabla \mathbf{u}_m) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle^2} \right] X_m(t). \quad (7.13)$$

Como a força de eletrostrição também é proporcional à ϵ_0 (veja apêndice D.2.4) e ao quadrado da

amplitude do campo elétrico (eq. 7.4), entre os parâmetros multiplicativos da eq. 7.13 é necessário conhecer apenas: n , n_{eff} , U_p , c , ρ . A área do modo acústico, $\langle \mathbf{u}_m | \mathbf{u}_m \rangle$, e do modo óptico, $\langle \Psi | \Psi \rangle$, podem ser calculadas com bastante precisão utilizando soluções analíticas ou o método dos elementos finitos. É importante notar que a modulação do índice de refração escala com o inverso destas quantidades, portanto, em guias de onda que confinam simultaneamente os modos ópticos e acústicos, a modulação do índice de refração pode ser, substancialmente, amplificada.

7.4 Excitação impulsiva dos modos de um cilindro

Em um guia de onda cilíndrico, a simetria angular dos modos ópticos e acústicos estabelece uma regra de seleção para o coeficiente de excitação Φ_m . Utilizando os mesmos argumentos da seção 6.2, é fácil mostrar que apenas os modos das famílias R_{0m} e TR_{2m} serão excitados. Os modos da família R_{0m} são excitados pelo termo $\propto \gamma_{12} \nabla (\Psi \cdot \Psi^*)$ da força de eletrostrição; já os modos da família TR_{2m} são excitados pelo termo $\propto \gamma_{44} \nabla \cdot (\Psi \cdot \Psi^\dagger)$. Pode-se entender esta seletividade analisando o perfil do vetor deslocamento destes modos (figuras 6.1 e 6.2) junto ao perfil dos respectivos termos da força de eletrostrição (Fig. 7.1).

Os mesmos argumentos utilizados na seção 6.2, para explicar a redução dos picos de espalhamento para os modos de alta frequência, se aplicam para a eficiência de excitação da força de eletrostrição. Quando os modos acústicos oscilam na escala do diâmetro óptico, o coeficiente de excitação tende a se reduzir. Portanto, mesmo as famílias de modos que apresentam a mesma simetria da força de eletrostrição, apresentarão baixa eficiência de excitação para os modos de ordem superior. Ao lado esquerdo da figura 7.2, são mostrados os coeficientes de excitação, dados pela eq. 7.8, para os modos da família R_{0m} de uma fibra óptica cujo diâmetro da casca externa é variado (o diâmetro do modo óptico é mantido fixo em $d_{opt} \sim 8 \mu\text{m}$). Quando o diâmetro externo é de $125 \mu\text{m}$ (curva preta), o modo que sofre excitação máxima é o R_{08} , entretanto diversos modos adjacentes a este são também excitados. No outro extremo, quando a casca externa é reduzida para $10 \mu\text{m}$ (curva vermelha), o modo R_{01} se torna o modo mais excitado. Sobretudo, a seletividade da excitação se torna notoriamente singular: efetivamente, apenas o modo R_{01} é excitado.

Ao lado direito da figura 7.2 são mostradas as respostas temporais, calculadas utilizando a eq. 7.13, de uma fibra óptica com os dois valores supracitados para a casca externa. Como consequência da seletividade de excitação, quando o diâmetro da casca é reduzido, a resposta temporal com a casca de $10 \mu\text{m}$ (aproximadamente da mesma dimensão do modo óptico) é senoidal, em contraste com a resposta mostrada na curva preta para uma fibra óptica com diâmetro externo de $125 \mu\text{m}$. Note que a amplitude máxima de modulação, em ambos os casos, é aproximadamente igual. No entanto, para a fibra com casca de $10 \mu\text{m}$, toda a energia está concentrada em um único modo acústico e, portanto, a

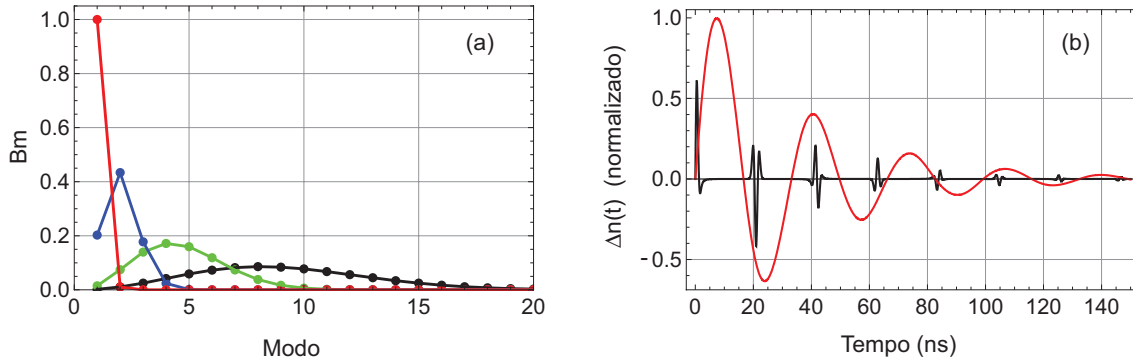


Fig. 7.2: (a) Coeficiente de excitação dos modos acústicos para diferentes valores de diâmetro externo de uma fibra óptica (o diâmetro do modo óptico é mantido fixo $\sim 8 \mu\text{m}$); em preto $d = 125 \mu\text{m}$, em verde $d = 62.5 \mu\text{m}$, em azul $d = 25 \mu\text{m}$, em vermelho $d = 10 \mu\text{m}$. (b) Resposta temporal normalizada da perturbação do índice de refração da mesma fibra para $d = 125 \mu\text{m}$ (curva preta) e $d = 10 \mu\text{m}$ (curva vermelha) fibra dada pela equação.

amplitude de vibração deste modo é bem maior que na fibra com $125 \mu\text{m}$, em acordo com a dependência $\propto \langle u_m | u_m \rangle^{-1}$ mostrada na equação 7.13. Dianov e colaboradores, em 1990, foram os primeiros a cogitar que este tipo de excitação pode ocorrer durante a propagação de pulsos curtos em fibras ópticas convencionais [112]. A teoria proposta foi capaz de explicar os resultados experimentais, até então incompreendidos, observados por Smith e Mollenauer durante a propagação de sólitons em longos enlaces de fibras ópticas [12].

7.5 Experimento: Excitação impulsiva em PCFs

Em uma fibra convencional, como mostrado na seção 7.4, um grande número de modos são simultaneamente excitados, resultando em um reposta temporal complexa como aquela mostrada na figura 7.2. Em PCFs altamente não-lineares, a situação é dramaticamente diferente em razão do confinamento dos modos acústicos e ópticos na mesma região espacial. Como mostramos na Fig. 7.2, este confinamento simultâneo conduz a excitação de apenas alguns modos acústicos e, portanto, a resposta temporal é quase senoidal. Sobretudo, o pequeno diâmetro do núcleo permite a existência de modos acústicos na faixa de frequências de GHz.

A montagem experimental utilizada para excitar e detectar os modos acústicos é do tipo *pump & probe*; o diagrama experimental é mostrado na figura 7.3. Como fonte de luz, são utilizados dois lasers de cavidade externa: um de bombeio, sintonizado em $\lambda = 1530 \text{ nm}$ e outro de prova, sintonizado em $\lambda = 1550 \text{ nm}$. Os estados de polarização destes lasers são controlados independentemente através dos controladores PC_1 e PC_2 . Um modulador de amplitude de LiNbO_3 , alimentado por um gerador de pulsos eletrônico, é utilizado para modular o laser de bombeio, resultando em pulsos ópticos com

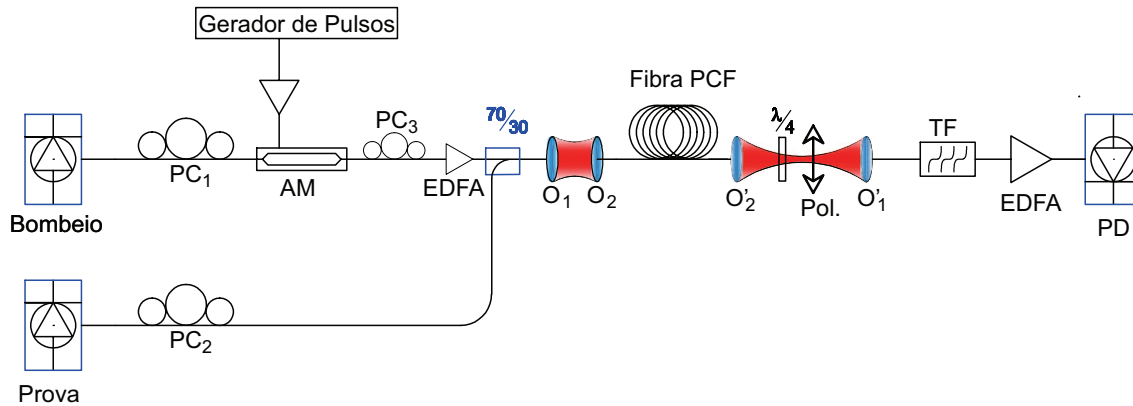


Fig. 7.3: Diagrama da montagem experimental para excitação impulsiva de modos vibracionais. $PC_{1,2,3}$: controladores de polarização, AM: modulador de amplitude, RFA: amplificador de radio-freqüência, 70/30: acoplador de fibra (70 % laser de bombeio, 30 % laser de prova), $O_{1,2}, O'_{1,2}$: objetivas de microscópio, $\lambda/4$: lâmina quarto de onda, Pol.: polarizador, TF: filtro espectral sintonizável, EDFA: amplificador óptica a fibra dopada com érbio, PD: fotodiodo.

100 ps de duração e período controlável; após o modulador, um outro controlador de polarização é necessário para ajustar a polarização do bombeio. Em razão da baixa potência emitida pelo laser de bombeio (~ 10 mW), depois de ser modulado, este laser atravessa um amplificador óptico a fibra dopada com Érbio. Mantendo a separação entre os pulsos suficientemente longa (~ 1 μ s), consegue-se extrair do amplificador pulsos com alta potência de pico (> 10 W). A luz pulsada do bombeio é então acoplada com o laser de prova contínuo utilizando um acoplador de fibra com razão de acoplamento 70/30. Em seguida, a luz combinada dos dois lasers é colimada e focalizada na face da fibra PCF utilizando objetivas de microscópio. A polarização do laser de bombeio é ajustada para coincidir com eixo rápido das fibras; a polarização do laser de prova é ajustada para um estado linear a 45° em relação ao eixo rápido. Na saída da fibra utiliza-se um polarizador para converter a modulação de polarização induzida pelos modos acústicos em modulação de amplitude³. Antes da luz ser detectada, utiliza-se um filtro espectral sintonizável com pequena largura de linha (~ 0.4 nm), sintonizado em torno de $\lambda = 1550$ nm, para remover a luz transmitida do laser de bombeio. Para garantir que a potência do laser de prova é suficiente para sensibilizar o fotodiodo, um segunda EDFA é utilizado antes de detectar o sinal. A corrente gerada no fotodiodo é analisada utilizando um osciloscópio de tempo real com largura de banda de 2.5 GHz

Foram utilizadas duas PCFs cujo espectro de co-espalhamento espontâneo foi previamente caracterizado utilizando a técnica supra-descrita e a montagem experimental da Fig. 6.4. A primeira (PCF #1, 60 metros) exibiu uma ressonância proeminente em $\Omega = 1.96$ GHz, com tempo de vida de $\tau \sim 11$

³Note que utilizando esta técnica, como descrito no capítulo 6, não se detecta modos da família R_{0m} , uma vez que estes não induzem modulação de polarização.

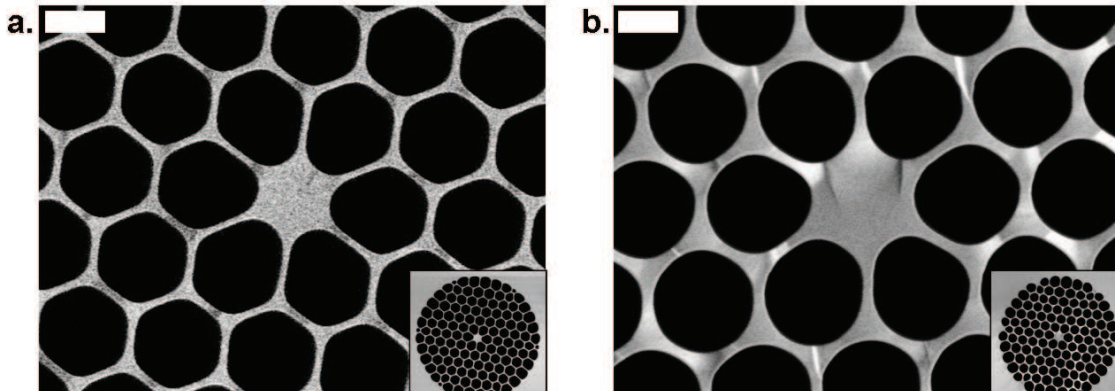


Fig. 7.4: Imagem SEM da secção transversal das fibras PCF utilizadas nos experimentos. a) PCF #1, o período da casca é $\Lambda_1 = 1.67\mu\text{m}$ e o diâmetro do núcleo é $d_1 = 1.27\mu\text{m}$. b) PCF #2, o período da casca é $\Lambda_1 = 1.92\mu\text{m}$ e o diâmetro do núcleo é $d_1 = 1.75\mu\text{m}$. As duas figuras estão na mesma escala e a barra branca corresponde a $1\mu\text{m}$. As figuras pequenas no canto estão fora de escala e mostram a microestrutura completa das fibras.

ns (fator de qualidade mecânica $Q = 135$); a segunda (PCF#2, 10 metros), tinha sua ressonância principal em $\Omega = 1.53\text{ GHz}$, com tempo de vida $\sim 18\text{ ns}$ ($Q = \Omega\tau = 173$). Ambas as fibras apresentavam ressonâncias secundárias mais fracas: em 2.39 GHz para a PCF#1 e 1.83 GHz para PCF#2. A duração temporal do pulso de bombeio (100 ps) era, portanto, pelo menos 5 vezes mais curta que o período de vibração dos modos acústicos observados (510 ps para PCF#1 e 658 ps para PCF#2). Portanto a aproximação de excitação impulsiva, descrita na seção 7.2.2, é válida para estes modos.

Na figura 7.5a&b são mostradas as respostas temporais medidas para a PCF#1 (Fig. 7.4a) e PCF#2 (Fig. 7.4b). Os picos que aparecem próximos de $t \sim 0$ se devem ao efeito Kerr, cujo tempo de resposta é da ordem de fs. Nas figuras 7.5c&d, são mostradas as respectivas transformadas de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) das respostas temporais depois de removidos os picos instantâneos do efeito Kerr. Em ambas repostas pode-se notar a presença de pouquíssimos modos vibracionais, confirmando a hipótese da seletividade de excitação em razão do confinamento simultâneo dos modos ópticos e acústicos.

7.6 Controle coerente de modos vibracionais

Os resultados obtidos na excitação impulsiva mostram que a possibilidade de manipular a estrutura do guia de onda com precisão micrométrica torna possível a escolha precisa da região espectral dos modos acústicos que interagem com a luz. Contudo, algumas fibras irão exibir mais de um modo que satisfaz esta condição, por exemplo, para a PCF#1, existem dois modos principais, um oscilando em $\Omega \approx 1.96\text{ GHz}$ e outro em $\Omega \approx 2.4\text{ GHz}$. Nesta seção, resultados experimentais serão mostrados

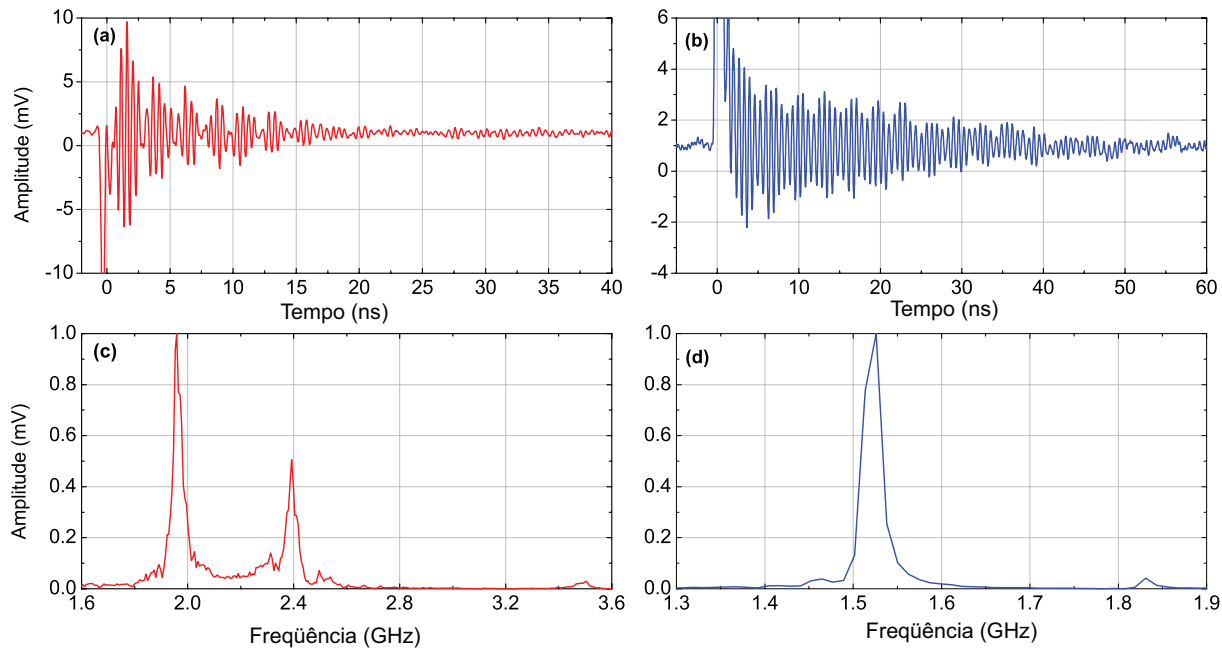


Fig. 7.5: Excitação impulsiva dos modos vibracionais da PCF #1 e PCF #2. a,b) Resposta temporal detectada no laser de prova quando um único pulso excita a fibra. c,d) Espectro de potência obtido por transformada de Fourier correspondendo às formas temporais mostradas em a e b, respectivamente. O pico inicial em todas as formas temporais são devidos a resposta eletrônica (efeito Kerr) e foram excluídas dos dados antes de calcular a FFT.

demonstrando que, se um segundo pulso óptico é lançado após o primeiro (dentro de um intervalo de tempo menor que o tempo de vida dos modos acústicos), uma interação coerente entre eles pode acontecer. Um dado modo acústico pode ter sua amplitude coerentemente amplificada ou cancelada, dependendo da separação temporal entre os dois pulsos. Além disto, mostra-se que usando uma longa sequência de pulsos equi-espçados no tempo, é possível amplificar, fortemente, um modo acústico cuja frequência é ressonante com a taxa de repetição dos pulsos.

7.6.1 Resultados experimentais

Na figura 7.6a&c são mostrados os traços do osciloscópio obtidos quando dois pulsos excitavam, seqüencialmente, os modos principais da PCF#1 e PCF#2. Ajustando a separação temporal entre os dois pulsos de bombeio, consegue-se amplificar (curvas verdes), ou suprimir (curvas vermelhas) a amplitude da ressonância principal comparado com a resposta de um único pulso (curva azul - equivale as respostas mostradas na Fig. 7.5). As oscilações remanescentes nas curvas vermelhas das figuras 7.6a&c são causadas pelos modos secundários, que não são coerentes com a excitação do segundo pulso, e por uma oscilação residual dos modos principais, como pode-se notar pelas transformadas de Fourier.

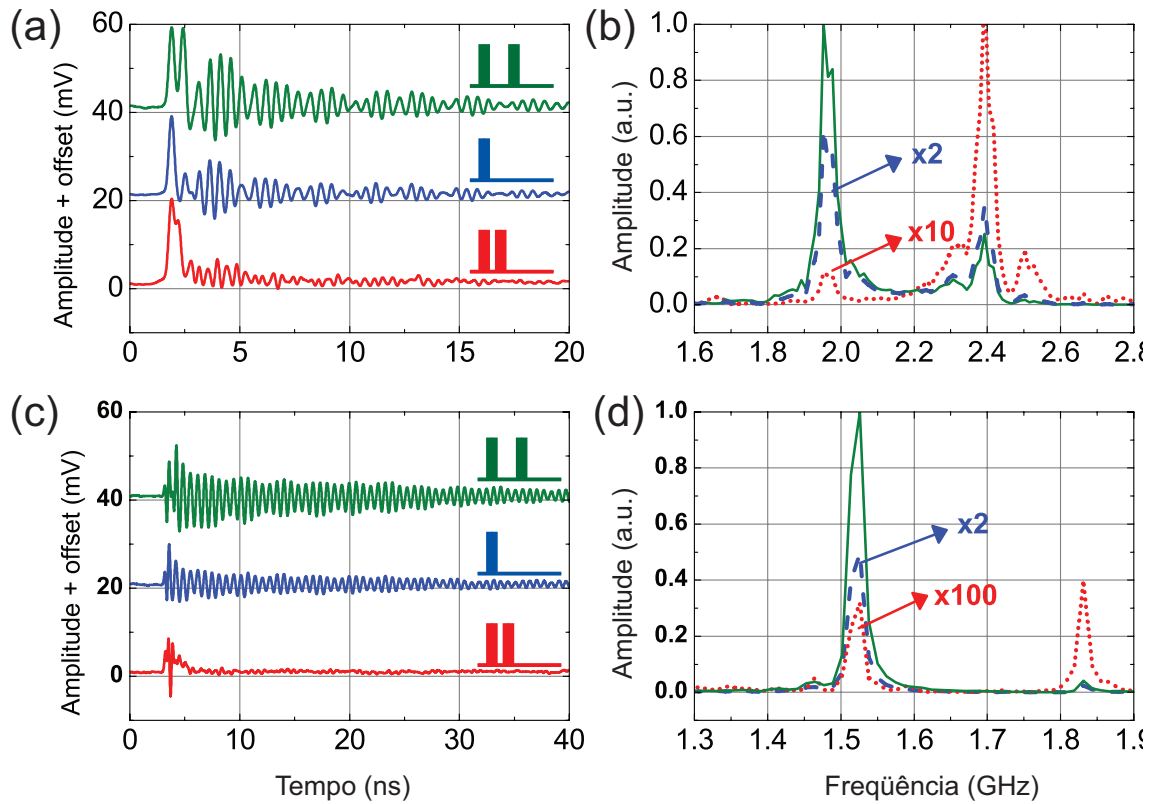


Fig. 7.6: Controle coerente de modos acústicos; a linha superior está relacionada à PCF #1 e a inferior à PCF #2. a) Resposta temporal detectada no laser de prova quando um único pulso excita a fibra (curva azul), dois pulsos separados por 260 ps (curva vermelha) e dois pulsos separados por 512 ps (curva verde). c) O mesmo que na figura a) porém a fibra utilizada foi a PCF # 2 e a separação entre os pulsos foi de 329 ps na curva vermelha e 658 ps na curva verde. b,d) Espectro de potência obtido por transformada de Fourier correspondendo às formas temporais mostradas em a e b, respectivamente. As setas acompanhadas de números indicam o fator multiplicativo usado nas curvas para propósitos de visualização. O pico inicial em todas as formas temporais são devidos a resposta eletrônica (efeito Kerr) e foram excluídas dos dados antes de calcular a FFT.

Para explorar esta excitação coerente, foi gerado um trem de pulsos no laser de bombeio cuja separação temporal entre cada pulso era igual período de oscilação das ressonâncias principais: 510 ps para PCF#1 e 658 ps para PCF#2. Na figura 7.7a&b são comparadas as respostas temporais das PCF#1 e #2, excitadas por um único pulso (curvas vermelhas) e por uma sequência de 27 pulsos (curvas pretas). Para mostrar a seletividade espectral tangível com esta técnica, é mostrado na figura 7.7c o espectro de potência para a resposta da PCF#1 nas duas condições de excitação. Pode-se notar que existe um aumento de 100× na energia vibracional do modo principal em 1.96 GHz quando excitado por múltiplos pulsos.

Para explorar como a amplitude de oscilação cresce com o número de pulsos no laser de bombeio, é mostrado na figura 7.7d a potência espectral dos modos principais, das PCF#1 e #2, como função do número de pulsos. Os círculos vermelhos e os triângulos em preto representam os dados experimentais para a PCF#1 e #2. Quando o número de pulsos é maior que 20, pode-se notar uma saturação nas curvas, apesar das janelas temporais correspondentes a estes trens de pulsos serem 9.7 ns para PCF#1 e 12.5 ns para a PCF#2. Espera-se que a saturação se inicie quando o número de pulsos for $N_{sat} \approx \tau/T$ (sendo τ o tempo de vida das ressonâncias e T o período do trem de pulsos); para a PCF#1 este número resulta em $N_{sat} = 22$ e para PCF#2 $N_{sat} = 27$. A amplificação esperada da potência acústica de um modo excitado, coerentemente, por um trem de N pulsos (segundo a eq. 7.10) será dada por

$$G_{ideal} = \left(1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1}\right)^2, \quad (7.14)$$

sendo $x = e^{-T/\tau}$. A previsão desta fórmula também é mostrada na Fig. 7.7d para a PCF#1 (linha preta pontilhada) e para a PCF#2 (linha vermelha pontilhada). Na prática, entretanto, a energia de cada pulso de bombeio depende das condições de saturação do EDFA utilizado para amplificar os pulsos de bombeio. O decréscimo da energia de cada pulso do trem de k pulsos que emerge de um amplificador saturado escala, aproximadamente, com $(1 + kS)^{-1}$, sendo S um parâmetro de saturação. Portanto, a amplificação real da energia acústica será dada por

$$G_{real} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{1 + kS}\right)^2. \quad (7.15)$$

A previsão desta fórmula também é mostrada na figura 7.7d, com o parâmetro de saturação de melhor ajuste $S = 0.06$, para a PCF#1 (linha preta sólida) e para PCF#2 (linha vermelha sólida). Pode-se notar que esta previsão está em bom acordo com os resultados experimentais.

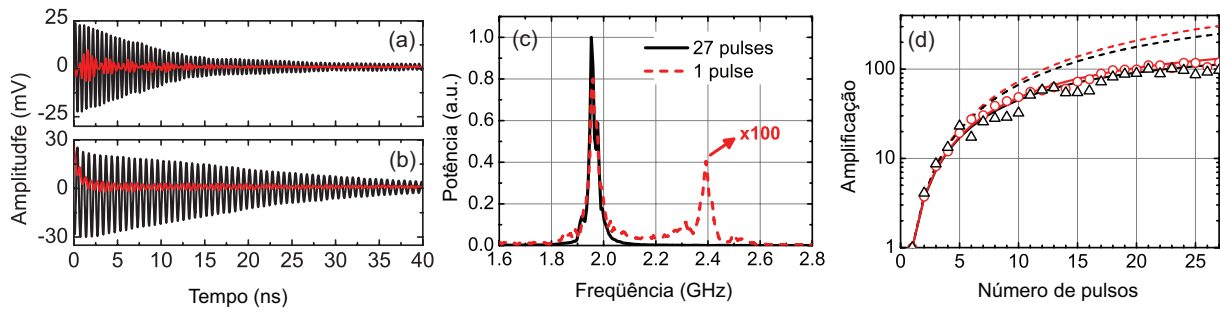


Fig. 7.7: Excitação multi-pulsos de modos acústicos. (a) Resposta temporal da PCF#1 quando excitada por um pulso (curva vermelha) e um trem de 27 pulsos (curva preta). (b) Mesmo que (a) para PCF #2. (c) FFT obtida da resposta da PCF#1 para um pulso (curva pontilhada vermelha) e uma seqüência de 27 pulsos (curva preta sólida); a seta indica o fator multiplicativo utilizada na curva vermelha. (d) Evolução da amplitude da FFT para o modo em 1.96 GHz como função do número de pulsos de bombeio. Os dados pretos e vermelhos representam a PCF#1 e PCF#2, respectivamente. Os pontos representam os dados experimentais, as linhas pontilhadas representam a amplificação ideal (eq. 7.14), e as linhas sólidas representam a amplificação com saturação $S = 0.06$ (eq. 7.15).

7.6.2 Comparação com os resultados teóricos

Para modelar os resultados experimentais observados, foi utilizada a teoria de excitação impulsiva apresentada na seção 7.2.2. Entretanto, os modos ópticos e acústicos utilizados no cálculo da força de eletrostrição (eq. 7.4), no coeficiente de excitação óptica (eq. 7.8) e na modulação do índice de refração (eq. 7.13), são todos calculados numericamente utilizando o método dos elementos finitos apresentados no apêndice H. As integrais sobre estas quantidades são também calculadas numericamente utilizando quadratura de Gauss.

Focalizando a atenção na PCF#1, é mostrado na figura 7.8a o coeficiente de excitação por eletrostrição B_m (eq. 7.8) quando a polarização do laser de bombeio (acoplado na fibra) é linear (círculos azuis) e circular (circunferências vermelhas). Analogamente ao guia cilíndrico (seção 7.4), os modos quase- TR_{2m} da PCF não são excitados quando a polarização é circular, já a excitação dos modos quase- R_{0m} são independentes da polarização do bombeio. Portanto, a figura 7.8a permite identificar o caráter dos modos acústicos⁴: círculos vermelhos e azuis se sobrepostos, indicam modos quase- R_{0m} , apenas círculos azuis indicam modos quase- TR_{2m} . Devido à enorme densidade de modos que não interagem com a luz, ocorre um acúmulo de pontos próximos de $B_m = 0$, portanto são mostrados apenas àqueles cujo o coeficiente de excitação normalizado é maior que 5%. As ressonâncias mais proeminentes nesta figura (indicadas por setas) possuem as frequências de 1.956 GHz (quase- TR_{21}) e 2.318 GHz (quase- R_{01}). O perfil espacial destes modos e as respectivas distribuições espaciais da

⁴Isto é muito útil pois numericamente calcula-se todos os modos acústicos do guia, como uma PCF pode possuir milhares de modos acústicos, é interessante dispor-se de critérios de identificação que permitam separar, dentre todos os modos, àqueles que se assemelham aos simples modos do cilindro.

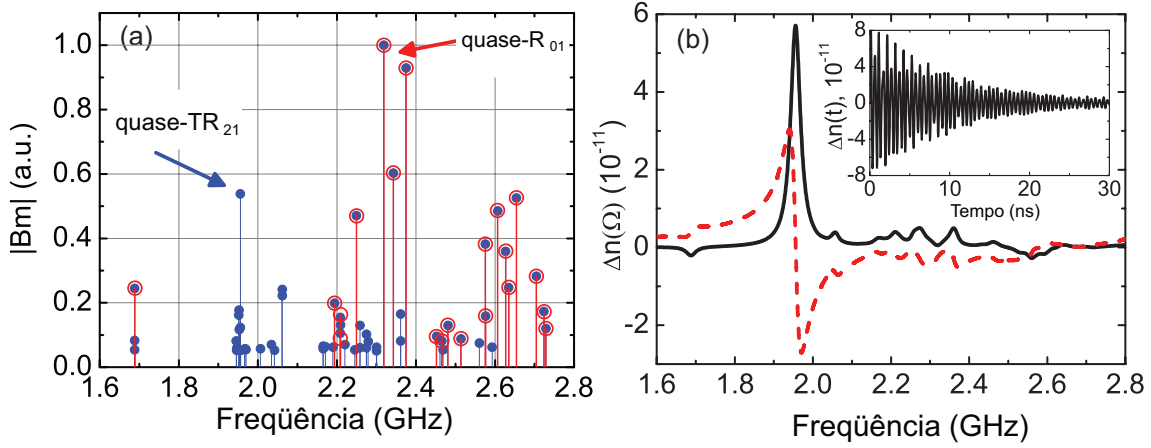


Fig. 7.8: Excitação por eletrostrição (eq. 7.8) e modulação de índice de refração (eq. 7.13) calculadas numericamente para a PCF#1. (a) Excitação com bombeio linearmente polarizado (curva azul) e circularmente polarizado (curva vermelha); as setas indicam os modos com maior eficiência de excitação, mostrados na Fig. 7.9. (b) Partes real (curva pontilhada vermelha) e imaginária (curva sólida preta) da transformada de Fourier da modulação do índice de refração (eq. 7.13); a inserção mostra a resposta temporal correspondente.

perturbação do tensor dielétrico são mostradas na figura 7.9a&b. Na figura 7.9a é mostrado o modo quase- TR_{21} e na figura 7.9b o modo quase- R_{01} . Apesar das fortes oscilações observadas, a amplitude de vibração destes modos é bem pequena para a excitação de um único pulso com 500 pJ de energia, tipicamente 4 fm. Este pequeno valor deve-se à alta frequência de vibração destes modos (esta amplitude escala de forma inversamente proporcional à frequência).

Na figura 7.8b, é mostrada a dependência espectral da modulação temporal do índice de refração induzida pelos modos acústicos (assume-se $\Gamma_m = 9.1 \times 10^7 s^{-1}$ para todos os modos). A linha vermelha pontilhada e a linha preta sólida, correspondem às partes real e imaginária. A respectiva forma temporal é mostrada na inserção no canto superior direito da figura 7.8b. O espectro da modulação de índice mostra apenas um pico proeminente em torno de 1.956 GHz (modo quase- TR_{21}) com pequenas contribuições perto de 2.32 GHz, em contraste com os coeficientes de excitação mostrados na Fig. 7.8a, na qual diversos modos acústicos contribuem de forma significativa. Isto acontece porque a maioria dos modos excitados ($|B_m|$ grande) não perturbam eficientemente a constante dielétrica ($|\Delta\epsilon_m|$ pequeno). Por outro lado, modos que, teoricamente, não contribuem de forma significativa para a modulação de índice, podem ser observados nos experimentos. Isto acontece, por exemplo, para o modo quase- R_{01} em 2.318 GHz. Em uma PCF perfeitamente simétrica (como a utilizada nas simulações), os modos da família quase- R_{0m} se comportam de forma análoga aos modos de um guia cilíndrico, pois não induzem uma modulação de polarização significativa e, portanto, não acoplam modos ópticos ortogonais. Contudo, em PCFs reais, pequenas distorções da geometria irão alterar a simetria dos modos, permitindo que os mesmos induzam alguma birrefringência, tornando-se detectáveis na

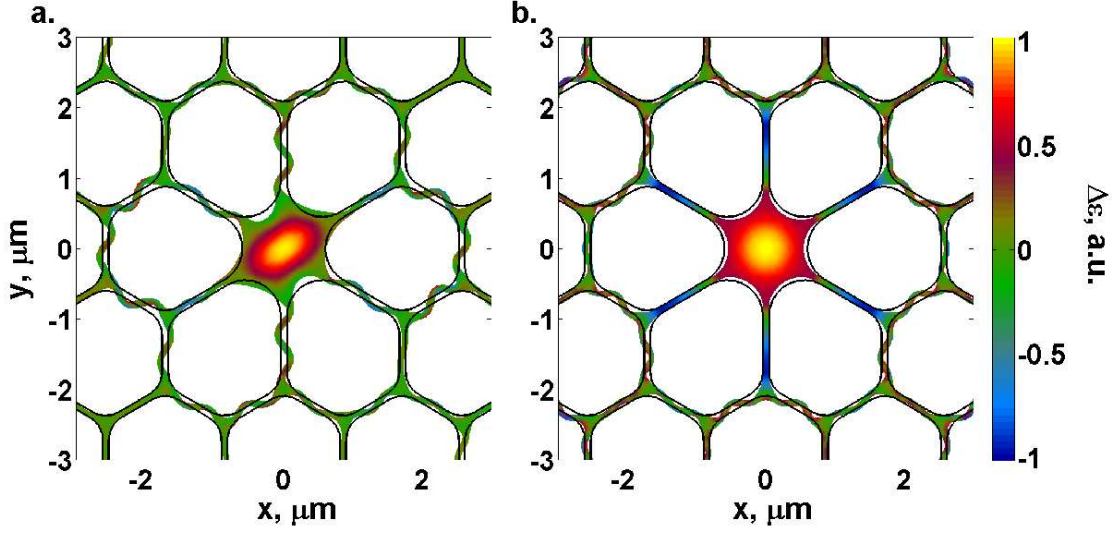


Fig. 7.9: Distribuição espacial da perturbação da constante dielétrica para os modos da PCF#1 destacados na Fig. 7.8. (a) $\Delta\epsilon_{xy}(x, y)$ para o modo quase- TR_{21} em $\Omega = 1.956$ GHz. (b) $\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy}$ para o modo quase- R_{01} em $\Omega = 2.318$ GHz. A linha preta sólida representa os contornos da geometria não-deformada usada para calcular os modos. A parte colorida, segundo a escala à direita, é deformada de acordo com a vetor deslocamento de cada modo, indicando o movimento da fibra para estes modos.

montagem experimental utilizada. De fato, o modo quase- R_{01} identificado na figura 7.8a oscila em 2.318 GHz, valor próximo das oscilações secundárias observadas experimentalmente (2.39 GHz).

7.7 Conclusões

Em suma, foi demonstrado que modos acústicos que oscilam na faixa de frequências de GHz confinados no núcleo de PCFs altamente não-lineares, podem ser excitados impulsivamente utilizando pulsos ópticos de curta duração.

- A resposta acústica quase-senoidal observada utilizando um laser de prova mostra que poucos modos participam da interação acusto-óptica.
- Utilizando uma sequência de pulsos ópticos foi demonstrado que estes modos podem ser controlados coerentemente, possibilitando a amplificação da vibração ou sua interrupção. Em particular, utilizando uma sequência de vários pulsos, a energia de vibração de um modo alvo foi amplificada por um fator 100.

O controle coerente destas vibrações de alta frequência podem ter aplicações na realização de mode-locking de lasers à fibra, na viabilização de ressonadores acústicos bombeados opticamente ou na

obtenção de dispositivos acusto-ópticos mais eficientes. A combinação da excitação coerente mostrada neste capítulo com modos acústicos compactamente confinados, como mostrado no capítulo 6, abre possibilidade para alcançar o regime de não-linearidades acústicas em frequências de vários GHz: um campo de pesquisa ainda inexplorado.

Capítulo 8

Espalhamento Brillouin estimulado

8.1 Introdução

Como foi mostrado nos capítulos 2 e 3, as fibras de cristal fotônico apresentam uma série de características que as tornaram verdadeiros laboratórios para o estudo de interações não-lineares. Em fibras ópticas convencionais, o efeito não-linear que impõe o limite último na transmissão de potência é o espalhamento Brillouin estimulado. Neste capítulo será explorado o espalhamento Brillouin estimulado em um conjunto de PCFs com núcleos de diversos diâmetros (veja Fig. 8.2a), em particular, será mostrado que, quando o diâmetro da fibra é, aproximadamente, 70% do comprimento de onda da luz no vácuo, o espectro de espalhamento espontâneo revela diversos picos, não usuais, na faixa de frequência de 10 GHz. Estes picos são atribuídos à diversos modos acústicos, com diferentes proporções de tensão de compressão e cisalhamento, confinados no núcleo das PCFs. Paralelamente a estes novos picos, a potência de limiar para o espalhamento Brillouin estimulado (SBS) aumenta por um fator 5.¹

8.2 Montagem experimental

A caracterização do espectro de espalhamento Brillouin é feita utilizando uma montagem similar às aquelas apresentadas no capítulo 6. O diagrama experimental é ilustrado na Fig. 8.1 Um laser de cavidade externa, sintonizado em $\lambda = 1550$ nm (~ 150 kHz de largura de linha), é acoplado em diferentes PCFs utilizando objetivas de microscópio. O laser de bombeio passa por um sistema de modulação no qual pode, ou não, ser modulado em amplitude. A potência acoplada nas fibras é cuidadosamente caracterizada utilizando uma técnica de *cut-back*. A polarização de entrada na fibra

¹Os resultados deste capítulo foram publicados em "Stimulated Brillouin scattering from multi-GHz-guided acoustic phonons in nanostructured photonic crystal fibres," *Nature Physics* **2**, 388-392 (2006).

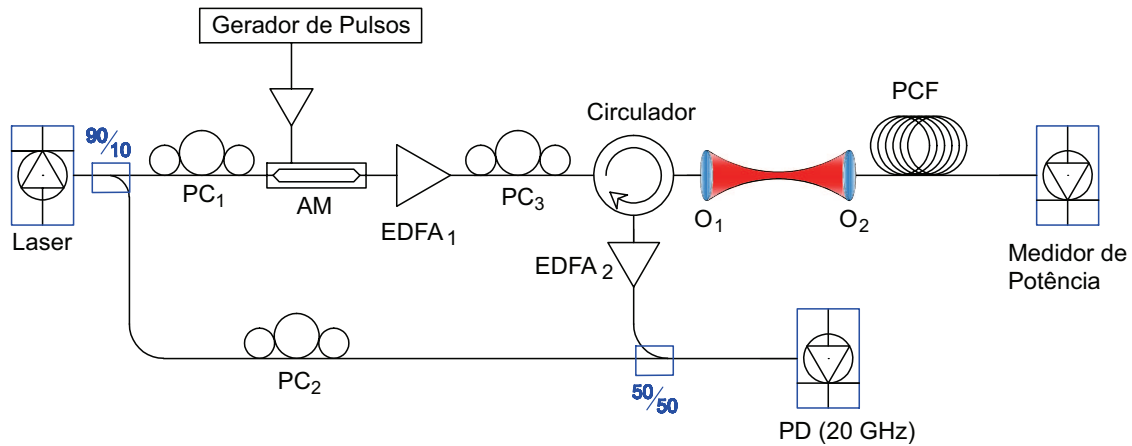


Fig. 8.1: Diagrama da montagem experimental para medida do espalhamento Brillouin estimulado. $PC_{1,2,3}$: controladores de polarização, $O_{1,2}$: objetivas de microscópio, $EDFA_{1,2}$: amplificadores a fibra dopada com Érbio. PD: fotodiodo.

é controlada inserindo um polarímetro entre as objetivas O_1 e O_2 . A luz retro-espalhada na fibra é coletada utilizando um circulador óptico, inserido antes da fibra PCF, e amplificada utilizando um EDFA de baixo ruído. Uma pequena fração da potência do laser é retirada e acoplada com o sinal retro-espalhado para gerar um sinal de batimento (*heterodyne detection*) que é detectado por um fotodiodo rápido (20 GHz). O sinal do fotodiodo é amplificado com um pré-amplificador de RF e analisado com um analisador de espectro de RF com resolução de 1 MHz.

A potência de limiar de Brillouin é definida como o ponto no qual a potência transmitida pela fibra, detectada pelo medidor de potências, começa a saturar. Nestas medidas, um EDFA de 2 W foi utilizado para amplificar o laser e o sistema de modulação foi desligado. Nas medidas mostradas na Fig. 8.3b, para se atingir potências mais altas, o laser de bombeio foi pulsado com pulsos largos (~ 500 ns) e baixa taxa de repetição (~ 10 μ s). No que diz respeito à dinâmica temporal do espalhamento Brillouin, estes pulsos podem ser considerados quase-contínuos.

8.3 Resultados

8.3.1 SBS em bulk e fibras convencionais

Como foi mostrado nos capítulos anteriores, o confinamento da luz e de ondas acústicas, na mesma região espacial, promove a intensificação da interação acusto-ótica [13, 114, 115, 116]. Um dos efeitos que resultam desta interação é o espalhamento Brillouin estimulado. Como foi discutido na seção 5.5, modos acústicos propagando na direção longitudinal formam uma grade de Bragg longitudinal (modulação periódica no índice de refração) que induz o retro-espalhamento da luz incidente.

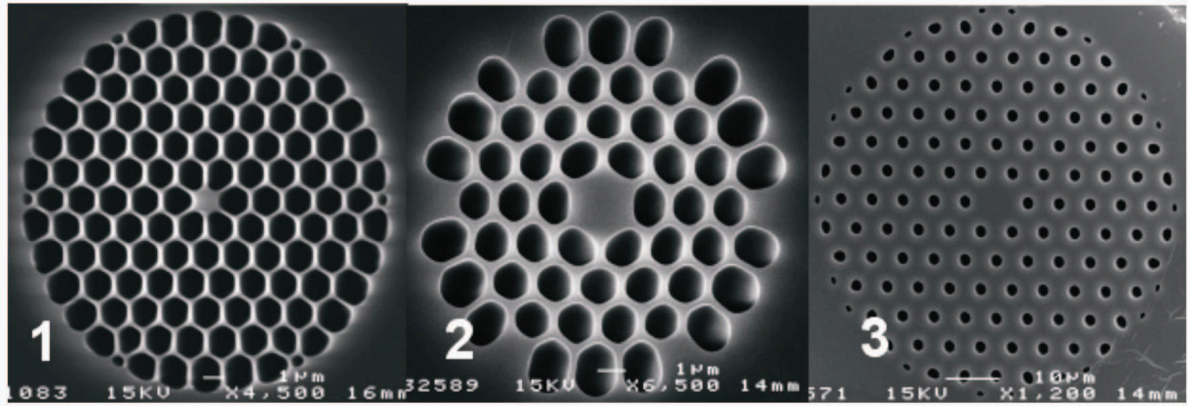
Esta grade de Bragg propaga-se com velocidade longitudinal igual a das ondas acústicas. Devido ao efeito Doppler, a frequência da luz por esta grade é deslocada; o deslocamento de frequência é igual à frequência do modo acústico associado à grade (conservação de energia).

Em fibras convencionais, o núcleo óptico formado por dopagem da sílica com germânio é rodeado por uma casca de sílica fundida. Portanto, o contraste entre as propriedades mecânicas do núcleo e da casca é muito pequeno. Portanto, a reflexão das ondas acústicas nesta interface é muito fraca. Sobretudo, o acoplamento entre as ondas de cisalhamento e de compressão na interface entre o núcleo e casca também é muito fraco. Portanto, o retro-espalhamento Brillouin é dominado por modos quase compressionais, nas quais a componente u_z do vetor deslocamento é o único responsável pela tensão. Como resultado, em fibras convencionais o espectro de espalhamento Brillouin é quase idêntico ao caso *bulk*, exibindo um único pico de espalhamento que corresponde a uma onda de compressão viajando ao longo da direção $\hat{z}$.

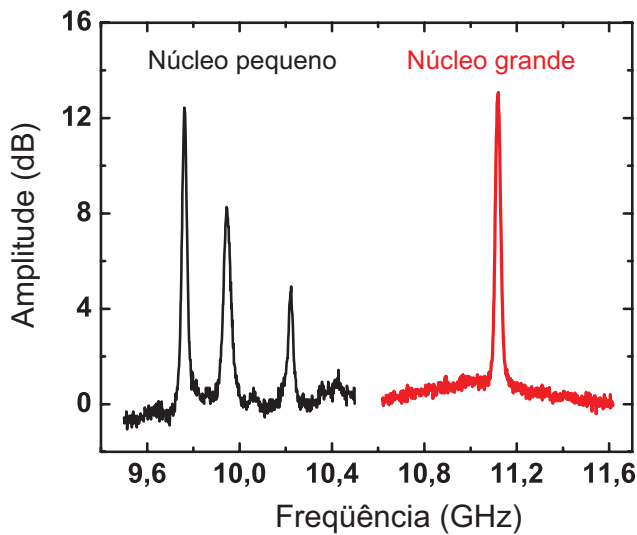
8.3.2 SBS em PCFs

Algumas PCFs (altamente não-lineares) possuem alta fração de ar na casca e núcleos da ordem de $\sim 1 \mu\text{m}$ (veja a PCF#1 na Fig. 8.2a). O contraste de propriedades mecânicas, entre o núcleo e a casca periódica, acopla as ondas longitudinais e de cisalhamento. Os modos acústicos resultantes, conseqüentemente, apresentam quantidades comparáveis de tensão de cisalhamento e de compressão. Como foi mostrado na figura 5.5, as relações de dispersão dos modos acústicos têm um caráter híbrido com curvas de dispersão bastante distorcidas em razão do contraste entre as velocidades longitudinal e de cisalhamento ($V_l = 5970 \text{ m/s}$ e $V_s = 3764 \text{ m/s}$ na sílica). A separação espectral entre dois modos que satisfazem a condição de *phase-matching* ($\beta_{ac} = 2\beta_{opt}$) é considerável e, portanto, cada modo aparece com uma frequência bem característica. Na figura 8.2b são mostrados os espectros de retro-espalhamento espontâneo medidos nas PCFs #1 e #3 da Fig. 8.2a. A PCF#3, com núcleo maior (diâmetro $9.27 \mu\text{m}$) e menor fração de ar na casca, apresenta apenas um pico de retro-espalhamento, em 11.12 GHz . Em contraste, a PCF #1, com núcleo de $1.22 \mu\text{m}$, apresenta uma família de picos distintos em 9.76 , 9.95 e 10.22 GHz , cada um relacionado a um diferente modo acústico.

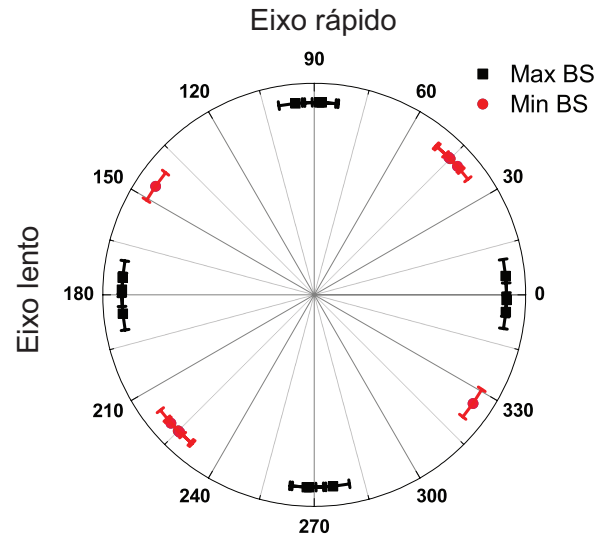
Na PCF #1, o espalhamento mostrou forte dependência com o estado de polarização da luz — uma conseqüência da anisotropia geométrica do núcleo [117]. O valor da birrefringência óptica desta fibra, resolvida no tempo com pulsos de 100 ps , foi de $\Delta n = 4 \times 10^{-4}$. Variando o estado de polarização do bombeio, foi possível explorar a birrefringência do espectro de Brillouin (Fig. 8.2c). Quando o laser era polarizado paralelamente a um dos eixos de polarização da fibra, o coeficiente de ganho Brillouin era duas vezes maior do que quando o bombeio era alinhado a 45° em relação aos eixos principais, em concordância com os resultados de Stolen [117]. Usando o valor medido da birrefringência, pode-se estimar a diferença esperada na frequência de espalhamento Brillouin utilizando a condição de *phase-*



(a) Imagens SEM de algumas das fibras investigadas com diâmetros: (#1) 1.22 μm , (#2) 2.36 μm e (#3) 9.27 μm



(b) Espectro espontâneo de retro-espalhamento Brillouin para as fibras (1) e (3) mostradas na parte (a). A fibra com núcleo grande mostra um único pico próximo de 11.12 GHz com largura (FWHM) de 31 MHz. Na fibra de núcleo pequeno, em contraste, exibe três picos em 9.76, 9.95 and 10.22 GHz com larguras FWHM de 24, 38 e 25 MHz, respectivamente, para um comprimento de 84 metros. Um pedaço pequeno (2 m), da fibra (1) mostra os mesmos três picos, porém, com larguras: 19, 25 e 17 MHz. Esta diferença surge de flutuações da estrutura ao longo do comprimento.



(c) Caracterização da dependência dos espalhamento Brillouin com o estado de polarização do laser na PCF#1. A potência espalhada é maximizada quando a luz é alinhada um dos eixos principais de polarização (rápido ou lento) e minimizada quando a luz é alinhada à 45° em relação aos eixos principais.

Fig. 8.2: Aspectos gerais do espalhamento Brillouin em PCFs.

matching, $\beta_{ac} = 2\beta_{opt}$: o resultado é $\Delta\Omega = \frac{2V_s}{\lambda}\Delta n = 3.1$ MHz, com $\lambda = 1.55$ μm , em boa concordância com o valor observado experimentalmente.

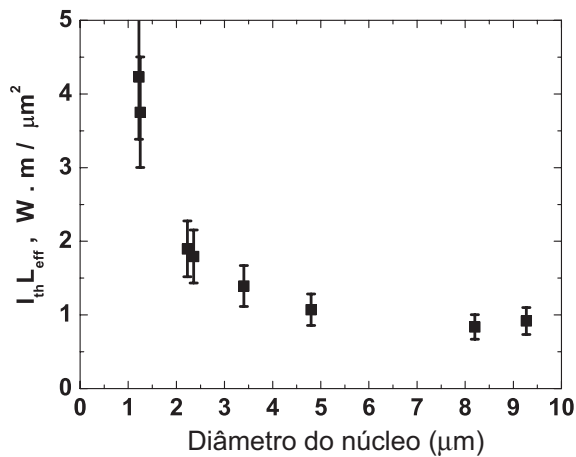
A potência de limiar para o espalhamento Brillouin estimulado, P_{th} , definida como o ponto no qual a potência transmitida pela fibra começa a saturar e, conseqüentemente, o sinal retro-espalhado fica forte, é um importante fator que limita o desempenho de dispositivos não-lineares, como amplificadores paramétricos e conversores de comprimento de onda; estes dispositivos geralmente requerem o uso de lasers de baixa largura de linha e alta potência [118]. O valor de P_{th} depende da área efetiva, A_{eff} , do modo óptico, determinando assim a intensidade óptica de limiar, $I_{th} = P_{th}/A_{eff}$, assim como da atenuação da fibra, α [m^{-1}], que geralmente é levada em consideração através do comprimento efetivo de interação, $L_{eff} = \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha L})$, sendo que L é o comprimento físico da fibra (veja eq. 2.22). Eliminando a dependência óbvia da potência de limiar com o diâmetro do núcleo, a variação da quantidade $I_{th}L_{eff}$ refletirá o efeito do confinamento acústico no SBS. Os valores das quantidades supracitadas são mostrados na tabela 8.1 para todas as fibras medidas. A figura 8.3(a) mostra os valores de $I_{th}L_{eff}$ para todas as fibras investigadas (para as fibras de núcleo pequeno, o limiar foi medido com o laser acoplado em um dos eixos principais de polarização). As áreas efetivas foram calculadas segundo a formula tradicional [119] e apresentaram boa concordância com a abertura numérica medida das fibras². As medidas mostram que o produto $I_{th}L_{eff}$ aumenta quando o diâmetro das fibras diminui, pela suavidade da curva, este parâmetro não aparenta ser sensível aos detalhes da casca periódica. Aproximadamente, ele aumenta de ~ 0.8 W m/ μm^2 , para as fibras com diâmetro maior que 8 μm , para ~ 4.3 W m/ μm^2 para fibras com diâmetro da ordem de ~ 1.2 μm , um aumento de 7.3 dB. Este aumento de 5 vezes é impressionante, comparado com fibras convencionais, nas quais o produto $I_{th}L_{eff}$ é independente do diâmetro do núcleo [14]. Este aumento do limiar pode ser explicado pela complexa distribuição de tensões sobre o núcleo da PCF, com fortes componentes de cisalhamento e componentes de compressão que apresentam nós ao longo do núcleo, como será discutido adiante.

Também foi medida a evolução do espectro de retro-espalhamento para a PCF #1 quando a potência do laser era aumentada, como mostra a Fig. 8.3(b). Para altas potências de bombeio, diversos picos de espalhamento são gerados em novas frequências. A origem deste alargamento não foi investigada em detalhe e a sua causa ainda é incompreendida. No entanto, pode estar relacionada à conversão paramétrica de frequência através da não-linearidade eletrônica (efeito Kerr) ou até mesmo acústica [120].

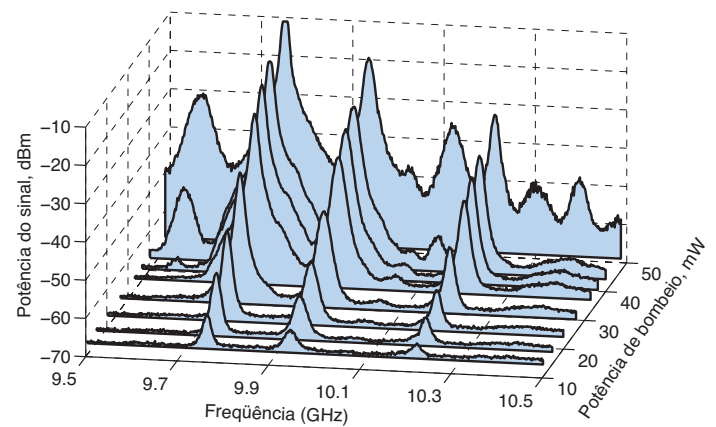
²A área da projeção do modo em um anteparo a uma certa distância da fibra está relacionado com a área do modo na face da fibra. Esta relação é feita com o ângulo de divergência do feixe que está relacionado à abertura numérica

Diâmetro do núcleo (μm)	1.22	1.25	2.23	2.36	3.4	4.8	8.2	9.27
$A_{eff}/\pi a^2$	1.2	1.15	0.76	0.8	2.33	0.92	1.61	0.76
α (dB/km)	33	30	17	6	0.2	4.3	0.2	5.8
L (km)	0.11	0.13	0.1	0.075	0.43	0.207	0.25	0.245
L_{eff} (km)	0.076	0.086	0.083	0.071	0.426	0.187	14.8	0.209
P_{th} (mW)	79.4	61.7	67.6	88.1	69.2	95.5	4.8	224
$I_{th}L_{eff}$ (W m/ μm^2)	4.25	3.76	1.90	1.79	1.39	1.07	0.84	0.91

Tab. 8.1: Parâmetros e medidas das fibras investigadas.



(a) Limiar de intensidade para o SBS em PCFs com núcleos de diferentes diâmetros. Os pontos quadrados representam os dados experimentais (veja tabela 8.1), as barras de erro foram estimadas em 20% em razão da incerteza envolvida no método de *cut-back* para se medir as potências de entrada.



(b) Evolução do espectro de retro-espalhamento como função da potência de bombeio para a PCF #1.

Fig. 8.3: Medidas e limiar de intensidade e evolução do espectro com a potência do laser.

8.4 Teoria

8.4.1 Modelo do guia cilíndrico

Nos capítulos 2 e 3, foi mostrado que os modos de fibras PCF com núcleo pequeno (com alta fração de ar na casca) podem ser razoavelmente aproximados pelos modos de um cilíndrico vidro sustentado no ar. No capítulo 7, também foi identificadas as características comuns dos modos acústicos (com $\beta_{ac} = 0$) de um cilindro de vidro e de PCFs altamente não-lineares. Não é surpreendente que os modos acústicos em torno de 10 GHz que provocam o retro-espalhamento da luz (com $\beta_{ac} = 2\beta_{opt}$) possam ser descritos, de forma semi-quantitativa, pelos modos de uma barra cilíndrica sustentada no ar. A redução da frequência de espalhamento observada quando o diâmetro do núcleo é reduzido (veja Fig. 8.2b) pode ser explicada pelo forte contraste de propriedades mecânicas entre o vidro e o ar. Assumindo que os modos óptico e acústico estão perfeitamente confinados dentro do cilindro de vidro³ de raio a , o vetor de onda transversal, óptico e acústico, são dados, aproximadamente, por

$$k_t a = z_{01} \quad (8.1)$$

sendo que $z_{01} = 2.405$ é o primeiro zero da função de Bessel J_0 . Usando as relações 5.12 para a constante de propagação óptica e acústica, obtém-se

$$\beta_{opt} = \sqrt{\left(\frac{\omega_p n}{c}\right)^2 - k_t^2}, \quad (8.2a)$$

$$\beta_{ac} = \sqrt{\left(\frac{\Omega}{V_l}\right)^2 - k_t^2}, \quad (8.2b)$$

sendo que ω_p é a frequência do laser, $n = 1.444$ é o índice de refração da sílica (em $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$), c é a velocidade da luz no vácuo e V_l a velocidade acústica longitudinal. Substituindo as eqs. 8.2 na condição de *phase-matching* para o retro-espalhamento, obtém-se a seguinte expressão para a frequência acústica,

$$\Omega = V_l \sqrt{\left(\frac{2\omega_p n}{c}\right)^2 - 3\left(\frac{z_{01}}{a}\right)^2} \quad (8.3)$$

Esta simples equação prevê frequências de 9.04 e 11.09 GHz para as fibras de núcleo pequeno ($a = 1.22/2 \mu\text{m}$) e grande ($a = 9.27/2 \mu\text{m}$) — excelente concordância dada a simplicidade do modelo.

A perturbação do índice de refração, induzida por uma deformação qualquer, pode ser calculada usando a teoria de perturbação da seção F.2.4. Para PCFs de núcleo grande, os modos longitudinais

³Rigorosamente, esta condição de contorno só é válida para o modo acústico de um cilindro, o modo óptico sempre penetra a região de ar.

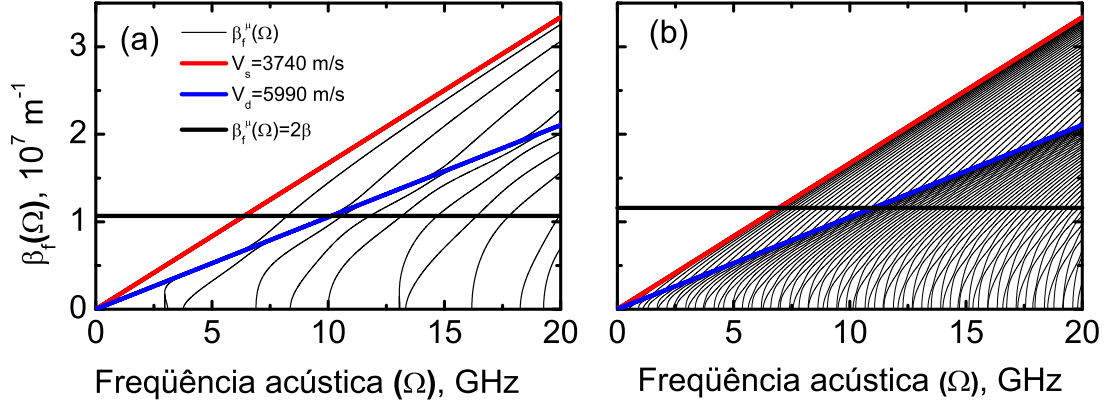


Fig. 8.4: Relações de dispersão para os modos do guia cilíndrica da família axial-radial, as linhas em azul e vermelho representa as velocidades longitudinal e de cisalhamento. (a) Cilindro com diâmetro de 1.22 μm . (b) Diâmetro de 9.27 μm

dominam o espectro de espalhamento e inúmeros modos, todos com dispersão bastante similar, se aglutinam densamente em torno de uma frequência (Fig. 8.4b). Como resultado, um único pico de espalhamento aparece no espectro. Por outro lado, em PCFs com núcleo pequeno, dois efeitos se sobrepõem: primeiro, os modos acústicos que participam do processo de espalhamento são muito mais esparsos na frequência, com curvas de dispersão bastante distintas (Fig. 8.4a). Segundo, a inclinação intermediária destas curvas ($V_s < \partial_{\beta_{ac}} \omega < V_l$) refletem o caráter misto dos modos, que possuem porções razoáveis de componentes de cisalhamento. O resultado desta combinação é um espectro de espalhamento com vários picos esparsamente distribuídos. Na Fig. 8.5, é mostrado o resultado do cálculo explícito do coeficiente de acoplamento, entre o modo óptico incidente e retro-espalhado, para todos os modos acústicos da família axial-radial, como função do diâmetro da barra cilíndrica⁴. O surgimento de múltiplos picos, na região de 10 GHz, para fibras de núcleo pequeno é claro nesta figura, em concordância com os três picos observados para a PCF #1; o deslocamento das frequências de espalhamento para o vermelho também é verificada, em acordo com a equação 8.3.

8.4.2 Simulações numéricas com o FEM

Apesar do modelo simples do guia cilíndrica reproduzir as características básicas do retro espalhamento Brillouin, uma descrição completa requer o uso dos modos acústicos da estrutura da fibra. Este cálculo requer o uso do FEM. Os modos acústicos e ópticos da estrutura da fibra foram resolvidos e o coeficiente de acoplamento foi calculado. O espectro de espalhamento espontâneo, calculado

⁴O cálculo desta figura, apesar de ser baseado nas soluções analíticas dos modos ópticos e acústicos, levou o equivalente a centenas de horas em um computador Pentium IV, 3.0 GHz (cerca de 24 horas usando 10 computadores paralelamente). A razão desta demora é grande quantidade de integrais numéricas que são resolvidas.

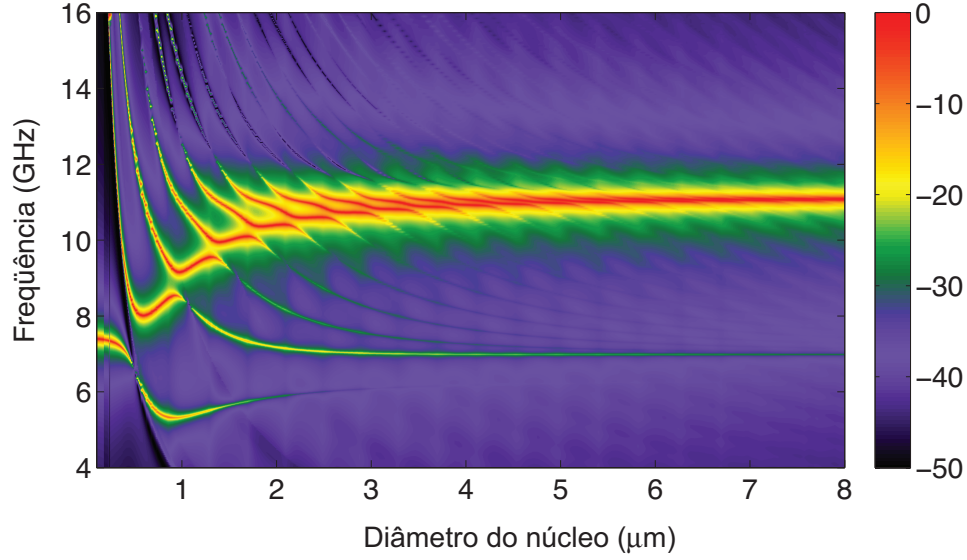


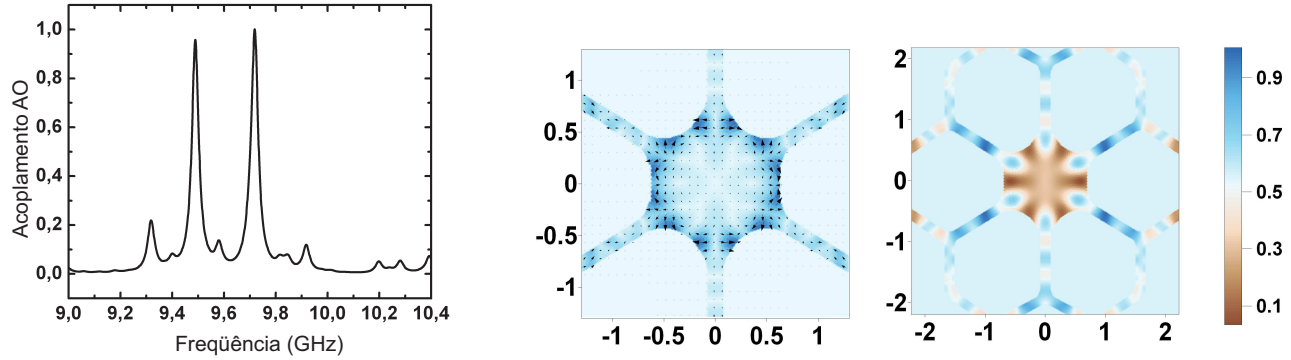
Fig. 8.5: Evolução do espectro de retro-espalhamento Brillouin como função do diâmetro do cilindro de vidro. Pode-se notar nesta figura o aparecimento de vários picos na espectro quando o diâmetro é reduzido. O espectro foi calculado através do coeficiente de acoplamento acusto-óptico (eq. 6.11). A escala vertical está em decibéis.

segundo a eq. 6.11 para a PCF #1 é mostrado na Fig. 8.6a e permite identificar quais modos acústicos participam do processo de espalhamento. Na Fig. 8.6a os três picos que aparecem possuem frequências de, aproximadamente, 9.3, 9.5 e 9.7 GHz. Estes valores concordam com os picos observados experimentalmente (Fig. 8.2b) com uma precisão de 4%. Considerando as incertezas na dimensão da fibra e a geometria de um único anel utilizada a concordância é ótima. Os nós no interior do núcleo (responsáveis pelo aumento do limiar de SBS) e a simetria angular (igual a da estrutura) pode ser claramente notada na Fig. 8.6. Para quantificar o aumento do limiar de SBS, um parâmetro útil é a área efetiva do conjunto modo óptico e acústico [121],

$$A_{ao} = \left[\frac{\int E^2 dA}{\int u_z^2 E^2} \right]^2 \int u_z^2 dA \quad (8.4)$$

O cálculo desta quantidade, para o modo mostrado na Fig. 8.6b, resulta no valor $A_{ao} = 6.1 \mu\text{m}^2$, enquanto a área efetiva do modo óptico é $A_{eff} = 1.4 \mu\text{m}^2$. O aumento do limiar pode ser estimado, aproximadamente, pela razão entre estas duas quantidades [121],

$$\Delta P_{th} = 10 \log_{10} \left(\frac{6.4}{1.4} \right) = 6.4 \text{ dB} \quad (8.5)$$



(a) Coeficiente de acoplamento acusto-óptico para o retro-espalhamento Brillouin para a PCF#1, normalizado pelo pico mais alto.

(b) Componente transversal ($\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, à esquerda) e longitudinal (u_z , à direita) do vetor deslocamento acústico. Os dois gráficos foram normalizados independentemente, a amplitude máxima da componente transversal é 87% da componente longitudinal.

Fig. 8.6: Modos acústicos da PCF #1.

em boa concordância com o valor experimental de 7.3 dB. Outro fator que influencia o limiar é a competição entre os diferentes picos de espalhamento que, efetivamente, aumentam a largura de banda total do espectro de Brillouin.

8.5 Conclusões

Em suma, a dimensão quase nanométrica do núcleo de PCFs altamente não-lineares, associada a sua casca micro-estruturada, provoca uma mudança substancial nas relações de dispersão acústica. Isto afeta as características do retro-espalhamento Brillouin, como resultado, as fibras de núcleo pequeno apresentam diversos picos esparsamente distribuídos; outra consequência é o aumento do limiar de SBS por um fator 5, comparado à fibras convencionais. A possibilidade de confinar e controlar o overlap entre modos acústicos e ópticos no regime de retro-espalhamento pode ser importante no desenvolvimento de dispositivos livres deste efeito.

Capítulo 9

Conclusão geral

A propagação da luz e de ondas acústicas em guias de onda vem sendo estudados desde meados do século XX. O que manteve o estudo destes problemas em voga, foi o desenvolvimento da capacidade humana de fabricar, de forma controlada, estruturas em escalas progressivamente menores. Nesta tese foram escolhidas as fibras ópticas de cristal fotônico para explorar conceitos antigos em estruturas novas. O que valoriza este trabalho, em relação aos estudos anteriores, é algo que já tinha sido percebido, em 1638, por Galileo Galilei. Em uma publicação intitulada "*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*", o filósofo Toscano notou que objetos menores na natureza não são apenas réplicas menores de objetos maiores (veja Fig. 9.1). Ele percebeu este fato comparando ossos de animais grandes com ossos de animais pequenos: o peso do osso é proporcional ao seu volume (L^3), enquanto a robustez do osso é proporcional a sua seção transversal (L^2). Isto o convenceu de que em um animal maior, seu osso deve expandir mais na direção transversal (para resistir o peso do animal) do que na direção longitudinal. Isto explicaria porque um animal gigante não pode ter as mesmas proporções que sua versão miniaturizada¹.

Foi demonstrada nesta tese que diversos aspectos da propagação da luz são únicos nestas nano-estruturas, por exemplo, a intensidade óptica no interior do núcleo das PCFs, discutidas no capítulo 3, foi a maior jamais demonstrada em uma fibra óptica. As ondas acústicas também se comportam singularmente em estruturas tão pequenas, consequência da semelhança entre o comprimento de onda acústico e a dimensão típica das estruturas. A interação acusto-óptica não fugiu a esta regra, o confinamento simultâneo de ondas acústicas e eletromagnéticas possibilitou a demonstração do controle coerente de modos acústicos, no qual conseguimos excitar e frear as vibrações acústicas do meio. Outro aspecto intrigante foi também demonstrado ao verificar a redução da interação acusto-óptica em fibras altamente não-lineares, em contraste com a intuição obtida de fibras convencionais. Novamente, não vale uma simples lei de escala! Quase todos os tópicos investigados nesta tese exploraram

¹<http://www.its.caltech.edu/~tal>

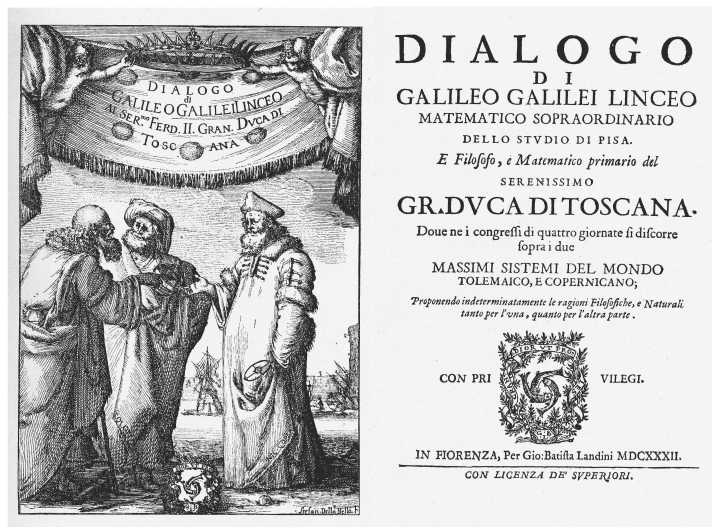


Fig. 9.1: Capa do livro "*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*" de Galileo Galilei.

tanto experimentos quanto métodos numéricos e analíticos. Esta combinação permitiu a compreensão de quase todos os efeitos inéditos que foram observados nestes quatro anos de doutoramento, ressaltando a importância destas ferramentas.

Como possibilidades para o futuro, acredita-se na exploração dos efeitos demonstrados nesta tese para concepção de novos dispositivos baseados em fibras ópticas ou até mesmo a exploração de novos regimes para efeitos físicos antigos. Abaixo são citadas algumas possibilidades:

- Utilizar a dispersão controlada da fibra com buraco central demonstrada no capítulo 3 para gerar múltiplos harmônicos Raman em gases. Quando gerados de forma correta, estes harmônicos podem formar a base de um sistema de compressão de pulsos (possivelmente integrado com a fibra) que resulte em pulsos ópticos de atosegundos (10^{-18} s).
- Utilizar os métodos numéricos e analíticos descritos nos capítulos 5 e 6 para projetar fibras com interação acusto-óptica suprimida. Uma dica seria explorar simultaneamente o projeto da casca com "band-gaps" fonônicos com o núcleo com buraco central (veja o cap. 6). Resultados nesta direção poderiam ter grande impacto nos experimentos de óptica quântica em fibras ópticas. Nestes experimentos o espalhamento Brillouin co-propagante é uma fonte de ruído implacável.
- A excitação coerente de modos acústicos pode ser estendida para regimes de mais alta energia por pulso. Ou aumentar o tempo de vidas dos modos mecânico através de estruturas de casca que possuam bandas proibidas. Esta técnica pode ser utilizada para amplificar sinais de radio-frequência em fibras (*RF photonics*)
- Os estudos apresentados no capítulo 8 poderiam ser desenvolvidos para projetar fibras com

alto limiar de SBS. Tais fibras poderiam ser utilizadas para realizar amplificação paramétrica com mais alta potência (maior ganho e banda de amplificação). Outra aplicação seria explorar conjugação de fase através de SBS nestas fibras.

Certamente existem outros desdobramentos que poderiam decorrer dos trabalhos apresentados nesta dissertação. É deixado para o leitor descobrir quando e como estes tópicos podem ser desenvolvidos. Espero ter conseguido, apesar das inúmeras equações, ter transmitido o panorama geral da física explorada neste doutoramento.

Referências Bibliográficas

- [1] V. R. Almeida, Q. F. Xu, C. A. Barrios, and M. Lipson. Guiding and confining light in void nanostructure. *Optics Letters*, 29(11):1209–1211, 2004.
- [2] Neil W. Ashcroft and N. David. *Solid State Physics*. Saunders College, 1987.
- [3] C. V. Raman and K. S. Krishnan. A new type of secondary radiation. *Nature*, 121:501–502, 1928.
- [4] C. V. Raman. A new radiation. *Indian Journal of Physics*, 1:387–398, 1928.
- [5] Leon Brillouin. Diffusion of light and x-rays by a transparent homogeneous body. the influence of thermal agitation. *Ann. Phys*, 17:88–122, 1922.
- [6] R. Y. Chiao, C. H. Townes, and B. P. Stoicheff. Stimulated brillouin scattering and coherent generation of intense hypersonic waves. *Physical Review Letters*, 12(21):592–595, 1964.
- [7] G. Eckhardt, S. E. Schwarz, F. J. McClung, R. W. Hellwarth, E. J. Woodbury, and D. Weiner. Stimulated raman scattering from organic liquids. *Physical Review Letters*, 9(11):455, 1962.
- [8] Y. R. Shen and N. Bloembergen. Theory of stimulated brillouin and raman scattering. *Phys. Rev*, 137:1787–1805, 1965.
- [9] R. Stolen and J. Bjorkholm. Parametric amplification and frequency conversion in optical fibers. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 18(7):1062–1072, 1982.
- [10] R. H. Stolen, C. Lee, and R. K. Jain. Development of the stimulated raman spectrum in single-mode silica fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1(4):652, 1984.
- [11] M. N. Islam, L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. R. Simpson, and H. T. Shang. Cross-phase modulation in optical fibers. *Optics Letters*, 12(8):625–627, 1987.

- [12] K. Smith and L. F. Mollenauer. Experimental observation of soliton interaction over long fiber paths: discovery of a long-range interaction. *Optics Letters*, 14(22):1284 <http://olosaorg/abstractcfm?URI=ol-14-22-1284>, 1989.
- [13] E. P. Ippen and R. H. Stolen. Stimulated brillouin scattering in optical fibers. *Applied Physics Letters*, 21:539, 1972.
- [14] R. G. Smith. Optical power handling capacity of low loss optical fibers as determined by stimulated raman and brillouin scattering. *Applied Optics*, 11(11):2489–2494, 1972.
- [15] J. C. Knight, T. A. Birks, P. St J. Russell, and D. M. Atkin. All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. *Optics Letters*, 21(19):1547–1549, 1996.
- [16] T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St J. Russell. Endlessly single-mode photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 22(13):961–963, 1997.
- [17] J. C. Knight, J. Broeng, T. A. Birks, and P. St J. Russell. Photonic band cap guidance in optical fibers. *Science*, 282(5393):1476–1478, 1998.
- [18] R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P. St J. Russell, P. J. Roberts, and D. C. Allan. Single-mode photonic band gap guidance of light in air. *Science*, 285(5433):1537–1539, 1999.
- [19] J. K. Ranka, R. S. Windeler, and A. J. Stentz. Visible continuum generation in air-silica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800 nm. *Optics Letters*, 25(1):25–27, 2000.
- [20] R. Holzwarth, T. Udem, T. W. Haensch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St J. Russell. Optical frequency synthesizer for precision spectroscopy. *Physical Review Letters*, 85(11):2264–2267, 2000.
- [21] P. Dainese, P. S. J. Russell, N. Joly, J. C. Knight, G. S. Wiederhecker, H. L. Fragnito, V. Laude, and A. Khelif. Stimulated brillouin scattering from multi-ghz-guided acoustic phonons in nanostructured photonic crystal fibres. *Nature Physics*, 2(6):388–392, 2006.
- [22] P. Dainese, P. S. J. Russell, G. S. Wiederhecker, N. Joly, H. L. Fragnito, V. Laude, and A. Khe-lif. Raman-like light scattering from acoustic phonons in photonic crystal fiber. *Optics Express*, 14(9):4141–4150, 2006.

- [23] G. S. Wiederhecker, C. M. B. Cordeiro, F. Couny, F. Benabid, S. A. Maier, J. C. Knight, C. H. B. Cruz, and H. L. Fragnito. Field enhancement within an optical fibre with a subwavelength air core. *Nature Photonics*, 1(2):115–118, 2007.
- [24] F. Benabid, J. C. Knight, G. Antonopoulos, and P. St J. Russell. Stimulated raman scattering in hydrogen-filled hollow-core photonic crystal fiber. *Science*, 298(5592):399–402, 2002.
- [25] F. Couny, F. Benabid, and P. S. Light. Large-pitch kagome-structured hollow-core photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 31(24):3574–3576, 2006.
- [26] G. J. Pearce, G. S. Wiederhecker, C. G. Poulton, S. Burger, and P. St. J. Russell. Models for guidance in kagome-structured hollow-core photonic crystal fibres. *Optics Express*, 15(20):12680–12685, 2007.
- [27] G. S. Wiederhecker, A. Brenn, H. L. Fragnito, and P. S. J. Russell. Coherent control of ultra-high frequency acoustic resonances in photonic crystal fibers. *eprint arXiv: 0711.4365*, 2007.
- [28] A. W. Snyder and J. Love. *Optical Waveguide Theory*. Springer, 1983.
- [29] Dietrich Marcuse. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Pr, 1991.
- [30] Hans-Georg Unger. *Planar Optical Waveguides and Fibres*. Clarendon Press
- [31] Michat Mrozowski. *Guided Electromagnetic Waves: Properties and Analysis*. Research Studies Press, 1997.
- [32] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998.
- [33] Steven Johnson, Mihai Ibanescu, M. Skorobogatiy, Ori Weisberg, Torkel Engeness, Marin Soljacic, Steven Jacobs, J. Joannopoulos, and Yoel Fink. Low-loss asymptotically single-mode propagation in large-core omniguide fibers. *Opt. Express*, 9(13):748–779, 2001.
- [34] A. Kapoor and G. S. Singh. Mode classification in cylindrical dielectric waveguides. *Lightwave Technology, Journal of*, 18(6):849–852, 2000.
- [35] E. Snitzer. Cylindrical dielectric waveguide modes. *J. Opt. Soc. Am*, 51(5):491–498, 1961.
- [36] Katsunari Okamoto. *Fundamentals of Optical Waveguides, Second Edition*. Academic Press, 2005.
- [37] Paul N. Butcher and David Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University-Press, 1990.

- [38] P. D. Maker and R. W. Terhune. Study of optical effects due to an induced polarization third order in the electric field strength. *Physical Review*, 148(2):990–990, 1966.
- [39] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 2003.
- [40] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics*. World Scientific, 1996.
- [41] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 2001.
- [42] Hermann A. Haus. *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice Hall, 1983.
- [43] M. A. Foster, K. D. Moll, and A. L. Gaeta. Optimal waveguide dimensions for nonlinear interactions. *Optics Express*, 12(13):2880–2887, 2004.
- [44] A. M. Zheltikov. The physical limit for the waveguide enhancement of nonlinear-optical processes. *Optics and Spectroscopy*, 95(3):410–415, 2003.
- [45] D. Gloge. Weakly guiding fibers. *Appl. Opt*, 10(10):2252–2258, 1971.
- [46] D. Gloge. Dispersion in weakly guiding fibers. *Appl. Opt*, 10(11):2442, 1971.
- [47] F. Biancalana, D. V. Skryabin, and P. St J. Russell. Four-wave mixing instabilities in photonic-crystal and tapered fibers. *Physical Review E*, 68(4), 2003.
- [48] A. Ferrando, E. Silvestre, P. Andres, J. J. Miret, and M. V. Andres. Designing the properties of dispersion-flattened photonic crystal fibers. *Optics Express*, 9(13):687–697, 2001.
- [49] J. W. Fleming. Dispersion in $\text{GeO}_2\text{-SiO}_2$ glasses. *Appl. Opt*, 23(24):4486–4493, 1984.
- [50] D. A. Akimov, A. A. Ivanov, M. V. Alfimov, A. B. Fedotov, T. A. Birks, W. J. Wadsworth, P. St J. Russell, O. A. Koleyatova, S. O. Konorov, A. A. Podshivalov, A. Petrov, D. A. Sidorov-Biryukov, and A. M. Zheltikov. Frequency conversion of femtosecond $\text{Cr}:\text{forsterite}$ laser pulses in a tapered fibre. *Quantum Electronics*, 33(4):317–320, 2003.
- [51] D. A. Akimov, A. A. Ivanov, A. N. Naumov, O. A. Koleyatova, M. V. Alfimov, T. A. Birks, W. J. Wadsworth, P. St J. Russell, A. A. Podshivalov, and A. M. Zheltikov. Generation of a spectrally asymmetric third harmonic with unamplified 30-fs $\text{Cr}:\text{forsterite}$ laser pulses in a tapered fiber. *Applied Physics B - Lasers and Optics*, 76(5):515–519, 2003.
- [52] T. A. Birks, W. J. Wadsworth, and P. St J. Russell. Supercontinuum generation in tapered fibers. *Optics Letters*, 25(19):1415–1417, 2000.

- [53] C. M. B. Cordeiro, W. J. Wadsworth, T. A. Birks, and P. St J. Russell. Engineering the dispersion of tapered fibers for supercontinuum generation with a 1064 nm pump laser. *Optics Letters*, 30(15):1980–1982, 2005.
- [54] J. C. Knight, T. A. Birks, R. F. Cregan, P. St J. Russell, and J. P. de Sandro. Large mode area photonic crystal fibre. *Electronics Letters*, 34(13):1347–1348, 1998.
- [55] J. C. Knight, T. A. Birks, P. St J. Russell, and J. P. de Sandro. Properties of photonic crystal fiber and the effective index model. *Journal of the Optical Society of America A - Optics Image Science and Vision*, 15(3):748–752, 1998.
- [56] J. C. Knight, T. A. Birks, R. F. Cregan, P. St J. Russell, and J. P. de Sandro. Photonic crystals as optical fibres - physics and applications. *Optical Materials*, 11(2-3):143–151, 1999.
- [57] J. C. Knight, J. Arriaga, T. A. Birks, A. Ortigosa-Blanch, W. J. Wadsworth, and P. St J. Russell. Anomalous dispersion in photonic crystal fiber. *IEEE Photonics Technology Letters*, 12(7):807–809, 2000.
- [58] S. G. Leon-Saval, T. A. Birks, W. J. Wadsworth, P. St J. Russell, and M. W. Mason. Supercontinuum generation in submicron fibre waveguides. *Optics Express*, 12(13):2864–2869, 2004.
- [59] T. A. Birks, D. Mogilevtsev, J. C. Knight, and P. St J. Russell. Dispersion compensation using single-material fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 11(6):674–676, 1999.
- [60] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, J. A. Monsoriu, M. V. Andres, and P. St J. Russell. Designing a photonic crystal fibre with flattened chromatic dispersion. *Electronics Letters*, 35(4):325–327, 1999.
- [61] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, and P. Andres. Nearly zero ultraflattened dispersion in photonic crystal fibers. *Optics Letters*, 25(11):790–792, 2000.
- [62] Q. F. Xu, V. R. Almeida, R. R. Panepucci, and M. Lipson. Experimental demonstration of guiding and confining light in nanometer-size low-refractive-index material. *Optics Letters*, 29(14):1626–1628, 2004.
- [63] Amnon Yariv. *Quantum Electronics, 3rd Edition*. Wiley, 1989.
- [64] K. Saitoh, N. Florous, and M. Koshiba. Ultra-flattened chromatic dispersion controllability using a defected-core photonic crystal fiber with low confinement losses. *Optics Express*, 13(21):8365–8371, 2005.

- [65] P. A. Champert, S. V. Popov, M. A. Solodyankin, and J. R. Taylor. Multiwatt average power continua generation in holey fibers pumped by kilowatt peak power seeded ytterbium fiber amplifier. *Applied Physics Letters*, 81(12):2157–2159, 2002.
- [66] K. K. Chow, Y. Takushima, C. Lin, C. Shu, and A. Bjarklev. Flat super-continuum generation based on normal dispersion nonlinear photonic crystal fibre. *Electronics Letters*, 42(17):989–991, 2006.
- [67] H. A. Haus. Mode-locking of lasers. *Ieee Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6):1173–1185, 2000.
- [68] Philip Russel. Photonic crystal fibers. *Science*, 299(5605):358 – 362, 2003.
- [69] Ernst H. K. Stelzer. Light microscopy: Beyond the diffraction limit? *Nature*, 417(6891):806–807, 2002.
- [70] J. T. Robinson, S. F. Preble, and M. Lipson. Imaging highly confined modes in sub-micron scale silicon waveguides using transmission-based near-field scanning optical microscopy. *Optics Express*, 14(22):10588–10595, 2006.
- [71] P. St J. Russell. Photonic-crystal fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 24:4729–4749, 2006.
- [72] T. A. Birks, G. J. Pearce, and D. M. Bird. Approximate band structure calculation for photonic bandgap fibres. *Optics Express*, 14(20):9483–9490, 2006.
- [73] A. Argyros and J. Pla. Hollow-core polymer fibres with a kagome lattice: potential for transmission in the infrared. *Optics Express*, 15(12):7713–7719, 2007.
- [74] T. A. Birks, D. M. Bird, T. D. Hedley, J. M. Pottage, and P. S. Russell. Scaling laws and vector effects in bandgap-guiding fibres. *Optics Express*, 12(1):69–74, 2004.
- [75] L. Zschiedrich, S. Burger, R. Klose, A. Schaedle, and F. Schmidt. Jcmmode: An adaptive finite element solver for the computation of leaky modes. *Arxiv preprint physics/0504073*, 2005.
- [76] P. Roberts, D. Williams, B. Mangan, H. Sabert, F. Couny, W. Wadsworth, T. Birks, J. Knight, and P. Russell. Realizing low loss air core photonic crystal fibers by exploiting an antiresonant core surround. *Optics Express*, 13(20):8277–8285, 2005.
- [77] F. Couny, F. Benabid, P. J. Roberts, P. S. Light, and M. G. Raymer. Generation and photonic guidance of multi-octave optical-frequency combs. *Science*, 318(5853):1118, 2007.

- [78] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids, 2 Vol. Set*. Krieger Publishing Company, 1990.
- [79] Jieping Xu, Robert Stroud, and Robert. *Acousto-Optic Devices: Principles, Design, and Applications*. Wiley, 1992.
- [80] J. F. Nye. *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford University Press, 1985.
- [81] R. A. Waldron. Some problems in theory of guided microsonic waves. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Mt17(11):893, 1969.
- [82] A. Yariv and P. Yeh. *Optical waves in crystals: propagation and control of laser radiation*. John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1983.
- [83] Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley-Interscience, 2003.
- [84] R. M. Shelby, M. D. Levenson, and P. W. Bayer. Guided acoustic-wave brillouin-scattering. *Physical Review B*, 31(8):5244–5252, 1985.
- [85] P. J. Thomas, N. L. Rowell, H. M. Vandriel, and G. I. Stegeman. Normal acoustic modes and brillouin-scattering in single-mode optical fibers. *Physical Review B*, 19(10):4986–4998, 1979.
- [86] Lev Davidovich Landau and E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media*. Butterworth-Heinemann, 1984.
- [87] K. Bergman, H. A. Haus, and M. Shirasaki. Analysis and measurement of gawbs spectrum in a nonlinear fiber ring. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 55(3):242–249, 1992.
- [88] K. Bergman, C. R. Doerr, H. A. Haus, and M. Shirasaki. Sub-shot-noise measurement with fiber-squeezed optical pulses. *Optics Letters*, 18(8):643–645, 1993.
- [89] K. Bergman, H. A. Haus, E. P. Ippen, and M. Shirasaki. Squeezing in a fiber interferometer with a gigahertz pump. *Opt. Lett.*, 19(4):290–292, 1994.
- [90] M. D. Levenson, R. M. Shelby, and S. H. Perlmuter. Squeezing of classical noise by nondegenerate four-wave mixing in an optical fiber. *Optics Letters*, 10:514–516, 1985.
- [91] R. M. Shelby, M. D. Levenson, D. F. Walls, A. Aspect, and G. J. Milburn. Generation of squeezed states of light with a fiber-optic ring interferometer. *Physical Review A*, 33(6):4008–4025, 1986.

- [92] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmuter, R. G. DeVoe, and D. F. Walls. Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber. *Physical Review Letters*, 57(6):691, 1986.
- [93] R. M. Shelby, P. D. Drummond, and S. J. Carter. Phase-noise scaling in quantum soliton propagation. *Physical Review A*, 42(5):2966–2976, 1990.
- [94] D. Levandovsky, M. Vasilyev, and P. Kumar. Amplitude squeezing of light by means of a phase-sensitive fiber parametric amplifier. *Optics Letters*, 24(14):984–986, 1999.
- [95] S. J. Carter and P. D. Drummond. Squeezed quantum solitons and raman noise. *Physical Review Letters*, 67(27):3757–3760, 1991.
- [96] I. Enomori, K. Saitoh, and M. Koshiba. Fundamental characteristics of localized acoustic modes in photonic crystal fibers. *Ieice Transactions on Electronics*, E88c(5):876–882, 2005.
- [97] M. Maldovan and E. L. Thomas. Simultaneous localization of photons and phonons in two-dimensional periodic structures. *Applied Physics Letters*, 88:251907, 2006.
- [98] D. Elser, U. L. Andersen, A. Korn, O. Glockl, S. Lorenz, C. Marquardt, and G. Leuchs. Reduction of guided acoustic wave brillouin scattering in photonic crystal fibers. *Physical Review Letters*, 97(13), 2006.
- [99] R. N. Thurston. Elastic waves in rods and clad rods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 64:1, 1978.
- [100] P. Dainese. *Espalhamento Brillouin em fibras fônicas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [101] O. Audouin, L. du Mouza, C. Gosset, Y. Jaouen, E. Pincemin, T. Werner, and O. Leclerc. Introduction of electrostriction-induced acoustic interaction in modeling of high-capacity long-haul transmission systems. *Ieee Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(2):297–307, 2000.
- [102] Bruce J. Berne and Robert Pecora. *Dynamic Light Scattering: With Applications to Chemistry, Biology, and Physics*. Courier Dover Publications, 2000.
- [103] R. W. Boyd, N. N. Lepeshkin, and P. Zerom. Slow light in a collection of collisionally broadened two-level atoms. *Laser Physics*, 15(10):1389–1392, 2005.

- [104] A. P. Heberle, J. J. Baumberg, and K. Kohler. Ultrafast coherent control and destruction of excitons in quantum-wells. *Physical Review Letters*, 75(13):2598–2601, 1995.
- [105] T. Feurer, J. C. Vaughan, and K. A. Nelson. Spatiotemporal coherent control of lattice vibrational waves. *Science*, 299(5605):374–377, 2003.
- [106] V. I. Prokhorenko, A. M. Nagy, S. A. Waschuk, L. S. Brown, R. R. Birge, and R. J. D. Miller. Coherent control of retinal isomerization in bacteriorhodopsin. *Science*, 313(5791):1257–1261, 2006.
- [107] A. V. Sokolov, D. R. Walker, D. D. Yavuz, G. Y. Yin, and S. E. Harris. Femtosecond light source for phase-controlled multiphoton ionization. *Physical Review Letters*, 8703(3), 2001.
- [108] N. D. Lanzillotti-Kimura, A. Fainstein, A. Huynh, B. Perrin, B. Jusserand, A. Miard, and A. Lemaitre. Coherent generation of acoustic phonons in an optical microcavity. *Physical Review Letters*, 99(21), 2007.
- [109] T. Carmon and K. J. Vahala. Modal spectroscopy of optoexcited vibrations of a micron-scale on-chip resonator at greater than 1 ghz frequency. *Physical Review Letters*, 98(12):123901, 2007.
- [110] Matt Eichenfield, Christopher P. Michael, Raviv Perahia, and Oskar Painter. Actuation of micro-optomechanical systems via cavity-enhanced optical dipole forces. *Nature Photonics*, 1(7):416–422, 2007.
- [111] T. Carmon, H. Rokhsari, L. Yang, T. J. Kippenberg, and K. J. Vahala. Temporal behavior of radiation-pressure-induced vibrations of an optical microcavity phonon mode. *Physical Review Letters*, 94(22):223902, 2005.
- [112] E. M. Dianov, A. V. Luchnikov, A. N. Pilipetskii, and A. N. Starodumov. Electrostriction mechanism of soliton interaction in optical fibers. *Optics Letters*, 15(6):314–316, 1990.
- [113] A. S. Biryukov, M. E. Sukharev, and E. M. Dianov. Excitation of sound waves upon propagation of laser pulses in optical fibres. *Quantum Electronics*, 32(9):765–775, 2002.
- [114] T. A. Birks, P. S. J. Russell, and D. O. Culverhouse. The acousto-optic effect in single-mode fiber tapers and couplers. *Lightwave Technology, Journal of*, 14(11):2519–2529, 1996.
- [115] M. Trigo, A. Bruchhausen, A. Fainstein, B. Jusserand, and V. Thierry-Mieg. Confinement of acoustical vibrations in a semiconductor planar phonon cavity. *Physical Review Letters*, 89(22):227402, 2002.

- [116] T. Gorishnyy, C. K. Ullal, M. Maldovan, G. Fytas, and E. L. Thomas. Hypersonic phononic crystals. *Physical Review Letters*, 94(11):115501, 2005.
- [117] R. Stolen. Polarization effects in fiber raman and brillouin lasers. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 15(10):1157–1160, 1979.
- [118] J. A. Hansryd, P. A. Westlund, and M. J. L. Hedekvist. Fiber-based optical parametric amplifiers and their applications. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 8(3):506–520, 2002.
- [119] N. A. Mortensen. Effective area of photonic crystal fibers. *Optics Express*, 10(7):341–348, 2002.
- [120] D. Hecht. Acousto-optic nonlinearities in multifrequency acousto-optic diffraction. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 10(9):759–760, 1974.
- [121] A. Kobayakov, S. Kumar, D. Chowdhury, A. B. Ruffin, M. Sauer, S. Bickham, and R. Mishra. Design concept for optical fibers with enhanced sbs threshold. *Optics Express*, 13(14):5338–5346, 2005.
- [122] Max Born, Emil Wolf, and A. B. Bhatia. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference*. Cambridge University Press, 2000.
- [123] D. Marcuse. Coupled-mode theory for anisotropic optical. waveguides. *Bell System Technical Journal*, pages 985–995, 1975.
- [124] L. Tsang and S. L. Chuang. Improved coupled-mode theory for reciprocal anisotropic waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 6(2):304–311, 1988.
- [125] Jun John Sakurai and San Fu Tuan. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [126] Jianming Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley-IEEE Press, 2002.
- [127] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [128] M. Koshiba and Y. Tsuji. Curvilinear hybrid edge/nodal elements with triangular shape for guided-wave problems. *Journal of Lightwave Technology*, 18(5):737–743, 2000.
- [129] AF Peterson. Vector finite element formulation for scattering from two-dimensional heterogeneous bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(3):357–365, 1994.

Apêndice A

Materiais e métodos

Neste apêndice serão descritos e detalhados alguns aspectos experimentais deste trabalho de tese.

A.1 Geração de super-contínuo

A montagem experimental para geração do espectro super-contínuo, utilizado para medir a dispersão da velocidade de grupo (cap. 3), é mostrada na Fig. A.1.

A.2 Controle coerente

O experimento discutido no capítulo 7 foi esquematizado na Fig. 7.3. Nesta seção serão mostradas fotografias da montagem experimental.

A.2.1 Parte óptica

A Fig. A.2 mostra a parte óptica da montagem, incluindo a fibra PCF. Os principais elementos utilizados nesta montagem foram:

- Micro-posicionadores (Thorlabs)
- Objetivas de microscópio (Melles-Griot). Colimadoras (10x) e focalizadoras (40x)
- Lâminas $\lambda/2$ e $\lambda/4$ (Thorlabs)
- Controladores de polarização (Thorlabs)
- Pré-amplificador a fibra dopada com érbio (EDFA) de baixo ruído (KEOPSYS). Este amplificador é utilizado antes de detectar o sinal.

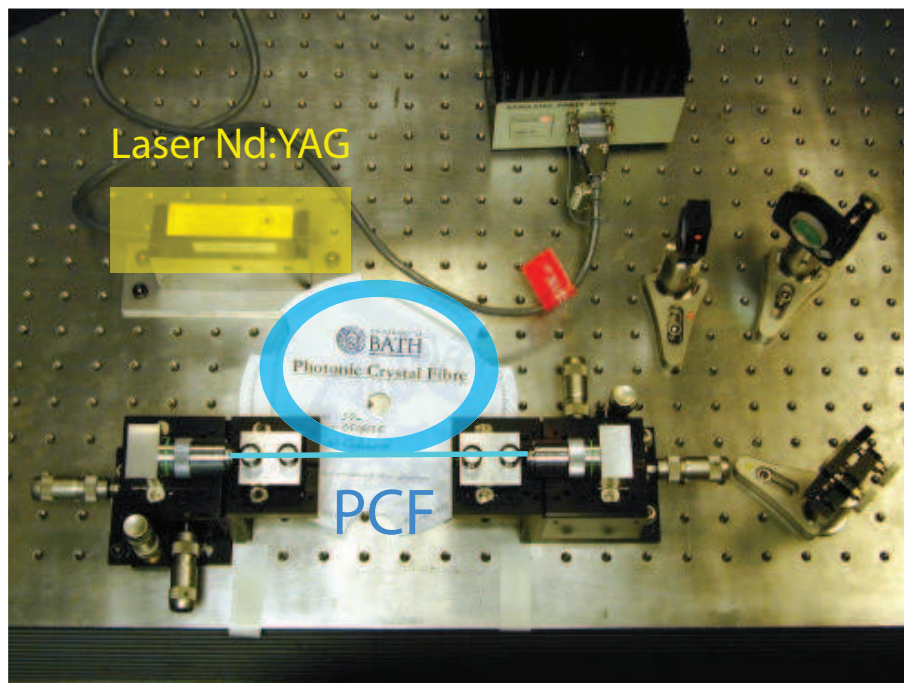


Fig. A.1: Fotografia da parte da montagem para geração do espectro super-contínuo. A PCF é destacada em azul. O laser de Nd:YAG é destacado em amarelo.

- Fotodiodo amplificado (acoplamento DC) com largura de banda de 8 GHz (Newport)

A.2.2 Modulação do laser de bombeio

Para imprimir os pulsos no laser de bombeio foi utilizado um modulador de $LiNbO_3$ dirigido por um amplificador de radio-freqüência (RF). Após a modulação, os pulsos são amplificados com um EDFA montado em Erlangen. A Fig. A.3 mostra esta parte da montagem experimental. Os principais equipamentos utilizados nesta parte foram:

- Modulador eletro-óptico (EO) de $LiNbO_3$ com largura de banda de 12 GHz (Photline Technologies)
- Amplificador de RF com largura de banda de 12.5 GHz e alta tensão de saída (8V driver) (Picosecond Pulse labs)
- Amplificador a Érbio com dois estágios de amplificação.. Ambos estágios foram bombeados por lasers co-propagantes. Os estágios são isolados utilizando isoladores ópticos. A potência média do amplificador era de 200 mW.

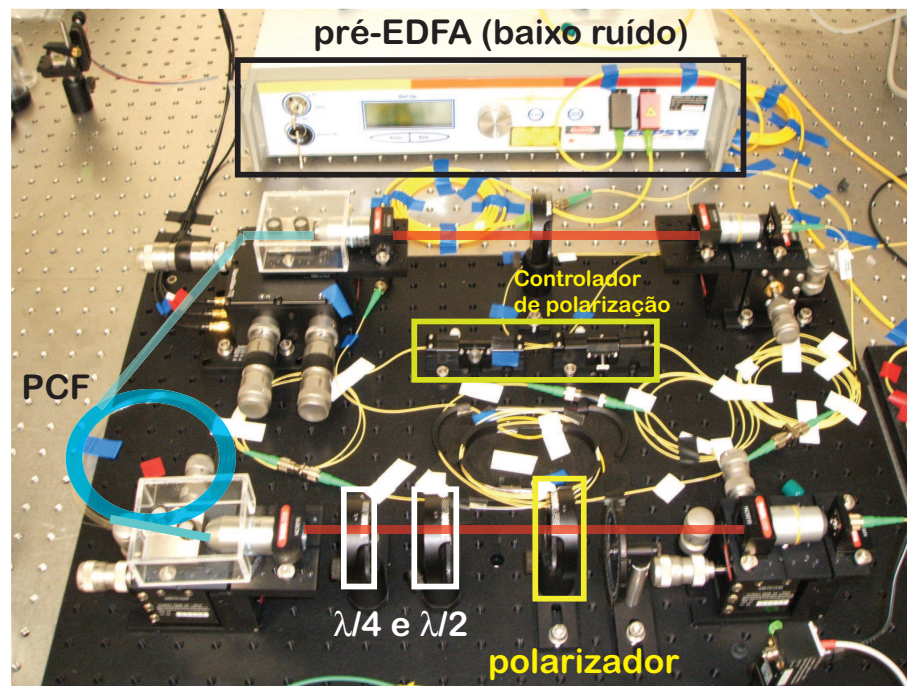


Fig. A.2: Fotografia da parte da montagem que envolve a parte óptica. A PCF é destacada em azul. As partes nas quais o feixe se propaga-se no espaço livre são realçadas em vermelho.

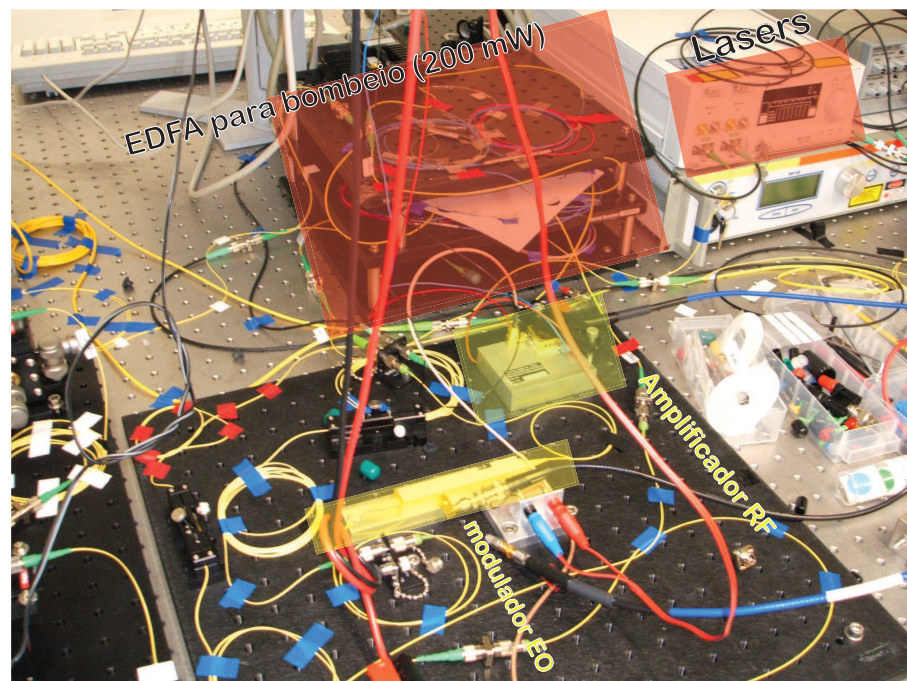


Fig. A.3: Fotografia da parte da montagem que envolve a modulação do laser de bombeio.

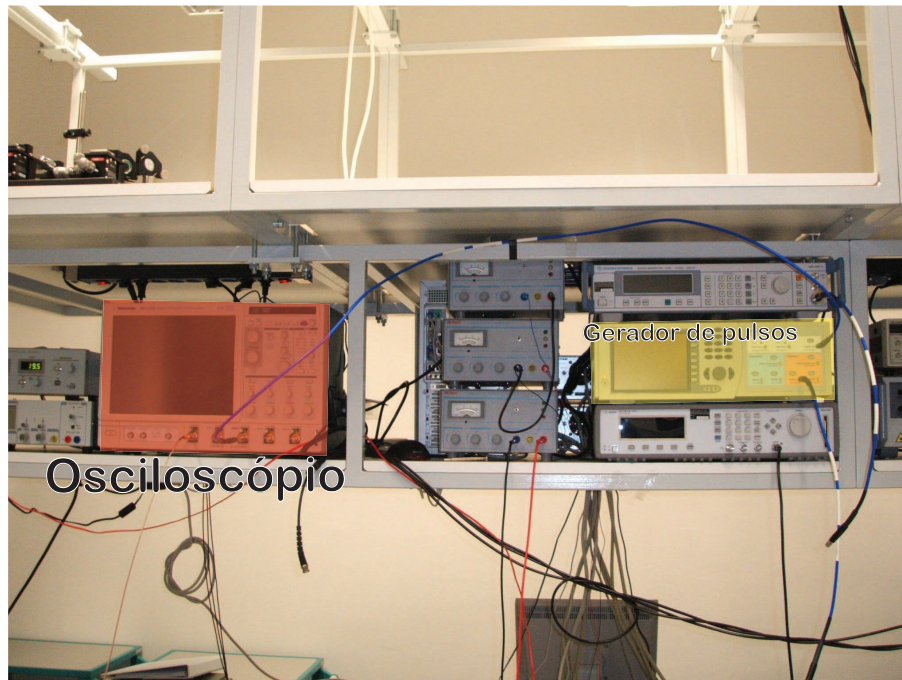


Fig. A.4: Fotografia da parte da montagem que envolve os equipamentos de RF utilizados para gerar e detectar os sinais elétricos.

A.2.3 Equipamentos de RF

Para gerar e detectar os sinais elétricos neste experimento foram utilizados os seguintes equipamentos (veja Fig. A.4)

- Osciloscópio digital com largura de banda de 2 GHz (Tektronix).
- Gerador de pulsos com 2 canais sincronizados e largura de banda de 3.3 GHz. O tempo de subida dos pulsos era da ordem de 50 ps. O período da sequência de pulsos podia variar continuamente até 60 μs . Esta liberdade permitia a obtenção de pulsos com potência de pico de alguns Watts.

A.3 Espalhamento Brillouin

No experimentos descritos nos capítulos 6 e 8, a montagem experimental é similar à mostrada para os experimentos de controle coerente. Para o caso de espalhamento co-propagante, não é impressa nenhuma modulação no laser. Também é dispensado o amplificador que antecede a PCF: como deseja-se medir o espalhamento por vibrações térmicas o ideal é introduzir a menor quantidade de

ruído possível no experimento. Para as medidas de espalhamento estimulado, são impressos pulsos longos ($> 1 \mu\text{s}$) apenas para aumentar a potência de pico. Estes pulsos são mais longos que o tempo de vida dos fônons envolvidos no processo. Portanto podem ser considerados quase-contínuos e não alteram as propriedades do espalhamento. Os equipamentos que foram únicos nestes experimentos foram

- Analisador de espectro de RF com largura de banda de 26 GHz (Agilent)
- Gerador de pulso com largura de banda 80 MHz (Agilent)
- Amplificador EDFA de alta potência (1 W) (IPG)
- Fotodiodo com largura de banda de 20 GHz (Newport)

Apêndice B

Equações características

B.1 Matriz dos coeficientes para o guia cilíndrico

A matriz que aparece na equação 2.16, obtida ao impor-se as condições nos campos das equações 2.15, é dada pela expressão

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} J_m[u] & -K_m[w] & 0 & 0 \\ \frac{akZ_0 J'_m[u]}{u} & \frac{akZ_0 K'_m[w]}{w} & \frac{am\beta J_m[u]}{u^2} & \frac{am\beta K_m[w]}{w^2} \\ 0 & 0 & J_m[u] & -K_m[w] \\ -\frac{am\beta J_m[u]}{u^2} & -\frac{am\beta K_m[w]}{w^2} & -\frac{akn_1^2 J'_m[u]}{uZ_0} & -\frac{akn_0^2 K'_m[w]}{wZ_0} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

sendo que $u = a\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}$ e $w = a\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}$ são denominados números de onda transversais normalizados do núcleo e da casca, respectivamente; as funções J_m e K_m são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ é a impedância do vácuo. A equação característica do guia cilíndrico é dada por $\det(\mathbf{C}) = F_{TE}F_{TM} - F_m = 0$. As funções F_{TE} , F_{TM} e F_m são dadas pelas expressões

$$F_{TE} = \frac{J'_m[u]}{uJ_m[u]} + \frac{K'_m[w]}{wK_m[w]}, \quad (\text{B.2a})$$

$$F_{TM} = \frac{J'_m[u]}{uJ_m[u]} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K'_m[w]}{wK_m[w]}, \quad (\text{B.2b})$$

$$F_m = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.2c})$$

Para um dado valor do parâmetro V , resolve-se a equação característica escolhendo como variável independente w e encontrando quais valores de u anulam a eq. 2.17. Na figura B.1 é mostrado o

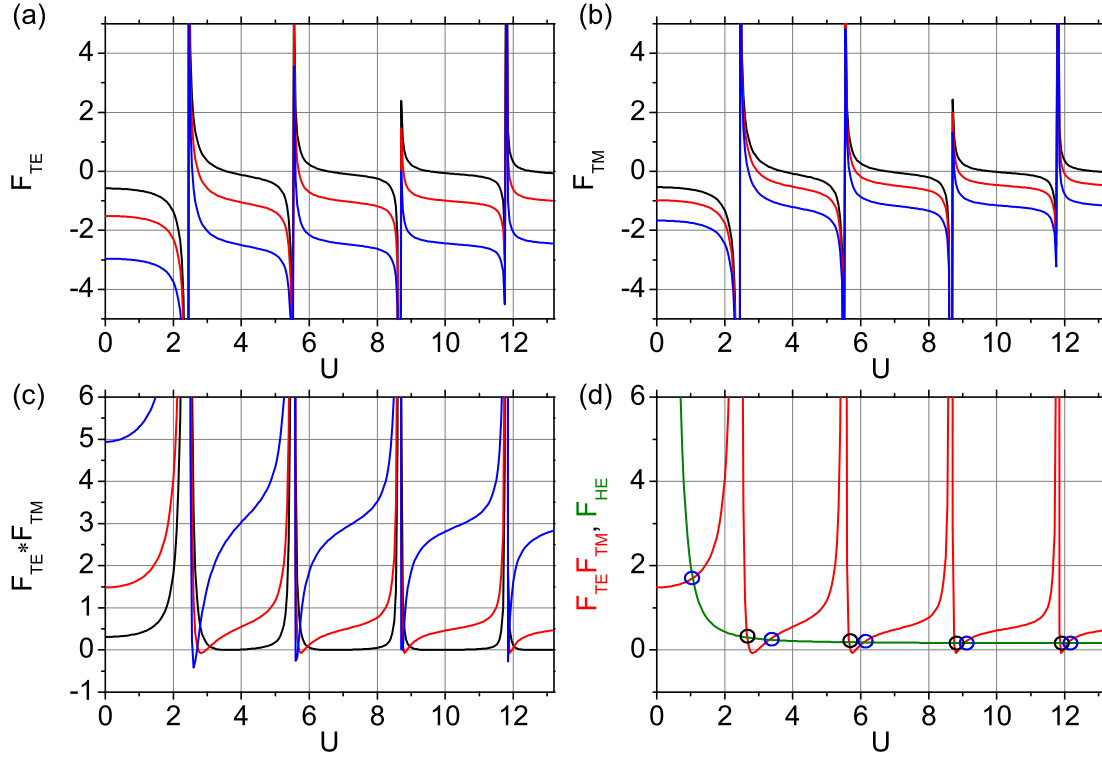


Fig. B.1: Comportamento das funções que definem a equação característica 2.17 para diferentes valores de w no intervalo $0 \leq u \leq V$; em preto $w = V$, em vermelho $w = V/10$ e em azul $w = V/20$. (a) Função F_{TE} . (b) Função F_{TM} . (c) Função $F_{TE}F_{TM}$. (d) Produto das funções $F_{TE}F_{TM}$ em vermelho e a função $F_{m=1}$ em verde; os círculos azuis indicam as soluções que representam a família HE_{1n} ; em preto as soluções da família EH_{1n} .

comportamento das diferentes funções definidas em B.2 como função de u ($0 \leq u \leq V$), para um guia e onda com parâmetros: $a = 1 \mu\text{m}$, $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.0$ e $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$. Nas partes (a), (b) e (c) as diferentes cores das linhas indicam diferentes valores de w ; a linha preta representa o caso $w = V$, a vermelha $w = V/10$ e a azul $w = V/20$. O caso $m = 0$ dá origem às famílias TE_{0n} (quando $F_{TE} = 0$, fig. B.1a) e TM_{0n} (quando $F_{TM} = 0$, B.1b). Quando $m = 1$ obtém-se as famílias de modos HE_{1n} e EH_{1n} (quando $F_{TE}F_{TM} - F_{m=1} = 0$). Na fig. B.1c é mostrada a função $F_{TE}F_{TM}$ (curva vermelha) e a função $F_{m=1}$ (curva verde) calculadas com $w = V/10$. A interseção entre as curvas indicam as soluções correspondentes à família HE_{1n} (círculos azuis) e à família EH_{1n} (círculos pretos).

B.2 Matriz dos coeficientes para o guia tubular

As sub-matrizes que aparecem na equação 3.4, obtidas ao impor-se as condições nos campos das equações 3.2, é dada pela expressão

$$M_{11} = \begin{pmatrix} I_m \left[\frac{ax}{b} \right] & -J_m \left[\frac{au}{b} \right] & -N_m \left[\frac{au}{b} \right] & 0 \\ 0 & J_m[u] & N_m[u] & -K_m[w] \\ -\frac{ib^2 m \beta I_m \left[\frac{ax}{b} \right]}{ax^2} & -\frac{ib^2 m \beta J_m \left[\frac{au}{b} \right]}{au^2} & -\frac{ib^2 m \beta N_m \left[\frac{au}{b} \right]}{au^2} & 0 \\ 0 & \frac{ibm \beta J_m[u]}{u^2} & \frac{ibm \beta N_m[u]}{u^2} & \frac{ibm \beta K_m[w]}{w^2} \end{pmatrix}, \quad (B.3a)$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ibkZ_0 I'_m \left[\frac{ax}{b} \right]}{x} & -\frac{ibkZ_0 J'_m \left[\frac{au}{b} \right]}{u} & -\frac{ibkZ_0 N'_m \left[\frac{au}{b} \right]}{u} & 0 \\ 0 & \frac{ibkZ_0 J'_m[u]}{u} & \frac{ibkZ_0 N'_m[u]}{u} & \frac{ibkZ_0 K'_m[w]}{w} \end{pmatrix}, \quad (B.3b)$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ibkn_0^2 I'_m \left[\frac{ax}{b} \right]}{xZ_0} & \frac{ibkn_1^2 J'_m \left[\frac{au}{b} \right]}{uZ_0} & \frac{ibkn_2^2 N'_m \left[\frac{au}{b} \right]}{uZ_0} & 0 \\ 0 & -\frac{ibkn_1^2 J'_m[u]}{uZ_0} & -\frac{ibkn_2^2 N'_m[u]}{uZ_0} & -\frac{ibkn_2^2 K'_m[w]}{wZ_0} \end{pmatrix}, \quad (B.3c)$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} I_m \left[\frac{ax}{b} \right] & -J_m \left[\frac{au}{b} \right] & -N_m \left[\frac{au}{b} \right] & 0 \\ 0 & J_m[u] & N_m[u] & -K_m[w] \\ \frac{ib^2 m \beta I_m \left[\frac{ax}{b} \right]}{ax^2} & \frac{ib^2 m \beta J_m \left[\frac{au}{b} \right]}{au^2} & \frac{ib^2 m \beta N_m \left[\frac{au}{b} \right]}{au^2} & 0 \\ 0 & -\frac{ibm \beta J_m[u]}{u^2} & -\frac{ibm \beta N_m[u]}{u^2} & -\frac{ibm \beta K_m[w]}{w^2} \end{pmatrix}, \quad (B.3d)$$

sendo que a e b são, respectivamente os raios interno e externo do tubo; n_0, n_1 e n_2 representam os índices de refração do buraco central, do ânulo e da casca, respectivamente; u, w, x são os números de onda transversais normalizados do buraco central, do ânulo e da casca dados pela expressão 3.3. A constante de propagação normalizada e o parâmetro V do guia tubular são dados por

$$B = \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}, \quad (B.4a)$$

$$V = kb \sqrt{n_2^2 - n_1^2}. \quad (B.4b)$$

Apêndice C

Propagação oblíqua em meios periódicos

C.1 Estados de Bloch-Floquet

Para analisar quantitativamente o comportamento da luz na casca de uma PCF aplica-se condições de contorno periódicas nas bordas da célula unitária mostrada na fig. C.1a. A estrutura resultante é um cristal fotônico perfeito cujos modos ópticos, devido à periodicidade, satisfazem o teorema de Bloch-Floquet [2]. Portanto, as soluções do problema de autovalores campos eletromagnéticos satisfazem a relação

$$|\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{R})\rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} |\Psi(\mathbf{r})\rangle \quad (\text{C.1})$$

na qual $\mathbf{R} = m\mathbf{R}_1 + n\mathbf{R}_2$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ são vetores que definem célula unitária da rede hexagonal. O vetor $\mathbf{k} = \alpha_1 \mathbf{K}_1 + \alpha_2 \mathbf{K}_2$ é denominado vetor de Bloch; os vetores $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ são vetores que definem a célula unitária no espaço recíproco (veja fig. C.1b), as constantes α_1 e α_2 são números reais. Os pontos de alta simetria da zona de Brillouin são representados pelos valores

$$\Gamma : (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) \quad (\text{C.2a})$$

$$\text{M} : (\alpha_1, \alpha_2) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{C.2b})$$

$$\text{K} : (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.2c})$$

C.2 Densidade de estados

A densidade de estados fotônicos (DOS - *density of states*) é uma ferramenta conveniente para examinar e apresentar as propriedades ópticas da casca de uma PCF, incluindo a existência, ou não, de *band-gaps* fotônicos sobre uma faixa de frequências de interesse e a identificação de ressonâncias

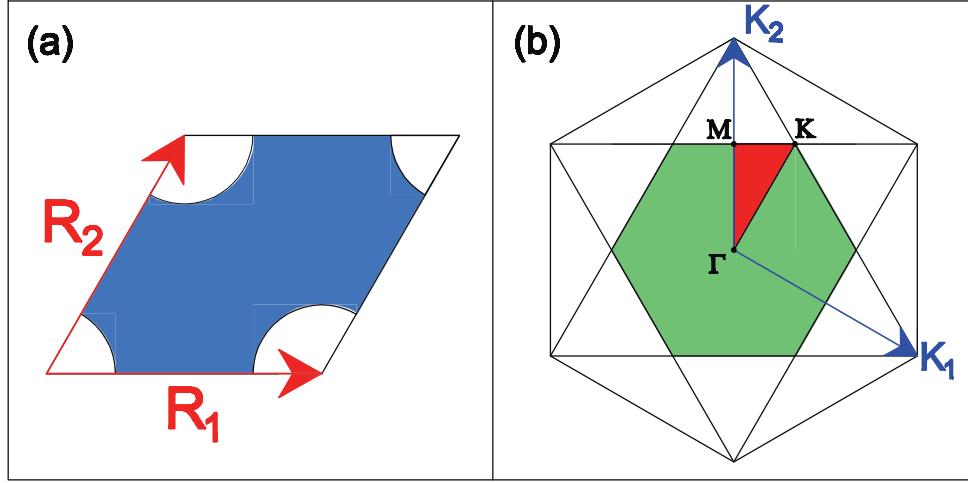


Fig. C.1: Células unitárias da casca da PCF. (a) Célula unitária no espaço real, definida pelos vetores $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$; o módulo dos vetores $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ define o tamanho Λ da célula, o diâmetro dos buracos de ar é d . (b) Célula unitária no espaço recíproco, definida pelos vetores $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$; a região verde denota a primeira zona de Brillouin, a região vermelha representa a zona irreduzível de Brillouin; os pontos Γ , M , e K são os pontos de alta simetria da estrutura [2].

que podem ser importantes para determinar-se as propriedades de guiamento [74, 72].

Para cada valor da frequência normalizada, $k\Lambda$, cada autoestado da estrutura periódica pode assumir diversos valores da constante de propagação normalizada $\beta\Lambda$ dependendo do ponto no espaço recíproco em que o modo é calculado. Em outras palavras, para cada valor do vetor de Bloch $\mathbf{k}$ na equação C.1, obtém-se um conjunto de valores para constante de propagação β . Cada um destes valores está associado a um modo da estrutura periódica. Quando varre-se toda a zona irreduzível de Brillouin (região em vermelho na fig. C.1b), obtém-se, tipicamente, um contínuo de valores para β . Se existir uma faixa de valores de β não ocupada por este contínuo, então existe uma banda proibida para a propagação da luz naquela estrutura.

Define-se a DOS, $\varrho(k\Lambda, \beta\Lambda)$, de tal forma que a quantidade $\varrho(k\Lambda, \beta\Lambda) \Lambda d\beta$ é proporcional ao número de modos na estrutura na faixa de valores da constante de propagação entre $\beta\Lambda$ e $(\beta + d\beta) \Lambda$ [greg].

DOS do vácuo

A densidade de estados do vácuo é obtida da maneira usual em física do estado sólido [2]. O número de estados entre β e $(\beta + d\beta)$ em uma seção bidimensional do espaço recíproco é dada por

$$N_{\beta, \beta+d\beta} = 2 \times \frac{2\pi\beta d\beta}{A_{cel}} \quad (C.3)$$

sendo que o fator multiplicativo 2 é incluído para considerar os dois possíveis estados de polarização; a área A_{cel} é área ocupada por um estado. Como o espaço k é real é dividido por células unitárias com a forma mostrada na fig. C.1a, a área da célula unitária no espaço recíproco é dada por

$$A_{cel} = |\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{\Lambda} \right)^2 \quad (C.4)$$

Portanto, a equação C.3 pode ser escrita na forma

$$N_{\beta, \beta+d\beta} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \beta \Lambda \right) d(\beta \Lambda). \quad (C.5)$$

Assim como na teoria de cristais em física de estado sólido, define-se a quantidade acima entre parênteses como a densidade de estados do vácuo,

$$\varrho_v(k\Lambda, \beta\Lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \beta \Lambda \quad (C.6)$$

DOS na casca de uma PCF

Para se calcular a densidade de estados na casca de uma PCF, é necessário especificar k e o vetor de Bloch $\mathbf{k}$. A densidade de estados é então obtida integrando sobre toda a primeira zona de Brillouin a contribuição de cada modo.

$$\varrho(k\Lambda, \beta\Lambda) = \frac{1}{\varrho_v} \int_{1^{a}BZ} d^2\mathbf{k} \sum_i \delta(\beta\Lambda - \beta_k^{(i)}) \quad (C.7)$$

sendo que δ é a função delta de Dirac. Na prática a integração em $d^2\mathbf{k}$ é substituída por uma soma sobre um conjunto de pontos na zona irreduzível de Brillouin e a função delta é substituída por uma gaussiana normalizada,

$$\varrho(k\Lambda, \beta\Lambda) = \frac{1}{\varrho_v} \sum_{\mathbf{k}} \sum_i \frac{1}{\sqrt{w_{\beta\Lambda}\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\beta\Lambda - \beta_k^{(i)} \Lambda}{2w_{\beta\Lambda}} \right)^2 \right] \quad (C.8)$$

Apêndice D

Notação e propriedades acústicas de sólidos

Neste apêndice são apresentadas algumas deduções e equações cujo conhecimento não é necessário para a compreensão geral do texto principal. No entanto, leitores não-familiares com ondas acústicas e a teoria de ondas acopladas são encorajados a revisar este apêndice.

D.1 Notação

Índices abreviados

As equações que regem a dinâmica de meios contínuos envolvem sempre tensores com diferentes postos. O tensor de dureza c , por exemplo, possui posto 4 e, mesmo em materiais isotrópicos, não se simplifica muito. O uso da notação de índices contraídos, apesar de explicitar claramente todos os elementos envolvidos, não é nada compacta. É comum, na literatura de mecânica de sólidos [80, 78, 79], a abreviação dos subscritos e o uso da notação simbólica para tensores.

Em particular, a notação de índices não explicita a simetria básica dos tensores T , S e c . É possível mostrar [80, 78] que o tensor T é simétrico na ausência de forças de volume que exercem torque. Tais torques, podem ocorrer quando cristais anisotrópicos com momentos permanentes de dipolo elétrico ou magnético são imersos em campos eletromagnéticos¹. Para todos os efeitos, nesta tese é considerado que $T_{ij} = T_{ji}$. O tensor de deformações S_{ij} é, por definição, simétrico em relação aos índices i, j . Em razão da simetria dos tensores T_{ij} e S_{ij} , é fácil mostrar que o tensor de dureza, c_{ijkl} , também é simétrico em relação aos pares de índices ij e kl [80], isto é,

$$c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad (\text{D.1a})$$

$$c_{ijkl} = c_{jikl}. \quad (\text{D.1b})$$

¹Entretanto, mesmo em materiais fortemente polarizados, estes torques são desprezíveis em uma teoria linearizada de vibração [78].

ij	11	22	33	23 ou 32	31 ou 13	12 ou 21
I	1	2	3	4	5	6

Tab. D.1: Correspondência entre os índices contraídos (I) e os índices convencionais (ij)

A simetria dos tensores de tensão e deformação reduzem, para 6, o número de elementos independentes dos mesmos. Já as restrições impostas pelas equações D.1 reduzem o número de elementos independentes do tensor $\mathbf{c}$ de $3^4 = 81$ para 36. Como existem apenas 6 componentes independentes em um tensor simétrico de posto 2, é comum introduzir um único subscrito que toma valores de $1 \rightarrow 6$, representando o que, antes, eram necessário dois subscritos para representar. Para evitar confusão entre estes "super" subscritos e os subscritos convencionais, denotaremos os primeiros com letras maiúsculas. A relação entre ambos é mostrada na tabela D.1.

Usando esta notação contraída, os tensores acima podem ser escritos na forma

$$T_I = T_{ij}, \quad (\text{D.2a})$$

$$c_{IJ} = c_{ijkl}, \quad (\text{D.2b})$$

$$S_J = S_{kl} \times \begin{cases} 1 & \text{se } J = 1, 2, 3 \\ 2 & \text{se } J = 4, 5, 6 \end{cases}. \quad (\text{D.2c})$$

Nesta notação, o tensor c_{IJ} é representado por uma matriz 6×6 simétrica, introduz-se o fator 2 nas componentes 4,5 e 6 do tensor deformações para que a relação constitutiva, dada pela eq. 5.2, continue inalterada (i.e., $T_I = c_{IJ}S_J$).

Representação simbólica

Os produtos entre tensores com índices abreviados serão denotados de forma simbólica por dois pontos, indicando que dois índices foram contraídos. Por exemplo, a representação simbólica da equação 5.2 será dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S}.$$

As derivadas de tensores com índices abreviados (divergente e gradiente simetrizado) serão definidas em termos de um operador ∇ (em negrito) dado pelas seguintes formas matriciais:

$$(\text{divergente}) \nabla \cdot \rightarrow \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & \partial_z & \partial_y \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_z & \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3a})$$

$$(\text{gradiente simetrizado}) \nabla \rightarrow \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3b})$$

Utilizando esta definição, o tensor de tensão será dado por

$$\mathbf{S} = \nabla \mathbf{u} \quad (\text{D.4})$$

D.2 Tensores de propriedades mecânicas

Os tensores que representam propriedades mecânicas dos materiais utilizados nesta tese são aqueles que aparecem nas relações constitutivas para o tensor de tensão e o tensor que representa o efeito acusto-óptico. No caso mais geral de nosso interesse a relação constitutiva e o tensor de impermeabilidade são dados por [80]

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} + \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top), \quad (\text{D.5a})$$

$$\Delta \epsilon = -\epsilon^2 \mathbf{p} : \mathbf{S}, \quad (\text{D.5b})$$

sendo $\mathbf{c}$ o tensor de dureza, $\boldsymbol{\eta}$ o tensor de viscosidade e $\boldsymbol{\gamma}$ o tensor de eletrostrição; o sobrescrito $\top$ indica o vetor transposto e, portanto, produto do vetor campo elétrico $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top$ é um tensor de posto 2.

D.2.1 Tensor de dureza

Na seção D.1, discutimos as simetrias básicas do tensor de dureza. Estas simetrias decorrem das simetrias do tensor de tensão ($\mathbf{T}$) e do tensor de deformação ($\mathbf{S}$) e restringem o número de elementos não-nulos deste tensor para 36. As simetrias do cristal que forma o material impõem restrições adicionais que reduzem, ainda mais, o número de componentes não-nulas do tensor de dureza [78,

79, 80].

A determinação do grupo de simetria é feita verificando-se quais transformações de coordenadas (rotações e reflexões) preservam a origem do sistema de coordenadas. Quando isto acontece, a estrutura cristalina do material é invariante sob estas transformações e, portanto, as propriedades físicas do material (o tensor de dureza $\mathbf{c}$) também são preservadas mediante estas transformações. Para cristais cúbicos, o tensor de dureza, na notação de índices abreviados da seção D.1, é dado por [80, 78],

$$c_{IJ} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

A invariância sobre rotação de materiais isotrópicos estabelece a restrição $c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ e, portanto, existem apenas duas componentes independentes do tensor de dureza para estes materiais. Como veremos na seção E.1 a seguir, a componente c_{11} está relacionada com a velocidade de propagação de ondas de compressão (ou longitudinais) e a componente c_{44} com a velocidade de ondas de cisalhamento.

D.2.2 Tensor de viscosidade

No domínio da frequência ($e^{-i\Omega t}$), a parte mecânica da relação constitutiva pode ser escrita assim

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} + i\Omega\boldsymbol{\eta} : \mathbf{S}, \quad (\text{D.6})$$

Portanto, os mesmos argumentos de simetria utilizados para restringir o tensor de dureza, podem ser utilizados para o tensor de viscosidade [78]. Consequentemente, este tensor é representado pela matriz

$$\eta_{IJ} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12} & \eta_{11} & \eta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12} & \eta_{12} & \eta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

sendo que $\eta_{44} = \frac{1}{2}(\eta_{11} - \eta_{12})$.

D.2.3 Tensor acusto-óptico

O tensor acusto-óptico apresenta também as mesmas simetrias do tensor de dureza e, portanto, é representado pela matriz [80, 82]

$$p_{IJ} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

D.2.4 Tensor de eletrostrição

A dedução da forma do tensor de eletrostrição não se baseia, exclusivamente, em argumentos de simetria. Contudo, recorrendo à relações termodinâmicas [80], pode-se mostrar que este tensor é proporcional ao tensor acusto-óptico.

$$\gamma_{IJ} = -\epsilon_0 \epsilon^2 p_{IJ} \quad (\text{D.9})$$

Conseqüentemente, a forma da matriz γ_{IJ} é dada por

$$\gamma_{IJ} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{12} & \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

O produto dos vetor campo elétrico na eq. D.5a é representado pela matriz Hermitiana

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top = \begin{bmatrix} E_x^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

D.3 Força de eletrostrição

D.3.1 Forma simplificada

Para obter o tensor de tensão associado à força de eletrostrição deve-se manipular a expressão

$$\mathbf{T}_{st} = \boldsymbol{\gamma} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top). \quad (\text{D.12})$$

Em razão da simetria da matriz D.11 pode-se representá-la na notação contraída pelo vetor

$$\mathbf{E}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x^2 \\ E_y^2 \\ E_z^2 \\ 2E_yE_z \\ 2E_xE_z \\ 2E_xE_y \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Utilizando a equação acima junto com a expressão D.10 chega-se à seguinte forma para o tensor de tensão associado à eletrostrição,

$$\mathbf{T}_{st} = \gamma_{IJ} (\mathbf{E}\mathbf{E})_J = \begin{bmatrix} \gamma_{11}E_x^2 + \gamma_{12}E_y^2 + \gamma_{12}E_z^2 \\ \gamma_{12}E_x^2 + \gamma_{11}E_y^2 + \gamma_{12}E_z^2 \\ \gamma_{12}E_x^2 + \gamma_{12}E_y^2 + \gamma_{11}E_z^2 \\ 2\gamma_{44}E_yE_z \\ 2\gamma_{44}E_xE_z \\ 2\gamma_{44}E_xE_y \end{bmatrix}. \quad (\text{D.14})$$

Se tomamos o divergente da eq. D.14, podemos encontrar a expressão para a densidade de força de eletrostrição² (força por unidade de volume),

$$\mathbf{F}_{st} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11}E_x^2 + \gamma_{12}E_y^2 + \gamma_{12}E_z^2 \\ \gamma_{12}E_x^2 + \gamma_{11}E_y^2 + \gamma_{12}E_z^2 \\ \gamma_{12}E_x^2 + \gamma_{12}E_y^2 + \gamma_{11}E_z^2 \\ 2\gamma_{44}E_yE_z \\ 2\gamma_{44}E_xE_z \\ 2\gamma_{44}E_xE_y \end{bmatrix}$$

²Note que, na notação de índices contraídos, devemos utilizar o operador divergente dado pela equação D.3a.

se substituirmos $\gamma_{11} = 2\gamma_{44} + \gamma_{12}$, podemos escrever a expressão acima na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{st} &= \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & \partial_z & \partial_y \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_z & \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2\gamma_{44} + \gamma_{12}) E_x^2 + \gamma_{12} E_y^2 + \gamma_{12} E_z^2 \\ \gamma_{12} E_x^2 + (2\gamma_{44} + \gamma_{12}) E_y^2 + \gamma_{12} E_z^2 \\ \gamma_{12} E_x^2 + \gamma_{12} E_y^2 + (2\gamma_{44} + \gamma_{12}) E_z^2 \\ 2\gamma_{44} E_y E_z \\ 2\gamma_{44} E_x E_z \\ 2\gamma_{44} E_x E_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & \partial_z & \partial_y \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_z & \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \left(\gamma_{12} \begin{bmatrix} E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \\ E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \\ E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\gamma_{44} \begin{bmatrix} E_x^2 \\ E_y^2 \\ E_z^2 \\ E_y E_z \\ E_x E_z \\ E_x E_y \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Portanto, a forma simplificada para a densidade de força de eletrostrição será dada por

$$\mathbf{F}_{st} = \nabla \cdot [\boldsymbol{\gamma} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top)] = \gamma_{12} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + 2\gamma_{44} \nabla \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top). \quad (\text{D.15})$$

No caso geral de pulsos ópticos, pode-se escrever o campo elétrico na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sqrt{f(t)} e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + c.c. \quad (\text{D.16})$$

Portanto, os termos quadráticos no campo serão dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{f^2(t)}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) (1 + \cos 2\omega t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^\top(\mathbf{r}, t) &= \frac{f^2(t)}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r}) (1 + \cos 2\omega t) \end{aligned}$$

Como as ondas acústicas não respondem à componente de frequência óptica 2ω , é comum desprezar este termo e utilizar a seguinte expressão para a força de eletrostrição

$$\mathbf{F}_{st} = f^2(t) \left\{ \frac{\gamma_{12}}{2} \nabla [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r})] + \gamma_{44} \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{r})] \right\} \quad (\text{D.17})$$

sendo que a dependência temporal do campo elétrico é dada pela envoltória lenta $\sqrt{f(t)}$.

D.4 Distribuição espacial da força de eletrostrição

Para analisar a distribuição da força de eletrostrição no caso geral, escreve-se o campo elétrico total como uma combinação arbitrária de dois modos ópticos,

$$\Psi = \alpha_1 \exp(i\beta_1 z + \phi_1) \Psi_1 + \alpha_2 \exp(i\beta_2 z + \phi_2) \Psi_2 + c.c.$$

sendo $\alpha_{1,2}$ amplitude reais e ϕ_1, ϕ_2 as fases correspondentes. os termos da eq. XX são dados por

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \Psi &= \frac{1}{2} (|\alpha_1|^2 \Psi_1 \cdot \Psi_1^* + |\alpha_2|^2 \Psi_2 \cdot \Psi_2^*) + \cos(\Delta\beta - \Delta\phi) \Re \{ \Psi_1 \cdot \Psi_2^* \} \\ \Psi \cdot \Psi^\dagger &= \frac{1}{2} (|\alpha_1|^2 \Psi_1 \cdot \Psi_1^\dagger + |\alpha_2|^2 \Psi_2 \cdot \Psi_2^\dagger) + \cos(\Delta\beta - \Delta\phi) \Re \{ \Psi_1 \cdot \Psi_2^\dagger \} \end{aligned}$$

Portanto, os termos de eletrostrição serão

$$\begin{aligned} \nabla(\Psi \cdot \Psi) &= \frac{1}{2} [|\alpha_1|^2 \nabla(|\Psi_1|^2) + |\alpha_2|^2 \nabla(|\Psi_2|^2)] + \cos(\Delta\beta - \Delta\phi) \Re \{ \nabla(\Psi_1 \cdot \Psi_2^*) \} \\ \nabla \cdot (\Psi \cdot \Psi^\dagger) &= \frac{1}{2} [|\alpha_1|^2 \nabla \cdot (\Psi_1 \cdot \Psi_1^\dagger) + |\alpha_2|^2 \nabla \cdot (\Psi_2 \cdot \Psi_2^\dagger)] + \\ &\quad \frac{\cos(\Delta\beta - \Delta\phi)}{2} \Re \{ \nabla \cdot (\Psi_1 \cdot \Psi_2^\dagger + \Psi_2 \cdot \Psi_1^\dagger) \} \end{aligned}$$

No caso de guias cilíndricos e PCFs, os estados de polarização do modo fundamental são degenerados ($\Delta\beta = 0$) e, aproximadamente, linearmente polarizados. Portanto pode-se falar de polarizações lineares ou circulares do campo de bombeio, nestes casos devemos ter e a os termos da força podem ser simplificados,

$$\begin{aligned} \nabla(\Psi \cdot \Psi) &= \frac{1}{2} [\alpha_1^2 \nabla(|\Psi_1|^2) + \alpha_2^2 \nabla(|\Psi_2|^2)] + \alpha_1 \alpha_2 \cos(\Delta\phi) \Re \{ \nabla(\Psi_1 \cdot \Psi_2^*) \} \\ \nabla \cdot (\Psi \cdot \Psi^\dagger) &= \frac{1}{2} [\alpha_1^2 \nabla \cdot (\Psi_1 \cdot \Psi_1^\dagger) + \alpha_2^2 \nabla \cdot (\Psi_2 \cdot \Psi_2^\dagger)] + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cos(\Delta\phi)}{2} \Re \{ \nabla \cdot (\Psi_1 \cdot \Psi_2^\dagger + \Psi_2 \cdot \Psi_1^\dagger) \} \end{aligned}$$

Pode-se apreciar, analiticamente, o impacto destes termos quando a distribuição espacial do modo possui simetria radial, ou seja, $\Psi_1 = \Psi(r) \hat{x}$ e $\Psi_2 = \Psi(r) \hat{y}$. Neste caso, os tensores $\Psi_1 \cdot \Psi_1^\dagger$, $\Psi_2 \cdot \Psi_2^\dagger$ e $\Psi_1 \cdot \Psi_2^\dagger$ são da forma

$$\Psi_1 \cdot \Psi_1^\dagger = |\Psi|^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.19)$$

$$\Psi_2 \cdot \Psi_2^\dagger = |\Psi|^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

$$(\Psi_1 \cdot \Psi_2^\dagger + \Psi_2 \cdot \Psi_1^\dagger) = |\Psi|^2 \cos \Delta\phi \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.21})$$

Portanto os termos da força de eletrostrição serão dados por

$$\nabla (\Psi \cdot \Psi) = \frac{1}{2} [\alpha_1^2 \nabla \Psi^2 + \alpha_2^2 \nabla \Psi^2] = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Psi \partial_r \Psi \hat{r} \quad (\text{D.22a})$$

$$\nabla \cdot (\Psi \cdot \Psi^\dagger) = \frac{1}{2} [\alpha_1^2 \hat{x} \partial_x \Psi^2 + \alpha_2^2 \hat{y} \partial_y \Psi^2] + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cos(\Delta\phi)}{2} [\hat{x} \partial_y \Psi^2 + \hat{y} \partial_x \Psi^2] \quad (\text{D.22b})$$

O segundo termo pode ser simplificado escrevendo as derivadas cartesianas de Ψ em relação a r ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Psi \cdot \Psi^\dagger) &= \frac{\Psi}{r} \partial_r \Psi \left\{ [\alpha_1^2 (x\hat{x}) + \alpha_2^2 (y\hat{y})] + \alpha_1 \alpha_2 \cos \Delta\phi [y\hat{x} + x\hat{y}] \right\} \\ &= \frac{\Psi}{r} \partial_r \Psi \left\{ [\alpha_1 (\alpha_1 x + \alpha_2 y \cos \Delta\phi) \hat{x} + \alpha_2 (\alpha_2 y + \alpha_1 x \cos \Delta\phi) \hat{y}] \right\} \end{aligned}$$

Escrevendo-se as componentes cartesianas restantes em coordenadas cilíndricas, obtém-se a forma final para força de eletrostrição

$$(\mathbf{F}_{st})_r = \Psi \partial_r \Psi \left[\frac{\gamma_{12}}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \gamma_{44} (\alpha_1^2 \sin^2 \theta + \alpha_2^2 \cos^2 \theta + \alpha_1 \alpha_2 \sin 2\theta \cos \Delta\phi) \right] \quad (\text{D.23a})$$

$$(\mathbf{F}_{st})_\theta = \gamma_{44} \Psi \partial_r \Psi \left[\sin \theta \cos \theta (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \alpha_1 \alpha_2 \cos 2\theta \cos \Delta\phi \right] \quad (\text{D.23b})$$

Partindo das equações D.23, pode-se obter a expressão da força, para qualquer estado de polarização do campo, escolhendo diferentes valores de α_1, α_2 e $\Delta\phi$. O caso da polarização circular ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\Delta\phi = \pm\pi/2$) é particularmente interessante,

$$\mathbf{F}_{st} = [\Psi \partial_r \Psi (\gamma_{12} + \gamma_{44})] \hat{r}, \quad (\text{D.24})$$

ou seja, a força de eletrostrição se torna puramente radial e, portanto, os modos acústicos da família TR_{2m} não serão excitados.

Apêndice E

Equação de onda acústica

E.1 Equação de onda para o deslocamento

Para deduzir a equação de onda para o vetor deslocamento partimos da lei de Newton dada pela eq. 5.1 e utilizamos a relação constitutiva dada pela eq. D.5a. Usando a definição do tensor de deformação, a relação constitutiva pode ser escrita na na forma

$$\mathbf{T} = \left[\underbrace{\left(\mathbf{c} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right)}_{\tilde{\mathbf{c}}} : \nabla \right] \mathbf{u} + \gamma : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\top)$$

vamos escrever o tensor $\tilde{\mathbf{c}} \equiv \left(\mathbf{c} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right)$ em termos das componentes $\tilde{c}_{11}$ e $\tilde{c}_{44}$:

$$\mathbf{c} = \tilde{c}_{11} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(\tilde{\mathbf{c}})_l} + \tilde{c}_{44} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(\tilde{\mathbf{c}})_s} \quad (\text{E.1})$$

utilizando a equação acima junto com as definições D.3, é fácil demonstrar as seguintes identidades,

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{c}})_l : \nabla = \tilde{c}_{11} \begin{bmatrix} \partial_x^2 & \partial_{xy} & \partial_{xz} \\ \partial_{yx} & \partial_y^2 & \partial_{yz} \\ \partial_{zx} & \partial_z & \partial_z^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{c}})_s : \nabla = \tilde{c}_{44} \begin{bmatrix} \partial_y^2 + \partial_z^2 & -\partial_{xy} & -\partial_{xz} \\ -\partial_{yx} & \partial_x^2 + \partial_z^2 & \partial_{yz} \\ -\partial_{zx} & -\partial_{zy} & \partial_x^2 + \partial_y^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

O lado direito das equações E.2 e E.3 são, na notação tradicional de cálculo vetorial [32], representadas pelo "gradiente do divergente" e pelo "duplo rotacional",

$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 & \partial_{xy} & \partial_{xz} \\ \partial_{yx} & \partial_y^2 & \partial_{yz} \\ \partial_{zx} & \partial_z & \partial_z^2 \end{bmatrix} = \nabla (\nabla \cdot) \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{bmatrix} \partial_y^2 + \partial_z^2 & -\partial_{xy} & -\partial_{xz} \\ -\partial_{yx} & \partial_x^2 + \partial_z^2 & \partial_{yz} \\ -\partial_{zx} & -\partial_{zy} & \partial_x^2 + \partial_y^2 \end{bmatrix} = - \nabla \times \nabla \times. \quad (\text{E.5})$$

Portanto, podemos escrever a equação de onda 5.4 na forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \tilde{c}_{11} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \tilde{c}_{44} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{F}_{st}$$

Agora, utilizamos a definição do tensor $\tilde{\mathbf{c}}$ para escrevemos a equação acima da seguinte maneira

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (c_{44} + \eta_{44} \partial_t) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - [c_{11} + \eta_{11} \partial_t] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{F}_{st} \quad (\text{E.6})$$

sendo que o termo do lado direito da equação ($\mathbf{F}_{st}$) foi desenvolvido na seção D.2.4 e representa a densidade força de eletrostrição (eq. D.15). Se utilizarmos a definição das velocidades de propagação para ondas longitudinais (V_l) e de cisalhamento (V_s),

$$V_l = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \quad (\text{E.7})$$

$$V_s = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \quad (\text{E.8})$$

Podemos escrever equação de onda para o vetor deslocamento na forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \left(V_s^2 + \frac{\eta_{44}}{\rho} \partial_t \right) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \left[V_l^2 + \frac{\eta_{11}}{\rho} \partial_t \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\mathbf{F}_{st}}{\rho} \quad (\text{E.9})$$

E.2 Excitação de modos acústicos

E.2.1 Evolução temporal das amplitudes dos modos acústicos

Para obter-se a equação para evolução temporal das amplitudes dos modos acústicos, supõe-se o seguinte ansatz para o vetor deslocamento e o tensor de deformações,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_m A_m(t) \mathbf{u}_m(x, y) e^{i\Omega_m t} + c.c. \quad (\text{E.10a})$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \sum_m A_m(t) \mathbf{S}_m(x, y) e^{i\Omega_m t} + c.c. \quad (\text{E.10b})$$

Substituindo estas expressões na equação para o vetor deslocamento, é fácil mostrar que a equação resultante é dada por

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial A_m}{\partial t} (i\Omega_m + \Gamma_m) + 2i\Omega_m \Gamma_m A_m = B_m(t), \quad (\text{E.11})$$

E.2.2 Solução da equação

Para resolver a eq. E.11 introduz-se a transformada de Fourier $A_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_m(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$. Resolvendo a equação algébrica resultante obtém-se

$$\tilde{A}_m(\Omega) = \frac{\Phi_m \tilde{b}(\Omega - \Omega_m)}{(\Omega - \Omega_m + i\Gamma_m)^2 - (\Omega_m^2 - \Gamma_m^2)},$$

sendo que $\tilde{b}(\Omega)$ denota a transformada de Fourier de $b(t)$, Φ_m representa a dependência espacial do coeficiente excitação B_m . Para prosseguir com esta solução especifica-se a envoltória lenta da onda eletromagnética, em particular, é interessante encontrar a função de Green do sistema, ou seja, a solução da eq. E.11 quando a excitação é impulsiva, portanto, escolhe-se $b(t) = \delta\left(\frac{t}{t_0}\right)$ sendo t_p um parâmetro que caracteriza a largura do pulso. Portanto $\tilde{b}(\Omega - \Omega_m) = \frac{t_p}{2\pi} e^{i(\Omega - \Omega_m)t}$. Agora, resta fazer a inversão da transformada

$$\tilde{A}_m(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi_m t_p e^{i(\Omega - \Omega_m)t}}{(\Omega - \Omega_m + i\Gamma_m)^2 - (\Omega_m^2 - \Gamma_m^2)}.$$

A função acima possui pólos no plano complexo quando $\Omega = \Omega_m - i\Gamma_m \pm \sqrt{\Omega_m^2 - \Gamma_m^2}$, utilizando o cálculo por resíduos obtém-se,

$$A_m(t) = \Phi_m t_p e^{-i\Omega_m t} e^{-\Gamma_m(t-kT)} \frac{\sin \left[\sqrt{\Omega_m^2 - \Gamma_m^2} (t - kT) \right]}{\sqrt{\Omega_m^2 - \Gamma_m^2}} \Theta(t - kT), \quad (\text{E.12})$$

onde $\Theta(t)$ é a função de Heaviside. Substituindo a equação acima nas expansões [E.10](#), obtém-se a equação [7.10](#).

Apêndice F

Teoria de perturbação

F.1 Perturbação da constante dielétrica

Usando a definição do tensor de impermeabilidade,

$$\mathbf{B} \equiv [\epsilon]^{-1}, \quad (\text{F.1})$$

pode-se demonstrar a equação 5.9. Na notação de índices contraídos, a eq. F.1 é dada por

$$\epsilon_{im} B_{mn} = \delta_{in}. \quad (\text{F.2})$$

O diferencial desta expressão é dado por,

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{im} B_{mn} + \epsilon_{im} \Delta B_{mn} &= 0 \\ \Rightarrow \Delta \epsilon_{im} B_{mn} &= - \epsilon_{im} \Delta B_{mn}. \end{aligned}$$

Multiplicando esta última equação por ϵ_{nj} obtém-se

$$\Delta \epsilon_{im} B_{mn} \epsilon_{nj} = - \epsilon_{im} \Delta B_{mn} \epsilon_{nj}. \quad (\text{F.3})$$

Agora, em razão da relação $B_{mn} \epsilon_{nj} = \delta_{mj}$,

$$\Delta \epsilon_{ij} = - \epsilon_{im} \Delta B_{mn} \epsilon_{nj}.$$

Utilizando a definição do efeito acusto-óptico (eq. 5.4), chega-se à seguinte expressão.

$$\Delta \epsilon_{ij} = - \epsilon_{im} (p_{mnrs} S_{rs}) \epsilon_{nj}.$$

Para materiais isotrópicos (antes de se aplicar a deformação) temos $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$, junto com a equação acima, deduz-se a eq. 5.9,

$$\begin{aligned} &= -\epsilon^2 \delta_{im} \delta_{nj} (p_{mnr} S_{rs}), \\ \Delta \epsilon_{ij} &= -\epsilon^2 (p_{ijr} S_{rs}), \blacksquare \end{aligned}$$

O tensor $\Delta \epsilon$ também é simétrico e, portanto, a eq. 5.9 pode ser escrita utilizando a notação compacta introduzida na seção D.1,

$$\Delta \epsilon_I = -\epsilon^2 p_{IJ} S_J \quad (\text{F.4})$$

F.2 Teoria de perturbação eletromagnética

A teoria de perturbação é uma ferramenta amplamente difundida no tratamento de problemas complexos que, na ausência de um agente externo, se degeneram em um sistema simples, cuja solução já é conhecida. Em mecânica quântica e eletromagnetismo, esta ferramenta é de fundamental importância para a compreensão de diversas interações físicas [122, 123, 124, 28].

Em mecânica quântica, o formalismo perturbativo é desenvolvido de maneira razoavelmente simples [125]. Esta relativa facilidade ocorre em consequência da natureza escalar da função de onda. No entanto, em problemas eletromagnéticos, apenas os casos mais triviais podem ser abordados utilizando aproximações escalares. Por exemplo, os modos de guias de onda dielétricos são todos vetoriais e, portanto, precisamos considerar a forma vetorial completa dos campos para obter aproximações válidas [124, 123].

Para uma perturbação $\Delta \epsilon(\mathbf{r}, t)$ com dependência temporal arbitrária, as equações F.5 são escritas no domínio da frequência na forma

$$\nabla_t \times \mathbf{E} + \hat{z} \times \partial_z \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (\text{F.5a})$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H} + \hat{z} \times \partial_z \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 [\epsilon \mathbf{E} + \Delta \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \star \mathbf{E}(\omega)], \quad (\text{F.5b})$$

sendo que o símbolo $\star$ denota o produto de convolução¹. Portanto, a equação 2.3 pode ser escrita em termos dos operadores definidos na seção 2.2.1,

$$(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) |\Psi\rangle = -i \partial_z \mathbf{B} |\Psi\rangle, \quad (\text{F.6})$$

¹O símbolo $\star$ denota o produto de convolução pois, quando $\Delta \epsilon$ é uma função do tempo, deve-se tomar cuidado ao escrever as equações de Maxwell no domínio da frequência. O vetor deslocamento $\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \epsilon(t) \mathbf{E}(t)$ se transforma em um produto de convolução no domínio da frequência, $F_\omega \{A(t) B(t)\} = F_\omega \{A(t)\} \star F_\omega \{B(t)\}$.

sendo que o operador ΔA é dado pela expressão

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \omega \epsilon_0 \Delta \epsilon \star & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quando a perturbação é pequena (i.e., $\Delta \epsilon \ll \epsilon$) é razoável supormos que a solução do problema perturbado pode ser expandida em termos das soluções do problema não-perturbado

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n(z) e^{i\beta_n z} |\Psi_n\rangle, \quad (\text{F.7})$$

sendo que a soma inclui os modos co- e contra-propagantes, $|\Psi_n\rangle$ são soluções do problema de auto-valores generalizado

$$A |\Psi_n\rangle = \beta_n B |\Psi_n\rangle. \quad (\text{F.8})$$

Substituindo a expansão F.7 na equação F.6 pode-se encontrar equações para os coeficientes $a_n(z)$. O lado esquerdo da equação F.6 fica

$$\sum_n a_n e^{i\beta_n z} (A |\Psi_n\rangle + \Delta A |\Psi_n\rangle), \quad (\text{F.9})$$

o lado direito pode ser expandido, o resultado é

$$-i \left[\sum_n e^{i\beta_n z} (\partial_z a_n + i\beta_n a_n) (B |\Psi_n\rangle) \right]. \quad (\text{F.10})$$

Igualando as equações F.9 e F.10, obtém-se

$$\sum_n \left\{ \left[a_n e^{i\beta_n z} \underbrace{(A |\Psi_n\rangle - \beta_n B |\Psi_n\rangle)}_{=0} \right] + \left[a_n e^{i\beta_n z} (\Delta A |\Psi_n\rangle) \right] \right\} = -i \sum_n e^{i\beta_n z} [\partial_z a_n (B |\Psi_n\rangle)]$$

O termo destacado por chaves é zero em razão da eq. F.8, multiplicando o restante da equação acima pelo "bra" $\langle \Psi_k|$, obtém-se

$$\sum_n \left[a_n e^{i\beta_n z} (\langle \Psi_k| \Delta A |\Psi_n\rangle) \right] = -i \sum_n e^{i\beta_n z} [\partial_z a_n (\langle \Psi_k| B |\Psi_n\rangle)]. \quad (\text{F.11})$$

Como foi discutido na seção 2.2.1, o elemento de matriz $\langle \Psi_k| B |\Psi_n\rangle$ representa a relação de orto-

gonalidade entre os modos $|\Psi_n\rangle$ e $|\Psi_k\rangle$. Explicitamente este elemento é dado por [31]

$$\begin{aligned}\langle\Psi_k|\mathbf{B}|\Psi_n\rangle &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_k^* & \mathbf{H}_k^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\mathbf{z}}\times \\ \hat{\mathbf{z}}\times & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{H}_n \end{bmatrix} \\ &= \iint \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E}_k^* \times \mathbf{H}_n + \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_k^*) dA.\end{aligned}$$

Se $n = k$ na expressão acima,

$$\langle\Psi_k|\mathbf{B}|\Psi_k\rangle = 2\Re \left\{ \iint (\mathbf{E}_k^* \times \mathbf{H}_k) \cdot \hat{\mathbf{z}} dA \right\},$$

Por outro lado, se $n \neq k$, temos [31, 28]

$$\langle\Psi_k|\mathbf{B}|\Psi_{n\neq k}\rangle = 0$$

Portanto, se usarmos a definição da potência transmitida em um guia de onda no modo $|\Psi_k\rangle$ [28, 31],

$$P_k = \frac{s_k}{2} \Re \left\{ \iint (\mathbf{E}_k^* \times \mathbf{H}_k) \cdot \hat{\mathbf{z}} dA \right\}, \quad (\text{F.12})$$

sendo que foi introduzido o fator $s_k = \pm 1$ para garantir o sinal correto do coeficiente de acoplamento para modos contra-propagantes². Portanto, podemos escrever o elemento de matriz do operador $\mathbf{B}$ na forma

$$\langle\Psi_k|\mathbf{B}|\Psi_n\rangle = 4P_k \delta_{kn}. \quad (\text{F.13})$$

Substituindo a equação F.13 na equação F.11 obtemos

$$\frac{\partial a_k}{\partial z} = i \sum_n a_n \mathcal{K}_{kn} e^{i(\beta_n - \beta_k)z}. \quad (\text{F.14})$$

sendo que o coeficiente de acoplamento entre os modos k e n é dado por

$$\mathcal{K}_{kn} = \frac{\langle\Psi_k|\Delta\mathbf{A}|\Psi_n\rangle}{4P_k}. \quad (\text{F.15})$$

²Este fator surge porque o campo $\mathbf{H}$ de modos que propagam-se na direção $-\hat{\mathbf{z}}$, possui um sinal – em relação àqueles que propagam-se na direção $\hat{\mathbf{z}}$ [31, 29].

F.2.1 Perturbação harmônica no espaço e no tempo

A perturbação induzida por modos acústicos é harmônica na direção $\hat{z}$ e no tempo

$$\Delta\epsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\Delta\epsilon(x, y)e^{i(\beta_{ac}z - \Omega t)} + c.c. \quad (F.16)$$

Introduzindo a transformada de Fourier desta função, obtém-se

$$\Delta\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2}\Delta\epsilon(x, y)e^{i\beta_{ac}z}\delta(\omega - \Omega) + c.c.$$

Esta expressão mostra que o tratamento da linha Stokes ($\omega - \Omega$) é exatamente análogo ao da linha anti-Stokes ($\omega + \Omega$).

F.2.2 Acoplamento contra-direcional

As equações acopladas no caso contra-direcional são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial z} &= ia_2 K_{12} e^{i\Delta\beta z} \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} &= -ia_1 K_{12} e^{-i\Delta\beta z} \end{aligned}$$

sendo que $\Delta\beta = \beta_1 + \beta_2 - \beta_{ac}$. A solução analítica destas equações, sujeita às condições de contorno $a_1(0) = A_1$ e $a_2(L) = 0$, são dadas por

$$\begin{aligned} a_1(z) &= \frac{e^{\frac{iz\Delta\beta}{2}} \left(\left(g \cosh \left[\frac{1}{2}g(L-z) \right] + i\Delta\beta \sinh \left[\frac{1}{2}g(L-z) \right] \right) A_1 - 2ie^{\frac{iL\Delta\beta}{2}} \sinh \left[\frac{gz}{2} \right] A_2 K_{12} \right)}{g \cosh \left[\frac{gL}{2} \right] + i\Delta\beta \sinh \left[\frac{gL}{2} \right]} \\ a_2(z) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}iz\Delta\beta} \left(e^{\frac{iL\Delta\beta}{2}} \left(g \cosh \left[\frac{gz}{2} \right] + i\Delta\beta \sinh \left[\frac{gz}{2} \right] \right) A_2 - 2i \sinh \left[\frac{1}{2}g(L-z) \right] A_1 K_{12} \right)}{g \cosh \left[\frac{gL}{2} \right] + i\Delta\beta \sinh \left[\frac{gL}{2} \right]} \end{aligned}$$

sendo que $g^2 = -\Delta\beta^2 + 4K_{12}^2$. Na figura F.1 são mostradas as soluções deste conjunto de equações, nesta figura pode-se notar o impacto da satisfação da condição de *phase-matching*. Especificamente, quando $g^2 < 0$ o argumento das funções hiperbólicas tornam-se complexos e, naturalmente, a amplitude dos campos irá oscilar periodicamente com z .

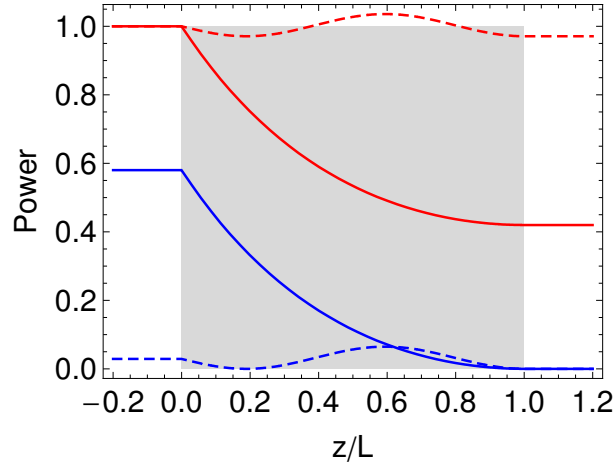


Fig. F.1: Solução das equações acopladas para o caso de retro-espalhamento, a região cinza indica a região de interação ($0 < z < L$); as condições de contorno utilizadas são $a_1(0) = 1$, $a_2(L) = 0$. As curvas vermelhas e azuis representam $a_1(z)$ e $a_2(z)$, respectivamente: as linhas sólidas são obtidas com $\Delta\beta = 0$, as linhas tracejadas com $\Delta\beta L = 8$. Note que quando a condição de phase-matching não é satisfeita, a energia é transferida periodicamente de uma onda para outra.

F.2.3 Acoplamento co-direcional

No acoplamento co-direcional, é interessante analisar o caso que representa o co-espalhamento Brillouin em fibras ópticas. Como os dois estados de polarização do modo fundamental são degenerados, assume-se $\Delta\beta_{12} = 0$ e $\beta_{ac} = 0$. Portanto, as equações acopladas ficam na forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_1}{\partial z} &= ia_1 K_{11} + ia_2 K_{12} \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} &= ia_1 K_{21} + ia_2 K_{22}\end{aligned}$$

A solução geral destas equações com as condições iniciais $a_1(z=0) = A_1$ e $a_2(z=0) = A_2$ é dada por

$$\begin{aligned}a_1(z) &= e^{\frac{1}{2}iz(K_{11}+K_{22})} \left(\cosh\left[\frac{gz}{2}\right] A_1 + \frac{i \sinh\left[\frac{gz}{2}\right] (2A_2 K_{12} + A_1 (K_{11} - K_{22}))}{g} \right) \\ a_2(z) &= e^{\frac{1}{2}iz(K_{11}+K_{22})} \left(\cosh\left[\frac{gz}{2}\right] A_2 + \frac{i \sinh\left[\frac{gz}{2}\right] (2A_1 K_{12} + A_2 (-K_{11} + K_{22}))}{g} \right)\end{aligned}$$

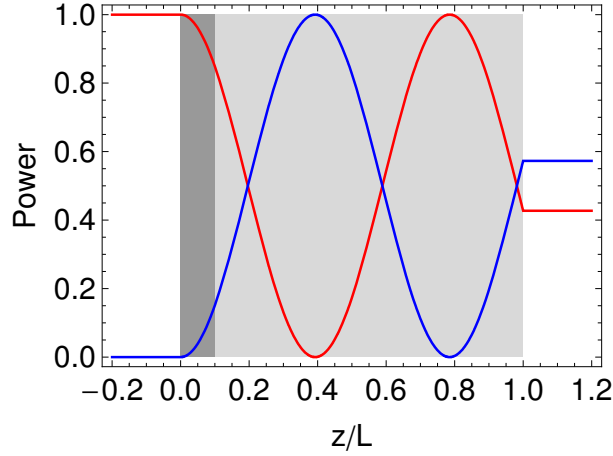


Fig. F.2: Solução das equações acopladas para o caso de co-espalhamento, a região cinza claro indica a região de interação ($0 < z < L$); as condições de contorno utilizadas são $a_1(0) = 1$, $a_2(L) = 0$, $K_{11} = K_{22}$ e $K_{12}L = 4$. As curvas vermelhas e azuis representam $a_1(z)$ e $a_2(z)$, respectivamente. A região destacada em cinza escuro representa o regime de acoplamento fraco ($gz \ll 1$), na qual a energia transferida entre os modos ainda não oscilou nenhum período.

sendo que $g^2 = -4K_{12}^2 - (K_{11} - K_{22})^2$. Para estas soluções, a condição $g^2 > 0$ requer que

$$K_{12}^2 > -\frac{1}{4}(K_{11} - K_{22})^2.$$

No entanto, para perturbações Hermitianas, K_{11} e K_{22} são números reais, logo $K_{12}^2 < 0$. O resultado disto é que as funções hiperbólicas irão sempre oscilar e a energia será transferida periodicamente entre a_1 e a_2 . Contudo, no limite de acoplamento fraco ($gz \ll 1$), as soluções podem ser aproximadas por

$$\begin{aligned} a_1(z) &\approx A_1 + i(A_1 K_{11} + A_2 K_{12})z, \\ a_2(z) &\approx A_2 + i(A_1 K_{12} + A_2 K_{22})z. \end{aligned}$$

Fisicamente, esta situação representa o caso em que o acoplamento é tão fraco que a distância de propagação não é suficiente para as amplitudes dos campos oscile. Na figura F.2 são mostradas as soluções deste conjunto de equações quando $K_{11} = K_{22}$ e $K_{12}L = 4$. A região destaca em cinza escura ilustra o regime em que a aproximação de acoplamento fraco é válida.

F.2.4 Perturbação de um único modo

Quando a perturbação não depende de z , a condição de *phase-matching* só é satisfeita para o mesmo modo óptico ou um modo degenerado. No caso em que a perturbação não acopla dois modos

degenerados ($K_{12} = 0$), a solução para as equações acopladas é trivial. Neste caso, cada modo óptico satisfaz uma equação independente,

$$\frac{\partial a_n}{\partial z} = ia_n K_{11} \quad (\text{F.17})$$

Esta equação é útil para encontrar a fase adquirida pelo modo óptico em algumas situações no co-espalhamento Brillouin. A solução desta equação é dada por

$$a_n(z) = \exp i \left(\sum_m K_{11}^{(m)} \right) z \quad (\text{F.18})$$

Substituindo este termo na eq. F.7, constata-se que a constante de propagação de cada modo será corrigida por

$$\beta_n \rightarrow \beta_n + \underbrace{\left(\sum_m K_{11}^{(m)} \right)}_{\Delta\beta} \quad (\text{F.19})$$

Portanto, define-se a perturbação da constante de propagação do modo $|\Psi\rangle$ como

$$\Delta\beta = \omega\epsilon_0 \frac{\langle\Psi| \Delta\epsilon |\Psi\rangle}{4P} \quad (\text{F.20})$$

Para escrever esta equação em uma forma mais familiar, utiliza-se a relação [29, 28]

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\beta}{k} \left\{ \mathbf{E}_t^* \cdot \mathbf{E}_t - \frac{i}{\beta} \mathbf{E}_t^* \cdot \nabla E_z \right\} \\ &\approx \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\beta}{k} \mathbf{E}_t^* \cdot \mathbf{E}_t \end{aligned}$$

Utilizando a eq. F.12, obtém-se

$$\Delta\beta = \frac{k^2}{2\beta} \frac{\iint \mathbf{E}^\dagger(x, y) \cdot \Delta\epsilon(x, y) \cdot \mathbf{E}(x, y) dx dy}{\iint \mathbf{E}_t^* \cdot \mathbf{E}_t dx dy} \quad (\text{F.21})$$

utilizando a definição de índice de refração efetivo (i.e., $\beta \equiv kn_{eff}$) chega-se a forma final para a perturbação do índice de refração efetivo,

$$\Delta n_{eff} = \frac{1}{2n_{eff}} \frac{\iint \mathbf{E}^\dagger(x, y) \cdot \Delta\epsilon(x, y) \cdot \mathbf{E}(x, y) dx dy}{\iint \mathbf{E}_t^* \cdot \mathbf{E}_t dx dy} \quad (\text{F.22})$$

Outra maneira de se obter esta equação é utilizando o princípio da reciprocidade eletromagnética [28, 124].

Apêndice G

Modos acústicos do guia cilíndrico

Na seção 6.2.2 foram mostrados alguns resultados importantes sobre os modos de uma barra isotrópica de vidro. Neste apêndice serão mostrados alguns detalhes e deduções dos resultados lá exibidos¹. Serão consideradas apenas as famílias de modos axial-radial (R_{0m}) e torsional-radial (TR_{2m}), pois eles são os que se acoplam eficientemente com o campo eletromagnético [84] no problema de co-espalhamento. Estes modos possuem a seguinte forma do vetor deslocamento (em coordenadas cilíndricas)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = W_p^{(m)}(r) \begin{Bmatrix} \sin p\theta \\ \cos p\theta \end{Bmatrix} \hat{r} + \Theta_p^{(m)}(r) \begin{Bmatrix} \cos p\theta \\ -\sin p\theta \end{Bmatrix} \hat{\theta} \quad (\text{G.1})$$

Neste sistema de coordenadas, o tensor de deformações é dado por [78, 99]

$$S_{rr} = \partial_r u_r \quad (\text{G.2a})$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta u_\theta \quad (\text{G.2b})$$

$$S_{r\phi} = \frac{1}{r} \partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} \quad (\text{G.2c})$$

A relação entre estas componentes em coordenadas cilíndricas e a forma contraída do tensor (veja seção D.1), é a mesma que vale para as componentes cartesianas do tensor (eq. D.2).

¹Um tratamento detalhado completo deste problema pode ser encontrado nas referências [99, 78, 100].

G.1 Modos R_{0m}

O vetor deslocamento para os modos R_{0m} é da forma [99]

$$\mathbf{u}_{R_{0m}} = A_1 J_1 \left(y_m \frac{r}{a} \right) \hat{r}. \quad (\text{G.3})$$

Portanto, as componentes não-nulas do tensor de deformações ficam na forma

$$S_{1R_{0m}}(r) = A_1 \left[\frac{1}{r} J_1 \left(y_m \frac{r}{a} \right) - \frac{y_m}{a} J_2 \left(y_m \frac{r}{a} \right) \right] \quad (\text{G.4a})$$

$$S_{2R_{0m}}(r) = A_1 \frac{1}{r} J_1 \left(y_m \frac{r}{a} \right). \quad (\text{G.4b})$$

Para escrevermos as componentes do tensor dielétrico, devemos transformar o tensor acusto-óptico para o sistema de coordenadas cilíndricas. Contudo, é possível mostrar que em meios isotrópicos o tensor transformado em coordenadas cilíndricas é exatamente igual ao tensor na forma cartesiana [78]. Conseqüentemente, as componentes não-nulas do tensor de perturbação são

$$\Delta\epsilon_1 = \Delta\epsilon_{rr} = -n^4 \left[p_{11} S_{1R_{0m}} + p_{12} S_{2R_{0m}} \right] \quad (\text{G.5a})$$

$$\Delta\epsilon_2 = \Delta\epsilon_{\theta\theta} = -n^4 \left[p_{12} S_{1R_{0m}} + p_{11} S_{2R_{0m}} \right] \quad (\text{G.5b})$$

$$\Delta\epsilon_3 = \Delta\epsilon_{zz} = -n^4 \left[p_{12} S_{1R_{0m}} + p_{12} S_{2R_{0m}} \right] \quad (\text{G.5c})$$

G.2 Modos TR_{2m}

O vetor deslocamento para os modos TR_{2m} é da forma [99]

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{TR_{0m}})_r &= \left\{ A_1 \frac{2}{(r/a)} J_2 \left(y_m \frac{r}{a} \right) - A_2 \left[\frac{2}{(r/a)} J_2 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) - \alpha y_m J_3 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) \right] \right\} \cos 2\theta \\ (\mathbf{u}_{TR_{0m}})_\theta &= \left\{ A_2 \frac{2}{(r/a)} J_2 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) - A_1 \left[\frac{2}{(r/a)} J_2 \left(y_m \frac{r}{a} \right) - y_m J_3 \left(y_m \frac{r}{a} \right) \right] \right\} \sin 2\theta \end{aligned}$$

sendo que $\alpha = V_s/V_l$ e $y_m = \Omega_m a/V_l$. Portanto, o tensor de deformações, em coordenadas cartesianas, fica na forma [84]

$$S_{1_{TR_{2m}}}(r, \theta) = \cos 2\theta \left\{ A_2 \left[\frac{-2}{(r/a)^2} J_2 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) + 5 \frac{\alpha y_m}{(r/a)} J_3 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) + (\alpha y_m)^2 J_4 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) \right] + \right. \\ \left. A_1 \left[\frac{2}{(r/a)^2} J_2 \left(y_m \frac{r}{a} \right) - \frac{2 y_m}{(r/a)} J_3 \left(y_m \frac{r}{a} \right) \right] \right\} \quad (G.7a)$$

$$S_{2_{TR_{2m}}}(r, \theta) = \cos 2\theta \left\{ A_2 \left[\frac{2}{(r/a)^2} J_2 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) + \frac{\alpha y_m}{(r/a)} J_3 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) \right] + \right. \\ \left. A_1 \left[\frac{-2}{(r/a)^2} J_2 \left(y_m \frac{r}{a} \right) + \frac{y_m}{(r/a)} J_3 \left(y_m \frac{r}{a} \right) \right] \right\} \quad (G.7b)$$

$$S_{6_{TR_{2m}}}(r, \theta) = \sin 2\theta \left\{ A_2 \left[\frac{4}{(r/a)^2} J_2 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) - \frac{4 \alpha y_m}{(r/a)} J_3 \left(\alpha y_m \frac{r}{a} \right) \right] + \right. \\ \left. A_1 \left[\frac{-4}{(r/a)^2} J_2 \left(y_m \frac{r}{a} \right) + \frac{4 y_m}{(r/a)} J_3 \left(y_m \frac{r}{a} \right) - y_m^2 J_4 \left(y_m \frac{r}{a} \right) \right] \right\}. \quad (G.7c)$$

Portanto, as componentes não-nulas do tensor de perturbação são

$$\Delta \epsilon_1 = \Delta \epsilon_{rr} = -n^4 \left[p_{11} S_{1_{TR_{2m}}} + p_{12} S_{2_{TR_{2m}}} \right] \quad (G.8a)$$

$$\Delta \epsilon_2 = \Delta \epsilon_{\theta\theta} = -n^4 \left[p_{12} S_{1_{TR_{2m}}} + p_{11} S_{2_{TR_{2m}}} \right] \quad (G.8b)$$

$$\Delta \epsilon_3 = \Delta \epsilon_{zz} = -n^4 \left[p_{12} S_{1_{TR_{2m}}} + p_{12} S_{2_{TR_{2m}}} \right] \quad (G.8c)$$

$$\Delta \epsilon_6 = \Delta \epsilon_{r\theta} = -n^4 p_{44} S_{6_{TR_{2m}}} \quad (G.8d)$$

G.3 Elementos do coeficiente de acoplamento

A integral de *overlap* que aparece no coeficiente de acoplamento na equação 6.2 possui, em sua forma explícita, 6 "componentes", sendo que cada uma delas acopla um par de componentes do vetor

campo elétrico. Em coordenadas cilíndricas, pode-se escrevê-las na forma

$$K^1 = \int (E_{1r}^* \Delta \epsilon_{rr} E_{2r}) r dr d\theta \quad (\text{G.9a})$$

$$K^2 = \int (E_{1\theta}^* \Delta \epsilon_{\theta\theta} E_{2\theta}) r dr d\theta \quad (\text{G.9b})$$

$$K^3 = \int (E_{1z}^* \Delta \epsilon_{zz} E_{2z}) r dr d\theta \quad (\text{G.9c})$$

$$K^4 = \int (E_{1\theta}^* \Delta \epsilon_{\theta z} E_{2z} + E_{1z}^* \Delta \epsilon_{z\theta} E_{2\theta}) r dr d\theta \quad (\text{G.9d})$$

$$K^5 = \int (E_{1r}^* \Delta \epsilon_{rz} E_{2z} + E_{1z}^* \Delta \epsilon_{zr} E_{2r}) r dr d\theta \quad (\text{G.9e})$$

$$K^6 = \int (E_{1r}^* \Delta \epsilon_{r\theta} E_{2\theta} + E_{1\theta}^* \Delta \epsilon_{\theta r} E_{2r}) r dr d\theta \quad (\text{G.9f})$$

Em razão da dependência angular dos modos acústicos das famílias R_{0m} e TR_{2m} , apenas algumas dessas componentes serão não-nulas. Quando os campos elétricos possuem simetria radial, pode-se deduzir relações entre os coeficientes de acoplamento quando o modo óptico possui simetria radial ($E_1 \propto \Psi(r) \hat{x}$ ou $E_2 \propto \Psi(r) \hat{y}$). As componentes destes modos em coordenadas cilíndricas são dadas por

$$\begin{aligned} E_1 &= \Psi(r) [\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}] \\ E_2 &= \Psi(r) [\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}] \end{aligned}$$

G.3.1 Família axial-radial

Na família R_{0m} , os elementos do tensor de perturbação [G.5](#) não dependem do ângulo azimutal, portanto é trivial mostrar que

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{22} \\ K_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, os modos R_{0m} não acoplam estados ortogonais de polarização, neste caso é válida a teoria de perturbação para um único modo óptico ().

G.3.2 Família torsional-radial

Existem duas polarizações para a família TR_{2m} , a eq. [G.6](#) representa àquela que oscila nas direções 0-90°. A polarização ortogonal pode ser obtida fazendo $\theta \rightarrow \theta/4$ na eq. [G.6](#).

Polarização 0/90

Os elementos do tensor de perturbação (eq. G.8) para esta polarização possuem a seguinte dependência angular

$$\Delta\epsilon_{rr} \propto \cos 2\theta$$

$$\Delta\epsilon_{\theta\theta} \propto \cos 2\theta$$

$$\Delta\epsilon_{r\theta} \propto \sin 2\theta$$

Portanto, os termos do coeficiente de acoplamento K_{11} serão dados por

$$\begin{aligned} K_{11}^1 &\propto \int \cos^2 \theta \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \\ K_{11}^2 &\propto \int \sin^2 \theta \cos 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{2} \\ K_{11}^6 &\propto - \int \sin \theta \cos \theta \sin 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De forma análoga, os termos do coeficiente K_{22} são dados por

$$\begin{aligned} K_{22}^1 &\propto \int \sin^2 \theta \cos 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{2} \\ K_{22}^2 &\propto \int \cos^2 \theta \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \\ K_{22}^6 &\propto \int \sin \theta \cos \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Como a integral radial envolvida nos termos de K_{11} e K_{22} são iguais, pode-se concluir que $K_{11} = -K_{22}$. Para o coeficiente de acoplamento entre os dois modos, K_{12} , é fácil mostrar de forma análoga que $K_{12} = 0$. Ou seja, a polarização 0/90 dos modos TR_{2m} não acopla os dois estados de polarização do modo óptico.

Polarização -45/45

Tomando $\theta \rightarrow \theta/4$, basta substituir $\cos 2(\theta + \pi/4) \rightarrow -\sin 2\theta$ e $\sin 2(\theta + \pi/4) \rightarrow \cos 2\theta$ e seguir o procedimento análogo ao feito acima, o resultado mostra que $K_{11} = K_{22} = 0$ e $K_{12} \neq 0$. Portanto, esta polarização acústica irá induzir apenas um acoplamento entre os dois estados de polarização.

Apêndice H

Método dos Elementos Finitos

Neste apêndice serão desenvolvidas as formulações do FEM (*Finite Element Method*) utilizadas nas soluções numéricas da equação de onda de Maxwell e da equação de onda elástica. Ambas as formulações serão restritas ao caso de guias de onda, com dependência temporal $e^{-i\omega t}$ e dependência da coordenada longitudinal $e^{i\beta z}$. Esta escolha irá permitir a formulação de problemas de autovalores generalizados em β^2 ou ω^2 . Será dado um enfoque simples para explicar o FEM, típico dos livros de engenharia e física.

O método dos elementos finitos para solução de equações diferenciais baseia-se em princípios variacionais. No ramo da física, métodos variacionais aparecem quando tenta-se resolver problemas seguindo princípios de minimização. Por exemplo, a lei de Snell da óptica de raios pode ser deduzida com base no princípio de Fermat: o caminho percorrido pelo feixe de luz é aquele que minimiza o caminho óptico. Em mecânica clássica é famoso o princípio da ação mínima de Hamilton: a trajetória temporal de um sistema mecânico é tal que a ação é minimizada. Outro exemplo comum em mecânica quântica é o método de Ritz. Neste método a idéia é tentar encontrar a função de onda (autovetor) e a energia (autovalor) de um sistema de partículas. O FEM pode ser interpretado como mais um entre estes métodos variacionais. De fato, em muitos livros sobre o tema, o método variacional é introduzido como uma maneira de encontrar funcionais cuja minimização resulte em soluções (ou quase-soluções) das equações desejadas (método de Ritz). Quando trata-se das equações de Maxwell, o problema de encontrar funcionais pode se tornar desafiador [126]; em particular quando trata-se de meios anisotrópicos e/ou absorvedores. Um método mais geral para encontrar estes funcionais é conhecido como método de Galerkin [127] (ou método dos resíduos ponderados). Devido a sua generalidade, este foi o método escolhido nesta tese.

H.1 Equação vetorial de Helmholtz e sua "forma fraca"

Os modos eletromagnéticos de guias de onda são soluções da equação de onda de Maxwell na ausência de fontes (veja cap. 2). No domínio da frequência esta equação de onda é denominada equação vetorial de Helmholtz. Esta equação pode ser escrita em termos do campo elétrico ($\mathbf{E}$) ou do campo magnético ($\mathbf{H}$). A equação vetorial de Helmholtz para o campo elétrico ($\Phi = \mathbf{E}$, $\mathbf{p} = \mu^{-1}$ e $\mathbf{q} = \epsilon$) ou magnético ($\Phi = \mathbf{H}$, $\mathbf{p} = \epsilon^{-1}$ e $\mathbf{q} = \mu$) pode ser escrita na forma.

$$\nabla \times (\mathbf{p} \nabla \times \Phi) - k_0^2 \mathbf{q} \Phi = 0 \quad (\text{H.1})$$

onde $k_0 = 2\pi/\lambda$ é o número de onda no vácuo.

Quando as propriedades do meio satisfazem certas restrições de simetria, é fácil encontrar um funcional associado à equação H.1. No caso geral, quando μ e ϵ são arbitrários, segue-se a receita do método de Galerkin para encontrar este funcional; multiplica-se equação H.1 por uma função peso $\mathbf{w}$ e integra-se o resultado sobre todo o domínio

$$\int \mathbf{w} \cdot \{\nabla \times (\mathbf{p} \nabla \times \Phi)\} dA - k_0^2 \int \mathbf{w} \cdot \{\mathbf{q} \Phi\} dA = 0 \quad (\text{H.2})$$

A equação acima pode ser desenvolvida usando o teorema de Gauss,

$$\int \left[(\nabla \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{p} \nabla \times \Phi) - k_0^2 \mathbf{w} \cdot (\mathbf{q} \Phi) \right] dA + \int_{\Gamma_N} (\hat{n} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{p} \nabla \times \Phi) d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \mathbf{w} \cdot (\hat{n} \times \mathbf{p} \nabla \times \Phi) d\Gamma = 0, \quad (\text{H.3})$$

onde as integrais de contorno foram separadas nas partes com condições de contorno do tipo Dirichlet (Γ_D) e do tipo Neumann (Γ_N). Estas condições são do tipo

$$\begin{cases} (\hat{n} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{p} \nabla \times \Phi) = 0 & \text{em } \Gamma_N \\ \mathbf{w} \cdot (\hat{n} \times \mathbf{p} \nabla \times \Phi) = 0 & \text{em } \Gamma_D \end{cases}$$

Assumindo que os contornos do domínio são condutores elétricos perfeitos (campo elétrico tangencial nulo) ou magnéticos perfeitos (campo magnético tangencial nulo), estas integrais irão se anular nos contornos. Portanto a forma fraca da equação de Helmholtz (H.1) com condições de contorno do tipo Neumann ou Dirichlet é dada pela equação integral,

$$\int \left[(\nabla \times \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{p} \nabla \times \Phi) - k_0^2 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{q} \Phi) \right] dA = 0. \quad (\text{H.4})$$

Note que a forma fraca envolve apenas uma derivada da função procurada Φ . Portanto esta forma

relaxa os requerimentos sobre continuidade desta função, daí a designação "fraca". Quando trata-se de guias de onda ainda é possível manipular a equação H.4 explorando a simetria contínua de translação ao longo do eixo z . Decompõe-se as funções Φ e w em suas partes transversal e longitudinal,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_x(x, y) \\ \phi_y(x, y) \\ \phi_z(x, y) \end{bmatrix} \exp(-i\beta z), \quad (\text{H.5a})$$

$$w = \begin{bmatrix} w_x(x, y) \\ w_y(x, y) \\ w_z(x, y) \end{bmatrix} \exp(-i\beta z). \quad (\text{H.5b})$$

Além disto, decompõe-se também o operador nabla, $\nabla = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z$. No caso em que ϵ e μ são tensores com todas as componentes não-nulas, o desenvolvimento destas equações envolve bastante álgebra. Como o este caso geral não é necessário para fibras ópticas, nesta tese foi concentrado no caso de anisotropia uniaxial (apenas as componentes da diagonal são não-nulos)¹. Substituindo as decomposições H.5a, H.5b na equação H.4 obtém-se duas equações na

$$C_0 + i\beta C_1 + \beta^2 C_2 = k_0^2 C_3 \quad (\text{H.6})$$

sendo que os coeficientes C_i são dados por,

$$C_0 = \int \left\{ p_{11} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right) + p_{22} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) + p_{33} \left[\frac{\partial w_x}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_y}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \right\} dA, \quad (\text{H.7a})$$

$$C_1 = \int \left[p_{11} \left(\phi_y \frac{\partial w_z}{\partial y} - w_y \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right) + p_{22} \left(\phi_x \frac{\partial w_z}{\partial x} - w_x \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) \right] dA, \quad (\text{H.7b})$$

$$C_2 = \int (p_{22} w_x \phi_x + p_{11} w_y \phi_y) dA, \quad (\text{H.7c})$$

$$C_3 = \int (q_{11} w_x \phi_x + q_{22} w_y \phi_y + q_{33} w_z \phi_z) dA. \quad (\text{H.7d})$$

H.2 Discretização

Para transformar a equação H.6 em um problema matricial de autovalores aplica-se o métodos dos elementos finitos. Inicialmente, o domínio no qual deseja-se resolver a equação é discretizado em pequenos subdomínios. Neste domínio discretizado, as integrais de área que aparecem na equação

¹A implementação de camadas absorvedoras (PML - Perfectly matched layer) nas bordas do domínio computacional exige este tipo de anisotropia.

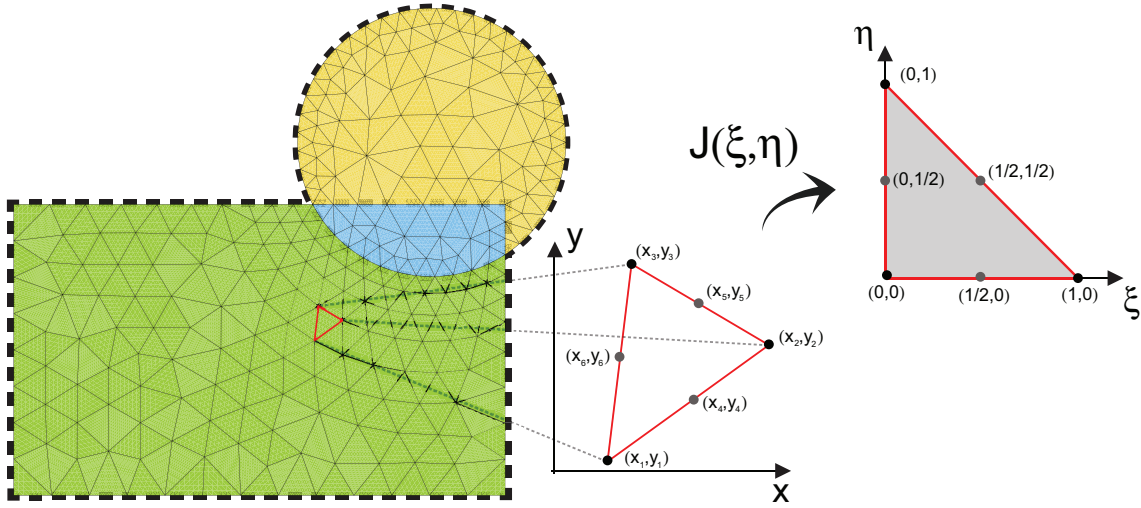


Fig. H.1: Discretização da seção transversal de uma estrutura utilizando elementos triangulares.

na eq. H.6 podem ser calculada a partir da contribuição de cada elemento da discretização,

$$\int dA \rightarrow \sum_e \int_e dA. \quad (\text{H.8})$$

Tipicamente utiliza-se quadriláteros ou triângulos na discretização de domínios bidimensionais; nesta tese foram utilizados exclusivamente triângulos. Na figura H.1 é ilustrado um domínio arbitrário discretizado em elementos triangulares. Note que a interface entre dois materiais distintos, representados na figura por diferentes cores, sempre coincide com a interface entre dois elementos. É importante ressaltar que a discretização pode ser feita de forma arbitrária dentro de cada região (ou material)². Na figura também é destacado em vermelho um dado elemento triangular. Como estes elementos possuem formas arbitrárias, os limites de integração na eq. H.8 seriam distintos para cada elemento. A implementação deste tipo de variação iria complicar o programa de computador que realiza estas integrais. Para contornar este problema, é feita uma transformação de coordenadas $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ que deforma os triângulos reais que compõem o domínio computacional em triângulos de referência. No triângulo de referência, os limites de integração são sempre os mesmos, facilitando o cálculo destas integrais. Esta transformação é descrita pelo Jacobiano J e será discutida a seguir.

²Existem limites para esta arbitrariedade. Por exemplo, os programas que fazem este tipo de discretização tentam evitar subdomínios cujas proporções na direção vertical e horizontal sejam muito distintas.

H.2.1 Elementos isoparamétricos e funções de base escalares

O sistema de coordenadas de referência ilustrado na Fig. H.1 é obtido após uma transformação de coordenadas. Este sistema de referência é equivalente às coordenadas baricentricas ou coordenadas de área [127, 128]. Como as funções de base utilizadas para expandir os campos serão definidas neste sistema de referência, é importante ter clara sua definição.

Coordenadas de área

Tomando as coordenadas dos vértices de cada triângulo como $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, define-se as coordenadas de área (L_1, L_2, L_3) de forma que um ponto no triângulo com coordenada $\mathbf{r}$ é escrito na forma

$$\mathbf{r} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + L_3 \mathbf{v}_3, \quad (\text{H.9})$$

sendo que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Geometricamente, $L_i = A_i/A$ sendo que A_i representa a área do triângulo cujos vértices são formados pelos pontos $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)$ ³. Como $L_3 = 1 - L_2 - L_1$, só existem dois parâmetros livres neste sistema de coordenadas. Na literatura sobre elementos finitos é comum denotar estes dois parâmetros livres por $L_1 \equiv \xi, L_2 \equiv \eta$. Na Fig. H.1, o triângulo de referência é desenhado neste sistema de coordenadas. A relação entre os dois sistemas pode ser obtida facilmente, basta escrever a eq. H.9 impondo a condição $\sum_i L_i = 1$,

$$x = x_3 + \xi(x_1 - x_3) + \eta(x_2 - x_3) \quad (\text{H.10a})$$

$$y = y_3 + \xi(y_1 - y_3) + \eta(y_2 - y_3) \quad (\text{H.10b})$$

A relação acima permite calcular como as derivadas (e integrais) se relacionam nos dois sistemas. Estas quantidades são de suma importância uma vez que são essenciais para se obter os coeficientes que aparecem na equação H.6.

Matriz Jacobiana

A relação entre derivadas nos dois sistemas é obtida através da regra da cadeia, a matriz obtida ao aplicar esta regra é denominada matriz Jacobiana,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\equiv J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (\text{H.11})$$

³Nesta definição, os índices i, j, k estão em ordem cíclica. Por exemplo, $L_1 = A_1/A$ com A_1 sendo a área formado pelo triângulo com vértices $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

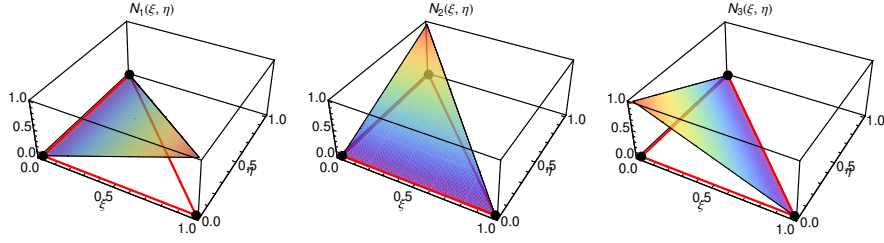


Fig. H.2: Polinômios interpoladores de Lagrange de 1ª ordem.

Invertendo a relação acima, pode-se expressar as derivadas em relação a (x, y) em termos das derivadas em relação a (ξ, η) ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} \left(J_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} \left(-J_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{H.12})$$

sendo que $|J(\xi, \eta)|$ representa o determinante da matriz Jacobiana, este determinante é usualmente denominado Jacobiano. Como o elemento de área é distorcido sob a transformação [H.10](#), as integrais sobre uma função $f(x, y)$ qualquer são escritas no sistema de referência na forma,

$$\int \int_e f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (\text{H.13})$$

As equações [H.11](#) e [H.13](#) são os dois ingredientes necessários para calcular as derivadas e integrais no domínio discretizado.

Funções de base (ou interpoladoras) de 1º ordem

Uma vez discretizado o domínio, pode-se aproximar a função icógnita por uma expansão polinomial. Esta expansão é na prática uma interpolação da função icógnita dentro de cada triângulo. O caso mais trivial ocorre quando utiliza-se polinômios lineares para fazer esta interpolação,

$$\Phi_e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} (\phi_x)_i N_i(x, y) \\ (\phi_y)_i N_i(x, y) \\ (\phi_z)_i N_i(x, y) \end{pmatrix} = \{N\}^T \{\phi_x\} \hat{x} + \{N\}^T \{\phi_y\} \hat{y} + \{N\}^T \{\phi_z\} \hat{z}, \quad (\text{H.14})$$

sendo que $(\phi_m)_i$ para $m = x, y, z$ são os coeficientes da expansão; as funções $N_i(x, y)$ são definidas localmente dentro de cada triângulo. As chaves indicam vetores contendo os coeficientes $\{\phi_m\} = \{(\phi_m)_1, (\phi_m)_2, (\phi_m)_3\}$ (dimensão 3×1) e as funções de base $\{N\}^T = \{N_1, N_2, N_3\}^T$ (dimensão 1×3).

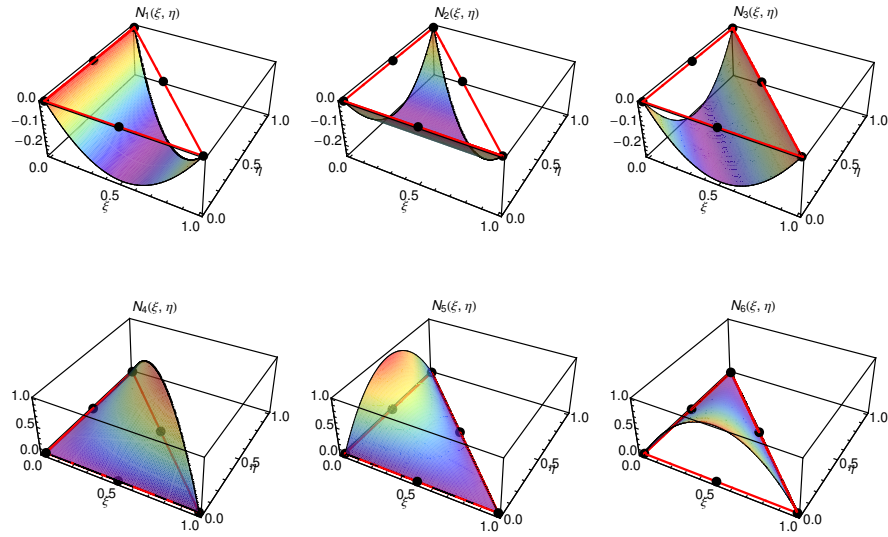


Fig. H.3: Polinômios interpoladores de Lagrange de 2ª ordem.

Estas funções são denominadas polinômios interpoladores de Lagrange. Em domínios triangulares, estes polinômios lineares são simplesmente dados pelas coordenadas de área [127, 126],

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= L_1 = \xi, \\ N_2(\xi, \eta) &= L_2 = \eta, \\ N_3(\xi, \eta) &= L_3 = 1 - \xi - \eta. \end{aligned}$$

Na figura H.2 são mostradas estas três funções no sistema de coordenadas (ξ, η) . Note que a ordem das funções interpoladoras utilizadas para expandir a função icógnita foi a mesma utilizada para representar a transformação de coordenadas (eq. H.10). Este tipo de representação é denominada isoparamétrica.

Funções de base de 2º ordem

É intuitivo esperar que ao se aumentar a ordem dos polinômios interpoladores, aumenta-se também a precisão do método. Contudo, para se construir funções interpoladoras de segunda ordem, é necessário dispor de mais do que três vértices no triângulo. Note que na figura H.1 o triângulo foi representado por seis pontos, sendo que três deles se situavam no ponto médio entre dois vértices adjacentes. Utilizando estes seis vértices é possível interpolar a função icógnita da mesma maneira forma que na eq. H.14, contudo os vetores $\{\phi_m\}$ e $\{N\}^T$ terão seis elementos. As as funções de segunda

ordem $N_i(x, y)$ no sistema de referência são dadas pelas expressões,

$$N_1(\xi, \eta) = L_1(L_1 - 1),$$

$$N_2(\xi, \eta) = L_2(L_2 - 1),$$

$$N_3(\xi, \eta) = L_3(L_3 - 1),$$

$$N_4(\xi, \eta) = 4L_1L_2,$$

$$N_5(\xi, \eta) = 4L_2L_3,$$

$$N_6(\xi, \eta) = 4L_3L_1.$$

nas quais $L_1 = \xi$, $L_2 = \eta$ e $L_3 = 1 - \xi - \eta$. Estas funções são mostradas na Fig. H.3.

Elementos curvilíneos

Além de representar a função icógnita por polinômios de segunda ordem, pode-se utilizar estas funções para realizar a transformação de coordenadas. Assim como no caso linear, esta equivalência de ordem manterá a representação isoparamétrica. A versão quadrática da transformação H.10 é dada por [127, 128],

$$x = \sum_{i=1}^6 x_i N_i(\xi, \eta), \quad (\text{H.15a})$$

$$y = \sum_{i=1}^6 y_i N_i(\xi, \eta). \quad (\text{H.15b})$$

Uma consequência da transformação quadrática das coordenadas é que torna-se possível representar triângulos curvilíneos. Neste caso os pontos medianos entre cada par de vértices adjacentes não são mais colineares. A Fig. H.4 ilustra este tipo de triângulo. A vantagem de utilizar elementos curvos é que pode-se melhor representar as interfaces tipicamente circulares encontrada sem fibras ópticas, melhorando a convergência do FEM [128]. Os elementos da matriz Jacobiana são calculadas tomando as derivadas da equação H.15, exatamente da mesma forma que foi feito para o caso linear.

H.2.2 Funções de base vetoriais

As funções de base discutidas na seção anterior formam o alicerce para representar os campos eletromagnéticos dentro de cada elemento triangular. O problema das funções de base de Lagrange é que elas impõem continuidade sobre todas as componentes do campo eletromagnético na interface

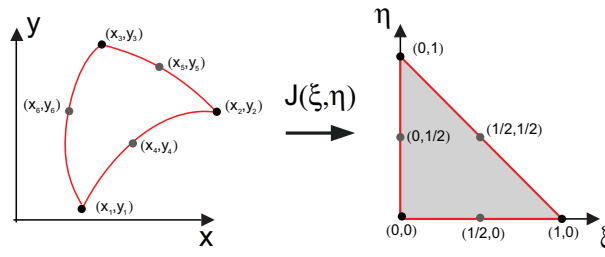


Fig. H.4: Elemento triangular curvilíneo.

entre dois materiais. Contudo, o comportamento dos campos E e H na interface entre dois materiais é distinto quando trata-se de meios dielétricos e não-magnéticos (i.e., $\mu = \mu_0$). Todas as componentes do campo magnético são contínuas na interface entre dois materiais, já o campo elétrico é contínuo apenas nas componentes tangentes à interface. Para poder representar estes campos de forma precisa é necessário considerar esta natureza descontínua. Esta descontinuidade exibida pela componente normal do campo exige funções de base que permitam relaxar a continuidade da componente normal. Funções interpoladoras deste tipo existem e são conhecidas como funções de Nedelec [128]. Como as componentes E_z, H_z dos campos eletromagnéticos são sempre tangenciais à qualquer interface em um guia de onda, elas serão aproximadas pelos polinômios convencionais de Lagrange. Nesta formulação mista, a função icógnita é expandida na forma

$$\Phi_e = \left(\{U\}^T \hat{x} + \{V\}^T \hat{y} \right) \{\phi_t\} + \{N\}^T \{\phi_z\} \hat{z}. \quad (\text{H.16})$$

sendo que $\{U\}$ e $\{V\}$ são vetores contendo as funções de Nedelec e $\{N\}$ contém as funções interpoladoras de Lagrange. Note que nesta expansão existe um coeficiente $\{\phi_z\}$ representando a expansão da componente z dos campos e um único coeficiente $\{\phi_t\}$ representando as componentes transversais (ϕ_x, ϕ_y) . Esta característica torna a expansão H.16 fundamentalmente diferente da expansão H.14. As funções de Nedelec são construídas permitindo que a projeção tangencial do campo transversal ϕ_t seja contínua enquanto sua projeção normal pode ser descontínua. O número de graus de liberdade (coeficientes) por elemento do domínio vai depender da ordem da interpolação da componente ϕ_z e da componente ϕ_t . Como deseja-se manter a representação isoparamétrica, serão usadas sempre aproximações quadráticas para a componente ϕ_z (6 graus de liberdade). Para a componente transversal ϕ_t , serão utilizadas aproximações lineares e quadráticas.

Funções de Nedelec de 1ª ordem: CT/LN (constant tangential/linear normal)

As funções de Nedelec de primeira ordem (CT/LN) interpolam a projeção tangencial dos campos com uma função constante e a projeção normal por uma função linear. Estas funções são obtidas a

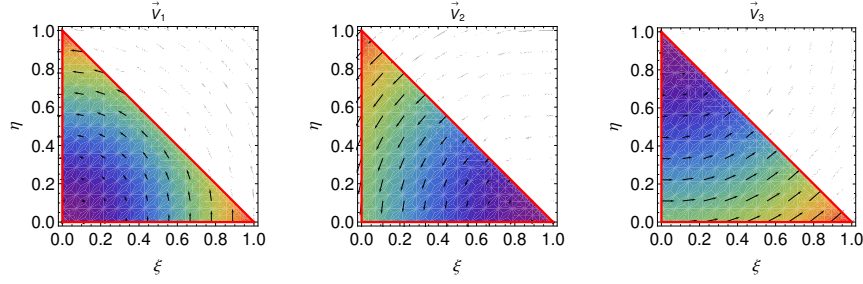


Fig. H.5: Funções de Nedgec do tipo CT/LN.

partir das coordenadas de área através das expressões,

$$V_1 = (|J|_1 |\nabla_t L_3|_1) (L_1 \nabla_t L_2 - L_2 \nabla_t L_1), \quad (\text{H.17})$$

$$V_2 = (|J|_2 |\nabla_t L_1|_2) (L_2 \nabla_t L_3 - L_3 \nabla_t L_2), \quad (\text{H.18})$$

$$V_3 = (|J|_3 |\nabla_t L_2|_3) (L_3 \nabla_t L_1 - L_1 \nabla_t L_3), \quad (\text{H.19})$$

sendo que os coeficientes $|J|_i |\nabla_t L_k|_i$ são simplesmente o comprimento da aresta i ; o subscrito i indica em qual dos vértices estas quantidades são calculadas. O operador diferencial é dado em termos das coordenadas cartesianas, $\nabla_t = \hat{x} \partial_x + \hat{y} \partial_y$, portanto é necessário utilizar a regra de transformação dada pela eq. H.12 para calcular estas funções. Na equação H.16 aparecem as projeções destas funções ao longo dos eixos cartesianos, $\{U\} = \{\hat{x} \cdot V_1, \hat{x} \cdot V_2, \hat{x} \cdot V_3\}$ e $\{U\} = \{\hat{y} \cdot V_1, \hat{y} \cdot V_2, \hat{y} \cdot V_3\}$. Na figura H.5 é mostrada a distribuição espacial destas funções.

Funções de Nedgec de 2ª ordem: LT/QN (linear tangential/quadratic normal)

As funções de Nedgec de segunda ordem (LT/QN) interpolam a projeção tangencial dos campos com uma função linear e a projeção normal por uma função quadrática. As funções de base de segunda ordem (LT/QN - *linear tangential/quadratic normal*) são dadas por [128, 129]

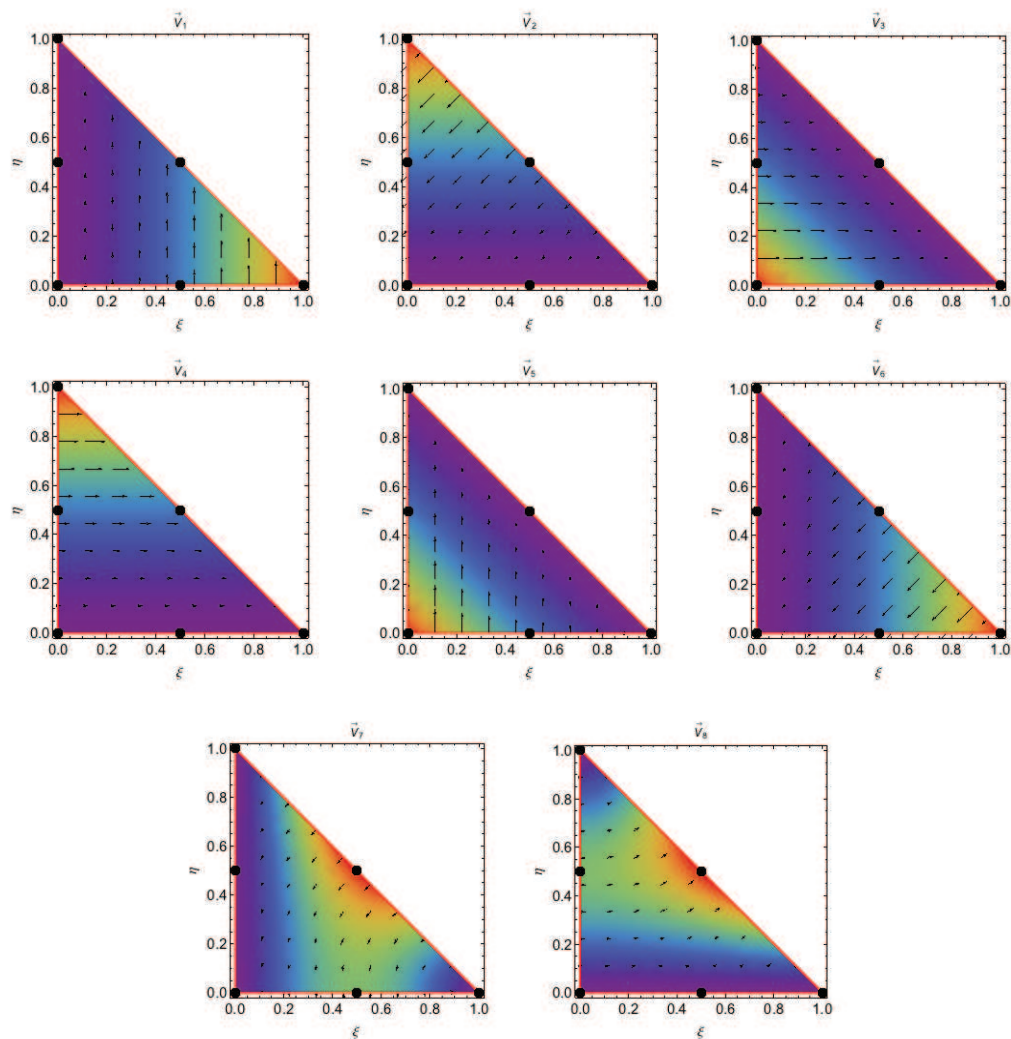


Fig. H.6: Funções de Nedelec de segunda ordem (LT/QN)

$$V_1 = (|J|_1 |\nabla_t L_3|_1) L_1 \nabla_t L_2, \quad (\text{H.20a})$$

$$V_2 = (|J|_2 |\nabla_t L_1|_2) L_2 \nabla_t L_3, \quad (\text{H.20b})$$

$$V_3 = (|J|_3 |\nabla_t L_2|_3) L_3 \nabla_t L_1, \quad (\text{H.20c})$$

$$V_4 = (|J|_2 |\nabla_t L_3|_2) L_2 \nabla_t L_1, \quad (\text{H.20d})$$

$$V_5 = (|J|_3 |\nabla_t L_1|_3) L_3 \nabla_t L_2, \quad (\text{H.20e})$$

$$V_6 = (|J|_1 |\nabla_t L_2|_1) L_1 \nabla_t L_3, \quad (\text{H.20f})$$

$$V_7 = 4 (|J|_4 |\nabla_t L_1|_4) L_1 (L_2 \nabla_t L_3 - L_3 \nabla_t L_2), \quad (\text{H.20g})$$

$$V_8 = 4 (|J|_5 |\nabla_t L_2|_5) L_2 (L_3 \nabla_t L_1 - L_1 \nabla_t L_3). \quad (\text{H.20h})$$

Portanto existem 8 graus de liberdade associados às funções de Nedelec de segunda ordem. Somando aos graus de liberdade associados com a componente ϕ_z , totalizam 14 graus de liberdade por elemento.

H.2.3 Equação matricial de autovalores

Uma vez definidas as funções de base que serão utilizadas para aproximar os campos eletromagnéticos, pode-se obter a versão matricial da forma fraca da equação H.6. É necessário nesta etapa escolher a função peso w . No método de Galerkin, a função peso pertence ao mesmo espaço de funções utilizado para expandir a função incógnita dentro de cada subdomínio. Portanto, w é definida localmente como

$$w_e = \{U\}^T \hat{x} + \{V\}^T \hat{y} + \{N\}^T \hat{z} \quad (\text{H.21})$$

Antes de substituir esta expansão na eq. H.6, note que na equação H.6 aparece um termo linear e complexo em β . Este termo linear implicaria em um problema matricial algébrico [31] em vez de um problema de autovalores. Contudo, pode-se evitar esta complicação fazendo a seguinte mudança de variáveis para a componente z das função Φ ,

$$\phi_z \rightarrow i\beta\phi'_z$$

Utilizando esta mudança de variáveis junto com a eq. H.21, o termo linear em β na equação H.6 é eliminado e esta pode ser rescrita na seguinte forma,

$$\sum_e (K_e \{\phi\}_e - \beta^2 M_e \{\phi\}_e) = 0 \quad (\text{H.22})$$

sendo que as matrizes $\mathbf{K}_e$ e $\mathbf{M}_e$ e o vetor de coeficientes $\{\phi\}_e$ representam a forma matricial da equação H.6 dentro de cada elemento. Estes termos são dados pelas expressões,

$$\{\phi\}_e = \begin{bmatrix} \{\phi_t\}_e \\ \{\phi'_z\}_e \end{bmatrix} \quad (\text{H.23})$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{H.24})$$

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{tz} \\ \mathbf{M}_{zt} & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{H.25})$$

com

$$\mathbf{K}_{tt} = \int_e \left(k_0^2 q_{11} \mathbf{U}\mathbf{U} + k_0^2 q_{22} \mathbf{V}\mathbf{V} + p_{33} (\mathbf{U}_y \mathbf{U}_y - \mathbf{U}_y \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_x \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_x \mathbf{U}_y) \right) dA, \quad (\text{H.26a})$$

$$\mathbf{M}_{tt} = \int_e (p_{22} \mathbf{U}\mathbf{U} + p_{11} \mathbf{V}\mathbf{V}) dA, \quad (\text{H.26b})$$

$$\mathbf{M}_{tz} = \mathbf{M}_{zt}^T = \int_e (p_{11} \mathbf{V} N_y + p_{22} \mathbf{U} N_x) dA, \quad (\text{H.26c})$$

$$\mathbf{M}_{zz} = \int_e (p_{22} N_y N_y + p_{11} N_x N_x - k_0^2 q_{33} \mathbf{N}\mathbf{N}) dA. \quad (\text{H.26d})$$

As matrizes elementares que aparecem nas equações H.26 são dadas por,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U} &= \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{U}\}, \\ \mathbf{V}\mathbf{V} &= \{\mathbf{V}\}^T \{\mathbf{V}\}, \\ \mathbf{N}\mathbf{N} &= \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\}, \\ (\mathbf{U}, \mathbf{V})_i (\mathbf{U}, \mathbf{V})_j &= \partial_i (\{\mathbf{U}\}^T, \{\mathbf{V}\}^T) \partial_j (\{\mathbf{U}\}^T, \{\mathbf{V}\}^T), \\ (\mathbf{V}, \mathbf{U}) N_j &= (\{\mathbf{V}\}^T, \{\mathbf{U}\}^T) \partial_j \{\mathbf{N}\}^T, \\ N_i N_j &= \partial_i \{\mathbf{N}\}^T \partial_j \{\mathbf{N}\}. \end{aligned}$$

O somatório na eq. H.22 acopla as equações em cada elemento. O resultado são matrizes globais $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ que incorporam as matrizes calculadas para cada elemento,

$$\mathbf{K} \{\phi\} = \beta^2 \mathbf{M} \{\phi\} \quad (\text{H.27})$$

A solução da equação H.27 é feita utilizando a biblioteca ARPACK, disponível gratuitamente na internet.

H.2.4 PMLs

A implementação das PMLs é feita seguindo a referência[64]. Nesta implementação basta considerar a PML como uma região do domínio computacional na qual os tensores ϵ e μ são dados por

$$\epsilon_{PML} = \frac{1}{\det s} s \cdot \epsilon \cdot s \quad (\text{H.28a})$$

$$\mu_{PML} = \frac{1}{\det s} s \cdot \mu \cdot s \quad (\text{H.28b})$$

sendo que o tensor s é dado por

$$s = \begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z \end{pmatrix}. \quad (\text{H.29})$$

Os parâmetro s_i são calculados pela expressão

$$s_i(\zeta) = 1 - i\alpha_{max}\zeta^2, \quad (\text{H.30})$$

sendo que ζ representa a distância percorrida dentro da PML. O parâmetro de atenuação é dado por $\alpha_{max} = \frac{3}{2k_0\beta d^3} \log(1/R)$, sendo que d é a espessura da PML e R é denominado coeficiente de reflexão, k_0 é o número de onda do vácuo e β é a constante de propagação esperada para o modo óptico a ser calculado. O valor ótimo deste coeficiente ($0 < R < 1$) depende do grau de refinamento da malha triangular. Na figura H.7 é ilustrada a geometria da PML, note que existem 8 regiões distintas pertencentes a PML. Em cada uma destas regiões, os valores de ζ são calculados de forma diferente. Além disto quando em os valores de s_i se anulam em diferentes regiões:

- Região 1 e 2: $s_y = 1$ e $s_x \neq 1$
- Região 3 e 4: $s_x = 1$ e $s_y \neq 1$
- Região 5-9: $s_y \neq 1$ e $s_x \neq 1$

Quando $s_i \neq 1$, este parâmetro é calculado segundo a expressão H.30. O parâmetro ζ para um ponto arbitrário da PML é sempre calculado em relação à distância horizontal ou vertical, do ponto em questão, em relação aos quatro pontos que definem o início da PML. Por exemplo, seguindo a nomenclatura da Fig. H.7, um ponto com coordenada (x_p, y_p) contido na região 5 terá os coeficientes

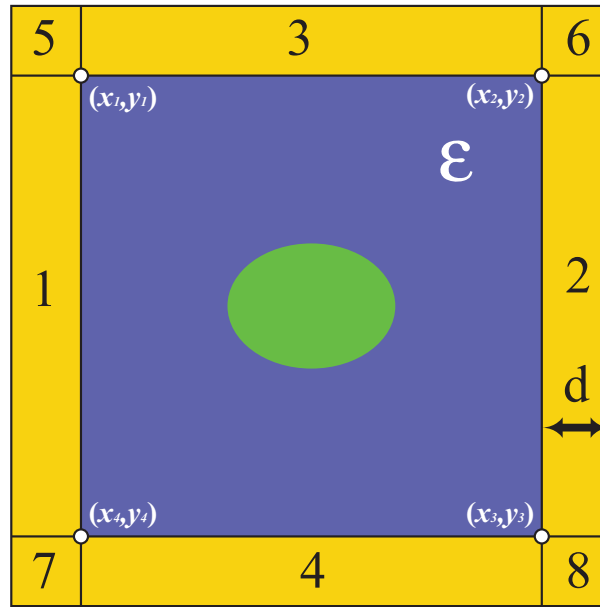


Fig. H.7: Exemplo da geometria das PMLs (em amarelo). O valor de ϵ utilizado nas equações H.28 deve ser o mesmo do material que é adjacente a ela (região azul)

dados por

$$\begin{aligned} s_x(\zeta) &= 1 - i\alpha_{\max} (x_p - x_1)^2, \\ s_y(\zeta) &= 1 - i\alpha_{\max} (y_p - y_1)^2. \end{aligned}$$

H.3 Equação de onda elástica

A equação que governa a dinâmica de sólidos elásticos na ausência de forças externas é dada por [78]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (\text{H.31})$$

onde $\mathbf{T}$ é o tensor de stress, $\rho(\mathbf{r})$ é a densidade do meio e $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ é o vetor que representa o deslocamento do material. Os modos normais de vibração são obtidos para $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \exp i\omega t$. Nesta condição a equação H.31 é dada por,

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0. \quad (\text{H.32})$$

Para resolver esta equação diferencial precisa-se de uma relação constitutiva entre o tensor de stress $\mathbf{T}$ e o deslocamento $\mathbf{u}$. Na aproximação elástica linear pode-se escrever a relação (lei de Hooke)

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S}, \quad (\text{H.33})$$

sendo que $\mathbf{S}$ é o tensor de tensões (*strain*). No caso de pequenas deformações (caso de interesse em materiais rígidos) o tensor de tensões se relaciona com o vetor de deslocamentos através da relação linearizada,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (\text{H.34})$$

Para resolver a eq. H.32 aplica-se o método de Galerkin para obter a forma fraca desta equação. Multiplica-se a eq. H.32 por uma função peso $\mathbf{w}$ e integra-se o resultado sobre todo o domínio. O funcional resultante (resíduo) será minimizado para encontrar as soluções do problema,

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{w} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \} dA = 0. \quad (\text{H.35})$$

Integra-se esta equação por partes usando a seguinte identidade vetorial [78]

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{T} : \nabla_s \mathbf{w}, \quad (\text{H.36})$$

onde o subscrito s indica o operador gradiente simetrizado, i.e. $\nabla_s \mathbf{w} = \nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T$. Como resultado obtém-se o seguinte funcional,

$$\int_{\Omega} \{ -\mathbf{T} : \nabla_s \mathbf{w} + \rho \omega^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \} dA + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \mathbf{T}) dA = 0. \quad (\text{H.37})$$

Pode-se aplicar o teorema de Gauss no último termo da direita e transformá-lo em uma integral de linha sobre os contornos

$$\int_{\Omega} \{ -\mathbf{T} : \nabla_s \mathbf{w} + \rho \omega^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \} dA + \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma = 0, \quad (\text{H.38})$$

onde o vetor $\hat{\mathbf{n}}$ indica a direção normal ao contorno definido pela curva Γ . Precisa-se especificar condições de contorno para resolver univocamente o problema acima, as condições de contorno físicas de interesse são da seguinte forma;

1. Interface sólido-sólido: $(\eta_j T_{ij})^{M_1} = (\eta_j T_{ij})^{M_2}$
2. Interface livre: $\eta_j T_{ij} = 0$
3. Interface fixa: $u_j = 0, j = 1, 2, 3$

Em qualquer das situações acima a integral de contorno se anula e, portanto, não é necessário considerá-la. As condições de contorno do tipo 1 e 2 são conhecidas como condições naturais pois são automaticamente satisfeitas na formulação, já a condição 3 precisa ser imposta eliminando os graus de liberdade associados a este contorno. Será considerado que a interface entre o vidro e o ar satisfaz a condição 2, ou seja, assume-se que o ar se comporta como o vácuo e, portanto, nestas interfaces o sólido pode se movimentar livremente. Esta aproximação é razoável para ondas de alta frequência, como aquelas presentes no espalhamento Brillouin.

Seguindo a estratégia típica no FEM, divide-se o domínio computacional em triângulos e expande-se o vetor deslocamento dentro de cada triângulo da seguinte forma

$$\mathbf{u}_e = [\mathbf{N}]^T \{u\}_e \quad (\text{H.39})$$

sendo

$$\{u\}_e = \begin{bmatrix} \{u_x\}_e \\ \{u_y\}_e \\ \{u_z\}_e \end{bmatrix} \quad (\text{H.40})$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \{N\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{N\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & j\{N\} \end{bmatrix} \quad (\text{H.41})$$

onde $\{u_x\}_e$, $\{u_y\}_e$ e $\{u_z\}_e$ são, respectivamente, vetores coluna contendo o coeficiente da expansão das componentes x , y e z do deslocamento, $\{N\}$ é um vetor 6×1 contendo as funções de interpolação de Lagrange de segunda ordem e, portanto, $[\mathbf{N}]$ é uma matriz 18×3 , o superscrito T denota a matriz transposta. No caso de ondas acústicas, não é necessário introduzir funções de base vetoriais porque todas as componentes do vetor deslocamento $\mathbf{u}$ são contínuas nas interfaces. Substituindo as expressões acima na equação H.38, obtém-se o seguinte problema generalizado de autovalores

$$\mathbf{K} \{u\} = \omega^2 \mathbf{M} \{u\}, \quad (\text{H.42})$$

onde as matrizes globais $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ são dadas por

$$\mathbf{K} = \sum_e \int [B_u]^* \mathbf{c} [B_u]^T dA, \quad (\text{H.43})$$

$$\mathbf{M} = \sum_e \int \rho [\mathbf{N}]^* [\mathbf{N}]^T dA, \quad (\text{H.44})$$

onde a soma $\sum_e$ se estende sobre todos os elementos do domínio e a matriz $[B_u]$ 18×6 é dada por

$$[B_u] = \begin{bmatrix} \{N_x\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & -i\beta \{N\} & \{N_y\} \\ \{0\} & \{N_y\} & \{0\} & -i\beta \{N\} & \{0\} & \{N_x\} \\ \{0\} & \{0\} & \beta \{N\} & i\{N_y\} & i\{N_x\} & \{0\} \end{bmatrix}, \quad (\text{H.45})$$

onde $\{N_x\}$ e $\{N_y\}$ são derivadas cartesianas do vetor $\{N\}$ e β é a constante de propagação na direção z . Para resolver a equação [H.42](#) é utilizado o método de Arnoldi, que está disponível na biblioteca ARPACK (Arnoldi Package).