

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

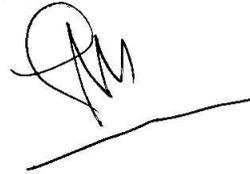
Geometria do Espaço - Tempo no Interior de um
Sistema em Transição de Fases.

José Luis Bernardo Diaz Polanco

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Este exemplar corresponde à redação final
da Tese de mestrado defendida pelo aluno
José Luis Bernardo Diaz Polanco e aprovada pela comissão
Julgadora

13-05-2008



UNICAMP

IFGW

Campinas, São Paulo

14 de Maio de 2008

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

D543g

Diaz Polanco, José Luis Bernardo

Geometria do espaço-tempo no interior de um sistema em transição de fases / José Luis Bernardo Diaz Polanco. – Campinas, SP : [s.n.], 2003.

Orientador: Patrício Aníbal Letelier Sotomayor.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Transições de fase. 2. Relatividade geral (Física).
3. Geometria. I. Sotomayor, Patrício Aníbal Letelier.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** Space-time geometry for a system in phase transition
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Phase transitions
 2. General relativity (Physics)
 3. Geometry
- **Área de concentração:** Relatividade e Gravitação
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**

Prof. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor
Prof. Samuel Rocha de Oliveira
Prof^a Carola Dobrigkeit Chinellato
- **Data da defesa:** 16.06.2003
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE JOSÉ LUIS BERNARDO DIAZ POLANCO – RA 006625 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16/06/2003.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor (Orientador do Candidato) –
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira – IMECC/UNICAMP

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato – IFGW/UNICAMP

Dedico a formalidade desta tese a meu Pai.

O esforço dedico a minha mãe.

A beleza matemática nela, para minha amada
Beatriz.

Para meus irmãos dedico tudo o que aprendi.

Agradecimentos

Um eterno agradecimento a quem tanto se sacrificou nesta aventura, minha amada esposa e amiga, Betty. Sem ela estas folhas não existiriam.

À minha família, pela educação e o apoio que recebi deles: meu pai Bernardo, minha mãe Luisa, meus irmãos Pedro e Sandra, minhas avós Lastenia e Charito e todos meus tios e primos.

Fundamental foi Patricio, que com sua orientação direta e cheia de conhecimento, conseguiu que neste momento possa sentir-me em completa conformidade com tudo o que aprendi de meu trabalho... ‘Gracias Profe’.

Um especial agradecimento para a professora Carola pela sua ajuda na correção da tese. Para todos meus amigos, com os quais compartilhei momentos muito agradáveis. Em especial, para meus amigos Max e Seba, que em grande parte, são responsáveis diretos pela minha aventura aqui no Brasil. Para Andres e José, por sua amizade e todas suas derrotas no “futebol”. Para os companheiros de grupo, Duda, Rafael Piccin, Cristian Ghezzi, Cristiano, Daniel, Rafael, Max, e Samuel, pelo conhecimento compartilhado nestes dois últimos anos.

Para meus amigos do IFGW, Walter, Pedro, Enver, Roddy, Ali, Rogério, Julio, Pablo, Carlos, Ricardo, R.Sato, F.Sato, Nury, Felipe, Alberto, a galera esportiva das sextas feiras, e tantos outros como meus ‘compadres’ e amigos Sara e Cristian, pela sua amizade.

Quero agradecer sinceramente ao CNPQ que me apoiou economicamente para que eu pudesse desenvolver minha pesquisa no IFGW.

Conteúdo

Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Relatividade geral	3
1.1 Equação de Einstein para o espaço livre	3
1.2 Tensor de Energia-Momentum	4
1.2.1 Tensor para o Campo de Energia	4
1.2.2 Inclusão de forças	6
1.2.3 Equações de campo num espaço não vazio.	8
1.3 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov	11
2 Gases Reais	16
2.1 Equação de estado para um sistema de partículas idênticas.	17
2.2 Potencial de interação de Sutherland.	20
2.3 Lei dos estados correspondentes	22
2.4 Cálculo da pressão de coexistência de fases.	24
2.5 Equação de estado para um sistema em transição de fase gás-líquido	26
2.5.1 Região do gás	26
2.5.2 Região da interface gás-coexistência	27
2.5.3 Região de coexistência gás-líquido	28
2.5.4 Região da interface líquido-coexistência	29
2.5.5 Região do líquido	29
2.5.6 Forma final da equação de estado	30

3	Geometria de uma transição de fases. Resultados.	32
3.1	Colocação do problema e procedimento	32
3.2	Resumo do Procedimento	33
3.3	Validação do Código.Exemplo do gás ideal.	34
3.4	Resolução da equação TOV para um sistema em transição de fases.	38
3.4.1	Distribuição de matéria no interior da estrela em transição de fases	41
3.4.2	Geometria do espaço-tempo no interior da estrela em transição de fases	44
3.5	Análise de um sistema a pressão constante	49
3.5.1	Resultados finais	52
4	Conclusão	59
	Bibliografia	61

Resumo

São apresentadas soluções numéricas do sistema de equações diferenciais de Tolman-Oppenheimer-Volkov para um gás de partículas em transição de fases, no contexto da relatividade geral, encontrando a estrutura do espaço-tempo associada com a transição de fases. Para isto assumimos que o gás está formado por partículas autogravitantes, idênticas, com simetria esférica, e cujo tensor de energia-momentum é do tipo fluido perfeito. As interações internas do gás são representadas por uma equação de estado capaz de descrever uma transição de fase do tipo gás-líquido. Um gás estacionário deste tipo poderia representar uma estrela em equilíbrio hidrodinâmico.

Concluimos que a termodinâmica não perde sentido no contexto da relatividade geral, apresentando claramente que a transição de fases acontece só numa superfície esférica e concêntrica no interior da estrela, na qual a curvatura do espaço-tempo reflete, mais uma vez, o mesmo comportamento que a distribuição interna de matéria na estrela, neste caso, uma descontinuidade na região de coexistência de fases.

Abstract

We present numerical solutions for the differential equations the Tolman-Oppenheimer-Voltov for a gas particles in phase transition in the general relativity background, obtaining the space-time structure involved in the phase transition. For this purpose, we consider the gas as formed by identical self-gravitating particles with spherical simetry and whose momentum- energy tensor is do like perfect fluid type. The internal interactions of the gas are represented by a state equation that has the property of describing gas-liquid phases transition. A stacionary gas like this is supposed to represent a star in hydrodynamic equilibrium. We conclude that there is no conflict of using thermodynamics in general relativity context, showing cleary that the phase transtition happens only in a spherical shell centered in the star geometrical center, about what the space-time curvature illustrates, once more, the same behaviour expect by the distribution of matter inside the star, in such case, a descontinuity in the region of phase's coexistence.

Introdução

A história de uma partícula no nosso universo é muito cativante. Assim também é pensar que ela traz consigo as informações de que precisamos para entender o que aconteceu no suposto começo e talvez que ela poderia nos falar o que acontecerá no futuro remoto. Os caminhos que ela percorreu no decorrer de sua vida não foram aleatórios, eles foram estabelecidos, a cada instante, pelas restantes partículas no universo, movimentando-se através de geodésicas que a conduzem inapelavelmente ao encontro de outras partículas, como se fosse uma reunião marcada desde o começo do tempo.

Um número suficientemente grande de partículas reunidas no espaço, como nuvens de gás, interagem gravitacionalmente, atraindo-se cada vez mais, dando origem ao que se conhece como colapso gravitacional. O colapso se vê interrompido quando as pressões internas equilibram a força gravitacional, fazendo com que o sistema fique hidrodinamicamente estável, pelo menos por algum tempo, assim que houvesse nascido. É aqui onde vamos nos deter. A estrela em equilíbrio hidrodinâmico apresenta regiões, que podem ser caracterizadas pelas suas diferentes densidades. Assim podemos considerar que para diferenças suficientemente grandes nas densidades das regiões, estas caracterizam regiões líquidas ou gasosas, por exemplo, um núcleo e uma coroa. Nesta dissertação, modelaremos uma estrela como se seus constituintes fossem partículas de um gás real, que sofrem uma transição de fase do tipo gás-líquido, distinguindo as regiões densas da estrela(o núcleo), das menos densas(a coroa).

O objetivo fundamental será estudar o que acontece com a geometria do espaço-tempo no interior de um sistema de partículas em transição de fases de matéria, por exemplo, tipo gás-líquido.

Para isso, o capítulo 1 estará destinado a conhecer as bases da teoria necessária para modelar o interior de uma estrela, no contexto da relatividade geral. Faremos uma dedu-

ção da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov(TOV), que representa uma generalização das equações de Newton para a hidrodinâmica no equilíbrio. Assim, sua solução mostraria tanto a estrutura interna da estrela quanto a estrutura do espaço-tempo no interior dela.

Dado que a equação TOV precisa da forma explícita de uma equação de estado para ser resolvida, no capítulo 2 revisamos brevemente a teoria dos gases reais, na procura de uma equação de estado que modele as fases gasosa, líquida e de coexistência líquido-gás.

No capítulo 3, mostramos como funciona o código computacional desenvolvido, explicando os métodos numéricos empregados para solucionar nosso problema. Apresentamos a solução numérica do sistema TOV para o caso do gás ideal, a fim de testar o funcionamento do código desenvolvido. Finalmente, resolvemos numericamente o sistema TOV para o caso do gás em transição de fases.

Finalmente no capítulo 4 apresentamos as conclusões.

Capítulo 1

Relatividade geral

No presente capítulo, faremos uma breve revisão da teoria necessária para descrever a estrutura do espaço-tempo no interior de um sistema de partículas com simetria esférica, no contexto da relatividade geral, a fim de obter um caminho para desenvolver modelos estelares, apresentando a nomenclatura usada nesta dissertação. Dado que nosso interesse é analisar a geometria do espaço-tempo para o caso particular onde o sistema de partículas está em transição de fase, começamos estudando as leis básicas da relatividade geral.

1.1 Equação de Einstein para o espaço livre

A relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de energia, desenvolvida por Einstein e seus colaboradores, que se resume nas equações de campo, teve como ponto de partida a análise cuidadosa da geometria de um espaço-tempo na ausência de matéria. Daquela análise se obtém a equação de Einstein para o espaço livre de matéria e energia como

$$R_{\alpha\beta} = 0 , \quad (1.1)$$

onde $R_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci, e que se define como

$$R_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \xi \\ \alpha\xi \end{array} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \xi \\ \alpha\beta \end{array} \right\}_{|\xi} + \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\xi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \xi \\ \tau\beta \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \alpha\beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \xi \\ \tau\xi \end{array} \right\} = 0 , \quad (1.2)$$

na qual, aparece uma combinação dos símbolos de Christoffel e suas derivadas (onde usamos a notação $|\beta$ representando a derivada parcial com respeito à coordenada x^β).

Os símbolos de Christoffel se definem pela equação

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\xi} (g_{\xi\beta|\gamma} + g_{\xi\gamma|\beta} - g_{\beta\gamma|\xi}) ,$$

onde aparecem o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, suas derivadas e a inversa do tensor métrico $g^{\alpha\beta}$. Lembremos que a equação (1.2) é a condição para que as equações do campo admitam a métrica de Lorentz como solução particular.

1.2 Tensor de Energia-Momentum

Na seção anterior foram apresentadas as equações de campo para o espaço livre. No caso de estar em presença de matéria, a seguinte igualdade empírica é satisfeita:

$$\begin{array}{c} \text{Tensor que representa} \\ \text{a geometria do espaço} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Tensor que representa} \\ \text{a energia contida no espaço} \end{array} . \quad (1.3)$$

Além disso, a equação do campo satisfaz dois requerimentos limites:

1. É equivalente à equação de Poisson, no limite de campos fracos.
2. Deve ser equivalente à equação de campo de Einstein para espaços livres, no limite da densidade tendendo para zero.

A equação de campo é do tipo tensorial de segunda ordem.

1.2.1 Tensor para o Campo de Energia

Consideraremos o caso de campos de energia. Tais campos podem ser caracterizados pelo campo escalar de densidade própria $\rho_0(x)$ e um campo quadrivetorial de fluxo u^ν . A densidade própria $\rho_0(x)$ é medida por um observador movimentando-se junto ao fluxo. A quadri-velocidade de fluxo $u^\nu(x)$ pode ser interpretada como se um elemento de matéria que ocupa a posição caracterizada pelo ponto x^μ do espaço-tempo tem uma equação de movimento $x^\mu(s)$, tal que

$$\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu(x) . \quad (1.4)$$

Usando tais características, podemos construir o tensor de energia-momentum (ou tensor de matéria) como

$$T^{\mu\nu} = \rho_0(x) u^\mu(x) u^\nu(x) . \quad (1.5)$$

A fim de obter uma interpretação física para este campo tensorial, usamos as coordenadas da relatividade restrita, (ct, x, y, z) , e o tensor usual da métrica de Lorentz, dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) ,$$

de tal forma que a componente T^{00} do tensor de matéria está dada por

$$T^{00} = \rho_0 u^0 u^0 = \rho_0 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = c^2 \rho_0 \left[\frac{dt}{ds} \right]^2 = \gamma^2 \rho_0 , \quad (1.6)$$

onde definimos s , como a longitude de arco da trajetória e $\gamma = \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$. Segundo a relatividade restrita, um observador fixo observa que a massa da partícula aumenta com a velocidade, tal que, $m = m_0 \gamma$, porém, observa que o volume da partícula material se contrai na direção da velocidade, tal que, $V = V_0 \gamma^{-1}$. Assim, a densidade medida pelo observador fixo será $\rho = \gamma^2 \rho_0$. Portanto, T^{00} representa fisicamente a densidade medida por um observador fixo com respeito do fluxo, chamada densidade de energia relativista. As outras componentes são calculadas da mesma forma; se i e j representam as coordenadas espaciais (1,2,3), então, vemos que as componentes mistas (espaço e tempo) do tensor de energia-momentum são

$$T^{0i} = \rho_0 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^i}{ds} = c \rho_0 \left[\frac{dt}{ds} \right] v^i = c \gamma \rho_0 v^i = \frac{1}{c} \rho v^i , \quad (1.7)$$

e para o caso de componentes espaço-espaço temos que

$$T^{ij} = \rho_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \rho_0 \gamma^2 \frac{v^i v^j}{c^2} = \frac{1}{c^2} \rho v^i v^j . \quad (1.8)$$

Daqui vemos que o tensor de energia-momentum pode ser escrito como:

$$T^{ij} = \rho \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c} v_x & \frac{1}{c} v_y & \frac{1}{c} v_z \\ \frac{1}{c} v_x & \frac{1}{c^2} v_x^2 & \frac{1}{c^2} v_x v_y & \frac{1}{c^2} v_x v_z \\ \frac{1}{c} v_y & \frac{1}{c^2} v_y v_x & \frac{1}{c^2} v_y^2 & \frac{1}{c^2} v_y v_z \\ \frac{1}{c} v_z & \frac{1}{c^2} v_z v^j & \frac{1}{c^2} v_z v_y & \frac{1}{c^2} v_z^2 \end{bmatrix} . \quad (1.9)$$

Pode-se provar facilmente que as leis da hidrodinâmica são satisfeitas na ausência de forças, e que elas podem ser escritas em forma tensorial simples. Neste caso, elas podem se resumir à equação

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 , \quad (1.10)$$

que expressa a conservação de energia e momentum no fluido. Vemos que, se $\alpha = 0$, então, a equação(1.10), nos conduz à equação da continuidade

$$T^{0\nu}{}_{|\nu} = T^{0\eta}{}_{|\eta} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right] = 0 , \quad (1.11)$$

e se $\alpha = i \neq 0$, então, a equação(1.10) nos conduz à conhecida relação da derivada Euleriana para o fluxo de matéria, igual a zero, ou seja,

$$T^{i\nu}{}_{|\nu} = T^{i\nu}{}_{|\nu} = \frac{\rho}{c^2} \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^i \right] = 0 \implies \frac{Dv^i}{Dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^i = 0 . \quad (1.12)$$

1.2.2 Inclusão de forças

Agora queremos fazer as modificações correspondentes, para obter o tensor de energia-momentum para o caso no qual tanto as forças internas, quanto as pressões estejam presentes no fluido. Especificamente, trataremos com fluidos perfeitos, os quais são, por definição, caracterizados pelo campo de densidade própria $\rho_0(x)$, um campo de quadri-velocidade do fluido $u^a(x)$ e um campo escalar de pressão $p(x)$. Vamos provar que, agregando um termo apropriado (S^{ab}) ao tensor de energia-momentum para campos de energia (que agora chamamos de M^{ab}), podemos obter o tensor energia-momentum para campos de forças T^{ab} . Sabemos que M^{ab} é da forma

$$M^{ab} = \rho_0(x) u^a(x) u^b(x) , \quad (1.13)$$

assim, para encontrar um tensor energia-momentum que inclua o efeito da força interna, basta encontrar um tensor apropriado, cuja divergência é zero, e as equações de movimento obtidas dele têm que satisfazer a lei de conservação da energia. Além da anterior, as relações no limite de baixas velocidades têm que ser satisfeitas.

Assumimos que estamos no limite de baixas velocidades, ou seja, velocidades pequenas comparadas com c , baixas pressões e a densidade de energia elástica pequena, comparada com a densidade de energia dada pela matéria. Com todas estas considerações, vemos que a lei de conservação da energia pode ser escrita em termos da densidade própria ρ_0 , ou seja

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0 . \quad (1.14)$$

Se consideramos a equação(1.12) na presença de forças, então, segundo a dinâmica de fluidos, temos que

$$\rho_0 \frac{Dv^a}{Dt} = \rho_0 \left[\frac{\partial v^a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^a \right] = f^a = -\frac{\partial P}{\partial x^a} . \quad (1.15)$$

Notamos que a equação(1.14) é satisfeita pela divergência de $M^{0\nu}$, de fato

$$M^{0b}{}_{|b} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) \right] = 0 . \quad (1.16)$$

mas a equação(1.15) não é obtida pela divergência do tensor M^{ab} , já que

$$M^{ab}{}_{|b} = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{Dv^a}{Dt} = \frac{\rho_0}{c^2} \left[\frac{\partial v^a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^a \right] = -\frac{\partial P}{\partial x^a} \neq 0 . \quad (1.17)$$

Assim, para compensar esta situação, definimos o tensor S^{ab} , tal que

$$S^{ab}{}_{|b} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^a} = \frac{p}{c^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (1.18)$$

e deste modo, vemos que agora é satisfeita a relação

$$M^{ib}{}_{|b} + S^{ib}{}_{|b} = 0 , \quad (1.19)$$

o que nos motiva assumir que

$$T^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} . \quad (1.20)$$

Então, explicitamente vemos que o tensor de energia-momentum no limite de baixas velocidades será

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c}v_x & \frac{1}{c}v_y & \frac{1}{c}v_z \\ \frac{1}{c}v_x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c}v_y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c}v_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{p}{c^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (1.21)$$

onde notamos que $T^{\mu\nu}$ não é um tensor. Para generalizar (1.21), vemos que os únicos tensores de segunda ordem que estão associados ao fluido são $g^{\mu\nu}$ e $u^\mu u^\nu$. Assim, podemos escrever o tensor $S^{\mu\nu}$ como uma combinação linear de $g^{\mu\nu}$ e $u^\mu u^\nu$, de tal forma que

$$S^{\mu\nu} = \frac{p}{c^2} [A u^\mu u^\nu + B g^{\mu\nu}] . \quad (1.22)$$

Explicitamente vemos que

$$S^{\mu\nu} = \frac{p}{c^2} \left(A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c}v_x & \frac{1}{c}v_y & \frac{1}{c}v_z \\ \frac{1}{c}v_x & \frac{1}{c^2}v_x^2 & \frac{1}{c^2}v_xv_y & \frac{1}{c^2}v_xv_z \\ \frac{1}{c}v_y & \frac{1}{c^2}v_yv_x & \frac{1}{c^2}v_y^2 & \frac{1}{c^2}v_yv_z \\ \frac{1}{c}v_z & \frac{1}{c^2}v_zv^j & \frac{1}{c^2}v_zv_y & \frac{1}{c^2}v_z^2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) . \quad (1.23)$$

A equação (1.23) se reduz à equação (1.21) no limite de baixas velocidades se $A = 1$ e $B = -1$, e portanto podemos pensar que o tensor de Energia-Momentum seria da forma dada pela equação (1.20), com o tensor $S^{\mu\nu}$ da forma

$$S^{\mu\nu} = \frac{p}{c^2} [u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}] . \quad (1.24)$$

Assim, finalmente o Tensor de Energia-Momentum, para fluidos perfeitos, incluindo forças internas e pressões, pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + \frac{p}{c^2} [u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}] , \quad (1.25)$$

que satisfaz a conservação da energia nos termos que procuramos, e dizer

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 .$$

1.2.3 Equações de campo num espaço não vazio.

Da igualdade simbólica (1.3), podemos pensar que a equação do campo gravitacional na presença de matéria é da forma

$$R^{\mu\nu} = \zeta T^{\mu\nu} , \quad (1.26)$$

na qual relacionamos o tensor associado à geometria com aquele ligado à matéria. ζ é uma constante que temos que determinar. O problema que se apresenta é o fato de que o tensor de Energia-Momentum tem derivada covariante zero, enquanto o tensor de Curvatura, não. Porém a igualdade empírica tem que ser reescrita, tal que, a igualdade seja entre dois tensores com derivada covariante nula. Notando que o tensor

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (1.27)$$

tem derivada covariante nula (conhece-se $G^{\mu\nu}$ como tensor de Einstein), então podemos pensar que a equação de campo em presença de matéria, será da forma

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \zeta T^{\mu\nu} , \quad (1.28)$$

e fazendo uma contração dos índices μ e ν na equação (1.28), obtemos a relação escalar

$$R = -\zeta T . \quad (1.29)$$

Usando este resultado, vemos que a equação de campo fica

$$R^{\mu\nu} = \zeta \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) . \quad (1.30)$$

Para calcular a constante ζ , analisamos o limite de baixas velocidades para as equações de campo gravitacional. Vemos que o tensor de energia-momentum pode ser escrito no limite de baixas velocidades ($v \ll c$), da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies T^\mu{}_\mu = Tr \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \rho_0 , \quad (1.31)$$

onde, podemos notar que, na equação (1.31), o tensor energia-momentum só tem componentes nulas, exceto para T_{00} . Assim, analisando para essa componente, vemos que

$$R_{00} = \zeta \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) = \frac{1}{2} \zeta \rho_0 , \quad (1.32)$$

e por outro lado, calculamos R_{00} da equação (1.2), e obtemos

$$R_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha 0} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0\alpha \end{matrix} \right\}_{|0} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 00 \end{matrix} \right\}_{|\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 0\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 00 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha\tau \end{matrix} \right\} . \quad (1.33)$$

Para calcular os símbolos de Christoffel, no limite de baixas velocidades, assumimos uma métrica tipo Lorentz, só que agregamos uma pequena perturbação $\xi\phi_{\mu\nu}$, independente do tempo, o que equivale a dizer

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \xi\phi_{\mu\nu} \quad , \quad \xi \ll 1$$

onde, notamos que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Lorentz. Agora calculamos os símbolos de Christoffel que aparecem na equação (1.33), desprezando todos os termos que sejam potências de ξ maiores que 1, ou seja $O_1(\xi^2)$ e $O_2(\xi^3)$, temos que

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0\alpha \end{matrix} \right\}_{|0} = 0,$$

devido ao fato de que a métrica é independente do tempo. Por outro lado, vemos que

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 00 \end{array} \right\}_{|\alpha} = \frac{-1}{2} \{g^{\alpha\beta} g_{00|\beta}\}_{|\alpha} \approx \frac{-\xi}{2} \{(\eta^{\alpha\beta}) (\phi_{00|\beta})\}_{|\alpha} = \frac{-\xi}{2} \nabla^2 \phi_{00} , \quad (1.34)$$

$$\text{onde } \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial^2 x^1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x^3}.$$

Notemos que os símbolos de Christoffel são funções das derivadas da métrica, porém, como a métrica de Lorentz tem componentes constantes, então cada símbolo de Christoffel será proporcional ao parâmetro ξ . Assim, os termos do tensor de curvatura que são produtos de dois símbolos de Christoffel, são desprezíveis. É dizer que a equação (1.32), pode ser escrita como

$$\frac{\xi}{2} \nabla^2 \phi_{00} = -\frac{1}{2} \zeta \rho_0 , \quad (1.35)$$

e lembrando que a componente g_{00} da métrica se relaciona com o potencial clássico, tal que

$$\varphi = \frac{c^2}{2} \xi \phi_{00} , \quad (1.36)$$

então, vemos que a equação para o potencial clássico é

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{c^2}{2} \zeta \rho_0 , \quad (1.37)$$

a qual é idêntica à equação de Poisson, só se

$$\zeta = \frac{-8\pi k}{c^2} , \quad (1.38)$$

onde k é a constante de gravitação de Newton. Finalmente a equação de campo de Einstein, na presença de matéria é dada por

$$R^{\mu\nu} = \frac{-8\pi k}{c^2} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right). \quad (1.39)$$

1.3 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov

Estudaremos a estrutura estelar de um sistema de partículas representadas pelo tensor de energia-momento para fluidos perfeitos. Isto envolve a construção da forma da métrica e a utilização de todo o aparato matemático para, com as leis da relatividade, encontrar como seria a pressão e a densidade dentro da estrela. O resultado mais importante será encontrar uma generalização das equações de Newton da hidrodinâmica em equilíbrio, conhecida como a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov(TOV). Assumimos que nosso sistema é estático e com simetria esférica

$$\rho = \rho(r) \quad p = p(r) .$$

Além do anterior, suponhamos que existe uma relação local, entre a pressão e a densidade, ou seja, que exista uma equação de estado que possa ser escrita na forma

$$p = p(\rho) . \tag{1.40}$$

Em analogia ao problema de Schwarzschild, no tocante ao tratamento de sistemas com simetria esférica, vemos que a longitude fundamental pode ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = \exp(\nu)c^2 dt^2 - [\exp(\lambda)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \tag{1.41}$$

onde as funções ν e λ , que aparecem em g_{00} e g_{11} , são só dependentes de r , devido ao fato de que nosso sistema é independente do tempo e com simetria esférica. Consideramos que nosso sistema é um fluido perfeito, e deste modo, o tensor energia-momentum está dado pela equação (1.25)

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \frac{p}{c^2} (u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}) . \tag{1.42}$$

Desde que a matéria esteja em repouso em cada ponto material do fluido, as componentes do vetor velocidade u^α serão $(u^0, 0, 0, 0)$. Na trajetória de cada partícula de matéria no fluido, a relação entre o tempo-próprio e a coordenada temporal está dada por

$$ds^2 = g_{00} (dx_0)^2 = g_{00} c^2 dt^2 \quad 1 = g_{00} (u^0)^2 . \tag{1.43}$$

Então, temos que

$$u_0 = g_{0\alpha} u^\alpha = g_{00} u^0 = \sqrt{g_{00}} \quad u_i = 0 . \tag{1.44}$$

Isto permite escrever o tensor $T_{\alpha\beta}$ da seguinte forma:

$$T_{\alpha\beta} = \rho \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} , \tag{1.45}$$

e em virtude da equação (1.40), podemos dizer que

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho \exp \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{c^2} \exp \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{c^2} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{c^2} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

para um fluido perfeito. Da definição (1.42), podemos calcular o escalar T , de fato $T = T^\alpha{}_\alpha$. Então usando as relações $u^\alpha u_\alpha = 1$ e $g_\alpha{}^\alpha = 4$, vemos que

$$T = \rho - 3\frac{p}{c^2}. \quad (1.47)$$

Agora, utilizamos a equação de campo (1.39), em sua forma covariante

$$R_{\alpha\beta} = \frac{-8\pi k}{c^2} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right), \quad (1.48)$$

e a equação (1.2), que define o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$, para encontrar as relações entre as funções geométricas λ e ν e os parâmetros do fluido P e ρ .

As componentes não nulas do tensor $T_{\alpha\beta}$ dão origem às quatro relações seguintes:

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T &= \frac{\exp \nu}{2} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) \\ T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T &= \frac{\exp \lambda}{2} \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) \\ T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T &= \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) r^2 \\ T_{33} - \frac{1}{2} g_{33} T &= \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes não nulas do tensor $R_{\alpha\beta}$, segundo [1], que são

$$R_{00} = \exp(\nu - \lambda) \left[-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{r}\nu' \right]$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{r}\lambda'$$

$$R_{22} = \exp(-\lambda) \left[1 + \frac{1}{2}\nu'r - \frac{1}{2}\lambda'r \right] - 1$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta ,$$

onde a linha como super-índice denota diferenciação com respeito a r . Substituindo as quantidades calculadas anteriormente na equação de Campo de Einstein (1.48), obtemos o sistema de equações diferenciais que temos que resolver

$$\exp(-\lambda) \left[-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{r}\nu' \right] = \zeta \left(\frac{\rho}{2} + \frac{3}{2} \frac{p}{c^2} \right) \quad (1.49)$$

$$\exp(-\lambda) \left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{r}\lambda' \right] = \zeta \left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{2} \frac{p}{c^2} \right) \quad (1.50)$$

$$\exp(-\lambda) \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\nu' - \lambda') \right] - \frac{1}{r^2} = \zeta \left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{2} \frac{p}{c^2} \right) , \quad (1.51)$$

onde $\zeta = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}$. Notemos que só temos três equações, já que a equação que envolve R_{33} é claramente proporcional àquela que envolve R_{22} . Escrevamos as equações de uma forma mais conveniente. Primeiro somamos (1.49) e (1.50) e obtemos

$$\zeta \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = \exp(-\lambda) \left[\frac{\nu' + \lambda'}{r} \right] . \quad (1.52)$$

Notemos que se ζ é negativo e a densidade e pressão são maiores ou iguais a zero, implica que $\nu' + \lambda'$ é positivo ou zero só para o espaço livre de matéria, isto é $\rho = p = 0$. Agora podemos resolver (1.50) e (1.52) para ρ e p .

Para a terceira equação, eliminamos ρ e p das equações (1.50) e (1.51), e obtemos o sistema simples de equações diferenciais

$$\zeta \rho = \exp(-\lambda) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} \quad (1.53)$$

$$\zeta \frac{p}{c^2} = \frac{1}{r^2} - \exp(-\lambda) \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} \right] \quad (1.54)$$

$$\frac{\exp(-\lambda)}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} (\nu')^2 + \frac{1}{4} \lambda' \nu' + \frac{1}{2r} (\nu' + \lambda') - \frac{1}{2} \nu'' . \quad (1.55)$$

Em analogia com a solução de Schwarzschild, definimos a função $m(r)$, tal que

$$\exp(-\lambda) = 1 - \frac{2m(r)}{r} , \quad (1.56)$$

e lembremos que m é definida como a massa geométrica ($m = \kappa M/c^2$) dentro da esfera de raio r . Derivando a equação (1.56), obtemos

$$-\frac{2}{r} m'(r) = -\frac{1}{r^2} [r (1 - \exp(-\lambda))]' = \exp(-\lambda) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \lambda' \right) - \frac{1}{r^2} , \quad (1.57)$$

e comparando (1.57) com a equação (1.53), obtemos a equação

$$m'(r) = \frac{4\pi}{c^2} \kappa \rho r^2 . \quad (1.58)$$

Vemos que de (1.54) podemos resolver para ν' , numa forma conveniente, a saber

$$\nu' = 2 \frac{m + 4\pi \kappa p r^3 / c^4}{r (r - 2m)} . \quad (1.59)$$

Agora relacionamos p' com ν' . Diferenciamos (1.54) e usamos (1.55) para eliminar ν'' , e obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi\kappa}{c^4} p' &= -\frac{2}{r^3} + \exp(-\lambda) \left[\frac{1}{r^2} \lambda' + \frac{1}{r} \lambda' \nu' - \frac{1}{r} \nu'' + \frac{1}{r^2} \nu' + \frac{2}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{2r} \exp(-\lambda) [\lambda' + \nu'] \nu' . \end{aligned}$$

Comparando com a equação (1.52) obtemos a relação simples entre p' e ν'

$$\frac{p'}{c^2} = \frac{-1}{2} \nu' \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) , \quad (1.60)$$

e finalmente

$$p' = -\frac{\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \left(m + \frac{4\pi\kappa p r^3}{c^4} \right) c^2}{r (r - 2m)} , \quad (1.61)$$

que corresponde a famosa equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) usada para a construção de modelos estelares. É uma versão relativística das equações de Newton da hidrodinâmica em equilíbrio.

Em resumo, para definir um modelo estelar, com simetria esférica, no contexto da relatividade geral, temos que resolver o seguinte sistema de equações diferenciais;

$$p = p(\rho) \tag{1.62}$$

$$m'(r) = \frac{4\pi}{c^2} \kappa \rho r^2 \tag{1.63}$$

$$p' = -\frac{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \left(m + \frac{4\pi \kappa p r^3}{c^4}\right) c^2}{r (r - 2m)} \tag{1.64}$$

$$\exp(-\lambda) = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{1.65}$$

$$\nu' = -\frac{2p'}{\rho c^2 + p} \tag{1.66}$$

As primeiras três equações nos permitem resolver o problema da estrutura interna, ou seja, conhecer $m(r)$, $p(r)$, e $\rho(r)$, e para isto precisamos das condições iniciais. As últimas duas equações dão conta da geometria, permitindo conhecer as componentes do tensor métrico, a fim de conhecer a curvatura do espaço-tempo. Notemos que a equação (1.62) é a equação de estado do sistema de partículas, que vai depender de como são as interações entre os constituintes do sistema. Em continuação, vamos procurar uma equação de estado para um sistema dado, que nos permita simular transições de fase de matéria, tipo gás-líquido. No capítulo seguinte apresentamos um breve resumo da teoria dos gases reais.

Capítulo 2

Gases Reais

No capítulo anterior, foi desenvolvida a teoria necessária para modelar o interior de um sistema de partículas, com simetria esférica, no marco da relatividade geral. Obtivemos um sistema de equações diferenciais não lineares de primeiro ordem (TOV), que dariam conta de tais modelos. Não obstante, o sistema de equações precisa de uma equação de estado para ser resolvido. Tal equação de estado tem que ser capaz de modelar transições de fase de matéria, já que nosso objetivo é estudar como é a geometria do espaço-tempo durante um evento de transição de fase de matéria. Um modelo razoável é assumir que o sistema se comporta como se fosse um gás real, com as seguintes restrições:

- O sistema está constituído por N partículas idênticas com simetria esférica.
- Existe um potencial de interação entre as partículas.
- O sistema pode ser considerado como um fluido perfeito.
- O sistema sofre uma transição de fase tipo gás-líquido.
- Campos externos de todo tipo são desprezíveis.

Com tais restrições usaremos a mecânica estatística para encontrar a equação de estado que modela nosso sistema.

2.1 Equação de estado para um sistema de partículas idênticas.

Se consideramos um sistema de partículas idênticas tal que seus constituintes interagem via um potencial de duas partículas U_{ik} , podemos calcular aproximadamente as propriedades termodinâmicas do sistema. O Hamiltoniano relativo ao sistema será

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + \sum_{i,k, i < k} U_{ik} (|\vec{r}_i - \vec{r}_k|), \quad (2.1)$$

onde o potencial de interação U_{ik} só depende da distância $|\vec{r}_i - \vec{r}_k|$ entre as partículas. A função de partição se define como

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int d^{3N}p \exp \left\{ \frac{-\beta}{2m} \sum_{i=1}^N \vec{P}_i^2 \right\} \int d^{3N}r \exp \left\{ -\beta \sum_{i,k, i < k} U_{ik} \right\},$$

onde vemos que as integrais de momento não causam dificuldade e podem ser resolvidas diretamente, de tal forma que

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!h^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \int d^{3N}r \exp \left\{ -\beta \sum_{i,k, i < k} U_{ik} \right\}.$$

Expressando a exponencial da somatória como um produto de exponenciais, obtemos a equação

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!h^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \int d^{3N}r \prod_{i,k, i < k} \exp \{-\beta U_{ik}\}, \quad (2.2)$$

e definindo a integral que falta calcular como

$$Q_N(V, T) = \int d^{3N}r \prod_{i,k, i < k} \exp \{-\beta U_{ik}\}, \quad (2.3)$$

podemos ver que, se $U_{ik} = 0$, então $Q_N = V^N$ e nosso resultado seria o típico para um gás ideal.

Para calcular Z (pelo menos aproximadamente), no caso no qual $U_{ik} \neq 0$, usaremos o comportamento típico dos potenciais de interação, ou seja, fortemente repulsivo para pequenas distâncias e atrativo para partículas distantes, ou seja, $U_{ik} = 0$ se $r_{ik} \rightarrow \infty$, como se vê na figura (2.1) Se pensamos num gás com densidade baixa, isto pode significar que

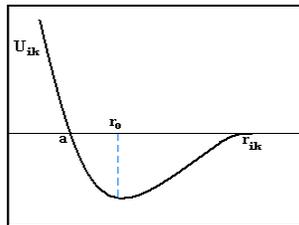


Figura 2.1: Forma típica de um potencial de interação.

as partículas estão muito afastadas umas das outras, tanto que o gás se comporta como se fosse ideal. O mesmo é válido para sistemas com altas temperaturas, posto que para este caso podemos pensar que a energia potencial das partículas é pequena comparada com a energia cinética kT e porém a interação entre as partículas é desprezível, tal como para o caso do gás ideal. Conseqüentemente tentaremos expandir Z em torno dos casos limites do gás ideal. Assim, se supomos que $\beta U_{ik} \ll 1$, então $\exp\{-\beta U_{ik}\} \approx 1$, e a quantidade f_{ik} , definida como

$$f_{ik} = \exp\{-\beta U_{ik}\} - 1 \quad f_{ik} \ll 1,$$

é um parâmetro apropriado para fazer a expansão, já que $f_{ik} \rightarrow 0$ se $\langle r_{ik} \rangle \rightarrow \infty$ ou $T \rightarrow \infty$. Introduzindo f_{ik} no produto de exponenciais da equação (2.3)

$$\prod_{i,k, i < k} (\exp\{-\beta U_{ik}\} - 1) = 1 + \sum_{i,k, i < k} f_{ik} + \sum_{i,k,l,m} f_{ik} f_{lm} + \dots,$$

e restringindo nossas considerações aos primeiros dois termos, temos que a equação (2.3), fica

$$Q_N(V, T) = \int d^{3N}r \left(1 + \sum_{i,k, i < k} f_{ik} + \dots \right).$$

Substituindo f_{ik} em forma explícita, temos que:

$$Q_N(V, T) = V^N + V^{N-2} \sum_{i,k, i < k} \int d^3r_i \int d^3r_k (\exp\{-\beta U_{ik}\} - 1) + \dots, \quad (2.4)$$

onde o primeiro termo V^N é idêntico ao resultado de $Q_N(V, T)$ para o gás ideal. O termo seguinte representa a correção dada pela interação U_{ik} . Substituindo as coordenadas

do centro de massas $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_k)$, e coordenadas relativas $\vec{r} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$, na integral de (2.4), temos que

$$Q_N(V, T) = V^N + V^{N-1} \frac{N(N-1)}{2} \int d^3r (\exp\{-\beta U_{ik}\} - 1) + \dots, \quad (2.5)$$

vemos que existem $\frac{N(N-1)}{2}$ pares de partículas com $i < k$, que dão todas a mesma contribuição para Z . Então, a fim de expressar $Z(T, V, N)$ em forma simples, definimos a quantidade

$$A(T) = \int d^3r (\exp\{-\beta U_{ik}\} - 1) = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr (\exp\{-\beta U(r)\} - 1) + \dots, \quad (2.6)$$

e voltando para a equação (2.2), usando os resultados obtidos até agora e considerando que $N \gg 1$, ou seja, $\frac{N(N-1)}{2} \approx \frac{1}{2}N^2$, podemos finalmente dizer que, a função de partição é escrita da seguinte forma

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \left[V^N + V^{N-1} \frac{1}{2} N^2 A(T) + \dots \right].$$

Se ordenamos os termos, obtemos a relação simples:

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}} \left[1 + \frac{1}{2V} N^2 A(T) + \dots \right] \quad (2.7)$$

Finalmente podemos calcular a pressão do sistema, lembrando que

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N} \quad \text{onde } F = kT \ln Z$$

$$\implies p(T, N, V) = \frac{N kT}{V} - kT \frac{N^2 \frac{A}{2V^2}}{1 - N^2 \frac{A}{2V^2}}$$

e considerando que A é uma correção pequena, temos que a equação de estado é

$$p \approx \frac{N kT}{V} \left(1 - \frac{A N}{2 V} \right). \quad (2.8)$$

2.2 Potencial de interação de Sutherland.

A equação (2.6) pode ser calculada para um caso específico, onde o potencial de interação $U(r)$ seja conhecido. Por exemplo, poderíamos usar o potencial de Lennard-Jones, comumente usado para simular a interação entre dois átomos, e que tem a seguinte forma

$$U(r) = U_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right).$$

Este potencial aparece em diversos modelos da dinâmica molecular e possui um mínimo em $r = r_0$ no qual assume o valor $U(r_0) = -U_0$. Ele é fortemente repulsivo para distâncias pequenas ($r \ll 1$) e atrativo a grandes distâncias. O problema que aparece é o fato de que as integrais a serem calculadas são complicadas. Porém, usaremos uma variante deste potencial para simplificar a integral (2.6), o chamado potencial de Sutherland dado como:

$$U(r) = \begin{cases} +\infty & r < r_0 \\ -U_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 & r \geq r_0 \end{cases}.$$

Na figura seguinte comparamos os potenciais de Lennard-Jones e de Sutherland. Usando

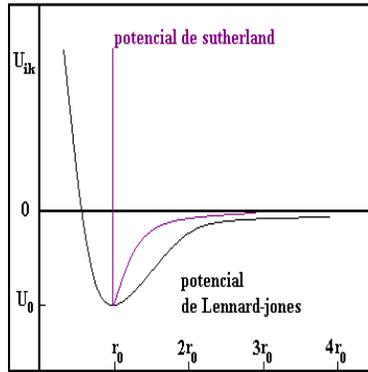


Figura 2.2: Comparação entre o potencial de interação de Lennard-Jones e o potencial de Sutherland.

o potencial de Sutherland e a equação (2.6), podemos calcular $A(T)$, tal que

$$A(T) = 4\pi \int_0^{r_0} r^2 (-1) dr + 4\pi \int_{r_0}^{\infty} r^2 \left(\exp \left(\beta U_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right) - 1 \right) dr, \quad (2.9)$$

e se $\beta U_0 \ll 1$, então, vale que

$$\exp \left(\beta U_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right) \approx 1 + \beta U_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 + \dots \quad (2.10)$$

Usando esta aproximação na equação (2.9), temos que

$$A(T) \approx -\frac{4\pi}{3}r^3 + 4\pi\beta U_0 r_0^6 \int_{r_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^4 dr, \quad (2.11)$$

e resolvendo a integral, chegamos na equação

$$A(T) \approx -\frac{4\pi}{3}r_0^3(1 - \beta U_0), \quad (2.12)$$

que usaremos para determinar a forma final da equação de estado. De fato, substituindo (2.12) na equação (2.8), obtemos

$$p = \frac{NkT}{V} \left(1 + 2\pi r_0^3 \frac{N}{3V} (1 - \beta U_0) \right),$$

e assim, finalmente, se escrevemos a pressão em termos do volume específico $v = \frac{V}{N}$, vemos que a equação de estado pode ser escrita como

$$P = \frac{NkT}{v} \left(1 + 2\pi r_0^3 \frac{N}{3v} \left(1 - \frac{U_0}{kT} \right) \right). \quad (2.13)$$

A equação (2.13) pode ser escrita de uma forma mais conhecida, se reordenamos os termos, e usamos o fato de que o volume $\frac{4\pi r_0^3}{3}$ dos átomos é pequeno comparado com o volume específico v . Vemos então que

$$p - \frac{2\pi r_0^3 U_0}{3v^2} = \frac{kT}{v} \left(1 + \frac{2\pi r_0^3}{3v} \right) \approx \frac{kT}{v} \left(1 - \frac{2\pi r_0^3}{3v} \right)^{-1},$$

é exatamente igual à equação de estado de van der Waals.

$$\left(p - \frac{a}{v^2} \right) (v - b) \approx kT \quad (2.14)$$

para os valores de a e b dados pelas seguintes relações:

$$a = \frac{2\pi}{3} r_0^3 U_0 \quad b = \frac{2\pi}{3} r_0^3 \quad (2.15)$$

Tais parâmetros são característicos de cada sistema. O parâmetro a depende da profundidade U_0 do potencial e mede a intensidade da força de atração entre partículas. O parâmetro b é chamado de covolume.

2.3 Lei dos estados correspondentes

Foi observado que um sistema de partículas que se comporta como um gás real pode ser modelado pela equação de estado de van der Waals. Escrevendo esta equação em termos da densidade, obtemos a equação

$$P = \frac{kT\rho}{1 - b\rho} - a\rho^2 . \quad (2.16)$$

Definimos o ponto crítico (ρ_c, P_c, T_c) , como o estado onde se satisfaz o fato de que, tanto a primeira, quanto a segunda derivada da pressão são nulas, ou seja

$$\frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho_c, T_c) = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}(\rho_c, T_c) = 0 , \quad (2.17)$$

o que nos permite, fisicamente, caracterizar o limite de temperaturas para as quais pode acontecer uma transição de fase. Isto equivale a dizer que não existem transições de fase para temperaturas superiores à crítica. O ponto crítico é calculado facilmente, e resulta ser tal que

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \quad \rho_c = \frac{1}{3b} \quad T_c = \frac{8a}{27kb} , \quad (2.18)$$

ver [2]. Se usamos estas quantidades na própria equação de estado, a fim de eliminar as constantes a , b e k , obtemos a famosa lei dos estados correspondentes para gases reais,

$$P_r = \frac{8T_r\rho_r}{3 - \rho_r} - 3\rho_r^2 , \quad (2.19)$$

a qual é independente dos parâmetros característicos de cada gás. Nesta equação, aparecem as chamadas coordenadas reduzidas, P_r , T_r , ρ_r , que são definidas pelas relações

$$P_r = \frac{P}{P_c} \quad \rho_r = \frac{\rho}{\rho_c} \quad T_r = \frac{T}{T_c} . \quad (2.20)$$

A equação (2.19) será usada para modelar nosso sistema nas fases de gás e de líquido. Na região de coexistência gás-líquido, faremos algumas modificações que serão explicadas mais adiante. O interessante de usar esta equação dos estados correspondentes é o fato de que ela é válida para todo sistema que tenha um comportamento do tipo de gás real, ou seja, ela é a equação de estado geral para os gases reais.

Se fixamos uma temperatura um pouco menor à crítica ($T_r < 1$), então o gráfico da isoterma terá que manifestar uma transição de fase do tipo gás-líquido, tal como é mostrado no exemplo da figura (2.3). O problema que se apresenta é o fato de que tal

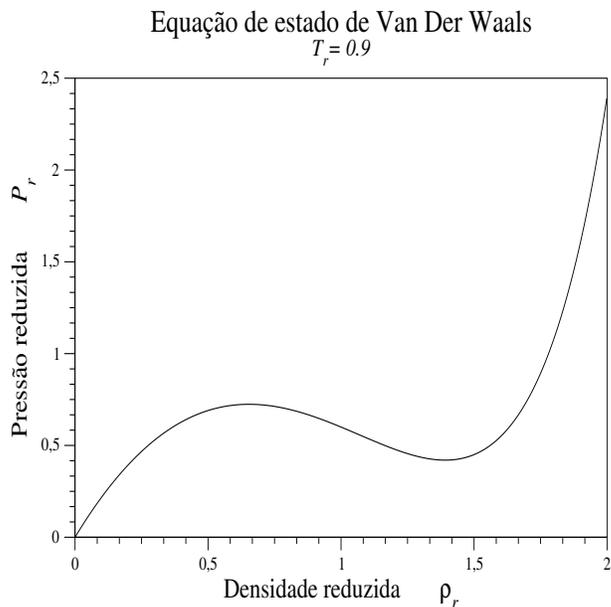


Figura 2.3: Gráfico típico de uma isoterma de van der Waals, para sistemas em transição de fase. Neste exemplo a isoterma é $T_r = 0,9$

equação de estado não é válida na região de transição de fase. De fato ela apresenta inconsistências físicas notórias. Por exemplo, na figura (2.3) vemos que existe uma região, na qual $\frac{\partial P}{\partial \rho} < 0$, e portanto temos que reestruturar a equação de estado na região de coexistência gás-líquido. Não obstante, só precisamos lembrar que, segundo os experimentos sobre transições de fases de matéria, ela acontece para uma determinada pressão constante. Então, temos que conhecer o valor da pressão para a qual acontece a transição de fase. Na seção seguinte usaremos a construção de Maxwell para calcular tal pressão de transição de fases.

2.4 Cálculo da pressão de coexistência de fases.

Para encontrar o valor da pressão P_0 , na qual acontece a transição de fases, usamos a construção de Maxwell, que é ilustrada na figura (2.4). Consideramos uma transição de

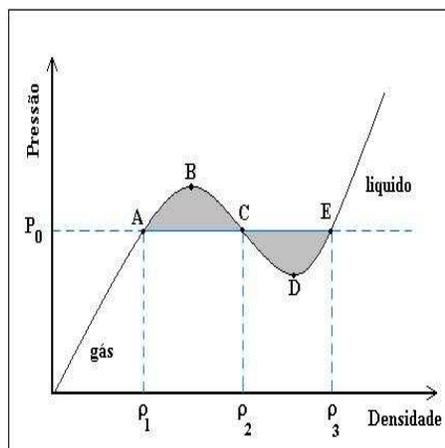


Figura 2.4: Pressão de coexistência de fases.

fase gás-líquido, então na região de coexistência entre o líquido e o vapor se estabelece uma pressão de equilíbrio P_0 entre as fases. Tal pressão de equilíbrio, pode ser calculada segundo Maxwell, usando o fato de que as áreas escuras na figura (2.4) têm que ser iguais. Esta condição aparece naturalmente se consideramos dois estados, um deles puramente gasosos (de entropia S_1) e o outro puramente líquidos (de entropia S_2). Então, a variação de energia interna do sistema entre os dois estados é dada pela primeira lei da termodinâmica

$$\Delta U = T(S_2 - S_1) - \int_{\rho_1}^{\rho_3} P(\rho) d\rho,$$

onde $P(\rho)$ representa uma isoterma de van der Waals. Outro caminho para calcular a variação de energia é usar o calor latente de transição de fases, que para este caso é:

$$\Delta U = \Delta Q - P_0(\rho_3 - \rho_1),$$

onde P_0 representa a pressão de equilíbrio entre as fases.

Assim, a condição desejada para calcular P_0 é

$$\int_{\rho_1}^{\rho_3} P(\rho) d\rho = P_0(\rho_3 - \rho_1), \quad (2.21)$$

e vemos que as densidades que limitam a região de coexistência gás-líquido são ρ_1 e ρ_3 , tal como é indicado na figura (2.4). Ou seja, as áreas limitadas pelos pontos ABC e CDE, na figura (2.4) têm que ser iguais. Esta condição nos proporciona uma equação com três incógnitas, a saber ρ_1 , ρ_3 , P_0 . As outras duas equações são dadas pelo fato de que os pontos (ρ_1, P_0) e (ρ_3, P_0) pertencem à isoterma. Explicitamente o sistema de equações para resolver está dado por

$$8T_r \left(3 \ln \left(\frac{3 - \rho_3}{3 - \rho_1} \right) + \rho_3^3 - \rho_1^3 - \rho_3 + \rho_1 \right) = P_0(\rho_3 - \rho_1) \quad (2.22)$$

$$P_0 = \frac{8T_r \rho_1}{3 - \rho_1} - 3\rho_1^2 \quad (2.23)$$

$$P_0 = \frac{8T_r \rho_3}{3 - \rho_3} - 3\rho_3^2 \quad (2.24)$$

O sistema será resolvido para uma temperatura T_r fixa, usando o método de Newton-Raphson para sistemas de equações não lineares. Todos os resultados numéricos são mostrados no capítulo 3. Uma vez conhecida a região de coexistência, podemos afirmar que a equação de estado válida na região de coexistência gás-líquido será da forma $P = P_0 = \text{constante}$. Assim, em geral podemos afirmar que a equação de estado que modela uma transição de fase do tipo gás-líquido é caracterizada por uma função contínua dividida em três partes:

1. van der Waals para $\rho < \rho_1$ região do gás;
2. $P = P_0$ para $\rho_1 < \rho < \rho_3$ região de coexistência gás-líquido;
3. van der Waals para $\rho > \rho_3$ região do líquido.

Notemos que tal função tem derivada descontínua em $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_3$. Na seção seguinte, tentaremos resolver tal problema, já que pela própria definição do tensor de curvatura, as componentes da métrica são de classe C^2 , ou seja, a equação de estado também tem que ser de classe C^2 .

2.5 Equação de estado para um sistema em transição de fase gás-líquido

Em continuação, redefiniremos a equação de estado, a fim de que ela seja de classe C^2 . Para conseguir tal propósito, usaremos três equações de estado do tipo virial que nos permitam suavizar as interfaces do gás e do líquido.

Para simplificar a notação, no momento de falar das quantidades reduzidas (ρ_r, P_r, T_r) , eliminamos os sub-índices r .

A região de coexistência gás-líquido será chamada simplesmente como região de coexistência.

Além do anterior, na seção seguinte usamos a seguinte nomenclatura:

$P^{(V)}$ = equação de estado de van der Waals (na forma reduzida).

$P^{(GC)}$ = equação de estado tipo virial (na forma reduzida), válida nas proximidades de ρ_1 , que suavizará o acoplamento entre as região do gás (G) com aquela de coexistência (C).

$P^{(C)}$ = equação de estado na região de coexistência.

$P^{(LC)}$ = equação de estado tipo virial (na forma reduzida), válida nas proximidades de ρ_3 , que suavizará o acoplamento entre as região de coexistência e a região do líquido (L).

2.5.1 Região do gás

A região de densidades baixas (coroa) é modelada por um sistema que se comporta como um gás real. Ela é caracterizada pela equação de estado de Van Der Waals, e pode ser escrita na forma reduzida, segundo (2.19), como

$$P^{(V)} = \frac{8T\rho}{3 - \rho} - 3\rho^2,$$

válida na região $\rho < \rho_1$, não obstante, no momento de acoplar esta equação de estado de Van Der Waals com a equação de estado válida na região de coexistência ($P^{(C)}(\rho) \simeq P_0$), tenhamos observado que a derivada da pressão em $\rho = \rho_1$ não é contínua. Porém, definiremos um polinômio para conseguir um acoplamento suave entre as regiões de gás e de coexistência, que chamaremos $P^{(GC)}$. O intervalo de domínio de $P^{(GC)}$ será a vizinhança de ρ_1 , que será da forma $\rho_1 - \chi < \rho < \rho_1 + \chi$, onde χ assume um valor pequeno, e que será introduzido no código como valor de entrada. Assim, para um valor dado de χ , podemos

afirmar que a região de gás é dominada pela equação de estado

$$P^{(V)} = \frac{8T\rho}{3-\rho} - 3\rho^2 \quad \rho < \rho_1 - \chi, \quad (2.25)$$

assim, nosso interesse está em resolver TOV e analisar o que acontece quando $\chi \rightarrow 0$.

2.5.2 Região da interface gás-coexistência

No item anterior, definimos o polinômio $P^{(GC)}(\rho)$, válido no intervalo $\rho_1 - \chi < \rho < \rho_1 + \chi$, que chamaremos região de interface gás-coexistência. Tal polinômio satisfaz as seguintes condições

$$P^{(GC)}(\rho_1 - \chi) = P^{(V)}(\rho_1 - \chi) \quad (2.26)$$

$$\frac{dP^{(GC)}}{d\rho}(\rho_1 - \chi) = \frac{dP^{(V)}}{d\rho}(\rho_1 - \chi) \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2P^{(GC)}}{d\rho^2}(\rho_1 - \chi) = \frac{d^2P^{(V)}}{d\rho^2}(\rho_1 - \chi), \quad (2.28)$$

as quais são as condições de acoplamento e suavidade da curva de Van Der Waals e o polinômio $P^{(GC)}$, no estado para o qual $\rho = \rho_1 - \chi$. Analogamente existem mais três condições de acoplamento e suavidade no outro extremo do intervalo ($\rho = \rho_1 + \chi$), entre o polinômio $P^{(GC)}$ e o polinômio válido na região de coexistência $P^{(C)}(\rho)$. Explicitamente as condições são

$$P^{(GC)}(\rho_1 + \chi) = P^{(C)}(\rho_1 + \chi) \quad (2.29)$$

$$\frac{dP^{(GC)}}{d\rho}(\rho_1 + \chi) = \frac{dP^{(C)}}{d\rho}(\rho_1 + \chi) \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2P^{(GC)}}{d\rho^2}(\rho_1 + \chi) = \frac{d^2P^{(C)}}{d\rho^2}(\rho_1 + \chi), \quad (2.31)$$

onde, temos que notar que $P^{(C)}(\rho)$ foi definida como uma função constante e igual a P_0 , embora para resolver o sistema de equações “TOV”, faremos uma aproximação apropriada, para assegurar a convergência do código. Definiremos $P^{(C)}(\rho)$ como uma reta de declividade extremamente pequena, mas não nula. Esta aproximação será explicada em detalhe na seção seguinte. Agora nos interessa dar a forma explícita de $P^{(GC)}(\rho)$. Notamos que são seis as condições que definem $P^{(GC)}(\rho)$, porém basta definir $P^{(GC)}(\rho)$ de grau cinco, já que seus seis coeficientes serão determinados de maneira única, resolvendo o sistema de seis equações lineares dadas pelas condições que nos asseguram suavidade

no acoplamento. Assim, explicitamente, a equação de estado válida na vizinhança de ρ_1 será

$$P^{(GC)}(\rho) = a_1 + a_2\rho + a_3\rho^2 + a_4\rho^3 + a_5\rho^4 + a_6\rho^5, \quad (2.32)$$

válida no intervalo $\rho_1 - \chi < \rho < \rho_1 + \chi$, e como falamos anteriormente, as constantes a_1, a_2, \dots, a_6 serão calculadas mais para frente, impondo as condições de suavidade na vizinhança de ρ_1 .

2.5.3 Região de coexistência gás-líquido

É a região onde acontece a transição de fase. Segundo o raciocínio anterior, a região de coexistência pode ser definida no intervalo $\rho_1 + \chi < \rho < \rho_3 - \chi$ (a fim de assegurar suavidade na vizinhança de ρ_3). A equação de estado válida em tal região é definida de tal forma que ela é uma reta que passa pelos pontos $(\rho_1 + \chi, P_0 - \xi)$ e $(\rho_3 - \chi, P_0 + \xi)$, onde definimos a quantidade ξ muito pequena (do ordem do erro associado a P_0), e assim obtemos uma boa aproximação de uma reta constante. Tal reta, se ilustra (com sua inclinação muito exagerada) na figura (2.5). Assim, a equação de estado válida na região

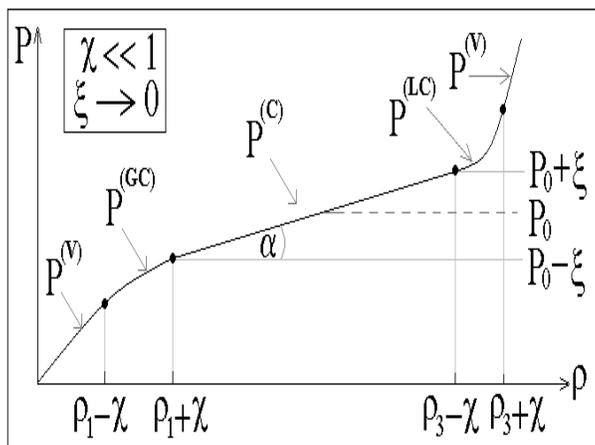


Figura 2.5: Na figura aparecem esquematizados os domínios respectivos das diferentes partes da equação de estado; para visualizar melhor as regiões de interface, exageramos a inclinação da reta na região de coexistência gás-líquido.

de coexistência é

$$P^{(C)}(\rho) = \left(\frac{2\xi}{\rho_3 - \rho_1 - 2\chi} \right) \rho + P_0 - \left(\frac{\rho_3 + \rho_1}{\rho_3 - \rho_1 - 2\chi} \right) \xi, \quad (2.33)$$

e notamos que, se $\xi \rightarrow 0$, então, $P^{(C)}(\rho) = P_0$, ou seja, nossa aproximação será fisicamente correta se ξ assume um valor da ordem do erro associado ao valor calculado de P_0 .

2.5.4 Região da interface líquido-coexistência

Em analogia com a interface gás-coexistência, definimos como equação de estado outro polinômio de acoplamento, chamado P^{LC} da forma

$$P^{(LC)}(\rho) = b_1 + b_2\rho + b_3\rho^2 + b_4\rho^3 + b_5\rho^4 + b_6\rho^5, \quad (2.34)$$

válida no intervalo $\rho_3 - \chi < \rho < \rho_3 + \chi$, que denominamos como a região da interface líquido-coexistência (ver figura (2.5)). As constantes b_1, b_2, \dots, b_6 serão calculadas exatamente, usando as condições de acoplamento e suavidade nos pontos onde $\rho = \rho_3 - \chi$ e $\rho = \rho_3 + \chi$, ou seja:

$$P^{(LC)}(\rho_3 - \chi) = P^{(C)}(\rho_3 - \chi) \quad (2.35)$$

$$\frac{dP^{(LC)}}{d\rho}(\rho_3 - \chi) = \frac{dP^{(C)}}{d\rho}(\rho_3 - \chi) \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2P^{(LC)}}{d\rho^2}(\rho_3 - \chi) = \frac{d^2P^{(C)}}{d\rho^2}(\rho_3 - \chi) \quad (2.37)$$

$$P^{(LC)}(\rho_3 + \chi) = P^{(V)}(\rho_3 + \chi) \quad (2.38)$$

$$\frac{dP^{(LC)}}{d\rho}(\rho_3 + \chi) = \frac{dP^{(V)}}{d\rho}(\rho_3 + \chi) \quad (2.39)$$

$$\frac{d^2P^{(LC)}}{d\rho^2}(\rho_3 + \chi) = \frac{d^2P^{(V)}}{d\rho^2}(\rho_3 + \chi) . \quad (2.40)$$

Notemos que a região do líquido está caracterizada por uma equação de estado de Van Der Waals. As soluções explícitas dos sistemas de equações são usadas diretamente no código que resolve TOV.

2.5.5 Região do líquido

Esta região representa o núcleo da estrela, e é caracterizada pelo intervalo $\rho > \rho_3 + \chi$. A equação de estado que modela esta região é do tipo Van Der Waals, ou seja

$$P^{(V)} = \frac{8T\rho}{3 - \rho} - 3\rho^2.$$

2.5.6 Forma final da equação de estado

Finalmente, a equação de estado válida dentro da estrela é da forma

$$P(\rho) = \begin{cases} \frac{8T\rho}{3-\rho} - 3\rho^2 & \rho < \rho_1 - \chi \\ a_1 + a_2\rho + a_3\rho^2 + a_4\rho^3 + a_5\rho^4 + a_6\rho^5 & \rho_1 - \chi < \rho < \rho_1 + \chi \\ \left(\frac{2\xi}{\rho_3 - \rho_1 - 2\chi}\right)\rho + P_0 - \left(\frac{\rho_3 + \rho_1}{\rho_3 - \rho_1 - 2\chi}\right)\xi & \rho_1 + \chi < \rho < \rho_3 - \chi \\ b_1 + b_2\rho + b_3\rho^2 + b_4\rho^3 + b_5\rho^4 + b_6\rho^5 & \rho_3 - \chi < \rho < \rho_3 + \chi \\ \frac{8T\rho}{3-\rho} - 3\rho^2 & \rho_3 + \chi < \rho < 3 \end{cases}$$

A título de exemplo, apresentamos o gráfico da equação de estado reduzida e suavizada para a isoterma $T = 0.9$, onde introduzimos as quantidades $\chi = 0.05$ e $\xi = 0.0005$,

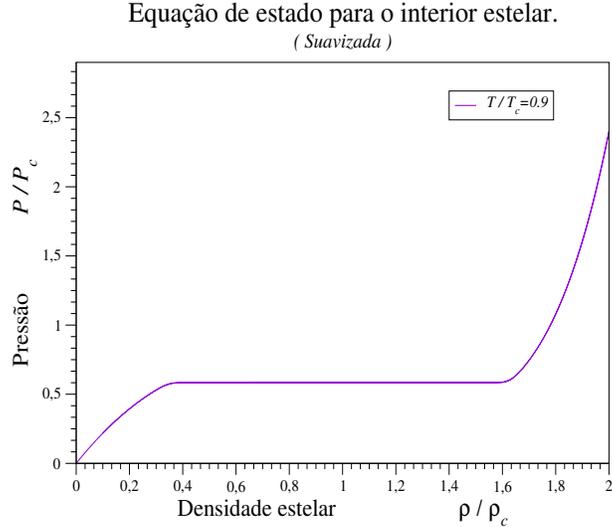


Figura 2.6: Exemplo do tipo de equação de estado que será utilizada para modelar uma estrela, cujas componentes sofrem uma transição de fase do tipo gás-líquido. Notar que o acoplamento feito pelos polinômios permite assegurar que, pelo menos, a equação de estado é uma função de classe C^2 . Neste caso, o código nos fornece que $\rho_1 = 0.349882$, $\rho_3 = 1.62266$ e $P_0 = 0.583328$.

No gráfico (2.6), observamos uma equação de estado de classe C^2 que é uma boa aproximação para o caso de sistemas em transição de fases tipo gás-líquido. Assim, o caso de sistemas em transição de fases tipo gás-líquido pode ser estudado fazendo $\chi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 0$. A motivação de suavizar a equação de estado reside no fato de que as componentes do tensor de curvatura foram definidas sobre uma base que tinha como requerimento principal que as componentes dos tensores estejam formados por funções de classe C^2 .

No seguinte capítulo, apresentaremos a colocação do problema e os resultados obtidos, isto é, a solução numérica de TOV para o caso de um sistema em transição de fases. Além do anterior, apresentaremos um exemplo que valida o código desenvolvido para resolver TOV.

Capítulo 3

Geometria de uma transição de fases. Resultados.

3.1 Colocação do problema e procedimento

Queremos estudar a geometria associada a um sistema em transição de fase da matéria. Para este fim, usamos a equação TOV que nos permite conhecer tanto a estrutura interna de um sistema de partículas (pressão, densidade, massa em função do raio) estacionário e com simetria esférica, quanto a geometria do espaço-tempo dentro do sistema (g_{00} e g_{11}). Para resolver TOV, precisamos de uma equação de estado, e então, usamos a equação de estado mostrada na seção (2.5.6), que é capaz de modelar uma transição de fase tipo gás-líquido, no limite quando $\chi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 0$.

O modelo pode ser aplicado a uma estrela em transição de fase, e que satisfaz todos os requerimentos ditos anteriormente, como simetria esférica, fluido perfeito, sistema estacionário, etc...

Notemos que, resolvendo TOV, encontraremos o que se conhece como uma solução interior, neste caso para um sistema em transição de fase tipo gás-líquido.

Tal solução interior nos permite conhecer como é a métrica do espaço-tempo. Assim, podemos calcular as componentes do tensor de curvatura, que seria a informação necessária para conseguir nosso propósito de analisar a geometria associada com a transição de fase, através dos escalares de curvatura (Ricci, Kretschmann).

Dos diversos modelos estelares, o caso ‘pressão constante’ nos motiva a pensar em soluções dependentes do tempo, já que se apresenta uma aparente instabilidade do sistema

auto-gravitante. Faremos uma discussão a respeito.

3.2 Resumo do Procedimento

- O sistema será modelado como um sistema de partículas idênticas e com simetria esférica.
- A métrica é diagonal e independente do tempo. O tensor de energia-momentum corresponde ao tensor de energia momentum para fluidos perfeitos. O sistema de partículas é governado pelas equações de TOV.
- As pressões e densidades no interior do sistema satisfazem uma equação de estado característica para sistemas em transição de fase. Aqui aparece o problema da descontinuidade da derivada da pressão nos pontos de interface, já que a equação TOV seria singular e impossível de ser resolvida diretamente. Além do anterior, se apresenta mais um problema conceitual, o fato de que as componentes dos tensores têm que ser de classe C^2 . O caminho alternativo é usar equações de estado do tipo virial com um domínio pequeno em torno de tais pontos de interface, a fim de suavizar e acoplar as diferentes regiões, convertendo nossa equação de estado numa função de classe C^2 .
- Aplicamos as equações da hidrodinâmica relativística no equilíbrio (TOV) para resolver o problema, ou seja, calcular a pressão, a massa e a densidade do sistema. Para isto, desenvolvemos um código computacional para resolver TOV em cada uma das regiões da estrela. Usamos como base do código o algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4.
- Conhecendo a distribuição de matéria no interior da estrela, somos capazes de calcular as componentes da métrica, segundo as equações (1.65) e (1.66) e com esta informação, calculamos os invariantes de curvatura (escalar de Ricci e invariante quadrático de Kretschmann).
- Finalmente analisamos os resultados limites.

3.3 Validação do Código.Exemplo do gás ideal.

Como a solução para os gases ideais é conhecida, então apresentamos a solução numérica da equação TOV para este caso, como uma forma de verificar a validade do código desenvolvido. A equação de estado para o gás ideal pode ser escrita como

$$P = \beta\rho, \quad (3.1)$$

onde $\beta = kT$. Lembremos que, neste caso, o sistema de equações TOV é da forma

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{c^2}{r[r-2m]} \left[m + \frac{4\pi\kappa}{c^4} r^3 P \right] \left[\rho + \frac{P}{c^2} \right]$$

$$\frac{\partial m}{\partial r} = \frac{4\pi}{c^2} \kappa \rho r^2$$

$$P = \beta\rho$$

$$\exp(-\lambda) = 1 - \frac{2m(r)}{r}$$

$$\nu' = -\frac{2p'}{\rho c^2 + p}.$$

Usaremos um sistema de unidades, tal que $c^2 = 1$. Para simplificar o sistema de equações, fazemos as seguintes mudanças de escala para o raio e a massa geométrica: $r = R_0 \widehat{R}$, $m = R_0 \widehat{F} \widehat{R}^2$, onde R_0 satisfaz a relação $4\pi\kappa R_0^2 = 1$. Assim, as primeiras três equações diferenciais do sistema TOV podem ser resolvidas a fim de conhecer a estrutura interna de uma estrela formada por um gás ideal, de tal forma que o sistema para resolver fica

$$\frac{d\rho}{d\widehat{R}} = -\frac{(\widehat{F} + \widehat{R}\beta\rho)\rho}{1 - 2\widehat{F}\widehat{R}} \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right)$$

$$\frac{d\widehat{F}}{d\widehat{R}} = \rho - 2\frac{\widehat{F}}{\widehat{R}},$$

e usando a condição inicial $(\widehat{R}, \rho_0, \widehat{F}_0) = (0, 2, 0)$, resolvemos TOV para diferentes valores de β .

Apresentamos os gráficos de $P(r)$ e $\rho(r)$, onde se observa para cada caso um núcleo

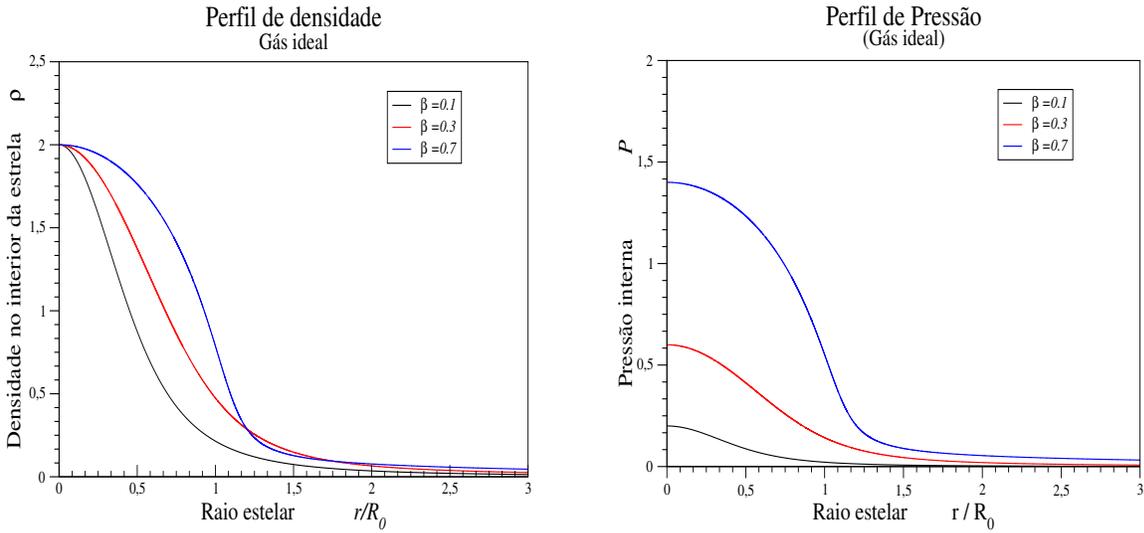


Figura 3.1: Gráficos da densidade e da pressão do gás ideal, como funções do raio estelar.

denso de altas pressões, e que longe do núcleo, tanto a pressão quanto a densidade decaem como gaussianas, mostrando o comportamento típico do interior estelar. A massa estelar aumenta com o raio, segundo a figura (3.2), Uma vez conhecida a distribuição da matéria

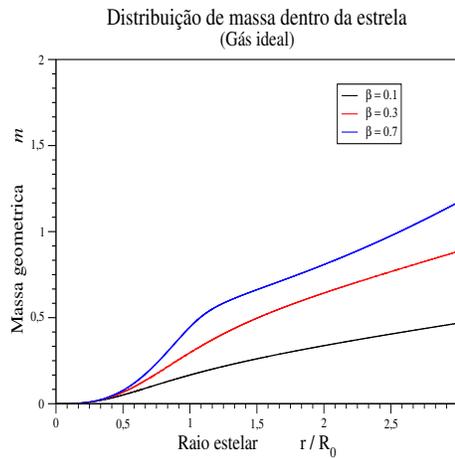


Figura 3.2: Massa geométrica em função do raio da estrela.

no interior da estrela, somos capazes de analisar a geometria do espaço-tempo.

Calculamos os elementos do tensor métrico, e conhecendo as componentes g_{00} e g_{11} ,

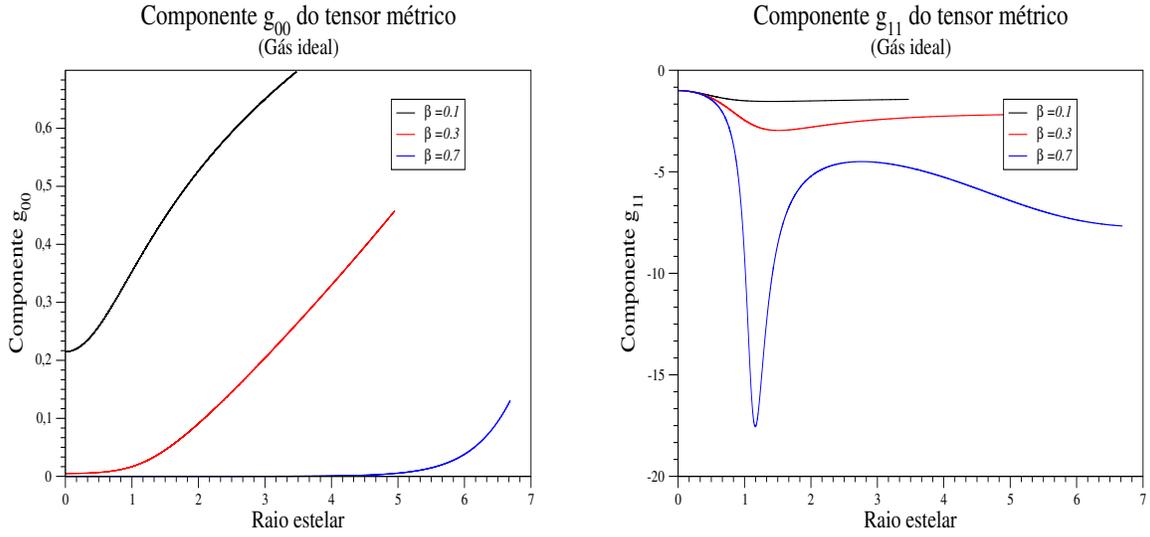


Figura 3.3: Gráficos das componentes g_{00} e g_{11} do tensor métrico para o gás ideal, como funções do raio estelar.

podemos estudar a curvatura do espaço-tempo, através dos invariantes de curvatura. O escalar Kretschmann se define como $K = R^{abcd}R_{abcd}$, e o escalar de Ricci como $R = g^{ab}R_{ab}$. Usando as componentes não nulas do tensor de curvatura, podemos calcular que o escalar de Kretschmann é

$$K = R^{abcd}R_{abcd} = \frac{1}{R_0^2} \left(\left((1 + \beta)\rho - 2\frac{\widehat{F}}{\widehat{R}} \right)^2 + 2 \left(\beta\rho + 2\frac{\widehat{F}}{\widehat{R}} \right)^2 + 2 \left(\rho - 2\frac{\widehat{F}}{\widehat{R}} \right)^2 + 4 \left(\frac{\widehat{F}}{\widehat{R}} \right)^2 \right),$$

e o escalar de curvatura R , pode ser escrito simplesmente tal que

$$R = \frac{2}{R_0^2} (\rho - 3P) .$$

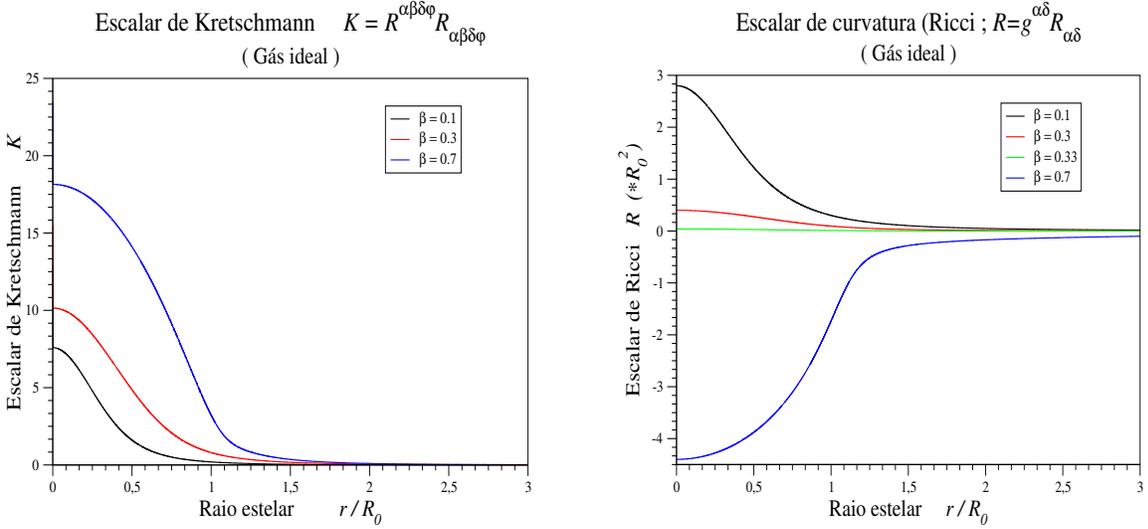


Figura 3.4: Escalares de curvatura de Ricci e Quadrático de Kretschmann, para uma estrela formada por um gás ideal.

Lembrando que o caso $P = \frac{1}{3}\rho$ define um gás de fótons, podemos ver no gráfico do escalar de Ricci para este caso ($\beta = \frac{1}{3}$) que $R = 0$ para todo o perfil da estrela, o que nos permite ver que o código está funcionando corretamente.

3.4 Resolução da equação TOV para um sistema em transição de fases.

O sistema de equações que resolve a estrutura interna da estrela é dado pelas equações (1.62), (1.63), (1.64). Explicitamente, para as regiões onde o sistema se comporta como líquido ou gás, as equações TOV são da forma

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{c^2}{r[r-2m]} \left[m + \frac{4\pi\kappa}{c^4} r^3 P \right] \left[\rho + \frac{P}{c^2} \right]$$

$$\frac{\partial m}{\partial r} = \frac{4\pi}{c^2} \kappa \rho r^2$$

$$P = \frac{kT\rho}{1-b\rho} - a\rho^2 .$$

Usando as variáveis reduzidas, fazemos as seguintes mudanças de escala:

$$r = r_0 \hat{r} \quad P = P_r P_c \quad \rho = \rho_r \rho_c \quad T = T_r T_c \quad m = \hat{m} r_0$$

e o sistema de equações fica nas variáveis reduzidas:

$$\frac{\partial P_r}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{\hat{r}(\hat{r}-2\hat{m})} \left[\hat{m} + \frac{4\pi\kappa}{c^4} r_0^2 P_c \hat{r}^3 P_r \right] \left[\frac{\rho_c}{P_c} c^2 \rho_r + P_r \right]$$

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{r}} = \frac{4\pi}{c^2} \kappa r_0^2 \rho_c \hat{r}^2 \rho_r$$

$$P_r = \frac{8T_r \rho_r}{3 - \rho_r} - 3\rho_r^2 .$$

Das relações (2.15) sabemos que $P_c = \frac{a}{3}\rho_c^2$ e então:

$$\frac{\partial P_r}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{\hat{r}(\hat{r}-2\hat{m})} \left[\hat{m} + \left(\frac{4\pi\kappa}{c^2} r_0^2 \rho_c \right) \frac{a\rho_c}{3c^2} \hat{r}^3 P_r \right] \left[\frac{3c^2}{a\rho_c} \rho_r + P_r \right]$$

$$\frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{r}} = \left(\frac{4\pi}{c^2} \kappa r_0^2 \rho_c \right) \hat{r}^2 \rho_r$$

$$P_r = \frac{8T_r \rho_r}{3 - \rho_r} - 3\rho_r^2 .$$

Escolhemos um sistema de unidades tal que

$$\frac{a\rho_c}{c^2} = 1 ,$$

com r_0 tal que

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}r_0^2 \equiv 1 .$$

Assim o sistema de equações TOV fica na forma simples:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_r}{\partial \hat{r}} &= -\frac{1}{\hat{r}(\hat{r} - 2\hat{m})} \left[\hat{m} + \frac{\hat{r}^3 P_r}{3} \right] [3\rho_r + P_r] \\ \frac{\partial \hat{m}}{\partial \hat{r}} &= \hat{r}^2 \rho_r \\ P_r &= \frac{8T_r \rho_r}{3 - \rho_r} - 3\rho_r^2 . \end{aligned}$$

Para conseguir uma separação de variáveis no denominador da equação TOV , fazemos a seguinte mudança :

$$\hat{m} = \hat{r}^2 \hat{F}$$

e assim, o sistema fica simplificado

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_r}{\partial \hat{r}} &= -\frac{1}{(1 - 2\hat{r}\hat{F})} \left[\hat{F} + \frac{\hat{r}P_r}{3} \right] [3\rho_r + P_r] \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{r}} &= \rho_r - 2\frac{\hat{F}}{\hat{r}} \\ P_r &= \frac{8T_r \rho_r}{3 - \rho_r} - 3\rho_r^2 . \end{aligned}$$

Assim, em geral, se usamos a equação $P_r = P_r(\rho_r)$, podemos resolver para cada região da estrela um sistema de só duas equações diferenciais, a saber

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{(1 - 2\hat{r}\hat{F})} \left[\hat{F} + \frac{\hat{r}P_r}{3} \right] [3\rho_r + P_r] \left[\frac{\partial P_r}{\partial \rho_r} \right]^{-1} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{r}} = \rho_r - 2\frac{\hat{F}}{\hat{r}} , \quad (3.3)$$

dado que o sistema de equações (3.2) e (3.3) pode ser resolvido em cada região da estrela só modificando a forma explícita da pressão. Para maior simplicidade no tocante à

notação tiramos o subíndice r , mas sempre lembrando que estamos falando de pressões e densidades reduzidas, ou seja P_r fica simplesmente como P , e ρ_r como ρ , portanto, temos finalmente que o sistema para resolver será

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \hat{r}} &= -\frac{1}{\left(1 - 2\hat{r}\hat{F}\right)} \left[\hat{F} + \frac{\hat{r}P}{3}\right] [3\rho + P] \left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]^{-1} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{r}} &= \rho - 2\frac{\hat{F}}{\hat{r}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Este sistema de equações é válido para todas as regiões da estrela. De fato, o sistema (3.4) só depende de $P(\rho)$, que para nosso caso de interesse é conhecida. Usamos o sistema (3.4) em cada região da estrela, e assim, podemos obter uma solução completa das equações de TOV. Para analisar a geometria do espaço-tempo calculamos o escalar de curvatura de Ricci

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (3.5)$$

mas, de acordo com as mudanças de escalas feitas e o sistema de unidades usado, o escalar de curvatura de Ricci fica

$$R = \frac{2}{R_0^2} \rho_c (\rho - P), \quad (3.6)$$

o qual é obtido pela contração do tensor de Ricci que aparece nas equações de Einstein. Porém, a informação que ele fornece não é muita. Por esta razão, além do escalar de Ricci, analisaremos o invariante quadrático de Kretschmann K , definido como

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.7)$$

e para este caso, pode-se calcular diretamente usando a relação

$$K = \frac{1}{R_0^2} \left(\left(\rho + \frac{P(\rho)}{3} - 2\frac{\hat{F}}{r} \right)^2 + 2 \left(\rho - \frac{\hat{F}}{r} \right)^2 + 2 \left(P(\rho) + \frac{\hat{F}}{r} \right)^2 + 4 \left(\frac{\hat{F}}{r} \right)^2 \right). \quad (3.8)$$

Agora definimos as condições iniciais do problema.

Usamos uma temperatura crítica T , tal que $T < 1$, assim o sistema está em transição de fase. Usamos $T = 0.9$. Para o intervalo de validade dos polinômios, definimos $\chi = 0.005$ e fazemos $\xi = 0.00005$, de modo que o resultado mostre a tendência do comportamento do sistema em transição de fase com uma boa aproximação. Nas seções seguintes, apresentamos a solução numérica do sistema de equações diferenciais TOV, com a condição inicial $(\hat{R}, \rho_0, \hat{F}_0) = (0, 2, 0)$, de modo que estamos estudando um sistema com um núcleo de grande densidade central.

3.4.1 Distribuição de matéria no interior da estrela em transição de fases

Gráfico de densidade em função de raio estelar. Analisando o gráfico de densidade 3.5, vemos que o resultado obtido

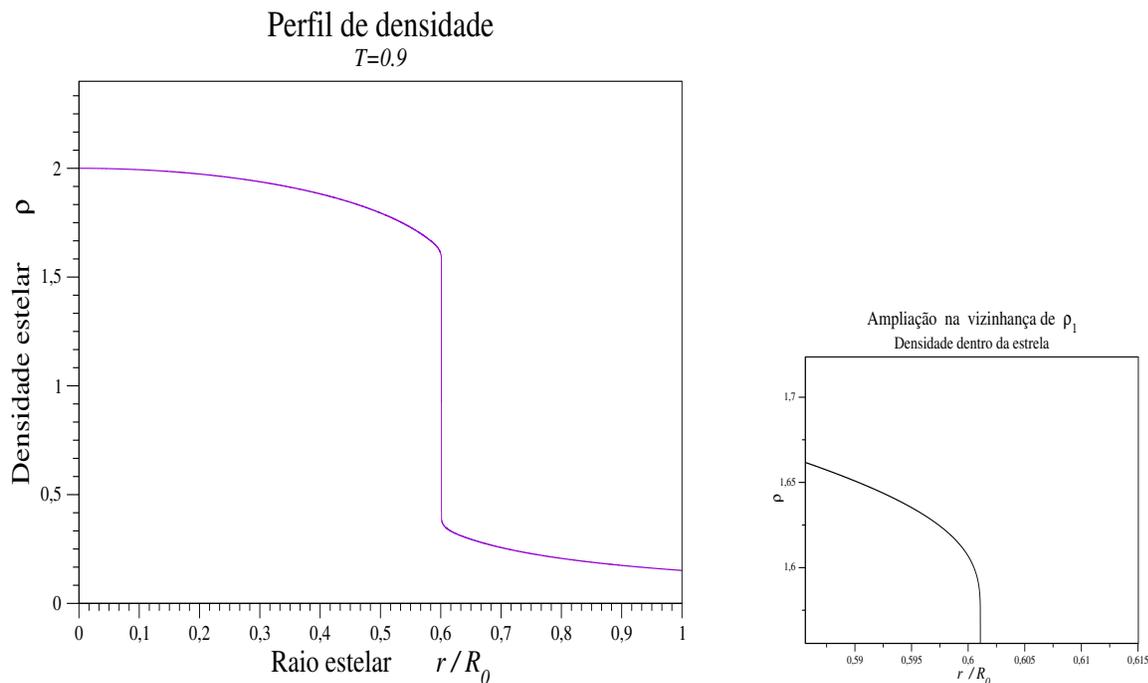


Figura 3.5: Perfil de densidade numa estrela em transição de fases. No gráfico da direita se apresenta uma ampliação do gráfico de densidade na vizinhança de ρ_1 , a fim de enxergar a suavização feita pelo polinômio de acoplamento na fronteira da região gasosa.

através da relatividade geral não contradiz a termodinâmica existente em nosso modelo, no sentido de que a transição de fase aparece nitidamente, logo que se resolve TOV, já que se observa uma queda brusca da densidade em $r \approx 0.6R_0$. Assim podemos pensar na região densa ($r < 0.6R_0$) como se fosse um líquido e a região menos densa ($r > 0.6R_0$) como se fosse um gás. Segundo o gráfico (3.5), vemos que a transição de fases acontece nas proximidades de $r = 0.6R_0$. Notemos que ampliando o gráfico de densidade podemos enxergar que ela é uma curva suave, assim como é mostrado no exemplo apresentado na figura (3.5).

Gráfico de Pressão em função do raio estelar. Vemos que mesmo que a equação de TOV foi resolvida perto do limite $\chi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 0$, o gráfico de pressão 3.6

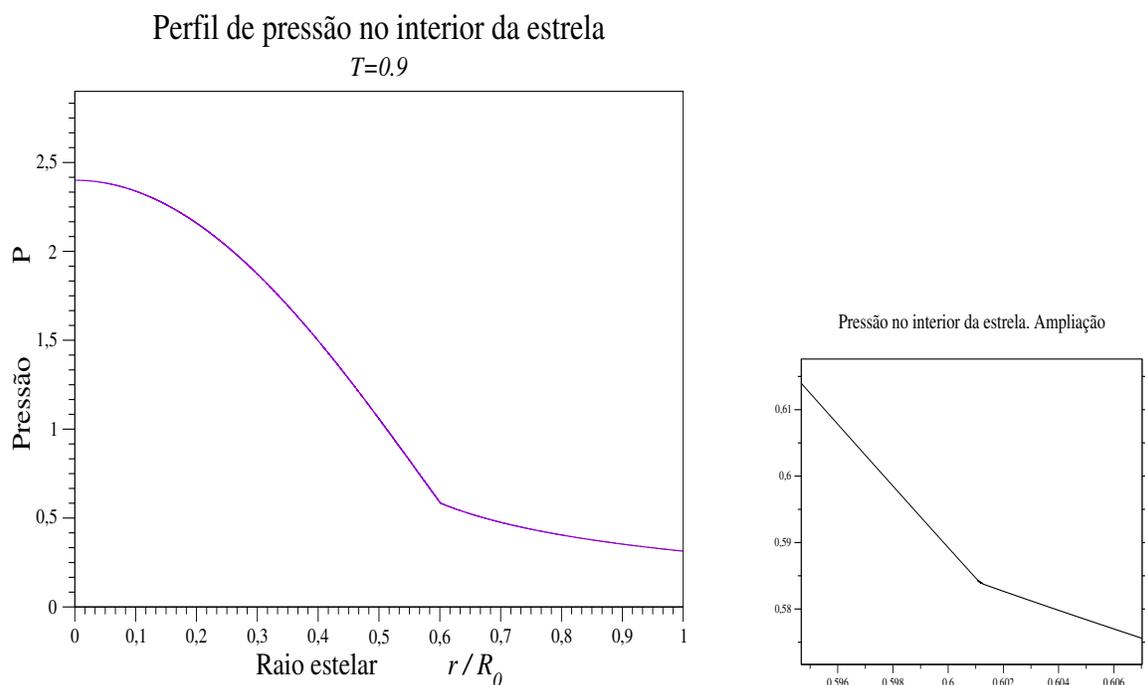


Figura 3.6: Perfil de pressão numa estrela em transição de fases e uma ampliação na região de coexistência que mostra uma suavidade local da pressão.

apresenta uma continuidade da derivada um tanto forçada pelos polinômios de acoplamento, o que nos motiva a pensar que no limite se conserva a descontinuidades da derivada da pressão, o que seria totalmente razoável no sentido de que originalmente a equação de estado é claramente de derivada descontínua. O comportamento da pressão, tanto no centro da estrela, quanto distante do núcleo, não manifesta problemas, no sentido de que as altas e baixas pressões aparecem nas regiões mais e menos densas, respectivamente. A possível descontinuidades da derivada pode ser explicada pela queda brusca de densidade nas proximidades de $r = 0.6R_0$.

Gráfico da massa geométrica. Segundo a equação (1.63), a variação

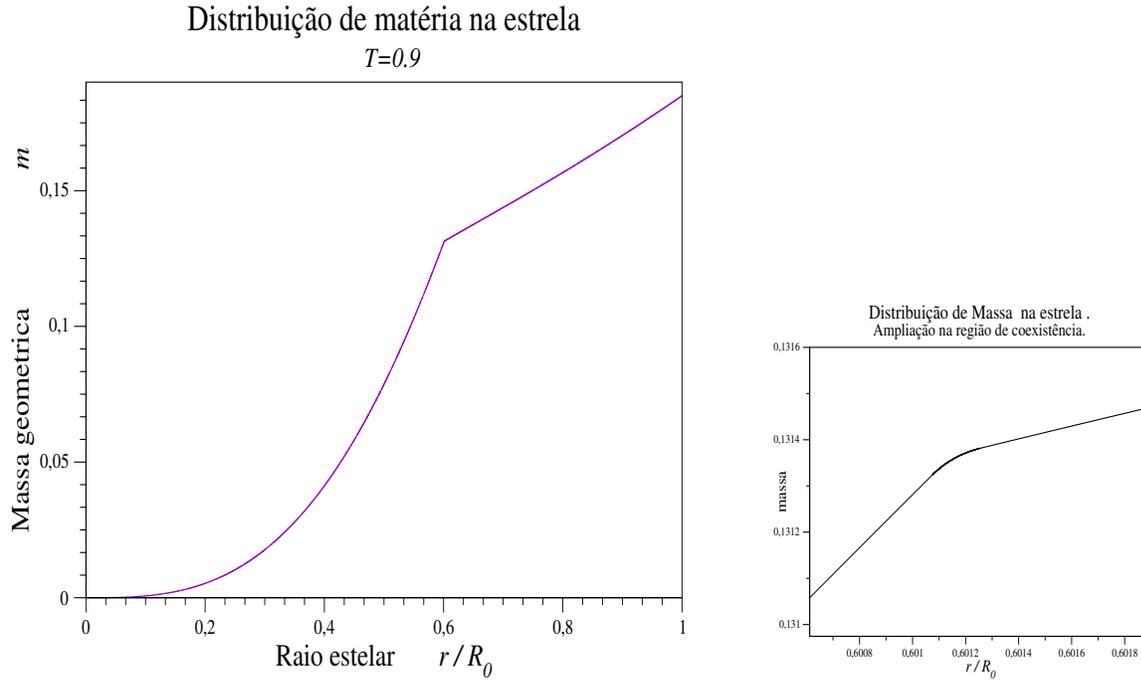


Figura 3.7: Distribuição de massa numa estrela em transição de fases e uma ampliação que mostra a suavidade da curva de massa.

de massa é proporcional à densidade. Porém, como existe uma queda brusca da densidade, podemos pensar que no limite a derivada da massa seria descontínua, aumentando rapidamente na região do líquido, e menos rapidamente na região de gás, tal como se manifesta na figura 3.7.

3.4.2 Geometria do espaço-tempo no interior da estrela em transição de fases

Dado que conhecemos a distribuição de matéria e a pressão dentro da estrela, usamos as equações (1.65) e (1.66) para calcular as componentes da métrica.

Gráfico de g_{00} . A componente g_{00} do tensor métrico é calculada após se conhecer ν como função do raio da estrela, dado que $g_{00} = \exp \nu$, e ν pode ser calculada integrando (1.66), onde a constante de integração é calculada dando uma condição de contorno, por exemplo, continuidade de ν na superfície da estrela, e dizer, se r_f é o raio da estrela então

$$g_{00}(r_f) = 1 - \frac{2m(r_f)}{r_f}, \quad (3.9)$$

o que significa que g_{00} tem que ser equivalente com a solução de Schwarzschild exterior. Notamos que g_{00} não reflete mudanças abruptas na região de transição de fases.

Componente g_{00} do tensor métrico

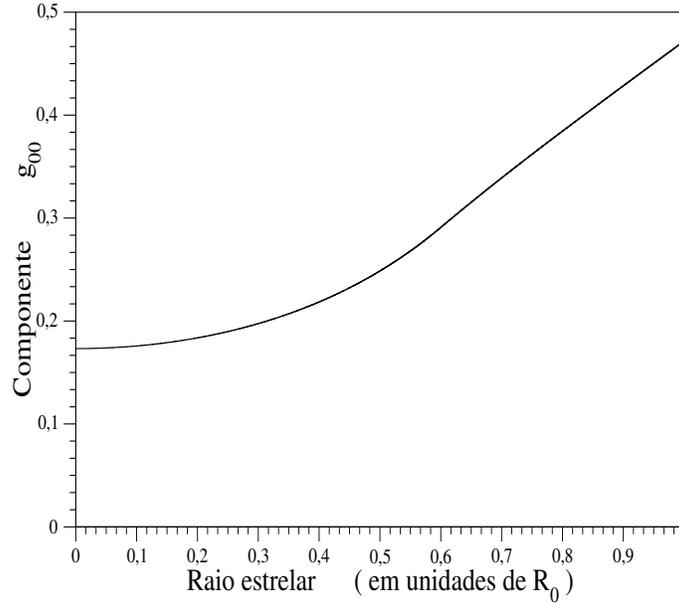


Figura 3.8: Componente g_{00} do tensor métrico dentro da estrela em transição de fases.

Para este caso usamos como raio da estrela o valor $r_f = 1.374R_0$.

Gráfico de g_{11} . A componente g_{11} do tensor métrico é calculada após se conhecer λ como função do raio da estrela, dado que $g_{11} = -\exp \lambda$, e λ pode ser calculada diretamente de (1.65). Vemos que g_{11} apresenta um comportamento tal que no limite sua derivada

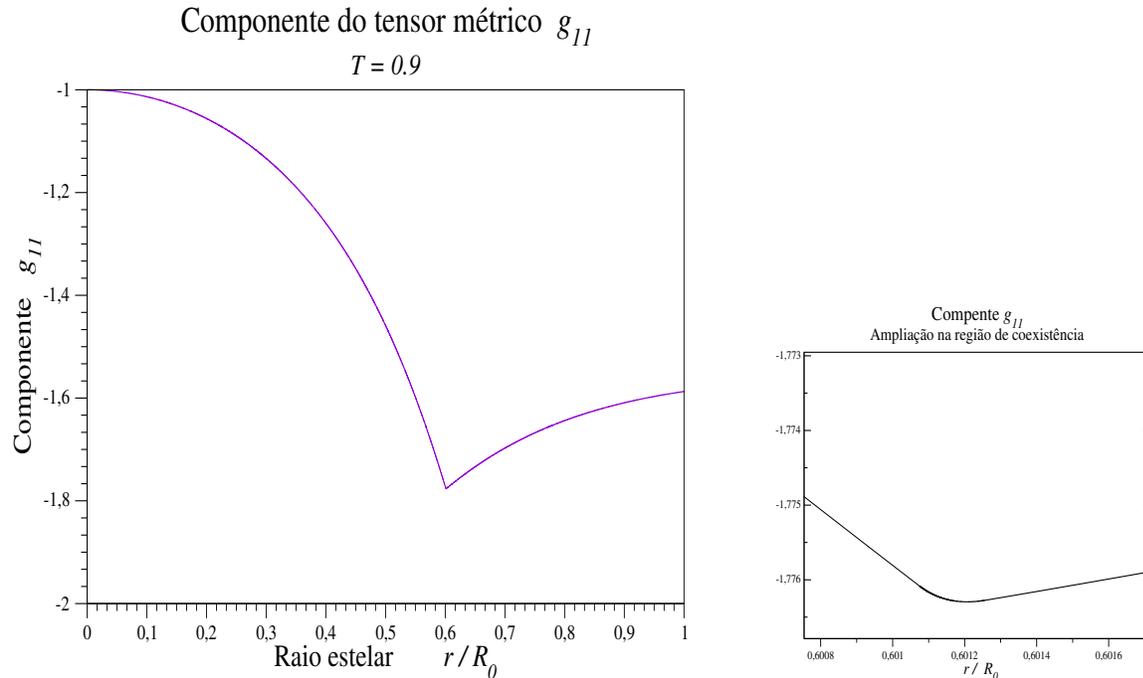


Figura 3.9: Componente g_{11} do tensor métrico dentro da estrela em transição de fases e sua ampliação na região de coexistência para observar a continuidade da derivada de g_{11} induzida pelos polinômios de acoplamento.

será descontínua na região de coexistência.

Usando os resultados anteriores, estudaremos o invariante de curvatura de Kretschmann.

O Invariante quadrático de Kretschmann. Observa-se do gráfico 3.4.2 que a curvatura de Kretschmann apresenta uma proporcionalidade direta, com respeito à distribuição de

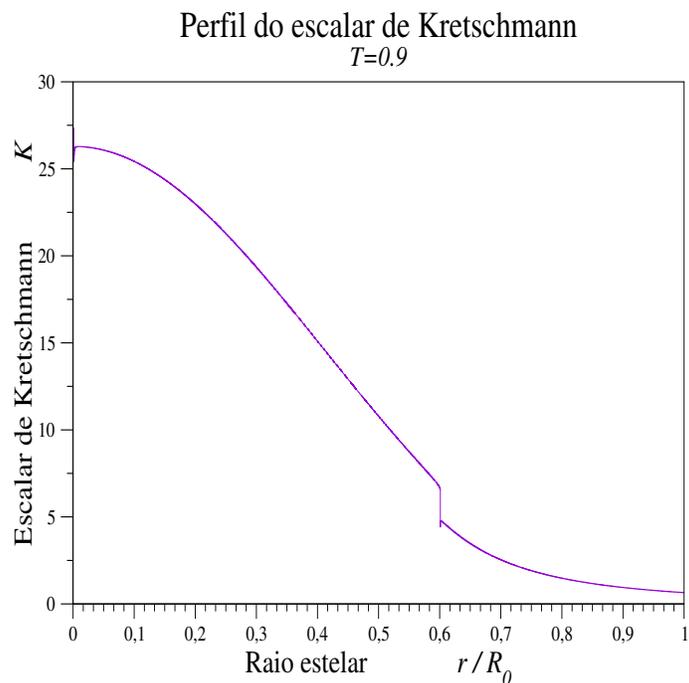


Figura 3.10: Invariante quadrático de Kretschmann.

massa dentro da estrela, ou seja, o máximo valor de curvatura se encontra no núcleo da estrela e para grandes distâncias, a curvatura tende para zero, o que significa que a métrica interna é assintoticamente igual à métrica de Schwarzschild, ou seja, distante da estrela, o espaço-tempo é chato. Na região de transição, podemos esperar um comportamento anômalo nas proximidades de $r = 0,6R_0$, dado que o escalar de Kretschmann pode ser escrito em termos da densidade, da pressão, e da massa, onde cada uma delas apresenta, no mínimo, mudanças abruptas de declividade na vizinhança de $r = 0,6R_0$. De fato, o invariante quadrático de Kretschmann apresenta uma queda análoga ao caso da densidade.

Não obstante, se observamos de perto a região de transição, podemos ver que a curva é bem comportada, segundo o gráfico do escalar de Kretschmann ampliado que se apresenta na figura (3.4.2).

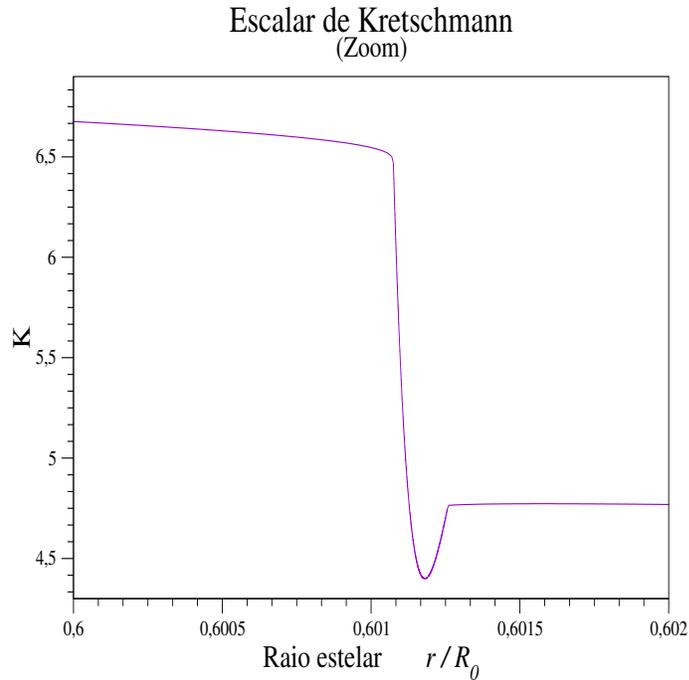


Figura 3.11: Invariante quadrático de Kretschmann(ampliado na região de transição de fase).

Mas não podemos afirmar que aquele comportamento, tenha uma explicação física, devido ao fato de que poderia ser simplesmente um problema numérico ou uma contribuição dada pelos polinômios de acoplamento. Porém, precisamos fazer um estudo um pouco mais elaborado. Fazemos tender χ para zero, e analisamos os gráficos ampliados do escalar de Kretschmann, correspondentes para cada χ e inclinação constante, a fim de esclarecer a natureza do poço que aparece no escalar de Kretschmann da figura (3.4.2).

Então para os casos $\chi = 0.1$, $\chi = 0.05$, $\chi = 0.01$ e inclinação constante, tal que $\xi = 0.00005$, vemos que os gráficos ampliados do escalar de Kretschmann são: Notemos que,

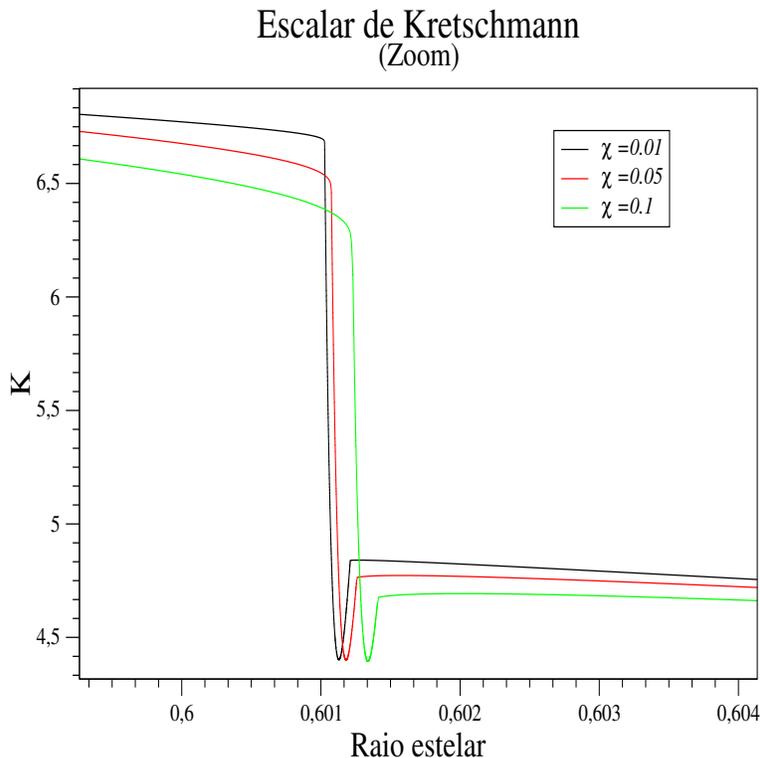


Figura 3.12: Invariante de Kretschmann(ampliado).

a informação que podemos extrair do gráfico da figura (3.4.2) não é muito esclarecedora, dado que a diminuição do intervalo de domínio dos polinômios (associado ao valor de χ), não altera de forma considerável a largura do poço. Poder-se-ia pensar que a curva está se deslocando em torno de alguma curva limite. Não obstante, para ter certeza do que realmente acontece, temos que fazer uma análise ainda mais detalhada do que acontece na região de coexistência. A outra alternativa é mudar a inclinação, de tal forma que ela tenda para zero, e estudar o caso limite de pressão constante. A fim de entender o comportamento da curvatura no limite $P = constante$, estudamos o caso isolado, no qual a equação de estado é uma reta qualquer, com uma certa inclinação, e então diminuimos a inclinação e resolvemos novamente TOV, e assim, sucessivamente, até que possamos esclarecer o que acontece no limite $P = constante$.

3.5 Análise de um sistema a pressão constante

Vamos analisar o caso no qual o sistema esteja a pressão constante. Numa primeira impressão, nós poderíamos pensar que um sistema a pressão constante é completamente instável em relatividade geral, e que não poderia ser tratado como um problema estacionário. Assim, ele teria que ser estudado de forma completamente diferente. Não obstante, nós esqueceremos por um momento este impedimento conceitual, e analisaremos o caso pressão constante no contexto das equações de TOV. Definimos uma equação de estado simples da forma tal que a relação entre a pressão e a densidade seja uma reta de pendente β e que passe pelo ponto-estado $(P = 1, \rho = 1)$, ou seja

$$P(\rho) = \beta\rho + 1 - \beta, \quad (3.10)$$

a qual será definida como válida no intervalo $0.5 < \rho < 1$. Vemos que β representa neste caso a inclinação da reta. Assim, resolveremos TOV para diferentes ângulos, cada vez mais perto do limite $\beta \rightarrow 0$, ou seja, cada vez mais perto de $P = 1 = \text{constante}$. Escolhemos a condição inicial tal que $(\hat{R}, \rho_0, \hat{F}_0) = (0, 1, 0)$ e deteremos a iteração quando $\rho = 0.5$. Assim, com estas condições, temos que

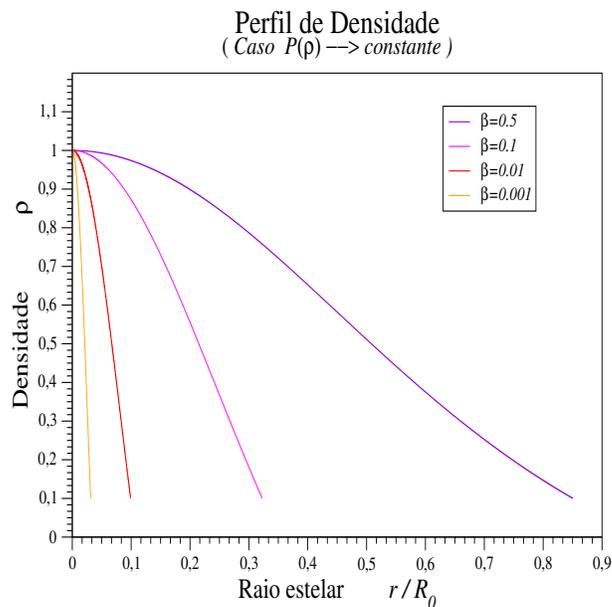


Figura 3.13: Gráfico da densidade em função do raio, para um caso no qual a pressão tende ser constante.

Do gráfico anterior, vemos que à medida que o ângulo diminui, a gaussiana que representa a densidade torna-se cada vez mais parecida com uma função tipo degrau que assume o valor 1 no $\rho = 0$ e 0 no resto. Mas, a diferença é o fato de que o domínio no raio cai para zero.

Se analisamos o gráfico de pressão, vemos que a curva de pressão tende ser constante, tal

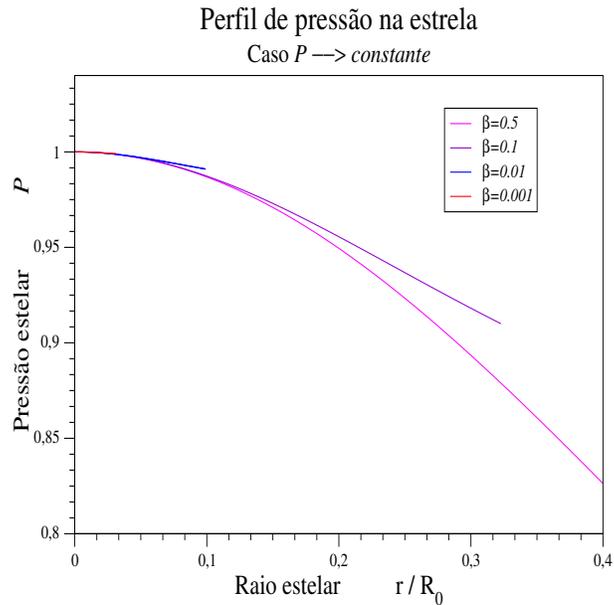


Figura 3.14: Gráfico da pressão do sistema, para um caso no qual tende ser constante.

como deve ser no limite $\beta \rightarrow 0$, mas seu domínio também cai para zero, ou seja o caso $P = \text{constante}$ acontece só num ponto, que coincide com o ponto inicial ($r_0 = 0, P_0 = 1$). Este resultado será muito importante para as deduções finais.

Continuando o análise do caso pressão constante, analisamos agora o gráfico do escalar de curvatura de Kretschmann. Neste gráfico, se observa como o escalar de Kretschmann

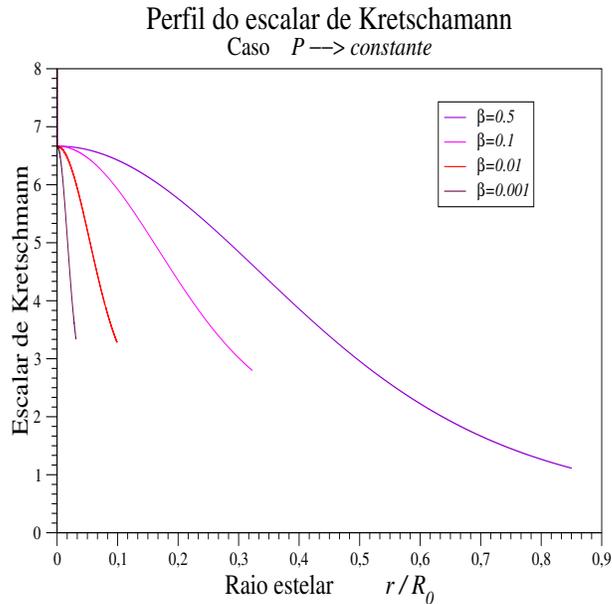


Figura 3.15: Escalar de Kretschmann.

tem um comportamento muito similar ao da densidade, tendendo também para uma função tipo degrau que assume um valor finito diferente de zero só para $r = 0$. Em conclusão, se o caso $P = \text{constante}$ é tratado em forma estacionária, em geral nos entrega como solução o fato de que $P = \text{constante}$ só acontece numa superfície da estrela. Porém a possível instabilidade do sistema para quando $P = \text{constante}$ não existe devido ao fato de que a estrela pode ser tratada como uma folhagem de superfícies esféricas isobáricas e acronais(ver [3]), das quais só uma delas admite uma transição de fase.

3.5.1 Resultados finais

Nas seções anteriores, foi resolvida a equação de TOV para o caso de um sistema em transição de fase do tipo gás-líquido, em forma aproximada, dado que utilizamos os polinômios de acoplamento. Analisamos os resultados obtidos, e concluimos que no limite, ou seja, no caso sem aproximações, a região de coexistência de fases está associada com uma região dentro da estrela. Tal região é a superfície de uma esfera de raio fixo, e que para o caso estudado, onde a temperatura reduzida do sistema assume o valor $T = 0.9$, a superfície na qual acontece a transição de fase é dada por $r \approx 0.6R_0$. Agora, somos capazes de resolver nosso problema sem ajuda de tais polinômios, posto que a seção anterior nos indicou que a região de coexistência é só uma superfície de raio fixo. Porém podemos resolver TOV só nas regiões puras e logo acoplamos as soluções naquela superfície da estrela, onde acontece a transição de fase. Assim, apresentamos a solução esperada para equações de TOV, no limite desejado, ou seja, para o caso da estrela em transição de fase. A densidade cai abruptamente em $r = 0.57129R_0$, manifestando a transição de fase, tal

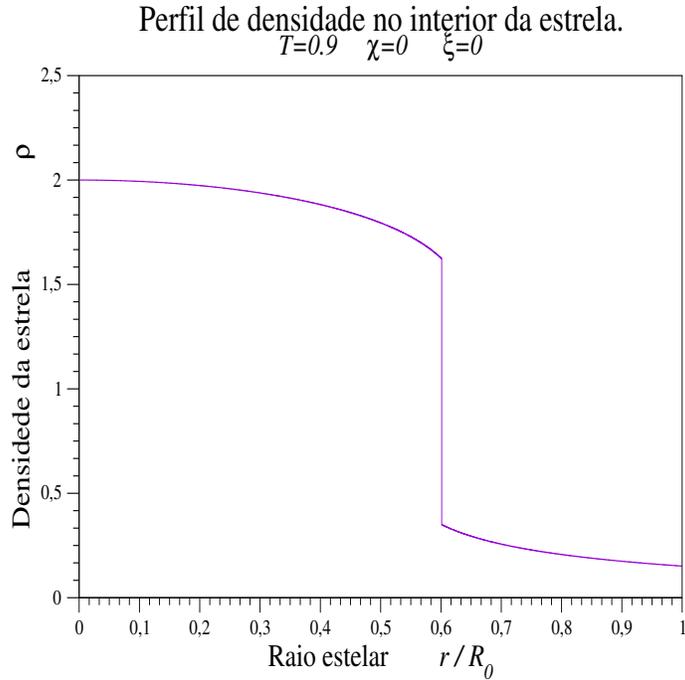


Figura 3.16: Perfil de densidade numa estrela em transição de fases.

como se esperava segundo a análise da solução aproximada.

Perfil de pressão no interior da estrela.

$$T=0.9 \quad \chi=0 \quad \xi=0$$

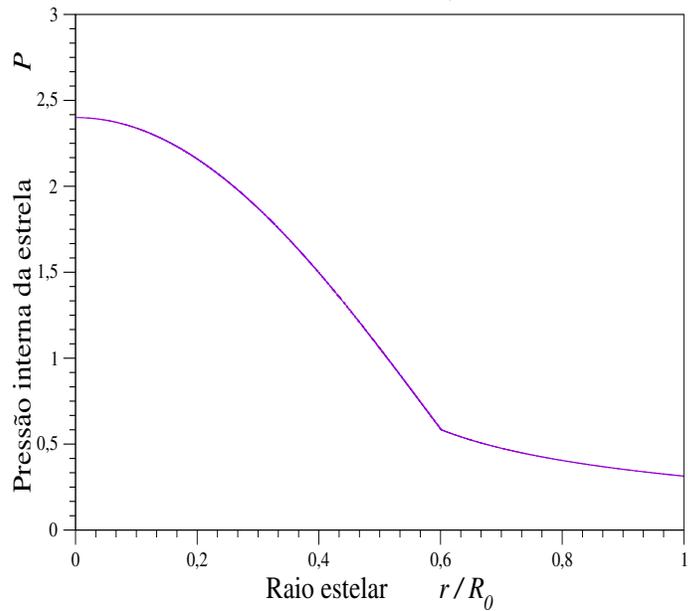


Figura 3.17: Perfil de Pressão numa estrela em transição de fases.

A pressão tem derivada descontínua na superfície de coexistência. A diferença com o caso aproximado é quase nula.

Se comparamos com o gás ideal, observamos que um gás real só difere do gás ideal no tocante ao comportamento da pressão na superfície de coexistência, onde a pressão do gás real não é suave.

Distribuição de matéria no interior da estrela.

$$T=0.9 \quad \chi=0 \quad \xi=0$$

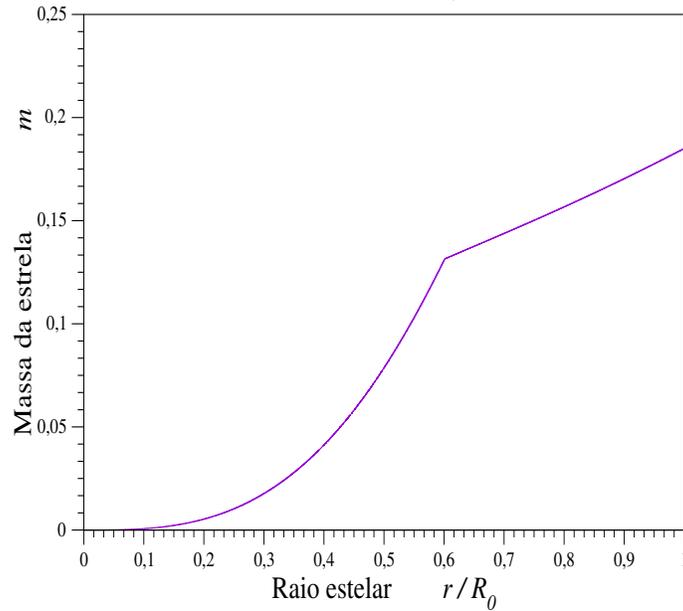


Figura 3.18: Distribuição de massa numa estrela em transição de fases.

Notemos que $m(r)$ representa a massa que existe dentro de uma esfera de raio r . Deste modo, ela é crescente e só apresenta uma ruptura de seu comportamento na superfície de coexistência, onde a densidade sofre uma mudança brusca, o que justifica o fato da descontinuidade da derivada da massa.

Dado que conhecemos a distribuição de matéria dentro da estrela, podemos agora calcular a geometria dentro da estrela. Para isso, calculamos as componentes do tensor métrico e os escalares de curvatura (os gráficos das componentes no caso exato e no caso aproximado são praticamente iguais).

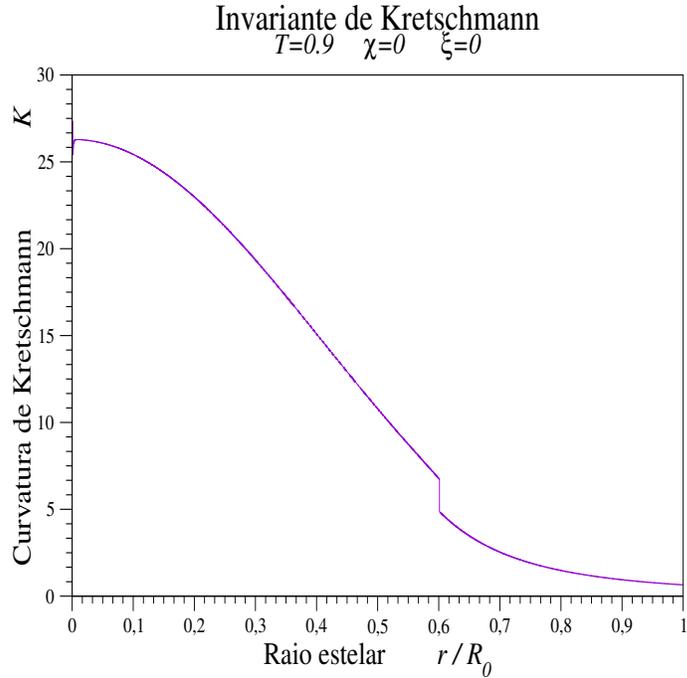


Figura 3.19: Invariante quadrático de Kretschmann.

O escalar de curvatura de Kretschmann apresenta uma queda em $r = 0.5713R_0$, devido à transição de fase. No caso aproximado, os polinômios de acoplamento que suavizavam a equação de estado contribuíam com uma suavização na região de coexistência para o escalar de Kretschmann. É por esta razão que na figura (3.4.2) aparece a queda do escalar em forma suave. Mas o fato de que a transição acontece só na superfície de coexistência nos indica que a curvatura sofre uma transição análoga com aquela que sofre a matéria em nosso sistema, uma espécie de ‘transição de curvatura’.

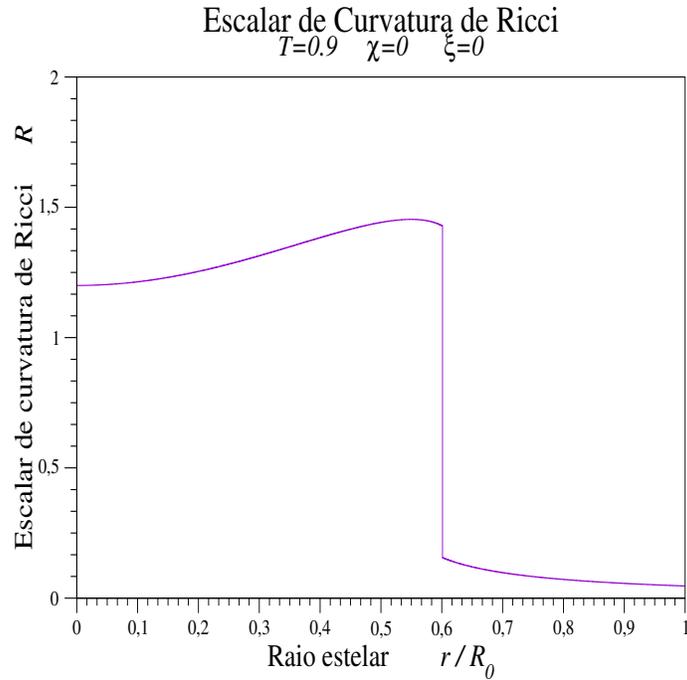


Figura 3.20: Escalar de curvatura de Ricci.

Apresentamos o gráfico do escalar de curvatura de Ricci, só para complementar o fato de que a curvatura do espaço-tempo e a matéria comportam-se de forma similar, pois tanto a matéria quanto a curvatura apresentam transições. Notemos que, a solução das equações de TOV foram feitas para uma isoterma, em particular para $T = 0.9$. Não obstante, poderíamos usar qualquer outra isoterma que apresente transições de fase, e as conclusões seriam as mesmas, pois o comportamento do sistema seria análogo.

Vimos que para $T = 0.9$ a transição de fase se manifestava na estrela em $r = 0.57129R_0$. Obviamente, para outras isothermas a superfícies de coexistência seriam diferentes. Em continuação, apresentamos o gráfico que relaciona a temperatura do sistema e a superfície de coexistência. Na estrela existe uma região onde acontece a transição

Superfície de transição de fase em função da temperatura

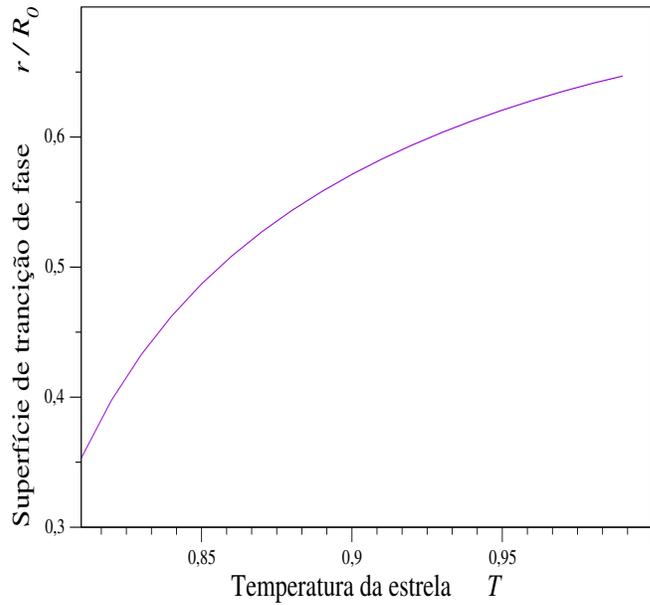


Figura 3.21: Superfície de coexistência versus Temperatura.

de fase, que é chamada de superfície de coexistência, e ela depende da temperatura do sistema da maneira como aparece no gráfico(3.5.1). Lembremos que nosso sistema é estacionário e esta curva não representa uma evolução temporal.

Além do gráfico anterior, apresentamos o gráfico que dá conta da quantidade de matéria dentro da superfície de coexistência em função da temperatura. Vemos que o núcleo

Massa no interior da Superfície de coexistência

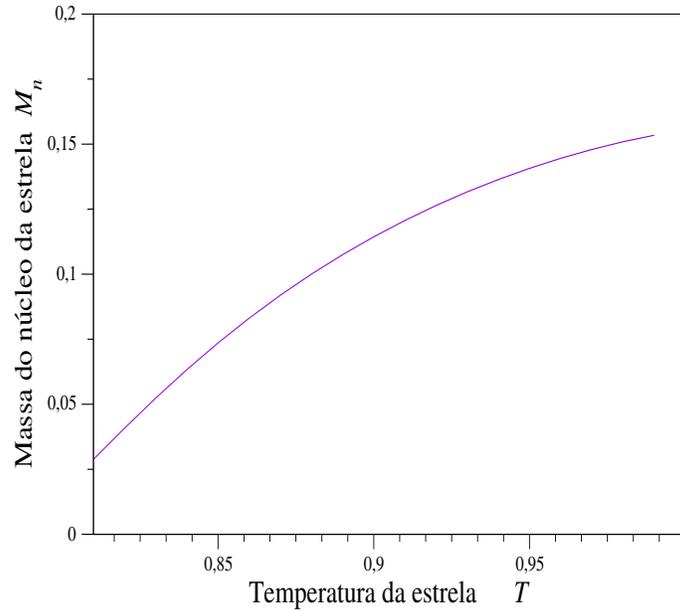


Figura 3.22: Quantidade de matéria no núcleo da estrela.

da estrela pode ser caracterizado pelo interior da superfície de coexistência. Notemos que conhecendo como muda a temperatura no tempo, poderíamos fazer um modelo quasi-estático de colapso gravitacional, já que estudaríamos a evolução temporal infinitesimal do núcleo da estrela.

Capítulo 4

Conclusão

Esta dissertação foi elaborada com a finalidade de analisar o que acontece num espaço-tempo que possui matéria em transição de fase. Considerando as dificuldades inerentes na proposta em discussão, o trabalho refletiu na necessidade de simplificar o problema, de tal forma a não perder generalidade com respeito a nosso objetivo. A fim de atender ao propósito estabelecido, as considerações feitas no trabalho foram:

- O sistema está formado por partículas neutras e idênticas;
- O sistema de partículas é auto-gravitante;
- O sistema de partículas pode ser considerado um fluido perfeito;
- O sistema de partículas tem simetria esférica;
- O sistema pode ser considerado estacionário.
- A interação entre as partículas é tal que podem ocorrer transições de fase de matéria.

Tendo em vista as considerações feitas acima, o modelo estelar desenvolvido corresponde ao modelo de Tolman-Oppenheimer-Volkov(TOV), que corresponde à generalização relativista das equações de Newton para a hidrodinâmica em equilíbrio. A equação TOV precisou de uma equação de estado para ser resolvida. Porém, usamos uma equação de estado que modele alguma transição de fase de matéria. Neste caso, temos usado uma equação de estado composta basicamente de três partes: van der Waals para as regiões líquida e gasosa, e outra $P = \text{constante}$ na região de coexistência(gás-líquido), onde a constante foi calculada usando a construção de Maxwell.

Foi desenvolvido um código para resolver TOV, onde foi usado o método de Runge-Kutta de ordem 4 como base do código.

O sistema de equações diferenciais de TOV nos permitiu conhecer tanto a estrutura interna do sistema, quanto a geometria do espaço-tempo. Assim nosso objetivo foi alcançado.

Dos resultados obtidos, podemos dizer que a transição de fase manifestada na equação de estado se vê refletida na estrela como uma queda abrupta da densidade num raio determinado, separando a estrela em duas regiões, distinguidas basicamente pela grande diferença de densidades entre elas, o que nos faz pensar numa região líquida e outra gasosa, tal como se manifestava na equação de estado. Ou seja, a Termodinâmica e a Relatividade Geral se apresentam totalmente compatíveis.

Se pensamos no fato de que todo sistema estacionário com simetria esférica possui superfícies esféricas concêntricas isobáricas, então no momento de pensar numa transição de fase dentro da estrela, seria lógico assumir que, para que o sistema fique estável, a transição de fase tem que acontecer só numa superfície da estrela, e de fato isso é o que acontece. No tocante à geometria do espaço-tempo da análise dos gráficos dos escalares de curvatura notamos que o fato de que a matéria sofra uma transição de fase implica necessariamente que a curvatura sofrerá uma anomalia similar. De fato a curvatura apresenta uma queda abrupta mostrando a mesma tendência que a densidade, o que reafirma a ligação entre espaço-tempo e matéria.

Bibliografia

- [1] ADLER R.J., BAZIN M., SCHIFFER M. 1965 *Introduction to General Relativity*. Second edition. McGraw-Hill Kogakusha LTD. New York.
- [2] GREINER W., NEISE L., STOCKER H. 1995. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. SPRINGER-VERLAG, New York.
- [3] HAWKING S.W., ELLIS G.F.R. 1973. *The Large Scale Structure of space-time*. Cambridge University Press.
- [4] TOLMAN R.C. 1987. *Relativity, Thermodynamics and cosmology*. Paperback.
- [5] LUDVIGSEN M. 1999. *General Relativity, a Geometric approach*. Cambridge University Press.
- [6] CHANDRASEKHAR S. 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press.
- [7] WALD R.M. 1984. *General Relativity*. The University of Chicago Press.
- [8] BERRY M.V. 2001. *Principles of Cosmology and Gravitation*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- [9] FOSTER J., NIGHTINGALE J.D. 1998. *A Short Course in General Relativity*. Second edition. SPRINGER.