

TEORIAS DE ESPAÇO-TEMPO E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Quintino Augusto Gomes de Souza

este exemplar corresponde
à redação final da tese de mestrado
defendida e aprovada pelo aluno
Q.A.G. de Souza e aprovada pela
Comissão Julgadora
W. Rodrigues

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.
Orientador

grau A exalente
W. Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física "Gleb Wataghin" - UNICAMP
como requisito para obtenção do
título de Mestre em Física.

BIBLIOTECA CENTRAL

Maio/1987

Aos meus pais, Quintino e Elydia

À Juliana

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Waldyr A. Rodrigues pela orientação deste trabalho, por tudo que me ensinou e principalmente pelo alargamento de horizontes, de relevância inestimável para minha vida profissional.

Aos meus amigos Adolfo Maia Jr. e Márcio A. de Faria Rosa.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
1. PRELIMINARES	1
1.1. Variedades Diferenciáveis	1
1.2. Aplicações Diferenciáveis sobre Variedades	4
1.3. Cálculo Diferencial em Variedades	7
1.4. Campos Tensoriais	17
1.4.1. Espaço Tangente e Espaço Cotangente	17
1.4.2. Campos Tensoriais	20
1.4.3. Campos Vetoriais	23
1.4.4. Formas Diferenciais Exteriores	27
1.5. Derivada de Lie	29
1.6. Variedades Riemannianas	36
1.7. Conexões Lineares	41
1.8. Sistemas Diferenciais Exteriores	52
1.8.1. Equações Exteriores	52
a. Uma Única Equação Exterior	53
b. Sistemas de Equações Exteriores	54
1.8.2. Equações Diferenciais Exteriores	56
a. Sistemas de Pfaff	58
b. Sistemas Característicos	61

2. ELEMENTOS DAS TEORIAS DA FÍSICA	63
2.1. Física Clássica	64
2.1.1. O Espaço-Tempo Newtoniano	64
2.1.2. Sistemas de Referência em M	70
2.1.3. Dinâmica Clássica	73
a. Formalismo Newtoniano no Espaço-Tempo	73
b. Formalismo Newtoniano no Tri-espaço	75
c. Dinâmica Lagrangeana	81
2.2.1. O Espaço-Tempo Relativístico	85
a. O Espaço-Tempo de Minkowski	88
b. O Espaço-Tempo de Schwarzschild	88
c. O Universo em Expansão	89
2.2.2. Física da Partícula Relativística	89
3. O TEOREMA DE NOETHER	93
3.1. O Teorema de Noether em Cartas Locais	94
3.1.1. Demonstração do Teorema	94
3.1.2. A Hipótese Grupal	99
3.2. O Teorema de Noether e a Derivada de Lie	102
3.2.1. Sistemas Autônomos	103
3.2.2. Sistemas Não Autônomos	109
3.2.3. A Conservação da Energia	113
4. LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA CLÁSSICA	119
4.1. Leis de Conservação e Sistemas de Coordenadas	120
a. Coordenadas Cartesianas	123
b. Coordenadas Esféricas	126
4.2. Leis de Conservação e Sistemas de Referência	131
5. LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA RELATIVÍSTICA	135
5.1. O Espaço-Tempo de Minkowski	135
5.2. O Espaço-Tempo de Schwarzschild	140
5.3. O Universo em Expansão	143
CONCLUSÃO	147
BIBLIOGRAFIA	149

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é o estudo das leis de conservação nas teorias de espaço-tempo "clássicas", que essencialmente constituem-se da física de Galileu e Newton e da física de Lorentz e Einstein.

No decorrer do primeiro capítulo é desenvolvido o formalismo matemático com o qual o problema das leis de conservação é tratado nos capítulos subsequentes. Muito provavelmente o material aí contido seja excessivo se comparado ao que efetivamente utilizamos posteriormente. Entretanto, tem-se nele uma síntese de quase tudo o que foi estudado de matemática durante o curso de mestrado e julgamos ser de interesse deixar isto registrado aqui.

Dedicamo-nos no segundo capítulo a estabelecer a estrutura do universo segundo a teoria de Newton e Einstein, mas mais voltados para a física newtoniana cuja formulação como uma teoria de espaço-tempo é menos conhecida. Aliás, gostaríamos de ter discutido ainda mais profundamente a física newtoniana, principalmente no que concerne à recuperação do formalismo original de Newton e Leibniz (a física newtoniana no tri-espaço) e à formalização da dinâmica lagrangeana. Isto infelizmente não foi possível, (estranhamente...) devido à falta de tempo e espaço e mesmo porque isto nos desviaria um pouco de nossa meta. Assim, o que foi desenvolvido sobre estes temas é apenas o essencial e esperamos futuramente ter a oportunidade de estudá-los mais pormenorizadamente.

As leis de conservação são o objeto do terceiro capítulo, onde se demonstra o teorema de Noether que como é bem conhecido unifica os princípios de conservação que se tem nas teorias da física. Note que são dadas neste capítulo duas provas do teorema, o que se justifica na medida em que elas servem a propósitos diversos. A primeira prova tem o objetivo de estabelecer o resultado interessante de que não é verdade (como habitualmente se afirma) que a entidade matemática subjacente ao conceito de simetria de um sistema dinâmico seja o conceito de grupo, já que é possível ter-se conjuntos mais gerais (não necessariamente grupos) para os quais o teorema de Noether continua sendo válido. Por sua vez, a segunda demonstração apresentada cumpre um duplo objetivo, pois ao mesmo tempo que fornece-nos uma maneira simples de generalizar o teorema para teorias mais gerais como a teoria de campos, por exemplo, também fornece-nos uma maneira sistemática de encontrar as leis de conservação que deverão aparecer no estudo de um dado sistema.

Finalmente, nos capítulos 4 e 5 estuda-se alguns exemplos práticos da física newtoniana e da física relativística, respectivamente. Não nos preocupamos nestes capítulos em fazer uma discussão completa. Preferimos "ensinar a pescar", mostrando como obter as leis de conservação em alguns casos simples.

Além disto deixamos para o capítulo 5 a discussão de um aspecto interessante da lei de conservação da energia, mostrando que na teoria da relatividade, dependendo do modelo com que se esteja trabalhando, pode ser que esta "lei" não se verifique, o que quer dizer, entre outras coisas, que há certos modelos desta teoria nos quais a energia do universo não é conservada.

CAPÍTULO 1

P R E L I M I N A R E S

Vamos inicialmente introduzir os conceitos de que faremos uso no decorrer de nossa exposição. Nosso objetivo principal é fixar a notação que usaremos e vamos portanto limitar-nos a dar as definições e a enunciar (muitas vezes sem demonstrar) os teoremas que precisaremos.

1.1. VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Um sistema de coordenadas locais de dimensão n de X ou uma carta local de dimensão n de X é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \bar{U}$ de um subconjunto aberto U de X em um subconjunto aberto $\bar{U}$ do $\mathbb{R}^n$. Se X é coberto pelos domínios de sistemas de coordenadas locais de dimensão n , isto é, se todo ponto de X pertence ao domínio de uma carta local de dimensão n , dizemos que X é uma variedade topológica de dimensão n .

No que segue vamos nos referir a uma carta local de dimensão n de X (respectivamente, sistema de coordenadas locais de dimensão n de X) simplesmente por carta local (sistema de coordenadas locais) ou apenas carta (sistema de coordenadas), deixando subentendida sua dimensão. Além disto, a fim de evitar confusões, vamos seguir a notação usual e denotar uma carta local de X por um par (U, φ) , especificando o domínio U do homeomorfismo φ que é chamado vizinhança coordenada de φ . Se $x \in X$ está na vizinhança coordenada de φ , isto é, se $x \in U$, diz-se que (U, φ) é um sistema de coordenadas locais em x .

Chamamos de funções coordenadas de X na carta (U, φ) às funções $x^i = a^i \circ \varphi$ ($i=1, \dots, n$), onde $a^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$, isto é, se $p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$, então $a^i(p) = p^i$. Usaremos tanto (U, φ) quanto $(x^1, \dots, x^n)$ ou simplesmente (x^i) para referir-nos a uma carta local (de dimensão n) de X .

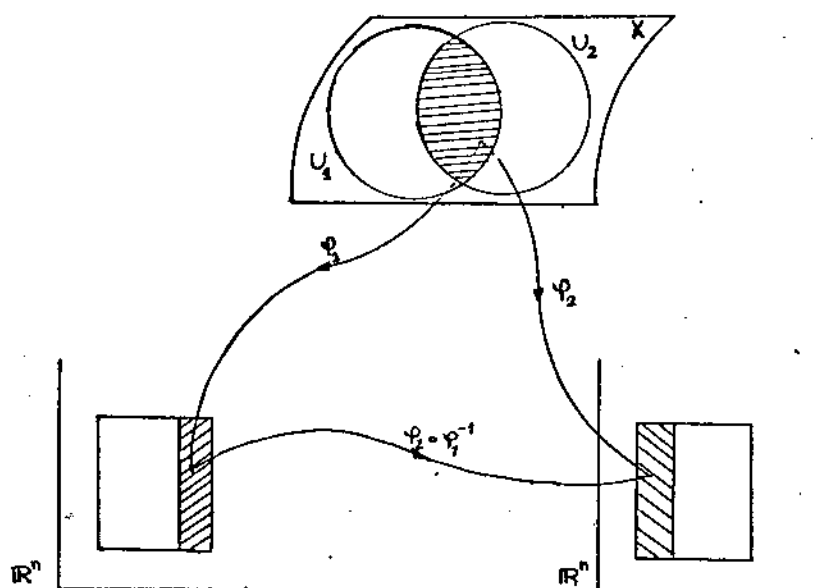
Dizemos que duas cartas (de dimensão n) (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) são compatíveis se as aplicações (ver fig. 1)

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

e

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

são de classe C^∞ .



(Fig. 1)

Um atlas (de dimensão n) sobre X é um conjunto $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ de cartas locais de dimensão n de X (I é algum conjunto de índices, usualmente $I \subset \mathbb{N}$) que satisfaz as seguintes condições.

i) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, isto é, os domínios U_i cobrem X

e

ii) quaisquer duas cartas em $\mathcal{A}$ são compatíveis.

Dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são equivalentes se e somente se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é ainda um atlas. Uma estrutura diferenciável $\mathcal{S}$ sobre X é uma classe de equivalência de atlas sobre X . A união dos atlas em $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{A} / \mathcal{A} \in \mathcal{S}\}$ é o atlas maximal de X . Se $\mathcal{A}$ é um atlas sobre X , a união de todos os atlas equivalentes a $\mathcal{A}$ é chamada estrutura diferenciável gerada por $\mathcal{A}$.

Uma variedade diferenciável de dimensão n (ou simplesmente variedade) é um par $(X, \mathcal{S})$ onde X é uma variedade topológica de dimensão n e $\mathcal{S}$ é uma estrutura diferenciável de dimensão n sobre X . Usualmente omitiremos a estrutura diferenciável $\mathcal{S}$ e escreveremos apenas o conjunto subjacente X para designar a variedade.

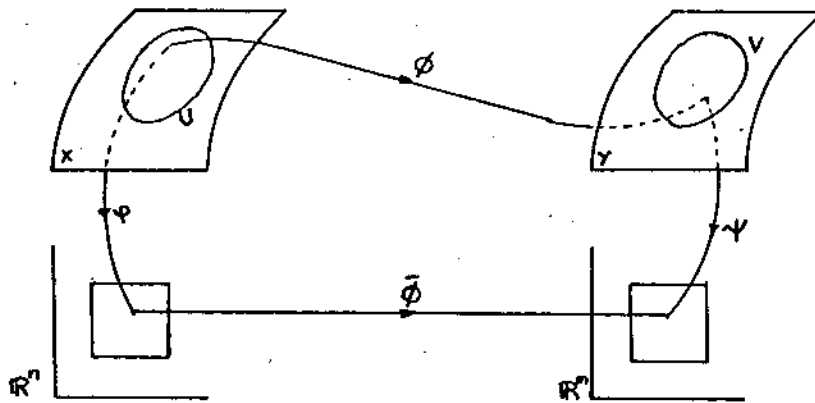
Um subconjunto Z de uma variedade X é uma subvariedade se todo ponto $x \in Z$ está no domínio de uma carta (U, φ) de X tal que

$$\begin{aligned}\varphi : U \cap Z &\rightarrow \mathbb{R}^q \times \{a\} \\ \varphi(x) &= (x^1, \dots, x^q, a^1, \dots, a^{n-q}),\end{aligned}$$

onde a é um elemento fixo de $\mathbb{R}^{n-q}$. É fácil ver que as cartas $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ onde $\bar{U} = U \cap Z$ e $\bar{\varphi} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$ por $\bar{\varphi}(x) = (x^1, \dots, x^q)$ formam um atlas sobre Z . Se Z já tem uma estrutura de variedade, ele é chamado subvariedade de X se lhe pode ser dada uma estrutura de variedade equivalente à estrutura já existente.

1.2. APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS SOBRE VARIEDADES

Sejam X e Y variedades de dimensão n e m respectivamente. Dizemos que uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ é de classe C^r se para toda carta local (U, φ) de um atlas sobre X e para toda carta local (V, ψ) de um atlas sobre Y a aplicação $\bar{\phi} = \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ - chamada representante de ϕ nas cartas (U, φ) e (V, ψ) - for de classe C^r .



(Fig. 2)

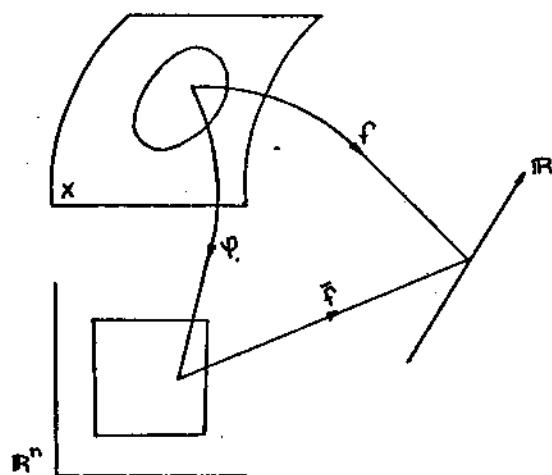
Para que $\phi: X \rightarrow Y$ seja de classe C^r é suficiente que para todo $x \in X$ exista uma carta local (U, φ) em x e uma carta local (V, ψ) em $\phi(x)$ tal que $\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ seja de classe C^r . De fato, se ϕ é de classe C^r em relação a estas cartas, então ela é de classe C^r em relação a quaisquer cartas (U', φ') e (V', ψ') de X e de Y respectivamente que sejam compatíveis com elas, pois a representante de ϕ nas novas cartas, $\bar{\phi}' = \psi' \circ \phi \circ \varphi'^{-1}$, pode ser escrita

$$\bar{\phi}' = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}),$$

e como por hipótese $\bar{\phi} = \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^r e $\psi' \circ \psi^{-1}$ e $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ são de classe C^∞ , segue que $\bar{\phi}'$ é de classe C^r .

Em particular, se $Y \equiv \mathbb{R}$ e $\psi \equiv \text{id}_{\mathbb{R}}$, obtemos a definição de diferenciabilidade de uma função ¹ sobre uma variedade X . Isto é, uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r em $x \in X$ se existe uma carta local (U, φ) de X com $x \in U$ tal que a representante de f nesta carta, $\bar{f} = f \circ \varphi^{-1}$, é de classe C^r .

¹O termo função sempre será empregado para designar uma aplicação que tem o conjunto dos reais como contradomínio.

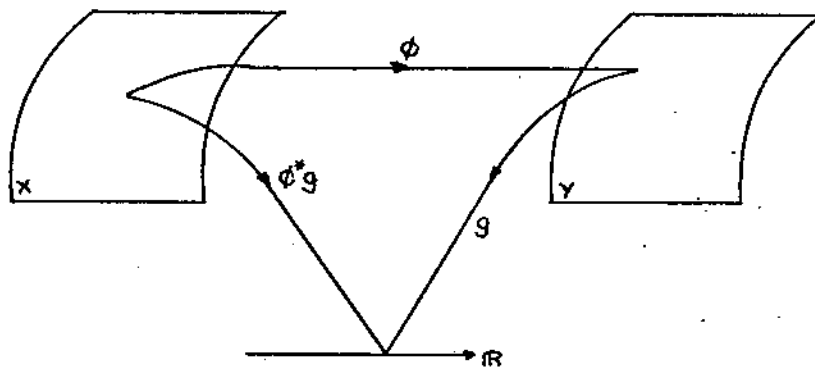


(Fig. 3)

A imagem recíproca ou retrocesso de uma função $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ por uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$, onde X e Y são variedades, é a aplicação $\phi^*g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi^*g = g \circ \phi$$

- (a mesma definição é aplicável se $g : Y \rightarrow Z$ é uma aplicação sobre uma variedade Z). Pode-se provar que $\phi : X \rightarrow Y$ é de classe C^r se e somente se ϕ^*g é de classe C^r para toda função $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r .



(Fig. 4)

Dizemos que uma aplicação $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável (de classe C^r) em X se γ pode ser estendida de modo a dar uma aplicação de classe C^r $\bar{\gamma} : [a-\varepsilon, b+\varepsilon] \rightarrow X$ para algum $\varepsilon > 0$, tal que $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$ para todo $t \in [a, b]$ (há necessidade de exigir-se esta extensão a fim de se poder falar de diferenciabilidade da curva nos extremos do intervalo).

Uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo de classe C^r se ϕ é uma bijeção e se ϕ e ϕ^{-1} são de classe C^r . A existência de um difeomorfismo é a relação de equivalência natural para variedades; duas variedades difeomórficas são idênticas em todas as propriedades que digam respeito somente a suas estruturas como variedades.

1.3. CÁLCULO DIFERENCIAL EM VARIEDADES

Seja X uma variedade, $x \in X$ um ponto de X , e vamos denotar por $C^r(X, x)$ o conjunto das funções de classe C^r com domínio em alguma vizinhança de x . Dada uma curva $\gamma : t \rightarrow \gamma(t)$, podemos construir uma função linear $\gamma_*(t) : C^r(X, \gamma(t)) \rightarrow \mathbb{R}$ como segue: se $f \in C^r(X, x)$, $x = \gamma(t)$, então

$$\gamma_*(t)[f] = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t).$$

$\gamma_*(t)$ é uma derivação, isto é, é uma função linear que satisfaz a regra de Leibniz:

$$\gamma_*(t)[fg] = \gamma_*(t)[f]g(x) + f(x)\gamma_*(t)[g], \quad \forall f, g \in C^r(X, x).$$

Esta derivação linear faz tudo que se requer da "tangente a γ " e subsequentemente vamos mostrar que a toda derivação linear está associada uma curva (de fato muitas curvas) da maneira acima descrita.

Se $x \in X$, uma tangente a X no ponto x é uma aplicação $v_x : C^r(X, x) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i) \quad v_x[af + bg] = av_x[f] + bv_x[g]$$

e

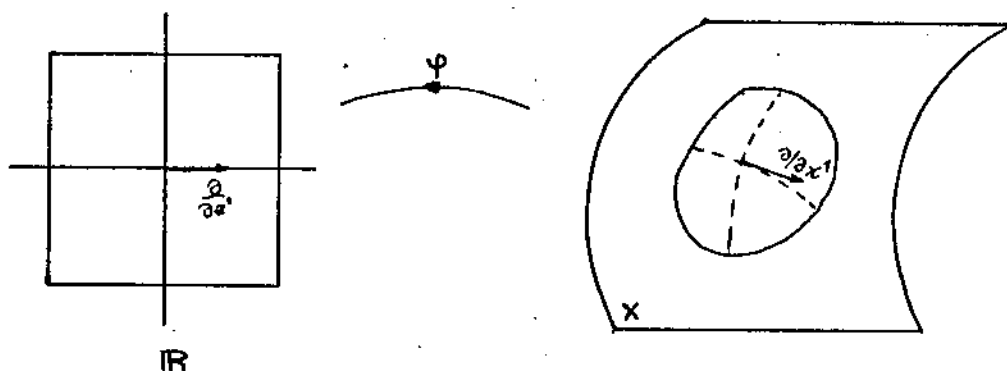
$$ii) \quad v_x[fg] = v_x[f]g(x) + f(x)v_x[g],$$

quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e quaisquer que sejam $f, g \in C^r(X, x)$. As tangentes em um ponto $x \in X$ formam um espaço linear. Em virtude disto, uma tangente no ponto $x \in X$ é também chamada um vetor tangente a X no ponto x . O conjunto de todos os vetores tangentes em um ponto $x \in X$ é chamado espaço vetorial tangente a X em x e é denotado $T_x X$.

Se $(x^1, \dots, x^n)$ são as funções coordenadas de X em uma carta (U, φ) , a derivada parcial em x com relação a x^i , $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \equiv \partial_i|_x$, é o vetor tangente definido por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x [f] \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial a^i} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)),$$

qualquer que seja $f \in C^r(X, x)$.



(Fig. 5)

É fácil ver que $\frac{\partial x^j}{\partial x^i}(x) = \delta^j_i$ (delta de Kronecker) e que o conjunto $(\partial/\partial x^i|_x)$ é linearmente independente. Vetores tangentes estão completamente caracterizados pelo seguinte

TEOREMA 1: Se $(x^1, \dots, x^n)$ são funções coordenadas em $x \in X$ e v_x é um vetor tangente neste ponto, então

$$v_x = \sum_{i=1}^n (v_x[x^i]) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x^2$$

onde $v^i(x) = v_x[x^i]$.

²Vamos usar a convenção de Einstein, subentendendo a soma sobre os índices repetidos.

Vamos omitir a prova deste teorema, a qual não nos parece importante aqui. Note que o teorema afirma basicamente que um vetor tangente pode ser escrito como combinação linear das derivadas parciais em relação às funções coordenadas. Como além disto o conjunto $(\partial/\partial x^i|_x)$ é linearmente independente, ele forma uma base para o espaço tangente à variedade no ponto x , a qual é chamada base natural e temos ainda que

COROLÁRIO: A dimensão de $T_x X$ é igual à dimensão de X ,
 $\dim T_x X = n$ ³.

Já definimos o vetor $\gamma_*(t)$, tangente à curva γ no ponto $\gamma(t)$. Observamos agora que todo vetor do espaço tangente à variedade em um ponto é tangente a alguma curva passando por este ponto. De fato, em vista do teorema acima deve ser possível expressar o vetor $\gamma_*(t)$ como combinação linear dos vetores da base natural, isto é,

$$\gamma_*(t) = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Aplicando este vetor à função coordenada x^j , obtemos

³No caso de uma variedade C^k (que não definimos) o espaço das derivações tem dimensão infinita e o espaço tangente deve ser definido como o espaço gerado pelo conjunto $(\partial/\partial x^i|_x)$.

$$\gamma_*(t)[x^j] = v^j(\gamma(t)).$$

Por outro lado, sabemos que

$$\gamma_*(t)[x^j] = \frac{dx^j}{dt}(\gamma(t)),$$

de modo que

$$v^j(\gamma(t)) = \frac{dy^j}{dt}(t),$$

onde $y^j = x^j \circ \gamma$. Assim, dado um vetor tangente v_x qualquer em um ponto $x \in X$, a solução da equação diferencial acima permite-nos encontrar as componentes $y^j(t)$ da curva à qual este vetor é tangente. Os teoremas de existência local de soluções de equações diferenciais ordinárias nos garantem a existência desta curva ⁴.

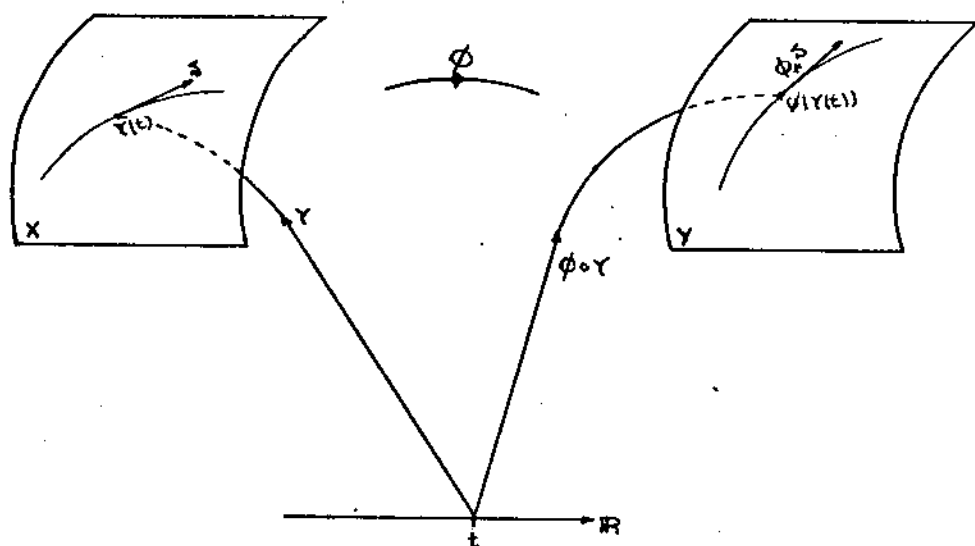
A aplicação derivada ou o diferencial de uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ é a aplicação $\phi_* : T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$ dada por

$$(\phi_* v_x)[g] = v_x[g \circ \phi] = v_x[\phi^* g],$$

qualquer que seja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Claramente, ϕ_* é uma aplicação linear. Além disto, se v_x é tangente a uma curva γ no ponto $\gamma(t)$, então $\phi_* v_x$ é tangente à curva $\phi \circ \gamma$ no ponto $\phi(\gamma(t))$, isto é,

$$\phi_*(\gamma_*(t)) = (\phi \circ \gamma)_*(t)$$

⁴Como o teorema vale apenas localmente, a unicidade da solução somente está garantida em uma vizinhança do ponto $x = \gamma(t)$ e na verdade teremos muitas curvas às quais um dado vetor é tangente.



(Fig. 6)

É fácil ver também que vale a regra da cadeia, isto é, se $\phi_1 : X \rightarrow Y$ e $\phi_2 : Y \rightarrow Z$, então

$$(\phi_2 \circ \phi_1)_* = \phi_{2*} \circ \phi_{1*}.$$

Agora, sejam $\phi : X \rightarrow Y$ uma aplicação, $(x^1, \dots, x^n)$ funções coordenadas em $x \in X$ e $(y^1, \dots, y^n)$ funções coordenadas em $\phi(x) \in Y$. Escreve-se um vetor $w_{\phi(x)}$ tangente a Y no ponto $\phi(x)$ como

$$w_{\phi(x)} = w^i(\phi(x)) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(x)},$$

com $w^i(\phi(x)) = w_{\phi(x)}[y^i]$. Se, em particular, $w_{\phi(x)} = \phi_* v_x$, onde v_x é tangente a X no ponto x , então

$$w^i(\phi(x)) = w_{\phi(x)}^i[y^i] = (\phi_* v_x^j)[y^i] = v_x^j[y^i \circ \phi].$$

Entretanto, como $v_x^j = v^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x$, segue que

$$w^i(\phi(x)) = v^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} (y^i \circ \phi)(x),$$

ou definindo $A_j^i(x) = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}$, com $\phi^i = y^i \circ \phi$,

$$w^i(\phi(x)) = A_j^i(x) v^j(x)$$

e também

$$\phi_* v_x^j = A_j^i(x) v^j(x) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(x)}.$$

A matriz $[A_j^i]$ é evidentemente a jacobiana da transformação linear $\phi_*: T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$ em relação às bases $\{\partial/\partial x^j|_x\}$ de $T_x X$ e $\{\partial/\partial y^i|_{\phi(x)}\}$ de $T_{\phi(x)} Y$.

O posto de $\phi: X \rightarrow Y$ no ponto $x \in X$ é definido como sendo o posto da matriz $[A_j^i]$. Um ponto $x \in X$ é chamado ponto crítico de ϕ se o posto de ϕ em x é menor do que $p = \dim Y$. Caso contrário, dizemos que x é um ponto regular de ϕ . Se $x \in X$ é ponto crítico de ϕ , $\phi(x)$ é chamado valor crítico de ϕ . Outros pontos em $\phi(X)$ são valores regulares, isto é, $y \in Y$ é valor regular de ϕ se e somente se x é um ponto regular de ϕ para cada $x \in \phi^{-1}(y)$.

Se $\phi: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo, então ϕ_* é um isomorfismo, desde que $\phi_* \circ \phi_*^{-1}$ e $\phi_*^{-1} \circ \phi_*$ são a transformação identidade. A generalização do teorema da função inversa para variedades fornece-nos o inverso desta proposição localmente, isto é,

TEOREMA 2: Sejam X e Y variedades diferenciáveis e seja $\phi : X \rightarrow Y$ uma transformação diferenciável. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\phi_* : T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$ é um isomorfismo linear
- ii) ϕ é um difeomorfismo local em $x \in X$.

Também é possível generalizar o teorema da função implícita para variedades:

TEOREMA 3: Sejam X e Y variedades diferenciáveis com $\dim X > \dim Y$ e seja $\phi : X \rightarrow Y$ uma transformação diferenciável. Seja $x' \in \phi(X)$ e defina

$$X' = \phi^{-1}(x') = \{x \in X / \phi(x) = x'\}.$$

Se para cada $x \in X$ a aplicação $\phi_* : T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$ é sobrejetiva, então X' tem uma estrutura de variedade cuja topologia subjacente é a topologia relativa de X' em X e na qual a transformação de inclusão $X' \rightarrow X$ é diferenciável. Além disto, $\dim X' = \dim X - \dim Y$.

Um caso particular importante da aplicação derivada é aquele em que $Y = \mathbb{R}$. Definimos então o diferencial $df|_x : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ de uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$df|_x(v_x) = v_x[f].$$

Note que, rigorosamente falando, esta aplicação não coincide com a aplicação derivada de f , $f_* : T_x X \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$ que está dada por

$$(f_* v_x)[g] \equiv v_x[g \circ f], \quad \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

De fato, pode-se mostrar que

$$f_* v_x = df|_x(v_x) \frac{d}{dt} \Big|_{f(x)},$$

onde $d/dt|_{f(x)}$ é o vetor tangente à reta no ponto $f(x)$. O isomorfismo canônico $\lambda d/dt \rightarrow \lambda$ entre o espaço tangente à reta em um ponto e a própria reta é o que nos permite identificar as aplicações f_* e df ⁵.

A transformação $df|_x : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear do espaço vetorial $T_x X$ no corpo $\mathbb{R}$ dos números reais e é portanto um elemento do espaço dual de $T_x X$ que é chamado espaço vetorial cotangente de X no ponto x e é denotado $T_x^* X$. Elementos de $T_x^* X$ são chamados vetores cotangentes ou vetores covariantes ou formas diferenciais. Em contrapartida, costuma-se usar o termo vetor contravariante para designar um vetor tangente.

Dada uma base $(e_1|_x, \dots, e_n|_x)$ de $T_x X$, definimos a base dual $(\theta^1|_x, \dots, \theta^n|_x)$ de $T_x^* X$ exigindo que

⁵ Situação análoga ocorreu na definição do vetor tangente a uma curva γ no ponto $\gamma(t)$ que denotamos $\gamma_*(t)$, identificando o espaço tangente à reta com a própria reta. A rigor, deveríamos denotar este vetor por $\gamma_*(d/dt|_t)$.

$$\theta^i|_x(e_j|_x) = \delta_j^i.$$

Se $(x^1, \dots, x^n)$ são funções coordenadas em x , $v_x \in T_x X$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, então

$$df|_x(v_x) = v_x[f] = v^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

e verificamos que se, em particular, $f = x^i$ e $v_x = \frac{\partial}{\partial x^j}|_x$, então

$$dx^i|_x \left[\frac{\partial}{\partial x^j}|_x \right] = \delta_j^i,$$

de modo que $(dx^i|_x)$ é a base de $T_x^* X$, dual da base $(\partial/\partial x^j|_x)$ de $T_x X$ e podemos expressar uma forma diferencial $\omega_x \in T_x^* X$ como combinação linear dos $dx^i|_x$:

$$\omega_x = \omega_i(x) dx^i|_x,$$

onde $\omega_i(x) = \omega_x(\partial/\partial x^i|_x)$. Aplicando esta expressão a v_x , obtemos

$$\omega_x(v_x) = \omega_i(x) v^i(x)$$

e se $\omega_x = df|_x$, concluímos que

$$\omega_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x),$$

isto é,

$$df|_x = \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x) dx^i|_x.$$

Finalmente, vamos estender o conceito de retrocesso de uma função para formas diferenciais. Se $\phi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação diferenciável e se $\omega_y \in T_y^*Y$ é uma forma diferencial em $y = \phi(x)$, então o retrocesso $\phi^*\omega_y$ de ω_y sob ϕ é a forma diferencial em T_x^*X tal que

$$(\phi^*\omega_y)(v_x) = \omega_y(\phi_*v_x),$$

para todo $v_x \in T_xX$.

1.4. CAMPOS TENSORIAIS

1.4.1. ESPAÇO TANGENTE E ESPAÇO COTANGENTE

Seja X uma variedade de dimensão n . A união dos espaços tangentes (respectivamente, cotangentes) T_xX (T_x^*X), $x \in X$, para todos os pontos de X forma os espaços

$$TX = \bigcup_{x \in X} T_xX$$

e

$$T^*X = \bigcup_{x \in X} T_x^*X.$$

Para $v_x \in T_x X$ e $\omega_x \in T_x^* X$, denotamos respectivamente por

$$\pi : TX \rightarrow X$$

$$(x, v_x) \rightarrow x$$

e

$$\pi^* : T^*X \rightarrow X$$

$$(x, \omega_x) \rightarrow x$$

as projeções naturais que associam ao vetor tangente (cotangente)

$v_x \in T_x X$ ($\omega_x \in T_x^* X$) sua origem $x \in X$.

Uma estrutura diferenciável para TX é obtida como segue (a construção para T^*X é similar e será omitida). Seja $A = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ um atlas de X . Cada homeomorfismo φ_i induz um isomorfismo canônico $\varphi_{i*} : T_x X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n$ é canonicamente isomorfo ao $\mathbb{R}^n$) e definimos a aplicação tangente $T\varphi_i$ de φ_i por

$$T\varphi_i : TU_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, v_x) \rightarrow (\varphi_i(x), \varphi_{i*}(v_x)),$$

onde $TU_i = \pi^{-1}(U_i)$. As aplicações $T\varphi_i$ são homeomorfismos dos abertos $TU_i \subset TX$ nos abertos $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$. Além disto, os domínios TU_i cobrem TX e se (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) são cartas compatíveis de X , então $(TU_i, T\varphi_i)$ e $(TU_j, T\varphi_j)$ são cartas compatíveis de TX . Assim, o conjunto $\mathcal{TA} = \{(TU_i, T\varphi_i), i \in I\}$ é um atlas de TX que tem portanto uma estrutura de variedade

diferenciável de dimensão $2n$ e é chamado o espaço tangente da variedade X . Evidentemente o conjunto T^*X tem também uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$ e é chamado o espaço cotangente da variedade X . Além disto, tanto TX quanto T^*X são fibrados vetoriais ⁶ sobre X , motivo pelo qual são também chamados, respectivamente, de fibrado tangente e fibrado cotangente de X .

Agora, sobre um ponto $x \in X$ podemos construir ainda o espaço $T^r_s(x)$ dos tensores de tipo (r,s) sobre $x \in X$, o que é feito do mesmo modo que se constrói tensores sobre o $\mathbb{R}^n$. Isto é, o produto tensorial $\otimes^r T_x X \otimes^s T_x^* X$ de r espaços tangente em x e s espaços cotangente em x é o conjunto de todas as formas multilineares sobre o produto cartesiano

$$T_x^* X \times \dots \times T_x^* X \times T_x X \times \dots \times T_x X.$$

Pode-se mostrar que o conjunto

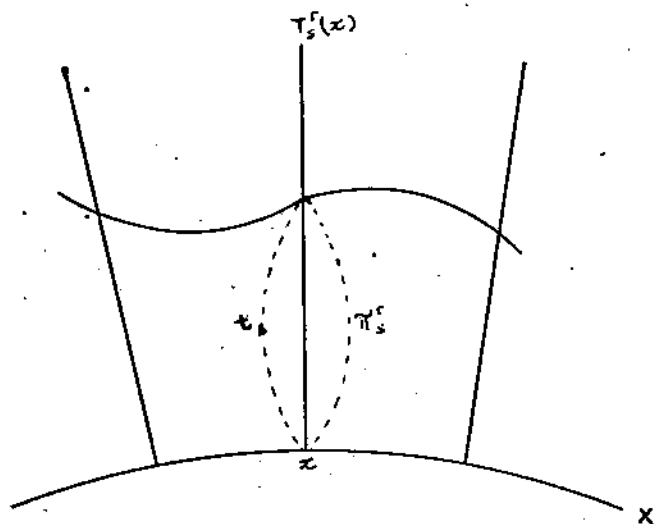
$$T^r_s X = \bigcup_{x \in X} T^r_s(x)$$

tem uma estrutura de fibrado vetorial (e portanto de variedade), sendo por isto chamado o fibrado tensorial de tipo (r,s) sobre X . Note que, em particular, $T^0_0 X = X \times \mathbb{R}$ (por convenção), $T^0_1 X = T^* X$ e $T^1_0 X = TX$.

⁶O conceito de fibrado não será definido aqui uma vez que não faremos uso dele diretamente.

1.4.2. CAMPOS TENSORIAIS

Um campo tensorial de tipo (r,s) sobre X é uma aplicação diferenciável $S : X \rightarrow T^r_s X$ que associa um tensor de tipo (r,s) a cada ponto de X e tal que $(\pi^r_s \circ S)(x) = x$, qualquer que seja $x \in X$, onde $\pi^r_s : T^r_s X \rightarrow X$ é a projeção natural do fibrado $T^r_s X$ ⁷. Em particular, se $r = s = 0$, o campo é chamado campo escalar; se $r = 0$ e $s = 1$, campo de 1-formas e se $r = 1$ e $s = 0$, campo vetorial.



(Fig. 7)

A representação local de campos tensoriais leva-nos à noção clássica de tensores. Se (U, φ) denota uma carta local de X com funções coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$, então as bases $\{\partial/\partial x^i|_x\}$ de $T_x X$ e $\{dx^i|_x\}$ de $T^*_x X$ fornecem uma base para $T^r_s(x)$ pelo

⁷Em vista da fig. 7 acima, costuma-se definir um campo tensorial de tipo (r,s) sobre X como sendo uma seção transversal diferenciável do fibrado de tipo (r,s) sobre X .

s-uplo produto tensorial $dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$ e o r-uplo produto tensorial $(\partial/\partial x^{i_1}) \otimes \dots \otimes (\partial/\partial x^{i_r})$. Assim, se $S \in T^r_s X$ é um campo tensorial, temos

$$S = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x) dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}.$$

Em outras palavras, as componentes de S relativamente à base

$$\left\{ dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \mid i_k, j_k = 1, \dots, n \right\},$$

são as n^{r+s} funções diferenciáveis

$$S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = S \left[\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s} \right].$$

Em particular, se v é um campo vetorial e ω é um campo de 1-formas, então

$$v = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

e

$$\omega = \omega_i(x) dx^i,$$

onde v^i e ω_i são funções sobre a variedade.

Se $(\partial/\partial x^{k'})$ é outra base de $T_x X$, é fácil ver que podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^{k'}(x) \frac{\partial}{\partial x^{k'}},$$

onde $[a_i^{k'}] = [\partial x^{k'} / \partial x^i]$ é a jacobiana da transformação $(\partial / \partial x^{k'}) \rightarrow (\partial / \partial x^i)$. Também se pode verificar que se $(dx^{1'})$ é a base dual de $(\partial / \partial x^{k'})$, então

$$dx^j = a_{1'}^j(x) dx^{1'},$$

onde $a_{1'}^j = (a^{-1})_j^{1'}$. Como $v = v^i(x) \partial / \partial x^i = v^{k'}(x) \partial / \partial x^{k'}$ e $\omega = \omega_j(x) dx^j = \omega_{1'}(x) dx^{1'}$, segue que

$$v^{k'}(x) = a_i^{k'}(x) v^i(x)$$

e que

$$\omega_{1'}(x) = a_{1'}^j(x) \omega_j(x).$$

Mais geralmente, se S é um campo tensorial de tipo (r,s) sobre X , então a equação

$$S_{1' \dots 1'}^{k' \dots k'}(x) = a_{1'}^{j_1} \dots a_{1'}^{j_s} a_{i_1}^{k'} \dots a_{i_r}^{k'} S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r},$$

onde $[a_{1'}^p]$ ($p = 1, \dots, s$) e $[a_{i_1}^{k'}]$ ($q = 1, \dots, r$) são como acima, expressa a lei de transformação das componentes deste campo tensorial das bases $(\partial / \partial x^i)$ e (dx^j) para as bases $(\partial / \partial x^{k'})$ e $(dx^{1'})$, conforme estabelecido classicamente.

1.4.3. CAMPOS VETORIAIS

As operações definidas para vetores covariantes e contravariantes em um ponto da variedade podem ser estendidas naturalmente para campos de 1-formas e campos vetoriais, respectivamente. A ação de um campo vetorial $v : X \rightarrow TX$ sobre uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fornece-nos a função $v[f] : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(v[f])(x) = v_x[f],$$

onde evidentemente $v_x = v(x)$. Além disto, se $\omega : X \rightarrow T^*X$, $\omega(x) = \omega_x$, é um campo de 1-formas, definimos a função $\omega(v) : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(\omega(v))(x) = \omega_x(v_x),$$

qualquer que seja $x \in X$.

Dados dois campos vetoriais v e w sobre X , definimos sua soma $v + w$ por

$$(v + w)[f] = v[f] + w[f],$$

onde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função. Também podemos definir a multiplicação de $v : X \rightarrow TX$ por uma função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(gv)[f] = g(v[f]).$$

O conjunto $\mathcal{H}(X)$ de todos os campos vetoriais C^∞ sobre uma variedade X junto com as operações de soma de campos e produto de um campo por uma função (de classe C^∞) constitui um módulo sobre o anel das funções de classe C^∞ sobre X . Um conjunto de n campos vetoriais diferenciáveis linearmente independentes que forma uma base para o módulo $\mathcal{H}(U)$, $U \subset X$, é chamado um referencial móvel (tal conjunto pode não existir globalmente).

Podemos dar ao módulo $\mathcal{H}(X)$ uma estrutura de álgebra definindo o colchete de Lie de campos vetoriais por

$$[v, w] = vw - wv,$$

onde a justaposição de campos vetoriais significa evidentemente a composição de sua ação sobre funções, isto é, $(vw)[f] = v[w[f]]$ ⁸. Note que vw não é um campo vetorial (não satisfaz a regra de Leibniz) embora o colchete de Lie de v e w o seja.

A multiplicação definida pelo colchete de Lie é distributiva com relação à adição de campos vetoriais e é anticomutativa; ela não é associativa, mas satisfaz a identidade de Jacobi

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_3, [v_1, v_2]] + [v_2, [v_3, v_1]] = 0.$$

Um módulo junto com uma operação interna que satisfaz estas propriedades multiplicativas é chamada uma álgebra de Lie.

⁸ Naturalmente o colchete de Lie somente está definido na intersecção dos domínios dos campos vetoriais v e w .

A imagem de um vetor num ponto $x \in X$ por uma aplicação diferenciável $\phi : X \rightarrow Y$ foi definida pela igualdade numérica $(\phi_* v)_y [g] = v_x [g \circ \phi]$, que desde que ϕ seja inversível pode ser escrita como

$$((\phi_* v)[g])(y) = (v[g \circ \phi])(x) = (v[g \circ \phi])(\phi^{-1}(y)),$$

caso em que a imagem de um campo vetorial sob ϕ é definida pela função igualdade

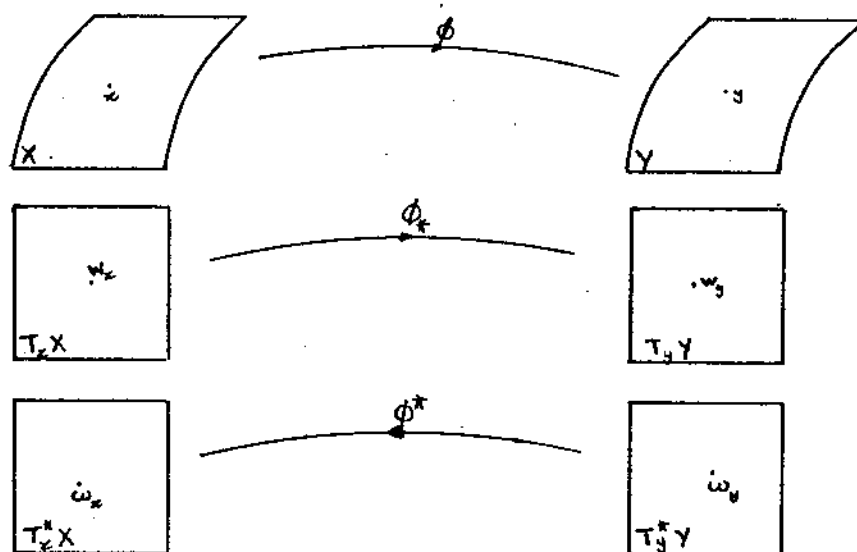
$$(\phi_* v)[g] = v[g \circ \phi] \circ \phi^{-1}.$$

Se v é um campo vetorial diferenciável de classe C^r sobre X e se $\phi : X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo de classe C^{r+1} , então $\phi_* v$ é um campo vetorial de classe C^r sobre Y . Contudo, se ϕ não é inversível, a imagem de v sob ϕ não é, em geral, um campo vetorial sobre Y . Se ϕ^{-1} existe mas não é diferenciável, a imagem não é diferenciável.

Analogamente, podemos definir a imagem recíproca de um campo de 1-formas $\omega \in T^*Y$ pela função igualdade

$$(\phi^* \omega)(v) = \omega(\phi_* v) \circ \phi,$$

onde v é um campo vetorial qualquer. Note que diferentemente do que acontece com campos vetoriais, a expressão da imagem recíproca de um campo de 1-formas não envolve ϕ^{-1} . Com relação a isto, campos de vetores covariantes são mais interessantes do que campos vetoriais: $\phi^* \omega$ é sempre um campo diferenciável se ω e ϕ são diferenciáveis.



(Fig. 8)

Para terminar esta seção, vamos generalizar conceito de imagem de um campo vetorial para tensores de tipo arbitrário. Para isto, definimos a imagem $\phi_* f$ de uma função $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ por um difeomorfismo $\phi : X \rightarrow Y$ como sendo a função

$$\phi_* f = f \circ \phi^{-1},$$

isto é, $\phi_* f = (\phi^{-1})^* f$. Também precisamos definir a imagem de $\omega \in T^*X$ como sendo o campo de 1-formas $\phi_* \omega \in T^*Y$ tal que se $\omega = \phi^* v$, então

$$(\phi_* \omega)(w) = \omega((\phi_*)^{-1} w),$$

ou seja,

$$\phi_* \omega = (\phi^*)^{-1} \omega.$$

Quando $X = Y$, dizemos em vista das definições acima que o difeomorfismo ϕ induz um arrastamento de formas e vetores. De maneira mais geral, se $S \in \otimes^r TX \otimes^s T^*X$ é um campo tensorial de tipo

(r,s) , o campo tensorial arrastado pela aplicação $\phi : X \rightarrow X$ é o campo tensorial $\phi_* S \in \otimes^r TX \otimes^s T^*X$ tal que

$$S(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)|_x = \phi_* S(\phi^* \omega_1, \dots, \phi^* \omega_r, \phi^* v_1, \dots, \phi^* v_s)|_{\phi(x)},$$

para quaisquer $v_i \in TX$ ($i = 1, \dots, s$) e quaisquer $\omega_j \in T^*X$. Evidentemente, se $\{e_i\}$ é base de TX e $\{\theta^j\}$ é a base dual em T^*X e se

$$S = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r},$$

então

$$\phi_* S = \left[S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \circ \phi^{-1} \right] (\phi^* \theta^{j_1}) \otimes \dots \otimes (\phi^* \theta^{j_s}) \otimes (\phi^* e_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\phi^* e_{i_r}).$$

1.4.4. FORMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES

Um campo tensorial p -covariante totalmente anti-simétrico é chamado uma p -forma (diferencial) ou uma forma de grau p . O espaço das p -formas (de classe C^k) sobre uma variedade X é um submódulo $\Lambda^p(X)$ do módulo (sobre o anel das funções C^k) de todos os campos tensoriais covariantes (de classe C^k) sobre X . $\Lambda_X^p(X)$ denota o espaço das p -formas em $x \in X$. Uma forma de grau p superior à dimensão n da variedade é identicamente nula porque as únicas componentes não nulas de um campo p -tensorial totalmente anti-simétrico são aquelas em que todos os índices são diferentes, situação que nunca pode ocorrer se $p > n$.

O produto exterior (produto de Grassman) $\wedge$ de uma p -forma e uma q -forma é uma aplicação

$$\begin{aligned}\wedge : (\Lambda^p(X), \Lambda^q(X)) &\rightarrow \Lambda^{p+q}(X) \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha \wedge \beta\end{aligned}$$

definida por

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) \pi [\alpha(v_1, \dots, v_p) \beta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})],$$

onde $v_i \in TX$ e π é uma permutação de $(1, 2, \dots, p+q)$. Note que em particular, se α e β são 1-formas, $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$.

Segue da definição que o produto exterior satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- ii) $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$
 $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$
- iii) $f(\alpha \wedge \beta) = f\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge f\beta$
- iv) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ se $\alpha \in \Lambda^p X$ e $\beta \in \Lambda^q X$

Uma 1-forma é também chamada forma linear. Uma função f sobre X pode ser considerada ou um elemento do anel sobre o qual o módulo $\Lambda(X)$ está definido ou uma 0-forma. O produto de uma forma α e uma função f escreve-se $f \wedge \alpha = f\alpha$.

A dimensão do espaço $\Lambda_X^p(X)$ é igual ao coeficiente binomial $\binom{n}{p} = n!/(n-p)!p!$. Em particular, o espaço $\Lambda_X^n(X)$ das n -formas sobre $x \in X$ é unidimensional.

Seja α uma p -forma diferencial de classe C^k (isto é, suas componentes $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ são funções diferenciáveis de x de classe C^k). O operador de diferenciação exterior d transforma uma p -forma de classe C^k em uma $(p+1)$ -forma de classe C^{k-1} chamada derivada exterior de α . d tem as seguintes propriedades

$$i) \quad d \text{ é linear: } d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$$

$$d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha, \lambda \text{ constante}$$

$$ii) \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad p = \text{grau de } \alpha$$

$$iii) \quad d^2 = 0$$

$$iv) \quad \text{se } f \text{ é uma } 0\text{-forma, } df \text{ é o diferencial ordinário de } f$$

$$v) \quad \text{a operação } d \text{ é local: se } \alpha \text{ e } \beta \text{ coincidem sobre um conjunto aberto } U, \quad d\alpha = d\beta \text{ sobre } U.$$

1.5. DERIVADA DE LIE

Seja X uma variedade diferenciável. Dizemos que uma aplicação

$$\sigma : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

é um grupo a um parâmetro se

$$i) \quad \sigma \text{ é diferenciável;}$$

$$ii) \quad \sigma(x, 0) = x \quad \forall x \in X;$$

$$iii) \quad \sigma(\sigma(x, s), t) = \sigma(x, s+t), \quad \forall x \in X, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Estas condições podem ser expressas de maneira mais conveniente introduzindo-se as aplicações $\sigma_t : X \rightarrow X$ dadas por

$$\sigma_t(x) = \sigma(x, t).$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação σ_t é diferenciável, pois $\sigma_t = \sigma \circ l_t$, onde l_t é a aplicação diferenciável $l_t : X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ dada por

$$l_t(x) = (x, t).$$

Além disto, a condição (ii) diz-nos que $\sigma_0 = \text{id}_X$, pois

$$\sigma_t(x) = \sigma(x, t) \Rightarrow \sigma_0(x) = \sigma(x, 0) = x.$$

Finalmente, a condição (iii) agarreta que

$$\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (\sigma_t \circ \sigma_s)(x) &= \sigma_t(\sigma_s(x)) \\ &= \sigma_t(\sigma(x, s)) \\ &= \sigma(\sigma(x, s), t) \\ &= \sigma(x, s+t) \\ &= \sigma_{s+t}(x). \end{aligned}$$

Note ainda que se tomarmos $s = -t$ na equação acima obteremos $\sigma_t \circ \sigma_{-t} = \sigma_0 = \text{id}_X$, de modo que para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação σ_t é um difeomorfismo e $(\sigma_t)^{-1} = \sigma_{-t}$. Dizemos então que a família $(\sigma_t, t \in \mathbb{R})$ de aplicações de X em X constitui um grupo a um parâmetro G_1 de difeomorfismos de X .

Dado um grupo a um parâmetro $\sigma : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, para cada $x \in X$ podemos construir a aplicação

$$\begin{aligned}\sigma_x : \mathbb{R} &\rightarrow X \\ t &\mapsto \sigma_x(t) = \sigma(x, t)\end{aligned}$$

que em vista da condição (ii) é uma curva que passa por x . Esta curva é chamada órbita de x gerada pelo grupo e o conjunto de todas as órbitas de todos os pontos X formam as trajetórias de G_1 .

Pode-se mostrar a partir de (iii) que por cada ponto de X passa uma única trajetória do grupo a um parâmetro σ . Em vista disto, está univocamente determinado o campo vetorial v construído associando-se a cada ponto de X o vetor tangente à órbita do grupo por aquele ponto, isto é, em geral

$$v(\sigma_x(t)) = \frac{d\sigma_x}{dt}(t).$$

O campo vetorial v é chamado campo vetorial de Killing relativo ao grupo $(\sigma_t, t \in \mathbb{R})$.

Reciprocamente entretanto, dado um campo vetorial v sobre X , ele não definirá em geral um grupo, mesmo local, de

difeomorfismos de X . Na verdade somente será possível encontrar um pseudogrupo local a um parâmetro que induz o campo v . Um pseudogrupo local a um parâmetro significa que σ_t não está definida para todo t , mas para cada $x \in X$ existe uma vizinhança $V(x)$ de x , um intervalo $I(x) = (-\varepsilon(x), +\varepsilon(x)) \subset \mathbb{R}$ em torno de zero e uma família $(\sigma_t, t \in I(x))$ de aplicações de X em X tal que valem as propriedades (i), (ii) e (iii) acima quando $|t| < \varepsilon(x)$, $|s| < \varepsilon(x)$ e $|t+s| < \varepsilon(x)$. Em vista desta observação, o campo vetorial v é também chamado gerador infinitesimal do (pseudo) grupo (local) $(\sigma_t, t \in \mathbb{R})$.

Naturalmente, dado um campo vetorial v obtemos o (pseudo) grupo (local) a um parâmetro que induz v integrando a equação diferencial

$$\frac{d\sigma_x}{dt}(t) = v(\sigma_x(t)),$$

motivo pelo qual as trajetórias do grupo são também chamadas curvas integrais do campo vetorial v .

Agora, seja $(\sigma_t, t \in I(x))$ o grupo local de difeomorfismos de X que induz o campo vetorial v e seja S um campo tensorial de tipo (r,s) sobre X . Definimos a derivada de Lie de S na direção de v , denotada $\mathcal{L}_v S$, por

$$\mathcal{L}_v S|_x = -\frac{d}{dt}((\sigma_t)_* S)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(S|_x - (\sigma_t)_* S|_x).$$

Segue imediatamente da definição acima, usando as propriedades de $(\sigma_t)_*$, que

- i) $\mathcal{L}_V$ preserva a valência, isto é, se S é de tipo (r,s) , então $\mathcal{L}_V S$ é de tipo (r,s) ;
- ii) $\mathcal{L}_V$ aplica tensores linearmente e preserva as contrações;
- iii) Regra de Leibniz: $\mathcal{L}_V(S \otimes T) = (\mathcal{L}_V S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_V T)$.

São de especial interesse as expressões da derivada de Lie de funções, campos vetoriais e campos de 1-formas, pois junto com a regra de Leibniz estas expressões permitem-nos calcular a derivada de Lie de qualquer outro tensor. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e se v e w são campos vetoriais, segue da definição da derivada de Lie que

$$\mathcal{L}_V f = v[f]$$

e que

$$\mathcal{L}_V w = [v, w].$$

Além disto, se ω é um campo de 1-formas, segue da propriedade da derivada de Lie preservar as contrações que

$$\mathcal{L}_V \omega = (v[\omega_k] + \omega_i e_k[v^i] - c_{jk}^i \omega_i v^j) \theta^k,$$

onde ω_k e v^i são as componentes de v e ω nas bases duais $\{\theta^k\}$ e $\{e_i\}$ respectivamente e c_{jk}^i são as chamadas constantes de estrutura da base $\{e_i\}$, definidas por

$$[e_j, e_k] = c_{jk}^i e_i.$$

Em particular, se $\theta^k \equiv dx^k$ e portanto $e_i \equiv \partial/\partial x^i$, teremos

$$\mathcal{L}_v f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = v^i \partial_i f,$$

$$\mathcal{L}_v w = \left[v^i \partial_i w^j - w^i \partial_i v^j \right] \frac{\partial}{\partial x^j}$$

e

$$\mathcal{L}_v \omega = \left[v^i \partial_i \omega_k + \omega_i \partial_k v^i \right] dx^k.$$

É fácil ver também que na base coordenada teremos

$$\left[\mathcal{L}_v \frac{\partial}{\partial x^k} \right]^i = \partial_k v^i$$

e

$$\left[\mathcal{L}_v dx^i \right]_k = \partial_k v^i$$

Assim, se quisermos, por exemplo, calcular a derivada de Lie de um tensor da forma

$$S = S_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

a propriedade (iii) garante-nos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V S &= (\mathcal{L}_V S^i_{jk}) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \\
&+ S^i_{jk} \left[\mathcal{L}_V \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \otimes dx^j \otimes dx^k \\
&+ S^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes (\mathcal{L}_V dx^j) \otimes dx^k \\
&+ S^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes (\mathcal{L}_V dx^k),
\end{aligned}$$

o que significa que

$$\mathcal{L}_V S = \left[v^m \partial_m S^i_{jk} - S^m_{jk} \partial_m v^i + S^i_{mk} \partial_j v^m + S^i_{jm} \partial_k v^m \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k.$$

O conceito de derivada de Lie está intimamente ligado à noção de invariância de campos tensoriais. Dizemos que um campo tensorial S sobre X é invariante sob um difeomorfismo $\phi : X \rightarrow X$ se

$$\phi_* S|_X = S|_{\phi(X)},$$

para todo $x \in X$. Estendemos esta definição naturalmente para o caso em que se tenha um (pseudo) grupo (local) a um parâmetro (σ_t) dizendo que S é invariante sob (σ_t) se a condição acima é satisfeita para cada difeomorfismo σ_t .

Note então que segue da definição da derivada de Lie que se S é invariante sob (σ_t) , então

$$\mathcal{L}_V S = 0,$$

onde v é o gerador infinitesimal do grupo. Inversamente, é possível mostrar que se a derivada de Lie de S na direção de v é zero, então S é invariante sob o grupo de transformações gerado por v .

1.6. VARIEDADES RIEMANNIANAS

Uma variedade riemanniana é uma variedade diferenciável X junto com um campo tensorial 2-covariante contínuo g , chamado tensor métrico, tal que

- i) g é simétrico
- ii) para cada $x \in X$ a forma bilinear g_x é não degenerada; desde que por hipótese X é de dimensão finita, isto significa que $g_x(v, w) = 0$ para todo $v \in T_x X$ se e somente se $w = 0$.

Dizemos que tal variedade possui uma estrutura riemanniana. Uma variedade riemanniana é chamada própria se para todo $x \in X$

$$g_x(v, v) > 0, \forall v \in T_x X, v \neq 0.$$

Caso contrário dizemos que a variedade é pseudo-riemanniana ou que possui métrica indefinida.

O tensor g , que algumas vezes é denotado ds^2 , dota cada espaço vetorial $T_x X$ com um produto interno $\langle v | w \rangle$ definido por

$$\langle v | w \rangle = g_x(v, w), \forall v, w \in T_x X.$$

Se escrevemos $g = g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$, onde $\{\theta^i\}$ é um referencial móvel em T^*X , então é fácil ver que

$$g_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle,$$

onde $\{e_i\}$ é a base dual de $\{\theta^i\}$.

A norma $\|v\|$ de um vetor $v \in T_x X$ é definida por

$$\|v\|^2 = g_x(v, v) = g_{ij} v^i v^j,$$

onde $\langle v^i \rangle$ são as componentes de v na base $\{e_i\}$. No caso de uma variedade riemanniana própria, esta é a norma no sentido usual. Caso contrário, $\|v\|$ pode ser um número real ou imaginário. Se $\|v\| = 0$, v é chamado um vetor nulo (isotrópico). Em cada ponto $x \in X$, os vetores nulos formam um cone em $T_x X$ chamado cone nulo (cone de luz); o cone nulo consiste de todos os vetores v tais que $g_{ij} v^i v^j = 0$. Um vetor nulo é sempre ortogonal a si próprio.

Um produto interno sobre qualquer espaço vetorial define um isomorfismo canônico entre o espaço e seu dual. Para um u fixo, a transformação

$$\begin{aligned} \langle u | \cdot \rangle : T_x X &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle u | v \rangle \end{aligned}$$

é um elemento de $T_x^* X$ e a associação $u \mapsto u^* = \langle u | \cdot \rangle$ é um isomorfismo canônico. Em geral o mesmo símbolo u é usado para denotar tanto o vetor covariante u quanto o vetor covariante u^* que é a imagem de u pelo isomorfismo canônico. Note que se $u = u^i e_i$, então

$$u^* = g_{ij} u^i \theta^j.$$

Os u^i são chamados componentes contravariantes de u e os u_i são chamados componentes covariantes de u ; elas estão relacionadas por

$$u_i = g_{ij} u^j, \quad u^i = g^{ij} u_j,$$

onde os g^{ij} são os elementos da inversa da matriz $[g_{ij}]$,

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k.$$

Por meio do isomorfismo canônico entre $T_X X$ e $T_X^* X$ definimos um produto interno em $T_X^* X$ por

$$\begin{aligned} \langle u^* | v^* \rangle &= \langle u | v \rangle \\ &= g^{ik} u_i v_k. \end{aligned}$$

Similarmente, há isomorfismos canônicos entre os espaços $\otimes^r T_X^* X$, $\otimes^r T_X X$, $\otimes^r T_X^* X \otimes^{r-s} T_X X$, etc. As componentes contravariantes e covariantes de um tensor S estão relacionadas por

$$S_{i_1 \dots i_r} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_r j_r} S^{j_1 \dots j_r}$$

e

$$S^{i_1 \dots i_r} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_r j_r} S_{j_1 \dots j_r}.$$

Os g^{ij} são as componentes contravariantes do tensor g . Diz-se que os índices são levantados e baixados por meio do tensor g . As componentes mistas de um tensor são obtidas do mesmo modo, por exemplo

$$S_j^i = g^{ik} S_{kj}.$$

Com uma escolha conveniente da base (e_i) para $T_x X$ a forma quadrática $g_x(v,v) = g_{ij} v^i v^j$ pode ser escrita como a soma de k quadrados positivos e $n-k$ quadrados negativos:

$$g_{ij} v^i v^j = g_{i'j'} v^{i'} v^{j'} = \sum_{i'=1}^k (v^{i'})^2 - \sum_{i'=k+1}^n (v^{i'})^2.$$

O número k é chamado o índice da forma quadrática e na verdade é independente da base; o número $k-(n-k)$ é chamado assinatura da forma quadrática. Em termos da base $(\theta^{j'})$, dual de (e_i) ,

$$g_x = \sum_{i'=1}^k \theta^{i'} \otimes \theta^{i'} - \sum_{i'=k+1}^n \theta^{i'} \otimes \theta^{i'}.$$

Desde que g é contínuo, o índice de g será o mesmo em cada ponto de X se a variedade é conexa. Fala-se portanto na assinatura ou índice de uma variedade riemanniana. Em particular, o índice de uma variedade riemanniana própria é n , a dimensão da variedade.

Sejam X e Y duas variedades diferenciáveis de dimensão n com estruturas riemannianas g e γ respectivamente. Uma transformação $\phi : X \rightarrow Y$ é chamada uma isometria se ϕ é um difeomorfismo e

$$\phi^* \gamma = g.$$

Dizemos que duas variedades são isométricas se existe uma isometria de uma sobre a outra.

A transformação $\phi : X \rightarrow Y$ é chamada uma isometria local se para cada $x \in X$ existem vizinhanças U de x e V de $\phi(x)$ tal que ϕ é uma isometria de U sobre V .

As isometrias de X sobre X formam um grupo. Um campo vetorial v sobre X gera um pseudogrupo de isometrias locais se e somente se

$$\mathcal{L}_v g = 0.$$

Desde que as isometrias são as mais importantes aplicações sobre uma variedade riemanniana (X, g) , um campo vetorial de Killing sobre (X, g) será entendido aqui como relativo às isometrias, a menos que seja especificado ao contrário.

Em termos das funções coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ de X , a equação acima fica escrita

$$\partial_k v_h + \partial_h v_k + v^i (\partial_i g_{hk} - \partial_k g_{hi} - \partial_h g_{ik}) = 0,$$

onde evidentemente $v_k = g_{hk} v^h$.

Qualquer variedade riemanniana isométrica à variedade riemanniana $\mathbb{R}^n$ com carta $(\mathbb{R}^n, Id)$ e métrica

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i dx^i \otimes dx^i$$

com $\varepsilon_i = \pm 1$, é chamada um espaço chato.

Se $\varepsilon_i = +1$ para todo i , o espaço é chamado euclidiano e denotado E^n . O espaço de Minkowski é o espaço chato com métrica dada por

$$ds^2 = dx^0 \otimes dx^0 - \sum_{i=1}^{n-1} dx^i \otimes dx^i.$$

Um espaço localmente chato é um espaço localmente isométrico a um espaço chato.

1.7. CONEXÕES LINEARES

Uma conexão linear sobre uma variedade diferenciável X é uma transformação $v \rightarrow \nabla v$ dos germes dos campos vetoriais diferenciáveis sobre X nos germes dos campos tensoriais de tipo $(1,1)$ sobre X tal que

$$i) \quad \nabla(v+w) = \nabla v + \nabla w;$$

$$ii) \quad \nabla(fv) = df \otimes v + f \nabla v,$$

onde f é o germe de uma função diferenciável sobre X . O tensor ∇v é chamado derivada absoluta ou derivada covariante de v . Os coeficientes da conexão γ_{ki}^j são definidos pela relação

$$\nabla e_i = \gamma_{ki}^j \theta^k \otimes e_j,$$

onde (θ^k) e (e_j) são bases duais. Então,

$$\begin{aligned}\nabla v &= \nabla(v^i e_i) \\ &= dv^i \otimes e_i + v^i \nabla e_i \\ &= (dv^i + v^j \gamma_{kj}^i \theta^k) \otimes e_i \\ &= (e_k [v^i] + v^j \gamma_{kj}^i) \theta^k \otimes e_i.\end{aligned}$$

Em termos das formas de conexão $\omega_j^i = \gamma_{ik}^j \theta^k$,

$$\nabla v = (dv^i + \omega_j^i v^j) \otimes e_i.$$

Usamos o fato de que ∇v é um tensor para encontrar a lei de transformação dos coeficientes da conexão. Sob uma mudança de base

$$e_i = a_i^{j'} e_{j'}, \quad \theta^k = a_1^k \theta^{1'}, \quad a_i^{j'} a_j^k = \delta_i^k, \quad v^i = a_j^i v^{j'},$$

temos

$$\begin{aligned}dv^i &= a_1^i dv^{1'} + v^{1'} da_1^i \\ &= a_1^i dv^{1'} + v^{1'} e_h [a_1^i] \theta^{h'}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\nabla v &= (dv^i + v^j \gamma_{kj}^i \theta^k) \otimes a_i^{j'} e_{j'} \\ &= (dv^{j'} + a_i^{j'} v^{1'} da_1^i + a_1^m v^{1'} \gamma_{km}^i a_i^{j'} a_h^k \theta^{h'}) \otimes e_{j'} \\ &= (dv^{j'} + v^{1'} \gamma_{h'1}^{j'} \theta^{h'}) \otimes e_{j'},\end{aligned}$$

de modo que

$$v_{h,1'}^{j'} = a_i^{j'} e_h [a_1^i] + a_{1'}^m v_{km}^i a_i^{j'} a_h^k.$$

Note que os coeficientes da conexão não são as componentes de um tensor. Em termos das bases naturais,

$$\nabla v = (\partial_k v^i + \Gamma_{kl}^i v^l) dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde os Γ_{kl}^i são os coeficientes da conexão na base natural, frequentemente chamados símbolos de Christoffel. Sob uma mudança de bases naturais induzida por uma mudança de coordenadas $\langle x^i \rangle \rightarrow \langle x^{j'} \rangle$, temos

$$\Gamma_{h,1'}^{j'} = (\partial_i x^{j'}) (\partial_h, (\partial_1, x^i)) + (\partial_1, x^m) (\partial_h, x^k) (\partial_i x^{j'}) \Gamma_{km}^i.$$

A derivada covariante $\nabla_u v$ de v na direção de u é por definição

$$\nabla_u v = (\nabla v)(u)$$

ou

$$(\nabla_u v)(\cdot) = (\nabla v)(u, \cdot).$$

Isto quer dizer que

$$\begin{aligned} \nabla_u v &= u^k (e_k [v^i] + v_{kj}^i v^j) e_i \\ &= (u [v^i] + v_{kj}^i u^k v^j) e_i. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\nabla_{e_i} e_k = v_{ik}^j e_j.$$

Note que $\nabla_u v$ é linear em u sobre o anel das funções sobre X , isto é,

$$\nabla_{fu_1+gu_2} v = f\nabla_{u_1} v + g\nabla_{u_2} v,$$

onde $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Dizemos que um vetor v é paralelo ao longo de uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ se

$$\nabla_u v = 0$$

para todos os pontos de γ , onde

$$u = \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

é o vetor tangente à curva γ .

Uma geodésica afim sobre X é uma curva $\gamma : t \rightarrow \gamma(t)$ tal que

$$\nabla_u u = \lambda(t)u,$$

onde novamente $u = d\gamma/dt$ e λ é alguma função sobre $\mathbb{R}$. Se $\nabla_u u = 0$, dizemos que a curva γ é uma geodésica. Dada uma geodésica afim γ sobre X sempre é possível encontrar uma reparametrização γ' de γ tal que $\nabla_{u'} u' = 0$, onde u' é o vetor tangente a γ' .

Em uma carta local (U, φ) e usando a base natural, com $\gamma^i(t) = x^i \circ \gamma(t)$ e $u^i(t) = u^i \circ \gamma(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} u^i &= u[x^i] \\ &= \left[\gamma * \frac{d}{dt} \right] [x^i] \\ &= \frac{d}{dt} (x^i \circ \gamma(t)) \\ &= \frac{d\gamma^i}{dt} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 u[u^i] &= \left[\gamma_* \frac{d}{dt} \right] [u^i] \\
 &= \frac{d}{dt} (u^i \circ \gamma(t)) \\
 &= \frac{du^i}{dt}.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 (\nabla_u u)^i &= u[u^i] + u^k R_{kj}^i u^j \\
 &= \frac{d^2 \gamma^i}{dt^2} + R_{kj}^i \frac{d\gamma^k}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt}.
 \end{aligned}$$

TEOREMA 4. Seja $x \in X$ e $v \in T_x X$, $v \neq 0$. A menos de reparametrizações, existe uma única geodésica afim maximal $\gamma : t \rightarrow \gamma(t)$ tal que

$$\gamma(0) = x$$

e

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = v.$$

A derivada covariante é estendida aos germes dos tensores de tipo arbitrário requerendo-se que a derivada direcional covariante satisfaça as seguintes propriedades

- i) $\nabla_v f = v[f]$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$;
- ii) $\nabla_v (S + T) = \nabla_v S + \nabla_v T$;
- iii) $\nabla_v (S \otimes T) = (\nabla_v S) \otimes T + S \otimes (\nabla_v T)$;
- iv) ∇_v comuta com a operação de multiplicação

contraída.

Então, se S é um tensor de tipo (r,s) , a derivada covariante ∇S é o tensor de tipo $(r+1,s)$ definido por

$$(\nabla S)(v, v_1, \dots, v_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = (\nabla_v S)(v_1, \dots, v_r, \omega_1, \dots, \omega_s).$$

Usamos (iv) para encontrar a derivada covariante de uma 1-forma α . Temos

$$\nabla_v(\alpha(u)) = (\nabla_v \alpha)(u) + \alpha(\nabla_v u)$$

ou

$$(\nabla_v \alpha)(u) = \nabla_v(\alpha(u)) - \alpha(\nabla_v u).$$

Tomando $u = e_i$,

$$\begin{aligned} (\nabla_v \alpha)_i &= v[\alpha_i] - \alpha(\gamma_{ki}^j v^k e_j) \\ &= v[\alpha_i] - \gamma_{ki}^j v^k \alpha_j. \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla_v \alpha = v^k (e_k[\alpha_i] - \gamma_{ki}^j \alpha_j) \theta^i$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \alpha &= (e_k[\alpha_i] - \gamma_{ki}^j \alpha_j) \theta^k \otimes \theta^i \\ &= (d\alpha_i - \alpha_j \omega_i^j) \otimes \theta^i. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\nabla \theta^i = -\omega_j^i \otimes \theta^j = -\gamma_{kj}^i \theta^k \otimes \theta^j$$

e

$$\nabla_v \theta^i = -v^k \gamma_{kj}^i \theta^j.$$

Este resultado junto com (ii) e (iii) é usado para encontrar a derivada covariante de um tensor de tipo arbitrário.

Por exemplo, seja $S = S_{kl}^i e_i \otimes \theta^k \otimes \theta^l$, então

$$\begin{aligned}\nabla_v S &= v[S_{kl}^i] e_i \otimes \theta^k \otimes \theta^l + \\ &+ S_{kl}^i (\nabla_v e_i) \otimes \theta^k \otimes \theta^l + \\ &+ S_{kl}^i e_i \otimes (\nabla_v \theta^k) \otimes \theta^l + \\ &+ S_{kl}^i e_i \otimes \theta^k \otimes (\nabla_v \theta^l),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_v S = v^j (e_j [S_{kl}^i] + \gamma_{jm}^i S_{kl}^m - \gamma_{jk}^m S_{ml}^i - \gamma_{jl}^m S_{km}^i) e_i \otimes \theta^k \otimes \theta^l.$$

A operação de torção τ e a operação de curvatura P são definidas por

$$\tau(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]$$

e

$$P(u, v) = \nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla [u, v].$$

Note que

$$\tau(u, v) = -\tau(v, u)$$

$$P(u, v) = -P(v, u)$$

$$\tau(fu, gv) = fg \tau(u, v)$$

$$P(fu, gv)hw = fgh P(u, v)w,$$

onde $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$.

O tensor de torção T e o tensor de curvatura R são definidos por

$$T(\alpha, u, v) = \alpha(\tau(u, v))$$

e

$$R(w, \alpha, u, v) = \alpha(P(u, v)w),$$

onde α é uma 1-forma. Em coordenadas locais, as componentes de T e R são

$$T_{kl}^i = T(\theta^i, e_k, e_l) = \gamma_{kl}^i - \gamma_{lk}^i - c_{kl}^i$$

e

$$R_{i \quad k l}^J = R(e_i, \theta^J, e_k, e_l) \\ = e_k [\gamma_{li}^J] - e_l [\gamma_{ki}^J] + \gamma_{km}^J \gamma_{li}^m - \gamma_{lm}^J \gamma_{ki}^m - c_{kl}^m \gamma_{mi}^J,$$

onde c_{kl}^i são as constantes de estrutura. Na base natural, tem-se $c_{kl}^i = 0$ e as expressões acima ficam

$$T_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i - \Gamma_{lk}^i$$

e

$$R_{i \quad k l}^J = \partial_k \Gamma_{li}^J - \partial_l \Gamma_{ki}^J + \Gamma_{km}^J \Gamma_{li}^m - \Gamma_{lm}^J \Gamma_{ki}^m.$$

Devido à anti-simetria de T_{kl}^i e $R_{i \quad k l}^J$ nos dois últimos índices, é possível definir as formas de torção

$$\theta^i = \frac{1}{2} T_{kl}^i \theta^k \wedge \theta^l$$

e as formas de curvatura

$$\Omega_i^J = \frac{1}{2} R_{i \quad k l}^J \theta^k \wedge \theta^l.$$

TEOREMA 5 (EQUAÇÕES ESTRUTURAIS DE CARTAN): Se $\omega_i^J = \gamma_{ki}^J \theta^k$ são as formas de conexão,

$$\theta^i = d\theta^i + \omega_i^j \wedge \theta^j$$

$$\Omega_i^J = d\omega_i^J + \omega_m^J \wedge \omega_i^m.$$

Diferenciando-se as equações estruturais de Cartan, obtemos

$$d\theta^k = \Omega_i^k \wedge \theta^i - \omega_i^k \wedge \theta^i$$

$$d\Omega_i^k = \Omega_l^k \wedge \omega_l^i - \omega_l^k \wedge \Omega_i^l.$$

A partir da primeira equação acima pode-se obter a identidade

$$\sum_{(jli)} R_{i \quad k l}^j = \sum_{(jli)} (\nabla_j T_{li}^k - T_{ji}^m T_{ml}^k),$$

onde $\sum_{(jli)}$ denota soma sobre todas as permutações cíclicas dos índices j, l e i . Manipulação análoga da segunda equação conduz-nos às identidades de Bianchi:

$$\sum_{(jkl)} \nabla_j R_{i \quad k l}^m = \sum_{(jkl)} T_{kj}^h T_{hl}^m R_{i \quad h l}^m.$$

TEOREMA 6: Sobre uma variedade riemanniana existe uma única conexão linear tal que

$$i) \quad T = 0;$$

$$ii) \quad \nabla g = 0.$$

PROVA: Demonstramos a existência e unicidade da conexão derivando a forma explícita de seus coeficientes. Em coordenadas locais, temos

$$\gamma_{1j}^i - \gamma_{j1}^i = c_{1j}^i$$

e também

$$e_k[g_{ij}] = \gamma_{ki}^1 g_{1j} + \gamma_{kj}^1 g_{i1}$$

Estas duas equações podem ser combinadas para dar

$$\frac{1}{2}(e_k[g_{ij}] + e_i[g_{jk}] - e_j[g_{ki}]) = \frac{1}{2}(c_{ki}^1 g_{1j} + c_{kj}^1 g_{i1} + c_{ij}^1 g_{1k}) + \gamma_{ik}^1 g_{1j}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_{ik}^m &= \frac{1}{2} g^{jm} (e_k[g_{ij}] + e_i[g_{jk}] - e_j[g_{ki}]) + \\ &\quad - \frac{1}{2} (c_{ki}^m + g^{jm} g_{1i} c_{kj}^1 + g^{jm} g_{1k} c_{ij}^1). \end{aligned}$$

A conexão definida por estes coeficientes é chamada conexão de Levi-Civita. No caso do referencial natural, temos

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{jm} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

e

$$\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$$

No caso de um referencial ortonormal, definindo $\gamma_{mik} = g_{im} \gamma_{ik}^j$ e $c_{mik} = g_{jm} c_{ik}^j$, temos

$$\gamma_{mik} = \frac{1}{2} (c_{mik} + c_{imk} + c_{kmi}),$$

pois neste caso $g_{ij} = (\pm)\delta_{ij}$ (o sinal dependendo do índice da métrica). Assim

$$\gamma_{mik} = -\gamma_{kim}$$

para um referencial ortonormal.

As componentes do tensor de curvatura de uma conexão riemanniana, chamado tensor de Riemann, satisfazem as seguintes propriedades:

- i) $R_{i\ k1}^{\ J} = -R_{i\ 1k}^{\ J}$
- ii) $\sum_{(ik1)} R_{i\ k1}^{\ J} = 0$
- iii) $\sum_{(mk1)} \nabla_m R_{i\ k1}^{\ J} = 0$ (identidades de Bianchi)
- iv) $R_{ijk1} = -R_{jik1}$
- v) $R_{ijk1} = R_{k1ij}$

O tensor de Ricci é uma contração do tensor de curvatura. Suas componentes são por definição

$$R_{ik} = R_{i\ kJ}^{\ J}$$

Claramente, $R_{ik} = R_{ki}$. Com relação ao sistema de referência natural,

$$R_{ik} = \partial_k \Gamma_{ji}^J - \partial_j \Gamma_{ki}^J + \Gamma_{km}^J \Gamma_{ji}^m - \Gamma_{jm}^J \Gamma_{ki}^m$$

O traço do tensor de Ricci é chamado curvatura escalar riemanniana

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Contraíndo as identidades de Bianchi, obtemos

$$\nabla_m R_{ik} - \nabla_k R_{im} + \nabla_j R_{i \quad mk}^j = 0$$

que multiplicando por g^{im} fica

$$\nabla_i R_k^i - \nabla_k R + \nabla_j R_k^j = 0.$$

Esta última identidade, chamada identidade de Bianchi contraída, pode ser escrita

$$\nabla_j (R_k^j - \frac{1}{2} \delta_k^j R) = 0.$$

O tensor

$$G_k^j = R_k^j - \frac{1}{2} \delta_k^j R$$

é chamado tensor de Einstein.

1.8. SISTEMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES

1.8.1. EQUAÇÕES EXTERIORES

Primeiramente, vamos considerar quantidades definidas em um ponto $x \in X$ da variedade X ; ocasionalmente - não havendo risco de confusão - o subscrito x será omitido.

Uma solução do sistema de equações exteriores

$$\{\omega_x^\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, N\}$$

é qualquer subespaço $P \subset T_x^*X$ tal que $\omega_x^\alpha(v_1, \dots, v_{p_\alpha}) = 0$ para todo α , sempre que $v_1, \dots, v_{p_\alpha} \in P$; isto é, qualquer subespaço P que anula cada p_α -forma ω_x^α (note que podemos ter formas de graus diferentes compondo o sistema de equações exteriores).

a. UMA ÚNICA EQUAÇÃO EXTERIOR

Seja $\{\theta^j, j = 1, \dots, n\}$ uma base de T_x^*X . A expressão geral para uma dada p -forma ω_x usualmente envolve todos os n elementos desta base. Contudo, é frequentemente possível encontrar um subconjunto linearmente independente $\{\bar{\theta}^\alpha, \alpha = 1, \dots, r\}$ de T_x^*X com menos de n elementos em termos dos quais ω_x pode ser expressa. Seja então r o número mínimo de 1-formas linearmente independentes necessárias para expressar ω_x ; dizemos que ω_x é de posto r (note que $p \leq r \leq n$). O espaço Q_x^* gerado pelo conjunto $\{\bar{\theta}^\alpha, \alpha = 1, \dots, r\}$ é chamado espaço associado de ω_x ; isto é, Q_x^* é o menor subespaço de T_x^*X tal que $\omega_x \in \Lambda^p(Q_x^*)$.

Seja $\tilde{Q}_x$ o espaço dos vetores v tais que $i_v(\theta) = 0$ para toda $\theta \in Q_x^*$. $\tilde{Q}_x$ é um subespaço de T_xX de dimensão $n-r$ e é chamado solução maximal de Q_x^* .

TEOREMA 7: Seja ω_x uma p -forma em $x \in X$ com espaço associado Q_x^* e seja

$$\tilde{Q}_X = \{v \in T_X^*X; i_v(\theta) = 0 \forall \theta \in Q_X^*\}.$$

Então

$$v \in \tilde{Q}_X \Leftrightarrow i_v \omega_X = 0.$$

TEOREMA 8: Seja $\{\theta^i; i = 1, \dots, n\}$ uma base arbitrária de T_X^*X . Então

$$\omega_X = \omega_{I_1 \dots I_p} \theta^{I_1} \wedge \dots \wedge \theta^{I_p}.$$

Colocamos

$$\hat{\theta}^\alpha = \omega_{i_\alpha} \theta^i = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \theta^i,$$

onde os rótulos $\alpha = 1, \dots, \binom{n}{p-1}$ foram colocados em correspondência um a um com os rótulos $i_1, \dots, i_p$. O conjunto $\{\hat{\theta}\}$ expande Q_X^* .

b. SISTEMAS DE EQUAÇÕES EXTERIORES

Seja $\{\omega_X^\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, N\}$ um sistema de N equações exteriores no qual as formas ω_X^α não têm necessariamente o mesmo grau, mas são todas de grau maior do que zero. Qualquer tentativa de encontrar um outro sistema $\{\omega_X^\beta = 0\}$ com as mesmas soluções conduz de maneira natural ao ideal gerado pelo conjunto $\{\omega_X^\alpha\}$:

$$I = \left\{ \omega_X = \sum_{\alpha} \xi_X^\alpha \wedge \omega_X^\alpha; \xi_X^\alpha \in \Lambda(T_X^*X) \right\} \subset \Lambda(T_X^*X).$$

Isto ocorre porque qualquer subespaço de $T_x X$ que anula todos os elementos de $\{\omega_x^\alpha\}$ também anulará todos os produtos exteriores $\xi_x^\alpha \wedge \omega_x^\alpha$ com $\xi_x^\alpha \in \Lambda(T_x^* X)$ arbitrária. Desde que cada ω_x^α é um elemento de I , é também verdadeiro que qualquer subespaço de $T_x X$ que anula cada elemento de I anulará cada ω_x^α . Assim, toda solução de $\{\omega_x^\alpha = 0\}$ anula cada elemento de I e vice-versa.

Um sistema $\{\omega_x^\alpha\}$ [o ideal gerado por $\{\omega_x^\alpha\}$] é chamado completo se qualquer forma que é anulada por toda solução de $\{\omega_x^\alpha = 0\}$ é um elemento de I .

Dois sistemas $\{\omega_x^\alpha = 0\}$ e $\{\omega_x'^\beta = 0\}$ [dois conjuntos $\{\omega_x^\alpha\}$ e $\{\omega_x'^\beta\}$], não necessariamente contendo o mesmo número de elementos, são algebricamente equivalentes, $\{\omega_x^\alpha = 0\} \sim \{\omega_x'^\beta = 0\}$ [$\{\omega_x^\alpha\} \sim \{\omega_x'^\beta\}$], se os conjuntos $\{\omega_x^\alpha\}$ e $\{\omega_x'^\beta\}$ geram o mesmo ideal. Ou seja, dois conjuntos são algebricamente equivalentes se e somente se cada elemento de um pode ser escrito como combinação linear dos elementos do outro e vice-versa. Claramente, dois sistemas algebricamente equivalentes têm as mesmas soluções. Se um sistema é completo, ele é algebricamente equivalente a todo outro sistema que tenha as mesmas soluções.

Seja I o ideal gerado pelo conjunto $\{\omega_x^\alpha\}$. O espaço associado do sistema $\{\omega_x^\alpha = 0\}$ [do ideal I] é o menor subespaço $Q_x^* \subset T_x^* X$ tal que $\Lambda(Q_x^*)$ contém um subconjunto $\{\omega_x'^\beta\}$ que gera I (que é algebricamente equivalente a $\{\omega_x^\alpha\}$). A dimensão de Q_x^* é chamada posto de $\{\omega_x^\alpha\}$ [de I].

Como antes, o espaço $\tilde{Q}_x$ é definido como o espaço de todos os vetores $v \in T_x X$ tais que $i_v(\theta) = 0$ para toda $\theta \in Q_x^*$. O espaço $\tilde{Q}_x$ é melhor caracterizado em termos do ideal I porque se $\{\omega_x^\alpha\} \sim \{\omega_x'^\beta\}$, então $i_v(\omega_x^\alpha) = 0$ para todo α implica que

$$\begin{aligned}
 i_V(\omega_X'^\beta) &= \sum_{\alpha} (\pm) \xi^\alpha \wedge i_V(\omega_X^\alpha) + \sum_{\alpha} i_V(\xi^\alpha) \wedge \omega_X^\alpha \\
 &= \sum_{\alpha} i_V(\xi^\alpha) \wedge \omega_X^\alpha \in I,
 \end{aligned}$$

mas não segue necessariamente que $i_V(\omega_X'^\beta) = 0$. Na verdade temos

TEOREMA 9: Seja I o ideal gerado pelo sistema (ω_X^α) e seja Q_X^* o espaço associado de I . Então

$$v \in \tilde{Q}_X \Leftrightarrow i_V(\omega_X) \in I, \forall \omega_X \in I$$

(equivalentemente, $i_V(\omega_X^\alpha) \in I, \forall \alpha$).

1.8.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXTERIORES

Um sistema de equações diferenciais exteriores sobre X é um conjunto de equações

$$(\omega^\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, N)$$

onde os ω^α são formas diferenciais sobre X . Este sistema é chamado sistema de Pfaff se todas as formas ω^α são 1-formas. Dois sistemas são algebricamente equivalentes se eles geram o mesmo ideal $I \subset \Lambda(X)$.

Uma variedade integral do sistema diferencial $(\omega^\alpha = 0)$ é um par (Y, ϕ) onde Y é uma variedade diferenciável e $\phi : Y \rightarrow X$ é uma aplicação diferenciável tal que

$$\phi^* \omega^\alpha = 0 \quad \forall \alpha.$$

Isto é equivalente a dizer que para cada $y \in Y$ a imagem $\phi_*(T_y Y)$ em $T_{\phi(y)} X$ do espaço tangente em y é uma solução das equações exteriores $(\omega^\alpha_{\phi(y)} = 0)$:

$$\begin{aligned} \phi^* \omega_y = 0 &\Leftrightarrow \phi^* \omega_y(u_1, \dots, u_p) = 0, \quad \forall u_i \in T_y Y \\ &\Leftrightarrow \omega_x(\phi_* u_1, \dots, \phi_* u_p) = 0, \quad \forall u_i \in T_y Y \\ &\Leftrightarrow \omega_x(v_1, \dots, v_p) = 0, \quad \forall v_i \in \phi_*(T_y Y). \end{aligned}$$

Seja U o domínio de uma carta local em X e seja $\{\theta^B\}$ as 1-formas sobre U que geram o espaço associado Q_x^* do sistema exterior $(\omega^\alpha_x = 0)$ em cada ponto $x \in U$. O sistema $\{\theta^B = 0\}$ é chamado sistema de Pfaff associado do sistema diferencial exterior $(\omega^\alpha = 0)$.

O conjunto $\{\theta^B\}$ gera um submódulo do módulo $\Lambda^1(U)$. O posto r do sistema $(\omega^\alpha = 0)$ - e do sistema de Pfaff associado - é a dimensão deste submódulo.

Pode acontecer que em certos pontos de X a dimensão de Q_x^* seja menor do que r . Pontos $x \in X$ onde a dimensão de Q_x^* é igual a r são chamados pontos genéricos (não singulares) do sistema diferencial exterior $(\omega^\alpha = 0)$. Em pontos genéricos a dimensão de $\tilde{Q}_x$ é $n-r$; em pontos não genéricos a dimensão de $\tilde{Q}_x$ é maior do que $n-r$.

O sistema diferencial $(d\omega^\alpha = 0, \omega^\alpha = 0)$ é chamado fecho do sistema $(\omega^\alpha = 0)$. Um sistema diferencial é fechado se ele é algebricamente equivalente ao seu fecho.

Seja I o ideal gerado por (ω^α) , isto é,

$$\omega \in I \Leftrightarrow \omega = \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}, \quad \xi^{\alpha} \in \Lambda(X).$$

dI é o ideal gerado por $(\omega^\alpha, d\omega^\alpha)$

$$(\omega^\alpha) \text{ é fechado } \Leftrightarrow d\omega^\alpha \in I, \forall \alpha \Leftrightarrow dI \subset I.$$

Naturalmente é sempre verdadeiro que $I \subset dI$. Sistemas fechados têm propriedades particularmente "boas". Por esta razão o seguinte teorema é muito conveniente

TEOREMA 10: *Um sistema diferencial $(\omega^\alpha = 0)$ e seu fecho têm as mesmas variedades integrais.*

a. SISTEMAS DE PFAFF

O espaço associado Q_x^* de um sistema de Pfaff $(\theta^\alpha = 0)$ em um ponto x é simplesmente o espaço vetorial gerado pelo conjunto (θ_x^α) . No domínio U de uma carta, qualquer sistema de Pfaff de posto r é algebricamente equivalente a um conjunto de r

1-formas linearmente independentes. Podemos portanto assumir que qualquer sistema de Pfaff de posto r sobre U tem r elementos linearmente independentes.

O espaço Q_X^* contém todas as soluções do sistema $\{\theta^\alpha = 0\}$. Uma variedade integral de $\{\theta^\alpha = 0\}$ é portanto um par (Y, ϕ) tal que $\phi_*(T_y Y) \subset \tilde{Q}_\phi(y)$ para todo $y \in Y$. Uma variedade integral que é subvariedade de X tem então no máximo dimensão $n-r$ na vizinhança de um ponto genérico.

O sistema de Pfaff $\{\theta^\alpha = 0\}$ de posto r é completamente integrável em U se existem r funções diferenciáveis y^α sobre U tais que

$$\{\theta^\alpha = 0\} \sim \{dy^\alpha = 0\}.$$

Desde que a aplicação $x \rightarrow (y^\beta(x))$ é de posto r na vizinhança de um ponto genérico x_0 , as equações

$$y^\beta(x) = y^\beta(x_0)$$

definem uma subvariedade Y^{n-r} de X na vizinhança de x_0 e (Y^{n-r}, i) é uma variedade integral do sistema $\{\theta^\alpha = 0\}$. As funções $y^\alpha(x)$ são chamadas integrais primeiras do sistema.

Um sistema é completamente integrável sobre a variedade X se existe uma cobertura de X por abertos U_i em cada um dos quais o sistema é completamente integrável. Esta definição não implica na existência de uma solução global.

TEOREMA 11 (FROBENIUS): Um sistema de Pfaff $\{\theta^\alpha = 0\}$ é completamente integrável na vizinhança de um ponto genérico se e somente se ele é fechado nesta vizinhança.

TEOREMA 12 (FROBENIUS): Um sistema de Pfaff $\{\theta^\alpha = 0 ; \alpha = 1, \dots, r\}$ é completamente integrável se e somente se

$$d\theta^\alpha \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^r \equiv 0 \text{ para } \alpha = 1, \dots, r.$$

Um sistema de Pfaff de posto r pode ser especificado fornecendo um conjunto de $n-r$ campos vetoriais linearmente independentes $\{v_A\}$ que geram $\tilde{Q}_x$ em cada ponto genérico x . Tal conjunto é chamado sistema de Pfaff de campos vetoriais.

TEOREMA 13: Um sistema de Pfaff de posto r sobre X é completamente integrável numa vizinhança de um ponto genérico se e somente se o colchete de Lie $[v_A, v_B]_x$ pertence a $\tilde{Q}_x$ para todo $x \in U$ e todos os elementos $\{v_A\}$.

TEOREMA 14: Um sistema de Pfaff de posto r sobre X é completamente integrável em uma vizinhança de um ponto genérico x_0 se existe um difeomorfismo φ de uma vizinhança U de x_0 sobre o produto $T^r \times Y^{n-r}$ tal que $(\varphi^{-1}((t) \times Y), i)$ é uma subvariedade integral de dimensão $n-r$ para todo $t \in T$.

b. SISTEMAS CARACTERÍSTICOS

Seja $\bar{S}$ o fecho do sistema $S = \{\omega^\alpha = 0\}$,

$$\bar{S} = \{\omega^\alpha = 0, d\omega^\alpha = 0\}.$$

Se S não contém 0-formas, o sistema característico de S é o sistema de Pfaff associado de $\bar{S}$. Se $S = \{\omega^\alpha = 0, f^\beta = 0\}$, onde f^β são 0-formas, o sistema característico C de S é por definição

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \text{sistema de Pfaff associado de } \{\omega^\alpha = 0, d\omega^\alpha = 0, df^\beta = 0\} \\ \text{as equações } f^\beta = 0 \end{array} \right\}.$$

O posto r do sistema associado de $(\omega^\alpha, d\omega^\alpha, df^\beta)$ é chamado classe de S . Uma variedade integral de C de dimensão $n-r$ é chamada uma variedade característica. Os elementos do espaço $\tilde{Q}$ dos campos vetoriais associados com $\bar{S}$ são chamados campos vetoriais característicos.

TEOREMA 15: Em uma vizinhança U de um ponto genérico:

i) O sistema característico C de um sistema diferencial exterior é completamente integrável

ii) Se $(y^\lambda, \lambda = 1, \dots, r)$ é um conjunto completo de integrais primeiras independentes de C , então o fecho de S é algebricamente equivalente a um sistema cujos membros podem ser expressos em termos dos y^λ e seus diferenciais dy^λ .

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DAS TEORIAS DA FÍSICA

Neste capítulo vamos procurar relacionar os objetos matemáticos introduzidos no capítulo anterior com os conceitos físicos que aparecem nas formulações das teorias "clássicas" de espaço-tempo, especificamente a física newtoniana e a física relativística.

Estas teorias têm em comum o fato de admitirem que todas as ocorrências no mundo físico - os eventos, como são chamados - estão caracterizados "completamente" uma vez que se atribua a cada um deles quatro rótulos, três deles constituindo suas coordenadas espaciais e o restante sua coordenada temporal e supõe-se que o conjunto de todos os eventos constitua uma variedade diferenciável - obviamente de dimensão quatro - chamada variedade espaço-tempo.

Sobre esta variedade (cuja estrutura depende da teoria que se está tratando) tem lugar o movimento das partículas, objetos idealizados caracterizados por uma constante real e positiva chamada massa e descrita por curvas sobre a variedade espaço-tempo.

Naturalmente, o movimento das partículas está governado por determinadas leis, as quais - admite-se - devem

possibilitar-nos inferir a trajetória da partícula a partir das informações básicas que se tenha sobre ela.

No que segue pretende-se estabelecer a estrutura do universo subjacente a cada teoria e também as leis que governam o movimento das partículas.

2.1. FÍSICA CLÁSSICA

2.1.1. O ESPAÇO-TEMPO NEWTONIANO

No contexto da teoria de Newton, espaço e tempo são entidades completamente distintas e somente têm em comum o fato de serem vistos como entes absolutos, isto é, cuja caracterização independe da perspectiva do observador. Este espaço absoluto, admite-se, é um espaço euclidiano tridimensional e chato (curvatura nula) enquanto que o tempo absoluto newtoniano é uma estrutura unidimensional e deve poder ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Todas as características do espaço e do tempo newtonianos podem ser reproduzidas formulando-se a teoria de Newton como uma teoria de espaço-tempo, isto é, uma teoria onde o que tem significado é o ente geométrico chamado espaço-tempo.

Assim, seja M a variedade espaço-tempo de Newton. A primeira condição que deve ser imposta sobre esta variedade é que ela seja chata, isto é, que exista sobre M uma conexão chata D .

Isto significa que para todo $p \in M$ existe uma carta local (U, φ) com $p \in U$ tal que as componentes $R^{\mu}_{\nu\rho}$ da conexão D nesta carta se anulam. A condição de que M seja chata escreve-se

$$R(D) = 0,$$

onde $R(D)$ designa o tensor de curvatura associado à conexão D .

Para caracterizar o tempo newtoniano é necessário definir sobre M uma função $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ que chamaremos função tempo absoluto. O número $t(p)$ designa o tempo do evento p e dados dois eventos p e q , $|t(p) - t(q)|$ é chamado o intervalo temporal entre p e q . Além disto, dizemos que dois eventos p e q são simultâneos se e somente se $t(p) = t(q)$. O conjunto de todos os eventos simultâneos a um dado evento é chamado um plano de simultaneidade absoluto. Cada um destes "planos", que evidentemente simulam o espaço newtoniano, deve ser um espaço chato, euclidiano, de dimensão igual a 3.

Observemos ainda que se $t': M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação tal que $t' = at + b$, onde a e b são constantes reais, então $t'(p) = t'(q)$ quando $t(p) = t(q)$. Assim, as funções do tipo t' definem a mesma noção de simultaneidade que t , embora associem tempo absoluto diferente aos eventos, o que é irrelevante. Em vista desta observação somos levados a caracterizar o tempo absoluto pelo campo de 1-formas $\Omega = dt$, o qual deve satisfazer as condições

$$i) \quad dt|_p \neq 0 \quad \forall p \in M$$

e

$$ii) \quad D(dt) = 0.$$

A condição (i) nos garante a sobrejetividade da aplicação $t:M \rightarrow \mathbb{R}$, o que acarreta, em vista do teorema da função implícita, que para cada $c \in \mathbb{R}$ o conjunto $t^{-1}(c) = \{p \in M/t(p) = c\}$ é uma subvariedade de dimensão 3 da variedade M . Cada uma destas subvariedades tridimensionais é obviamente um plano de simultaneidade absoluto e devemos portanto exigir que sejam espaços chatos, o que segue como consequência da condição (ii).

Para cada $p \in M$ a 1-forma dt induz uma divisão do espaço tangente $T_p M$ em duas classes disjuntas. Diremos que um vetor $v_p \in T_p M$ é tipo tempo se $dt_p(v_p) \neq 0$; caso contrário, se $dt_p(v_p) = 0$, diremos que v_p é tipo espaço. O conjunto dos vetores tipo espaço forma um subespaço de dimensão 3 em $T_p M$ que é tangente ao plano de simultaneidade absoluto em p .

Agora, para cumprir o requisito de que os planos de simultaneidade absolutos sejam espaços euclidianos, devemos definir uma métrica euclidiana sobre cada subespaço de vetores tipo espaço de cada ponto de M . Para isto, introduzimos para cada $p \in M$ uma forma bilinear $\tilde{h}_p: T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições

- i) $\tilde{h}_p$ é simétrica;
- ii) $\tilde{h}_p(dt, \omega) = 0$ para todo $\omega \in T_p^* M$;
- iii) se $\tilde{h}_p(\alpha, \omega) = 0$ para todo $\omega \in T_p^* M$, então $\alpha = kdt$;
- iv) $\tilde{h}_p(\omega, \omega) \geq 0$ para todo $\omega \in T_p^* M$.

As condições (i), (ii) e (iv) previsivelmente estabelecerão a

estrutura métrica que esta aplicação induzirá sobre os triplanos de simultaneidade (a condição (iii) fornece a não degenerescência da métrica). A condição (ii), que indica que esta forma bilinear é singular, é necessária em vista de que não tem sentido nesta teoria a medição de comprimentos ao longo da "direção" do tempo absoluto.

Consideremos agora a aplicação $H_*: T_p^*M \rightarrow T_pM$ que a cada $\alpha \in T_p^*M$ associa o vetor $H_*(\alpha)$ de maneira tal que

$$\omega(H_*(\alpha)) = \tilde{h}_p(\omega, \alpha),$$

para todo $\omega \in T_p^*M$. Note que se tomarmos $\omega = dt$ então para todo $\alpha \in T_p^*M$ teremos

$$dt(H_*(\alpha)) = \tilde{h}_p(dt, \alpha) = 0,$$

de modo que $H_*(\alpha)$ é sempre um vetor tipo espaço em T_pM . Além disto, H_* é uma aplicação linear, mas não é injetora pois $H_*(\alpha) = H_*(\alpha + kdt)$, onde k é uma constante.

Definimos finalmente a aplicação $h_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h_p(u, v) = \tilde{h}_p(\omega, \alpha),$$

com $H_*(\omega) = u$ e $H_*(\alpha) = v$. Esta aplicação está bem definida, pois se $H_*(\omega_1) = u$, $H_*(\omega_2) = u$ e $H_*(\alpha) = v$, então temos

$$h_p(u, v) = \tilde{h}_p(\omega_1, \alpha)$$

$$h_p(u, v) = \tilde{h}_p(\omega_2, \alpha).$$

Mas observemos que $H_*(\omega_1 - \omega_2) = 0$ (por construção); portanto $\omega_1 - \omega_2 = kdt$ e segue que $\tilde{h}_p(\omega_1 - \omega_2, \alpha) = 0$, ou seja, $\tilde{h}_p(\omega_1, \alpha) = \tilde{h}_p(\omega_2, \alpha)$.

Além disto, é fácil verificar a partir das condições (i), (ii), (iii) e (iv) acima que quando restrita a qualquer plano de simultaneidade, a transformação h_p é uma forma bilinear simétrica não degenerada positiva definida, ou seja, h_p é uma métrica euclidiana. Assim, para qualquer plano de simultaneidade $S(p)$ colocamos $g_{S(p)} = h_p$ para todo $q \in S(p)$. Para assegurarmos que a métrica seja compatível com a conexão D sobre M , impomos que $D\tilde{h} = 0$. As equações de campo para $\tilde{h}$ são portanto

$$\tilde{h}_p(dt_p, \omega) = 0 \quad \forall \omega \in T_p^*M$$

e

$$D\tilde{h} = 0.$$

Fica assim caracterizada a geometria dos triplanos de simultaneidade. Resta estabelecer as relações espaciais entre pontos pertencentes a planos de simultaneidade distintos, o que é feito introduzindo-se em M um sistema de referência⁹ privilegiado V , isto é, um campo vetorial tipo tempo tal que

$$i) \quad dt(V) = 1$$

⁹O conceito de sistema de referência será definido mais adiante.

e

$$ii) \quad DV = 0.$$

As curvas $\sigma: I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$) tais que $\sigma_* = V|_\sigma$, ou seja, as curvas integrais de V , são geodésicas de M como segue trivialmente de (ii).

A introdução do campo V permite-nos estabelecer a noção de ocorrer no mesmo lugar do espaço para dois eventos, mesmo que estes eventos se encontrem em planos de simultaneidade distintos. Dizemos que p e q ocorrem no mesmo lugar do espaço quando pertencem à mesma linha integral σ de V .

Além disto, com a introdução de V pode-se estender a noção de comprimento a qualquer vetor $v_p \in T_p M$. Já sabemos que se v_p é tipo espaço, então $\|v_p\|^2 = h_p(v_p, v_p)$. Se v_p não é tipo espaço, consideremos o vetor $\bar{v}_p = v_p - dt_p(v_p)V_p$ que é tipo espaço pois $dt_p(\bar{v}_p) = 0$. Este vetor é a projeção de v_p no subespaço tridimensional tipo espaço de $T_p M$. Definimos o comprimento de v_p como $\|v_p\|^2 = h_p(\bar{v}_p, \bar{v}_p)$. O conjunto dos vetores $v_p \in T_p M$ tais que $\|v_p\| = 0$ formam um subespaço unidimensional de $T_p M$; estes vetores têm a forma $v_p = bV_p$, $b \in \mathbb{R}$, e são chamados vetores nulos.

Finalmente, podemos também estender nossa família de métricas euclidianas $g_{S(p)} = h_q \quad \forall q \in S(p)$ definidas nos planos de simultaneidade para uma única função distância - que chamaremos d - simplesmente "projetando" quaisquer dois pontos p e q no mesmo plano. Note que $d(p, q)$ não define uma métrica quadridimensional. De fato, d é singular, pois $d(p, q) = 0$ quando $p \neq q$ e $p, q \in \sigma$, uma curva integral de V .

Assim, o espaço e o tempo absoluto de Newton são caracterizados pelas seguintes equações de campo

$$R(D) = 0$$

$$D(dt) = 0$$

$$D\tilde{h} = 0$$

$$\tilde{h}(dt, \omega) = 0, \quad \forall \omega \in T_p^*M, \quad \forall p \in M$$

$$DV = 0$$

$$dt(V) = 1.$$

2.1.2. SISTEMAS DE REFERÊNCIA EM M

Antes de formular a dinâmica clássica, precisaremos introduzir alguns conceitos que serão necessários inclusive na formalização da dinâmica relativística.

Inicialmente, definimos uma partícula material como sendo um par (m, γ) , onde $m \in (0, \infty)$ é uma constante chamada a massa da partícula e $\gamma: I \rightarrow M$ é uma curva tipo tempo sobre M . O vetor γ_* tangente à curva γ é a velocidade da partícula e o vetor $a = D_{\gamma_*} \gamma_*$ é a aceleração da partícula. É fácil verificar que $dt(a) = 0$, isto é, a é um vetor tipo espaço.

Precisaremos introduzir as noções de observador e sistema de referência. Para isto, observemos primeiramente que a existência de dt permite-nos definir uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto τ dos vetores tipo tempo de $T_p M$. De fato, se $u \in \tau$, então $dt(u) > 0$ ou $dt(u) < 0$ e diremos no primeiro caso que u

aponta para o futuro e no segundo caso que u aponta para o passado. Dizemos então que u_1 e u_2 são equivalentes (módulo $\hat{t}$) se $dt(u_1)$ e $dt(u_2)$ têm o mesmo sinal. O conjunto quociente $\tau/\hat{t}$ tem dois elementos que chamaremos o futuro e o passado respectivamente.

Agora, definimos um observador em M como uma curva tipo tempo $\sigma: I \rightarrow M$ tal que σ_* aponta para o futuro para todo $p \in \sigma(I)$. Um sistema de referência, por sua vez, é visto como uma coleção infinita de observadores, isto é, um sistema de referência u em $U \subset M$ é um campo vetorial tipo tempo tal que cada uma de suas linhas integrais é um observador. Note, em particular que cada uma das linhas integrais do campo vetorial absoluto V introduzido na seção precedente é um observador. Cada observador de V é dito em repouso absoluto e V é chamado sistema de repouso absoluto. Diremos ainda que um sistema de referência u em M é inercial se e somente se $Du = 0$.

Seja $\langle x^\mu \rangle$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) um sistema de coordenadas em $U \subset M$ tal que $x^0 = t$ e seja $(\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu)$ a base natural de TU associada a estas funções coordenadas. A componente $v^0 = dt(v)$ do vetor $v = v^\mu \partial_\mu$ é chamada componente temporal de v e as componentes $v^i = dx^i(v)$ ($i = 1, 2, 3$) são chamadas componentes espaciais de v . Dizemos que o sistema de coordenadas $\langle x^\mu \rangle$ é naturalmente adaptado a um sistema de referência u se na base natural acima as componentes espaciais de u são todas nulas. Além disto, dizemos que um sistema de coordenadas naturalmente adaptado a um sistema de referência inercial é um sistema de coordenadas inercial se neste sistema tivermos

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = 0$$

$$(dt) = (1, 0, 0, 0)$$

$$(\tilde{h}) = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$$

Um tal sistema sempre existe como é facilmente verificado em vista de que $R(D) = 0$.

PROPOSIÇÃO: $x^0 = t$ é parâmetro afim para geodésicas tipo tempo.

Seja agora $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(t)$, uma curva tipo tempo arbitrária. Curvas arbitrárias correspondem a trajetórias de partículas com aceleração não nula. Recordemos que se γ_* é o vetor tangente à curva γ , a aceleração da curva é $a = D_{\gamma_*} \gamma_*$.

Um sistema de referência não inercial e é dito euclidiano rígido se

i) cada uma de suas linhas integrais satisfaz

$$a = D_{\gamma_*} \gamma_*$$

e

ii) se γ e σ são duas curvas integrais arbitrárias de e , então a distância $d(p, q)$ é a mesma para todo $p \in \gamma$ e $q \in \sigma$.

Em um sistema de referência euclidiano rígido e as componentes $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ da conexão em geral não se anulam e fornecem

informação a respeito da aceleração e da rotação de e .

2.1.3. DINÂMICA CLÁSSICA

a. FORMALISMO NEWTONIANO NO ESPAÇO-TEMPO

No espaço-tempo newtoniano cuja estrutura acabamos de estabelecer tem lugar o movimento das partículas materiais. Assume-se que este movimento é governado pelas seguintes leis:

i) toda partícula sujeita à ação de uma força f tem seu movimento descrito pela equação

$$m D_y^* y_* = f$$

ii) as ações mútuas de dois corpos a e b satisfazem

$$f_{ab}(t) = -f_{ba}(t),$$

onde f_{ab} é a força que a exerce sobre b e f_{ba} é a força que b exerce sobre a .

Na formulação das leis do movimento introduz-se ainda, como é bem conhecido, uma primeira lei do movimento a qual nada mais é que uma afirmação sobre a existência de sistemas de referência inerciais. Este requisito não é exigido no formalismo

que estamos apresentando pois a existência de sistemas de referência inerciais, como afirmamos na seção precedente, está garantida pela imposição de que $R(D) = 0$.

Quando $f = 0$, dizemos que a partícula é livre e notoriamente seu movimento é geodésico. É importante observar que a propriedade de uma curva ser uma geodésica é uma propriedade intrínseca da curva e não depende do sistema de referência ou do sistema de coordenadas aos quais ela é referida.

Com o que foi exposto até aqui, pode-se dizer que a teoria newtoniana está completa. Ou seja, uma vez que conhecemos a estrutura do espaço subjacente ao movimento das partículas e as leis que governam seus movimentos, já temos tudo que se precisa para estabelecer as trajetórias das partículas em qualquer sistema que queiramos estudar.

Entretanto, sobretudo no que diz respeito aos sistemas mais complexos, é claro que o problema de encontrar as trajetórias das partículas pode complicar-se bastante. Muitas das dificuldades que aparecem no tratamento destes sistemas podem ser removidas se fizermos uso do formalismo lagrangeano da dinâmica ao invés do formalismo newtoniano.

O formalismo de Lagrange, a propósito, revela-se especialmente útil na investigação das leis de conservação e toda nossa discussão futura deverá ser feita com base nele, de modo que é conveniente que o desenvolvamos formalmente. Para isto, porém, necessitamos primeiramente restringir as considerações feitas anteriormente ao espaço absoluto newtoniano.

b. FORMALISMO NEWTONIANO NO TRIESPÇO

Seja v um sistema de referência arbitrário sobre M e seja $(\sigma^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ o grupo a um parâmetro de difeomorfismos gerado por v . Definimos uma relação de equivalência em M por

$$p \sim q \text{ (mod } v) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \sigma^\alpha(p) = q;$$

isto é, dois pontos são equivalentes se estão sobre a mesma linha integral de v . O espaço quociente $M/v \equiv S_v$ será chamado triespço relativo ao sistema de referência v .

Seja $\tau_v : M \rightarrow S$ a aplicação canônica que a cada $p \in M$ associa sua classe de equivalência $[p] \in S_v$. A restrição $\tau_v|_{S(p)}$ da aplicação τ_v a cada plano de simultaneidade $S(p)$ é um difeomorfismo, de modo que estão bem definidas as aplicações $\tau_v^\alpha : S_v \rightarrow M$ dadas por

$$\tau_v^\alpha = (\tau_v|_{S(p)})^{-1},$$

onde $S(p)$ denota o plano de simultaneidade absoluto pelo ponto $p \in M$ tal que $t(p) = \alpha$.

As aplicações $(\tau_v^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ induzem uma família $(\hat{h}_v^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ de campos tensoriais 2-covariantes sobre S_v por

$$\hat{h}_v^\alpha = (\tau_v^\alpha)^* h,$$

onde h é como na seção 2.1.1.

Note que $\hat{h}_v^\alpha$ é função diferenciável de α e temos

$$\frac{d\hat{h}_v^\alpha}{d\alpha} = (\tau_v^\alpha)^* \mathcal{L}_v h.$$

De fato, por definição (vamos omitir o subscrito v escrevendo $\hat{h}^\alpha \equiv \hat{h}_v^\alpha$),

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{h}^\alpha}{d\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\hat{h}^{\alpha+\Delta\alpha} - \hat{h}^\alpha}{\Delta\alpha} \right] \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{(\tau^{\alpha+\Delta\alpha})^* h - (\tau^\alpha)^* h}{\Delta\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Entretanto, é fácil ver que as aplicações τ_v^α satisfazem a propriedade:

$$\tau_v^\alpha = \sigma_v^{\alpha' - \alpha} \circ \tau_v^{\alpha'}$$

para todo $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ e portanto

$$(\tau_v^{\alpha+\Delta\alpha})^* = (\tau_v^\alpha)^* \circ (\sigma_v^{\Delta\alpha})^*,$$

de modo que

$$\frac{d\hat{h}^\alpha}{d\alpha} = (\tau^\alpha)^* \left[\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{(\sigma^{\Delta\alpha})^* h - h}{\Delta\alpha} \right] \right],$$

já que $(\tau_v^\alpha)^*$ é uma aplicação diferenciável e linear. O termo entre colchetes é reconhecidamente a expressão da derivada de Lie $\mathcal{L}_v h$, o que demonstra nossa afirmação.

Em particular, se o sistema de referência $\hat{v}$ é tal que $\mathcal{L}_{\hat{v}} h = 0$, então

$$\frac{d\hat{h}^\alpha}{d\alpha} = 0$$

neste sistema, o que significa que efetivamente o tensor $\hat{h}_v^\alpha$ independe do parâmetro α (é "constante").

Os resultados acima podem na verdade ser estendidos a qualquer compo tensorial sobre M , isto é,

PROPOSIÇÃO: Se T é um campo tensorial sobre M e se $(\hat{T}_v^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ são os campos tensoriais arrastados ¹⁰ pelas aplicações $(\tau_v^\alpha)^*$, então

$$\frac{d\hat{T}_v^\alpha}{d\alpha} = (\tau_v^\alpha)^* \mathcal{L}_{\hat{v}} T.$$

Evidentemente, se $\mathcal{L}_{\hat{v}} T = 0$, o tensor $\hat{T}_v^\alpha$ independe do parâmetro α .

¹⁰ O tensor arrastado é aqui definido como o tensor $\hat{T}_v^\alpha$ sobre S_v tal que

$$\hat{T}_v^\alpha(u_1, \dots, u_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = T(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r, \hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_s),$$

para todo $u_i \in TS_v$ ($i = 1, \dots, r$), para todo $\omega_j \in T^*S_v$ ($j = 1, \dots, s$) e onde $\hat{u}_i = (\tau_v^\alpha)_* u_i$ e $\hat{\omega}_j = (\tau_v^\alpha)^* \omega_j$.

É importante notar ainda que no caso em que o sistema de referência $\hat{v}$ é inercial ($Dv = 0$), suas linhas integrais são geodésicas tipo tempo de M . Como t é parâmetro afim para as geodésicas tipo tempo, podemos então parametrizar o grupo de difeomorfismos gerado por $\hat{v}$ pelo próprio tempo t ou mais geralmente por qualquer dos números $t' = at + b$, com a e b constantes reais e $a \neq 0$.

Assim, concluímos que uma vez que a derivada de Lie na direção de um sistema de referência inercial de um campo tensorial arbitrário sobre M se anule, o campo tensorial arrastado é independente do tempo. Em particular, é sempre verdade que se $\hat{v}$ é inercial, então

$$\mathcal{L}_{\hat{v}}h = 0,$$

o que se pode mostrar levando em conta que $Dv = 0$ e $Dh = 0$.

Consideremos agora uma partícula (m, γ) em M . A curva $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S_{\hat{v}}$ tal que

$$\varphi = \tau_{\hat{v}} \circ \gamma$$

será chamada trajetória espacial da partícula em relação ao sistema de referência $\hat{v}$ e o vetor

$$\begin{aligned} \varphi_*(\alpha) &= \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \\ &= \frac{d}{d\alpha} (\tau_{\hat{v}} \circ \gamma)(\alpha) \\ &= (\tau_{\hat{v}})_* \frac{d\gamma(\alpha)}{d\alpha} \\ &= (\tau_{\hat{v}})_* \gamma_*(\alpha) \end{aligned}$$

será chamado trivelocity da partícula em relação ao sistema de referência $\hat{v}$.

Newton define a aceleração de uma partícula como o vetor

$$a^N = \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\alpha^2}(\alpha)$$

que pelo que vimos anteriormente também se pode escrever

$$a^N = (\tau_v)_* \frac{d}{dv} \mathbf{r}_*$$

Além disto, no formalismo newtoniano o parâmetro α é considerado como sendo o próprio tempo, o que somente se verifica se o sistema de referência v é inercial. Assim, a tradução das leis do movimento estabelecidas anteriormente deverá incluir ainda uma primeira lei na qual se estabeleça a existência de sistemas de referência inerciais, o que aqui não decorre automaticamente. Temos então

- i) toda partícula livre da ação de forças mantém o seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme
- ii) toda partícula sujeita à ação de uma força f tem seu movimento descrito pela equação

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = f$$

- iii) as ações mútuas entre dois corpos a e b satisfazem

$$f_{ab} = - f_{ba}$$

Observamos ainda que a aceleração newtoniana não coincide, em geral, com o vetor

$$\hat{a} = (\tau_v)_* D_{\gamma_*} \gamma_* ,$$

a que chamamos triaceleração da partícula em relação ao sistema de referência v .

Para estabelecer a relação entre $\hat{a}$ e a^N , notemos que a derivada de Lie $\mathcal{L}_v u$ de um campo vetorial u na direção de um campo vetorial v pode ser escrita

$$\mathcal{L}_v u = D_v u - D_u v - T(u, v),$$

onde $T(u, v)$ denota a contração do tensor de torção com u e v . Agora levando em conta que

$$D_{u-v}(u+v) = D_u u + D_u v - D_v u - D_v v,$$

obtemos

$$\mathcal{L}_v u = D_u u - D_v v - D_{u-v}(u+v) - T(u, v)$$

e portanto, fazendo $u = \gamma_*$ e aplicando $(\tau_v)_*$,

$$a^N = \hat{a} - (\tau_v)_* D_v v - (\tau_v)_* D_{\gamma_* - v}(\gamma_* + v) - (\tau_v)_* T(\gamma_*, v).$$

c. DINÂMICA LAGRANGEANA

Um sistema dinâmico é uma entidade constituída por

- i) um par $(S, \hat{h})$
- ii) um conjunto $\{(m_{(k)}, \varphi_{(k)}); k = 1, \dots, N\}$ de partículas em S
- iii) um conjunto $\{f_{(k)}(t); k = 1, \dots, N\}$ de campos vetoriais sobre S
- iv) um conjunto $\{\omega_j; j = 1, \dots, m\}$ de campos de 1-formas sobre o produto $S^N = S \times \dots \times S \times \mathbb{R}$,

onde evidentemente S denota o triessaço relativo a algum sistema de referência que por enquanto suporemos inercial, de modo que $\hat{h}$ é a métrica euclidiana deste triessaço. As curvas $\varphi_{(k)} : \mathbb{R} \rightarrow S$ denotam aqui as trajetórias das partículas ao longo de S (em relação ao sistema de referência considerado). Cada um dos campos ω_j é chamado um vínculo.

O espaço de configurações de um sistema dinâmico é definido como uma variedade integral (X, ξ) do sistema de Pfaff

$$\{\omega_j = 0, j = 1, \dots, m\}.$$

No parágrafo 1.8 discutimos as condições que os vínculos devem satisfazer a fim de que exista uma variedade integral do sistema de Pfaff correspondente e não vamos voltar àquela discussão aqui. Simplesmente vamos restringir-nos ao estudo dinâmico cujos sistemas de Pfaff correspondentes sejam completamente integráveis.

Vínculos que dão origem a esta classe de sistemas são chamados **holonômicos**; um vínculo ω sobre S^N é holonômico se e somente se existe uma função $f : S^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$. Note também que a dimensão do espaço de configurações dos sistemas que estudaremos é $n = 3N - m$, que é chamado o número de **graus de liberdade** do sistema.

A curva $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por

$$\varphi = \xi \circ \phi,$$

é chamada **trajetória** do sistema no espaço de configurações, onde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^N$ é dada por

$$\phi(t) = (m_1^{1/2} \varphi_1(t), \dots, m_N^{1/2} \varphi_N(t)).$$

O vetor $\varphi_*(t) \in T_{\varphi(t)}X$, tangente à curva φ no ponto $\varphi(t)$ é chamado **velocidade generalizada do sistema**.

A métrica $\hat{h}$ sobre S induz de maneira natural uma métrica $\hat{h}^N$ sobre S^N , a qual arrastamos para a variedade X pela aplicação ξ e escrevemos

$$h = \xi^* \hat{h}^N.$$

A função $T : TX \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T(\varphi(t), \varphi_*(t), t) = \frac{1}{2} h(\varphi_*(t), \varphi_*(t))$$

é chamada **energia cinética total** do sistema.

A cada um dos campos de forças f_k que compõem o sistema dinâmico podemos associar um campo de 1-formas ω_k por

$$\omega_k = \hat{h}(f_k, \cdot).$$

Dizemos então que o campo f_k é conservativo se existe uma função $V_k : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega_k = -dV_k$. Esta função é chamada energia potencial do campo f_k . A função $V : TX \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(\varphi(t), \varphi_*(t), t) = \sum_{k=1}^N V(\varphi_k(t), \varphi_{k*}(t), t)$$

é chamada energia potencial total do sistema.

A função $L : TX \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L = T - V$$

é chamada lagrangeana do sistema. O par (X, L) onde X é a variedade de configurações de um sistema dinâmico e L é a sua lagrangeana é chamado um sistema lagrangeano. Uma vez conhecidos estes dois "ingredientes", é possível encontrar a trajetória do sistema dinâmico correspondente no espaço de configurações. Para isto, basta levar em conta o princípio de Hamilton que afirma que

PRINCÍPIO DE HAMILTON: De todas as trajetórias possíveis pelas quais um sistema pode evoluir de um ponto a outro no espaço de configurações, será realizada fisicamente

aquela que mantém estacionário o valor do funcional

$$I[\varphi] = \int_{t_a}^{t_b} (L \circ \tilde{\varphi}) dt$$

(onde $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow TX \times \mathbb{R}$ por $t \mapsto (\varphi(t), \varphi_*(t), t)$).

A manipulação matemática deste princípio conduz às equações de Euler-Lagrange que em um sistema de coordenadas $\langle x^i \rangle$ sobre X escreve-se

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

onde $q^i \equiv x^i \circ \varphi$ e $\dot{q}^i \equiv dq^i/dt$ ($i = 1, \dots, N$).

É possível mostrar que as equações de Euler-Lagrange se verificam se e somente se as leis de Newton são válidas (é claro, desde que nos restrinjamos a sistemas cujas forças são deriváveis de potenciais e desde que os vínculos sejam holonômicos). Daqui por diante, então, vamos assumir a validade das equações de Euler-Lagrange a fim de discutir as leis de conservação.

Uma lei de conservação ou uma constante de movimento ou uma integral primeira do movimento é uma função $I: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{dI(\varphi(t), \varphi_*(t), t)}{dt} = 0,$$

isto é, cujo valor permanece inalterado durante a evolução do sistema.

2.2.1 O ESPAÇO-TEMPO RELATIVÍSTICO

Admite-se novamente no contexto da teoria da relatividade que o espaço-tempo tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão 4. Entretanto, espaço e tempo perdem o caráter absoluto que possuíam para dar lugar a um outro ente absoluto: o espaço-tempo. Ou seja, a teoria da relatividade nasce com a concepção de que espaço e tempo são coisas, de certo modo, equivalentes e nenhum deles isoladamente possui uma realidade objetiva, sendo somente possível dar uma caracterização absoluta (independente do observador) ao ente geométrico chamado espaço-tempo.

Outra modificação que se introduz, mas que serve mais para facilitar o estudos dos problemas relativísticos, é a geometrização do campo gravitacional. Observa-se que - pelo menos do ponto de vista formal - não é possível distinguir o problema de uma partícula sujeita à ação de um potencial de natureza gravitacional deslocando-se em um espaço-tempo chato (sem curvatura) do problema de uma partícula livre deslocando-se sobre um espaço-tempo de curvatura diferente de zero (evidentemente relacionada com a forma do potencial que se tenha). Isto leva à idéia de que o campo gravitacional (e por extensão a distribuição de matéria e energia no "universo") estão associados à curvatura da variedade espaço-tempo.

Mas vamos formalizar estas idéias. Introduzimos sobre a variedade espaço-tempo relativística M um campo tensorial 2-covariante, simétrico, não degenerado $g : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ de

assinatura -2 , chamado campo tensorial métrico ou simplesmente métrica, com o qual tornamos possível calcular o comprimento de qualquer vetor do espaço tangente $T_p M$ da variedade M e que torna espaço e tempo conceitos "equivalentes" sob certo aspecto.

Uma variedade na qual esteja definida uma métrica de assinatura -2 é chamada uma variedade lorentziana. As variedades lorentzianas que modelam os espaço-tempos da teoria da relatividade especial e geral são orientadas no tempo. Para introduzirmos este conceito, notemos primeiramente que a métrica g divide os vetores $v \in T_p M$, $p \in M$, em três classes:

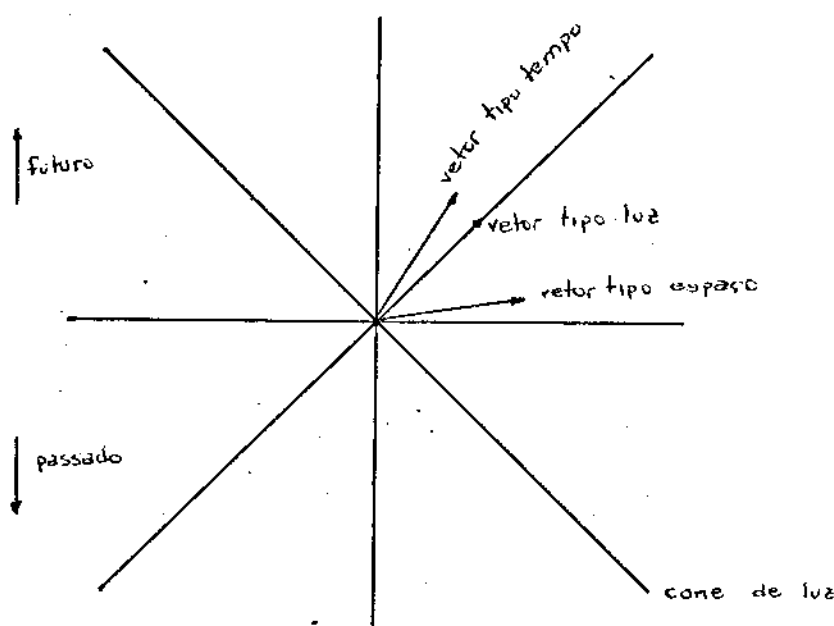
- i) se $g(v,v) > 0$, dizemos que v é tipo tempo
- ii) se $g(v,v) < 0$ ou $v = 0$, dizemos que v é tipo espaço
- iii) se $g(v,v) = 0$, dizemos que v é tipo luz.

Estas noções são estendidas de maneira óbvia a campos vetoriais e a curvas sobre M .

Agora, seja τ_p o conjunto de todos os vetores tipo tempo em $T_p M$. Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em τ_p como segue. Se $u, v \in \tau_p$, $u \sim v$ (mod $\sim$) se e somente se $g(u,v) > 0$. O espaço quociente $\tau_p / \sim$ contém exatamente dois elementos; escolhemos um destes elementos como a direção positiva do tempo e dizemos então que $T_p M$ está orientada no tempo. O elemento escolhido de $\tau_p / \sim$ é chamado futuro e o outro é chamado passado.

Notemos ainda que o conjunto de todos os elementos tipo luz em $T_p M$ forma um cone $\mathcal{L}_p$ que é chamado cone de luz. O cone

do futuro [passado] $\mathcal{L}_p^+$ [$\mathcal{L}_p^-$] é o subconjunto de todos os vetores de $\mathcal{L}_p$ tais que $g(v, l) > 0$ [$g(v, l') < 0$], onde $l \in \mathcal{L}_p^+$ [$l' \in \mathcal{L}_p^-$] e v é um vetor tipo tempo que aponta para o futuro. O conjunto dos vetores tipo tempo em $T_p M$ está localizado dentro do cone de luz, sendo separado do conjunto dos vetores tipo espaço por este cone.



(Fig. 9)

Precisamos exigir que a métrica g sobre M satisfaça as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu},$$

que relacionam o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = g_{\sigma\rho} R^{\sigma}_{\mu}{}^{\rho}_{\nu}$ e a curvatura escalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ com o tensor de energia-matéria $T_{\mu\nu}$, entendendo-se que a curvatura deve ser calculada em relação à conexão de Levi-Civita associada à métrica g .

Esta última exigência significa naturalmente que a distribuição de matéria e energia no sistema que se esteja estudando determina a curvatura do espaço-tempo associado. Obviamente esta exigência é bem mais fraca que aquela feita no caso newtoniano e a estrutura efetiva do universo como um todo fica indefinida visto que não se dispõe do tensor $T_{\mu\nu}$ associado a ele. Pode-se entretanto fazer algumas hipóteses a respeito deste tensor e estudar alguns casos limites; neste trabalho vamos ater-nos a três situações:

a. O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Supõe-se aqui que $T_{\mu\nu} = 0$, isto é, que não existe matéria ou energia no universo. É possível mostrar para este caso que a variedade espaço-tempo associada é chata e que a métrica sobre a variedade tem a forma

$$g = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

b. O ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Pode-se admitir também que toda a matéria do universo esteja concentrada em um único ponto. Neste caso segue das equações de Einstein que para cada ponto de M existe uma carta local $\langle x^\mu \rangle$ na qual o tensor métrico escreve-se

$$g = \left[1 - \frac{K}{r} \right] dt \otimes dt - \left[1 - \frac{K}{r} \right]^{-1} dr \otimes dr - r^2 d\theta \otimes d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi,$$

onde K é uma constante.

c. O UNIVERSO EM EXPANSÃO

Finalmente, com o intuito de mostrar que em certos modelos da teoria da relatividade não admitem uma lei de conservação da energia, vamos incluir ainda a teoria do universo em expansão na qual tem-se o tensor métrico dado por

$$g = dt \otimes dt - R(t)^2 \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i,$$

onde $R(t)$ é uma função de $x^0 = t$.

2.2.2 FÍSICA DA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA

Na física relativística uma partícula é novamente um par (m, γ) , onde m é a massa da partícula e γ uma curva tipo tempo sobre M . As definições de velocidade e aceleração bem como a de sistema de referência também são as mesmas da seção 2.1.2.

No que diz respeito aos sistemas de referência, entretanto, é importante notar que como a variedade espaço-tempo

não é em geral chata, não existirão geralmente sistemas de referência inerciais sobre ela. De fato, o máximo que se pode conseguir em variedades com curvatura diferente de zero são sistemas de referência localmente inerciais.

As mesmas leis enunciadas na seção 2.1.3 continuam válidas aqui, mas em vista da observação acima, o que seria o correspondente da primeira lei de Newton constituiria uma afirmação acerca da existência de sistemas de referência localmente inerciais.

De modo a tornar nossa discussão futura mais uniforme, trataremos também os sistemas relativísticos do ponto de vista do formalismo lagrangeano. Advertimos porém que este tratamento deverá restringir-se aos problemas de uma única partícula (onde este formalismo praticamente coincide com o "newtoniano"), pois é ainda um problema em aberto o tratamento de sistemas compostos por mais de uma partícula.

As equações de Euler-Lagrange escrevem-se aqui:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

onde s é aqui o comprimento de arco medido ao longo da trajetória da partícula e é chamado tempo próprio.

Quanto à lagrangeana da partícula livre relativística, ela será escrita aqui de acordo com Schoenberg (cf. ref. 13) como

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m g_x(\dot{x}, \dot{x}),$$

onde g denota o tensor métrico da variedade. Esta escolha não é a que se costuma fazer usualmente. Na verdade, os textos clássicos de teoria da relatividade postulam a lagrangeana da partícula livre como sendo a função

$$L(x, v_x) = \frac{1}{2} m (g_x(v_x, v_x))^{1/2}.$$

No que diz respeito ao formalismo lagrangeano estas duas escolhas conduzem aos mesmos resultados, pois como se pode verificar facilmente, as equações de Euler-Lagrange são idênticas nos dois casos. Mais do que isto, pode-se tomar para lagrangeana qualquer função homogênea do módulo da velocidade que ainda assim obtém-se os mesmos resultados (do ponto de vista lagrangeano, naturalmente).

Entretanto, surgem diferenças entre as duas escolhas quando se passa à formulação hamiltoniana (que não foi discutida). De fato, verifica-se que a hamiltoniana associada à primeira lagrangeana é proporcional à massa da partícula,

$$H(x, p_x) = \frac{1}{2} m,$$

sendo por isso chamada por Schoenberg de hamiltoniana de massa. Mas se optamos pela segunda lagrangeana, obtemos uma hamiltoniana identicamente nula, de modo que fica sem significado o formalismo hamiltoniano da mecânica.

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DE NOETHER

Já dispomos de todos os elementos de que se necessita para provar o teorema de Noether, o que faremos de duas maneiras diferentes. Na primeira versão o que se pretende principalmente é mostrar que é muito forte a hipótese frequentemente admitida de que a entidade matemática subjacente à noção de simetria de um sistema dinâmico seja o conceito de grupo.

Entretanto, a despeito de se estar, de certo modo, apresentando uma generalização deste conceito de simetria de um sistema dinâmico, não deverá surgir daí, como se verá, nenhum resultado essencialmente novo e no parágrafo seguinte retomaremos a hipótese original de que o conjunto de transformações que deixa o sistema lagrangeano invariante forme um grupo a fim de podermos apresentar uma prova bem mais elegante do teorema usando o conceito de derivada de Lie.

3.1. O TEOREMA DE NOETHER EM CARTAS LOCAIS ¹¹

3.1.1. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Diremos que o sistema lagrangeano (M, L) é invariante por um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ se

$$L(\phi(x), \phi_*(v_x)) = L(x, v_x), \quad \forall (x, v_x) \in T_x M \quad (3.1)$$

e estendemos esta definição naturalmente para o caso em que se tenha um conjunto F de difeomorfismos de M dizendo que (M, L) é invariante sob a ação de F se a igualdade acima é satisfeita para cada $\phi \in F$.

Admite-se em geral que para que se tenha uma lei de conservação para o sistema (M, L) é preciso que exista um conjunto F de difeomorfismos de M que tenha estrutura de um grupo a um parâmetro. Na verdade, contudo, somente é necessário que tal conjunto tenha estrutura de uma família a um parâmetro de difeomorfismos, conforme foi definida no capítulo 1. De fato, mostraremos que

TEOREMA 16 (NOETHER): Se o sistema (M, L) é invariante sob a ação de uma FUPDM $F = \{\phi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$, então o sistema lagrangeano de equações correspondente a L tem uma integral primeira.

¹¹Publicado na Rev. Bras. de Física, vol. 16, n. 4, 1986 (cf. ref. 14).

PROVA: (A) Suponhamos inicialmente que $M = \mathbb{R}^n$. Sejam $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) as funções coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$ e seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow \gamma(t)$, uma curva. Vamos escrever $q^i = x^i(\gamma(t))$, $\dot{q}^i = dq^i/dt$ e $\bar{L} = L \circ T\gamma$, isto é, $\bar{L} = \bar{L}(q, \dot{q})$ onde $q = (q^i)$ e $\dot{q} = (\dot{q}^i)$.

Se a curva γ é solução das equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right] - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^i}(q, \dot{q}) = 0. \quad (3.2)$$

Como estamos supondo que L é invariante sob $\phi^\alpha \in F$, segue que a curva $\phi^\alpha \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ também será solução das equações de Euler-Lagrange para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, definindo

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, t) &\rightarrow \Gamma(\alpha, t) = \phi^\alpha(\gamma(t)) \end{aligned}$$

e escrevendo $Q^i = x^i \circ \Gamma$, $\dot{Q}^i = \partial Q^i / \partial t$ e $\tilde{L} = L \circ T\Gamma$, ou seja, $\tilde{L} = \tilde{L}(Q, \dot{Q})$ com $Q = (Q^i)$ e $\dot{Q} = (\dot{Q}^i)$, segue da equação (3.1) que

$$L \circ T\phi = L \circ T\gamma,$$

ou seja,

$$\tilde{L}(Q^1, \dots, Q^n, \dot{Q}^1, \dots, \dot{Q}^n) \equiv L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \quad (3.3)$$

e então

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^i} &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial q^i} \\
 &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^i \partial q^k} \dot{q}^k,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

pois $\dot{Q}^j = (\partial Q^j / \partial q^k) \dot{q}^k$. Além disto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i} \\
 &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial Q^j}{\partial q^i},
 \end{aligned}$$

pois $\partial \dot{Q}^j / \partial \dot{q}^i = \partial Q^j / \partial q^i$. Desta última equação segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \right] \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \right] \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \frac{\partial^2 Q^j}{\partial q^k \partial q^i} \dot{q}^k.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, substituindo (3.4) e (3.5) em (3.2), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^j} \right] - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^j} = 0, \tag{3.6}$$

que evidentemente são as equações de Euler-Lagrange para a curva $\phi^\alpha \circ \gamma$.

Agora, de (3.5) concluímos ainda que

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \alpha}(Q, \dot{Q}) = 0,$$

pois o segundo membro daquela equação independe de α . Assim,

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^i} \frac{\partial Q^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i} \frac{\partial \dot{Q}^i}{\partial \alpha} = 0$$

e usando (3.6) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i} \right] \frac{\partial Q^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial Q^i}{\partial \alpha} \right] = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial Q^i}{\partial \alpha} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i} \right] = 0$$

e portanto

$$\frac{\partial Q^i}{\partial \alpha}(\alpha, t) \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i}(Q(\alpha, t), \dot{Q}(\alpha, t)) = \text{constante}.$$

Esta equação deve valer para todo α . Em particular, quando $\alpha = 0$,

$\phi^\alpha = \text{id}_M$, obtemos

$$I(q, \dot{q}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \frac{d\phi^i}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} = \text{constante},$$

onde $\phi_\alpha^i(q) = (x^i \circ \phi^\alpha \circ \gamma)(t)$ ($i = 1, \dots, n$).

Isto conclui a primeira parte da prova. Devemos em

seguida mostrar que o mesmo resultado é obtido quando M é uma variedade diferenciável arbitrária.

(B) Seja então $A = \{(U_j, \psi_j), j \in I \subset \mathbb{N}\}$ o atlas maximal de M . Segue que $TA = \{(TU_j, T\psi_j)\}$ é um atlas de TM .

Definimos a aplicação $\bar{L} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ como a representante de L no atlas TA , quer dizer,

$$\bar{L}(T\psi_j(q, \dot{q})) = L(q, \dot{q}) \quad (3.7a)$$

e também

$$\bar{L}(T\psi_k(T\phi^\alpha(q, \dot{q}))) = L(T\phi^\alpha(q, \dot{q})), \quad (3.7b)$$

onde novamente $q = \gamma(t)$ e $\dot{q} = d\gamma/dt$, mas agora com $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva sobre a variedade M .

Como L é invariante sob a ação da FUPDM $F = (\phi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$, $\bar{L}$ será invariante sob a ação da FUPDMⁿ $\bar{F} = (\bar{\phi}^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$, onde $\bar{\phi}^\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a representante de ϕ^α no atlas A , isto é, $\bar{\phi}^\alpha = \psi_k \circ \phi^\alpha \circ \psi_j^{-1}$. De fato, como por hipótese $L(T\phi^\alpha(q, \dot{q})) = L(q, \dot{q})$, segue de (3.7) que

$$\begin{aligned} \bar{L}(T\psi_j(q, \dot{q})) &= \bar{L}(T\psi_k(T\phi^\alpha(q, \dot{q}))) \\ &= \bar{L}((T\psi_k \circ T\phi^\alpha)(q, \dot{q})) \\ &= \bar{L}((T\psi_k \circ T\phi^\alpha \circ (T\psi_j)^{-1})(T\psi_j(q, \dot{q}))). \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} T\psi_k \circ T\phi^\alpha \circ (T\psi_j)^{-1} &= T\psi_k \circ T\phi^\alpha \circ T(\psi_j^{-1}) \\ &= T(\psi_k \circ \phi^\alpha \circ \psi_j^{-1}) \\ &= T\bar{\phi}^\alpha, \end{aligned}$$

de modo que

$$\bar{L}(T\psi_j(q, \dot{q})) = \bar{L}(T\bar{\phi}^\alpha(T\psi_j(q, \dot{q}))) \quad (3.8)$$

como requerido. Se escrevermos $T\psi_j(q, \dot{q}) = (\hat{q}, \hat{\dot{q}})$, (3.8) fica

$$\bar{L}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}) = \bar{L}(T\bar{\phi}^\alpha(\hat{q}, \hat{\dot{q}})).$$

Agora, o fato de $\bar{L}$ ser invariante sob a ação da $FUPDR^n$ $\bar{F} = \{\bar{\phi}^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ acarreta como mostramos em (A) que a quantidade

$$\bar{I}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \hat{\dot{q}}^i} \frac{d\bar{\phi}_\alpha^i}{d\alpha}(\hat{q}) \Big|_{\alpha=0} \quad (3.9)$$

é uma constante de movimento, onde $\bar{\phi}_\alpha^i(\hat{q}) = (x^i \circ \bar{\phi}^\alpha \circ \bar{\gamma})(t)$, sendo $\bar{\gamma}$ a representante de γ no atlas A .

Para completar a prova, restaria mostrar que o resultado obtido independe do atlas usado para parametrizar a variedade M . Isto, contudo, segue imediatamente do fato de termos admitido que A é o atlas maximal de M e portanto contém todos os atlas compatíveis entre si.

3.1.2. A HIPÓTESE GRUPAL

Fica claro na demonstração do teorema que em nenhum momento é necessário exigir que a $FUPDM$ tenha estrutura de grupo. Cabe então perguntar: o que motiva a suposição usual de que o

conjunto de difeomorfismos que deixa o sistema lagrangeano invariante constitua um grupo a um parâmetro?

A resposta, que será esclarecida por um exemplo elementar é que não se obtém resultados com maior generalidade permitindo que L seja invariante sob a ação de uma FUPDM.

Para que nos convençamos disto, consideremos a lagrangeana $L : \mathbb{T}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(x, \dot{x}) \rightarrow \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

onde m é um parâmetro real e positivo e $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reconhecidamente, L representa a lagrangeana de uma partícula livre com dois graus de liberdade. Um conjunto natural de leis de conservação para este sistema é aquele que estabelece a constância do momento linear na direção dos eixos coordenados

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{constante}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{constante}.$$

Estas leis de conservação são consequências da invariância da lagrangeana por translações ao longo das direções x e y . Mais formalmente, o fato de que L é invariante sob a ação do grupo a um parâmetro de difeomorfismos

$$\phi^\alpha(x, y) = (x + \alpha, y) ; \quad \frac{d\phi^\alpha}{d\alpha} = (1, 0),$$

isto é, $L(\phi^\alpha(x,y), \dot{\phi}^\alpha_x(\dot{x},\dot{y})) = L((x,y), (\dot{x},\dot{y}))$, implica que a quantidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\phi^\alpha}{d\alpha} = m\dot{x}$$

é uma constante de movimento. Analogamente, desde que L é também invariante sob a ação do grupo a um parâmetro de difeomorfismos

$$\phi^\beta(x,y) = (x, y + \beta) ; \frac{d\phi^\beta}{d\beta} = (0, 1),$$

segue que a quantidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{d\phi^\beta}{d\beta} = m\dot{y}$$

é conservada no decorrer do movimento da partícula.

Mas com o uso do teorema de Noether podemos estabelecer o resultado ainda mais geral de que a projeção do vetor momento linear ao longo de uma direção arbitrária no plano é constante. De fato, é suficiente observar que a lagrangeana é invariante sob a ação do grupo

$$\phi^\alpha(x,y) = (x + a\alpha, y + b\alpha) ; a, b \text{ constantes.} \quad (3.10)$$

Obtemos então

$$m\dot{x}a + m\dot{y}b = \text{constante.}$$

Agora, vamos considerar uma família a um parâmetro de difeomorfismos ao invés de um grupo. Escrevemos

$$\phi^\alpha(x, y) = (x + f(\alpha), y + g(\alpha)),$$

onde f e g são funções C^1 arbitrárias. É trivial mostrar que a lagrangeana é invariante sob "translações" na direção do vetor

$$\frac{d\phi^\alpha}{d\alpha} = \left[\frac{df}{d\alpha}, \frac{dg}{d\alpha} \right]$$

e o teorema de Noether fornece-nos a lei de conservação

$$m \dot{x} \frac{df}{d\alpha} + m \dot{y} \frac{dg}{d\alpha} = \text{constante}.$$

Contudo, para cada $\alpha = \alpha_0$ (fixo) existe um grupo a um parâmetro de difeomorfismos que reproduz o resultado acima. Na verdade é suficiente colocar $a = df/d\alpha|_{\alpha_0}$ e $b = dg/d\alpha|_{\alpha_0}$ na equação (3.10). Não obtemos portanto nenhum resultado essencialmente novo permitindo que o conjunto $(\phi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ tenha uma estrutura mais geral que a de um grupo a um parâmetro de difeomorfismos.

3.2 O TEOREMA DE NOETHER E A DERIVADA DE LIE

Vamos apresentar agora uma derivação bem mais elegante do teorema de Noether fazendo uso do conceito de derivada de Lie. Para isto precisaremos retomar a hipótese de que a família de

difeomorfismos da variedade que deixa a lagrangeana invariante constitua um grupo.

3.2.1 SISTEMAS AUTÔNOMOS

Seja M a variedade de configuração de um sistema dinâmico cuja lagrangeana é uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual existe um grupo a um parâmetro $G = \{\phi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ de difeomorfismos de TM tal que

$$(L \circ \phi^\alpha)(x, v_x) = L(x, v_x), \quad \forall (x, v_x) \in TM, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(note que para $\phi^\alpha = T\varphi^\alpha$, esta equação traduz a invariância da lagrangeana pela transformação $\varphi^\alpha : M \rightarrow M$). Esta equação será satisfeita se e somente se

$$\mathcal{L}_V L = V[L] = 0, \quad (3.11)$$

onde $\mathcal{L}_V$ denota a derivada de Lie na direção do campo vetorial $V \in T(TM)$, gerador infinitesimal do grupo G :

$$V_{(x, u_x)} = \left. \frac{d\phi^\alpha}{d\alpha}(x, u_x) \right|_{\alpha=0} \quad (3.12)$$

Suponhamos agora que (U, ψ) seja uma carta de M e sejam

$$x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^i(x) = (a^i \circ \psi)(x)$$

as funções coordenadas de M nesta carta, onde $a^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) é a i -ésima função coordenada do $\mathbb{R}^n$.

O par $(TU, T\psi)$ será uma carta de TM com $TU = U \times \mathbb{R}^n$ e $T\psi$ a aplicação tangente de ψ . Vamos definir $\dot{x}^i : T_x U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in U$, por

$$\dot{x}^j(u_x) = u_x[x^i]$$

para todo $x \in U$, isto é, $\dot{x}^i = a^i_* \circ \psi_*$. As funções $X^j : TU \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, 2n$) dadas por

$$X^i(x, u_x) = x^i(x) \quad (3.13a)$$

$$X^{n+i}(x, u_x) = \dot{x}^i(u_x) \quad (3.13b)$$

onde i varia de 1 até n , são as funções coordenadas de TM na carta $(TU, T\psi)$.

Assim, dado um campo vetorial $V \in T(TM)$, podemos escrevê-lo como

$$V_{(x, u_x)} = V^j(x, u_x) \left. \frac{\partial}{\partial X^j} \right|_{(x, u_x)} \quad (3.14)$$

onde $\{\partial/\partial X^j, j = 1, \dots, 2n\}$ é a base de $T(TM)$ na carta $(TU, T\psi)$. Aplicando V à função coordenada $X^1 : TU \rightarrow \mathbb{R}$, vemos que

$$V_{(x, u_x)}[X^1] = V^1(x, u_x)$$

e se supomos que V é como na equação (3.12), teremos também

$$\begin{aligned} V_{(x, u_x)}[X^1] &= \left[\frac{d\phi^\alpha(x, u_x)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] [X^1] \\ &= \frac{d}{d\alpha} (X^1 \circ \phi^\alpha)(x, u_x) \Big|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

de modo que

$$V^1(x, u_x) = \frac{d}{d\alpha} (X^1 \circ \phi^\alpha)(x, u_x) \Big|_{\alpha=0} \quad (3.15)$$

e conseqüentemente a equação (3.14) fica

$$V_{(x, u_x)} = \left[\frac{dX^j(\phi^\alpha(x, u_x))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] \frac{\partial}{\partial X^j} \Big|_{(x, u_x)}.$$

Mas estamos particularmente interessados no caso em que existe um grupo a um parâmetro $g = (\varphi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ de difeomorfismos de M tal que cada $\phi^\alpha \in G$ seja escrito como $\phi^\alpha \equiv T\varphi^\alpha$ com $\varphi^\alpha \in g$. Neste caso (3.15) fica

$$V^1(x, u_x) = \frac{d}{d\alpha} (X^1 \circ T\varphi^\alpha)(x, u_x) \Big|_{\alpha=0}$$

$$\frac{dX^1(\varphi^\alpha(x), \varphi^\alpha_*(u_x))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

e usando (3.13)

$$V^i(x, u_x) = \left. \frac{dx^i}{d\alpha} (\varphi^\alpha(x)) \right|_{\alpha=0} = v^i(x) \quad (3.16a)$$

e

$$\begin{aligned} V^{n+i}(x, u_x) &= \left. \frac{dx^{n+i}}{d\alpha} (\varphi_*^\alpha(u_x)) \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} (\varphi_*^\alpha(u_x) [x^i]) \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} (u_x [x^i \circ \varphi^\alpha]) \right|_{\alpha=0} \\ &= u_x \left[\left. \frac{dx^i}{d\alpha} (\varphi^\alpha(x)) \right|_{\alpha=0} \right] \\ &= u_x [v^i] \equiv \dot{v}^i(u_x) \end{aligned} \quad (3.16b)$$

com i variando de 1 a n e $v^i(x)$ sendo as componentes do vetor $v = \pi_* V$ que gera o grupo g .

Se observamos ainda que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{(x, u_x)} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$$

e que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} \right|_{(x, u_x)} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{u_x}$$

onde $i = 1, \dots, n$, então tiramos

$$v_{(x, u_x)}^i = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x + \dot{v}^i(u_x) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{u_x},$$

de modo que a equação (3.11) fica

$$v^i(x) \frac{\partial L}{\partial x^i}(x, u_x) + \dot{v}^i(u_x) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(x, u_x) = 0. \quad (3.17)$$

Finalmente, vamos restringir-nos aos pontos $q \in M$ que estão sobre a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ que é solução das equações de Euler-Lagrange, admitindo que u_q seja o vetor tangente à curva no ponto $q = \gamma(t)$, isto é, $u_q = d\gamma/dt$. Das equações (3.16) obtemos então

$$v^i(\gamma(t)) = \frac{dx^i}{d\alpha}(\varphi^\alpha(\gamma(t))) \Big|_{\alpha=0}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{v}^i \left[\frac{d\gamma(t)}{dt} \right] &= \left[\frac{d\gamma(t)}{dt} \right] [v^i] \\ &= \frac{dv^i(\gamma(t))}{dt}. \end{aligned}$$

Portanto (3.17) fica

$$v^i(q) \frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) + \frac{dv^i(q)}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) = 0,$$

onde $\dot{q} = d\gamma/dt$ e

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \bigg|_{\dot{q}}$$

Lembrando que as equações de Euler-Lagrange são escritas

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right] - \frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) = 0,$$

obtemos

$$v^i(q) \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right] + \frac{dv^i(q)}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) = 0,$$

ou seja, .

$$\frac{d}{dt} \left[v^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right] = 0 \quad (3.18)$$

e recuperamos o resultado da equação (3.9).

Fica assim estabelecido que uma vez que se possa exibir um grupo a um parâmetro de difeomorfismos da variedade de configuração que deixa a lagrangeana invariante, então existirá uma quantidade que não terá seu valor alterado no decorrer do movimento e cuja expressão coordenada está dada pela equação (3.18). Além disto, conforme mostramos no parágrafo anterior e mesmo em vista do fato de que a equação (3.11) da qual partimos ser uma equação

intrínseca, este resultado é independente do sistema de coordenadas usado para parametrizar a variedade ¹², isto é, uma vez estabelecidas as leis de conservação em uma carta, o resultado estende-se a todas as demais cartas compatíveis com ela.

3.2.2. SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS

Até aqui somente consideramos funções lagrangeanas que não dependem do parâmetro de inclusão da curva que descreve o sistema no espaço de configurações. Vamos agora ser um pouco mais gerais e admitir que a lagrangeana seja uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ que depende explicitamente do parâmetro t .

Suponhamos então que a lagrangeana seja invariante sob a ação de um grupo a um parâmetro $G' = (\phi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ onde agora os ϕ^α são difeomorfismos de $TM \times \mathbb{R}$:

$$(L \circ \phi^\alpha)(x, u_x, t) = L(x, u_x, t) \quad (3.19)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $(x, u_x, t) \in TM \times \mathbb{R}$.

Como antes, a equação (3.19) acima será verificada se e somente se

$$E_{\alpha} L = V[L] = 0,$$

¹²As leis de conservação não são, entretanto, independentes do sistema de referência utilizado. Veja parágrafo 4.2.

onde agora $V \in T(TM \times \mathbb{R})$ é o gerador infinitesimal do grupo G' ,

$$V_{(x, u_x, t)} = \left. \frac{d\phi^\alpha}{d\alpha}(x, u_x, t) \right|_{\alpha=0}. \quad (3.20)$$

Dada uma carta (U, ψ) de M e uma carta (I, θ) de $\mathbb{R}$, vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} P\psi : TU \times I &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \\ (x, u_x, t) &\rightarrow (\psi(x), \psi_*(u_x), \theta(t)). \end{aligned}$$

Claramente, o par $(TU \times I, P\psi)$ será uma carta de $TM \times \mathbb{R}$.

Adaptando definições de $\dot{x}^i$ e $\dot{x}^i$ dadas na seção 3.2.1 e definindo além disto

$$\begin{aligned} x^0 : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow x^0(t) = (\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \theta)(t) \equiv \theta(t), \end{aligned}$$

podemos definir as funções $X^j : TU \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 0, \dots, 2n$) por

$$X^0(x, u_x, t) = x^0(t) \quad (3.21a)$$

$$X^i(x, u_x, t) = \dot{x}^i(x) \quad (3.21b)$$

$$X^{n+i}(x, u_x, t) = \dot{x}^i(u_x), \quad (3.21c)$$

com $i = 1, \dots, n$. Estas são funções coordenadas de $TM \times \mathbb{R}$ na carta $(TU \times \mathbb{R}, P\psi)$ e um campo vetorial $V \in T(TM \times \mathbb{R})$ pode ser escrito como

$$V(x, u_x, t) = V^j(x, u_x, t) \frac{\partial}{\partial X^j} \Big|_{(x, u_x, t)},$$

com $\{\partial/\partial X^j, j = 0, \dots, 2n\}$ sendo a base natural de $T(TM \times \mathbb{R})$ associada à carta $(TU \times \mathbb{R}, \mathcal{P}\mathcal{U})$.

Se V é como na equação (3.20), obtemos então que

$$V^1(x, u_x, t) = \frac{d}{d\alpha} (X^1 \circ \phi^\alpha)(x, u_x, t) \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.22)$$

Se admitirmos agora que cada ϕ^α tem a forma

$$\phi^\alpha(x, u_x, t) = (\varphi^\alpha(x), \varphi_*^\alpha(u_x), \sigma^\alpha(t)),$$

onde cada φ^α pertence ao grupo a um parâmetro $g = \{\varphi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ de difeomorfismos de M e cada σ^α pertence ao grupo $\sigma = \{\sigma^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ de difeomorfismos de $\mathbb{R}$. Com isto, (3.22) fica

$$V^1(x, u_x, t) = \frac{d}{d\alpha} (X^1(\varphi^\alpha(x), \varphi_*^\alpha(u_x), \sigma^\alpha(t))) \Big|_{\alpha=0}$$

e usando (3.21)

$$V^0(x, u_x, t) = \frac{d}{d\alpha} (X^0(\sigma^\alpha(t))) \Big|_{\alpha=0} = \dot{v}^0(t)$$

$$V^i(x, u_x, t) = \frac{d}{d\alpha} (X^i(\varphi^\alpha(x))) \Big|_{\alpha=0} = \dot{v}^i(x)$$

$$V^{n+i}(x, u_x, t) = \frac{d}{d\alpha} (X^{n+i}(\varphi_*^\alpha(u_x))) \Big|_{\alpha=0} = \dot{v}^i(u_x),$$

onde $i = 1, \dots, n$ e $\dot{v}^0(t)$ e $\dot{v}^i(t)$ são as componentes dos

campos vetoriais que geram os grupos g e σ respectivamente. Assim obtemos

$$V(x, u_x, t) = v^0(t) \frac{\partial}{\partial x^0} \Big|_t + v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x + \dot{v}^i(u_x) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{u_x}, \quad (3.23)$$

onde $\partial/\partial x^0|_t = \partial/\partial x^0|(x, u_x, t)$.

Finalmente, vamos escrever $x = q = \gamma(t)$ e $u_x = \dot{q} = d\gamma/dt$ com $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ a curva que descreve o sistema na variedade de configuração. Aplicando (3.23) à lagrangeana no ponto $(q, \dot{q}, t)$, obtemos

$$v^0(t) \frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t) + v^i(q) \frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}, t) + \frac{dv^i}{dt}(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}, t) = 0$$

e levando em conta as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left[v^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}, t) \right] = -v^0(t) \frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t). \quad (3.24)$$

Agora, o membro direito de (3.24) é necessariamente nulo, pois partimos da hipótese de que a lagrangeana L é invariante sob a ação de um grupo a um parâmetro σ de difeomorfismos do "eixo temporal" e pode-se provar utilizando argumentos análogos aos usados nesta seção e na anterior (e, por simplicidade, considerando unicamente que $L(x, u_x, t) = L(x, u_x, \sigma^\alpha(t))$) que se isto acontece, então

$$\frac{\partial L}{\partial t}(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Por outro lado, se a lagrangeana não admite invariância sob a ação de um grupo (ou pelo menos uma família) de difeomorfismos do eixo temporal, então temos $v^0(q) = 0$ e a igualdade

$$\frac{d}{dt} \left[v^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}, t) \right] = 0$$

verifica-se da mesma maneira.

3.2.3 A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Para terminar este capítulo, resta estabelecer ainda uma integral primeira do movimento que não pode ser obtida pelos procedimentos que utilizamos até aqui. Esta lei de conservação, como será visto nos próximos capítulos, está intimamente ligada à lei de conservação da energia, coincidindo com a energia total do sistema em alguns casos particulares.

Consideremos então uma lagrangeana $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dependente explicitamente do "tempo" e seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ a curva que é solução das equações de Euler-Lagrange para esta lagrangeana. Vamos definir a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow TM \times \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(\alpha) = \left[\varphi(\alpha), \frac{d\varphi}{dt}(\alpha), \alpha \right]$$

e através dela construir a aplicação $\tilde{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{L}(\alpha) = L(\gamma(\alpha)),$$

isto é, $\tilde{L} = L \circ \gamma$.

Agora, seja $\varepsilon \in T\mathbb{R}$ um campo vetorial qualquer sobre o fibrado tangente da reta (que não necessariamente "deixe invariante" a função $\tilde{L}$). Naturalmente, se $t : I \rightarrow \mathbb{R}$ é a função coordenada associada a algum intervalo I da reta e se $d/dt|_{\alpha} = d/dt$, $\alpha \in I$, denota o vetor natural associado a esta carta, então para cada $\alpha \in I$ podemos escrever

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon(\alpha) \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha}.$$

Vamos calcular a derivada de Lie de $\tilde{L}$ na direção do campo ε no ponto α . Temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha}[\tilde{L}] &= \varepsilon_{\alpha}[L \circ \gamma] \\ &= (\gamma_* \varepsilon_{\alpha})[L], \end{aligned}$$

onde γ_* denota a aplicação derivada da aplicação γ . Como $\gamma_*(\varepsilon) \in T(TM \times \mathbb{R})$, podemos evidentemente escrevê-lo como

$$\begin{aligned} \gamma_*(\varepsilon_{\alpha}) &= v^i(\gamma(\alpha)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(\alpha)} \\ &\quad + \bar{v}^i(\gamma(\alpha)) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{\frac{d\varphi}{d\alpha}} \\ &\quad + v^0(\gamma(\alpha)) \frac{\partial}{\partial x^0} \Big|_{\alpha}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde utilizamos a mesma notação da seção precedente. Aplicando este vetor a cada uma das funções coordenadas de $TM_x\mathbb{R}$, obtemos as expressões de cada uma de suas componentes:

$$\begin{aligned} v^i(\gamma(\alpha)) &= \gamma_*(\varepsilon_\alpha)[X^i] \\ &= \varepsilon_\alpha[X^i \circ \gamma] \\ &= \varepsilon_\alpha[X^i \circ \varphi] \\ &= \varepsilon(\alpha) \frac{dX^i}{d\alpha}(\varphi(\alpha)) \\ &= \varepsilon(\alpha) \frac{dq^i}{d\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}^i(\gamma(\alpha)) &= \gamma_*(\varepsilon_\alpha)[X^{n+i}] \\ &= \varepsilon_\alpha[X^{n+i} \circ \gamma] \\ &= \varepsilon_\alpha \left[X^i \circ \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \right] \\ &= \varepsilon_\alpha \left[\frac{dX^i}{d\alpha}(\varphi(\alpha)) \right] \\ &= \varepsilon(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{dX^i}{d\alpha}(\varphi(\alpha)) \right] \\ &= \varepsilon(\alpha) \frac{d^2 q^i}{d\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^0(\gamma(\alpha)) &= \gamma_*(\varepsilon_\alpha)[X^0] \\ &= \varepsilon_\alpha[X^0 \circ \gamma] \\ &= \varepsilon_\alpha[\alpha] \\ &= \varepsilon(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, a expressão (3.25) pode ser escrita como

$$\gamma_*(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon(\alpha) q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \varepsilon(\alpha) \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \varepsilon(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

e obtemos então

$$\gamma_*(\varepsilon_\alpha)[L] = \varepsilon(\alpha) \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \varepsilon(\alpha) \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \varepsilon(\alpha) \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

e uma vez que a curva φ satisfaz as equações de Euler-Lagrange,

$$\gamma_*(\varepsilon_\alpha)[L] = \varepsilon(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left[\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] + \varepsilon(\alpha) \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

Notemos agora que por outro lado temos

$$\begin{aligned} \gamma_*(\varepsilon_\alpha)[L] &= \varepsilon_\alpha[L \circ \gamma] \\ &= \varepsilon(\alpha) \frac{d}{d\alpha} (L \circ \gamma)(\alpha) \\ &= \varepsilon(\alpha) \frac{dL}{d\alpha} \end{aligned}$$

Assim, obtemos a identidade

$$\varepsilon(\alpha) \frac{dL}{d\alpha} = \varepsilon(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left[\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] + \varepsilon(\alpha) \frac{\partial L}{\partial \alpha},$$

que também podemos escrever

$$\varepsilon(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left[\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right] = -\varepsilon(\alpha) \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

Admitindo então que a lagrangeana L é invariante sob a ação de um grupo a um parâmetro de difeomorfismos do "eixo temporal", isto é, admitindo que $L(x, v_x, \omega^S(\alpha)) = L(x, v_x, \alpha)$ para

todo $(x, v_x, \alpha) \in TM \times \mathbb{R}$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos que $\partial L / \partial \alpha = 0$ e portanto a função

$$h(q, \dot{q}, \alpha) \equiv \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}, \alpha) - L(q, \dot{q}, \alpha),$$

chamada função energia do sistema, passa a ser uma constante de movimento, desde que, é claro, $\varepsilon(\alpha) \neq 0$ (para todo $\alpha \in \mathbb{R}$). Observe que diferentemente do que ocorreu na seção anterior, aqui é crucial o fato de existir ou não um grupo de difeomorfismos do eixo temporal que deixe a lagrangeana invariante e na verdade se este grupo não existe, obtemos apenas a identidade

$$\frac{dh}{d\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \alpha}.$$

CAPÍTULO 4

LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA CLÁSSICA

Note que toda nossa discussão no capítulo anterior embasa-se na hipótese de existir um grupo a um parâmetro de difeomorfismos que deixa o sistema lagrangeano invariante, mas não se fornece os meios de encontrar este grupo, ou grupos, caso existam.

Nos textos clássicos de mecânica analítica isto é feito de maneira bastante informal observando-se que na eventualidade da lagrangeana ser independente de alguma das coordenadas generalizadas (caso em que se diz que esta coordenada - q^i , digamos - é cíclica), o que significa que $\partial L / \partial q^i = 0$, então a equação de Euler-Lagrange correspondente fica

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] = 0,$$

o que indica que a quantidade $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$, o momento canônico conjugado a q^i , é conservado.

Nas palavras do teorema, o fato da lagrangeana ser independente da coordenada q^i significa, em particular, que ela é

invariante sob a ação do grupo a um parâmetro $g = (\phi^\alpha, \alpha \in \mathbb{R})$ com $\phi^\alpha(q^1, \dots, q^n) = (q^1, \dots, q^i + \alpha, \dots, q^n)$ de modo que a quantidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \left[\frac{d\phi^\alpha}{d\alpha} \right]^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta_i^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i$$

é uma constante de movimento.

Observemos entretanto que por este processo de procurar as coordenadas cíclicas não temos garantia de estar encontrando todos os grupos de difeomorfismos que deixam a lagrangeana invariante. De fato, já no problema da partícula livre somente se obtém por este processo as leis de conservação das componentes do momento linear da partícula que resultam da invariância da lagrangeana frente a translações ao longo dos eixos coordenadas, não se obtendo - pelo menos diretamente - as leis de conservação das componentes do momento angular.

Assim, o que sobretudo se pretende neste capítulo e no seguinte é fornecer uma maneira formal de se encontrar as leis de conservação ($\equiv$ simetrias) que deverão aparecer na evolução de um dado sistema. Faremos isto primeiramente para os sistemas clássicos deixando para o próximo capítulo o trabalho de generalizar os resultados obtidos para os sistemas relativísticos.

4.1. LEIS DE CONSERVAÇÃO E SISTEMAS DE COORDENADAS

Nossa motivação inicial é portanto responder à pergunta: conhecida a lagrangeana de um sistema, como encontrar os grupos de difeomorfismos que a deixam invariante?

A resposta a esta pergunta está contida na derivação do teorema de Noether desenvolvida no capítulo anterior. Não se tem dificuldade em concluir que para encontrar estes grupos basta que se resolva a equação

$$\mathcal{E}_V L = 0, \quad (4.1)$$

que uma vez que L seja conhecida constitui uma equação diferencial envolvendo as componentes do campo vetorial que gera o grupo de difeomorfismos.

A título ilustrativo, vamos resolver a equação acima em alguns casos específicos que são de especial interesse. Vamos ater-nos aqui ao problema da partícula "livre", entendendo por "livre" qualquer sistema (ainda que sujeito a vínculos) não sujeito a potenciais. Neste caso a lagrangeana do sistema coincide com a energia cinética e existe um sistema de coordenadas $\langle q^i \rangle$ no qual podemos escrever

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m h_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (4.2)$$

onde $h_{ij} = h_{ij}(q)$ é uma matriz e $\dot{q}^i = d(q^i \circ \varphi)/dt$ são as componentes da velocidade (generalizada) da partícula (φ naturalmente é a sua trajetória) no sistema de coordenadas $\langle q^i \rangle$ cuja natureza não especificaremos por enquanto. Temos então

$$\mathcal{E}_V L = \frac{1}{2} m (\mathcal{E}_V h_{ij}) \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} (\mathcal{E}_V \dot{q}^i) \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} \dot{q}^i (\mathcal{E}_V \dot{q}^j).$$

Mas $\mathcal{L}_V h_{ij} = V[h_{ij}] = v^k \partial h_{ij} / \partial q^k$ e $\mathcal{L}_V \dot{q}^i = V[\dot{q}^i] = \dot{v}^i$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V L &= \frac{1}{2} m v^k \partial_k h_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} \dot{v}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} \dot{q}^i \dot{v}^j \\ &= \frac{1}{2} m v^k \partial_k h_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} \partial_k v^i \dot{q}^k \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} \partial_k v^j \dot{q}^i \dot{q}^k, \end{aligned}$$

pois $\dot{v}^i = (\partial_k v^i) \dot{q}^k \equiv (\partial v^i / \partial q^k) \dot{q}^k$. Trocando k por i no segundo membro da direita e j por k no terceiro, obtemos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V L &= \frac{1}{2} m v^k \partial_k h_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{kj} \partial_i v^k \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} m h_{ik} \partial_j v^k \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2} m \left[h_{ik} \partial_j v^k + h_{kj} \partial_i v^k + v^k \partial_k h_{ij} \right] \dot{q}^i \dot{q}^j. \end{aligned}$$

Vamos definir $v_j \equiv h_{jk} v^k$, de modo que

$$h_{kj} \partial_i v^k = \partial_i v_j - v^k \partial_i h_{jk}$$

e portanto

$$\mathcal{L}_V L = \frac{1}{2} m \left[\partial_j v_i + \partial_i v_j + v^k \left[\partial_k h_{ij} - \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{kj} \right] \right] \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Assim, (4.1) será verificada se e somente se

$$\partial_i v_j + \partial_j v_i + v^k \left[\partial_k h_{ij} - \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{kj} \right] = 0. \quad (4.3)$$

Esta é então a expressão coordenada da equação (4.1) e é conhecida como equação de Killing. O conjunto de componentes $\langle v^i \rangle$ que são soluções dela formam os vetores de Killing da variedade.

A fim de chegar à solução do sistema (4.3), devemos ser mais específicos e fornecer a natureza das coordenadas q^i , o que é feito estabelecendo-se a forma da matriz $[h_{ij}]$. Analisaremos dois casos neste parágrafo:

a. COORDENADAS CARTESIANAS

A natureza cartesiana das coordenadas fica estabelecida uma vez que os termos diagonais da matriz $[h_{ij}]$ sejam constantes, sendo todos os demais termos nulos. Por simplicidade, tomaremos $h_{ij} = 1$ para todo i , com o que o sistema de coordenadas é, além disto, ortogonal. Vamos escrever $q^i = x^i$ neste sistema e restringir-nos ao caso em que $n = 3$. A equação de Killing (4.3) fica então

$$\partial_j v_i + \partial_i v_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

Para resolver esta equação, lembremos que para a partícula livre no espaço euclidiano devemos esperar a conservação dos momentos angular e linear (além, é claro, da energia que trataremos mais adiante), resultado da invariância da lagrangeana por rotações e translações no espaço. É natural então supor uma solução da forma

$$v_j = \omega_{ij} x^i + \beta_j, \quad (4.5)$$

que substituindo em (4.4) nos leva a

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji},$$

que nos diz que a matriz $[\omega_{ij}]$ deve ser anti-simétrica. Escrevemos então

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_3 x^2 - \omega_2 x^3 + \beta_1 \\ v_2 &= \omega_1 x^3 - \omega_3 x^1 + \beta_2 \\ v_3 &= \omega_2 x^1 - \omega_1 x^2 + \beta_3. \end{aligned}$$

Mas as constantes ω_i, β_i ($i = 1, 2, 3$) são totalmente arbitrárias e para cada escolha de seus valores teremos um conjunto de componentes que formam um vetor de Killing. Entretanto, todos estes vetores possíveis podem ser escritos em termos de apenas seis, os quais são obtidos observando-se que uma vez que os parâmetros ω_i, β_i são independentes podemos manter apenas um deles não nulo de cada vez. Assim,

$$(\omega_1 \neq 0) \quad v_{(1)1} = 0 \quad v_{(1)2} = \omega_1 x^3 \quad v_{(1)3} = -\omega_1 x^2 \quad (4.6a)$$

$$(\omega_2 \neq 0) \quad v_{(2)1} = -\omega_2 x^3 \quad v_{(2)2} = 0 \quad v_{(2)3} = \omega_2 x^1 \quad (4.6b)$$

$$(\omega_3 \neq 0) \quad v_{(3)1} = \omega_3 x^2 \quad v_{(3)2} = -\omega_3 x^1 \quad v_{(3)3} = 0 \quad (4.6c)$$

$$(\beta_1 \neq 0) \quad v_{(4)1} = \beta_1 \quad v_{(4)2} = 0 \quad v_{(4)3} = 0 \quad (4.6d)$$

$$(\beta_2 \neq 0) \quad v_{(5)1} = 0 \quad v_{(5)2} = \beta_2 \quad v_{(5)3} = 0 \quad (4.6e)$$

$$(\beta_3 \neq 0) \quad v_{(6)1} = 0 \quad v_{(6)2} = 0 \quad v_{(6)3} = \beta_3 \quad (4.6f)$$

Agora, para cada um destes conjuntos de componentes teremos uma lei de conservação. Com a lagrangeana dada por (4.2) tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = m h_{ik} \frac{dx^i}{dt},$$

de modo que devem conservar-se, de acordo com o teorema de Noether, as quantidades

$$I_{(\alpha)} = m h_{ik} \frac{dx^i}{dt} v_{(\alpha)}^k = m \frac{dx^i}{dt} v_{(\alpha)i}$$

com os $v_{(\alpha)i}$ dados por (4.6). Segue então que

$$I_{(1)} = m \left[x^3 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^3}{dt} \right] \quad (4.7a)$$

$$I_{(2)} = m \left[x^1 \frac{dx^3}{dt} - x^3 \frac{dx^1}{dt} \right] \quad (4.7b)$$

$$I_{(3)} = m \left[x^2 \frac{dx^1}{dt} - x^1 \frac{dx^2}{dt} \right] \quad (4.7c)$$

$$I_{(4)} = m \frac{dx^1}{dt} \quad (4.7d)$$

$$I_{(5)} = m \frac{dx^2}{dt} \quad (4.7e)$$

$$I_{(6)} = m \frac{dx^3}{dt} \quad (4.7f)$$

são as constantes de movimento do sistema, as quais expressam essencialmente a conservação dos momentos angular e linear no decorrer do movimento da partícula.

b. COORDENADAS ESFÉRICAS

Vamos agora investigar o que acontece se resolvermos tratar o problema da partícula livre em coordenadas esféricas ao invés de cartesianas. Para isto basta que escrevamos a matriz $[h_{ij}]$ como

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

onde estamos redefinindo as coordenadas por $q^1 \equiv r$, $q^2 \equiv \theta$ e $q^3 \equiv \varphi$. Temos

$$\partial_r h_{22} = 2r$$

$$\partial_r h_{33} = 2r \sin^2 \theta$$

$$\partial_\theta h_{33} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta,$$

sendo todas as demais derivadas nulas. As equações de Killing (4.3) ficam portanto

$$\partial_r v_1 = 0 \quad (4.8a)$$

$$\partial_\theta v_1 + \partial_r v_2 - \frac{2}{r} v_2 = 0 \quad (4.8b)$$

$$\partial_\varphi v_1 + \partial_r v_3 - \frac{2}{r} v_3 = 0 \quad (4.8c)$$

$$\partial_\theta v_2 + r v_1 = 0 \quad (4.8d)$$

$$\partial_\varphi v_2 + \partial_\theta v_3 - 2 \cot \theta v_3 = 0 \quad (4.8e)$$

$$\partial_\varphi v_3 + r \sin^2 \theta v_1 + \sin \theta \cos \theta v_2 = 0, \quad (4.8f)$$

ou em termos das componentes "contravariantes", fazendo $v^1 \equiv v_1$, $v^2 \equiv v_2/r^2$ e $v^3 \equiv v_3/r^2 \sin^2 \theta$, podemos escrever

$$\partial_r v^1 = 0 \quad (4.8a')$$

$$r^2 \partial_r v^2 + \partial_\theta v^1 = 0 \quad (4.8b')$$

$$r^2 \sin^2 \theta \partial_r v^3 + \partial_\varphi v^1 = 0 \quad (4.8c')$$

$$r^2 \partial_\theta v^2 + r v^1 = 0 \quad (4.8d')$$

$$r^2 \sin^2 \theta \partial_\theta v^3 + r^2 \partial_\varphi v^2 = 0 \quad (4.8e')$$

$$r^2 \sin^2 \theta \partial_\varphi v^3 + r \sin^2 \theta v^1 + r^2 \sin \theta \cos \theta v^2 = 0. \quad (4.8f')$$

Naturalmente o sistema de equações (4.8) ou (4.8') é muito mais difícil de se resolver que o sistema de equações expresso pela equação (4.4) já que aqui não é possível exprimir as componentes dos vetores de Killing como fizemos em (4.5). Aliás, tampouco parece-nos útil resolver este sistema explicitamente e ao invés disto vamos mostrar uma propriedade da equação de Killing e de suas soluções que indiretamente derivamos na prova do teorema de Noether dada no parágrafo 3.1. A idéia é que, sendo uma equação intrínseca, a equação de Killing independe do sistema de coordenadas usado para parametrizar a variedade. Assim, espera-se que o sistema de equações (4.8) esteja relacionado com o sistema (4.5) pela lei de transformação das coordenadas cartesianas para esféricas. Vejamos se isto acontece efetivamente.

Em coordenadas cartesianas, o vetor de Killing é escrito genericamente como

$$\begin{aligned} v(x^1, x^2, x^3) = & (\omega_3 x^2 - \omega_2 x^3 + \beta_1) \partial_1 + \\ & + (\omega_1 x^3 - \omega_3 x^1 + \beta_2) \partial_2 + \\ & + (\omega_2 x^1 - \omega_1 x^2 + \beta_3) \partial_3 \end{aligned}$$

e queremos suas componentes no sistema $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi)$. Temos

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 &= r \cos \theta \end{aligned}$$

e também

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ r \partial_\theta \\ r \sin\theta \partial_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Assim, as componentes $v^{j'}(r, \theta, \varphi)$ do vetor de Killing expresso em coordenadas esféricas relacionam-se com suas componentes em coordenadas cartesianas de acordo com

$$v^{j'}(r, \theta, \varphi) = A^{j'}_i v^i(x^1, x^2, x^3),$$

onde $[A^{j'}_i] = [(A^{-1})^i_j]$ é a inversa da matriz $A = [A^i_j]$ que aparece em (4.9). Como $A^{-1} = A^t$ (A é ortogonal), concluímos que

$$\begin{aligned} v^{1'}(r, \theta, \varphi) &= (r \sin\theta \sin\varphi \omega_3 - r \cos\theta \omega_2 + \beta_1) \sin\theta \cos\varphi + \\ &+ (r \cos\theta \omega_1 - r \sin\theta \cos\varphi \omega_3 + \beta_2) \sin\theta \sin\varphi + \\ &+ (r \sin\theta \cos\varphi \omega_2 - r \sin\theta \sin\varphi \omega_1 + \beta_3) \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{2'}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} (r \sin\theta \sin\varphi \omega_3 - r \cos\theta \omega_2 + \beta_1) \cos\theta \cos\varphi + \\ &+ \frac{1}{r} (r \cos\theta \omega_1 - r \sin\theta \cos\varphi \omega_3 + \beta_2) \cos\theta \sin\varphi + \\ &+ \frac{1}{r} (r \sin\theta \cos\varphi \omega_2 - r \sin\theta \sin\varphi \omega_1 + \beta_3) \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{3'}(r, \theta, \varphi) &= -(r \sin\theta \sin\varphi \omega_3 - r \cos\theta \omega_2 + \beta_1) \frac{\sin\varphi}{r \sin\theta} + \\ &+ (r \cos\theta \omega_1 - r \sin\theta \cos\varphi \omega_3 + \beta_2) \frac{\cos\varphi}{r \sin\theta}. \end{aligned}$$

Naturalmente, mantendo um dos parâmetros não nulo de cada vez, obteremos

$$(\omega_1 \neq 0) \quad v_{(1)}^{1'} = 0 \quad v_{(1)}^{2'} = \omega_1 \sin \varphi \quad v_{(1)}^{3'} = \omega_1 \cot \theta \cos \varphi \quad (4.10a)$$

$$(\omega_2 \neq 0) \quad v_{(2)}^{1'} = 0 \quad v_{(2)}^{2'} = -\omega_2 \cos \varphi \quad v_{(2)}^{3'} = \omega_2 \cot \theta \cos \varphi \quad (4.10b)$$

$$(\omega_3 \neq 0) \quad v_{(3)}^{1'} = 0 \quad v_{(3)}^{2'} = 0 \quad v_{(3)}^{3'} = -\omega_3 \quad (4.10c)$$

$$(\beta_1 \neq 0) \quad v_{(4)}^{1'} = \sin \theta \cos \varphi \quad v_{(4)}^{2'} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \quad v_{(4)}^{3'} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \quad (4.10d)$$

$$(\beta_2 \neq 0) \quad v_{(5)}^{1'} = \sin \theta \sin \varphi \quad v_{(5)}^{2'} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \quad v_{(5)}^{3'} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \quad (4.10e)$$

$$(\beta_3 \neq 0) \quad v_{(6)}^{1'} = \cos \theta \quad v_{(6)}^{2'} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad v_{(6)}^{3'} = 0. \quad (4.10f)$$

Pode-se verificar que cada um dos conjuntos de componentes em (4.10) satisfaz o sistema de equações (4.8').

Agora, pelo teorema de Noether, as leis de conservação são geradas a partir de

$$I'_{(\alpha)} = m h_{i'k'} \frac{dx^{i'}}{dt} v_{(\alpha)}^{k'}$$

Obtemos então

$$I'_{(1)} = m r^2 \dot{\theta} \sin^2 \varphi + m r^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \quad (4.11a)$$

$$I'_{(2)} = -m r^2 \dot{\theta} \cos \varphi + m r^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \quad (4.11b)$$

$$I'_{(3)} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (4.11c)$$

$$I'_{(4)} = m r \sin \theta \cos \varphi + m r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + m r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \quad (4.11d)$$

$$I'_{(5)} = m r \sin \theta \sin \varphi + m r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + m r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \quad (4.11e)$$

$$I'_{(6)} = m\dot{r}\cos\theta - m\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta. \quad (4.11f)$$

É fácil ver que estas constantes são as expressões em coordenadas esféricas das leis de conservação dos momentos angular e linear dadas em (4.7).

Observe que a única coordenada cíclica que comparece na lagrangeana da partícula livre expressa em coordenadas esféricas é a coordenada φ , de modo que a única lei de conservação que obteríamos pela inspeção da lagrangeana seria (4.11c). Isto mostra, como afirmamos que a identificação das coordenadas cíclicas a fim de estabelecer as leis de conservação que deverão aparecer no estudo de um sistema fornece resultados bastante incompletos.

4.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO E SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Prosseguindo na análise dos problemas clássicos, vamos agora esclarecer a relação existente entre leis de conservação e sistemas de referência.

Note que na derivação do teorema de Noether foi preciso especificar um atlas do fibrado tangente da variedade de configuração, o que significa não apenas a escolha de um sistema de coordenadas sobre ela, mas também a escolha de um sistema de referência.

Observemos ainda que a prova fornecida no capítulo anterior nos garante - como evidenciado no parágrafo precedente - que as leis de conservação são independentes dos sistemas de

coordenadas escolhidos, mas desde que tenhamos o cuidado de referir os resultados aos referenciâis naturais associados a cada carta. Isto é, não se tem garantia de que os resultados independam do sistema de referência escolhido.

Para esclarecer isto, vamos voltar ao exemplo da partícula livre estudado no parágrafo precedente. Por conveniência notacional, vamos escrever a lagrangeana (4.2) como

$$L = \frac{1}{2} m \bar{h}_{ij} \dot{\bar{x}}^i \dot{\bar{x}}^j \quad (4.12)$$

supondo, por simplicidade, que $\langle \bar{x}^i \rangle$ é algum conjunto de coordenadas cartesianas e ortogonais, isto é, a matriz $[\bar{h}_{ij}]$ é "constante" e diagonal (digamos, $[\bar{h}_{ij}] = \text{diag}(+1, +1, +1)$).

Consideremos agora um sistema de referência que se desloque com velocidade v em relação àquele no qual a lagrangeana (4.12) foi escrita e vamos supor que exista um sistema de coordenadas $\langle x^i \rangle$ cujo referencial natural seja justamente este. Mais especificamente, vamos supor que os sistemas de coordenadas $\langle \bar{x}^i \rangle$ e $\langle x^i \rangle$ estejam relacionados por

$$\bar{x}^i = x^i - v^i t.$$

É fácil ver então que a lagrangeana L no novo referencial será

$$L = \frac{1}{2} m h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - m h_{ij} v^i \dot{x}^j + \frac{1}{2} m h_{ij} v^i v^j.$$

Agora, no caso de v^i ($i = 1, 2, 3$) ser constante, a equação de Killing correspondente a esta lagrangeana será

$$\partial_j u_i + \partial_i u_j = 0,$$

($\partial_j \equiv \partial/\partial x^j$), que é formalmente idêntica à equação (4.4) e tem portanto as soluções dadas em (4.6).

Entretanto, embora tenhamos obtido os mesmos vetores de Killing (isto sempre acontece: os vetores de Killing são independentes do sistema de referência), o mesmo não acontece no que diz respeito às leis de conservação. De fato, as integrais primeiras do movimento serão geradas a partir de

$$I_{(\alpha)} = m h_{ij} (\dot{x}^i - v^i) u_{(\alpha)}^j = m (\dot{x}^i - v^i) u_{(\alpha)i},$$

com os $u_{(\alpha)i}$ dados por (4.6). Assim,

$$I_{(1)} = m \left[x^3 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^3}{dt} \right] - m (x^3 v^2 - x^2 v^3),$$

$$I_{(2)} = m \left[x^1 \frac{dx^3}{dt} - x^3 \frac{dx^1}{dt} \right] - m (x^1 v^3 - x^3 v^1),$$

$$I_{(3)} = m \left[x^2 \frac{dx^1}{dt} - x^1 \frac{dx^2}{dt} \right] - m (x^2 v^1 - x^1 v^2),$$

$$I_{(4)} = m \frac{dx^1}{dt} - m v^1$$

$$I_{(5)} = m \frac{dx^2}{dt} - m v^2$$

$$I_{(6)} = m \frac{dx^3}{dt} - mv^3.$$

Evidentemente, estas equações estabelecem a conservação do momento angular e do momento linear da partícula livre conforme vista por um observador que se desloca com velocidade constante em relação ao observador "em repouso". Note que, em particular, se $v^i = dx^i/dt$, todas estas constantes se anulam, o mesmo acontecendo com a lagrangeana. Isto é natural, pois nestas condições estaríamos descrevendo o sistema do ponto de vista de um observador que se desloca com a partícula e portanto não percebe nenhum movimento.

CAPÍTULO 5

LEIS DE CONSERVAÇÃO NA FÍSICA RELATIVÍSTICA

Vamos agora investigar as leis de conservação que têm lugar no contexto das teorias relativísticas. Como se verá, os procedimentos, os resultados e mesmo as interpretações são similares àsquelas da física clássica. Como mencionamos no capítulo 2, vamos ater-nos ao estudo de apenas três teorias: o espaço-tempo de Minkowski, o espaço-tempo de Schwarzschild e a teoria do universo em expansão.

5.1. O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

No capítulo 2 (seção 2.2.2) adotamos para a lagrangeana da partícula livre relativística a função

$$L(x, u_x) = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu}(x) u^\mu u^\nu,$$

de modo que os grupos de difeomorfismos que deixam a lagrangeana são obtidos de

$$\mathcal{L}_V \left[\frac{1}{2} m g_{\mu\nu}(x) u^\mu u^\nu \right] = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2} m \left[V[g_{\mu\nu}] u^\mu u^\nu + g_{\mu\nu} V[u^\mu] u^\nu + g_{\mu\nu} u^\mu V[u^\nu] \right] = 0,$$

que lembrando que

$$V[g_{\mu\nu}] = \sqrt{P} \partial_P g_{\mu\nu}$$

e que

$$V[u^\mu] = u^\rho \partial_\rho v^\mu,$$

onde v^ρ são as componentes do vetor $v = \pi_* V$ que gera o grupo de difeomorfismos da variedade, nos leva a

$$\frac{1}{2} m \left[v^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu v^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu v^\rho \right] u^\mu u^\nu = 0,$$

ou seja, escrevendo $v_\sigma = g_{\sigma\rho} v^\rho$,

$$\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu + v^\rho (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu}) = 0. \quad (5.1)$$

Observe que esta é exatamente a equação de Killing que fornece os geradores infinitesimais do grupo de isometrias da variedade, como citamos no parágrafo 1.6.

Para o caso do espaço-tempo de Minkowski, temos $[g_{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, de modo que o último termo do lado esquerdo se anula e ficamos simplesmente com

$$\partial_{\mu} v_{\nu} + \partial_{\nu} v_{\mu} = 0. \quad (5.2)$$

A solução desta equação é obtida de maneira idêntica à da equação (4.4). Supomos que as componentes v_{μ} tenham a forma

$$v_{\mu} = \omega_{\mu\nu} x^{\nu} + \beta_{\mu}, \quad (5.3)$$

que substituindo em (5.2) acarreta que a matriz $[\omega_{\mu\nu}]$ deve ser anti-simétrica. Escrevemos portanto

$$[\omega_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ -\omega_4 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_5 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_6 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

que substituindo em (5.3) nos dá

$$\begin{aligned} v_0 &= \omega_4 x^1 + \omega_5 x^2 + \omega_6 x^3 + \beta_0 \\ v_1 &= -\omega_4 x^0 + \omega_3 x^2 + \omega_2 x^3 + \beta_1 \\ v_2 &= -\omega_5 x^0 + \omega_3 x^1 + \omega_1 x^3 + \beta_2 \\ v_3 &= -\omega_6 x^0 + \omega_2 x^1 + \omega_1 x^2 + \beta_3 \end{aligned}$$

Assim, mantendo apenas um dos parâmetros diferente de zero de cada vez, obteremos os dez vetores de Killing para este sistema:

$$\begin{array}{llll} v_{(1)0} = 0 & v_{(1)1} = 0 & v_{(1)2} = \omega_1 x^3 & v_{(1)3} = -\omega_1 x^2 \\ v_{(2)0} = 0 & v_{(2)1} = -\omega_2 x^3 & v_{(2)2} = 0 & v_{(2)3} = \omega_2 x^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
v_{(3)0} = 0 & v_{(3)1} = \omega_3 x^2 & v_{(3)2} = -\omega_3 x^1 & v_{(3)3} = 0 \\
v_{(4)0} = \omega_4 x^1 & v_{(4)1} = -\omega_4 x^0 & v_{(4)2} = 0 & v_{(4)3} = 0 \\
v_{(5)0} = \omega_5 x^2 & v_{(5)1} = 0 & v_{(5)2} = -\omega_5 x^2 & v_{(5)3} = 0 \\
v_{(6)0} = \omega_6 x^3 & v_{(6)1} = 0 & v_{(6)2} = 0 & v_{(6)3} = -\omega_6 x^0 \\
v_{(7)0} = \beta_0 & v_{(7)1} = 0 & v_{(7)2} = 0 & v_{(7)3} = 0 \\
v_{(8)0} = 0 & v_{(8)1} = \beta_1 & v_{(8)2} = 0 & v_{(8)3} = 0 \\
v_{(9)0} = 0 & v_{(9)1} = 0 & v_{(9)2} = \beta_3 & v_{(9)3} = 0 \\
v_{(10)0} = 0 & v_{(10)1} = 0 & v_{(10)2} = 0 & v_{(10)3} = \beta_4
\end{array}$$

Agora, uma vez que as leis de conservação são escritas na forma

$$I_{(\alpha)} = m g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} v_{(\alpha)}^\nu = m \frac{dx^\mu}{ds} v_{(\alpha)\mu} \quad (5.4)$$

teremos as seguintes integrais primeiras no movimento de uma partícula livre no espaço-tempo de Minkowski:

$$\begin{aligned}
I_{(1)} &= m \left[x^3 \frac{dx^2}{ds} - x^2 \frac{dx^3}{ds} \right] \\
I_{(2)} &= m \left[x^1 \frac{dx^3}{ds} - x^3 \frac{dx^1}{ds} \right] \\
I_{(3)} &= m \left[x^2 \frac{dx^1}{ds} - x^1 \frac{dx^2}{ds} \right] \\
I_{(4)} &= m \left[x^0 \frac{dx^1}{ds} - x^1 \frac{dx^0}{ds} \right] \\
I_{(5)} &= m \left[x^2 \frac{dx^0}{ds} - x^0 \frac{dx^2}{ds} \right] \\
I_{(6)} &= m \left[x^3 \frac{dx^0}{ds} - x^0 \frac{dx^3}{ds} \right] \\
I_{(7)} &= m \frac{dx^0}{ds} \\
I_{(8)} &= m \frac{dx^1}{ds}
\end{aligned}$$

$$I_{(9)} = m \frac{dx^2}{ds}$$

$$I_{(10)} = m \frac{dx^3}{ds}$$

Para podermos interpretar melhor o resultado acima, observemos que

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dx^i}{dt} = \frac{v^i}{\gamma},$$

onde $t \equiv x^0$ e $\gamma = (1-v^2)^{1/2}$. Segue então que

$$I_{(1)} = -\frac{m}{\gamma} (x^2 v^3 - x^3 v^2) \quad (5.5a)$$

$$I_{(2)} = -\frac{m}{\gamma} (x^3 v^1 - x^1 v^3) \quad (5.5b)$$

$$I_{(3)} = -\frac{m}{\gamma} (x^1 v^2 - x^2 v^1) \quad (5.5c)$$

$$I_{(4)} = \frac{m}{\gamma} (x^1 - v^1 t) \quad (5.5d)$$

$$I_{(5)} = \frac{m}{\gamma} (x^2 - v^2 t) \quad (5.5e)$$

$$I_{(6)} = \frac{m}{\gamma} (x^3 - v^3 t) \quad (5.5f)$$

$$I_{(7)} = \frac{m}{\gamma} \quad (5.5g)$$

$$I_{(8)} = \frac{m}{\gamma} v^1 \quad (5.5h)$$

$$I_{(9)} = \frac{m}{\gamma} v^2 \quad (5.5i)$$

$$I_{(10)} = \frac{m}{\gamma} v^3 \quad (5.5j)$$

Vemos então que as equações (5.5a) até (5.5c) e (5.5h) até (5.5j) estabelecem, respectivamente, a conservação dos momentos angular e linear no movimento da partícula, conforme são definidos na relatividade especial. A equação (5.5g) traduz obviamente a lei

de conservação da energia do sistema e finalmente as equações (5.5d) até (5.5f) são claramente a forma finita das transformações de Lorentz e não têm significado físico óbvio.

5.2 O ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Consideremos agora o universo de Schwarzschild no qual a métrica tem componentes

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{K}{r} \\ g_{11} &= \left[1 - \frac{K}{r} \right]^{-1} \\ g_{22} &= -r^2 \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

sendo todas as demais componentes nulas e onde estamos definindo $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$. A equação de Killing (5.1) para esta métrica desdobra-se em

$$\begin{aligned} \partial_0 v_0 + \frac{K}{2r^2} v^1 &= 0 \\ \partial_0 v_1 + \partial_1 v_0 - \frac{K}{r^2} v^0 &= 0 \\ \partial_0 v_2 + \partial_2 v_0 &= 0 \\ \partial_0 v_3 + \partial_3 v_0 &= 0 \\ \partial_1 v_1 - \frac{K}{2r^2} \left[1 - \frac{K}{r} \right]^{-2} v^1 &= 0 \\ \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 + 2rv^2 &= 0 \\ \partial_1 v_3 + \partial_3 v_1 + 2r \sin^2 \theta v^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\partial_2 v_2 - r v^1 = 0$$

$$\partial_2 v_3 + \partial_3 v_2 + 2r^2 \sin\theta \cos\theta v^3 = 0.$$

O sistema de equações acima é novamente resolvido admitindo-se que sua solução tenha a forma dada em (5.3). Obtém-se

$$v^0 = \beta_3 = \omega_0$$

$$v^1 = 0$$

$$v^2 = \omega_2 \cos\varphi - \omega_1 \sin\varphi$$

$$v^3 = -\cot\theta (\omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi) + \omega_3.$$

Esta solução depende unicamente dos quatro parâmetros $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ e ω_3 e obtemos então apenas quatro vetores de Killing, mantendo apenas um destes parâmetros não nulo de cada vez:

$v_{(1)}^0 = \omega_0$	$v_{(1)}^1 = 0$	$v_{(1)}^2 = 0$	$v_{(1)}^3 = 0$
$v_{(2)}^0 = 0$	$v_{(2)}^1 = 0$	$v_{(2)}^2 = -\omega_1 \sin\varphi$	$v_{(2)}^3 = -\omega_1 \cot\theta \cos\varphi$
$v_{(3)}^0 = 0$	$v_{(3)}^1 = 0$	$v_{(3)}^2 = \omega_2 \cos\varphi$	$v_{(3)}^3 = -\omega_2 \cot\theta \sin\varphi$
$v_{(4)}^0 = 0$	$v_{(4)}^1 = 0$	$v_{(4)}^2 = 0$	$v_{(4)}^3 = \omega_3$

As leis de conservação são geradas novamente a partir de (5.4) e se escrevem:

$$\begin{aligned}
 I_{(1)} &= m \left[1 - \frac{K}{r} \right] \frac{dt}{ds} \\
 I_{(2)} &= mr^2 \left[\sin\varphi \frac{d\theta}{ds} + \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} \right] \\
 I_{(3)} &= mr^2 \left[\cos\varphi \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} \right] \\
 I_{(4)} &= mr^2 \sin\theta \frac{d\varphi}{ds}
 \end{aligned}$$

Pode-se verificar a partir da solução das equações de geodésicas para o espaço-tempo de Schwarzschild que não há perda de generalidade em se admitir $\theta = \pi/2$ (constante). Fazendo isto, restam apenas duas leis de conservação

$$I_{(1)} = m \left[1 - \frac{K}{r} \right] \frac{dt}{ds} \quad (5.6a)$$

$$I_{(2)} = mr^2 \frac{d\varphi}{ds} \quad (5.6b)$$

Para podermos interpretar estas leis de conservação, notemos que o comprimento de arco pode ser escrito

$$(ds)^2 = g_{00}(dt)^2 \left[1 - \frac{(dl)^2}{g_{00}(dt)^2} \right],$$

onde $g_{00} = 1 - K/r$ e $(dl)^2 = (1 - K/r)^{-1}(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$. Definindo agora

$$d\bar{s} = g_{00}^{1/2} dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= g_{00}(dt)^2 \left[1 - \left[\frac{dl}{d\bar{s}} \right]^2 \right] \\ &= (1 - v^2) g_{00}(dt)^2 \\ &= (1 - v^2) (d\bar{s})^2 \end{aligned}$$

O comprimento $d\bar{s}$ é o tempo próprio medido pelos relógios em repouso no campo e portanto $v = dl/d\bar{s}$ é a velocidade da partícula conforme vista por um observador em repouso no campo. As equações (5.6) podem então ser escritas

$$I_{(1)} = \frac{m}{(1-v^2)^{1/2}} \left[1 - \frac{K}{r} \right]^{1/2} \quad (5.6a')$$

$$I_{(4)} = \frac{m}{(1-v^2)^{1/2}} r^2 \frac{d\varphi}{ds} \quad (5.6b')$$

A equação (5.6b') estabelece a conservação do momento angular da partícula no referencial em repouso no campo. A equação (5.6a'), no caso em que $v \ll 1$ e na presença de um campo gravitacional fraco (caso em que $g_{00}^{1/2} = 1 - K/r$), fica

$$I_{(1)} = m + \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K m}{r}$$

e não há dúvida de que esta equação estabelece a conservação da energia do sistema.

5.3. A TEORIA DO UNIVERSO EM EXPANSÃO

Vamos finalmente analisar o espaço-tempo cujas componentes da métrica são

$$g_{00} = 1$$

e

$$g_{ii} = -R^2(t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

sendo todas as demais componentes nulas.

Para este sistema as equações de Killing (5.1) são escritas

$$\begin{aligned}\partial_0 v_0 &= 0 \\ \partial_0 v_j + \partial_j v_0 - 2R\dot{R}v^j &= 0 \\ \partial_i v_j + \partial_j v_i &= 0 \quad (i \neq j) \\ \partial_i v_i - R\dot{R}v^0 &= 0,\end{aligned}$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ e $\dot{R} = dR/dt$.

A solução da equação acima está dada por

$$\begin{aligned}v_0 &= 0 \\ v_i &= R^2 \omega_{ij} x^j + R^2 \beta_j,\end{aligned}$$

com $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Segue portanto que são conservadas as quantidades

$$I_{(i)} = m R^2 \varepsilon_{ijk} x^j \frac{dx^k}{ds} \quad (5.7a)$$

$$I_{(i+3)} = m R^2 \frac{dx^i}{ds} \quad (5.7b)$$

Reconhece-se facilmente que as equações acima estabelecem respectivamente a conservação dos momentos angular e linear respectivamente no decorrer do movimento da partícula livre.

Os três modelos de universo que estudamos acima são bastante interessantes. Note que nos restringimos a analisar neles o problema da partícula livre, de modo a obter o número máximo

possível de leis de conservação. No espaço-tempo de Minkowski obtivemos dez leis de conservação, o que - diga-se de passagem - é o número máximo de leis de conservação que se pode obter em qualquer modelo da teoria da relatividade. No espaço-tempo de Schwarzschild, ficamos essencialmente com apenas duas quantidades conservadas e finalmente na teoria do universo em expansão este número subiu para seis.

Mas o que é sobretudo importante verificar é que esta última teoria difere das duas primeiras pelo fato de não aparecer aqui uma lei de conservação da energia.

Como vimos no capítulo 3, o que estabelece a conservação ou não da energia de um sistema é a invariância da lagrangeana por "translações" na "direção" do tempo, ou seja, no contexto da teoria da relatividade, a energia é conservada se e somente se a variedade admitir um vetor de Killing na direção do tempo. A teoria do universo em expansão é claramente um exemplo em que este vetor não existe, não havendo portanto uma lei de conservação da energia nesta teoria.

CONCLUSÃO

Na física da partícula clássica são muitos os exemplos que se pode fabricar onde não se verifica a conservação do momento angular ou do momento linear ou até mesmo da energia. Entretanto - assumindo-se a validade dos postulados da física clássica - a conservação da energia total do universo é algo que sempre se verifica, pois sempre existe um vetor de Killing na "direção" do tempo - o próprio campo vetorial absoluto V .

Mas quando se passa à teoria da relatividade, como vimos, chega-se à conclusão surpreendente de que certos modelos da teoria não admitem um princípio de conservação da energia. Quer dizer, na teoria da relatividade surge a possibilidade de não ser conservada a energia total do universo.

Diante desta constatação, abrem-se dois caminhos. Ou simplesmente aceitamos este resultado e abaixamos definitivamente o status da "lei" de conservação da energia ao de um simples instrumento teórico, sem uma significação mais profunda (e com o qual não se pode contar sempre), ou então formulamos uma nova teoria onde a energia seja conservada.

Optando-se pelo segundo caminho, possivelmente surgiria alguma explicação do porquê da teoria da relatividade geral prever a não conservação da energia. Parece-nos (se é que verdadeiramente a energia se conserva) que isto se deva ao fato de que quando se geometriza o campo gravitacional fica perdido o seu "conteúdo energético", isto é, a energia de origem gravitacional.

Colocando de outro modo, estamos dizendo que é possível que de fato a natureza realize a teoria do universo em expansão, por exemplo, mas que de alguma fonte deve estar sendo retirada a energia com que se sustenta esta expansão, de modo que precisamente a soma da energia total do universo com a energia total desta fonte seja o que se conserva efetivamente.

B I B L I O G R A F I A

1. R. Abraham, J. E. Marsden - *Foundations of Mechanics*
Benjamin-Cummings, London, 1978
2. J. L. Anderson - *Principles of Relativity Physics*
Academic Press, New York, 1967
3. V. I. Arnold - *Mathematical Methods of Classical Mechanics*
Springer-Verlag, New York, 1978
4. R. L. Bishop, R. J. Crittenden - *Geometry of Manifolds*
Academic Press, New York, 1964
5. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick -
Analysis, Manifolds and Physics
North-Holland, Amsterdam, 1982
6. W. R. Davis - *Classical Fields, Particles and Theory of Relativity*
Gordon & Breach, New York, 1970
7. H. Goldstein - *Classical Mechanics*
Addison-Wesley, Massachusetts, 1981
8. R. Hermann - *Differential Geometry and the Calculus of Variations*
Academic Press, New York, 1968
9. J. L. Lopes - *Lectures on Symmetries*
Gordon & Breach, New York, 1969
10. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler - *Gravitation*
W. H. Freeman, San Francisco, 1973
11. R. K. Sachs, H. Wu - *General Relativity for Mathematicians*
Springer-Verlag, New York, 1977

12. M. E. F. Scanavini - *Covariância, Invariância e Princípio de Relatividade*
Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, outubro 1986
13. M. Schoenberg - *Time and Mass in Relativity*
Acta Physica Austriaca
14. Q. A. G. Souza, W. A. Rodrigues - *A Comment on the Proof of Noether's Theorem in Smooth Manifolds*
Rev. Bras. Física, vol. 16, n. 4, 1986
15. E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda - *Classical Dynamics: A Modern Perspective*
John Wiley & Sons, New York, 1974
16. A. Trautman, F. Pirani, H. Bondi - *Lectures on General Relativity*
Gordon & Breach, New York, 1964
17. C. von Westenholz - *Differential Forms in Mathematical Physics*
North-Holland, Amsterdam, 1978