

Este exemplar corresponde à
redação final da tese de
Mestrado defendida pelo
aluno Alex Itiro Shimabukuro
e aprovada pela comissão
julgadora

Campinas 13/09/96

Márcio Antônio J. R.

"ÁLGEBRAS 'S' KAC-MOODY"

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Instituto de
Física "Gleb Wataghin", sob
orientação do Prof. Dr. Márcio
Antônio de Faria Rosa.

UNICAMP
1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Sh62a Shimabukuro, Alex Itiro
Álgebras S^3 Kac-Moody / Alex Itiro Shimabukuro. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador: Márcio Antônio de Faria Rosa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Kac-Moody, Álgebra de. 2. Grupos quânticos. 3. Álgebras de Lie de dimensão infinita. I. Rosa, Márcio Antônio de Faria. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

UNIDADE IFGW
N.º CHAMADA: 11/1111 CAMP/M
Sh. 622
V. Ex. 28720
TOMBO BC 669196
PROC. 669196
C ☐ D ☒ X
PREÇO 1100
DATA 01/10/96
N.º CPD C.M. 00093350-1

1F/1042

m

10/10/97

Para 3 grandes mulheres:
minhas irmãs Mônica e Kátia,
e minha esposa Kênia.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus “chapas” (e suas respectivas), Er (e Gi), Oswaldo (e Mel) : “É isso aí !”, a todos os Kemps (e afins); aos companheiros do(e) grupo (Terra, tal e coisa), aos loucos de 88 (Mazza, tal e coisa), os absolutamente loucos do DRCC (Biral, tal e coisa) e aos outros de acolá (Érica, Kiko e Ju, e tal e coisa).

Agora, grato aos que me mantiveram mundano e “segurando a onda”: ao maior, Miles Davis; aos gênios Fripp e Wenders, aos anjos Coltrane, Paulinho da Viola e tantos outros; aos guardiões Telê, Lula, Scandurra, os Fugazzi e muitos outros de muito mais ainda; à 320 H.N., à frase do cárcere, às cervejarias do Mundo afora, ao “duzenlão”, o “Sono” e tudo mais que foi e é “Massa”.

Aos Professores G. Cabrera, M.Guzzo, W. Rodrigues, V. Rivelles, N. Berkovitz, V. Figueiredo, L. San Martin, H. Torriani e especialmente ao grande Mestre Prof. Caticha.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, ao EZLN e ao SPFC.

Agradecimentos muito especiais aos meus pais Tieko e Kanitiro pelo Lar, à Eliane pela Luz, e finalmente, pela oportunidade de realizar este trabalho, por tudo que me ensinou e tudo que teve de aturar, ao orientador e amigo Prof. Dr. Márcio Rosa (grande Homem).

SUMÁRIO

Introdução	01
1. Grupos de Lie	02
1.1 - Definição	
1.2 - A álgebra de Lie de um grupo de Lie	
2. Álgebras de Lie Semi-Simples (de dimensão finita)	07
2.1 - Álgebras de Lie g	
2.2 - Generalidades	
3. Estrutura das Álgebras de Lie Semi-Simples	12
3.1 - As subálgebras de Cartan e a decomposição em espaços de raízes	
3.2 - Propriedades de ortogonalidade	
3.3 - Propriedades de racionalidade	
4. Sistema de Raízes	23
4.1 - Grupo de Weyl, Câmaras de Weyl e raízes simples	
4.2 - Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin	
5. Cociclos	33
5.1 - 1 e 2 cociclos	
5.2 - 2 cociclos	
6. Álgebras Kac-Moody (untwisted)	43
7. Aplicações	53
Apêndice I - 'O grupo de cohomologia de álgebras de Lie'	58
Apêndice II - 'Demonstração da unicidade do funcional simétrico $f: g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ para álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita'	60
Apêndice III - 'Simetrias e teorias de gauge'	62
Bibliografia	70

• Introdução

Uma das teorias mais básicas e centrais da Matemática Contemporânea é a Teoria de Killing-Cartan para a estrutura das álgebras de Lie semi-simples. As álgebras de Kac-Moody compõem uma classe de álgebras de Lie de dimensão infinita que podem ser vistas como uma extensão natural das álgebras de Lie semi-simples.

Em particular, a teoria de estrutura de Killing-Cartan pode ser apropriadamente estendida, de maneira a incluir as Álgebras Kac-Moody.

Por outro lado as Álgebras de Kac-Moody afins (sem torção) podem ser vistas como extensões centrais das Álgebras de Lie de dimensão infinita associada ao grupo das aplicações de S^1 (o círculo) em Grupos de Lie semi-simples. Nesse trabalho examinamos uma generalização das álgebras de Kac-Moody considerando as aplicações de S^3 (a 3-esfera) em grupos de Lie semi-simples. Empregando somente argumentos algébricos concernentes a esta "Álgebra S^3 Kac-Moody", obtemos a fórmula de Fadeev de "Operator Anomaly for the Gauss Law". Ainda, nosso resultado sugere uma generalização natural para as Álgebras de Kac-Moody, construídas das álgebras de Lie associadas ao grupo das aplicações dum espaço simétrico em um grupo de Lie semi-simples.

Cabe ressaltar que, por essas álgebras serem isomorfas às álgebras das transformações de Gauge de uma teoria de Gauge, o estudo acurado dessas estruturas ganham enorme relevância também na Física.

1. GRUPOS DE LIE

Dada a importância do estudo dos grupos de Lie na Física, em particular nas teorias de “gauge”, faremos uma breve discussão sobre estes. Desta forma, estaremos introduzindo também as álgebras de Lie que terão posteriormente um estudo mais acurado.

1.1. Definição

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável, munida de uma estrutura de grupo, onde as operações de produto $(* : G \times G; \widehat{g_1} * g_2 = g_1 g_2 \in G, \forall g_1, g_2 \in G)$ e inversão $(^{-1} : G \rightarrow G; g_1 \rightarrow g_1^{-1}, \forall g_1 \in G)$ são diferenciáveis. Chamaremos de e a unidade de G .

Um particular caso de grupos de Lie são os grupos de matrizes, que frequentemente aparecem na física como grupos de simetria de uma dada teoria. Tais grupos são sub-grupos do grupo geral linear $GL(n, \mathbb{C})$; são chamados na teoria Lie-algébrica de grupos clássicos e são dados por:

Grupo	Família de Cartan
$Sl(n) = \{M \in Gl(n), \det M = 1\}$	A_{n-1}
$SO(2n+1) = \{M \in Gl(2n+1), \det M = 1, MM^t = 1\}$	B_n
$SO(2n) = (\text{difere de } SO(2n+1) \text{ somente na paridade da dimensão}$ $\left. \begin{array}{l} \text{, para } n = 2k+1 \text{ o grupo é } B_k \\ n = 2k \text{ o grupo é } D_k \end{array} \right\}$	D_n
$Sp(2n) = \{M \in Gl(2n)/M^t J M = J\}$ onde $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$	C_n
$SU(p, q) = \{M \in Gl(n), p+q = n/M^* g M = g\}$ onde $J = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q \end{pmatrix}$	A_{n-1}

e M^* indica a transposições e a conjugação das entradas das matrizes.

Tais grupos são usuais na física, seja em mecânica clássica, relativística ou quântica.

Para observar que são variedades (o fato de serem grupo é óbvio), devemos ver que estes estão mergulhados num espaço euclidiano n^2 (na verdade $(2n)^2$ ou $(2n+1)^2$, da maneira que foram construídos) dimensional. Além disto, a restrição imposta aos seus elementos determinam a forma de como tais mergulhos são dados.

Ex. Vamos assumir que $Gl(n, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie. Usaremos um teorema auxiliar (não-será provado) para nos elucidar um pouco:

Teorema: Todo subgrupo fechado H de um grupo de Lie é subgrupo de Lie (enquanto variedade)

Pois bem, no caso do $SL(n)$, temos uma função contínua $\det: Gl(n) \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada elemento $A \in Sl(n)$ a um número.

Tomando o valor inverso de $\{1\}$ que é fechado em $\mathbb{R}$ temos um fechado em $Gl(n)$ já que $\det$ é uma função contínua.

Notemos agora $\det^{-1}\{1\} = Sl(n)$, que portanto é subgrupo de Lie. Da mesma forma verifica-se que $SO(n), SU(p, q)$ são subgrupos fechados de $Sl(n)$.

1.2. A Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

Dado que os grupos de Lie são variedades, podemos falar em espaço tangente, e em particular tangente à identidade: a álgebra de Lie do grupo.

No caso dos grupos clássicos podemos calcular explicitamente seus elementos diferenciando curvas que passam pela identidade.

Ex: Tomemos a curva, parametrizada por t , no grupo. $SU(2)$, passando pela identidade, ie, $U(t)$ é tal que $U(0) = \mathbb{1}$.

Já que $U(t) \in SU(2)$ temos que $UU^* = 1$ e $\det U = 1$ diferenciando tais propriedades, temos:

$$\left. \frac{d UU^*}{dt} \right|_{t=0} = \dot{U} + \dot{U}^* = 0 \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \det U \right|_{t=0} = \text{Tr} \dot{U} = 0$$

Portanto a álgebra de Lie do grupo de Lie $Su(2)$ é dada pelo conjunto de matrizes antihermitianas e de traço 0. No que segue a álgebra de Lie de um grupo de Lie G será denotada por $\mathfrak{g}$ (ou $\mathcal{G}$).

A álgebra de Lie de um grupo G é isomorfa ao conjunto dos campos invariantes à esquerda, onde a translação à esquerda é um difeomorfismo de G em G dado por:

$$L_a.g = ag, \quad a, g \in G, \quad L_a : G \rightarrow G$$

Então, dado $V \in TeG(\simeq \mathfrak{g})$ deve existir um único campo X_v com a propriedade $X_v|_g = L_g * V$, tal que $L_{a*}X_v|_g = X_v|_{ag}$, da mesma forma que um campo X invariante à esquerda define um único vetor $V = X_e \in TeG$ (por abuso de linguagem denotaremos de $\mathfrak{g}$ também o conjunto de campo invariantes). Tal conjunto de campos invariantes é fechado pelo parênteses de Lie, $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, onde $\mathcal{X}$ é o conjunto de todos os campos diferenciáveis. Então, estamos afirmando que se calcularmos o parênteses na restrição dos campos invariantes à esquerda, teremos um campo invariante à esquerda, ie,

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag}. \quad (1.3)$$

Tal parênteses é bilinear e goza das seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad [X, Y] &= -[Y, X] \quad (\text{antisimetria}) \\ \text{(ii)} \quad [X, [Y, Z]] &+ [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad (\text{id. de Jacobi}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

para $X, Y, Z \in g$.

Obs: Em geral, qualquer módulo M , munido de um produto $[\cdot, \cdot] : M \times M \rightarrow M$ com tais propriedades forma uma álgebra de Lie. No capítulo seguinte estudaremos, de forma geral, o caso em que M é espaço vetorial.

Uma outra propriedade dos campos que se particulariza no caso de campos invariantes à esquerda é a existência de fluxos (flows) $\{\sigma(t, x_0)\}$ gerados por tais campos $\{X\}$, obedecemos $\frac{d}{dt}\sigma(t, x_0) = X(\sigma(t, x_0))^{(1)}$, ie, $\sigma(t, x_0)$ é curva integral de X passando por X_0 em $t = 0$, com a propriedade de $\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0)$ (decorre do teorema de existência e unicidade de solução de equações diferenciais⁽¹⁾).

Tal fluxo é chamado de aplicação exponencial (ou exponenciação) dado que obedece as seguintes propriedades algébricas da exponenciação.

$$\text{para} \quad \sigma(t, x_0) = x_0 \exp(tX).$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sigma(0, x_0) &= x_0 (= \exp(0X)x_0) \\ \text{(ii)} \quad \frac{d\sigma}{dt}(t, x_0) &= \frac{d}{dt}(\exp tX)x_0 = X(\exp tX)x_0 = X(\sigma(t, x_0)) \\ \text{(iii)} \quad \sigma(t, \sigma(s, x_0)) &= \sigma(t, \exp(sX)x_0) = \exp(tX) \exp(sX)x_0 \\ &= \exp((t + s)X)x_0 = \sigma(t + s, x_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

No caso da variedade ser um grupo de Lie G , tomemos os fluxos gerados por campos invariantes à esquerda, com $\sigma(0, x_0) = x_0 = e$. Temos:

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{t=0} = X(\sigma(0, e)) = X_v|_e = V, \quad \text{onde } X_v \text{ é campo invariante gerado por } V \in TeG(=g)$$

Para o caso em que $\sigma(0, g) = g, g \in G$

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{t=0} = X_v|_g = Lg * X_v|_e = Lg * V = gV \quad (\text{matricialmente}).$$

Então se o fluxo gerado por X_v passando por x tem valor $X_v|_x = xV$ em $t = 0$, então $\sigma(t, g) = x \exp(tV)$, onde $\exp(tV) = \sigma(t, e)$.

Esta curva $x \exp(tV) = x(t)$ é uma aplicação de $g \rightarrow G$. No caso de usarmos a representação matricial, a aplicação levará uma matriz $V = V_i \tau^i$, onde $\{\tau^i\}$ é base de g , em G usando da exponenciação de matriz, i.e., se $A \in Gl(v)$

$$\exp A = \mathbb{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Por outro lado, qualquer elemento do grupo numa vizinhança da identidade pode ser escrito na forma

$$x = \exp Vt, \text{ para algum } V \in TeG(= g)$$

Em suma, a álgebra de Lie g de um grupo de Lie G é o espaço tangente à identidade de G (visto como uma variedade diferenciável). Para o grupo de matrizes $Gl(n, \mathbb{C})$, (e seus subgrupos) a álgebra de Lie será, então, um espaço vetorial (dado que é espaço tangente) também de matrizes, com um produto (o parênteses de Lie, ou comutador) $[\cdot, \cdot]: g \times g \rightarrow g$ que verifica as propriedades de bilinearidade; antisimetria e a identidade de Jacobi.

Além disso no caso de grupos matriciais, dado um elemento (uma matriz) $A \in g$, a aplicação $\exp: g \rightarrow G$, que leva tA em $\exp(tA) = g(t)$ que é uma curva em G passando pela identidade. Por outro lado, para elementos de G próximo à identidade na vizinhança podemos escrevê-los como e^{tA} , para algum $A \in g$.

Finalmente, para os grupos clássicos, podemos caracterizar totalmente os elementos da álgebra de Lie, procedendo como em (1.2). Obtemos então:

g (com corpo $\mathbb{R}$)	Características	Dimensão	
$sl(n) = A_{n-1}$	$Tr X = 0$	$n^2 - 1$	
$so(2n+1) = B_n$	$X^t + X = 0$	$2n(2n+1)$	(1.7)
$sp(2n) = C_n$	$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -At \end{pmatrix}, B^t = B, C^t = C$	$n(2n+1)$	
$so(2n) = D_n$	$X^t + X = 0$	$n(2n-1)$	

Dado que um elemento de G (perto da identidade), pode ser escrito como função de elementos de g , e como g é espaço vetorial (portanto tem base, etc...) concentraremos nossas atenções no estudo das álgebras de Lie.

2. ÁLGEBRAS DE LIE SEMI-SIMPLES (DE DIM. FINITA)

2.1. Álgebras de Lie g

Um álgebra de Lie consiste num espaço vetorial V sobre um corpo F , munido de um produto $[,] : V \times V \rightarrow V$, que chamaremos de comutador com as seguintes propriedades: para $a, b, c \in V, \alpha, \beta \in F$

- (a) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$ (bilinearidade)
- (b) $[a, b] = -[b, a]$ (antisimetria)
- (c) $[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0$ (identidade de Jacobi)

*

Tomemos V como espaço vetorial de dimensão finita. Seja n a dimensão de V , e $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ uma base de V . Por bilinearidade, o comutador $[,]$ é completamente determinado em g se soubermos os valores na base, i.e., $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$ ($k = 1 \dots n, c_{ij}^k \in F$). Os números c_{ij}^k são as constantes de estrutura de g (relativa à uma base dada).

Uma representação de uma álgebra de Lie num espaço vetorial W é um Homomorfismo ρ de g nas transformações lineares de W , de forma que

$$\rho : g \rightarrow GL(W),$$

$$(a) \rho(\alpha a + \beta b) = \alpha \rho(a) + \beta \rho(b)$$

$$(b) \rho([a, b]_g) = [\rho(a), \rho(b)] = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a)$$

onde $a, b \in g, \alpha, \beta \in F$ e $[,]_g$ é comutador em g .

Uma representação ρ é fiel se o núcleo dela for 0, i.e., $\ker \rho = 0$

. No que seguirá, toda vez que nos referirmos a representações, estas serão fieis.

* Recordando, denotaremos a álgebra de Lie referente a um grupo de Lie G por g .

2.2. Generalidades

(a) Dizemos que s é subálgebra de g se s for fechada com respeito ao comutador, i.e., se $s_1, s_2 \in s$, $[s_1, s_2] \in s, \forall s_1, s_2$.

(b) Uma soma direta de 2 álgebras de Lie $a, b, g = a + b$, ocorre quando $[a, b] = 0$. Denotaremos por $g = a \oplus b$

(c) Uma álgebra g é soma semi-direta de duas subálgebras a e b se $[a, b] \subset a$. Denotaremos por $g = a \oplus_s b$.

(d) Uma subálgebra s é um ideal de g se $[s, g] \subset s$, i.e., $[a, b] \subset s$ sempre que $a \in g, b \in s$.

(e) O centro de g é o maior ideal $C \subset g$ tal que $[g, C] = 0$. Ele é único.

(f) O conjunto de comutadores $[g, g]$ é um ideal de g , já que $[a, b] \subset [g, g]$ sempre que $b = [c, d], a, c, d$ quaisquer. Chamamos de $g^{(1)}$ este ideal. Similarmente $g^{(2)} = [g^{(1)}, g^{(1)}]$ é ideal de $g^{(1)}$ e portanto de g . Geramos então uma sequência de ideais de g na forma $g^{(n+1)} = [g^{(n)}, g^{(n)}] \subset g^{(n)} \subset g$. Dizemos que a álgebra g é solúvel se para algum $n, g^{(n)} = 0$.

(g) Tomemos agora uma outra sequência de ideais na forma $g_{(n+1)} = [g, g_{(n)}]$ (note $g^{(1)} = g_{(1)}$). Dizemos que g é nilpotente se para algum $n, g_{(n)} = 0$.

Note que $g^{(n)} \subseteq g_{(n)}$, i.e., nilpotência implica em solubilidade.

(h) O radical R de uma álgebra de Lie é o ideal maximal solúvel. (é único e contém todos os outros ideais).

(i) Uma álgebra de Lie g é chamada semi-simples se ela não contém nenhum ideal abeliano, e é chamada de simples se não contém ideais além de g .

Portanto para g simples se $c \in g, \exists a, b \in g$ tal que $[a, b] = c$.

(j) Se g é uma álgebra de Lie e $X \in g$, o operador adX que mapeia $Y \in g$ em $[X, Y]$, é uma transformação linear de g em g . De fato a aplicação que leva $X \rightarrow adX$ é representação de g em g . É fácil checar que $ad[X, Y] = [adX, adY]$ (usando identidade de Jacobi).

Note que tal representação, chamada adjunta, não é fiel, pois tem como núcleo o centro de g . No entanto, no caso de álgebras semi simples, como g não contém ideais abelianos ($\neq \{0\}$) seu centro é $\{0\}$. Logo, neste caso, a representação adjunta é fiel.

(k) A forma de Killing de uma álgebra de Lie é uma forma bilinear simétrica $K : g \times g \rightarrow \mathbb{F}$ dada por

$$K(X, Y) = \text{Tr}(adX, adY). \quad (2.2)$$

Se ρ é automorfismo em g (i.e., $\rho : g \rightarrow g, \rho[X, Y] = [\rho(X), \rho(Y)]$) então

$$K(\rho(X), \rho(Y)) = K(X, Y).$$

Seja D uma derivação em g , i.e., $D : g \rightarrow g$ tal que $D[a, b] = [Da, b] + [a, Db], a, b \in g$. Então a forma de Killing é invariante por D no seguinte sentido: $K(DX, Y) + K(X, DY) = 0$. Em particular, para um dado $X \in g, ad_X$ é derivação, i.e., $ad_X[Y, Z] = [ad_X Y, Z] + [Y, ad_X Z]$. E neste caso temos $K([XY], Z) + K(Y, [XZ]) = 0$.

Em verdade, as 2 propriedades de invariância da forma de Killing anunciadas acima (por automorfismo e por derivações) são interligadas. Melhor dizendo, a invariância da forma de Killing pela ação de derivações e a versão infinitesimal da invariância por automorfismos. Referiremo-nos a tal invariância como invariância por adjunção. Para automorfismo $X \rightarrow g(t)Xg(t)^{-1}$ é imediata a ligação. Se $\alpha(s)$ é uma família de automorfismos com $\alpha(0) = id$, o fato de $[\alpha(s).X, \alpha(s)Y]$, quando diferenciado, implica que $\alpha'(0)$ é derivação. Com efeito

$$\left. \frac{d}{ds} [\alpha(s)X, \alpha(s)Y] \right|_{s=0} = [\alpha'(0)X, Y] + [X, \alpha'(0)Y]$$

Obs.: As derivações na forma $D = Ad_X$ para $X \in g$, são chamadas de derivações internas, e terão grande importância nas álgebras-de Lie semi-simples.

A fim de termos uma melhor compreensão das definições dadas vamos ver um exemplo. Antes vamos anunciar um teorema central da teoria Lie-algébrica (não demonstrado)

Teorema (de decomposição de Levi): Seja g uma álgebra de Lie de dimensão finita com radical R . Então existe uma sub álgebra semi-simples $s \in g$ tal que $g = s \oplus R$ [11].

Tomemos a álgebra de Lie dada pelos seguintes geradores:

$$R_k = x^j \frac{\partial}{\partial x_i} - x^i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$P_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Tal álgebra é a álgebra dos movimentos Euclidianos no $\mathbb{R}^3$ (são respectivamente os geradores dos operadores de rotação e translação no $\mathbb{R}^3$: os operadores de momento angular e linear). Denotaremos por $e(3)$ tal álgebra.. Temos as seguintes relações de comutação:

$$[R_j, R_k] = \varepsilon_{jki} R_i$$

$$[R_j, P_k] = \varepsilon_{jki} P_i$$

$$[P_j, P_k] = 0$$

Das relações de comutação acima notamos que $\{R_i\}$ forma uma subálgebra (simples, pois não tem ideais) e $\{P_j\}$ forma um ideal maximal abeliano (portanto solúvel) de $e(3)$.

Portanto, neste caso, a decomposição de Levi já está dada, i.e., $e(3) = r(3) \oplus_s t(3)$ onde $r(3)$ é subálgebra simples (portanto semi-simples) de $e(3)$ e $t(3)$ é o radical. Assim sendo, a decomposição de Levi nos fornece uma maneira heurística de pensarmos as particularidades dos vários “tipos” de álgebra de Lie.

Concentraremos-nos no estudo das álgebras de Lie semi-simples (estas “tipo”-rotações) que, devido ao trabalho de Killing e Cartan, estão classificadas (observe que as álgebras ditas clássicas vistas anteriormente (A_n, B_n, C_n, D_n) são todas semi-simples, e de fato é indiscutível a importância de tais álgebras nos métodos matemáticos da física).

Antes de entrarmos na teoria de estrutura das álgebras de Lie semi-simples, vamos enunciar outros teoremas centrais que nos fornecerão uma primeira caracterização das álgebras de Lie de dimensão finita.

Crêterios de Cartan. (Veja por exemplo [17] ou [10]).

Primeiro Cr terio de Cartan:

Uma  lgebra de Lie g   solúvel se sua forma de Killing k zera identicamente na  lgebra derivada $g^{(1)} = [g, g]$.

Segundo Cr terio de Cartan:

Uma  lgebra de Lie g   semi-simples se, e somente se, sua forma de Killing   não-degenerada.

A forma de Killing será vista como o produto interno em g , e a sua não degenerescência no caso de semi-simplicidade será um fato fundamental na teoria de estrutura.

Outro importante fato (na verdade corolário do 2  cr terio de Cartan, a ser anunciado na forma de teorema)  :

Teorema. As derivações numa  lgebra de Lie semi-simples são internas. Ou seja, se $D : g \rightarrow g$   um operador linear, tal que $D[XY] = [DX, Y] + [X, DY]$, encontramos $Z \in g$ tal que $D = ad_Z$.

Adentremos, pois, na teoria de estrutura.

3. ESTRUTURA DAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMI-SIMPLES

Como foi visto, no caso da álgebra de Lie do e_3 (grupo euclidiano), temos uma decomposição $e_3 = t_3 \oplus r_3$ onde t_3 é solúvel (radical da álgebra) e r_3 é semi-simples. A estrutura das álgebras solúveis é descrita pelo teorema de Lie, que afirma que se g é solúvel (em $gl(V)$) então as matrizes de g com respeito a uma base de V são simultaneamente triangularizáveis (superiormente, considerando o corpo complexo). O Teorema de Engel, da mesma forma, nos diz a “forma” das álgebras de Lie g nilpotentes (para tal resultado veja [17]) :

No que segue, concentrar-nos-emos nas álgebras de Lie semi-simples. Tais álgebras e suas representações são de suma importância para a Física, (vide as já mencionadas álgebras clássicas, todas semi-simples) e sua estrutura, totalmente caracterizada pela teoria de Killing-Cartan, nos fornecerão o ferramental, bem como a intuição para inferirmos sobre as álgebras Kac-Moody.

3.1. As Subálgebras de Cartan e a decomposição em espaços de raízes

Começemos por um exemplo. Seja a álgebra $g = A_2$ (é semisimples!!), i.e., a álgebra de Lie do $Sl(3, \mathbb{C})$ (matrizes 3×3 de traço nulo). Denotemos por g_0 a subálgebra de g formada por matrizes diagonais. Então g_0 tem dimensão complexa 2, o número de termos livres da diagonal. Tomemos os operadores $adH, H \in g_0$. Estes são simultaneamente diagonalizáveis (pois são diagonais em relação à mesma base fixa de V). Então podemos decompor $sl(3, \mathbb{C})$ em uma soma direta de subspaços invariantes 1 dimensionais. Chamamos g_0 de sub-álgebra de Cartan de $sl(3, \mathbb{C})$.

Os autovalores de adH são dados pelas raízes do polinômio característico $\det(\alpha \mathbb{1} - adH) = 0$. Estas soluções são funcionais lineares de H e portanto funcionais na subálgebra de Cartan g_0 . Estes funcionais são chamados raízes da álgebra, e os correspondentes auto vetores são chamados root-vectors (vetores radicais). Então se α é raiz, e E_α um root vector, temos $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$. para todo H em g_0 (dado que são simultaneamente diagonalizáveis).

Tomemos como base de $sl(3, \mathbb{C})$ a base de Weyl para $gl(3, \mathbb{C})$, i.e., E_{ij} tem valor 1 na ij -ésima entrada e 0 nas outras.

Chamemos:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= E_{12}, E_\beta = E_{23}, E_\gamma = E_{13}, E_{-\alpha} = E_{21}, E_{-\beta} = E_{32}, E_{-\gamma} = E_{31}, \\ \text{e } H_{12} &= \text{diag}(1, -1, 0), H_{23} = \text{diag}(0, 1, -1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Obviamente $\{H_{12}, H_{23}\}$ é base para g_0 . Para $H \in g_0$; $H = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ temos,

$$[H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}.$$

Definimos o funcional na subálgebra de Cartan $w_i(H) = \lambda_i$ (ie, detecta o i -ésimo termo da diagonal). Então $w_{ij} = w_i - w_j$ são raízes da subálgebra com root vector E_{ij} .

Definimos um produto interno no espaço dual g_0^* na forma:

Se α é funcional em g_0 , existe única matriz diagonal H_α tal que $\alpha(H) = \text{Tr} H H_\alpha$. De fato, se $\alpha = w_i$ então H_α é a matriz diagonal com 1 na ii -ésima entrada e 0 nas outras.

Então $w_{12}(H) = \text{Tr} H H_{12}$ e $w_{23}(H) = \text{Tr} H H_{23}$, etc. Desta forma o produto interno em g_0^* é dado por $\langle \alpha, \beta \rangle = \text{Tr} H_\alpha H_\beta$:

Se $\alpha = w_{12}, \beta = w_{23}, \gamma = w_{13}$, vemos que $\alpha + \beta = \gamma$: $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 2$

e $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$. As raízes $\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma$ podem ser dispostas na forma

$$(3.2)$$

Associados a tais raízes temos os respectivos root-vectors $E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}, E_{\pm\gamma}$. Note que $adE_\alpha(E_\beta) = [E_\alpha, E_\beta] = E_\gamma$ (basta ver que $H[E_\alpha, E_\beta] = (\alpha + \beta)(E_\alpha + E_\beta) = \gamma([E_\alpha, E_\beta])$ e $adE_\alpha(E_\alpha) = 0$). Note ainda que adE_α age nos outros vetores “puxando-os” na sua direção mas, sem que caia sobre ele, sendo portanto nilpotente. Da mesma forma os outros operadores adE_β, adE_γ também são nilpotentes e agem de forma semelhante (veremos posteriormente esta ação) sobre os outros vetores E_α, E_β , etc.

Então, achamos uma base para a álgebra de Lie $sl(3, \mathbb{C})$ formada por uma subálgebra de operadores simultaneamente diagonalizáveis, a subálgebra de Cartan (H_{12}, H_{23}) e por um conjunto de operadores nilpotentes, os operadores escada, $\{adE_i\}$. Note que usamos o fato de ad ser representação.

Além disso, todas as constantes de estrutura são números reais inteiros.

Tal partição será feita para todas as álgebras semi-simples, sendo a base da teoria de estrutura, i.e., dada uma álgebra de Lie semi-simples g , queremos encontrar a maior subálgebra formada por operadores semi-simples (diagonalizáveis), a subálgebra toral maximal (tal álgebra é única a menos de adjunção em g).

Esta é uma subálgebra abeliana (portanto os operadores são simultaneamente diagonalizáveis) e é chamada subálgebra de Cartan e será denotada por g_0 .

Além disso, a ação dos operadores adh , (para $h \in g_0$) sobre g nos permite separar g na forma $g = L_0 \oplus_{\alpha \in \Phi} UL_\alpha$ onde os L_α são subálgebras invariantes de adH ,

i.e., $L_\alpha = \{x \in g \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in g_0\}$, onde α corre g_0^* (dual de g_0). O conjunto dos funcionais $\alpha \in g_0^*$ tais que $L_\alpha \neq \phi$ é denotado por Φ e cada $\alpha \in \Phi$ é uma raiz de g . Note que $g_0 \subset L_0$. De fato $g_0 = L_0$.

Na verdade, numa álgebra de Lie qualquer L , definimos a subálgebra de Cartan de L como sendo uma subálgebra nilpotente que é igual ao seu próprio normalizador, onde o normalizador de uma subálgebra C , é definido por $N_L(C) = \{X \in L; [XC] \subset C\}$. Portanto, no caso da álgebra de Lie ser semi-simples, a subálgebra toral maximal coincide com a subálgebra de Cartan .[?]

A prova da existência de subálgebras de Cartan é feita construtivamente, da seguinte forma:

(i) Tomando-se um elemento $X \in g$ partimos g em subspaços invariantes de adX , i.e.

$$g = \oplus_\lambda g_\lambda(X); g_\lambda(X) = \{Y / (adX - \lambda)^k Y = 0 \text{ para algum } k\}$$

(ii) Denota-se por $g_0(X)$ o subespaço correspondente a $\lambda = 0$. A nulidade de adX é a dimensão de $g_0(X)$. Toma-se então um elemento H ; tal que adH tem nulidade mínima (em relação a outros $adX; X \in g$). Chamamos este H de elemento regular .

(iii) Prova-se que para X regular, então $g_0(X)$ é subálgebra, sendo exatamente a subálgebra de Cartan, i.e., $g_0(X)$ é nilpotente e seu próprio normalizador.

(iv) Especializando para o caso de g semi-simples, conclui-se que $g_0(H) = g_0 :=$ álgebra toral maximal. (ver por exemplo [10]).

Note que, pelo teorema de Lie sabemos que $g_0(X)$ pode ser representada por matrizes (na representação adjunta) triangulares superiores. O passo seguinte é partirmos o espaço de representação de forma que os subspaços invariantes por $adX \in g_0$ sejam unidimensionais. Desta forma teríamos uma representação onde todos os elementos de g_0 seriam diagonais.

$adX \in g_0$ sejam unidimensionais. Desta forma teríamos uma representação onde todos os elementos de g_0 seriam diagonais.

Então, para g semi-simples, temos a seguinte partição de g

$$g = g_0 \oplus_{\alpha_i} g_{\alpha_i}$$

onde g_{α_i} são espaços unidimensionais, e g_0 é subálgebra abeliana (a subálgebra de Cartan) composta por operadores diagonalizáveis (simultaneamente).

Considerando a representação adjunta de g , temos então: para $h \in g_0, E_{\alpha_i} \in g_{\alpha_i}$

$$adh(E_{\alpha_i}) = [h, E_{\alpha_i}] = \alpha_i(h)E_{\alpha_i}.$$

onde os funcionais em g_0, α_i , são chamadas raízes (e $E_{\alpha_i} \in L_{\alpha_i}$ e são os root-vectors). Da identidade de Jacobi temos para α, β raízes não nulas

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = E_{\alpha+\beta} \text{ se } \alpha + \beta \text{ for raízes e } \alpha \neq -\alpha.$$

Decorre que cada root-vector age em $\oplus_{\alpha_i} g_{\alpha_i}$ levando uma raiz na outra (ou em 0), como já vimos no exemplo do A_3 (daí o nome para os vetores E_{α} de step operators).

Podemos reunir tais fatos como segue:

Forma Normal de Weyl-Chevalley

Seja g álgebra de Lie semi-simples (com corpo complexo), g_0 sua subálgebra de Cartan. A álgebra g é decomposta na soma direta de g_0 mais seus auto-espacos de raízes $g_{\alpha}(= L_{\alpha})$, onde cada g_{α} é unidimensional, tal que

- (i) $[H, E_{\alpha}] = \alpha(H)E_{\alpha}$ para $H \in g_0$ e $E_{\alpha_i} \in L_{\alpha_i}$
- (ii) $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] \in g_0$
- (iii) $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$ onde $N_{\alpha\beta} = 0$, a menos que $\alpha + \beta$ seja raiz.

(3.3)

Melhor ainda que essa decomposição é o fato de existir uma base para as álgebras de Lie semi-simples (no corpo complexo) tal que as constantes de estrutura são todas números inteiros (como foi obtido para o A_3).

Alguns resultados importantes decorrentes da decomposição de Weyl-Chevalley (na verdade lemas auxiliares usados na construção de tal decomposição) são:

(i) A forma de Killing restrita a subálgebra de Cartan é não degenerada

Decorre que para $\alpha \in g_0^*, \exists$ único $t_\alpha \in g_0$ satisfazendo $\alpha(h) = k(t_\alpha, h)$ para todo $h \in g_0$. Em particular a Φ (espaços das raízes) corresponde o subconjunto $\{t_\alpha, \alpha \in \Phi\}$ de g_0 .

(ii) Para $\pm\alpha \neq \beta, K(L_\alpha, L_\beta) = 0$. Isto é, os subespaços g_α são ortogonais mutuamente. Em particular $K(H, L_\alpha) = 0$ para H pertencente à subespaço de Cartan g_0 .

Tais resultados nos possibilitam estudar a estrutura da álgebra de Lie por suas raízes. Essa é a construção que mais nos interessa, i.e., o estudo do espaço das raízes ($= \Phi$).

3.2. Propriedades de Ortogonalidade

(i) Φ expande H^* (dual de H)

(ii) Se $\alpha \in \Phi, -\alpha \in \Phi$ e para $x \in L_\alpha, y \in L_{-\alpha}$ temos $[x, y] = k(x, y)t_\alpha$ (para t_α na forma anunciada acima)

(iii) Se $\alpha \in \Phi$, então $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ é unidimensional, com base t_α .

(iv) $\alpha(t_\alpha) = k(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$, para $\alpha \in \Phi$

(v) Se $\alpha \in \Phi$ e x_α é elementos de L_α ; então existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tal que x_α, y_α (3.4) e $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ expandem uma subálgebra simples 3 dimensional de Lie isomorfa à $sl(2, \mathbb{C})$ via

$$x_\alpha \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad y_\alpha \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad h_\alpha \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(vi) h_α mencionado anteriormente é na forma:

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha, t_\alpha)}; \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

Tais resultados já nos mostram que o estudo das raízes será central.

Vamos demonstrar os resultados acima:

(i) Se α não expandir g_0^* ; existe elemento não nulo $h \in g_0$ tal que $\alpha(h) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi$. Então $[h, L_\alpha] = 0$ para todo Φ . Mas como $[h, H] = 0$, teríamos que $[h, g] = 0$ para a álgebra g inteira, ou seja $h \in C(g)$ (= centro de g) o que é absurdo.

(ii) Como $k(L_\alpha, L_\beta) = 0$ para $\alpha + \beta \neq 0$, se $-\alpha \notin \Phi$, $k(L_\alpha, g) = 0$ o que é absurdo pelo Critério de Cartan.

Então para $\pm\alpha \in \Phi$, seja $x \in L_\alpha$; $y \in L_{-\alpha}$ e $h \in g_0$ arbitrário

$$\begin{aligned} k(h, [x, y]) &= k([h, x], y) = \alpha(h)k(x, y) = k(t_\alpha, h)k(xy) = \\ &= k(k(x, y)t_\alpha, h) = k(h, k(x, y)t_\alpha) \end{aligned}$$

Portanto

$$k(h, [xy] - k(x, y)t_\alpha) = 0 \text{ para todo } k$$

O que implica que $[x, y] = k(x, y)t_\alpha$.

(iii) t_α expande $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ por ii), provado que $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$, i.e., para $x \in L_\alpha, y \in L_{-\alpha}, k(x, y) \neq 0$. Para $x \in L_\alpha, x \neq 0$, se $k(x, L_{-\alpha}) = 0$ implica em $k(x, g) = 0$ o que é absurdo pois k é não degenerado em álgebras de Lie semi-simples. Portanto $[x, y] \neq 0$

(iv) Seja $\alpha(t_\alpha) = k(t_\alpha, t_\alpha)$. Se $\alpha(t_\alpha) = 0$ e para $x \in L_\alpha, y \in L_{-\alpha}$, teríamos $[x, t_\alpha] = \alpha(t_\alpha)x = -\alpha(t_\alpha)y = [y, t_\alpha] = 0$. Se tomarmos x e y como em (ii), x, y, t_α é subálgebra de Lie em g (denotado por S), solúvel. Em particular $ad_g s$ é nilpotente para todo $s \in [S, S]$, portanto $ad t_\alpha$ é semi-simples e nilpotente, i.e, $ad t_\alpha = 0$. Portanto $t_\alpha \in C(g)$ (centro) o que é absurdo.

(v) Para $\alpha \in \Phi$ dado $x_\alpha \neq 0, x_\alpha \in L_\alpha$, tomemos $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ (que denotaremos $y_\alpha = x_{-\alpha}$) e $h_\alpha \in g_0$ tais que

$$k(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{k(t_\alpha, t_\alpha)} \quad \text{e} \quad h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha, t_\alpha)} \quad (\text{É sempre possível, pelos itens anteriores})$$

Então $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Ainda $[h_\alpha, x_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$. E similarmente $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Portanto, $\{x_\alpha, x_{-\alpha}, h_\alpha\}$ expandem uma sub-Lie-álgebra com a mesma tabela de multiplicação do $sl(2, \mathbb{C})$

(vi) Como t_α é definido por $k(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ para $h \in g_0$, $t_\alpha = -t_{-\alpha}$ e portanto $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

Tal construção foi feita para uma raiz arbitrária $\alpha \in \Phi$. Então Φ expande g_0^* , e temos uma dualidade entre a subálgebra de Cartan e o espaço de raízes. Ainda, partimos a álgebra g em várias subálgebras $sl(2, \mathbb{C})$, tantas quanto for o número de raízes (excetuando os que são na forma $-\alpha$ para $\alpha \in \Phi$ já contada).

Estudaremos então a estrutura do espaço de raízes

Notemos que para uma dada raiz $\alpha \in \Phi$, $\{x_\alpha, x_{-\alpha}, h_\alpha\}$, agindo pela adjunção, mantém o espaço $\oplus_{\alpha_i g_{\alpha_i}}$ invariante, pois para $\beta \in \Phi$, $[x_\alpha, g_\beta] \subset g_{\alpha+\beta}$ (se $\alpha + \beta$ é raiz, ou 0 se não for).

Chamemos de S_α a álgebra (isomorfa ao $sl(2, \mathbb{C})$) gerada por $\{x_\alpha, x_{-\alpha}, h_\alpha\}$. Ocorre que a representação da álgebra $sl(2, \mathbb{C})$ sobre módulos irredutíveis esta completamente descrita, a saber, seja v um módulo irredutível e seja a decomposição de v em subespaços invariantes de h_α ($h_\alpha = h$ é semi-simples), na aforma

$$V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \lambda v\}$$

Então para $\lambda \neq 0$, chamamos λ de peso e os V_λ espaços de pesos. Temos que se $\varphi \in V_\lambda$; $x_\alpha \varphi \in V_{\lambda+2}$ e $x_{-\alpha} \varphi \in V_{\lambda-2}$.

Como a dimensão de V é finita, existe um certo λ chamado peso maximal tal que $V_{\lambda+2} = 0$. Tomemos $v_0 \in V_\lambda$, λ maximal. Definimos $v_{-1} = 0$ e $v_i = \left(\frac{1}{i!}\right) (x_{-\alpha})^i v_0$ ($i \geq 0$).

Temos que:

$$\begin{aligned} hv_i &= (\lambda - 2i)v_i \\ yv_i &= (i+1)v_{i+1} \\ xv_i &= (\lambda - i + 1)v_{i-1} \end{aligned} \quad i \geq 0 \quad (3.5)$$

Teorema (não será demonstrado)

Seja V um módulo irredutível para $g = sl(2, \mathbb{C})$

(a) Relativo à h , V é soma direta de espaço de pesos V_μ , onde, $\mu = m, m - 2, \dots, -(m - 2), -m$ e $\dim V = m + 1$ portanto $\dim V_\mu = 1$

(b) V tem (a menos de produto por escalar diferente de 0) um único vetor maximal, cujo peso (o maior) é m .

Corolário. Seja V algum g -módulo (de dimensão finita), $g = sl(2, \mathbb{C})$. Então os autovalores de h em V são todos inteiros, para cada auto-valor ocorre o seu negativo.

Podemos particularizar para o caso em que o S_α -módulo seja g , $S_\alpha = \text{span}\{x_\alpha, x_{-\alpha}, h_\alpha\}$ e age em g por adjunção, ou seja, consideramos g como sendo de fato um adS_α -módulo, $adS_\alpha = \text{span}\{adx_\alpha, adx_{-\alpha}, adh_\alpha\}$.

Analisando primeiro a ação de adS_α em um sub-módulo $M \subset g$, na forma $M = \text{Span}\{L_{c\alpha}, c \in \mathbb{C}\}$ (é submódulo b pois $[L_\alpha, L_{c\alpha}] = L_{c+1}\alpha$), conclui-se que os únicos c admissíveis são ± 1 ; i.e., os únicos múltiplos de α que são raízes são $\pm\alpha$.

Agindo em $L_\beta (\beta \neq \alpha)$, conclui-se que existem inteiros p, q tais que $\{\beta + \eta\alpha\}$ é uma sequência ininterrupta de raízes $p \leq \eta \leq q$ (note a relação de tal resultado com as equações (3.5))

Resumindo:

- (a) $\alpha \in \Phi$ implica que $\dim L_\alpha = 1$. Em particular $S_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + H_\alpha$, ($H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}]$) e, para dado $x_\alpha \in L_\alpha$, existe único $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ satisfazendo $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.
- (b) Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos escalares de α que são raízes são α e $-\alpha$.
- (c) Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$, e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$ (os números $\beta(h_\alpha)$ são chamados inteiros de Cartan). (3.6)
- (d) Se $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \in \Phi$, então $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$
- (e) Seja $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$. Seja r, q (respectivamente) os maiores inteiros tais que $\beta - r\alpha$ e $\beta + q\alpha$ são raízes. Então $\beta + \eta\alpha \in \Phi$ ($-r \leq \eta \leq q$), e $\beta(h_\alpha) = r - q$
- (f) g (enquanto álgebra de Lie) é gerado pelos espaços de raízes L_α .

A sequência ininterrupta de raízes na forma $\beta + \eta\alpha$ (para $-r \leq \eta \leq q$) é chamada α -corda através de β .

3.3. Propriedades de Racionalidade

Seja g álgebra de Lie semi-simples, H sub-álgebra de Cartan, $\Phi \subset H^*$ o conjunto de raízes de g (relativo à H) e $g = H \oplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ a decomposição em espaços de raízes.

Desde que a restrição a H da forma de Killing é não degenerada, transferimos o produto interno à H^* na forma $(\gamma, \delta) = k(t_\gamma, t_\delta)$. Sabemos que Φ expande H^* então tomemos uma base de raízes $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ ($l = \dim H$) de H^* . Se $\beta \in \Phi$, escrevemos

β unicamente com $\beta = \sum_{i=1}^l c_i \alpha_i$, onde $c_i \in \mathbb{F}$. Na verdade $c_i \in \mathbb{Q}$.

Para observar tal fato notemos que dado $\beta \in \Phi$ a equação

$2 \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^l c_i \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} 2$, graças ao item c do parágrafo anterior, é um sistema linear com l c_i -incógnitas a coeficientes inteiros, e tal equação tem solução em $\mathbb{Q}$ dado que a matriz dos coeficientes do sistema é não singular, uma vez que a forma $(\ , \)$ é não-degenerada.

Tal $\mathbb{Q}$ -subespaço de $H (= E_Q)$ é expandido pelas raízes e tem $\mathbb{Q}$ -dimensão $l = \dim_{\mathbb{F}} H^*$.

Ainda, a forma (λ, μ) para $\lambda, \mu \in \Phi$ é positiva definida em E_Q . Portanto note que $(\beta, \beta) = \sum \alpha(t_\beta)\alpha(t_\beta) = \sum (\alpha, \beta)^2$, a soma correndo em $\alpha \in \Phi$. Decorre que $\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}$ é tal que $\frac{1}{(\beta, \beta)} \in Q$ já que $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$ (graças ao item (c) já citado). E portanto $(\alpha, \beta) \in Q$. Portanto a forma é não degenerada em E_Q . Então $(\lambda, \lambda) = \sum (\alpha, \lambda)^2$ é positiva definida, já que é soma de quadrados de racionais, em Q . Concluimos que a forma é definida em E_Q .

Estendendo o corpo de base de Q para $\mathbb{R}$, chamemos de $E = \mathbb{R} \otimes_Q E_Q$. A forma estendida canonicamente é positiva definida, e E é espaço euclidiano. Então, pelos resultados acima, temos

- (a) Φ expande E , e 0 não pertence a Φ
 - (b) Se $\alpha \in \Phi$, $-\alpha \in \Phi$ e mais nenhum outro múltiplo de α é raiz
 - (c) Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi$
 - (d) Se $\alpha, \beta \in \Phi$; então $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$
- (3.7)

De forma geral; dado um espaço euclidiano E , um subconjunto $\Phi \subset E$ é chamado *sistema de raízes* se temos propriedades enunciadas acima.

Note que um resultado fundamental que foi estabelecido é a correspondência entre uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita g junto com a subálgebra de Cartan H , e o sistema de raízes Φ (referente a um espaço euclidiano E). Notamos que se tomássemos outra subálgebra de Cartan H' , o sistema Φ' seria isomorfo (com respeito a todas propriedades de interesse) a Φ . [17] No que segue iremos detalhar o estudo do sistema de raízes; e será visto o quão simples e compacto torna-se o estudo das álgebras de Lie semi-simples.

4. SISTEMA DE RAÍZES

4.1. Grupo Weyl, Câmaras de Weyl e Raízes Simples

Seja E um espaço euclidiano (sobre $\mathbb{R}$ com forma bilinear simétrica (α, β)). Uma reflexão em E é uma transformação ortogonal inversível que mantém invariante algum hiperplano (subespaço de codimensão 1), e leva qualquer vetor ortogonal a tal hiperplano no seu “negativo”.

Todo vetor não nulo α define uma reflexão σ_α ; com “Hiperplano refletor” $P_\alpha = \{\beta \in E; (\beta, \alpha) = 0\}$

Explicitamente; escrevemos:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \quad (\text{notação}) \quad (4.1)$$

Note que $\sigma_\alpha(\alpha) = 0$ e se $(\beta, \alpha) = 0$; $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$.

Então, reenunciamos o conceito de sistema de raízes Φ dum espaço euclidiano, na forma

- (i) Φ é finito, expande E , e não contém 0.
- (ii) Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos α em Φ , são $\pm\alpha$
- (iii) Se $\alpha \in \Phi$, σ_α mantém Φ invariante
- (iv) Se $\alpha, \beta \in \Phi$, $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$. Chamamos de Grupo de Weyl $\mathfrak{w}$; subgrupo de $Gl(E)$, o grupo gerado pelas reflexões σ_α ($\alpha \in \Phi$). Note que $\mathfrak{w}$ é grupo de simetria em Φ .

O axioma (iv) restringe severamente os possíveis ângulos entre pares de raízes. Com efeito, lembramos que o cosseno entre dois vetores α, β e dado por $\|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta = (\alpha, \beta)$. Portanto, $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta$ e $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta$.

Dado que $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ e $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\langle \beta, \alpha \rangle$ são inteiros e têm mesmo sinal, temos as seguintes possibilidades.

Para $\alpha \neq \pm \beta$ e $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$

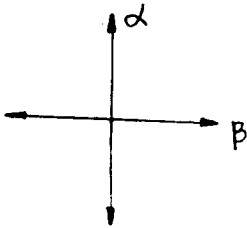
$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\ \beta\ ^2 / \ \alpha\ ^2$
0	0	$\pi/2$	indeterminado
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

(4.2)

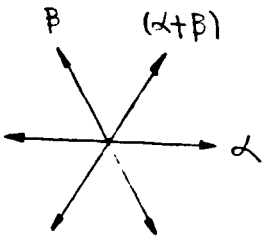
No caso de $l = \dim E$ (rank de Φ) para, $l = 1$ e $l = 2$ podemos representar o sistema de raízes por:

$$l = 1 \quad -\alpha \longleftarrow \cdot \longrightarrow \alpha \quad (A_1)$$

($A_1 \times A_1$)



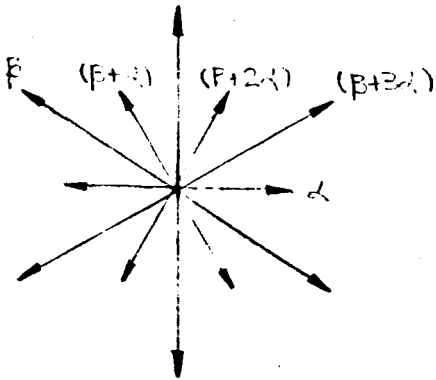
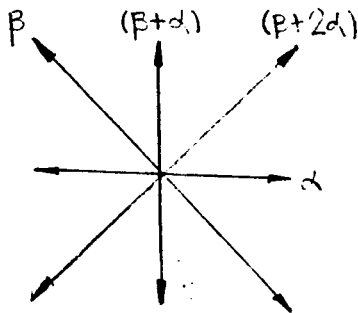
(A_2)



(G_2)

(4.3)

(B_2)



Note que a α -corda através β pode ser visualizada ($\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$, a diferença dos dois maiores inteiros $r \geq q$, tais que $\beta + p\alpha, \beta - r\alpha \in \Phi$), para α e β destacados nos diagramas acima. No caso A_2 , $\langle \beta, \alpha \rangle = -1$; em B_2 , $\langle \beta, \alpha \rangle = -2$ e em G_2 , $\langle \beta, \alpha \rangle = -3$.

Outro resultado a ser notado é que se $(\alpha, \beta) > 0$ (ie, o ângulo entre α, β é agudo), $\alpha - \beta$ é raiz e se $(\alpha, \beta) < 0$ então $\alpha + \beta$ é raiz.

As raízes destacadas α e β , não foram escolhidas aleatoriamente. Note que para $l = \dim E = 2$, escolhemos sempre 2 raízes não proporcionais (portanto uma base de E), o mais “afastadas” (i.e., com maior ângulo) possível. As raízes α, β escolhidas de tal forma, são chamadas de raízes simples de Φ e formam uma base, denotada por Δ .

Formalmente temos:

Um subconjunto Δ de Φ é chamado base se:

(B_1) Δ é base de E

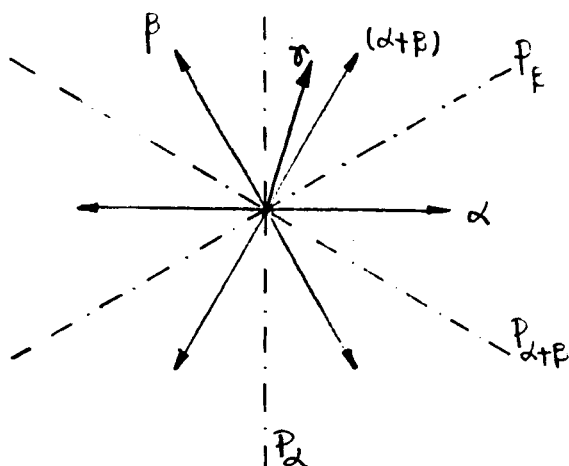
(B_2) cada raiz $\beta \in \Phi$ pode ser escrita como $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ ($\alpha \in \Delta$) com os coeficientes k_α inteiros todos positivos ou todos negativos.

As raízes pertencentes à Δ são chamadas simples.

Se todos os k_α (referentes à uma base Δ) são positivos, β é positiva com relação a Δ (se são negativos, β é negativa). A coleção de raízes positivas (ou negativas) será denotada por Φ^+ (ou Φ^-). Logicamente $\Phi^- = -\Phi^+$.

A prova da existência de uma base para Φ é feita construtivamente. Primeiro tomando um elemento regular de E , onde $\gamma \in E$ é regular se $\gamma \in E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$, onde P_α são os hiperplanos definidos anteriormente, invariantes em relação à reflexão σ_α respectivamente.

Exemplo



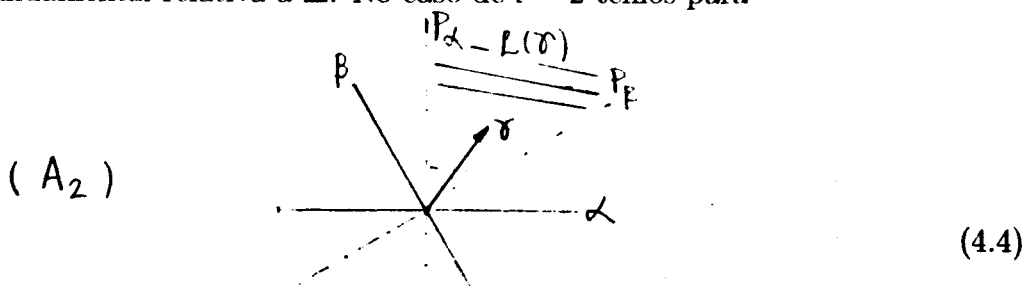
Se γ for regular, então $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ onde $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi, (\gamma, \alpha) > 0\}$ (= o conjunto de raízes α no lado positivo do hiperplano ortogonal à γ).

Diremos que $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ é decomponível se $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ para $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$ e indecomponível de outra forma.

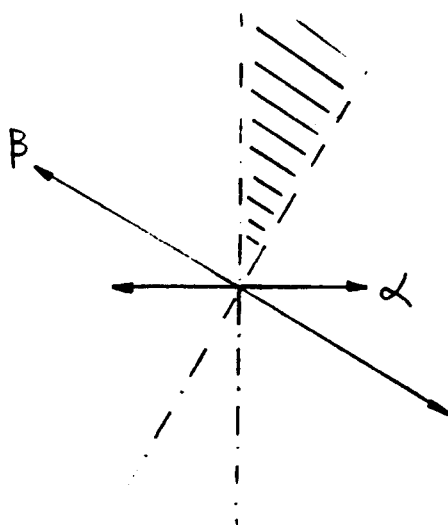
Teorema. Seja γ regular então o conjunto $\Delta(\gamma)$ de todas as raízes indecomponíveis é base de Φ , e toda base é obtível dessa maneira [10].

Note que a escolha de um elemento regular nos dá uma base. Note ainda que um dado elemento regular pertencerá a uma componente conexa de E , quando E é partido pelos hiperplanos P_α .

Cada componente conexa de E , feita tal partição é chamada câmara de Weyl. Então, a cada elemento regular γ , temos uma câmara de Weyl $\mathcal{L}(\gamma)$ e também uma escolha de base Δ . Desta forma estabelecemos uma correspondência 1-1 entre uma base $\Delta = (\Delta(\gamma))$ é uma câmara de Weyl $\mathcal{L}(\Delta) (= \mathcal{L}(\gamma))$ Chamaremos tal câmara de câmara fundamental relativa à Δ . No caso de $l = 2$ temos para



(G₂)



O grupo de Weyl leva uma câmara de Weyl em outra, ou, de outra forma, $\mathfrak{w}$ permuta as bases de Φ , i.e., σ leva Δ em $\sigma(\Delta)$ que também é base (note que $(\sigma(\gamma), \sigma(\alpha)) = (\gamma, \alpha)$).

Temos então o seguinte Teorema: [10]

Teorema. Seja Δ uma base de Φ .

- (a) Se $\gamma \in E$, γ é regular, existe $\sigma \in \mathfrak{w}$ tal que $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ para todos $\alpha \in \Delta$
- (b) Se Δ' é uma outra base de Φ , $\sigma(\Delta') = \Delta$ para algum $\sigma \in \mathfrak{w}$
- (c) Se α é alguma raiz, existe $\sigma \in \mathfrak{w}$ tal que $\sigma(\alpha) \in \Delta$
- (d) Se $\sigma(\Delta) = \Delta$, $\sigma \in \mathfrak{w}$, então $\sigma = 1$.

Temos visto então que dada uma álgebra semi-simples g , temos a decomposição de Cartan $g = h + \sum_{\alpha} g_{\alpha}$, onde h é a subálgebra de Cartan e cada g_{α} é um subespaço unidimensional invariante, os funcionais α são chamados raízes e cada $E_{\alpha} \in g_{\alpha}$ é um root vector. O conjunto $\{\alpha_i\} = \Phi$ é chamado espaço de raízes e existe uma correspondência, por dualidade, entre tal espaço e a subálgebra de Cartan. Munindo o espaço de raízes com um produto interno podemos estudar sua estrutura, e o que obtivemos foi a existência uma base Δ de Φ tal que qualquer raiz α pode ser escrita como combinação linear dos elementos da base Δ , com coeficientes todos positivos ou todos negativos (de forma que $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$; $\Phi^- = -\Phi^+$).

Temos ainda o grupo de reflexões de Φ chamado de grupo de Weyl $\mathfrak{w}$, de forma

que, dada uma base simples Δ ; qualquer outra base Δ' (simples) é tal que $\sigma(\Delta') = \Delta$ para alguma reflexão $\sigma \in \mathfrak{w}$, e em particular, o grupo de Weyl aplicado a uma base Δ recupera todas as raízes.

Além disso, o grupo de Weyl $\mathfrak{w}$ é gerado pelas reflexões na forma σ_i , onde $\alpha_i \in \Delta$. Portanto, dada uma base Δ de Φ , temos todas as informações da álgebra de Lie semi-simples.

Estudaremos então a classificação dos sistemas fundamentais de raízes Δ das álgebras de Lie simples.

4.2. Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin

Seja Φ um sistema de raízes, Φ é dito irredutível se não pode ser partido numa união de 2 subconjuntos próprios tais que cada raiz de um dos conjuntos é ortogonal a todas as raízes do outro (Ex. $A^1 \times A^1$ não é irredutível ao passo que A_2, B_2, G_2 são). Equivalentemente, Φ é irredutível se e somente se Δ não pode ser partido da maneira mencionada.

Definimos para um sistema Φ com base Δ uma ordenação parcial ($\preceq$) relativa a altura de uma raiz da seguinte forma:

Seja $\beta \in \Phi^+$; $\beta = \sum k_{\alpha_i} \alpha_i$ ($\alpha_i \in \Delta$) com $k_{\alpha_i} \geq 0$, $\forall \alpha_i$.

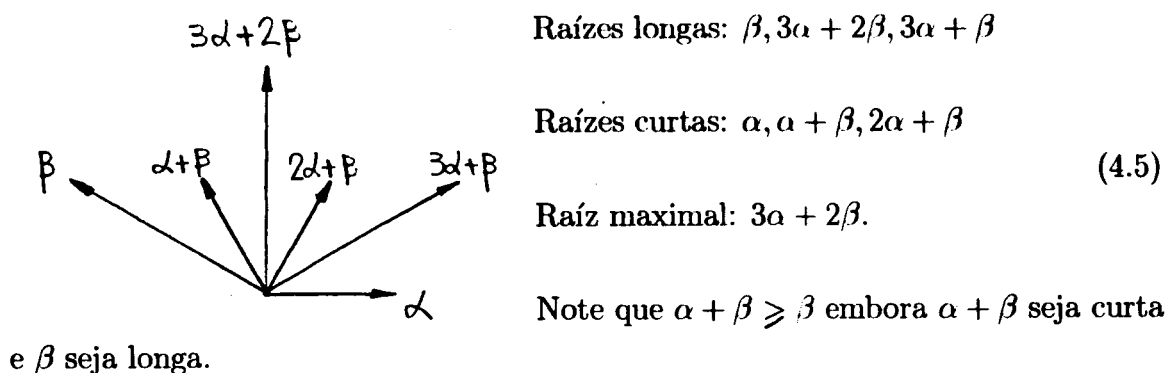
Tomemos agora $\alpha, \beta \in \Phi^+$. Definimos que $\alpha \preceq \beta$ se $\beta - \alpha$ é uma soma de raízes positivas (portanto uma raiz positiva), ou $\alpha = \beta$.

Dado então um sistema de raízes Φ irredutível com base Δ , relativa a uma ordenação parcial $\preceq$, existe uma única raiz maximal β (com relação a tal ordenação). Se $\beta = \sum k_{\alpha_i} \alpha_i$; todos $k_{\alpha_i} > 0$.

Ainda, para Φ irredutível, ocorrem no máximo em Φ 2 comprimentos (relativos ao produto interno) de raízes que chamamos de raízes longas e raízes curtas.

Em particular, para Φ irredutível com 2 comprimentos distintos de raízes, a raiz maximal mencionada anteriormente é a longa.

Ex.: Tomemos o caso do G_2 . Temos as raízes positivas dispostas abaixo (referente à $\Delta = \{\alpha, \beta\}$)



No que segue, iremos classificar os sistemas de raízes irredutíveis e a cada sistema encontrado teremos uma álgebra de Lie simples relacionada. Para fazer tal classificação usaremos as Matrizes de Cartan e os diagramas de Dynkin.

Matrizes de Cartan

Fixemos um ordenamento $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ de raízes simples. A matriz $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ é chamada matriz de Cartan de Φ , e suas entradas são os inteiros de Cartan.

Ex. Para os sistemas de rank 2, temos as matrizes

$$A_1 \times A_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B_2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; G_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz, claramente depende da escolha do ordenamento, o que não é problema. O fator importante é que tal matriz independe da escolha da base (item c teorema anterior).

Proposição: A matriz de Cartan determina Φ a menos de isomorfismo, i.e., se tivermos $\Phi' \subset E'$ um outro sistema de raízes com base $\Delta' \{ \alpha'_1, \dots, \alpha'_e \}$. Se $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ para $1 \leq i, j \leq l$, então a bijeção $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ se estende unicamente a um isomorfismo $\Phi : E \rightarrow E'$ mapeando Φ em Φ' e satisfazendo $\langle \Phi(\alpha), \Phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para $\forall \alpha, \beta \in \Phi$.

Dem. A bijeção $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ estabelece um isomorfismo de espaço vetorial $\Phi : E \rightarrow E'$ precisamos provar que tal isomorfismo recupera o sistema de raízes, i.e., Φ é mapeado em Φ' e que para quaisquer raízes $\alpha, \beta \in \Phi; \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \Phi(\alpha), \Phi(\beta) \rangle$. Tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$. Pelas hipóteses temos que:

$$\sigma_{\Phi(\alpha)}(\Phi(\beta)) = \Phi(\beta) - \langle \Phi(\beta), \Phi(\alpha) \rangle \Phi(\alpha) = \Phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \Phi(\sigma_\alpha(\beta))$$

Logo temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\
 \sigma_\alpha \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \sigma_{\Phi(\alpha)} \\
 E & \xrightarrow{\Phi} & E'
 \end{array} \tag{4.6}$$

Desde que o grupo de Weyl $\mathfrak{w}$ (e também $\mathfrak{w}'$) é gerado pelas reflexões simples (Teorema anterior). Segue que o mapa $\sigma \mapsto \Phi \cdot \sigma \cdot \Phi^{-1}$ é um isomorfismo de $\mathfrak{w}$ em $\mathfrak{w}'$, levando σ_α em $\sigma_{\Phi(\alpha)}$ ($\alpha \in \Delta$). Mas cada $\beta \in \Phi$ é conjugada por $\mathfrak{w}$ a uma raiz simples (Teorema anterior, digamos $\beta = \sigma(\alpha), \alpha \in \Delta$). Portanto devemos ter $\Phi(\beta) = (\Phi \cdot \sigma \cdot \Phi^{-1})\Phi(\alpha) \in \Phi'$. Segue que Φ mapeia Φ em Φ' , e a fórmula para as reflexões mostra que Φ preserva todos os inteiros de Cartan.

Uma forma construtiva para ver como recuperar as raízes Φ a partir da matriz de Cartan pode ser visto em [10].

Grafos de Coxeter e Diagramas de Dynkin

Se α, β são raízes positivas sabemos que $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$ ou 3 (como vimos). Definimos o grafo de Coxeter de Φ como sendo um grafo tendo l vértices, de forma que o i -ésimo vértice é ligado ao j -ésimo por $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ - linhas.

Ex. Para $\text{rank} = 2$ temos

$$A_1 \times A_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad A_2 \quad \cdot \text{---} \cdot \quad B_2 \quad \cdot \text{==} \cdot \quad G_2 \quad \cdot \text{===} \cdot$$

Quando temos 2 vértices consecutivos de tamanhos distintos, (linhas duplas ou triplas) colocaremos uma seta apontando para o vértice equivalente à raiz curta. Os grafos de Coxeter adicionados a tais informações são chamados Diagramas de Dynkin.

Ex.

$$B_2 \cdot \text{---} \text{---} \cdot \quad G_2 \cdot \text{==} \text{==} \cdot$$

Vemos que os Diagramas de Dynkin, nos dão toda informação sobre a base e também sobre o grupo de Weyl $\mathfrak{w}$, podendo ser possível então recuperar o sistema de raízes Φ .

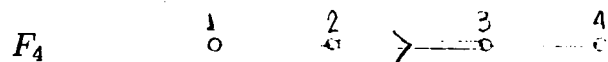
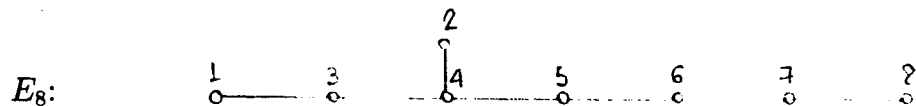
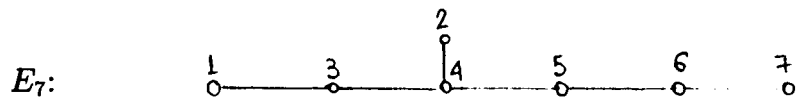
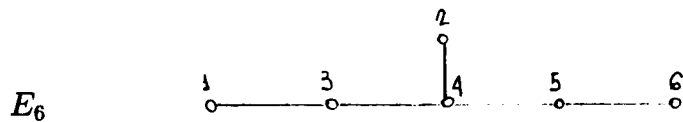
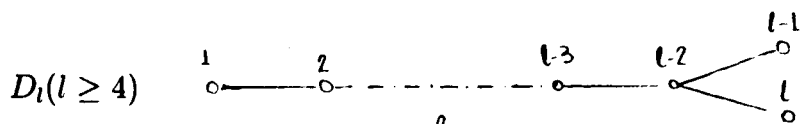
(É claro que Φ é irredutível se e se o grafo de Coxeter correspondente for conexo).

O teorema que segue nos fornece uma classificação de todos os possíveis diagramas de Dynkin conexos e portanto uma classificação de todos os sistemas de raízes irredutíveis Φ , que se referem às álgebras de Lie simples.

Teorema.

Se Φ é um sistema de raízes irredutíveis de rank l (l vértices portanto) seu diagrama de Dynkin é um dos que segue

$$\begin{aligned}
 A_l (l \geq 1) & \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{2}{\circ} \text{---} \overset{3}{\circ} \text{---} \cdots \text{---} \overset{l-1}{\circ} \text{---} \overset{l}{\circ} \\
 B_l (l \geq 2) & \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{2}{\circ} \text{---} \cdots \text{---} \overset{l-2}{\circ} \text{---} \overset{l-1}{\circ} \text{==>} \overset{l}{\circ} \\
 C_l (l \geq 3) & \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{2}{\circ} \text{---} \cdots \text{---} \overset{l-2}{\circ} \text{---} \overset{l-1}{\circ} \text{==<} \overset{l}{\circ}
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$



As restrições para l em A_l, B_l, C_l, D_l são impostas para que não tenhamos duplicações. As matrizes de Cartan correspondentes a tais diagramas podem ser vistas na tabela 1.

A prova do teorema acima pode ser vista em qualquer texto de álgebra de Lie em particular [17].

5. COCICLOS

No capítulo anterior recapitulamos brevemente a teoria de Álgebras de Lie de dimensão finita, dando ênfase às semi-simples, dado a estreita relação dessas com as simetrias de teorias físicas. Tal relação torna-se ainda mais forte quando consideramos a Mecânica Quântica, onde temos a representação dos grupos de Lie em espaços de Hilbert (ver apêndice III).

É da extensão de uma especial representação dos Grupos de Lie de dimensão finita no Espaço de Hilbert que surge um modelo para uma classe de Álgebras de Lie (e consequentemente um Grupo de Lie) de dimensão infinita: a álgebra de Kac-Moody. No caso de termos a extensão de uma álgebra semi-simples, teremos também a extensão da teoria de classificação de Killing-Cartan para estas álgebras Kac-Moody.

1 e 2 Cociclos

Seja G um grupo de Lie de dimensão finita (e g a álgebra de Lie). Uma representação U do grupo G é um Homomorfismo $U : G \rightarrow \text{End}V$ onde V é um espaço vetorial (de dimensão finita ou infinita) e $\text{End}V$ é o conjunto dos endomorfismos de V . Tomemos em particular a representação $U : G \rightarrow \text{End}(\mathcal{L}^2)$ de G no espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2$ das funções quadrado-integráveis $\Psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ onde M é uma variedade diferenciável relacionada com o espaço físico. A representação U é dada por

$$U(g)\Psi(q) = \Psi(q^g), \quad (5.1)$$

onde $q \rightarrow q^g$ é a ação do grupo G na variedade M .

Como U é representação devemos ter que:

$$U(g_2)U(g_1)\Psi(q) = U(g_2g_1)\Psi(q) = \Psi(q^{g_1g_2}) \quad (5.2)$$

Vamos agora tomar outra representação U' do grupo de Lie G , sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2$ na forma

$$U'(g_1)\Psi(q) = e^{iw(q,g_1)}U(g_1)\Psi(q) \quad (5.3)$$

onde

$$w : M \times G \rightarrow \mathbb{R}$$

Pela lei de composição, para que $U'(g_1)U'(g_2) = U'(g_1g_2)$ devemos ter

$$w_1(q, g_2) - w(q; g_1g_2) + w_1(q; g_1) = 0 \quad (\text{módulo } n2\pi, n \text{ inteiro}). \quad (5.4)$$

Tais aplicações $w_1 : M \times G \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas 1-cociclo (ver apêndice I).

Interessam-nos os 2-cociclos. Tais funções $\eta : M \times G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ aparecem na representação do grupo G sobre o espaço projetivo (ou de raias).

Chamemos tal representação de R . Neste caso, substituímos a lei de composição (5.2) por.

$$R(g_1g_2) = \eta(g_1, g_2)R(g_1)R(g_2); \quad \text{para } g_1, g_2 \in G \quad (5.5)$$

No caso da representação ser sobre o $\mathcal{L}^2$, tomemos as aplicações η da seguinte forma.

$$\begin{aligned} R(g_1) &= U'(g_1) \\ R(g_1g_2)\Psi(q) &= \exp(iw_2(q; g_1, g_2))R(g_1)R(g_2)\Psi(q) \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $w_2 : M \times G \times G \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que, mais do que as direções, tal representação mantém invariante o espaço dos vetores Ψ módulo um número complexo unimodular. sendo portanto a representação natural na descrição de fenômenos quânticos.

Para preservarmos a associatividade devemos ter que:

$$\begin{aligned} w_2(q; g_2, g_3) - w_2(q; g_1 g_2, g_3) + w_2(q; g_1, g_2 g_3) \\ - w_2(q; g_1, g_2) = 0 \quad (\text{mod. } n2\pi, n \text{ inteiro}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para estudarmos melhor tais 2-cociclos, usemos a representação exponencial para os elementos $g_i \in G$ (para g_i na vizinhança da identidade), i.e.,

$$g_i = e^{i\tau_j \theta^j}$$

onde τ_i são geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e θ^i são funções do grupo de Lie nos reais ($\theta_i : G \rightarrow \mathbb{R}$).

Desta forma temos:

$$\begin{aligned} R(g_1)R(g_2) &= e^{iw_2(g_1, g_2)} R(g_1 g_2) \\ &= e^{iw_2(\tau_j \theta_1^j, \tau_j \theta_2^j)} R(e^{i\tau_i \theta_1^i} e^{i\tau_i \theta_2^i}) \\ &= e^{iw_2(\tau_i \theta_1^i, \tau_j \theta_2^j)} R(e^{i(\tau_i \theta_1^i + \tau_i \theta_2^i) + \frac{i}{2}[\tau_i, \tau_j] \theta_1^i \theta_2^j + \dots}) \end{aligned}$$

onde foi feita a expansão de Baker-Campbell-Hausdorf para o produto g_1, g_2 e foi omitido o ponto q da variedade M .

Temos no expoente 2 termos bilineares, a saber, $\frac{i}{2}[\tau_j, \tau_k] \theta_1^j \theta_2^k$ e $iw_2(\tau_j \theta_1^j, \tau_j \theta_2^j)$. O segundo termo, sendo um funcional, têm como imagem um elemento que está fora da álgebra de Lie.

Por isso, desejamos estender a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para uma álgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus K$ onde que o comutador de $\tau_j \theta_1^j$ com $\tau_k \theta_1^k$ nessa álgebra estendida tem a forma

$$[\tau_j \theta_1^j, \tau_j \theta_2^j] = [\tau_j \theta_1^j, \tau_j \theta_2^j] + q w_2(\tau_j \theta_1^j, \tau_j \theta_2^j)$$

onde q é o gerador de K , de forma que, nesta nova álgebra todos funcionais estão incluídos como aplicações de $\tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$, e desta forma possamos fazer um estudo algébrico do 2-cociclo w .

2 Cociclos

Queremos estudar as álgebras de Lie que admitem 2-cociclos. Para tal, vamos tomar um álgebra de Lie g (de dimensão finita ou infinita) e extendê-la da seguinte forma.

$$\tilde{g} = g \oplus K.$$

se $a \in g$; $a = a^i \tau_i + q\xi(a)$

onde q é o gerador de K da álgebra $\tilde{g}$, $\{\tau^i\}$ os geradores de g e w é um funcional linear $\alpha : g \rightarrow \mathbb{R}$.

Na álgebra estendida $\tilde{g}$ temos a seguinte regra de comutação:

$$[\tau_i, \tau_j] = [\tau_i, \tau_j]_0 + qw(\tau_i, \tau_j) = f_{ij}^k \tau_k, \text{ onde } [\ , \]_0 \text{ é o comutador em } g.$$

$$[\tau_i, q] = 0, \text{ portanto } q \text{ é um termo central em } \tilde{g}.$$

Para $a, b \in g$, temos:

$$[a, b] = [a^i \tau_i, b^j \tau_j]_0 + qw(a, b)$$

onde $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ é funcional bilinear (pela bilinearidade do comutador). Outras propriedades de w são:

- i) $w(a, b) = -w(b, a)$ (pela antisimetria de $[\ , \]$)
- ii) $w(a, [bc]) + w(c, [a, b]) + w(b, [c, a]) = 0$ (pela identidade de Jacobi). (5.8)

Tal funcional $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$, com estas propriedades, é chamado 2-cociclo. A propriedade (i) é a de anti-simetria e a (ii) é a relação de cociclo.

O que queremos estudar é a possibilidade ou não de tais funcionais existirem e se eles trarão alguma informação nova, i.e., em que medida a álgebra estendida $\tilde{g}$ difere da álgebra de Lie original g .

Vamos estudar primeiro o caso em que g é semi-simples de dimensão finita, ou seja, o caso apresentado anteriormente.

Um funcional bilinear natural dentro duma álgebra de Lie é a forma de Killing (ver capítulo 2). No entanto esta é simétrica. Outro funcional possível seria na forma:

$$w(a, b) = \chi([a, b]),$$

onde $\chi : g \rightarrow \mathbb{R}$ é linear.

Note que da forma como foi definido, χ é anti simétrico e obedece a relação de cociclo por linearidade.

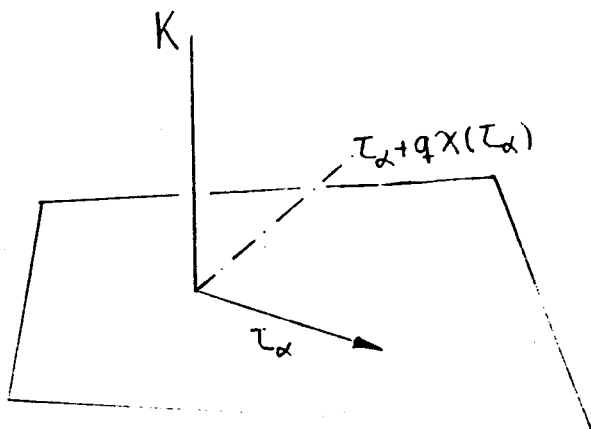
Tais cociclos são chamados de cofronteiras e não nos interessam muito por não trazer “essencialmente” um “enriquecimento” na estrutura de g por extensão. Com efeito, se tomarmos uma base de uma subálgebra de $\tilde{g}$, isomorfa a g , na forma $\tau_\alpha \rightarrow \tau_\alpha + q\chi(\tau_\alpha)$, onde o χ é funcional linear acima enunciado, então em tal subálgebra teríamos o comutador

$$[\tau_\alpha + k(\tau_\alpha), \tau_\beta + k(\tau_\beta)] = [\tau_\alpha, \tau_\beta] + q\chi([\tau_\alpha, \tau_\beta]).$$

Portanto, nesta subálgebra *isomorfa a g* temos a aparição do cociclo χ ([]) na relação de comutação de forma, natural. Ou seja, temos uma álgebra de Lie isomorfa à álgebra g , e não estendida de g .

Ainda, é possível mostrar que todos os cociclos triviais tem essa forma, i.e., são cofronteira. Por cociclos triviais entende-se o caso em que $\tilde{g} = g \oplus K$ pode ser escrita como $\tilde{g} = g' \oplus K$ onde g' é isomorfa à g mas o $\tilde{g}$ -comutador de dois elementos de g' pertence à g' , i.e., g' fica fechada pelo comutador em $\tilde{g}$. Estamos afirmando,

portanto, que todo cociclo trivial é cofronteira [13].



Concluimos então que os cociclos que são cofronteira, não nos interessam.

Todavia, no caso de álgebras de Lie semi-simples o Lema de Whitehead afirma que todo 2-cociclo é cofronteira (ver ap. I). Ou seja, no caso de álgebras semi-simples de dimensão finita, os 2-cociclos são triviais.

Se exigirmos, além das condições de anti-simetria e a relação de cociclo, invariância pela ação global de G , automaticamente os funcionais w para qualquer g de dimensão finita são iguais a zero. Com efeito, diferencialmente temos (ver cap.2) a invariância por adjunção:

$$w(a, [b, c]) + w([b, a], c) = 0. \quad (5.9)$$

Imposta tal condição decorreria que:

$$\begin{aligned} w([x, [y, z]]) &= -w(z, [x, y]) - w(y, [z, x]) \quad (\text{pela lei de cociclo}) \\ &= w(x, [y, z]) + w(x, [y, z]) = 2w(x[y, z]) \end{aligned}$$

Portanto $w = 0$.

Esta exigência, de invariância pela ação global do grupo G será mantida no caso das álgebras Kac-Moody, como veremos posteriormente.

Iremos nos interessar então, pelas álgebras de Lie de dimensão infinita, em particular pelas álgebras Kac-Moody que num certo censo, são extensões das álgebras

semi-simples.

Primeiro, tomemos especificamente as álgebras de Lie na forma $g = g_0 \otimes C^\infty(M)$, onde g_0 é uma álgebra semi-simples finito dimensional e $C^\infty(M)$ é o anel de funções contínuas sobre uma variedade M . O interesse em tais álgebras vem do fato de serem a álgebra de Lie das transformações de gauge em teorias de gauge.

Exemplo:

Tomemos o espaço de Hilbert de espinores de Pauli $\Psi = \begin{pmatrix} \Phi_1(q) \\ \Phi_2(q) \end{pmatrix}$ onde $\Phi_i : M \rightarrow \mathbb{C}$ são funções da variedade M tais que $\Psi^\dagger \Psi = 1$ onde $\Psi^\dagger = (\Psi^t)^*$ sendo Ψ^t a transposição e Ψ^* é a conjugação das entradas.

Tomemos agora o grupo $G = SU(2, \mathbb{C})$ e a seguinte ação nos espinores $F(x)\Psi(q) = e^{i\tau^j \alpha_j(q)} \Psi(q)$ onde $x (= e^{i\tau^j \alpha^j}) \in G$, $\{\tau_i\}$ são as matrizes de Pauli, e $\alpha \in C^\infty(M)$. Tal ação pode ser vista como a ação do grupo das aplicações $F : M \rightarrow G$ ou, infinitesimalmente, a álgebra de Lie das aplicações $f : M \rightarrow g_0$. Por construção, esta álgebra de Lie g é o produto tensorial da álgebra de Lie g_0 pelo anel de funções $C^\infty(M)$, i.e., $g = g_0 \otimes C^\infty(M)$. E para dois elementos $A, B \in g$ dados por:

$$A = af, B = bh \quad \text{para} \quad a, b \in g_0; f, h \in C^\infty(M)$$

então

$$[A, B]_0 = [af, bh]_0 = fh[a, b]_0.$$

Tal álgebra de Lie g é de dimensão infinita. Queremos estudar a possibilidade de extendê-la para uma álgebra $\tilde{g} = g \oplus K$, onde se $\alpha \in g$, $\alpha = A \oplus q\xi(A)$, e para α e $\beta \in \tilde{g}$, $\beta = B \oplus q\xi(B)$, temos $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] = [A, B]_0 \oplus qw(A, B)$.

Já vimos que para dimensão finita os funcionais $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ são triviais (e nulos, se exigirmos a invariância pela ação global de G). No caso de dimensão infinita, veremos que tal funcional pode não ser trivial. Queremos achar então funcionais $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$, obedecendo;

$$(i) \quad w(\alpha, \beta) = -w(\beta, \alpha)$$

$$(ii) \quad w(\alpha, [\beta, \gamma]) + w(\gamma, [\alpha, \beta]) + w(\beta, [\gamma, \alpha]) = 0$$

e a condição adicional

$$(iii) \ w(x\alpha x^{-1}, x\beta x^{-1}) = w(\alpha, \beta) \quad (5.10)$$

para $x = e^{ct} \in G, c \in g$, ou diferencialmente

$$w([c, \alpha], \beta) + w(\alpha, [c, \beta]) = 0.$$

para $c = c.id$ onde $id : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade:

Note que graças ao isomorfismo canônico $g^* = (g_0 \otimes \mathcal{L})^* \cong g_0^* \otimes \mathcal{L}^*$ podemos “quebrar” o funcional $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ na forma $w = \Phi \otimes k$, onde $\Phi : C^\infty \times C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ e $k = g_0 \times g_0 \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja,

$$w(\alpha, \beta) = \Phi(f, h)k(a, b),$$

onde $\alpha = fa$; $\beta = hb$ e $f, h \in C^\infty(M)$; $a, b \in g_0$.

Se exigirmos invariância por adjunção, i.e., a condição (iii); esta será uma restrição apenas ao funcional k . Com efeito; para $\gamma = c.id, c \in g_0$ e $id \in C^\infty$ temos

$$\begin{aligned} w([\gamma, \alpha], \beta) + w(\alpha, [\gamma, \beta]) &= 0 \\ \Rightarrow w(id.f[c, a], hb) + w(fa, id.h[c, b]) &= 0 \\ \Rightarrow \Phi(f, h)k([c, a], b) + \Phi(f, h)k(a, [c, b]) &= 0 \\ \Rightarrow \Phi(f, h)(k([c, a], b) + k(a, [c, b])) &= 0 \end{aligned}$$

como f, h são quaisquer e supondo que w não é nulo temos

$$k([c, a], b) + k(a, [c, b]) = 0 \quad (5.11)$$

Lembremos que a forma de Killing é um funcional invariante pela adjunção (ver cap. 2). Entretanto a forma de Killing é simétrica.

Na verdade para que o funcional w seja antisimétrico (condição (i)) temos duas opções:

- (a) ou $k : g_0 \times g_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrico e $\Phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ é anti simétrico
- (b) $k : g_0 \times g_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é antisimétrico e $\Phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrico.

Provemos que para condição (b) teríamos cociclos nulo.

Vamos escrever a condição (ii) em termos dos funcionais k e Φ , i.e., para $\alpha = fa$, $\beta = gb$ e $\gamma = hc$, $a, b, c \in g_0$ e $f, g, h \in C^\infty$, temos

$$\Phi(f, gh)k(a, [b, c]) + \Phi(h, fg)k(c, [a, b]) + \Phi(g, hf)k(b, [c, a]) = 0$$

Agora, impondo a invariância por adjunção e anti-simetria a k temos

$$\begin{aligned} k(c, [a, b]) &= -k([a, b], c) = k([b, a], c) = -k(a, [b, c]) \\ k(b, [c, a]) &= -k([c, b], a) = k(a, [c, b]) = -k(a, [b, c]) \end{aligned}$$

Jogando tais resultados na condição (5.11) temos

$$k(a, [b, c])(\Phi(f, gh) - \Phi(h, fg) - \Phi(g, hf)) = 0$$

Como a, b, c são quaisquer e assumindo que é não nulo, temos:

$$\Phi(f, gh) = \Phi(h, fg) + \Phi(g, hf) \quad (5.12)$$

No caso que $h = id$ temos

$$\Phi(f, g) = \Phi(id, fg) + \Phi(g, f)$$

Mas $\Phi(id, fg) = \Phi(g, f) + \Phi(f, g)$ por (5.12), i.e.

$$\Phi(f, g) = 2\Phi(g, f) + \Phi(f, g)$$

ou seja $\Phi(g, f) = 0$ para quaisquer g, f . Então se k for antissimétrico, Φ é nulo para quaisquer funções, ou seja w é nulo.

Lembremos que foi exigido para a, b, c quaisquer $k(a, [b, c]) \neq 0$. Ora, tal exigência é natural já que para álgebras de Lie g_0 semi-simples, qualquer elemento d pode ser escrito como $d = [b, c]$ para certos $b, c \in g_0$ (ver cap. 2). Portanto para dados $a, d \in g_0$ com $d = [b, c]$, para que $k(a, d) \neq 0$ teremos que $k(a, [b, c]) \neq 0$. Desta forma a exigência $k(a, [b, c]) \neq 0$ para a, b, c genéricas é uma condição de cociclos w não nulos.

Vamos exigir para os funcionais k e Φ a condição (a), i.e., k é simétrico e Φ é antisimétrico.

Nestas condições, podemos provar que os cociclos não nulos $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ não são cofronteira, i.e, $w(\alpha, \beta) \neq \chi([\alpha, \beta])$. Com efeito, temos necessariamente que

$$w(af, bg) = \Phi(f, g)k(a, b) = -\Phi(g, f)k(a, b) = -w(ag, bf). \quad (5.13)$$

Mas se $w(\alpha, \beta) = \chi([\alpha, \beta])$ temos

$$w(af, bg) = \chi([af, bg]) = \chi(fg[a, b]) = \chi(gf[a, b]) = \chi([ga, fb]).$$

Ou seja $w(af, bg) = w(ag, bf)$, o que por (5.13) implicaria em $w = 0$.

Logo, para dimensão infinita, todos cociclo não nulos não são cofronteiras, de forma que não temos uma teoria trivial como no caso de dimensão finita.

Háviamos falado que a forma de Killing é um funcional bilinear invariante por adjunção e é simétrica. Na verdade, pelo lema de Schur, tal funcional é único (ou proporcional a ele). (ver ap. II)

Desta forma, temos de forma genérica:

$$w(\alpha, \beta) = k(a, b)\Phi(f, g) = \text{tr}(ada, adb)\Phi(f, g). \quad (5.14)$$

Temos então que nos concentrar em achar um funcional $\Phi : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes condições:

$$(i) \quad \Phi(f, g) = -\Phi(g, f) \quad (5.15)$$

$$(ii) \quad \Phi(f, gh) + \Phi(h, fg) + \Phi(g, hf) = 0.$$

Especificamente, tomaremos $M = S^1$ e neste caso obteremos as álgebras Kac-Moody. Em seguida, estudaremos o caso que $M = S^3$ e faremos a conexão com certas anomalias quânticas (cap. 7) achadas por Fadeev [6].

6. ÁLBEGRAS KAC-MOODY (UNTWISTED)

Seja a álgebra $g = g_0 \otimes C^\infty(S^1)$ onde g_0 é uma álgebra de Lie semi-Simples e $C^\infty(S^1)$ é o conjunto das aplicações diferenciáveis em S^1 . Tomemos S^1 mergulhado em $\mathbb{C} (= \{z \in \mathbb{C}, |z| = cte\})$. Façamos a expansão de $f \in C^\infty(S^1)$ em série de Laurent:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) z^n.$$

Então para um elemento $A = af \in g$; $a \in g_0$ e $\{\tau_i\}$ geradores de g_0 , podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= af = a^i \tau_i (\sum a_n(f) z^n) \\ &= \sum b_n^i(f) \tau_i z^n \\ &= \sum b_n^i(f) T_i^n, \end{aligned}$$

onde $T_i^n = \tau_i z^n$

Note que $\{T_i^n\}$ é base para g , e em g vale a seguinte regra de comutação:

$$[T_i^n, T_j^m]_0 = [\tau_i z^n, \tau_j z^m]_0 = z^{n+m} [\tau_i, \tau_j]_0 = f_{ij}^k T_k^{n+m} \quad (6.1)$$

onde f_{ij}^k são as constantes de estrutura de g_0 .

As álgebras de Kac-Moody afins e sem torção podem [8] ser obtidas como extensões centrais das álgebras acima.

Já vimos que, para álgebras de Lie na forma $g = g_0 \otimes C^\infty(M)$ é possível estendermos g na forma $\tilde{g} = g \oplus K$, para $\alpha, \beta \in g$, $\alpha = af$ e $\beta = bg$

$$[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta]_0 + qw(\alpha, \beta); \quad (6.2)$$

onde $[\cdot, \cdot]_0$ é o comutador em g , $w(\alpha, \beta)$ é um funcional $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ na forma

$$w(\alpha, \beta) = k(a, b)\Phi(f, g)$$

onde $\Phi : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ verifica as propriedades (i) e (ii) (ver cap. anterior).

No caso em que $M = S^1$, podemos escrever $\Phi(f, g)$ como um funcional $\chi : C^\infty(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$. Com efeito, observemos que

$$(a) \quad \Phi(f, 1) = 0$$

Por (i) e (ii) temos

$$\Phi(1, f, 1) + \Phi(1, 1, f) + \Phi(f, 1, 1) = 0$$

$$\text{e } \Phi(1, f) = -\Phi(f, 1).$$

Logo

$$\Phi(1, f) = 0.$$

$$(b) \quad \Phi(f, z^2) = \Phi(2fz, z).$$

Por (i) e (ii) temos

$$\Phi(f, zz) + \Phi(z, fz) + \Phi(z, zf) = 0$$

$$\text{e } \Phi(z, fz) = -\Phi(fz, z).$$

Logo

$$\Phi(f, z^2) = \Phi(2fz, z)$$

Usando a hipótese indutiva e observando (a) e (b), temos então que

$$\Phi(f, z^n) = \Phi(nfz^{n-1}, z)$$

ou seja,

$$\Phi(f, z^n) = \Phi\left(f \frac{d}{dz} z^n, z\right).$$

Então, para qualquer polinômio P em z , temos por linearidade

$$\Phi(f, P) = \Phi\left(f \frac{d}{dz} P, z\right).$$

Já que os polinômios são base em $C^\infty(S^1)$, podemos escrever quaisquer funções f, g

$$\Phi(f, g) = \Phi\left(f \frac{d}{dz} g, z\right) = \Phi_z\left(f \frac{d}{dz} g\right). \quad (6.3)$$

Logo, podemos escrever $\Phi(f, g) = \chi\left(f \frac{d}{dz} g\right)$, onde $\chi : C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que, como $\Phi(f, 1) = 0$, vemos que $\chi(Df) = 0$ onde D é a derivada em relação à variável relevante ($D = \frac{d}{dz}$, neste caso). Então

$$\chi \circ D = 0 \quad (6.4)$$

Tal expressão contém a informação de antisimetria e a relação de cociclo. Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \chi(D(fgh)) = 0 = \chi((Df)gh) + \chi(f(Dg)h) + \chi(fgDh) \\ & \text{, ie,} \\ & \Phi(ghDf, z) + \Phi(fhDg, z) + \Phi(fgDh, z) = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \chi(D(fg)) = 0 = \chi(Df)g + \chi(fDg) \\ & \text{ie} \\ & \Phi(gDf, z) + \Phi(fDg, z) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Prosseguindo, notemos ainda que

$$\begin{aligned} \Phi(z^m, z^n) &= n\Phi(z^{m+n-1}, z) \\ &= -m\Phi(z^{m+n-1}, z) \end{aligned}$$

Portanto

$$(m+n)\Phi(z^{m+n-1}, z) = 0$$

Ou seja ou $(m+n) = 0$, ou $\Phi(z^{m+n-1}, z) = 0$.

Mas como $\Phi(f, g) = \Phi(fDg, z)$ e m, n são quaisquer, temos:

$$\Phi(z^m, z^n) = \chi\left(z^m \frac{d}{dz} z^n\right) \propto \delta_{m, -n} \quad (6.6)$$

Queremos então um funcional $\chi : C^\infty(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ com as propriedades (6.4) e (6.6). Tomemos então

$$X(fDg) = \text{res}(fdg).$$

Provemos que tal funcional verifica (6.4) e (6.6)

$$\chi \circ D(f) = \int_s df = 0$$

já que df é exata e a integral é num caminho fechado

$$\chi(z^n \frac{d}{dz} z^n) = \int_{S^1} z^m dz^n = n \int_{S^1} z^{m+n-1} dz = n \delta_{m,-n} \quad (6.7)$$

Achamos um funcional χ que verifica as condições necessárias para que $w(\alpha, \beta) = k(a, b)\Phi(f, g)$, para $\alpha = af$ e $\beta = bg$, $a, b \in g_0$ e $f, g \in C^\infty(X^1)$ seja cociclo. Então o funcional $\Phi(f, g) = \chi(fDg)$ é único (a menos de um coeficiente). Basta escrever χ na base $\{< z^m | \}$ (usando a notação de brac e kets, com relação ao produto interno usual) já que estamos tratando de funções analíticas. Então

$$\chi(z^m dz^n) = n\chi(z^{m+n-1}) = n \sum_k \langle z^k | z^{m+n-1} \rangle \propto \delta_{m,-n}.$$

Logo $k = 0$. Desta forma temos para os 2-cociclos a forma para $\alpha = af$, $\beta = bg$

$$w(\alpha, \beta) = k(a, b) \int_{S^1} fdg$$

Desta forma, obtemos a álgebra Kac-Moody com extensão central com a seguinte relação de comutação:

se $T_i^n = \tau_i z^n$

$$[T_i^n, T_j^m] = f_{ij}^k T_k^{m+n} + qn \delta_{m,-n} k(\tau_i, \tau_j).$$

Queremos neste trabalho, repetir “num certo sentido” o procedimento feito no caso em que $M = S^3$ e realizar o que chamaremos de álgebra de S^3 -Kac-Moody.

Para tal, usaremos o fato das funções em S^3 serem expansíveis em série de polinômios de Jacobi (t_{mn}^l) [19].

Recordando:

$$t_{mn}^l = e^{-im\varphi} e^{-in\psi} P_{mn}^l(\cos \theta),$$

onde P_{mn}^l são os polinômios de Legendre.

Desta forma, se tivermos $A \in g_0 \otimes C^\infty(S^3)$, $A = af$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} A &= af = a^i \tau_i (\sum b_{mn}^l T_{mn}^l) \\ &= \sum A_{m,n}^{i,l} (\tau_i t_{m,n}^l). \end{aligned}$$

Chamemos

$$T_{m,n,i}^l = t_{m,n}^l \tau^i$$

Desta forma, temos para os geradores $\{T_{m,n}^{i,l}\}$ a seguinte regra de comutação.

$$\begin{aligned} [T_{j,j',i}^{l_1} T_{k,k',j}^{l_2}] &= f_{ij}^k \tau_k \left(\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} C(l_1, l_2, l; j, k, j+k) C(l_1, l_2, l, j', k', j'+k') T_{j+k, j'+k'}^l \right)_k \\ &= f_{ij}^k \tau_k \left(\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} C_{1,2,j,k} C_{1,2,j',k'} T_{j+k, j'+k'}^l \right)_k \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde $C(l_1, l_2, l; j, k, j+k)$ são os coeficientes de Clebsch-Gordan (ref. Villenkin).

Note que em geral, não temos o termo (l_1, j, j') comutado com (l_2, k, k') indo para $(l_1 + l_2, j + k, j' + k')$ (se assim fosse deveríamos ter $M = T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ e não S^3).

Desejamos estender, então, a álgebra $g = g_0 \times C^\infty(S^3)$ adicionando (diretamente) um termo central, i.e., queremos construir $\tilde{g} = g \oplus K$, de forma que um termo típico de $\tilde{g}$ seria $\alpha = A + q\xi(A) = af + q\xi(af)$ onde ξ é um funcional $\xi : g \rightarrow \mathbb{R}$, e ainda, para α e β na forma acima teríamos

$$[\alpha, \beta] = [af, bg]_0 + qw(af, bg) \quad (6.9)$$

onde $[\cdot, \cdot]_0 : g \times g \rightarrow g$ é o comutador em g (na verdade em g_0), e $w : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional que satisfaz a propriedade de antisimetria e a relação de cociclo (5.10).

Já sabemos que w é partido em dois funcionais Φ e k onde $\Phi : C^\infty \times C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ e $k : g_0 \times g_0 \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que $w(A, B) = k(a, b)\Phi(f, g)$. Sabemos também que k é (a menos de uma constante multiplicativa) a forma de Killing (5.13). Portanto, resta-nos estudar o funcional Φ .

Primeiro mostremos que tal funcional pode ser escrito como $\chi(fDg)$ onde $D : C^\infty(S^3) \rightarrow C^\infty(S^3)$ é uma derivação.

Seja $\langle, \rangle : C^\infty(S^3) \times C^\infty(S^3) \rightarrow \mathbb{R}$ um produto interno e $\{e_i\}$ um conjunto ortogonal completo em $C^\infty(S^3)$. Podemos escrever $\Phi(f, g)$ na forma

$$\Phi(f, g) = \langle f, \bar{D}g \rangle, \quad (6.10)$$

onde $D : C^\infty(S^3) \rightarrow C^\infty(S^3)$ é definido por

$$\langle e_i, \bar{D}g \rangle = \Phi(e_i, g),$$

e portanto

$$Dg = \sum_i \langle e_i, \bar{D}g \rangle e_i$$

(usamos o fato de $\{e_i\}$ ser completo em $C^\infty(S^3)$).

Então, tomemos $\{e_i\} = \{t_{mn}^l\}$ (sabemos que t_{mn}^l é conjunto completo em $C^\infty(S^3)$ [19] e o produto interno usual $\langle f, g \rangle = \int_{S^3} f \bar{g} dv$).

Logo

$$\Phi(f, g) = \langle f, \bar{D}g \rangle = \int_{S^3} f Dg \, dv.$$

Para provar que D é derivação primeiro observemos a seguinte relação:

$$\Phi(f, gh) = -\Phi(h, fg) - \Phi(g, hf) = \Phi(fg, h) + \Phi(hf, g)$$

Logo

$$\int_{S^3} f D(gh) = \int_{S^3} fg(Dh) + \int_{S^3} fh(Dg),$$

donde vemos que D é derivação.

Escrevemos portanto D na forma $D = a_i D_i = a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ (onde i é o índice das coordenadas locais). Impondo que $\chi \circ D = 0$ (por 6.4),

$$\int_{S^3} Df = 0 = \int_{S^3} a_i \partial_i f = \int_{S^3} \vec{\alpha} \cdot \nabla f$$

onde $\vec{\alpha} = a_i \hat{x}_i$, e $\hat{x}_i$ é a base dual à ∂_i . Desta forma

$$\int_{S^3} Df = \int_{S^3} \nabla \cdot (f\alpha) - \int_{S^3} f \nabla \cdot \alpha = 0$$

Mas $\int_{S^3} \nabla \cdot (f\alpha) = 0$ pelo Teorema de Stokes e pelo fato de S^3 não ter bordo. Logo

$\int_{S^3} f \nabla \cdot \alpha = 0$, o que implica que $\partial_i a_i = 0$.

Agora, como $H^2(S^3) = 0$ (i.e., toda forma fechada em S^3 é exata) temos

$$D = a_i \partial_i = (\text{rot } A_j \partial_j) := \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) \partial_k, \quad (6.11)$$

onde o símbolo $\varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) \partial_k$ foi usado para representar $(\text{rot } A_j \partial_j)$.

Desta forma, para $A = af$, $B = bg$, $a, b \in g$ e $f, g \in C^\infty(S^3)$ temos:

$$w(A, B) = k(a, b) \int_{S^3} f \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \partial_i g \, d\varphi \quad (6.12)$$

Lembremos que S^3 está mergulhada em $\mathbb{C}^2$, $S^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, t.q., |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$. Por sua vez $\mathbb{C}^2$ é isomorfo às matrizes complexas dois por dois da forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cong (\alpha, \beta)$, e por esse isomorfismo S^3 corresponde à $SU(2)$. Tomemos como parametrização da esfera a parametrização do $SU(2)$ ($\simeq S^3$), onde $g \in SU(2)$

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

onde α e β são números complexos. Chamando

$$\text{i)} \quad \alpha = t + iz$$

$$\beta = x + iy$$

$$\text{ii)} \quad \alpha = \cos \frac{\theta}{2} \exp i \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right)$$

$$\beta = \sin \frac{\theta}{2} \exp i \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right).$$

temos então que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 = \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta}$. Estas relações ligam os três sistemas de coordenadas $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(\theta, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3$.

Com relações às coordenadas angulares, os ângulos (θ, φ, ψ) são chamados de ângulos de Euler e têm como “range” $0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \psi < 4\pi$ (para uma carta local) (ver Choquet-Bruhat, Analysis, Manifolds and Physics, pg. 187).

Se tomarmos os campos invariantes à esquerda, que na identidade valem ∂_x, ∂_y e ∂_z , estes, que formam uma álgebra de Lie (ver cap. I), são campos solenoidais, i.e., são na forma $\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \partial_i$.

Primeiro notemos que, de acordo com a parametrização escolhida

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

ou seja $\partial_x = i\tau_j$ onde $\{\tau_j\}$ são as matrizes de pauli.

Lembrando que Lg^* é o diferencial da aplicação $Lg : SU(2) \rightarrow SU(2), h \rightarrow gh$, para $g \in SU(2)$ fixo. Definimos então os seguintes campos invariantes à esquerda:

$$2A_1 = Lg * \partial_x = -x\partial_t + t\partial_x + z\partial_y - y\partial_z$$

$$2A_2 = Lg * \partial_y = -y\partial_t + x\partial_z + t\partial_y - z\partial_x$$

$$2A_3 = Lg * \partial_z = -z\partial_t + t\partial_z + x\partial_y - y\partial_x$$

de forma que na identidade, i.e., $x = y = z = 0, t = 1$ temos

$$2A_1(e) = \partial_x, \quad 2A_2(e) = \partial_y, \quad 2A_3(e) = \partial_z.$$

Tais campos, em coordenadas angulares, tornam-se mais familiares.

$$\begin{aligned} 2A_1 &= 2 \cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} - 2 \cot g \theta \sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ 2A_2 &= -2 \sin \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2 \cot g \theta \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ 2A_3 &= 2 \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Para tais operadores temos $[A_i, A_j] = A_k$.

Tais campos são solenoidais. Para verificar tal fato podemos fazer explicitamente o cálculo. Para tal devemos tomar o divergente que em coordenadas é escrito na forma

$$\nabla \cdot \bar{w} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_p} (\sqrt{\det g} \bar{w}_p) (= *d * w \text{ para } W \text{ 1-forma})$$

onde g é o tensor métrico que no caso é

$$g = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \cos\theta \\ & & \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

e $\bar{w}$ é um campo vetorial.

Dado que tais campos são solenoidais temos também que os seguintes campos são solenoidais

$$\begin{aligned} \widehat{H}_+ &= iA_1 - A_2 \\ \widehat{H}_- &= iA_1 + A_2 \\ \widehat{H}_3 &= iA_3. \end{aligned}$$

Tais campos são chamados de operadores escada e obedecem:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_+ t_{mn}^l &= \sqrt{(l-n)(l+n+1)} t_{m,n+1}^l \\ \widehat{H}_- t_{mn}^l &= -\sqrt{(l+n)(l-n+1)} t_{m,n-1}^l \\ \widehat{H}_3 t_{mn}^l &= -n t_{mn}^l. \end{aligned}$$

onde $\{t_{mn}^l\}$ são os polinômios de Jacobi.

Da mesma forma se tomarmos os campos A_1, A_2, A_3 e trocarmos φ por ψ , geramos os campos B_1, B_2, B_3 .

$$\begin{aligned} 2B_1 &= 2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} - 2 \cot g \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 2B_2 &= 2 \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} - 2 \cot g \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 2B_3 &= 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Tais campos também são solenoidais bem como as combinações lineares

$$\begin{aligned}\hat{F}_+ &= iB_1 - B_2 \\ \hat{F}_- &= iB_1 + B_2, \\ \hat{F}_3 &= iB_3,\end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned}\hat{F}_+ t_{mn}^l &= -\sqrt{(l-m)(l+m+1)} t_{m+1,n}^l \\ \hat{F}_- t_{mn}^l &= -\sqrt{(l+m)(l-m+1)} t_{m-1,n}^l \\ \hat{F}_3 t_{mn}^l &= -m t_{mn}^l.\end{aligned}$$

Então se tomarmos, por exemplo, $D = a_i \partial_i = \hat{H}_3 + \hat{F}_3$ temos

$$\int_{S^3} t_{mn}^l (\hat{H}_3 + \hat{F}_3) t_{m'n'}^{l'} dv = \frac{(-1)^{n-m}}{2l+1} \delta_{l,l'} \delta_{m,-m'} \delta_{n,-n'}.$$

De forma geral temos então que o comutador (6.8), extendido na forma (6.9), é expresso por

$$\begin{aligned}[T_{m_1,n_1,i}^{l_1}, T_{m_2,n_2,j}^{l_2}] &= f_{ij}^k \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} C_{1,2,m_1,m_2} C_{1,2,n_1,n_2} T_{m_1+m_2,n_1+n_2,k}^l \\ &\quad + qk(\tau_1, \tau_j) \int_{S^3} t_{m_1,n_1}^{l_1} \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \partial_k t_{m_2,n_2}^{l_2} dv.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Note que tal extensão é única e que o fato de, ao comutarmos um gerador com índice (l_1, m_1, n_1) com um (l_2, m_2, n_2) obtermos uma soma de geradores $\sum_l (l, m_1 + m_2, n_1 + n_2)$, destrivializa a estrutura da álgebra, no sentido de não termos a mesma estrutura das álgebras Kac-Moody. Se tivéssemos tomado, por exemplo, T^3 no lugar de S^3 (onde $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$) teríamos, nesse sentido, uma álgebra essencialmente igual às álgebras Kac-Moody.

No próximo capítulo, mostraremos uma aplicação de tal resultado nas teorias de gauge.

7. APLICAÇÕES

Em trabalho intitulado “Anomaly for the Gauss Law” [6] Fadeev mostrou que a álgebra dos “Constraints” ([7], vide apêndice III) pode ser estendida, de forma que as relações de comutação para a álgebra estendida são:

$$[C^a(x), C^b(y)] = f_{ab}^c C^c(x) \delta^{(3)}(x - y) + \frac{1}{12\pi^2} d^{abc} \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j^c(x) \partial_k \delta^{(3)}(x - y)$$

onde

$$C^a(x) = \partial_i E_i^a + f_{ab}^c A_i^b E_i^c + i\bar{\psi} \gamma_0 \lambda^a \psi, \quad (7.1)$$

e

$$d^{abc} = \frac{1}{2} \text{tr}(\lambda^a \{\lambda^b, \lambda^c\}).$$

Vamos mostrar a equivalência entre esse resultado e o por nós obtido.

Para tal, necessitamos modificar sutilmente o nosso resultado. Primeiro tomemos o termo da “extensão”; $w(A, B)$ para $A = af, B = bg$

$$w(af, bg) = k(a, b) \chi(fDg) = k(a, b) \int_{S^3} f \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \partial_k g d\varphi$$

Observe que podemos reescrever w na forma

$$w(af, bg) = k(a, X(fDg)b) = \bar{w}(af, D(gb)); \quad (7.2)$$

onde $\bar{w}(af, D(gb)) = k(ab)X(fDg)$ para $D : C^\infty \rightarrow C^\infty$ derivação. Lembremos ainda que D é dual à uma 1-forma, e que, quando estivermos trabalhando com fibrados principais (caso das teorias de Gauge) temos n -formas Lie-valorizadas ([3],[20]) como a 1-forma de conexão, etc.

Ocorre[5] que as álgebras de Lie na forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes C^\infty(M)$ são isomorfas às álgebras das Transformações de Gauge. Neste caso a álgebra $\mathfrak{g}$ pode aparecer como a álgebra dos geradores do grupo das Transformações de Gauge.

Tomemos a derivação D como sendo Lie valorizada, i.e., $\bar{D} = \tau_c D^c$ onde $\{\tau_c\}$ são os geradores g e cada D^c é derivação na forma $D^c = \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j^c \partial_k$.

Logicamente, deveremos modificar o funcional w para que ele contraia a parte Lie algébrica da derivação $\bar{D}$.

De forma que escrevemos agora

$$w(af, bg) = k_c(a, b) \cdot \int_{S^3} f D^c g,$$

onde k é funcional trilinear, i.e., $k : g \times g \times g \rightarrow \mathbb{R}, k(a, c, b) = k_c(a, b)$.

Note que se escrevemos como em (6.2), i.e., $w(af, \bar{D}(gb))$, devemos então considerar o novo funcional na forma

$$k_c(a, b) = k(a, h_c(b)) \quad (7.3)$$

Onde $h : g \times g \rightarrow g$, de forma que $\bar{w} = \bar{w}(af, (D^c g)h_c(b))$.

Temos então um produto $h_c \cdot b = \tau_c \vee b$. Um produto natural em g é o comutador. Ocorre que se tomarmos $h = [\ , \]$, então teríamos

$$k_c(a, b) = k(a, [\tau_c, b]) = -k([\tau_c, a], b) = -k(b, [\tau_c, a]) = -k_c(b, a)$$

o que nos levaria à um funcional anti-simétrico.

Precisamos achar um produto h que preserve a simetria em $k_c(a, b)$. Queremos ainda a invariância global de $k_c(a, b)$, i.e., que $k_c(a, b)$ seja invariante por adjunção. Para uma álgebra Lie g geral, tal produto pode ou não existir. Mas se especificarmos para $g = su(n)$ (que é o caso de interesse) temos um produto (único) na forma

$$ad\tau_c \vee adb = \{ad\tau_c, adb\} - \frac{2}{n}k(\tau_c, b), \quad (7.4)$$

onde $\{ \ , \ }$ é o anticomutador, i.e., $\{A, B\} = AB + BA$. Note que em geral o anticomutador não é uma aplicação de $g \times g$ em g , mas segundo termo corrige tal defeito, de forma que $T_r(\tau_c \vee b) = 0$ e portanto $\vee : g \times g \rightarrow g$.

Tal produto é o único produto (além do comutador), que é invariante por adjunção, segundo trabalho de Michel e Radicati [14].

Então, tomando tal produto em $k_c(a, b)$ teríamos

$$k_c(a, b) = k(a, \tau_c \vee b) = t_r(ada\{ad\tau_c, adb\}) - t_r(ada.1)\frac{k}{n}(\tau_c, b)$$

O segundo termo é nulo dado que para $a \in su(n)$, $t_r(ada) = 0$. Então sobra-nos o primeiro que é simétrico em relação a (a, b) pois

$$\begin{aligned} \frac{t_r}{2}(ada(\{ad\tau_c, adb\})) &= t_r(adaad\tau_cadb) + t_r(adaadb\tau_c) \\ \frac{t_r}{2}(adbadaad\tau_c) + t_r(adbad\tau_cada) &= t_r(adb\{ada, ad\tau_c\}) \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde foi usada a invariância por permutações cíclicas do traço, i.e, $t_r(ABC) = t_r(CAB)$.

Portanto, temos um novo funcional $w(af, bg)$ na forma

$$w(af, bg) = k(a\{\tau_c, b\}). \int_{S^3} f D_c g dv. \quad (7.6)$$

Para mostrar a equivalência da álgebra dos “Constraints” e a álgebra $\underline{g}$ primeiro tomemos a seguinte álgebra

$$\text{para } C_{(x)}^a = \partial_i E_i^a + f_{ab}^c A_i^b E_i^c + i\bar{\psi} \partial_0 \lambda^a \psi.$$

$$\{C_{(x)}^a, C_{(y)}^b\} = f_{ab}^c C_{(x)}^c \delta_{(x-y)} \quad (7.7)$$

Agora para $\alpha(x) \in \Omega(x)$ (álgebra de Lie das transformações do Gauge) definimos a seguinte representação

$$C(\alpha) = tr \int_M C(x) \alpha(x) d^3x \quad (7.8)$$

com

$$\{C(\alpha), C(\beta)\} = C([\alpha, \beta]). \quad (7.9)$$

onde M é a variedade do espaço dos parâmetros físicos, $\{ . \}$ é o parêntesis de Poisson e $[,]$ é o comutador em $\Omega(x)$.

No nosso caso, tomemos a integral sobre $S^3(\mathbb{R}^3 \text{ compactificado})$ teríamos então

$$C(\alpha) = \text{tr} \left\{ \int_{S^3} C(x) \alpha(x) dv \right\}$$

Ocorre que um elemento $\alpha(x) \in \Omega(x)$, é tipicamente uma aplicação da variedade M (espaço físico que no nosso caso é S^3) na álgebra de Lie associada ao Grupo de Gauge ($\alpha : M \rightarrow g$). Portanto para $M = S^3$ e $g = su(n)$ temos para $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ geradores de $\Omega(M)$.

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \text{tr} \int_{S^3} C(x) t_{m_1 n_1}^{\ell_1} \tau_\alpha dv = C_{m_1 n_1}^{\ell_1}(\alpha) \\ C(\beta) &= \text{tr} \int_{S^3} C(x) t_{m_2 n_2}^{\ell_2} \tau_\beta dv = C_{m_2 n_2}^{\ell_2}(\beta) \end{aligned}$$

e o comutador, sem a extensão, usando (6.9) seria:

$$\begin{aligned} \{C_{m_1 n_1}^{\ell_1}(\alpha), C_{m_2 n_2}^{\ell_2}(\beta)\} &= \text{tr} \int_{S^3} C(x) [\tau^\alpha, \tau^\beta] t_{m_1, n_1}^{\ell_1}(x) t_{m_2, n_2}^{\ell_2}(x) dv \\ &= f_{\alpha\beta}^\gamma \text{tr} \int_{S^3} C(x) \left(\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} C_{1,2,m_1,m_2} C_{1,2,n_1,n_2} t_{m_1+m_2, n_1+n_2}^\ell \right) \tau_\gamma dv \\ &= f_{\alpha\beta}^\gamma \left(\sum C_{1,2,m_1,m_2} C_{1,2,n_1,n_2} C_{m_1+m_2, m_1+n_2}^\ell(\gamma) \right) \end{aligned}$$

que é a relação de comutação para os geradores $\{T_{m,n,i}^\ell\}$ obtidos em (6.8).

Se na relação (6.8) introduzíssemos um termo adicional, como em (6.1), deveríamos ter um termo extra em (6.8). Para ver como seria tal termo devemos notar que o termo $d_{abc} \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j^c(x) \partial_k \delta^3(x-y)$ apresenta uma contração do primeiro termo do comutador (indiciado por a) com o anticomutador do segundo termo do comutador (indicado por b) e com um termo vindo do potencial de Gauge A_j^c .

Portanto, ao integrarmos o comutador, na forma (6-8), devemos integrar o termo extra da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{tr} \int_{S^3} \int \frac{1}{12\pi^2} k(\tau_\alpha, \{\tau_\beta, \tau_\gamma\}) \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j^\gamma t_{m_1 n_1}^{\ell_1, \alpha}(x) t_{m_2 n_2}^{\ell_2, \beta}(x') \partial_k \delta^3(x-x') dv dv' \\ &= \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3} d_{\alpha\beta}^\gamma \partial_i A_j^\gamma t_{m_1 n_1}^{\ell_1, \alpha}(x) \partial_k t_{m_2 n_2}^{\ell_2, \beta}(x) d^3 v. \end{aligned}$$

e portanto, o comutador “extendido para os geradores de $\Omega(M)$ seria

$$\begin{aligned}
[C(\alpha), C(\beta)] &= [C_{m_1 n_1}^{\ell_1}(\alpha), C_{m_2 n_2}^{\ell_2}(\beta)] = \\
&= f_{\alpha\beta}^\gamma \left(\sum_{\ell} C_{1,2m_1,m_2} C_{1,2,n_1,n_2} C_{m_1+m_2,n_1+n_2}^{\ell}(\gamma) \right) \\
&\quad + k \frac{(\tau_\alpha, \{\tau_\beta, \tau_\gamma\})}{12\pi^2} \int_{S^3} \varepsilon_{ijk} \partial_i A_\gamma^{\ell_1, \alpha} t_{m_1 n_1}^{\ell_1}(x) \partial_k t_{m_2 n_2}^{\ell_2, \beta}(x) d^3 v
\end{aligned}$$

que, a menos de normalização, corresponde à expressão (6.6). (no sentido Lie algébrico).

Para interpretarmos tal coincidência, lembremos os $C(\alpha)$ são geradores infinitesimais das transformações de gauge numa teoria de *segunda quantização* [6], i.e.,

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{A}_\ell &= \{C(\alpha), \mathcal{A}_\ell(x)\} = \partial_\ell \alpha(x) - [\mathcal{A}_\ell(x), \alpha(x)] \\
\delta \mathcal{E}_k &= \{C(\alpha), \mathcal{E}_k\} = -[\mathcal{E}_k(x), \alpha(x)]
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}_\ell$ e $\mathcal{E}_k$ são respectivamente o potencial e o campo de Gauge.

Logo temos uma equivalência Lie algébrica entre a álgebra de Lie do grupo de simetria numa Teoria de Gauge em primeira quantização (nosso caso) e segunda quantização. Desta forma, as anomalias não seriam fenômenos exclusivos de segunda quantização.

Apendice I – O Grupo de cohomologia de Algebras de Lie

g -Módulos

Seja g uma álgebra de Lie, M é modulo de g (ou g -módulo) se M for um espaço vetorial e tivermos um produto de $M \times g \rightarrow M$ que associa a cada par (m, a) , ao elemento ma de M , com as seguintes propriedades

- i) $(\alpha m_1 + \beta m_2)a = \alpha m_1 a + \beta m_2 a$
- ii) $m(\alpha a_1 + \beta a_2) = \alpha m a_1 + \beta m a_2$
- iii) $m([a, b]) = [ma, b]$ para $m_1 m_2 \in M, a_1, a_2 \in g$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$ corpo.

Co-cadeias e Co-bordos

Seja g uma álgebra de Lie e M um g -módulo. Se $i \geq 1$, uma i -dimensional M -co-cadeia para g é um mapa i -linear anti-simétrico de $g \times g \times \cdots \times g$ (i vezes) em M . A anti-simetria significa que f é muda para $-f$ quando trocamos dois l_i quaisquer.

Se $i = 0$ definimos uma cocadeia 0-dimensional para g como a função constante que leva g em u (= elemento fixo de M).

Se f é uma i -dimensional cocadeia (ou i -cocadeia), $i \geq 0$, f determina uma $(i + 1)$ dimensional cocadeia $f\delta$ chamada cobordo de f , definida por:

$$f\delta(l_1, \dots, l_{i+1}) = \sum_{q=1}^{i+1} (-1)^{i+1-q} f(l_1, \dots, \overset{\vee}{l}_q, \dots, l_{i+1}) l_q \\ + \sum_{q < r=1}^{i-1} (-1)^{r+q} f(l_1, \dots, \overset{\vee}{l}_q, \dots, \overset{\vee}{l}_r, \dots, l_{i-1}, [l_q, l_r]).$$

onde o sinal $\vee$ sobre o elemento l_j indica a omissão do mesmo.

Uma i -cocadeia f é chamada cociclo se $f\delta = 0$ e cobordo se $f = g\delta$ para alguma $(i - 1)$ cocadeia g . O conjunto $Z^i(g, M)$ dos i -cociclos é o núcleo do homomorfismo δ de C^i em C^{i+1} , então Z^i é subespaço de C^i . Similarmente, o conjunto $B^i(g, M)$ dos i -cobordo é um subespaço de C^i já que é imagem de δ de C^{i-1} . Na verdade,

temos que $B^i \subseteq Z^i$, i.e., cobordos são cociclos. Esse resultado leva à propriedade fundamental do operador de cobordo: $\delta^2 = 0$.

Do fato que $\delta^2 = 0$ podemos definir o grupo de cohomologia i -dimensional de g relativo ao módulo M como sendo o espaço quociente: $H^i(g, M) \equiv Z^i(g, M)/B^i(g, M)$. Se $i = 0$, então $B^i = 0$ pois não existe $(i - 1)$ cocadeias. Portanto nesse caso $H^0 = Z^0$.

Se $H^i = 0$, temos então que $Z^i = B^i$, i.e., todo i -cociclo é cobordo. Um resultado notável é o seguinte:

Teorema. Se g for de *dimensão finita* e semi-simples de característica 0, então $H^1(g, M) = 0 = H^2(g, M)$ para todo módulo de dimensão finita.

Tomemos por exemplo $M = \mathbb{F}$ (corpo) com o produto $\mathbb{F} \times g \rightarrow \mathbb{F}$ tal que, para $m \in \mathbb{F}$ e $l \in g$, $m.l = 0$. Note que para $M = \mathbb{F}$ ainda temos o produto $\mathbb{F} \times g \rightarrow g$ que vem do fato de g ser espaço vetorial.

Então, aplicando o teorema acima temos que se $H^2 = 0$, $Z^2 = B^2$, i.e., todo cociclo é cobordo. Ou seja, toda aplicação $f(g_1, g_2)$, tal que

$$f\delta(l_1, l_2, l_3) = -f(l_3, [l_1, l_2]) + f(l_2, [l_1, l_3]) - f(l_1, [l_2, l_3]) + f(l_2, l_3)l_1 - f(l_1, l_3)l_2 + f(l_1, l_2)l_3$$

implica que $f = h\delta$, para $g = 1$ -cociclo, i.e.,

$$f(l_1, l_2) = h\delta(l_1, l_2) = -h(l_2) + h(l_1) - h([l_1, l_2])$$

ou seja, para $m.l = 0$, $l \in g$, $m \in \mathbb{F}$ e $f : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : g \rightarrow \mathbb{F}$ temos: se f é anti-simétrica bi-linear tal que

$$-f(l_3, [l_1, l_2]) + f(l_2, [l_1, l_3]) - f(l_1, [l_2, l_3]) = 0$$

Então

$$f(l_1, l_2) = g([l_1, l_2])$$

com g linear.

Por outro lado, temos que, se M for irredutível (i.e., não possui submódulos sem ser M e 0) e $M.g = 0$, então $\dim(M) = 1$ pela irredutibilidade, e M é identificado com $\mathbb{F}$.

Para maiores detalhes veja [11]

Apendice II – Demonstração da unicidade do funcional simétrico $f : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ para álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita.

i) Seja $f : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional bilinear simétrico sobre uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita.

Dado de g é espaço vetorial com produto interno $k : g \times g \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escrever f (matricialmente) na seguinte forma

$$f(a, b) = k(a, Ab) = a^t Ab = k(Ab, a) = (Ab)^t a = b^t A^t a$$

para a matriz $A : g \rightarrow g$, e a e b sendo vetores coluna. Pela simetria de f temos

$$f(a, b) = f(b, a) = b^t Aa$$

Portanto $b^t Aa = b^t A^t a$, ou seja $b^t (A - A^t)a = 0$, para quaisquer a, b . Como a forma de Killing é não degenerada para g semi-simples temos que $A - A^t = 0$, e portanto A é simétrica (ou sobre corpo complexo, auto-adjunta).

Queremos agora impor invariância pela ação global de G à f , i.e., para $v \in G$ (Grupo de Lie)

$$vf(a, b)v^{-1} = f(vav^{-1}, vbv^{-1}) = f(a, b)$$

ou diferencialmente para $v = v(t) = e^{tc}$ com $c \in g$

$$f([c, a], b) + f(a, [c, b]) = 0.$$

que é chamada de invariância por adjunção.

Impondo tal fato à f temos

$$f(ad_c a, b) = k(ad_c, Ab) = -k(a, ad_c Ab)$$

onde foi usado a invariância de k por adjunção

$$f(a, ad_c b) = k(a, Aad_c b)$$

Agora, substituindo na equação anterior temos

$$f(ad_c a, b) + f(a, ad_c b) = -k(a, ad_c Ab) + k(a, Aad_c b) = 0$$

ou seja

$$k(a, (Aad_c - ad_c A)b) = 0, \quad \forall a, b, c \in g$$

ou seja $[A, ad_c] = 0$, para $\forall c$, já que k é não degenerada para g semi-simples.

Para concluir que a forma de Killing k é única, basta então mostrar que $A = id$. Para tal, usaremos o lema de Schur.

Lema de Schur. Seja $\Phi : g \rightarrow gl(v)$ representação irredutível. O único endomorfismo de v que comuta com todo $\Phi(x)$ ($x \in g$) são os escalares.

Lembremos que $ad : g \rightarrow gl(g)$ é representação irredutível (g é semi-simples). Portanto $A = id$ (ou proporcional) e concluimos que o único funcional de $g \times g$ simétrico invariante pela adjunção é a forma de Killing.

Apendice III – Simetrias e Teorias de Gauge

Uma teoria de campos arbitrária é descrita por uma densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}$ (que, por abuso de linguagem chamaremos de Lagrangeana), dependente de campos Φ_r e de suas derivadas $\partial^\mu \Phi_r$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$; $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$).

Para $\pi_0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \Phi_r)}$, temos os comutadores a tempos iguais (ETC),

$$\begin{aligned} i[\pi_r^0(t, \vec{x}), \Phi_s(t, \vec{y})] &= \delta(\vec{x} - \vec{y})\delta_{r,s} \\ i[\pi_r^0(t, \vec{x}), \pi_s^0(t, \vec{y})] &= i[\Phi_r(t, \vec{x}), \Phi_s(t, \vec{y})] = 0 \end{aligned}$$

e as equações de Euler-Lagrange dadas por:

$$\partial_\mu \pi_r^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_r}.$$

A formulação lagrangeana fornece-nos uma maneira conveniente e sistemática de identificar e extrair constantes de movimento nas teorias clássicas de campo.

De fato, pelo teorema de Noether [2], podemos mostrar que, dada a ação de um grupo de Lie sobre a Lagrangeana que preserva a forma desta (sendo portanto um grupo de simetria da teoria), podemos obter leis de conservação associadas às correntes.

Para construir tais correntes conservativas, consideremos a variação nos campos $\Phi_r(x) \rightarrow \Phi_r(x) + \delta \Phi_r(x)$ (versão infinitesimal da ação do grupo de Lie G sobre os campos $\Phi_r(x)$). Então a variação na Lagrangeana é

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_r} \delta \Phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_r)} \delta(\partial_\mu \Phi_r) = \partial_\mu (\pi^\mu \delta \Phi_r)$$

(considerando $\partial^\mu \delta = \delta \partial^\mu$). Caso possamos escrever $\delta \mathcal{L}$ como uma divergência total de uma grandeza Λ^μ , i.e., $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu$, então, tal variação preservaria a ação $I = \int \mathcal{L} d^4x$ (G é grupo de simetria de tal teoria).

Desta forma temos:

$$\partial_\mu (\pi^\mu \delta \Phi_r) = \partial_\mu \Lambda_r^\mu$$

e a corrente conservativa seria dada por:

$$J_\mu = \pi_\mu \delta \Phi_x - \Lambda_\mu$$

Temos que distinguir os casos em que $\Lambda_\mu = 0$ e $\Lambda_\mu \neq 0$. No primeiro dizemos que a simetria é interna enquanto no segundo caso dizemos que a simetria é do espaço tempo.

Para ilustrar, tomemos os caso em que a ação de G (= grupo de Lie) é dada por:

$$U(g)\Phi_r(x) = \Phi_r(x^g) = \Phi_r(x_\mu + \Delta x_\mu),$$

i.e., temos que G é o grupo das translações no espaço tempo. Infinitesimalmente temos que $\delta \mathcal{L} = \varepsilon_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}$. Por outro lado, temos

$$\delta \mathcal{L} = \sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r(x)} \delta \varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_\mu)} \delta \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_\mu} \right) \right]$$

onde

$$\delta \varphi_r = \varphi_r(x_\mu + \varepsilon_\mu) - \varphi_r(x_\mu) = \varepsilon_\mu \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial x_\mu}$$

Igualando esta expressões e usando as equações de Euler-Lagrange temos:

$$\varepsilon_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_r)} \varepsilon_\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_\nu} \right].$$

Desde que ε_μ são arbitrárias, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} J_{\mu\nu} = 0$$

onde $J_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento canônico dado por

$$J_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_\nu}.$$

Note que, neste caso $\Lambda_\mu \neq 0$ (como era de se esperar, dado que a translação foi feita no espaço-tempo) e $\Lambda_{\mu\nu} = +g_{\mu\nu} \mathcal{L}$.

Desta lei de conservação diferencial, podemos achar uma grandeza constante P_ν ,

$$P_\nu = \int d^3x J_{0\nu} = \int d^3x \left[\sum_r \pi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\nu} - g_{0\nu} \mathcal{L} \right],$$

$$\partial_0 P_\nu = 0,$$

consideramos que $J_{i\nu} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) no infinito.

Lembremos que $P_0 = \int d^3x J_{00} = \int d^3x \left[\sum_r \pi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} - g_{00} \mathcal{L} \right] = \int d^3x \mathcal{H}$ onde $\mathcal{H}$ é a densidade Hamiltoniana.

Desta forma P_ν é identificado com o quadri vetor energia-momento, que determina os geradores das translações espaço-temporais. De forma geral, a integral no espaço da componente $\mu = 0$ das correntes conservativas é constante do movimento, chamada de carga, e as cargas são exatamente os geradores da simetria em questão.

Porém, nos interessam mais as simetrias internas, i.e., o caso em que $\Lambda = 0$.

Podemos escrever a ação do grupo, neste caso, de forma infinitesimal, da seguinte maneira.

$$\varphi_r(x) \longrightarrow \varphi_r(x) - i\varepsilon \lambda_{rs} \varphi_s(x).$$

Torna-se óbvio o motivo pelo qual denominamos estas de simetrias internas (dado que o grupo não age nas coordenadas espaço-temporais).

Neste caso, para que $\delta \mathcal{L} = 0$, temos

$$-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \lambda_{rs} \varphi_s \right] = 0$$

e

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \text{para} \quad J_\mu(x, \lambda) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \lambda_{rs} \varphi_s.$$

Da mesma forma, a carga escreve-se na forma

$$Q(\lambda) = -i \int d^3x \pi_r \lambda_{rs} \varphi_s$$

com

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Tais simetrias aparecem nas teorias clássicas de “gauge”, onde temos uma Lagrangeana invariante na forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{int}$$

onde $\mathcal{L}_{YM}$ é o termo dos campos de gauge $F_{\mu\nu}$ (Yang-Mills) e $\mathcal{L}_{int}$ é o termo que contém a parte cinética dos campos espinoriais Ψ mais a parte de interação. Explicitamente temos:

$$\mathcal{L} = \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi$$

onde $D^\mu\psi = [\partial^\mu + iA^\mu(x)]\psi$.

(muitas vezes temos um termo de carga g acompanhando os termos em A^μ , i.e., $[A^\mu, A^\nu] \rightarrow g[A^\mu, A^\nu]$; e $\partial^\mu + iA^\mu \rightarrow \partial^\mu + igA^\mu$).

Tal lagrangeana é invariante por:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\rightarrow \Gamma(w(x))\Psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow w(x)A_\mu(x)w^{-1}(x) + \partial_\mu w(x) w^{-1}(x) \\ F_{\mu\nu}(x) &\rightarrow w(x)F_{\mu\nu}(x)w^{-1}(x)\end{aligned}$$

onde Γ é a representação do grupo de gauge G no espaço dos espinores; $A_\mu = A_\mu^i T_i$ são os campos de gauge Lie-valorizados ($\{T_i\}$ são os geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo G) e $w : M \rightarrow G$ é um elemento genérico do grupo das transformações de gauge.

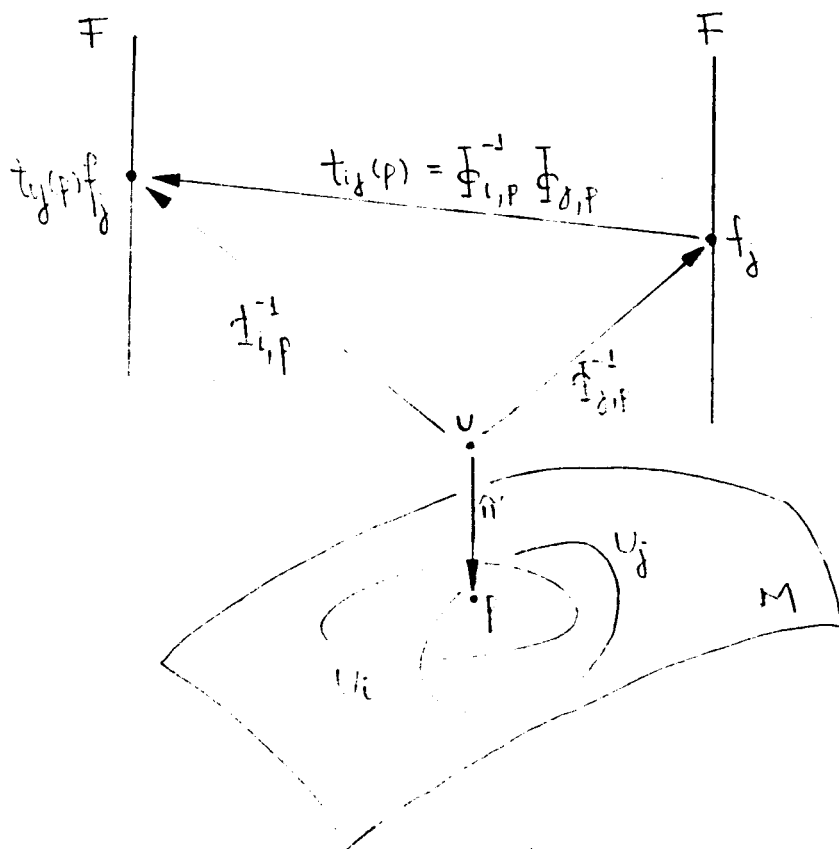
Tais teorias são representadas geometricamente por fibrados principais $P(M, G)$. Neste caso, o grupo de gauge G é o grupo estrutural do fibrado e a variedade M (o espaço dos parâmetros físicos) é a base do fibrado.

De forma geral temos que um fibrado principal $P(M, G)$ consiste de 3 variedades P, M, F com P sendo o espaço total, M a base e F a fibra onde, localmente, podemos escrever $P|_{U_i} = U_i \times F$ onde U_i é um aberto suficientemente pequeno de M , i.e., localmente P é o produto de M por F . Além disso F é difeomorfo ao grupo de Lie G . Temos uma projeção $\pi : P \rightarrow M$, e difeomorfismos $\{\Phi_i\}$; $\Phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$,

onde $\{U_i\}$ é cobertura de M . Os Φ_i s são chamados de trivializações locais ou escolhas de gauge.

Se escrevermos $\Phi_i(p, f) = \Phi_{i,p}(f)$, o mapa $\Phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ é um difeomorfismo. Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos que $t_{ij}(p) = \Phi_{i,p}^{-1} \Phi_{j,p} : F \rightarrow F$ seja um elemento do grupo de Lie G . O conjunto $\{t_{ij}\}$ é chamado de funções de transição ou trocas (transformações) de gauge

$$\begin{array}{ccc} G & \dots\dots & P \\ \text{ação livre de } G \text{ em } P & & \pi(= \text{projecção}) \\ R : G \times P \rightarrow P & & \downarrow \\ (g, p) \rightarrow pg & & M \end{array}$$



Temos no fibrado $P(M, G)$ definidas conexão e curvatura. Na verdade temos 1 forma de conexão e 2-forma de curvatura. O pull-back destas formas são respectivamente o potencial A_μ e o campo $F_{\mu\nu}$, i.e., a versão local (na base) desta n -formas

Lie valorizadas são os conhecidos campos e potenciais.

A lei de transformação destes são:

$$\begin{aligned} A_j &= t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} d t_{ij} \\ F_j &= t_{ij}^{-1} F_i t_{ij}. \end{aligned}$$

Então, vemos aí a estrutura que precisamos para descrever as teorias de gauge. Para tal formalismo aconselhamos [3] e [20].

Voltando às teorias de gauge, para acharmos as correntes e as cargas devemos fazer a variação da lagrangeana com relação aos potenciais A_μ .

Fazendo tal variação encontramos:

$$J^\mu = 0$$

para $J^\mu = \partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] - j^\nu$

onde $j_a^\nu = \bar{\psi} \partial^\nu L_a \psi$ (= corrente conservativa na ausência de interação).

e $\{L_a\}$ são os geradores de G na representação Γ .

Usando o gauge de Hamilton $A^0 = 0$, temos “constraints” $C(x)$ definidos por:

$$C^a(x) = \partial F^{k0} - [A_k, F^{k0}] + i\bar{\psi} \gamma_0 L_a \psi = 0$$

que satisfazem:

$$\{C^a(x), C^b(y)\} = f_c^{ab} \delta(x - y) C^c(x)$$

i.e., formam uma álgebra fechada.

Tais constraints são geradores do grupo das transformações de gauge (no gauge de Hamilton).

Para tal, devemos observar somente que em segunda quantização os campos ψ passam a agir como operadores sobre os estados de ocupação (Espaço de Fock).

Desta forma devemos ter que o campo ψ passa a se transformar na forma:

$$\psi \rightarrow e^{i\epsilon Q} \psi e^{-i\epsilon Q},$$

ou infinitesimalmente:

$$\psi \rightarrow \psi + i\varepsilon[Q, \psi].$$

Desta forma se a transformação infinitesimal for $\delta\psi = \Gamma(T_a)\psi(x) = L_a\psi(x)$, devemos ter que os geradores da Simetria devem satisfazer a equação

$$[C(\alpha), \psi] = \Gamma(\alpha)\psi(x).$$

Então, como as cargas (integral da componente $\mu = 0$ da corrente no espaço) são em geral, os geradores tomemos a representação

$$C(\alpha) = \frac{-1}{2} \text{tr} \left\{ \int C(x) \alpha(x) d^3x \right\} \quad (1)$$

sendo $\alpha(x)$ um elemento da álgebra das transformações de gauge.

Verifica-se que

$$\{C(\alpha), C(\beta)\} = C([\alpha, \beta])$$

e

$$\begin{aligned} \delta A_l &= \{C(\alpha), A_l(x)\} = \partial_e \alpha(x) - [A(x), \alpha(x)] \\ \delta \mathcal{E}_k &= \{C(\alpha), \mathcal{E}_k(x)\} = -[\mathcal{E}_k(x), \alpha(x)] \\ \delta \psi &= \{C(\alpha), \psi(x)\} = \alpha(x) \psi(x) \end{aligned} \quad (2)$$

sendo $\{, \}$ o parênteses de Poisson em relação às variáveis conjugadas pertinentes.

Então, a expressão (1) define uma representação para os geradores de Simetria $C(x)$.

Infinitesimalmente, expressamos as relações (2) por:

$$\begin{aligned} \{C^a(x), A_k^b(x)\} &= \delta^{ab} \partial_k \delta(x-y) - f_{ab}^c A_k^c \delta(x-y) \\ \{C^a(x), \psi(y)\} &= \Gamma(t^a) \psi(x) \delta(x-y) \end{aligned} \quad (3)$$

O fato de considerarmos teorias quânticas de campos, nos obriga a expressar os “constraints” da seguinte forma:

$$C|\psi\rangle = 0$$

para $|\psi\rangle$ um estado físico.

Entretanto, caso as relações de comutação (3) sejam alteradas na forma

$$[C^a(x), C^b(y)] = f_{ab}^c C^c(x) \delta(x - y) + u(a, b).$$

Poderíamos ter que $[C^a, C^b]|\psi\rangle \neq 0$, i.e., o comutador de “constraints” não sendo um constraint.

Este caso, chamado de anomalias quânticas, é discutido no capítulo 7.

Indicamos para maior apreciação em teorias de gauge Fadeev [7] , Huang [9] e Ryder[16] :

BIBLIOGRAPHY

- [1] BÄUERLE, G.G.A.; deKERF, E.A. **LIE ALGEBRAS - Part I - Finite and Infinite Dimensional Lie Algebra and Applications in Physics.** North-Holland, Amsterdam.
- [2] BJORKEN, I.D.; DRELL, S.D. **RELATIVISTIC QUANTUM FIELDS.** McGraw-Hill, New York, 1965.
- [3] BLEECKER, D. **GAUGE THEORY AND VARIATIONAL PRINCIPLES,** Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [4] BONORA, L.; COTTA-RAMUSINO P. **COMMUN. MATH. PHYS.,** 87-589,1983.
- [5] CHOQUET-BRUHAT, Y.; DeWITT-MORETE, C. **ANALYSIS, MANIFOLDS AND PHYSICS,** Part II, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [6] FADEEV, L.D. **PHYSICS LETTERS,** 145B- 81,1984.
- [7] FADEEV, L.D.; SLAVNOV, A.A. **GAUGE FIELDS - Introduction to Quantum Theory,** Benjamin Cummings, Reading. MA, 1980.
- [8] GODDARD, P.; OLIVE, D. **INTERN. JOUR. MOD. PHYS.,** A1-303,1986.
- [9] HUANG, K. **QUARKS, LEPTONS & GAUGE FIELDS,** World Scientific, Singapore, 1992.
- [10] HUMPHREYS, J.E. **INTRODUCTION TO LIE ALGEBRAS AND REPRESENTATION THEORY,** Springer-Verlag, New York, 1980.

- [11] JACOBSON, N. **LIE ALGEBRAS**, Dover, New York, 1979.
- [12] JACKIW,
- [13] KAC, V.G. **INFINITE DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS**, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [14] MICHEL L.; RADICATI, L.A. **ANN. INST. HENRY POINCARÉ**, vol.XVIII(3), 1973, 185.
- [15] PRESSLEY, A.; SEGAL, G. **LOOP GROUPS**, Oxford Univ.Press, Oxford, 1988.
- [16] RYDER, L.H. **QUANTUM FIELD THEORY**, Cambridge, 1992.
- [17] SAMELSON, H. **NOTES ON LIE ALGEBRAS**, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [18] TREIMAN, S.B.; JACKIW, R.; GROSS, D.J. **LECTURES ON CURRENT ALGEBRAS AND ITS APPLICATIONS**, Princeton Univ.Press, Princeton, 1971.
- [19] VILENKIN, N.J. **SPECIAL FUNCTONS AND THE THEORY OF GROUP REPRESENTATIONS**, American Mathematical Society, 1968.
- [20] NAKAHARA, M. **GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS**