INTERPRETAÇÃO DE ALGUNS MODELOS DE CAMPOS CLÁSSICOS E SUPERSIMÉTRICOS COMO MEIOS MATERIAIS EM RELATIVIDADE GERAL

Vilson Tonin Zanchin

Este exemplar corresponde
a redação final da tese
defendida pelo aluno V.T. Zanchin
e aprovada pela comissão julgadora
Campinas 16 de Janeiro de 1992

Prof. Patricio Letelier
Orientador

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências.

janeiro/1992

AGRADECIMENTOS

– Ao professor Patricio Letelier, sem a orientação do qual este trabalho não teria sido possível.

– Ao professor Erasmo Recami, com quem o meu doutoramento foi iniciado.

– Ao grupo de Física-Matemática, pelo incentivo e pelas discussões e sugestões.

– Ao Instituo de Física "Gleb Wataghin", à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo e ao Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa, pelo apoio financeiro.

– Ao Departamento de Matemática Aplicada, por facultar-me o uso de equipamento e material necessário.

– À Pós-Graduação do Instituto de Física "Gleb Wataghin" e à Secretaria do Departamento de Matemática Aplicada, pela sua paciência.

RESUMO

Estuda-se a modelagem de meios materiais em relatividade geral a partir de meios contínuos, em princípio mais simples, como fluidos perfeitos, ou a partir de teorias de campo, como campos escalares, modelos sigma não lineares, e de campos supersimétricos.

Inicialmente revisamos o modelo de multifluidos perfeitos para fluidos não perfeitos. Através de uma modificação de tal modelo construímos meios materiais mais gerais dos obtidos até então *via* multifluidos.

A conexão entre fluidos perfeitos e modelos de campos escalares é também investigada. Fazemos uma interpretação do modelo de multifluidos irrotacionais em termos de tais campos. Em seguida analisamos a relação oposta, i. e., a construção de meios materiais a partir de campos escalares (em geral de modelos σ). Alguns casos particulares são estudados com certa profundidade

Consideramos ainda, dentro dessa mesma linha de raciocínio, a obtenção de modelos de fluidos imperfeitos a partir de campos supersimétricos, como modelos σ e de Wess-Zumino. Atenção especial é dedicada a este último.

Finalmente, procuramos soluções das equações de Einstein tendo como fontes tensores de energia-momento representando alguns dos meios encontrados pelos métodos mencionados acima, como fluidos de cordas cósmicas com e sem fluxo de calor. Várias soluções são apresentadas e brevemente discutidas.

ABSTRACT

The modelling of matter in general relativity using simpler continuous media such as either perfect fluids, or field theories like scalar fields, non-linear σ models, and supersymmetric fields is studied.

We start by reviewing the multi-perfect-fluid model of imperfect fluids. More general continuous media are obtained by means of a modification of the multi-perfect-fluid model. The connection relating perfect fluids and scalar fields is also investigated. The special case wherein the perfect fluids are irrotational are interpreted in terms of scalar fields. In some particular cases the inverse relation, i. e., the construction of models of matter from scalar fields (in general from σ models), is also studied. It is also considered, within the same approach, models for non-perfect fluids based on supersymmetric fields such as σ models and the Wess-Zumino model. Special attention is devoted to the second case.

Finally, we study solutions of Einstein equations in which the sources are the energy-momentum tensors representing some of the new constructed media, such as fluids of cosmic strings with (or without) heat flow. Several solutions are exhibited and briefly discussed.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - Preliminares

Enquanto fluidos perfeitos têm sido vastamente utilizados no estudo de problemas em relatividade geral (RG) [1,2], fluidos não perfeitos como fontes do campo gravitacional têm sido menos estudados devido às suas dificuldades matemáticas, muito embora eles sejam de grande importância principalmente na descrição de estrelas e outros objetos da astrofísica relativística (ver p.e. [3,4,5]). Em vista disso, um estudo buscando a elaboração de métodos para a obtenção de modelos de fluidos imperfeitos, bem como de outros meios materiais, a partir de modelos mais simples, nos parece plenamente justificado. Este é um dos objetivos do presente trabalho.

Na tentativa de se considerar modelos mais simples para fluidos não perfeitos existe uma série de trabalhos baseados no "modelo de multifluidos" (ou modelo de Letelier), onde fluidos imperfeitos, em especial fluidos anisotrópicos, são obtidos considerando o tensor de energia-momento (TEM) construído pela soma de dois ou mais fluidos perfeitos [6,7,8]. Com uma pequena modificação no modelo proposto por Letelier [6] é possível obtermos materias mais gerais apresentando anisotropias e fluxo de calor. Desses modelos encontram-se casos particulares correspondentes a fluidos formados por cordas cósmicas [9,10,11,12], os quais têm sido estudados, a nível clássico, no contexto da relatividade geral e da cosmologia. Estudos a esse respeito são importantes visto que as cordas cósmicas têm desempenhado nos últimos tempos um papel muito importante, não somente por seus aspectos teóricos, mas também por seus possíveis aspectos observacionais [11,13].

Por outro lado, têm sido consideradas muitas situações onde tensores de energia-momento construídos a partir de teorias de campos, sejam estes fundamentais ou não, são usados como fontes do campo gravitacional, como no caso das equações de Einstein-Maxwell, Einstein-Dirac, Einstein-Yang-Mills, etc... Neste ponto observamos que existe uma interligação entre teoria de campos e teoria de meio material, ou seja: o TEM associado a um determinado campo pode ser interpretado como o TEM de um meio material (em geral um fluido bastante complexo), e nota-se que uma "boa" teoria de campos produz uma "boa" teoria de meios materiais [14,6]. Com isso, pode-se levar essa interligação ao nível de podermos utilizar o que se conhece a respeito das soluções das equações de Einstein acopladas a campos no caso dessas equações acopladas a fluidos, e vice-versa. Por exemplo, fluidos irrotacionais construídos a partir de campos escalares, em geral modelos σ, podem ser associados a multifluidos que por sua vez são uma boa descrição de meios materiais gerais [15,8]. Nesse caso, algumas propriedades notáveis dos modelos sigma, como a existência de sólitons, por exemplo, são traduzidas em propriedades especiais para os meios materiais correspondentes [16].

É importante lembrar também que as equações de Einstein, quando acopladas a campos, apresentam uma certa "miopia" no sentido que elas "veem" somente o TEM de tais campos, o qual é invariante frente às "simetrias internas" (como o spin, o isospin, etc...) dos mesmos. Desse modo, diferentes campos, apresentando grupos de simetrias internas diferentes, podem gerar TEM's que tenham uma mesma estrutura algébrica (em relação ao espaço-tempo), os quais, via equações de Einstein, podem produzir campos gravitacionais idênticos. No caso de campos com spin semi-inteiro, temos as equações de Einstein-Dirac ou Einstein-Weyl, ou ainda as equações de Einstein-Rarita-Schwinger, sendo que também é possível uma descrição como meios materiais, pelo menos nos dois primeiros casos [17,18]. Isto sugere que pode-se investigar a possibilidade de fazer um tratamento análogo com outros modelos de campos, além dos citados acima, como, por exemplo, com o modelo supersimétrico de Wess-Zumino [19] ou modelos σ supersimétricos.

Nestas considerações os campos não são tomados como descrevendo interações físicas fundamentais, mas são considerados como simples potenciais que descrevem a matéria [20]. Por exemplo, poder-se-ia ter, em certas circunstâncias, que combinações de componentes spinoriais de certos campos fossem associadas aos potenciais de Debye ou suas generalizações, utilizadas correntemente na descrição de fluidos. Portanto, questões relacionadas com as escalas típicas de aplicabilidade de tais teorias de campos não são relevantes.

Com base no descrito acima, podemos resumir os objetivos da tese segundo o plano geral seguinte:

1- Nosso objetivo primeiro é fazer uma revisão dos modelos de multifluidos perfeitos para fluidos não perfeitos, com vistas a sua generalização na expectativa de modelarmos materiais mais complexos dos encontrados até o presente através de tais métodos.

2- Como segundo ponto vem o estudo da interpretação em termos de meios materias dos modelos σ e correlatos, sempre olhando principalmente a possibilidade de obtermos modelos de matérias gerais, como, por exemplo, com a introdução de propagação de calor e anisotropias. Tais meios materiais podem ser úteis em astrofísica e cosmologia relativísticas (p. e. na construção de modelos de estrelas e galáxias).

3- Em terciero lugar vem a revisão dos casos onde se estuda o tratamento das equações de Einstein-Dirac e de Einstein-Weyl como meios materiais, visando principalmente a preparação para o estudo de modelos de campos supersimétricos dentro dessa linha de interpretação.

4- Um quarto objetivo é o tratamento do modelo supersimétrico de Wess-Zumino, de modelos σ supersimétricos e, finalmente, dos modelos mais simples de supercordas dentro do contexto acima descrito. No caso do modelo de Wess-Zumino, com esse estudo, torna-se possível "enxergar" a nível clássico o significado da supersimetria.

O trabalho é desenvolvido com base em tais objetivos e dividido em cinco capítulos, com mais dois apêndices.

(i) No restante do capítulo I, mais especificamente na seção 1.2, fazemos um pequeno resumo do tratamento dos meios materiais em relatividade geral sem aprofundarmos os estudos a respeito da dinâmica e da termodinâmica dos mesmos.

(ii) Iniciamos o capítulo II com uma pequena introdução e consideramos, na seção 2.2, os resultados obtidos no caso da interpretação do TEM constituído pela soma de dois fluidos perfeitos como o TEM de um fluido único. Nesse caso, obtém-se um fluido anisotrópico. Na seção 2.3 mostramos que, se (ao invés de somarmos os dois TEM's dos dois fluidos perfeitos) diminuirmos um TEM do outro, podemos simular a presença de fluxo de calor e encontramos, além de fluidos anisotrópicos, fluidos de cordas com fluxo de calor na direção da corda, e um fluido de cordas somado com um fluido nulo cuja radiação se propaga ao longo das cordas. Para encerrar o capítulo II, tratamos brevemente da generalização do modelo da soma e/ou subtração entre N fluidos perfeitos.

(iii) Em seguida, no capítulo III, revisamos a conexão entre fluidos perfeitos e campos escalares. Tal relação aparece evidenciada nas referências [6,14], onde mostra-se que um fluido perfeito, irrotacional e com pressão igual à densidade de energia, corresponde a um campo escalar sem massa. A partir disso mostramos, seção 3.2, seguindo a mesma linha de raciocínio dos autores de tais trabalhos, que um fluido perfeito irrotacional pode ser associado a um campo escalar massivo, onde pressão e densidade de energia não são mais iguais. Para concluir, descrevemos também como essa ligação pode ser generalizada para o caso de multifluidos perfeitos, os quais correspondem a modelos de muitos campos escalares ou a modelos σ particulares.

Depois disso, ainda no capítulo III, tratamos da conexão inversa à anterior, ou seja, a construção de modelos materiais a partir de campos escalares. No início da seção 3.3 apresentamos os resultados obtidos no caso, já conhecido, de apenas um campo escalar [9]. Depois tratamos do caso de dois campos escalares, onde mostramos essencialmente que os meios materiais obtidos no capítulo II podem ser construídos a partir da soma de dois campos escalares. Obtém-se também materiais mais gerais do que aqueles, uma vez que os campos escalares podem simular "tensões" (pressões negativas) mais facilmente do que o modelo descrito em tal capítulo. Finalizando o capítulo III, consideramos o caso dos modelos σ interpretados como meios materiais. Mostramos, em particular, como obter os mesmos fluidos encontrados de maneira formal no capítulo II, a partir de modelos σ com métrica interna não positiva-definida.

(iv) O capítulo IV é iniciado com o estudo do modelo supersimétrico de Wess-Zumino (ver também o apêndice A), a fim de analisarmos a possibilidade de considerar os campos envolvidos como "campos materiais" no sentido que vimos desenvolvendo. Mostramos, na seção 4.2, que tal tratamento somente é possível se fizermos uma "interpretação clássica" do modelo, considerando que os campos (spinoriais) assumem valores na álgebra dos números complexos, e não mais na álgebra de Grassmann (como ocorre no caso da supersimetria propriamente dita). Depois dessa interpretação clássica, segue que a parte do tensor de energia-momento simetrizado devida ao campo spinorial é identicamente nula, de forma que o TEM resultante é a soma dos TEM's de dois campos escalares (já analisados no capítulo III). O campo spinorial é, assim, um campo fantasma [21,22] a menos de divergências totais, ou de novas "Lagrangeanas de interação" que podem ser adicionadas ao modelo (isto é discutido com mais detalhes no apêndice A). Encerrando tal seção descrevemos alguns casos particulares de divergências totais cujo TEM resultante pode ser interessante quando interpretado como meio material.

Na seção 4.3 fazemos a interpretação em termos de meios materiais para alguns dos TEM's construídos na seção anterior. Mostramos, em casos particulares, que a dissipação de energia na forma de fluxo de calor tem origem na interação entre o campo spinorial e o campo escalar. Os resultados obtidos nesses casos são semelhantes aos encontrados nos modelos dos capítulos II e III. Meios como fluidos anisotrópicos e fluidos de cordas com fluxo de calor podem ser construídos também no caso mais simples onde todos os campos dependem unicamente da coordenada tipo tempo t (a qual pode ser tomada como sendo o tempo cosmológico). Em geral a análise feita nesta seção mostra que o método desenvolvido na seção 4.2 pode produzir TEM's com uma estrutura algébrica bastante rica e que, portanto, podem ser usados para modelar meios materiais não triviais.

O estudo do modelo de Wess-Zumino facilitou-nos a análise também de outros modelos supersimétricos a ele relacionados. Os modelos σ são um exemplo (têm a mesma supersimetria N=1, ver p. e. [23] e suas refs.) o qual tratamos na seção 4.4, onde procuramos fazer uma interpretação análoga ao caso de Wess-Zumino. O resutado final é idêntico, ou seja, as equações de Einstein usuais somente "conseguem ver" a parte do TEM oriunda dos campos escalares, ou de divergências totais envolvendo interações entre os campos spinoriais e os escalares. Essa "interpretação clássica" dos modelos σ supersimétricos mostra, então, que para as equações de Einstein tais modelos são equivalentes aos modelos σ clássicos (a menos de termos provenientes de divergênciais totais que podem conter os "campos spinoriais fantasmas").

De forma completamente equivalente mostra-se sucintamente na seção 4.6 que a parte do TEM das supercordas [24] que pode interagir com o campo gravitacional (via eqs. de Einstein) corresponde ao TEM de cordas cósmicas (ou cordas de Nambu) usuais, mesmo que formuladas em espaço-tempos com número de dimensões diferente de quatro.

(v) O capítulo V é dedicado ao estudo de algumas soluções das equações de Einstein cujas fontes são fluidos de cordas com e sem dissipação de calor.

Depois da introdutória seção 5.1, mostramos, na subseção 5.2.1, algumas soluções para um modelo cosmológico simples de um fluido de cordas. O caso estático equivalente é apresentado na subseção 5.2.2.

Um fluido incoerente de cordas com fluxo de calor ao longo das cordas é estudado na seção 5.3. Tal problema apresenta simetria por translação na direcão das cordas. O caso estático é tratado na subseção 5.3.1 onde algumas situações particulares são discutidas.

O modelo cosmológico para um fluido incoerente de cordas com fluxo de calor (subseção 5.3.2), com a mesma simetria inicial do caso estático, implica que o fluxo de calor é identicamente nulo, levando-nos de volta ao exemplo discutido na subseção 5.2.1.

Para que possa existir fluxo de calor ao longo das cordas em modelos cosmológicos é necessário eliminarmos a simetria por translação ao longo das mesmas. Por isso na seção 5.4 tomamos um fluido não homogêneo de cordas com fluxo de calor ao longo das cordas, onde, p. e., a densidade de energia pode variar ao longo da corda. Mostramos algumas soluções particulares e discutimos sua interpretação e interesse do ponto de vista da cosmologia.

No final do capítulo (seção 5.5), verificamos de que maneira os fluidos calculados nas seções 5.2, 5.3 e 5.4 podem ter sido originados a partir dos modelos de muitos fluidos ou de muitos campos como os descritos nos capítulos II, III e IV.

(vi) Comentários finais são feitos no capítulo VI, onde indicamos as contribuições que consideramos inéditas, além de algumas possibilidades de continuação do trabalho utilizando os métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

(vii) Completando o trabalho temos ainda os apêndices A e B. O primeiro é simplesmente uma complementação do estudo dos modelos supersimétricos feito no capítulo IV. Já o apêndice B contém um resumo a respeito dos campos de spin semi-inteiro em relatividade geral. Aí mostramos que spinores de Majorana (de qualquer spin semi-inteiro) são campos fantasmas em relação à interação gravitacional. É feito um estudo a respeito dos TEM's dos campos spinoriais de Weyl, Dirac e Rarita-Schwinger tendo como objetivo a sua interpretação em termos de meios materiais.

I.2 - Meios Contínuos em Relatividade Geral

Antes de entrarmos no tratamento dos meios contínuos, observemos que para fazermos tal estudo em relatividade geral é necessário termos definido um espaço-tempo pseudo-Riemanniano $\mathcal{M}$ (uma variedade diferenciável) com métrica g ($g_{\mu\nu}$) de assinatura -2. Quando conveniente nos restringiremos a espaço-tempos planos (de Minkowski) e adotaremos o símbolo η ($\eta_{\mu\nu}$) para a métrica. Sobre tais variedades são definidos os conceitos de escalares, vetores, tensores, etc..., que utilizaremos a seguir, e nos demais capítulos, na descrição dos meios materiais e dos campos.

Em teorias relativísticas, fluidos e outros meios contínuos são descritos por um vetor velocidade u^{μ} (i. e. um campo vetorial quadrivelocidade) e por um tensor simétrico de ordem dois ($T_{\mu\nu}$), conhecido como tensor de energia-momento (TEM) [ou como tensor de energia-tensão] do meio.

Qualquer tensor desse tipo pode ser decomposto como segue

$$T_{\mu\nu}= \rho u_{\mu}u_{\nu} + u_{\mu}q_{\nu} + u_{\nu}q_{\mu} + t_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde,

$$\rho = T_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}, \tag{1.2a}$$

$$q_\mu = T_{\nu\rho}u^\nu h^\rho{}_\mu, \qquad (1.2b)$$

$$t_{\mu\nu} = T_{\rho\sigma}h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu; \qquad (1.2c)$$

sendo que

$$h^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu - u^\nu u_\mu, \qquad (1.3a)$$

$$u_\mu u^\mu = 1. \qquad (1.3b)$$

De (1.3a) segue que

$$q_\mu u^\mu = 0, \qquad (1.4a)$$

$$t_{\mu\nu}u^\nu = 0. \qquad (1.4b)$$

A quantidade $\rho = T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ mede a densidade de energia *de repouso*, ou seja, é a densidade de energia como medida por um observador numa linha-mundo tal que seu vetor tangente seja u^μ (i.e. em repouso em relação ao meio). q_μ é o vetor fluxo de calor, e $t_{\mu\nu}$ é o tensor de tensões.

O TEM de um fluido viscoso é tal que [25,26]

$$q^\mu = \chi h^{\mu\nu}(T_{,\nu} - T u_{\nu;\tau}u^\tau), \qquad (\chi \geq 0) \qquad (1.5a)$$

$$t_{\mu\nu} = 2\eta\sigma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}(p - \zeta\theta), \; (\eta \geq 0 \; ; \; \zeta \geq 0) \qquad (1.5b)$$

onde

$$\theta = h^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = u^\tau{}_{;\tau}, \qquad (1.6a)$$

$$\theta^{\mu\nu} = h^{\mu\sigma}h^{\nu\tau}\left[u_{\sigma;\tau} + u_{\tau;\sigma}\right]/2, \qquad (1.6b)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}\theta/3. \qquad (1.6c)$$

Observe-se que

$$\sigma_{\mu\nu}x^{\nu} = 0, \tag{1.7a}$$
$$g^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0, \tag{1.7b}$$
$$t^{\mu}_{\ \mu} = g^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = 3(p-\zeta\theta). \tag{1.7c}$$

Na interpretação do tensor (1.1) como o TEM de um fluido viscoso, temos que u^{μ} é o vetor de fluxo do fluido, p a sua pressão, η seu coeficiente de viscosidade dinâmica, ζ viscosidade volumar (*bulk*), θ o coeficiente de expansão, q^{μ} é o vetor fluxo de calor e $\sigma_{\mu\nu}$ é o tensor de cisalhamento (*shear*) do fluido. Nesse caso, se impõem as condições $\eta \geq 0$ e $\zeta \geq 0$, além de outras condições que garantam a positividade da energia do fluido, medida localmente (ver abaixo).

Na relação (1.5a), T é a temperatura absoluta do meio (fluido). Ela é a generalização relativìstica da lei de condução de calor (Lei de Fourier) $q = - \chi$ grad(T).

Conforme falamos acima, especialmente em conexão com o estudo de meios contínuos em relatividade geral, postula-se algumas condições visando garantir a positividade da densidade de energia ρ como definida em (1.2a). Tais condições implicam, entre outras, que qualquer observador deve atribuir uma densidade de energia para um dado fluido a qual seja sempre positiva.

As condições de energia mais importantes são a *condição fraca de energia*, a *condição dominante de energia* e a *condição forte de energia* [27].

(i) Condição Fraca de Energia

Um tensor de energia-momento satisfaz a condição fraca de energia se em cada ponto p do espaço-tempo e para cada vetor tipo tempo u^{μ} vale a seguinte desigualdade

$$T_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0. \tag{1.8}$$

Esta condição pode ser interpretada como dizendo que, para qualquer observador, a densidade de energia local não é négativa.

(ii) Condição Dominante de Energia

Dado um vetor tipo tempo u^{μ}, diz-se que um TEM satisfaz a condição dominante de energia se

$$T_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \geq 0, \tag{1.9a}$$

$$V_{\mu} \equiv T_{\mu\nu}u^{\nu} \text{ é tipo tempo ou tipo luz: } V_{\mu}V^{\mu} \geq 0. \tag{1.9b}$$

Isto nos diz que a densidade de energia local, para qualquer observador, não é negativa, enquanto que o vetor fluxo de energia local é tipo tempo ou nulo.

(iii) Condição Forte de Energia

A condição forte de energia é satisfeita por um dado tensor de energia-momento se a desigualdade

$$[T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T/2]u^{\mu}u^{\nu} \geq 0 \tag{1.10}$$

for satisfeita para qualquer vetor tipo tempo ou tipo luz u^μ. Essa condição garante que a "densidade Newtoniana de energia" (a densidade de matéria que, na aproximação de campo fraco, aparece no lado direito da equação de Poisson) seja positiva.

Mostraremos a seguir a forma do TEM de alguns meios contínuos particulares.

a) Fluido Perfeito

Um fluido perfeito é aquele com viscosidade nula e sem dissipação de calor: $q_\mu = 0$, $\xi = \eta = 0$. Portanto, segue de (1.1) e (1.5) que o tensor de energia-momento de um fluido perfeito é

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu} = (p+\rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \qquad (1.11)$$

A fim de escrevermos a forma matricial de (1.11) passamos ao espaço tangente ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1,-1,-1,-1]$, $u_\mu = \delta_\mu{}^0$).

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \qquad (1.11')$$

A condição fraca de energia é satisfeita por (1.11) se $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$, enquanto que a condição dominante de energia exige $\rho \geq 0$ e $-\rho \leq p \leq \rho$. Por outro lado, a condição forte de energia implica em $\rho + p \geq 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.

b) Fluido Incoerente (Nuvem de Poeira)

Este fluido é um fluido perfeito com pressão nula cujo TEM é

$$T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu}. \tag{1.12}$$

Nesse caso, as linhas de fluido são linhas geodésicas pois a idendidade de Bianchi ($T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$) implica em $u^{\mu}{}_{;\nu} = 0$ (Usamos ';' para representar a derivada covariante). Vê-se facilmente que, nesse caso, as condições de energia definidas acima são satisfeitas se $\rho \geq 0$.

c) Fluido Anisotrópico

Um meio anisotrópico apresenta pressões (ou tensões) distintas em diferentes direções. Por exemplo, um tensor de tensões dado por

$$t_{\mu\nu} = \sigma X_{\mu} X_{\nu} - p h_{\mu\nu}, \quad X^{\mu} X_{\mu} = -1,$$

quando substituído em (1.1), produz o TEM

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p) u_{\mu} u_{\nu} + (\sigma-p) X_{\mu} X_{\nu} - p g_{\mu\nu}, \tag{1.13}$$

o qual representa um fluido com pressão σ na direção (espacial) X^{μ}, e com pressão p no "plano ortogonal a X^{μ}". Para obtermos (1.13) na forma matricial vamos supor que $u_{\nu} X^{\nu} = 0$, além de passarmos ao espaço tangente ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1,-1,-1,-1]$, $u_{\mu} = \delta_{\mu}{}^{0}$, $X_{\mu} = \delta_{\mu}{}^{1}$). Temos, assim

$$\{T_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{1.13'}$$

Para um TEM da forma (1.13), a condição fraca de energia é satisfeita se $\rho \geq 0$, $\rho + \sigma \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$; a condição dominante exige ainda $-\rho \leq \sigma \leq \rho$ e $-\rho \leq p \leq \rho$; enquanto que a condição forte é satisfeita se $\rho + \sigma \geq 0$, $\rho + p \geq 0$ e $\rho + \sigma + 2p \geq 0$.

d) Fluido de Cordas Cósmicas Paralelas

Cordas cósmicas (ou cordas de Nambu) são estruturas unidimensionais (superfícies bidimensionais no espaço-tempo quadridimensional) caraterizadas por uma tensão λ igual à densidade linear de energia ao longo das mesmas. Um fluido de cordas paralelas é, portanto, um "fluido anisotrópico" com pressão negativa na direção da anisotropia, cujo TEM é da forma [9,10,28]

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p)(u_\mu u_\nu - X_\mu X_\nu) - p g_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

onde, no caso das cordas, devemos ter $u_\mu X^\mu = 0$.

Note-se que os vínculos sobre ρ e p, no caso de (1.14), para que as condições de energia sejam satisfeitas, são os mesmos que para um fluido anisotrópico, com $\sigma = -\rho$. Ou seja, as duas primeiras são satisfeitas se $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$, e a última exige $\rho \geq 0$ e $p \geq 0$.

No espaço tangente, (1.14) tem a forma

$$\{T_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{1.14'}$$

Substituindo p = 0 em (1.14), obtemos o que pode ser chamado de fluido incoerente de cordas, ou "poeira de cordas paralelas".

e) "Fluido" de Paredes Cósmicas Paralelas

Um "fluido de paredes cósmicas paralelas" [11] é construído de maneira análoga ao fluido de cordas. Todavia, no caso das paredes, o fluido apresenta tensão igual à densidade de energia em duas direções espaciais. Ou seja, o TEM de um tal fluido é da forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p)(u_\mu u_\nu - X_\mu X_\nu - Y_\mu Y_\nu) - pg_{\mu\nu}, \tag{1.15}$$

onde, $u^\mu X_\mu$, $U^\mu Y_\mu$, $X^\mu Y_\mu$, $u^\mu u_\mu = -X^\mu X_\mu = -Y^\mu Y_\mu = 1$.

Passando ao espaço tangente, tem-se a seguinte forma matricial para (1.15)

$$\{T_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{1.15'}$$

Um TEM como (1.15) satisfaz a condição fraca de energia se ρ

≥ 0 e $\rho + p \geq 0$, enquanto que a condição dominante pede ainda $-\rho \leq p \leq \rho$. Finalmente, para realizar a condição forte de energia devem valer as desigualdades: $\rho + p \geq 0$ e $-\rho + p \geq 0$. Portanto, um fluido incoerente de paredes cósmicas ($p = 0$), não satisfaz a condição forte de energia. Este também é o caso de uma única parede cósmica, ou de paredes múltiplas, o que as faz repulsivas [11].

f) Fluido Anisotrópico com Fluxo de Calor ao Longo da Anisotropia

O TEM de tal fluido pode ser posto na forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p)u_\mu u_\nu + (\sigma-p)X_\mu X_\nu - pg_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu. \qquad (1.16)$$

Uma vez que o vetor fluxo de calor é na direção da anisotropia, podemos escrever

$$q_\mu = \beta X_\mu, \qquad \beta^2 = -q_\mu q^\mu, \qquad (1.17)$$

de forma que (1.16) resulta

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p)u_\mu u_\nu + (\sigma-p)X_\mu X_\nu - pg_{\mu\nu} + \beta(X_\mu u_\nu + X_\nu u_\mu). \qquad (1.18)$$

A representação matricial de (1.18) no espaço tangente fica

$$
(T_{\mu\nu}) = \begin{Bmatrix} \rho & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{Bmatrix}. \tag{1.18'}
$$

Um fluido de cordas com fluxo de calor ao longo da corda é obtido de (1.16) fazendo-se $\sigma = -\rho$ (ver o capítulo II).

$$
T_{\mu\nu} = (\rho+p)(u_\mu u_\nu - X_\mu X_\nu) - pg_{\mu\nu} + \beta(X_\mu u_\nu + X_\nu u_\mu). \tag{1.19}
$$

O TEM (1.18) satisfaz a condição fraca de energia se $\rho \geq 0$, $2|\beta| \leq \rho + \sigma$ e $\rho + p \geq 0$, enquanto a condição dominante exige $\rho \geq |\beta|$, além de $2|\beta| \leq \rho + \sigma$ e $\rho + p \geq 0$, para ser satisfeita. A última condicão (forte) exige $\rho + p \geq 0$, $2|\beta| \leq \rho + \sigma$ e $\sqrt{(\rho+\sigma)^2-4\beta^2} + p \geq 0$.

Por outro lado, o TEM (1.19) não satisfaz a nenhuma das condições de energia enunciadas acima. Por causa disso, meios contínuos descritos por TEM's com tal forma não têm sido considerados no contexto da relatividade geral clássica. Algo similar ocorreu no caso das paredes cósmicas, as quais não eram estudadas por violarem a condição forte de energia. Nós, todavia, temos que tomar tais situações seriamente, pois elas em geral podem decorrer de modelos de teorias de campos como modelos σ, campos supersimétricos, etc... Por exemplo, um TEM na forma (1.19) (o qual é, conforme já dissemos, a forma canônica do TEM de um fluido de cordas com fluxo de calor ao longo das cordas) é encontrado no capítulo IV, com base no modelo de Wess-Zumino.

CAPÍTULO II

MODELOS DE MULTIFLUIDOS PERFEITOS PARA FLUIDOS NÃO-PERFEITOS

2.1 - Introdução

No estudo de fluidos imperfeitos em relatividade geral espera-se que o modelo tenha algumas características especiais. Primeiramente tal modelo deve ser suficientemente simples (como exige-se em geral para modelos físicos) a ponto de poder ser resolvido de forma exata para alguns casos particulares. Em segundo lugar, a sua interpretação física deve poder ser feita facilmente estabelecendo sua relação com modelos mais simples (p. e. com fluidos perfeitos, no caso). Deve ser possível, também, a utilização do modelo para melhor entender problemas não resolvidos em relatividade geral.

Uma tentativa de se considerar modelos simples para fluidos não perfeitos, que procura preencher as características citadas acima, está baseada no "modelo de multifluidos" (ou modelo de Letelier), onde fluidos imperfeitos, em especial fluidos anisotrópicos, são obtidos considerando o tensor de energia momento construído pela soma de dois ou mais fluidos perfeitos [6,7,8]. Nós descrevemos tal modelo resumidamente na seção 2.2.

Através de uma pequena modificação no modelo proposto por

Letelier, mostramos na seção 2.3 que é possível obtermos também casos de fluidos anisotrópicos com fluxo de calor a partir, por exemplo, de dois fluidos perfeitos.

Dentre os meios materiais assim obtidos pode-se encontrar casos particulares correspondentes a fluidos formados por cordas cósmicas, as quais são importantes pelo fato de que podem contribuir para a formação de galáxias, servindo, de certa forma, para explicar a origem da estrutura cosmológica em modelos de universo em expansão [29,30]. Fluidos desse tipo também têm sido estudados, a nível clássico, no contexto da relatividade geral e da cosmologia [31,9,10].

Depois de tratarmos dos modelos de materiais construídos a partir de dois fluidos perfeitos (nas seções 2.2 e 2.3), concluímos o capítulo II considerando brevemente o caso geral onde N fluidos perfeitos são usados como modelos de meios materiais mais gerais.

2.2 - Modelos a Partir de Dois Fluidos Perfeitos Componentes

Vamos iniciar estudando o modelo de multifluidos perfeitos para fluidos mais gerais da referência [6]. Em especial pode-se tomar dois fluidos perfeitos e construir um tensor de energia-impulso na seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = (p + \omega)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} + (q + \varepsilon)v_\mu v_\nu - qg_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

$$u_\mu u^\mu = v_\mu v^\mu = 1, \tag{2.1a}$$

onde ω, p e u_μ são a densidade, a pressão e a quadrivelocidade do primeiro fluido perfeito, respectivamente; enquanto que ε, q e v_μ são aquelas mesmas quantidades relativas a um segundo fluido perfeito.

Para entender o significado físico do tensor de energia e momento (TEM) (2.1) basta escrevê-lo na forma do TEM de um fluido único

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + S_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

com

$$S_{\mu\nu} U^\nu = 0, \tag{2.2a}$$

$$U^\mu U_\mu = 1, \tag{2.2b}$$

$$\rho > 0. \tag{2.2c}$$

$\rho U_\mu U_\nu$ representa a parte correspondente à energia cinética do TEM, ρ é a densidade de energia (de repouso) e $S_{\mu\nu}$ é o tensor de tensões. No caso em que $p + \omega > 0$ e $q + \varepsilon > 0$, o TEM (2.1) pode ser escrito na forma (diagonalizada)

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)U_\mu U_\nu + (\sigma-\pi)X_\mu X_\nu - \pi g_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + S_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

onde

$$\rho = (\omega + \varepsilon - \pi + R)/2, \tag{2.3a}$$

$$\sigma = (\pi - \omega - \varepsilon + R)/2, \tag{2.3b}$$

$$S_{\mu\nu} = (\sigma - \pi)X_\mu X_\nu - \pi(g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu), \tag{2.3c}$$

$$R = \left[(p + \omega + q + \varepsilon)^2 + 4(p+\omega)(q+\varepsilon)[(u_\mu v^\mu)^2-1]\right]^{1/2}, \tag{2.3d}$$

$$\pi = p + q. \tag{2.3e}$$

Nas relações (2.3), U_μ e X_μ são dados por (Note-se que $U^\nu U_\nu = -X^\nu X_\nu = 1$; $U^\nu X_\nu = 0$)

$$U_\mu = (Au_\mu + Bv_\mu)/\left[R(R+r+s)\right]^{1/2}, \tag{2.4a}$$

$$X_\mu = (-Bu_\mu + Av_\mu)/\left[R(R-r-s)\right]^{1/2}, \tag{2.4b}$$

$$A = [R + r - s]^{1/2}, \tag{2.4c}$$

$$B = [R - r + s]^{1/2}, \tag{2.4d}$$

com

$$r = p + \omega, \tag{2.4e}$$

$$s = q + \varepsilon. \tag{2.4f}$$

Assim, vemos que o TEM (2.1), escrito como em (2.3), corresponde a um fluido anisotrópico cuja pressão anisotrópica é σ. Note-se que tal fluido tem todas as principais características de um fluido físico real, ou seja: $\rho > 0$; $\sigma > 0$; $\rho > \sigma$; e além disso $\sigma > \pi$. Assim, (2.1) satisfaz as condições de energia descritas no capítulo I [ver eqs. (1.8) e (1.9)].

Observe-se ainda que o termo $u^\nu v_\nu$ simula uma "interação" entre os dois fluidos componentes. Por exemplo, tal "interação" é nula quando as duas velocidades são paralelas (iguais). Nesse caso $u^\nu v_\nu = 1$, sendo que o tensor de energia-momento resultante tem ainda a forma de um fluido perfeito com $\rho = \omega + \varepsilon$ e $\sigma = \pi = p + q$.

2.3 - Modelos com Fluxo de Calor a Partir do Modelo de Dois Fluidos Perfeitos Modificado

Ao estudarmos os modelos de multifluidos, conforme descrito na seção 2.2, percebemos que fluidos mais gerais poderiam ser obtidos se a quantidade s (ou r) [ver eqs.(2.4e) e (2.4f)] fosse negativa, o que seria equivalente a subtrair o segundo fluido perfeito do primeiro (e ainda com p, q, ω, e ε positivos), ao invés de somar os dois fluidos, como fizemos na equação (2.1).

Vale observar que enquanto a soma de dois fluidos perfeitos poderia ser pensada como uma "mistura" de dois fluidos diferentes, o caso da "subtração" de um fluido do outro parece ser apenas um modelo formal para a obtenção de materiais diversos. Todavia, além de produzir modelos de materiais interessantes, tal situação representa perfeitamente bem alguns casos de modelos σ não lineares, conforme mostraremos no próximo capítulo, e, portanto, vale a pena ser estudada pois está em perfeito acordo com os objetivos do presente trabalho.

Passamos agora a apresentar resumidamente os resultados obtidos com a "subtração" entre (apenas) dois fluidos perfeitos.

O TEM inicial do modelo é, então

$$T_{\mu\nu} = (p + \omega)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} - \left[(q + \varepsilon)v_\mu v_\nu - qg_{\mu\nu}\right], \qquad (2.5)$$

onde u_μ e v_μ ainda satisfazem à relação (2.2).

A diferença fundamental entre (2.1) e (2.5) na interpretação do "fluido resultante" é que O TEM (2.1) é sempre diagonalizável em termos de uma nova "base" construída a partir de u_μ e v_ν, enquanto que o TEM (2.5) pode não satisfazer tal condição.

Dada uma matriz qualquer, a possibilidade de sua diagonalização está relacionada (como é bem sabido) com a natureza dos seus possiveis autovalores. Em nosso caso, os dois autovalores de interesse são

$$\lambda_{0,1} = (r - s \pm R)/2 - \pi, \qquad (2.6a)$$

onde

$$\pi = p - q, \qquad (2.6b)$$

$$R = \left[(r-s)^2 - 4rs[(v^{\mu}u_{\mu})^2 - 1]\right]^{1/2}, \qquad (2.6c)$$

com r e s dados por (2.4e) e (2.4f).

Os vetores u e v geram um subespaço bidimensional tipo tempo $\mathcal{T}$ [32], desde que $v_\mu \neq u_\mu$. Tal subespaço admite uma base ortonormal (U_μ, X_μ): $U^\mu U_\mu = 1$, $X^\mu X_\mu = -1$, $U^\mu X_\mu = 0$. Então, quando (2.5) é diagonalizável, U_μ e X_μ são seus autovetores cujos autovalores são λ_0 e λ_1. Os autovalores λ_2 e λ_3 estão associados a autovetores de (2.5) os quais geram o subespaço bidimensional $\mathcal{S}$, complementar de $\mathcal{T}$ em $\mathcal{M}$ e, portanto, tipo espaço. O mais importante do trabalho que segue é, dessa forma, o cálculo de U_μ e X_μ e a consequente interpretação física do TEM em sua forma canônica.

Note-se que aqui (no caso da subtração) o fator R [eq. (2.6c)] pode ser real, nulo ou imaginário, possibilitando-nos três casos distintos na "diagonalização" do TEM (2.5); diferentemente do caso do TEM (2.1) onde o fator R [eq. (2.3d)] é sempre real e, portanto, o TEM (2.1) pode ser posto (sempre) na forma (2.3).

Antes de analisar essas três situações especificamente, vale notar que o fato de estarmos "subtraindo" energia do tensor de energia-momento simula, de certa forma, a dissipação de energia através de fluxo de calor em um fluido não viscoso. Para deixar isso mais claro consideremos um fluido não viscoso com fluxo de calor [ver eq. (1.1)] cujo TEM é da forma (ver também ref. [33])

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)U_{\mu}U_{\nu} - \pi g_{\mu\nu} + q(X_{\mu}U_{\nu}+X_{\nu}U_{\mu}), \tag{2.8}$$

onde $U_{\mu}U^{\mu} = 1$, $X_{\mu}X^{\mu} = -1$, $X^{\mu}U_{\mu} = 0$.

Para encontrar as possíveis formas canônicas de (2.8) calculamos os seus autovalores

$$\lambda_{0,1} = (\rho + \pi \pm Q)/2 - \pi \tag{2.9a}$$

onde

$$Q = \left[(\rho+\pi)^2 - 4q^2\right]^{1/2}. \tag{2.9b}$$

Definamos, neste ponto, a densidade de energia ρ e a pressão π do fluido cujo TEM é dado em (2.8) por

$$\rho \equiv r-s-\pi > 0, \tag{2.10a}$$

$$\pi \equiv p-q > 0. \tag{2.10b}$$

Com isso, as relações (2.9) resultam

$$\lambda_{0,1} = (r - s \pm Q)/2 - \pi \tag{2.11a}$$

$$Q = \left[(r-s)^2 - 4q^2\right]^{1/2}. \tag{2.11b}$$

Comparando (2.10) e (2.11) com (2.6) teremos que (2.8) e (2.5) serão equivalentes se

$$q^2 = rs[(v^{\mu}u_{\mu})^2 - 1]. \tag{2.12}$$

Para que tal comparação tenha sentido, o vetor fluxo de calor $q_{\mu} = qX_{\mu}$, $q \equiv \sqrt{-q^{\mu}q_{\mu}}$ deve pertencer ao subespaço invariante gerado pelos vetores velocidade u_{μ} e v_{μ}, o que implica em

$$q_{\mu} = Au_{\mu} + Bv_{\mu}, \qquad A,\ B \in \mathbb{R},$$

com a condição

$$A^2 + 2AB(u^{\mu}v_{\mu}) + B^2 = -rs[(v^{\mu}u_{\mu})^2 - 1], \tag{2.13}$$

onde usamos (2.12).

A relação (2.13) fixa um dos parâmetros, por exemplo,

$$B = -A(v^{\mu}u_{\mu}) \pm \sqrt{(A^2-rs)[(v^{\mu}u_{\mu})^2 - 1]}, \tag{2.14}$$

sendo que o outro (no caso, A) permanece arbitrário. Isso assegura que é sempre possível encontrar um modelo de fluido com TEM na forma (2.8) que seja equivalente (na estrutura algébrica) a (2.5).

O que acabamos de ver justifica que dediquemos um pouco de tempo à análise do TEM (2.5), pois tal situação simula de modo simples condições análogas que são geradas por modelos de teorias de campos, conforme veremos nos capítulos III e IV.

Vamos, então, analisar cada um dos três casos mencionados acima, em referência às equações (2.5) e (2.6), separadamente.

I - Primeiro caso: R real

Para termos R real [ver eq.(2.6c)] a seguinte desigualdade deve ser satisfeita

$$(u^{\mu}v_{\mu})^2 < (r + s)^2/(4rs) \tag{2.15}$$

Aqui podemos ter ainda duas situações distintas: o caso r>s e o caso r<s. Contudo, descreveremos somente a situação r>s uma vez que o caso r<s é análogo ao primeiro.

É fácil ver que como R é real o fluido resultante terá exatamente a mesma forma que o obtido no caso do TEM (2.1), ou seja: O TEM resultante da "diagonalização" de (2.5) é exatamente aquele obtido quando tomamos as equações (2.3), (2.3a), (2.3b), (2.3c), (2.3d), (2.3e), (2.4a), (2.4b), (2.4c), (2.4d) e substituimos ε e q por $-\varepsilon$ e -q, ou s por -s; e com as equações (2.4e) e (2.4f) permanecendo as mesmas. Por causa disso não escreveremos todas essas fórmulas aqui.

A densidade ρ e a "pressão anisotrópica" σ do fluido são dadas por

$$\rho = \lambda_0 = (\omega - \varepsilon - p + q + R)/2, \tag{2.16a}$$

$$\sigma = - \lambda_1 = (p - q + \varepsilon - \omega + R)/2, \tag{2.16b}$$

sendo que os autovetores são os mesmos das relações (2.4a–d), com s substituído por $-s$.

Todavia, é necessário observar que, no presente caso, a densidade ρ, dada na equação (2.16a), não satisfaz a equação (2.2c) para qualquer valor de p, q, ω e ε positivos. Para termos $\rho>0$, o seguinte vínculo deve ser satisfeito (com $r>s$; no caso de $r<s$ teríamos vínculos análogos)

$$\omega - \varepsilon > \pi > 0. \tag{2.17}$$

O fluido resultante no caso aqui considerado é ainda um fluido anisotrópico, porém a "pressão" anisotrópica σ agora pode ser negativa, caso em que teríamos na verdade tensão na direção da anisotropia. Outro fato importante é que teremos sempre $\sigma \leq \pi$, indicando que a pressão anisotrópica é sempre menor, ou igual, à pressão isotrópica, bem ao contrário do TEM (2.3); fato este o qual é interessante na construção de modelos de estrelas.

No caso em que $\sigma < 0$ é conveniente escrever o TEM (2.3) na forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \pi)U_{\mu}U_{\nu} - (\lambda + \pi)X_{\mu}X_{\nu} - \pi g_{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

onde

$$\lambda \equiv -\sigma = (\omega - \varepsilon - p + q - R)/2 > 0, \tag{2.19}$$

o que corresponde, como já dissemos, a um "fluido" anisotrópico com tensão λ na direção da anisotropia (X_{μ}) e com pressão isotrópica π no "plano ortogonal" à X_μ.

É interessante observar que o TEM (2.18) pode ainda ser interpretado como a soma de um fluido de cordas (ver a seguir) com um fluido incoerente, escrevendo

$$\kappa \equiv \rho - \lambda = R = \left[(r-s)^2 - 4rs[(v^\mu u_\mu)^2 - 1]\right]^{1/2}, \tag{2.20}$$

de forma que (2.18) resulta

$$T_{\mu\nu} = (\lambda + \pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} + \kappa U_\mu U_\nu. \tag{2.21}$$

Note-se que, no limite $\pi = 0$, a equação (2.21) representa a soma de um fluido incoerente de cordas (ou poeira de cordas) e um fluido incoerente usual (ou simpesmente nuvem de poeira) [31,9].

II - Segundo Caso: R = 0

A condição R = 0 implica na seguinte relação

$$(u_\mu v^\mu)^2 = (r + s)^2/(4rs). \tag{2.22}$$

Este caso é especial no sentido que, devido à relação (2.22), fica impossível "diagonalizar" o TEM (2.3), pois ele tem um autovetor tipo luz duplo (com dois autovalores iguais). Isto significa que, nessa situação, não existe um autovetor tipo tempo do TEM (2.3) o qual seria tomado como a velocidade do fluido resultante. Ou seja, nessa situação não podemos construir a quadrivelocidade U_μ a partir das velocidades dos fluidos iniciais u_μ e v_μ.

Em vista disso, para interpretar tal fluido precisamos escolher uma base independente das velocidades dos fluidos de partida. Essa interpretação pode, sem perda de generalidade, ser feita tomando-se uma base no espaço tangente. Nesse caso $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, e, além disso, em vista das equação (2.2), podemos sempre tomar uma base tal que os vetores u_μ e v_μ pertençam ao plano (x^0, x^1). Nessa base, o TEM (2.3) (com $R = 0$) pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu}= (\rho+\beta+\pi)U_\mu U_\nu+(\beta-\rho-\pi)X_\mu X_\nu-\beta(U_\mu X_\nu+X_\mu U_\nu)-\pi\eta_{\mu\nu}. \qquad (2.23a)$$

onde

$$\rho = (S_{00}- S_{11})/2 - \pi, \qquad (2.23b)$$

$$\beta = - S_{01}= (S_{00}+ S_{11})/2, \qquad (2.23c)$$

$$U_\mu = \delta^0_\mu, \qquad (2.23d)$$

$$X_\mu = \delta^1_\mu, \qquad (2.23e)$$

$$S_{\mu\nu}= ru_\mu u_\nu- sv_\mu v_\nu. \qquad (2.23f)$$

A equação (2.22) é consequência da relação: $S_{01}=-(S_{00}+ S_{11})/2$, a qual nos garante que $R = 0$. Se impormos $\pi > 0$, o fato de termos $\rho + \beta > 0$ implica em $\beta - \rho > 0$. Então, vemos que o TEM (2.23a) tem densidade $\rho + \beta$, pressão isotrópica π, pressão anisotrópica $\sigma = \beta - \rho$ na direção X_μ, e um fluxo de calor β na direção da anisotropia. Isto é, aquele TEM representa um fluido anisotrópico com "fluxo de calor" na direção da anisotropia.

Todavia, a relação (2.23a) pode ser re-escrita da seguinte maneira

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi\eta_{\mu\nu} + \beta l_\mu l_\nu, \tag{2.24}$$

onde

$$l_\mu = U_\mu - X_\mu, \tag{2.25}$$

o qual representa a soma de um fluido de cordas [10] com um fluido nulo. Para $\pi = 0$, o TEM (2.24) corresponde a soma de um fluido nulo e um fluido incoerente de cordas.

III - Terceiro Caso: R imaginário.

Para que R seja imaginário devemos ter

$$(u_\mu v^\mu)^2 > (r + s)^2/(4rs). \tag{2.26}$$

Vamos então no que segue escrever, em vez de R, o seguinte

$$Q = -iR = \left[4rs(u^\mu v_\mu)^2 - (r + s)^2\right]^{1/2}, \tag{2.27}$$

Nesse caso o TEM (2.3) pode ser escrito na seguinte forma canônica [34]

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} + \beta(U_\mu X_\nu + X_\mu U_\nu), \tag{2.28a}$$

onde

$$\rho = (\omega - \varepsilon - \pi)/2, \tag{2.28b}$$

$$\beta = Q/2 \tag{2.28c}$$

$$U_\mu = Z\left[\sqrt{(P-2sQ)r}\; u_\mu + \sqrt{(P - 2rQ)s}\; v_\mu\right], \tag{2.28d}$$

$$X_\mu = Z\left[-\sqrt{(P+2sQ)r}\; u_\mu + \sqrt{(P + 2rQ)s}\; v_\mu\right]; \tag{2.28e}$$

com $U^\nu U_\nu = -X^\nu X_\nu = 1$, $U^\nu X_\nu = 0$, e com as seguintes definições

$$P = \sqrt{4r^2Q^2 + (Q^2 + s^2 - r^2)^2} = \sqrt{4s^2Q^2 + (Q^2 + r^2 - s^2)^2}, \tag{2.29a}$$

$$Z = \left[Q(Q^2 + (r - s)^2)/4\right]^{-1/4}. \tag{2.29b}$$

O TEM (2.28a) representa um fluido de cordas com densidade ρ e com fluxo de calor β na direção X_μ (a direção da corda).

2.4 - Modelos Meios Materiais com N fluidos Perfeitos Componentes

Com a finalidade de generalizar o modelo descrito na seção 2.3, consideremos o seguinte tensor de energia-momento constituído pela soma de N fluidos perfeitos

$$T_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i(\rho^i + p^i)u^i_\mu u^i_\nu - \varepsilon^i p^i g_{\mu\nu}, \tag{2.30}$$

onde ρ^i, p^i e u^i_μ são a densidade, a pressão e a velocidade do i-ésimo fluido, respectivamente, e onde $g^{\sigma\tau}u^i_\sigma u^i_\tau = 1$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon^i = \pm 1$, dependendo se estamos somando ou subtraindo, respectivamente, o i-ésimo fluido perfeito componente.

O conjunto de vetores tipo tempo u^i_μ gera um subespaço do espaço-tempo cuja dimensão n depende do números de vetores linearmente independentes (LI), e que pode ser no máximo quatro (igual à dimensão do espaço-tempo, caso em que o subespaço corresponde ao próprio espaço-tempo). Seja u^a_μ (a=1, ..., n) uma base do espaço gerado pelos u^i_μ. Então, todos os vetores u^i_μ podem ser escritos como combinação linear dos n vetores u^a_μ da base, ou seja

$$u^i_\mu = \alpha^i_a u^a_\mu \,, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{2.31}$$

onde adotamos a usual convenção de somatória sobre índices repetidos, e temos

$$\alpha^i_a = \delta^i_a, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n; \tag{2.32}$$

sendo que para $i > n$ as relações para os α^i_a (em função dos $\lambda^{ij} = \lambda^{ji} = g^{\sigma\tau}u^i_\sigma u^j_\tau$) são diferentes para cada valor de n, por isso não as escreveremos aqui.

Depois da relação (2.32), o TEM (2.30) pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{ab} u^a_\mu u^b_\nu - \pi g_{\mu\nu}, \tag{2.33}$$

onde

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba} \equiv \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i (\rho^i + p^i)\alpha^i_a \alpha^i_b, \tag{2.34a}$$

$$\pi \equiv \sum_{i=1}^{N} \epsilon^i p^i. \tag{2.34b}$$

Modelos de fluidos, como o dado em (2.33), têm sido estudados em alguns casos particulares. Além dos casos já citados acima, na referência [7] encontra-se um estudo nos casos da soma (ϵ^i=+1, $\forall$ i) de três e de N fluidos perfeitos cujas quadrivelocidades pertencem todas a um mesmo plano (n = 2). O tipos de fluidos resultantes nesses casos são os mesmos encontrados no caso da soma de dois fluidos perfeitos.

Da mesma forma, os tipos de fluidos obtidos a partir de um modelo de N fluidos com ϵ^i=-1, para algum (ou vários) i, e com n = 2, são os mesmos que os obtidos na seção 2.3.

Os fluidos descritos acima podem ser utilizados para a construção de modelos cosmológicos anisotrópicos [35] como também para modelos de estrelas [36,4]. No capítulo 5 faremos algumas aplicações, onde analisaremos mais de perto a interpretação física de alguns dentre tais modelos materiais.

CAPÍTULO III

A RELAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE CAMPOS ESCALARES E OS DE MULTIFLUIDOS

3.1 - Introdução

Pode-se dizer que o estudo da "construção" de modelos de campos escalares a partir de meios materiais originou-se no trabalho de Tabensky e Taub [14], onde mostrou-se que um fluido perfeito com equação de estado do tipo barotrópico [$p = p(\rho)$] pode ser interpretado como um modelo de um campo escalar. Em especial, para a equação $p = \rho$, o campo escalar obtido satisfaz a usual equação do campo escalar sem massa.

Tal tratamento foi generalizado por Letelier [16,6] partindo da situação em que o tensor de energia-momento é constituído pela soma de dois fluidos perfeitos. O resultado disso é um modelo com dois campos escalares interagentes, correspondendo a um caso particular dos chamados modelos σ não lineares. O caso especial onde os dois campos obtidos não interagem pode ser considerado como um modelo de um campo escalar complexo [16].

Invertendo o tratamento até aqui descrito, podemos interpretar os modelos de campos escalares como meios marterias. Este ponto já foi discutido brevemente em [14] para o caso de um campo escalar sem auto-interação.

Um campo escalar pode, em princípio, constituir um meio contínuo mais geral do que um fluido perfeito irrotacional. Isto porque o campo escalar inclui o caso de um fluido nulo ou de um fluido anistrópico, ambos irrotacionais. A interpretação como fluido anisotrópico é possível quando o gradiente do campo escalar define um vetor tipo espaço, sendo que o "fluido" irrotacional correspondente apresenta pressão negativa em duas direções. O fluido nulo ocorre quando o gradiente do campo escalar é um vetor tipo luz.

Imediatamente, então, podemos pensar em interpretar modelos mais gerais de campos escalares, como partindo-se da soma de vários campos desse tipo ou de modelos σ não lineares, em termos de meios materiais [15]. Tal procedimento conduz a modelos com propriedades físicas e matemáticas interessantes, como mostrados nos casos particulares já estudados [15,8,7].

Todo esse estudo a respeito de fluidos irrotacionais se justifica também pelo fato de que em determinadas simetrias do espaço-tempo a vorticidade é identicamente nula [37]. Além disso, modelos construídos a partir de dois ou mais fluidos irrotacionais são interpretados no final como um fluido único o qual não é mais necessariamente irrotacional.

Com base nesses preliminares podemos fazer um resumo do que é descrito no presente capítulo.

Iniciamos (seção 3.2) tratando da relação fluidos perfeitos $\longrightarrow$ campos escalares considerando os casos de um e dois fluidos para em seguida descrever a respeito da generalização para o caso de N fluidos perfeitos componentes.

Na seção 3.3 estudamos a relação inversa a anterior, descrevendo inicialmente os tipos de meios materiais que um campo escalar em geral pode representar. Logo após, tratamos detalhadamente da interpretação do TEM constituído pela soma de dois campos escalares, nos casos ainda não considerados na literatura,.

O problema da soma de vários campos escalares é considerado na seção 3.4 onde tratamos dos modelos σ não lineares. Com o objetivo de comparar os resultados encontrados a partir de tais modelos com o que se obteve no capitulo II, estudamos também o caso particular (de modelos σ) com dois campos não interagentes e com métrica interna não positiva-definida .

Finalizando o capitulo, apresentamos, na seção 3.5, outros modelos σ simples, relacionando-os com o que foi visto nas seções anteriores e no capitulo II.

3.2 - Construindo Modelos de Campos Escalares a Partir de Fluidos Perfeitos

A relação entre fluidos e campos escalares aparece evidenciada nas referências [14,16], onde mostra-se que um fluido perfeito, irrotacional e com pressão igual à densidade de energia corresponde a um campo escalar sem massa. É fácil mostrar, seguindo a mesma linha de raciocínio dos autores de tais trabalhos, que um fluido perfeito irrotacional pode ser associado a um campo escalar massivo da seguinte forma: Seja o TEM de um fluido perfeito, com velocidade u^{μ}, pressão p e densidade de energia ω.

$$T_{\mu\nu} = (p + \omega)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}, \qquad u_{\nu}u^{\nu} = 1. \tag{3.1}$$

A identidade de Bianchi $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, para (3.1) pode ser escrita como:

$$\left[(p+\omega)u_{\mu;\nu}u^{\nu} - p_{,\mu}\right]h^{\mu\sigma} = 0, \tag{3.2a}$$

$$(p+\omega)u^{\nu}{}_{;\nu} + \omega_{,\nu}u^{\nu} = 0, \tag{3.2b}$$

onde $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_{\mu}u_{\nu}$.

A hipótese da irrotacionalidade do fluido se escreve como

$$h_{\mu}{}^{\sigma}h_{\nu}{}^{\rho}(u_{\sigma;\rho} - u_{\rho;\sigma}) = 0. \tag{3.3}$$

Com isso, podemos escrever

$$u_{\mu} = \varphi_{,\mu}/\sqrt{\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}}, \tag{3.4}$$

onde φ é uma função escalar arbitrária sujeita ao vínculo $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$. Observe-se que u_{μ} definido em (3.4) é solução de (3.3) e, além disso, $u_{\mu}u^{\mu} = 1$.

Substituindo (3.4) em (3.2a) vem

$$\left[(p+\omega)\left(\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}\right)_{,\mu}/(\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}) - 2p_{,\mu}\right]h^{\mu\tau} = 0. \tag{3.5}$$

Esta última equação é satisfeita identicamente se escolhermos

$$p + \omega = F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}, \tag{3.6}$$

$$p = [F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} - G]/2, \tag{3.7}$$

onde F e G são funções arbitrárias do potencial escalar φ.

Usando as equações acima, o TEM (3.1) pode ser escrito na forma

$$T_{\mu\nu} = F\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - g_{\mu\nu}(F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} - G)/2, \tag{3.8}$$

o qual pode também ser obtido a partir da seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,(F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} - G)/2 = \sqrt{-g}\,p \tag{3.9}$$

A equação de evolução para φ é obtida de (3.2b), (3.4), (3.6) e (3.7)

$$F\Box\varphi = -F_{,\varphi}(\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma})/2 - G_{,\varphi}/2, \tag{3.10}$$

onde usamos a notação $F_{,\varphi} \equiv \partial F/\partial\varphi$, $G_{,\varphi} \equiv \partial G/\partial\varphi$ e $\Box\varphi \equiv (\varphi_{,\nu})^{;\nu}$. Note-se[1] que podemos tomar $F = 1$ e $G(\varphi) = m^2\varphi^2 + V(\varphi)$, de forma que a equação (3.10) representa, nesse caso, a equação para um campo escalar massivo

---

[1] *Na verdade, dado que $F = F(\varphi)$, podemos fazer a transformação $\varphi \longrightarrow \phi$ tal que $\varphi_{,\mu} = \phi_{,\mu}/\sqrt{F}$ e, com isso, (3.10) reduz-se à usual equação do campo escalar $\Box\phi = - G_{,\phi}/2$.*

com um potencial de auto-interação $V(\varphi)$.

Depois das equações (3.6) e (3.7), vemos que o fluido perfeito em questão tem a seguinte equação de estado

$$p = \omega - G(\varphi). \tag{3.11}$$

Na referência [6] mostrou-se que um TEM constituído pela soma de dois fluidos perfeitos e irrotacionais, como o caso discutido no capítulo II,

$$T_{\mu\nu} = (p + \omega)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} + (q + \varepsilon)v_{\mu}v_{\nu} - qg_{\mu\nu}, \tag{3.12}$$

com (irrotacionalidade)

$$h_{\mu}{}^{\sigma}(u)h_{\nu}{}^{\rho}(u)[u_{\sigma;\rho} - u_{\rho;\sigma}] = 0,$$
$$h_{\mu}{}^{\sigma}(v)h_{\nu}{}^{\rho}(v)[v_{\sigma;\rho} - v_{\rho;\sigma}] = 0,$$

e onde $h_{\mu\nu}(u) = g_{\mu\nu} - u_{\mu}u_{\nu}$, $h_{\mu\nu}(v) = g_{\mu\nu} - v_{\mu}v_{\nu}$, corresponde ao seguinte modelo de campos escalares:

$$T_{\mu\nu} = F\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + H\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - g_{\mu\nu}(F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} + H\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} - G)/2, \tag{3.13}$$

$$F\Box\varphi = \left[H_{,\varphi}(\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}) - F_{,\varphi}(\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}) - 2F_{,\psi}(\varphi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}) - G_{,\varphi}\right]/2, \tag{3.14}$$

$$H\Box\psi = \left[F_{,\psi}(\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}) - H_{,\psi}(\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}) - 2H_{;\varphi}(\varphi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}) - G_{,\psi}\right]/2, \tag{3.15}$$

onde F, H e G são funções arbitrárias dos campos escalares φ e ψ.

O ponto importante o qual queremos salientar aqui é o fato de que as equações (3.13), (3.14) e (3.15) representam um caso particular dos chamados modelos σ. Para ver isso claramente, e de uma forma um pouco mais geral, vamos retornar ao caso da soma dos N fluidos perfeitos considerado no capítulo II. Mais especificamente, temos que as equações (2.33) e (2.34) no caso $n = 2$ e $\varepsilon^{1} = 1$, se reduzem a (ver ref. [7])

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{11} u^{1}_{\mu} u^{1}_{\nu} + \gamma_{22} u^{2}_{\mu} u^{2}_{\nu} + \gamma_{12} (u^{1}_{\mu} u^{2}_{\nu} + u^{2}_{\mu} u^{1}_{\nu}) - \pi g_{\mu\nu}, \qquad (3.16)$$

onde

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba} \equiv \sum_{I=1}^{N} (\rho^{I} + p^{I}) \alpha^{I}_{a} \alpha^{I}_{b}, \qquad a,\ b = 1,\ 2, \qquad (3.17)$$

$$\pi \equiv \sum_{I=1}^{N} p^{I}. \qquad (3.18)$$

O TEM (3.16) representa a soma de três (ou mais) fluidos perfeitos, e pode ser interpretado como um TEM de campos escalares seguindo o mesmo método descrito nas referências [14,16,6]. Para isto, basta impor que u^{1}_{μ} e u^{2}_{μ} sejam irrotacionais, o que nos possibilita definir

$$u^{1}_{\mu} = \varphi_{,\mu} / \sqrt{\varphi_{,\sigma} \varphi^{,\sigma}}, \qquad (3.19a)$$

$$u^{2}_{\mu} = \psi_{,\mu} / \sqrt{\psi_{,\sigma} \psi^{,\sigma}}, \qquad (3.19b)$$

onde φ e ψ são, como antes, funções escalares arbitrárias. Nesse caso, a equação análoga a (3.2a) obtida pela identidade de Bianchi é satisfeita se tomarmos

$$\gamma_{11} = F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}, \tag{3.20}$$

$$\gamma_{22} = H\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}, \tag{3.21}$$

$$\gamma_{12} = E\psi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}, \tag{3.22}$$

$$\pi = \left[F\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} + H\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} + E\psi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} - G\right]/2, \tag{3.23}$$

com F, G, E e H sendo funções somente de ψ e φ, os quais são campos escalares reais.

Com as equações (3.18)—(3.23), o TEM (3.16) se escreve

$$T_{\mu\nu} = F\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + H\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} + E(\varphi_{,\mu}\psi_{,\nu} + \psi_{,\mu}\varphi_{,\nu})$$
$$-g_{\mu\nu}\left[F(\varphi^{,\tau}\varphi_{,\tau}) + H(\psi^{,\tau}\psi_{,\tau}) + 2E(\varphi^{,\tau}\psi_{,\tau}) - G\right]/2, \tag{3.24}$$

o qual pode ser derivado da seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[F(\varphi^{,\sigma}\varphi_{,\sigma}) + H(\psi^{,\sigma}\psi_{,\sigma}) + 2E(\varphi^{,\sigma}\psi_{,\sigma}) - G\right]/2. \tag{3.25}$$

Vamos tomar $G = 0$ e definir $H_{11} = F$, $H_{22} = H$, $H_{12} = H_{21} = E$, $\phi^1 = \varphi$, $\phi^2 = \psi$. Podemos então escrever (3.25) como

$$\mathcal{L} = H_{ij}\left[g^{\mu\nu}\phi^i_{,\mu}\phi^j_{,\nu}\right], \qquad i, j = 1, 2;$$

que é a Lagrangeana de um modelo sigma não linear particular ($H_{12} = H_{21}$, $H_{11}\left[g^{\mu\nu}\phi^1_{,\mu}\phi^1_{,\nu}\right] > 0$, $H_{22}\left[g^{\mu\nu}\phi^2_{,\mu}\phi^2_{,\nu}\right] > 0$, $H_{12}\left[g^{\mu\nu}\phi^1_{,\mu}\phi^2_{,\nu}\right] > 0$).

Os casos $n = 3$ e $n = 4$ são facilmente tratados em analogia com o caso anterior. Assim, podemos afirmar que modelos de multifluidos, cujos fluidos componentes são irrotacionais, correspondem sempre a algum modelo sigma particular, sendo que a interpretação física do TEM de tais modelos reduz-se ao que foi descrito no capítulo II. Ainda mais, podemos também construir modelos subtraindo algum (ou alguns) dentre os TEM's dos fluidos perfeitos envolvidos, em analogia com a secão **2.3.** Os resultados finais são modelos σ não lineares com métrica interna não positiva-definida. Vale também salientar uma vez mais que o fato de os fluidos componentes terem suas quadrivelocidades irrotacionais, não implica necessariamente na irrotacionalidade do fluido resultante e, portanto, a sua generalidade não é perdida.

3.3 - Construindo Modelos Materiais a Partir de Campos Escalares

Consideremos agora o TEM de um campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - g_{\mu\nu}(\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} - G)/2, \tag{3.26}$$

com a seguinte equação de campo

$$\Box\varphi + (\partial G/\partial\varphi)/2 = 0. \tag{3.27}$$

Na tentativa de tratar o TEM (3.26) como o tensor de energia e momento de um meio material, devemos considerar separadamente as três situações distintas: (I) $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$, (II) $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} = 0$ e (III) $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} < 0$.

I - No caso em que $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$, podemos definir o campo vetorial irrotacional

$$u_\mu = \varphi_{,\mu}/\sqrt{\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}}. \tag{3.28}$$

A interpretação de (3.26) fica, então, a recíproca do que foi tratado na seção 2.1; ou seja, o TEM de um campo escalar φ, com $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$, corresponde a um fluido perfeito irrotacional com densidade de energia ω e pressão p dados por

$$\omega = [\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} + G]/2, \tag{3.29a}$$

$$p = \omega - G = [\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} - G]/2. \tag{3.29b}$$

Vale observar também que, se $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} < G$, o TEM (3.26) caracterizará um material com densidade de energia ω e com uma *tensão* isotrópica $\sigma = (G - \varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma})/2$. Tem-se ainda o caso $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} = G$, o que resulta num TEM correspondente a um fluido incoerente.

II - Na situação $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} = 0$, $\varphi_{,\mu}$ é um vetor nulo e o TEM (3.26) se escreve

$$T_{\mu\nu} = \alpha^2 l_\mu l_\nu + g_{\mu\nu}G/2, \tag{3.30}$$

onde

$$\varphi_{,\mu} \equiv \alpha l_\mu. \tag{3.31}$$

$\alpha^2 l_\mu l_\nu$ corresponde simplesmente ao TEM de um fluido nulo (irrotacional). O termo $Gg_{\mu\nu}/2$ equivale ao TEM de um meio material isotrópico com tensão σ [= pressão negativa $(-p)$] = $G/2$ igual à densidade de energia ($\rho = G/2$). Vale lembrar ainda que para φ constante ($\varphi_{,\mu} = 0$), (3.30) [ou mesmo (3.26)] implica em $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}G/2$, com G constante, que ao ser acoplado às equações de Einstein corresponde ao termo cosmológico bem conhecido.

III - Quando $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} < 0$, podemos definir um vetor tipo espaço normalizado

$$x_{\mu} = \varphi_{,\mu}/\sqrt{-\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}}. \tag{3.32}$$

Nesse caso, o TEM (3.26) pode ser escrito na seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = f x_{\mu} x_{\nu} + g_{\mu\nu}(f+G)/2 \tag{3.33}$$

$$f \equiv -\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0. \tag{3.34}$$

Os autovalores de (3.33) são $\lambda_1 = (G - f)/2$, $\lambda_{2,3,4} = (G + f)/2$. Dessa forma, o TEM (3.33) pode ser escrito como segue [14]

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu} U_{\nu} + \sigma X_{\mu} X_{\nu} - \rho(Y_{\mu} Y_{\nu} + Z_{\mu} Z_{\nu}), \tag{3.35}$$

$$\rho = (G + f)/2 \; ; \quad \sigma = (f - G)/2, \tag{3.36}$$

onde U_{μ}, X_{μ}, Y_{μ}, Z_{μ} formam uma base ortonormal do espaço-tempo. O TEM (3.35) representa um material com pressão σ na direção X_{μ} e tensão ρ (isotrópica) nas direções Y_{μ} e Z_{μ}.

Antes de passarmos aos Modelos σ, consideremos o caso de um TEM construído pela soma de dois campos escalares (o qual será útil quando tratarmos do modelo supersimétrico de Wess-Zumino)

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - g_{\mu\nu}(\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} + \psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} - G)/2, \tag{3.37}$$

onde $G = G(\varphi,\psi)$ [p. e., $G = m_1\varphi^2 + m_2\psi^2 + V(\varphi) + W(\psi) + I(\varphi,\psi)$].

Para esse último tensor de energia-momento também temos várias situações distintas:

I - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$ e $\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} > 0$ — Isto corresponde a soma de dois fluidos perfeitos e irrotacionais.

II - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$ e $\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} = 0$ — É equivalente à soma de um fluido nulo com um fluido perfeito irrotacionais, desde que $G = G(\varphi)$.

III - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} = \psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} = 0$ — Para $G = 0$, representa a soma de dois fluidos nulos e irrotacionais.

IV - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$ e $\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} < 0$.

V - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} < 0$ e $\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} < 0$.

As situações (I), (II) e (III) não serão tratadas em detalhes aqui. A interpretação desses casos foi feita em [16] e [6], para o caso geral, partindo não dos campos escalares senão que da soma dos tensores de energia-momento dos próprios fluidos, sendo que estes não necessitam ser irrotacionais.

Vamos estudar a seguir os casos (IV) e (V), os quais têm situações diversas às apresentadas por (I), (II) e (II).

IV - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} > 0$ e $\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} < 0$ — Aqui, podemos definir

$$u_\mu = \varphi_{,\mu}/\sqrt{\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}} \; ; \qquad x_\mu = \psi_{,\mu}/\sqrt{-\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}}. \tag{3.38}$$

Com isso, o TEM (3.37) se escreve

$$T_{\mu\nu} = r u_\mu u_\nu - s x_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}(r + s - G)/2, \tag{3.39}$$

onde

$$r = \varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}; \qquad s = \psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}. \tag{3.40}$$

Vamos, no que segue, supor

$$G \geq 0. \tag{3.41}$$

Os autovalores de (3.39) são

$$\lambda_{0,1} = (G \pm R)/2, \tag{3.42a}$$

$$\lambda_{2,3} = -(r + s - G)/2, \tag{3.42b}$$

$$R = \left[(r-s)^2 - 4rs(x^\mu u_\mu)^2\right]^{1/2}. \tag{3.42c}$$

O fator R dado em (3.42c) é sempre real ($R \geq 0$), pois $r > 0$, $s < 0$, e $(x^{\mu}u_{\mu})^2 \geq 0$. Ou seja, o TEM (3.39) pode sempre ser diagonalizado. Além do mais, seguem desse fato as seguintes desigualdades

$$\lambda_0 \geq (r-s+G)/2, \tag{3.43a}$$

$$\lambda_1 \leq (-r+s+G)/2. \tag{3.43b}$$

Temos ainda que os vetores u_{μ} e x_{μ} geram um subespaço bidimensional tipo tempo $\mathcal{T}$ [32], com uma direção tipo tempo e outra tipo espaço. Sendo assim, o autovalor λ_0 que é sempre positivo, pode ser associado ao autovetor tipo tempo (U_{μ}), o qual pertence a $\mathcal{T}$. Uma outra possibilidade seria associar λ_1 ao autovetor tipo tempo, mas isso não é interessante fisicamente pois $\lambda_0 > \lambda_1$ e λ_1 pode ser negativo, implicando em uma densidade de energia negativa (caso fosse associado a U_{μ}). U_{μ} não pode estar associado a λ_3 ou λ_4, visto que teríamos em tal caso um autovetor tipo tempo que não pertenceria a $\mathcal{T}$, o que é uma contradição, pois $\mathcal{M}$ (o espaço pseudo-Riemanniano quadridimensional com métrica g de assinatura -2) tem apenas uma direção tipo tempo.

Por isso, associamos λ_0 a U_{μ}, enquanto λ_1 fica associado a um autovetor tipo espaço X_{μ} também pertencente a $\mathcal{T}$. Os autovalores λ_2 e λ_3 ficam associados a autovetores tipo espaço que geram o subespaço complementar de $\mathcal{T}$ em $\mathcal{M}$.

O TEM (3.39), então, se escreve

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)U_{\mu}U_{\nu} + (\sigma-\pi)X_{\mu}X_{\nu} - \pi g_{\mu\nu}, \tag{3.44}$$

com

$$\rho = (G + R)/2, \tag{3.45a}$$

$$\sigma = (R - G)/2, \tag{3.45b}$$

$$\pi = (r + s - G)/2; \tag{3.45c}$$

onde U_μ e X_μ são facilmente calculáveis em função de λ_0, λ_1, u_μ e x_μ, conforme feito no capítulo II. Nós não escreveremos essas expressões aqui, como também não o faremos nos demais casos a seguir.

Observe-se que, naturalmente, vale: $U_\mu U^\mu = - X_\mu X^\mu = 1$ e $U_\mu X^\mu = 0$.

O TEM (3.44) descreve, enquanto $\sigma > 0$ e $\pi > 0$ (i. e. se $R > G$ e $r > G - s$), um fluido anisotrópico com pressão σ na direção X_μ, e pressão π no plano perpendicular a X_μ. Note-se, entretanto, que tanto σ quanto π podem ser negativos, caracterizando uma tensão na respectiva direção do meio material descrito por (3.44). É possível ainda termos $\pi = 0$ ($r = G - s$), nesse caso

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + \sigma X_\mu X_\nu, \tag{3.46}$$

o que representa um fluido anisotrópico com pressão σ na direção X_μ e pressão nula nas demais direções.

V - $\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma} < 0$ e $\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma} < 0$ — Pode-se, nesse caso, definir os seguintes vetores tipo espaço

$$y_\mu = \varphi_{,\mu}/\sqrt{-\varphi_{,\sigma}\varphi^{,\sigma}} \qquad (y_\mu y^\mu = -1), \tag{3.47a}$$

$$x_\mu = \psi_{,\mu}/\sqrt{-\psi_{,\sigma}\psi^{,\sigma}} \qquad (x_\mu x^\mu = -1). \tag{3.47b}$$

Usando (3.47a), (3.47b) e (3.37) encontramos

$$T_{\mu\nu} = -ry_\mu y_\nu - sx_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}(r + s - G)/2, \tag{3.48}$$

cujos autovalores são os mesmos das equações (3.42a) e (3.42b), onde agora R é dado por

$$R = \left[(r-s)^2 + 4rs(x^\mu y_\mu)^2\right]^{1/2}. \tag{3.49}$$

No que diz respeito à interpretação de (3.48) observa-se três situações de interesse distintas [Note-se que R de (3.49) é real e positivo para qualsquer r, s, x_μ e y_μ não nulos]: os vetores unitários y_μ e x_μ podem pertencer a qualquer um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}$

V.1 - Um subespaço unidimensional tipo espaço $\mathcal{X}$;

V.2 - Um subespaço bidimensional tipo tempo $\mathcal{T}$;

V.3 - Um subespaço bidimensional tipo espaço $\mathcal{S}$.

V.1 - Esse primeiro caso ocorre se $y_\mu = x_\mu$, ou seja se $\varphi_{,\mu}$ e $\psi_{,\mu}$ forem proporcionais, de modo que o TEM (3.48) resulta equivalente àquele devido a apenas um campo escalar, o qual já foi considerado na seção anterior.

V.2 – Essa situação ocorre se existe uma combinação linear de y_μ e x_μ do tipo $V_\mu = Ay_\mu + Bx_\mu$, onde A, B $\in \mathbb{R}$, tal que V_μ é um vetor tipo tempo. Isto é, tal que $V_\mu V^\mu = -A^2 - B^2 + 2AB(y^\mu x_\mu) > 0$. Dessa forma, o autovetor tipo tempo de (3.48) pertence ao subespaço $\mathcal{T}$, e deve, portanto, estar associado a λ_0 ou λ_1, visto que λ_3 e λ_4 estão associados aos autovetores geradores do subespaço complementar de $\mathcal{T}$ em $\mathcal{M}$, os quais são ambos tipo espaço.

Além do mais, agora temos $r < 0$ e $s < 0$, de forma que os autovalores $\lambda_2 = \lambda_3$ e λ_0 serão sempre positivos. Por isso, associamos λ_0 ao autovetor tipo tempo, sendo que (3.48) assume, então, a seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + \sigma X_\mu X_\nu - \pi(Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_\nu), \tag{3.50a}$$

$$= (\rho+\pi)U_\mu U_\nu + (\sigma-\pi)X_\mu X_\nu - \pi g_{\mu\nu}, \tag{3.50b}$$

onde

$$\rho = (R + G)/2, \tag{3.51a}$$

$$\sigma = (R - G)/2. \tag{3.51b}$$

$$\pi = (G - r - s)/2, \tag{3.51c}$$

que representa um fluido com densidade de energia ρ, pressão σ na direção X_μ, e tensão isotrópica π no "plano espacial ortogonal" a X_μ.

V.3 – Visto que os vetores x_μ e y_μ, geram um subespaço tipo espaço $\mathcal{S}$, o autovetor tipo tempo pertence ao complementar ($\mathcal{T}$) de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{M}$. Assim, o autovalor correspondente a tal autovetor deve ser λ_2 (ou λ_3), o que é razoável pois ele é positivo. Portanto, nesse caso, o TEM (3.48) se escreve

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu - \sigma X_\mu X_\nu - \pi Y_\mu Y_\nu - \upsilon Z_\mu Z_\nu, \tag{3.52}$$

onde

$$\rho = \sigma = (G - r - s)/2, \tag{3.53a}$$

$$\pi = (R + G)/2, \tag{3.53b}$$

$$\upsilon = (R - G)/2. \tag{3.53c}$$

O TEM (3.52) pode ser interpretado como um meio material anisotrópico com tensão igual à densidade de energia ρ na direção (X_μ) e com tensões principais $\tau_2 = \tau_3 = \pi$ no plano gerado por (Y_μ, Z_μ) ortogonal a X_μ.

TEM's como (3.50), (3.50) e (3.52) representam materiais relativamente complexos, pois enquanto temos pressão em uma dada direção espacial, podemos ter tensão em uma outra ou nas demais direções. Esses fatos possibilitam a construção de modelos de materiais interessantes, como o de paredes cósmicas, os quais são estudados em cosmologia [11].

3.4 - Construindo Meios Materiais a Partir de Modelos σ

É conhecido também que os modelos σ, cuja Lagrangeana e cujo tensor de energia-momento são dados por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,[\sigma^{,\nu} \circ \sigma_{,\nu}]/2, \tag{3.54a}$$

$$T_{\mu\nu} = \sigma_{,\mu} \circ \sigma_{,\nu} - g_{\mu\nu}(\sigma_{,\tau} \circ \sigma^{,\tau})/2, \tag{3.54b}$$

onde p. e.

$$\sigma_{,\mu} \circ \sigma_{,\nu} \equiv H_{ij}(\sigma^{i})_{,\mu} \circ (\sigma^{j})_{,\nu} \qquad (i,j = 1, \ldots, N), \tag{3.55}$$

e onde H_{ij} são funções conhecidas dos σ^{i}, N é o número de campos escalares no multipleto e com a vírgula denotando a derivada parcial ordinária, podem também ser interpretados como fluidos materiais [15].

Vamos considerar o conjunto de vetores V^{i}_{μ} definidos por

$$V^{i}_{\mu} = \sigma^{i}_{,\mu} \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{3.56}$$

Desse conjunto de vetores temos que n (no máximo quatro) dentre eles são linearmente independentes (LI). Para fazer referência a tais vetores vamos usar ao símbolo U^{a}_{μ} ($a = 1, \ldots, n$). Temos então, como no caso dos N fluidos perfeitos acima, que todos os vetores V^{i}_{μ} podem ser escritos como combinação linear dos n vetores LI U^{a}_{μ}, ou seja

$$V^{i}_{\mu} = \alpha^{i}_{a} U^{a}_{\mu}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{3.57}$$

onde, como anteriormente, $\alpha^{i}_{a} = \delta^{i}_{a}$ para $i \leq n$, e os demais α^{i}_{a} são funções dos $\lambda^{jk} = g^{\sigma\tau} V^{j}_{\sigma} V^{k}_{\tau}$ (para $i > n$).

Depois de (3.57), o TEM (3.54b) pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \alpha_a \circ \alpha_b U^a_\mu U^b_\nu - g_{\mu\nu}[g^{\sigma\tau}\alpha_a \circ \alpha_b U^a_\sigma U^b_\tau]/2. \tag{3.58}$$

De acordo com o que vimos acima, um modelo de campo escalar (φ) pode ter uma interpretação direta como um fluido perfeito quando tivermos $\varphi^{,\sigma}\varphi_{,\sigma} > 0$. Vamos supor que a tal relação vale para os campos σ^1 do modelo representado por (3.54), ou pelo menos para aqueles campos cujas derivadas definem os vetores LI (U^a_μ) que formam a base para o espaço gerado pelos vetores V^1_μ, ou seja

$$g^{\mu\nu}\sigma^a_{,\mu}\sigma^a_{,\nu} > 0. \tag{3.59}$$

Nesse caso, podemos definir os seguintes vetores tipo-tempo normalizados

$$(u_a)_\mu = U^a_\mu/\sqrt{g^{\sigma\tau}U^a_\sigma U^a_\tau} \qquad \text{(não soma em a)} \tag{3.60}$$

Com isso, o TEM (3.58) se escreve

$$T_{\mu\nu} = F^{ab}(u_a)_\mu(u_b)_\nu - g_{\mu\nu}P, \tag{3.61}$$

onde

$$F^{ab} \equiv \alpha_a \circ \alpha_b \sqrt{g^{\mu\nu}U^a_\mu U^a_\nu}\sqrt{g^{\sigma\tau}U^b_\sigma U^b_\tau} \quad \text{(não soma em a e b)}, \tag{3.62a}$$

$$P \equiv [g^{\sigma\tau}\alpha_a \circ \alpha_b U^a_\sigma U^b_\tau]/2. \tag{3.62b}$$

Observe-se que (3.61) tem a mesma forma que (2.33), portanto se impormos as condições $F^{ab} = F^{ba}$, $F^{aa} > 0$ ($\Longrightarrow \alpha_a \circ \alpha_a > 0$) e $P > 0$, estamos garantindo que o modelo σ não linear das equações (3.54) representa um TEM que é equivalente a soma de N fluidos perfeitos. Em termos das quantidades originais de (3.54) tais condições são: $P = H_{ij}g^{\mu\nu}\sigma^i_{,\mu}\sigma^j_{,\nu} > 0$ e que a "métrica interna" H_{ij} seja positiva-definida.

Meios materiais interessantes podem ser obtidos quando a métrica H_{ij} não for positiva-definida. Para exemplificar, vamos tomar o caso particular $N = 2$, $H_{ij} = \mathrm{diag}(1,-1)$. Com essas escolhas, (3.61) se escreve

$$T_{\mu\nu} = F^{11}(u_1)_\mu(u_1)_\nu - F^{22}(u_2)_\mu(u_2)_\nu - g_{\mu\nu}P, \tag{3.63}$$

onde

$$F^{11} \equiv g^{\mu\nu}U^1_\mu U^1_\nu = g^{\mu\nu}\sigma^1_{,\mu}\sigma^1_{,\nu}, \tag{3.64a}$$

$$F^{22} \equiv g^{\mu\nu}U^2_\mu U^2_\nu = g^{\mu\nu}\sigma^2_{,\mu}\sigma^2_{,\nu}, \tag{3.64b}$$

$$P = [F^{11} - F^{22}]/2 = [g^{\mu\nu}\sigma^1_{,\mu}\sigma^1_{,\nu} - g^{\mu\nu}\sigma^2_{,\mu}\sigma^2_{,\nu}]/2; \tag{3.64c}$$

sendo que, por hipótese, $F^{11} > 0$ e $F^{22} > 0$, e onde os campos σ^1 e σ^2 satisfazem as respectivas equações

$$\Box\sigma^1 \equiv (\sigma^1)^{,\nu}{}_{;\nu} = 0; \qquad \Box\sigma^2 \equiv (\sigma^2)^{,\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{3.65}$$

O TEM (3.63) descreve um modelo idêntico ao da equação (2.5), desde que $F^{11} = p + \omega$; $F^{22} = q + \varepsilon$; $p = \omega = F^{11}/2$; $q = \varepsilon = F^{22}/2$. Seus autovalores são

$$\lambda_{0,1} = \pm R/2, \tag{3.66a}$$

$$\lambda_{2,3} = -(F^{11} - F^{22})/2; \tag{3.66b}$$

onde

$$R = \left[(F^{11}-F^{22})^2 - 4F^{11}F^{22}[(v^{\mu}u_{\mu})^2 - 1]\right]^{1/2}, \tag{3.67a}$$

$$u_{\mu} \equiv (u_1)_{\mu} \quad , \qquad v_{\mu} \equiv (u_2)_{\mu}. \tag{3.67b}$$

Uma vez que os vetores u_{μ} e v_{μ} são ambos tipo tempo, eles geram um subespaço tipo tempo $\mathcal{T}$. Assim, o autovetor tipo tempo de (3.63), se existe, deve pertencer a tal sub-espaço.

Analisando (3.67) observa-se que R pode assumir também valores imaginários, além de valores reais maiores ou iguais a zero. Estudemos cada um desses casos separadamente.

I - O caso em que R é imaginário deve valer a desigualdade

$$(F^{11}+F^{22})^2 \leq 4F^{11}F^{22}(v^{\mu}u_{\mu})^2, \tag{3.68}$$

sendo que o TEM (3.63) não pode ser diagonalizado, mas pode ser escrito na forma canônica

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \pi(U_{\mu}U_{\nu} - X_{\mu}X_{\nu}) + \beta(U_{\mu}X_{\nu} + X_{\mu}U_{\nu}) - \pi g_{\mu\nu} \\ &= \beta(U_{\mu}X_{\nu} + X_{\mu}U_{\nu}) + \pi(Y_{\mu}Y_{\nu} + Z_{\mu}Z_{\nu}), \end{aligned} \tag{3.69}$$

onde U_{μ}, X_{μ}, Y_{μ}, Z_{μ} formam uma base ortonormal e

$$\beta = -iR/2 = \left[4F^{11}F^{22}(v^{\mu}u_{\mu})^2 - (F^{11}+F^{22})^2\right]^{1/2}, \tag{3.70a}$$

$$\pi = (F^{11}-F^{22})/2; \tag{3.70b}$$

que corresponde a um meio com fluxo de calor β (e pressão nula) na direção espacial X_μ e com pressão π nas demais, mas com densidade de energia de repouso nula e, portanto, sem interesse do ponto de vista físico. A pressão π é positiva para $F^{11} > F^{22}$ e é negativa para $F^{11} < F^{22}$. Nenhuma outra interpretação é possível, pois mesmo que $\lambda_{2,3} = -(F^{11} - F^{22})/2 > 0$, o autovetor tipo tempo não pode estar associado seja a λ_2, seja a λ_3, os quais são autovalores de (3.63) cujos autovetores correspondentes não pertencem ao subespaço tipo tempo $\mathcal{T}$, gerado pelos vetores u_μ e v_μ.

II - Vamos no que segue supor $R \geq 0$, o que implica na desigualdade seguinte

$$(u^\mu v_\mu)^2 \leq (F^{11}-F^{22})^2/(4F^{11}F^{22}). \tag{3.71}$$

Consideremos separadamente as duas situações: (1) $R > 0$ e (2) $R = 0$.

II.1 - $R > 0$.

O único autovalor positivo que pode ser associado ao autovetor tipo tempo é $\lambda_0 = R/2$, de modo que podemos escrever (3.63) na forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho+\pi)U_\mu U_\nu + (\rho-\pi)X_\mu X_\nu - \pi g_{\mu\nu} \\ &= \rho(U_\mu U_\nu + X_\mu X_\nu) + \pi(Y_\mu Y_\nu + Z_\mu Z_\nu), \end{aligned} \tag{3.72}$$

onde

$$\rho = R/2, \tag{3.73a}$$

$$\pi = (F^{11} - F^{22})/2. \tag{3.73b}$$

Esse TEM representa um fluido com pressão igual à densidade de energia ($\sigma = \rho$) na direção X_μ e com pressão π nas direções Y_μ e Z_μ, a qual também pode ser negativa ou nula.

II.2 - R = 0.

Nesse caso, o TEM (3.63) se escreve (em analogia com a seção 2.3)

$$T_{\mu\nu} = \pi(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} + \beta l_\mu l_\nu \tag{3.74a}$$

$$= (\beta+\pi)U_\mu U_\nu + (\beta-\pi)X_\mu X_\nu - \pi g_{\mu\nu} - \beta(U_\mu X_\nu + X_\mu U_\nu), \tag{3.74b}$$

onde

$$l_\mu = U_\mu - X_\mu, \tag{3.75a}$$

$$\pi = (F^{11} - F^{22})/2. \tag{3.75b}$$

O valor explícito de β somente pode ser calculado quando o sistema de coordenadas é fixado. Por exemplo, no espaço tangente ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) resulta

$$\beta = - S_{01} = (S_{00} + S_{11})/2, \tag{3.76a}$$

$$U_\mu = \delta^0_\mu, \tag{3.76b}$$

$$X_\mu = \delta^1_\mu, \tag{3.76c}$$

$$S_{\mu\nu} = F^{11} u_\mu u_\nu - F^{22} v_\mu v_\nu. \tag{3.76d}$$

O TEM (3.74a) é então a soma de um fluido nulo com um fluido cuja densidade de energia e pressão na direção X_μ (a direção de propagação do fluido nulo) são nulas e com pressão π no "plano (tipo espaço) ortogonal" a X_μ. Tal TEM apresenta, portanto, uma interpretação interessante fisicamente no caso em que $\pi = 0$, que corresponde, então, a um fluido nulo.

Todavia, ele pode ser interpretado também, conforme (3.74b), como um fluido anisotrópico com densidade de energia β, a qual é devida inteiramente ao fluxo de calor na direção X_μ, pressão π (isotrópica) no subespaço ortogonal ao gerado por U_μ e X_μ e pressão nula na direção X_μ.

Pode-se observar ainda que para construir modelos exatamente equivalentes aos descritos na seção 2.3, a partir de modelos σ (com métrica interna não positiva-definida), faz-se necessário a introdução de temos "extras" de massa ou de potenciais de interação. Por exemplo, no caso do TEM (3.63) isso equivale a adicionar termos do tipo $m^2(\sigma^1)^2$, $m^2(\sigma^2)^2$ e $V(\sigma^1,\sigma^2)$ em P (que é a Lagrangeana do sistema, a menos de fatores multiplicativos). Tal procedimento modifica os autovalores (3.66), o que possibilita uma interpretação física interessante também para o caso em que R [eq. (3.67a)] for imaginário.

3.5 - Comentários

Na última seção exemplificamos de forma simples a interpretação de modelos σ em termos de meios materiais tomando um modelo linear (campos não interagentes) o qual nos fornece o TEM (3.63). Ou seja, partimos com uma lagrangeana da forma

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[(\varphi^{,\sigma}\varphi_{,\sigma})-(\psi^{,\sigma}\psi_{,\sigma})\right]/2. \tag{3.77}$$

Tal escolha foi feita especificamente para comparar os resultados obtidos a partir daí com o que discutimos no capítulo II (no caso da subtração dos TEM's de dois fluido perfeitos). Em outras palavras, tomamos o modelo descrito pelas equações (2.5) e supomos que u_μ e v_μ sejam irrotacionais, obtendo, dessa forma, o TEM (3.63), o que é equivalente a substituir H $\longrightarrow$ -H em (3.24) e depois tomar F=1, H=1, E=G=0.

Todavia, resultados análogos são obtidos a partir de modelos σ mais interessantes. Como exemplo, tomemos o modelo σ com simetria $\mathcal{O}(2,1)$ [38]

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[(\partial^{\nu}\sigma)\circ\partial_{\nu}\sigma\right]/2, \tag{3.78a}$$

$$\sigma\circ\sigma \equiv (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 - (\sigma_3)^2 = 1, \tag{3.78b}$$

onde

$$A\circ B = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3.$$

Definindo uma nova parametrização

$$\varphi = \sigma_2/(\sigma_1+\sigma_3); \qquad \psi = 1/(\sigma_1+\sigma_3), \tag{3.79}$$

podemos escrever a Lagrangeana (3.78) como

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[(\partial^\nu\varphi)\partial_\nu\varphi - (\partial^\nu\psi)\partial_\nu\psi\right]/2\psi^2. \tag{3.80}$$

A partir de (3.80) obtemos o seguinte tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \left[(\partial_\mu\varphi)\partial_\nu\varphi - (\partial_\mu\psi)\partial_\nu\psi\right]/\psi^2 - g_{\mu\nu}\left[(\partial^\nu\varphi)\partial_\nu\varphi - (\partial^\nu\psi)\partial_\nu\psi\right]/2\psi^2. \tag{3.81}$$

Para completar, supomos $(\partial^\nu\varphi)\partial_\nu\varphi > 0$, $(\partial^\nu\psi)\partial_\nu\psi > 0$ e definimos

$$u_\mu = \partial_\mu\varphi/\sqrt{(\partial^\nu\varphi)\partial_\nu\varphi}\ ; \qquad v_\mu = \partial_\mu\psi/\sqrt{(\partial^\nu\psi)\partial_\nu\psi}. \tag{3.82}$$

A equação (3.81) se escreve, então

$$T_{\mu\nu} = r u_\mu u_\nu - s v_\mu v_\nu - g_{\mu\nu}(r - s)/2, \tag{3.83}$$

onde

$$r = (\partial^\nu\varphi)\partial_\nu\varphi/\psi^2; \qquad s = (\partial^\nu\psi)\partial_\nu\psi/\psi^2. \tag{3.84}$$

Ou seja, em relação a (3.63) muda-se somente a definição de F^{11} e F^{22}, de onde conclui-se que os materiais obtidos a partir de (3.83) são do mesmo tipo dos discutidos na seção 3.4, embora as funções como pressão, densidade de energia e os própios autovetores sejam diferentes.

Os casos em que $(\partial^{\nu}\varphi)\partial_{\nu}\varphi < 0$ e/ou $(\partial^{\nu}\psi)\partial_{\nu}\psi < 0$ podem também ser estudados facilmente em comparação com os casos das seções precedentes.

Finalmente, outros modelos σ podem ser considerados. Em conexão com o modelos discutidos na seção 3.3 construídos pela soma de dois campos escalares, por exemplo, tem-se o modelo σ com simetria $\mathcal{O}(3)$ definido por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[(\partial^{\nu}\sigma)\circ\partial_{\nu}\sigma\right]/2, \tag{3.85a}$$

$$\sigma\circ\sigma \equiv (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 = 1, \tag{3.85b}$$

com

$$A\circ B \equiv A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

Se definimos

$$\varphi = \sigma_1/(1+\sigma_3); \qquad \psi = \sigma_2/(1+\sigma_3), \tag{3.86}$$

a Lagrangeana (3.85a) se escreve

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[(\partial^{\nu}\varphi)\partial_{\nu}\varphi + (\partial^{\nu}\psi)\partial_{\nu}\psi\right]/2H^2, \tag{3.87}$$

onde

$$H^2 = 1 + \varphi^2 + \psi^2.$$

O tensor de energia-momento produzido por (3.87) é

$$T_{\mu\nu} = \left[(\partial_\mu\varphi)\partial_\nu\varphi+(\partial_\mu\psi)\partial_\nu\psi\right]/H^2-g_{\mu\nu}\left[(\partial^\nu\varphi)\partial_\nu\varphi+(\partial^\nu\psi)\partial_\nu\psi\right]/2H^2,$$

o qual, do ponte de vista de sua interpretação como meios materiais, simula situações análogas às da soma de dois campos escalares estudadas na seção 3.3.

CAPÍTULO IV

MODELOS SUPERSIMÉTRICOS COMO FONTES DO CAMPO GRAVITACIONAL

4.1 - Introdução

A noção de meio contínuo em geral engloba não somente os meios materiais ordinários mas também inclui o conceito de campos, sejam eles escalares, vetoriais, etc... Ao fazer a hipótese da continuidade [39] considera-se que o material em questão preencha "inteiramente" um dado volume do espaço. Desse ponto de vista, um campo é um exemplo perfeito de meio contínuo, enquanto que um fluido real é uma aproximação. Em vista disso, não é nada surpreendente o fato que, de acordo com o que vimos nos capítulos precedentes, um campo escalar serve para descrever vários tipos de meios materiais, como um fluido perfeito, fluido nulo ou um fluido anisotrópico (ver seção 3.2).

Ficou evidenciado que no caso dos modelos de campos escalares, tratando o meio contínuo resultante como um meio material, várias propriedades interessantes dos campos são traduzidas em propriedades análogas do meio material correspondente, o que nos indica o grau de relevância de tal interpretação.

Dentro dessa mesma abordagem, pergunta-se sobre a possibilidade de fazer o mesmo tratamento com outros modelos de teorias de campos.

Um exemplo clássico é o campo de Dirac, a respeito do qual existe uma série de trabalhos estudando seu acoplamento às equações de Einstein. Na maioria dos casos, os resultados poderiam ser interpretados como referentes a um meio material apropriado, ao invés de pensarmos em termos do campo, analogamente ao tratamento feito em relação aos campos escalares no capítulo III. Em especial, na referência [18] estudou-se o comportamento dos neutrinos massivos como um fluido perfeito. [Fazemos um resumo a respeito do campo de Dirac, como também dos campos de Weyl e de Rarita-Schwinger, no apêndice B].

Aumentando o grau de sofisticação do modelo de teoria de campos temos, por exemplo, os modelos supersimétricos, sendo que podemos investigar se é possível uma interpretação como meios materiais desses campos quando o TEM produzido por eles é acoplado às equações de Einstein da relatividade geral.

Assim, dentro do espírito dos capítulos precedentes, procuraremos analisar aqui a possibilidade de construirmos meios materias a partir de modelos de campos supersimétricos simples.

Iniciaremos o nosso estudo pelo modelo de Wess-Zumino e, em seguida trataremos dos modelos σ supersimétricos e de um caso simples de supercordas. Faremos toda essa análise usando a formulação dos modelos no espaço-tempo de Minkowski ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). A generalização para variedades pseudo-Riemannianas não planas é imediata, sendo tratada no final do capítulo.

4.2 - O Modelo Supersimétrico de Wess-Zumino: Uma Interpretação Clássica

Supersimetria é, por definição, uma simetria entre bósons e férmions. Um modelo teórico de campo supersimétrico consiste de um conjunto de campos e uma Lagrangeana para os mesmos, a qual exibe uma tal simetria. O comportamento dinâmico das partículas é descrito pelas equações de campo obtidas pelo método usual do princípio de mínima ação.

Transformações supersimétricas são geradas por operadores quânticos Q, os quais mudam estados fermiônicos em estados bosônicos, e vice-versa. Diferentes modelos de supersimetria dependem de quantos geradores Q estão presentes, na forma de cargas conservadas, no modelo. Os Q's são operadores spinoriais, de modo que num espaço-tempo de quatro dimensões o número total deles deve ser um múltiplo de quatro.

Uma teoria com "supersimetria mínima" deve ser invariante sob as transformações geradas por um único operador spinorial de apenas quatro componentes: Q_a ($a = 1, \ldots, 4$). É a chamada supersimetria N=1, na qual surge um campo sem carga de spin 1/2 (fotino) que é sua própria anti-partícula (um neutrino de Majorana). Caso haja uma "supersimetria maior" deve haver vários geradores spinoriais Q^i ($i = 1, \ldots, N$) com quatro componentes cada um ($Q^i = (Q^i_a)$, $a = 1, \ldots, 4$). São as supersimetrias N-estendidas, as quais dão origem a N fotinos. No decorrer deste capítulo veremos alguns exemplos de supersimetria N=1.

A álgebra da supersimetria é conhecida como álgebra de "super-Poincaré": uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$ graduada cujo conjunto de geradores é formado pelos geradores da álgebra de Poincaré usual juntamente com o conjunto de cargas spinoriais Q. Para detalhes a esse respeito o leitor deve recorrer à literatura padrão no assunto (ver p.e. [41,42,43,44] e suas referências).

Neste ponto passamos, então, a tratar daquele que é talvez o modelo mais simples de supersimetria, o modelo de Wess-Zumino [19,40]. O nosso estudo baseia-se na formulação da supersimetria no superespaço usando o conceito de supercampos [41,42,44]. Alguns detalhes a esse respeito são considerados no apêndice A.

O ponto de partida do modelo supersimétrico de Wess-Zumino é a seguinte densidade Lagrangeana [19,40,41]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^0 = [(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2A^2 + (\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2B^2 + \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi]/2 \\ - mgA(A^2 + B^2) - g(\bar{\Psi}\Psi A + i\bar{\Psi}\gamma^5\Psi B) - g^2(A^2 + B^2)^2/2 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

onde $A = A^\dagger$ e $B = B^\dagger$ são dois campos de spin-0, um escalar e outro pseudo-escalar respectivamente; $\Psi = \Psi^C$ (C = conjugação de carga) é um campo de Majorana de spin 1/2. Tais campos pertencem à representação da álgebra "Super-Poincaré" correspondente ao multipleto de massa não nula ($m^2 \neq 0$) e de "momento angular total" j=0. Todos os campos tem a mesma massa e interagem através da mesma constante de acoplamento g. Na equação (4.1) definimos $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$; $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$; $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, γ^μ sendo as matrizes de Dirac e $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ (usaremos a mesma notação e mesmas convenções da referência [41]). Obviamente, a quantidade $\mathcal{L}^0$ dada pela equação (4.1) é uma densidade escalar, pois está sendo definida sobre o espaço de Minkowski (ou, na verdade, sobre o espaço tangente à variedade pseudo-Riemanniana: $g_{\mu\nu}$= diag(1,-1,-1,-1)].

Nós trataremos aqui do caso chamado "on-shell" no qual a representação da supersimetria é feita através de campos que satisfazem às suas respectivas equações de campo (de Euler-Lagrange). No presente caso essas equações são

$$(\Box + m^2)A = -g[\bar{\Psi}\Psi + mA(3A^2 + B^2) + 2gA(A^2 + B^2)], \tag{4.2}$$

$$(\Box + m^2)B = -g[i\bar{\Psi}\gamma^5\Psi + 2mAB + 2gB(A^2 + B^2)], \tag{4.3}$$

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 2g(A + i\gamma^5 B)\Psi, \tag{4.4}$$

$$\bar{\Psi}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m) = -2g\bar{\Psi}(A + i\gamma^5 B). \tag{4.5}$$

A Lagrangeana (4.1) é invariate frente às seguintes transformações (supersimétricas)

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\Psi(x), \tag{4.6a}$$

$$\delta B = -i\bar{\varepsilon}\gamma^5\Psi(x), \tag{4.6b}$$

$$\delta\Psi = -(i\partial\!\!\!/ + m)(A - i\gamma^5 B)\varepsilon, \tag{4.6c}$$

$$\delta\bar{\Psi} = -\bar{\varepsilon}(A - i\gamma^5 B)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - m). \tag{4.6d}$$

É imediato verificar que (4.1) representa um modelo de supersimetria N=1, visto que sua invariança frente às tranformações (4.6) implica na conservação do vetor corrente spinorial

$$k^\mu = i(A - i\gamma^5 B)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - m)\gamma^\mu\Psi - ig(A - i\gamma^5 B)^2\gamma^\mu\Psi. \tag{4.7}$$

A partir da corrente spinorial (4.7) definem-se as cargas spinoriais Q por

$$Q = \int d^3x\ k^0. \tag{4.8}$$

Mostra-se facilmente que os operadores definidos em (4.8) satisfazem à álgebra da supersimetria N=1, demonstrando que o modelo de Wess-Zumino é um caso particular de tal supersimetria. Tal fato é consequência de que no modelo (4.1) existe apenas UM campo spinorial, de maneira que pode-se construir somente um operador spinorial Q^1_a com $a = 1, .., 4$ (e $i = 1$).

Estamos interessados especialmente no tensor de energia momento (TEM) fornecido pelo modelo (4.1) para verificar como o mesmo pode ser acoplado às equações de Einstein. No caso "on-shell" o TEM, simetrizado, calculado a partir de (4.1) é

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = {} & (\partial_\mu A)\partial_\nu A + (\partial_\mu B)\partial_\nu B + i[\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\nu\Psi - (\partial_\nu\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma_\nu\partial_\mu\Psi - (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma_\nu\Psi]/8 \\ & - \eta_{\mu\nu}[(\partial_\tau A)\partial^\tau A - m^2A^2 + (\partial_\tau B)\partial^\tau B - m^2B^2 - 2mgA(A^2+B^2) - g^2(A^2+B^2)^2]/2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tomemos por um momento somente a contribuição ao TEM (4.9) devido ao spinor de Majorana Ψ

$$T_{\mu\nu}(\Psi) = i[\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\nu\Psi - (\partial_\nu\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma_\nu\partial_\mu\Psi - (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma_\nu\Psi]/8. \tag{4.10}$$

Por questões de simplicidade, escrevamos (4.10) usando a representação de Weyl para os spinores (ver p. e. [41]). Em tal representação, (4.10) passa a ser escrito em termos das matrizes de Pauli (σ^i, $i=1,2,3$; e $\sigma^0=$ identidade) e dos spinores de duas componentes φ e χ definidos escrevendo Ψ como o seguinte "vetor coluna"

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_A \\ \bar{\varphi}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \bar{\Psi} = [\varphi^A \ , \bar{\varphi}_{\dot{A}}], \ A = 1,2; \ \dot{A} = 1, \ 2. \qquad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.10) vem

$$T_{\mu\nu}(\varphi,\chi) = i\left[\varphi \ \bar{\sigma}_\mu \partial_\nu \varphi + \chi\sigma_\mu \partial_\nu \bar{\chi} \ -(\partial_\nu \bar{\varphi})\bar{\sigma}_\mu \varphi -(\partial_\nu \chi)\sigma_\mu \bar{\chi}\right]/8$$
$$+ \ i\left[\varphi \ \bar{\sigma}_\nu \partial_\mu \varphi + \chi\sigma_\nu \partial_\mu \bar{\chi} - (\partial_\mu \bar{\varphi})\bar{\sigma}_\nu \varphi \ -(\partial_\mu \chi)\sigma_\nu \bar{\chi}\right]/8. \qquad (4.12)$$

Além do mais, para spinores de Majorana temos: $\Psi = \Psi^C$, onde $\Psi^C = C\bar{\Psi}^t$ com C sendo a matriz de conjugação de carga e "t" indicando a operação de transposição. Dessa identidade e de (4.11) segue que

$$\chi = \varphi \quad \text{(para spinores de Majorana).} \qquad (4.13)$$

Depois de (4.12) podemos escrever (4.12) como segue

$$T_{\mu\nu}(\varphi,\chi) = i\left[\varphi \ \bar{\sigma}_\mu \partial_\nu \varphi + \varphi\sigma_\mu \partial_\nu \bar{\varphi} - (\partial_\nu \bar{\varphi})\bar{\sigma}_\mu \varphi -(\partial_\nu \varphi)\sigma_\mu \bar{\varphi}\right]/8$$
$$+ \ i\left[\varphi \ \bar{\sigma}_\nu \partial_\mu \varphi + \varphi\sigma_\nu \partial_\mu \bar{\varphi} - (\partial_\mu \bar{\varphi})\bar{\sigma}_\nu \varphi \ -(\partial_\mu \varphi)\sigma_\nu \bar{\varphi}\right]/8. \qquad (4.14)$$

O próximo passo é verificar se e como (4.14) pode ser acoplada às equações de Einstein da relatividade geral. Antes disso, observemos que, para a realização da supersimetria, as componentes do campo spinorial devem ser números de Grassmann. Isto é, as componentes de φ, $\{\varphi^A\}$, devem anticomutar entre si e com todas as componentes de todos os spinores envolvidos no problema. Além do mais, cada um dos campos de (4.1) são considerados, dentro da supersimetria, como "operadores de campo" no formalismo da segunda quantização. Sendo assim, as quantidades definidas em (4.10), (4.12) ou (4.14) não têm um sentido físico direto. A maneira usual de dar um sentido físico a TEMs como o definido acima consiste em tomar os seus respectivos "valores esperados" e então fazer o estudo desejado.

Todavia, o nosso objetivo não é esse, mas sim aquele de interpretar cada campo como sendo um "potencial de matéria", o que não pode ser feito com campos como definidos em segunda quantização. Uma alternativa que pode ser adotada é a de se considerar todos os spinores envolvidos no TEM como tendo as características a eles atribuídas no formalismo da "primeira quantização" [ou seja, todas as componentes de todos os spinores comutam entre si]. Nesse caso, cada componente do TEM [como por exemplo aquele definido na equação (4.9)] resulta ser um número (função das coordenadas) ao qual pode ser atribuído um significado físico direto. Ou seja, o TEM (4.9) assim interpretado pode servir como fonte para as equações de Einstein. Vamos então chamar a uma tal situação de *interpretação clássica* do modelo. (Note-se que estas considerações são uma extensão para os campos supersimétricos das idéias apresentadas na referência [15]).

A fim de analisarmos o TEM (4.9) *classicamente*, notemos que para spinores de duas componentes comutantes verificam-se as seguintes identidades [41,42]

$$\bar{\varphi}\,\bar{\sigma}_\mu\chi = \chi\sigma_\mu\bar{\varphi}, \tag{4.15a}$$

$$\bar{\varphi}\,\bar{\sigma}_\mu\partial_\nu\varphi = (\partial_\nu\varphi)\sigma_\mu\bar{\varphi}, \tag{4.15b}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{4.15c}$$

Depois das relações (4.15a—c) vemos que o TEM da equação (4.10) se anula, embora a corrente $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \varphi\,\sigma_\mu\bar{\chi} + \bar{\chi}\,\bar{\sigma}_\mu\varphi$ não seja nula. Isso não ocorre para spinores anti-comutantes, onde vale: $\bar{\varphi}\,\bar{\sigma}_\mu\chi = -\chi\sigma_\mu\bar{\varphi}$ e, portanto, a corrente $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ é identicamente nula, embora o TEM (4.14) não o seja. Daí conclui-se que o campo spinorial de Majorana de spin 1/2 é um campo fantasma [21,22,45], onde a corrente $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ não é identicamente nula, enquanto $T_{\mu\nu}(\Psi) = 0$ (ver também apêndice B), i.e., sua presença não contribui para o TEM e, portanto, não interage diretamente com o campo gravitacional.

Levando-se em conta esses resultados o TEM (4.9) resulta, então

$$T_{\mu\nu}=(\partial_\mu A)\partial_\nu A +(\partial_\mu B)\partial_\nu B -\eta_{\mu\nu}[(\partial_\tau A)\partial^\tau A +(\partial_\tau B)\partial^\tau B -V(A,B)]/2, \tag{4.16}$$

onde

$$V(A,B) = m^2A^2 + m^2B^2 + 2mgA(A^2+B^2) + g^2(A^2+B^2)^2. \tag{4.17}$$

Com isso, notamos que tal TEM representa a soma dos tensores de energia-momento de dois campos, um pseudo-escalar e um escalar, e que portanto não apresenta nada de novo além do que já descrevemos nos capítulos II e III. Mais especificamente, a interpretação de (4.16) como o TEM de meios materiais resulta idêntica ao caso da soma de dois campos escalares tratado na secão 3.3. Entretanto, esse não deixa de ser um resultado importante, pois mostra que, quando interpretado classicamente, o modelo supersimétrico de Wess-Zumino produz um TEM de tal forma que as contribuições da componente spinorial do supercampo se anulam, de modo que somente as componentes escalar e pseudo-escalar podem agir como fontes do campo gravitacional.

Apesar disso, sempre podemos adicionar uma divergência total qualquer à Lagrangeana (4.1) sem modificar, como é bem sabido, a dinâmica do modelo de teoria de campo, mas podendo modificar de forma não trivial o modelo de meio contínuo obtido a partir do primeiro. Ou seja, modificando o TEM e a equação de estado do fluido correspondente [46].

Mas, além disso, podemos nos perguntar que tipo de interação entre os três campos componentes pode ser adicionada à Lagrangeana de Wess-Zumino de forma a obtermos alguma contribuição da componente spinorial ao TEM (interpretado classicamente), a qual seja interessante do ponto de vista de sua interpretação como um meio material. As interações mais simples que podem contribuir são da forma

$$\alpha\overline{\Psi}[(\partial_\mu A) - i\gamma^5(\partial_\mu B)]\gamma^\mu\Psi, \qquad (4.18a)$$

$$\alpha\overline{\Psi}\{[(\partial_\mu A) - i\gamma^5(\partial_\mu B)]\gamma^\mu\}^2\Psi, \qquad \text{etc...} \qquad (4.18b)$$

Antes de prosseguirmos, é necessário observar que termos como (4.18a) e (4.18b) modificam a dinâmica dos campos envolvidos. Além disso, dado que estamos partindo de campos supersimétricos para construir, por exemplo, modelos de fluidos devemos responder inicialmente a questão formulada acima para sabermos a forma das "Lagrangeanas de interação" que podem ser adicionadas à original [dada por (4.1)] sem quebrar a (super) simetria do modelo de Wess-Zumino].

A resposta a esta indagação é encontrada depois de uma quantidade razoável de álgebra, após estudarmos a formulação da supersimetria no superespaço (ver apêndice A): encontra-se que a generalização mais simples do modelo de Wess-Zumino corresponde a um modelo σ supersimétrico cuja dinâmica dos campos é bastante diferente do modelo original [cf. equações (A17) e (A18)]. Em particular, as Lagrangeanas obtidas adicionando (4.18a) ou (4.18b) a (4.1) não são supersimétricas [não são invariantes frente às transformações (4.6)]. Em vista disso, e como também trataremos dos modelos σ separadamente mais adiante, nós preferimos considerar aqui apenas termos que modifiquem o menos possível o modelo de Wess-Zumino original.

Sendo assim, vamos tomar primeiramente o caso em que adicionamos à Lagrangeana (4.1) um termo contendo somente uma divergência total do tipo

$$\mathscr{L}^{D} = \alpha\partial_{\mu}\Omega^{\mu}, \tag{4.19}$$

onde α é uma constante (em geral dimensional) e Ω^{μ} depende somente dos campos A, B e Ψ.

Um termo como (4.19) contribui para o TEM de acordo com a relação seguinte

$$T^{D}_{\mu\nu} = \alpha(\partial_{\mu}\Omega_{\nu} + \partial_{\nu}\Omega_{\mu}), \tag{4.20}$$

sendo que, dependendo da forma da densidade Ω^{μ}, essa contribuição pode ser bastante complexa.

Vamos considerar aqui um caso particular. Seja Ω^{μ} na seguinte forma

$$\Omega^{\mu} = c_n \bar{\Psi}(A-\gamma^5 B)^n \gamma^{\mu} \Psi \qquad \text{(não soma em } n\text{)}, \tag{4.21}$$

onde n = 0, 1, 2, 3, ..., e c_n são constantes.

A nova Lagrangeana será [com $\mathcal{L}^0$ dada pela eq. (4.1)]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + nc_n \bar{\Psi}[(A-\gamma^5 B)^{n-1}(\partial_\mu A-\gamma^5 \partial_\mu B)]\gamma^{\mu}\Psi + c_n(\partial_\mu \bar{\Psi})(A-\gamma^5 B)^n \gamma^{\mu}\Psi$$
$$+ c_n \bar{\Psi}(A-\gamma^5 B)^n \partial_\mu(\gamma^{\mu}\Psi). \tag{4.22}$$

Podemos então calcular o tensor de energia-momento correspondente à Lagrangeana (4.22). Lembremos, porém, que, dentro da *interpretação clássica* por nós definida mais acima, temos $\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\Psi = 0$. Além do mais, pelas equações de campo (4.4) e (4.5) resulta $\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi) \equiv (\partial_\mu \bar{\Psi})\gamma^{\mu}\Psi + \bar{\Psi}\partial_\mu(\gamma^{\mu}\Psi) = 0$. Dessa forma, o TEM final é [ver também eq. (4.12)]

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu A)\partial_\nu A + (\partial_\mu B)\partial_\nu B + c_n n A^{n-1}[(\partial_\mu A)l_\nu + (\partial_\nu A)l_\mu]/2$$
$$+ c_n A^n[\partial_\mu l_\nu + \partial_\nu l_\mu]/2 - g_{\mu\nu}\big[(\partial_\tau A)\partial^\tau A + (\partial_\tau B)\partial^\tau B$$
$$+ 2c_n n l^\tau(\partial_\tau A)A^{n-1} - V(A,B)\big]/2, \tag{4.23}$$

$$l_\mu \equiv \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi; \tag{4.24}$$

sendo que, por exemplo, para n=0, o TEM (4.23) resulta

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu A)\partial_\nu A + (\partial_\mu B)\partial_\nu B + \beta[\partial_\mu l_\nu + \partial_\nu l_\mu]/2$$
$$- g_{\mu\nu}\{(\partial_\tau A)\partial^\tau A + (\partial_\tau B)\partial^\tau B - V(A,B)\}/2. \tag{4.25}$$

Observe-se que o "campo fantasma" Ψ agora aparece no TEM (4.23) [ou em (4.25)] contribuindo com energia e momento que servirão como fontes do campo gravitacional. Tal contribuição não sendo identicamente nula deixa uma "ambiguidade" no que define-se como campo fantasma [21,22,45].

Seguindo o princípio de procurar novas Lagrangeanas supersimétricas que difiram "minimamente" da Lagrangeana de Wess-Zumino original, observamos o seguinte: Se fazemos $B = 0$ no "termo de interação" (4.18a) obtemos a seguinte "Lagrangeana de interação"

$$\mathcal{L}^I = \alpha\bar{\Psi}(\partial_\mu A)\gamma^\mu\Psi. \tag{4.26}$$

Visto que $\mathcal{L}^I$ não tem a forma de uma divergência total, as equações de campo (4.4) e (4.5) resultam levemente modificadas [as relações (4.2) e (4.3), para A e B respectivamente, permanecem inalteradas]

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 2g(A + i\gamma^5 B)\Psi - 2\alpha\gamma^\mu(\partial_\mu A)\Psi, \tag{4.27a}$$

$$\bar{\Psi}(\overleftarrow{i\partial\!\!\!/} + m) = -2g\bar{\Psi}(A + i\gamma^5 B) + 2\alpha\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu A). \tag{4.27b}$$

A Lagrangeana obtida pela soma de (4.1) e (4.26) é invariante frente às transformações supersimétricas (4.6). Isto vale, levando em conta as equações de campo (4.2), (4.3), (4,27a) e (4.27b) (caso "on-shell").

Com essa nova Lagrangeana, isto é, com a relação (4.1) mais a (4.26), obtemos o seguinte tensor de energia momento

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu A)\partial_\nu A + (\partial_\mu B)\partial_\nu B - \alpha[(\partial_\mu A)l_\nu + (\partial_\nu A)l_\mu]/2$$

$$- g_{\mu\nu}[(\partial_\tau A)\partial^\tau A + (\partial_\tau B)\partial^\tau B - V(A,B)]/2, \qquad (4.28)$$

onde o TEM (4.28) já está escrito dentro da nossa *interpretação clássica.*

Vale observar ainda que, chegamos ao mesmo TEM (4.28) se adicionamos à Lagrangeana inicial o termo (4.18a) no lugar de (4.26), mesmo com (4.18a) não preservando a (super) simetria do modelo. Isto ocorre porque, como já dissemos, as contribuições devidas a termos contendo potências impares de γ^5 (como $\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$) se anulam quando passamos de spinores (de Majorana)anti-comutantes a spinores comutantes (interpretação clássica). Por outro lado, para spinores de Majorana anti-comutantes temos $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = 0$ (mas $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \neq 0$ segundo nossa interpretação clássica), o que de certa forma justifica o fato de que a expressão do lado direito de (4.26) não modifique a simetria de (4.1) quando ambas são adicionadas.

Conforme já falamos acima, existe uma pequena dificuldade em dar uma interpretação clássica de meio contínuo (dentro da relatividade geral) a um modelo supersimétrico, em vista do fato que o TEM obtido a partir dele não pode ser acoplado diretamente às equações de Einstein.

A alternativa por nós adotada é a de tomarmos o modelo formal e "re-interpretarmos" os campos passando do formalismo da segunda quantização ao da primeira quantização. É claro, então, que a supersimetria é perdida; mas, ainda assim obtemos modelos de fluidos "inspirados" em modelos de campos supersimétricos, os quais são iteressantes do ponto de vista das aplicações.

Pode-se ainda argumentar que não tem sentido procurar por uma interpretação clássica de um campo spinorial de spin 1/2, com carga nula e massa não nula (spinor de Majorana), uma vez que tal campo (ou partícula) parece não existir na natureza. Nosso objetivo, entretanto, é a construção de modelos materiais a partir de modelos de campos em geral, de forma que a nossa meta principal é obtermos um modelo material que pode ser usado para descrever um determinado sistema físico, embora o modelo de campo inicial seja apenas formal como o spinor de Majorana.

4.3 - Meios Materiais a Partir da "Interpretação Clássica" do Modelo Supersimétrico de Wess-Zumino

A seguir, tomaremos um caso particular dos TEM's obtidos na seção anterior e procuraremos dar uma interpretação dele como "fluidos", de forma análoga ao que fizemos no capítulo III com os modelos σ.

Por questões de simplicidade, escolhemos o TEM definido em (4.28). Em relação ao estudo da estrutura algébrica de tal tensor, percebemos imediatamente as seguintes situações distintas

I - $(\partial_\mu A)\partial^\mu A > 0$, $(\partial_\mu B)\partial^\mu B > 0$;

II - $(\partial_\mu A)\partial^\mu A > 0$, $(\partial_\mu B)\partial^\mu B < 0$;

III - $(\partial_\mu A)\partial^\mu A < 0$, $(\partial_\mu B)\partial^\mu B > 0$;

IV $-\ (\partial_\mu A)\partial^\mu A < 0,\ (\partial_\mu B)\partial^\mu B < 0.$

Para enxergarmos que tipo de fluidos podem ser obtidos a partir de (4.28) vamos considerar separadamente cada uma dessas quatro situações.

I $-\ (\partial_\mu A)\partial^\mu A > 0,\ (\partial_\mu B)\partial^\mu B > 0.$

Estamos assumindo *a priori* que tanto $(\partial_\mu A)\partial^\mu A$ como $(\partial_\mu B)\partial^\mu B$ são quantidades positivas. Dessa forma, definimos os vetores u_μ e v_ν, ambos tipo tempo, por

$$u^\nu = (\partial^\nu A)/\sqrt{(\partial_\mu A)\partial^\mu A}\ , \tag{4.29a}$$

$$v^\nu = (\partial^\nu B)/\sqrt{(\partial_\mu B)\partial^\mu B}\ . \tag{4.29b}$$

Com essas definições o TEM (4.28) toma a seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = r u_\mu u_\nu + s v_\mu v_\nu + \alpha\sqrt{r}\,[u_\mu l_\nu + u_\nu l_\mu]/2 \\ - g_{\mu\nu}[r + s - V(A,B)]/2, \tag{4.30}$$

onde $r = (\partial_\mu A)\partial^\mu A$ e $s = (\partial_\mu B)\partial^\mu B$.

Um tal tensor pode ser facilmente diagonalizado e interpretado como descrevendo meios materiais cuja complexidade depende principalmente de α. Para realizar isso observemos que o vetor nulo $l^\mu \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ pode ser decomposto na forma

$$l^{\mu} \equiv \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi = a(u^{\mu} + x^{\mu}), \tag{4.31}$$

com

$$a \equiv l^{\mu}u_{\mu} = (\partial^{\nu}A)l_{\nu}/\sqrt{(\partial_{\mu}A)\partial^{\mu}A}; \quad x^{\mu}u_{\mu} = 0; \quad x^{\mu}x_{\mu} = -1. \tag{4.32}$$

Assim, podemos escrever

$$T_{\mu\nu} = (r+2q)u_{\mu}u_{\nu} + sv_{\mu}v_{\nu} + q\,[u_{\mu}x_{\nu} + u_{\nu}x_{\mu}] - Wg_{\mu\nu}, \tag{4.33}$$

onde definimos

$$r \equiv (\partial_{\mu}A)\partial^{\mu}A, \tag{4.34a}$$

$$s \equiv (\partial_{\mu}B)\partial^{\mu}B, \tag{4.34b}$$

$$\begin{aligned} W &\equiv [(\partial_{\mu}A)\partial^{\mu}A + (\partial_{\mu}B)\partial^{\mu}B - V(A,B)]/2 = \\ &= [r + s - V(A,B)]/2 \end{aligned} \tag{4.34c}$$

$$q \equiv \alpha\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi(\partial_{\mu}A)/2. \tag{4.34d}$$

Aqui observamos que, supondo $\partial_{\mu}B = 0$ e, portanto, $v_{\mu} = 0$, segue de (4.33) que o TEM resultante representa um fluido não viscoso com fluxo de calor. Este caso pode ser importante para as aplicações, por ser um modelo bastante simples e que tem aplicações em astrofísica relativística, como por exemplo na descrição do colapso gravitacional de uma estrela (ver refs. [4,5,36]).

Por outro lado, no caso geral podemos escrever a equação secular na forma

$$\det\,(T_{\mu}{}^{\nu} - \lambda\delta_{\mu}{}^{\nu}) = 0,$$

o que resulta na seguinte equação de autovalores

$$\alpha\big[\alpha^3 - \alpha^2(r + s + 2q) + \alpha\{(r + 2q)s[1-(u^\mu v_\mu)^2] + q^2$$
$$-2qs(x^\sigma v_\sigma)(u^\nu v_\nu)\} + q^2 s[(u^\mu v_\mu)^2-(x^\nu v_\nu)^2-1\big] = 0, \tag{4.35}$$

onde $\alpha \equiv W + \lambda$.

Da equação (4.35) temos um autovalor $\lambda_1 = - W$, mais três autovalores acerca dos quais não podemos tirar muitas conclusões antes de conhecermos explicitamente os coeficientes de tal equação. Por isso, vamos considerar a seguir alguns casos particulares importantes.

(i) De (4.35) vemos que, se $q \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi(\partial_\mu A) = 0$, o TEM resultante representa a soma de dois fluidos perfeitos irrotacionais já bem estudado na literatura [6,7,8,16] (ver também o capítulo II).

(ii) Uma segunda situação interessante ocorre quando os vetores u_μ e v_μ são paralelos, ou seja quando $u^\mu v_\mu = 1$ e, consequentemente, $v^\mu x_\mu = 0$. Nesse caso ($u_\mu = v_\mu$) o problema se reduz aquele de um fluido não viscoso com fluxo de calor citado mais acima, sendo que a equação de autovalores resulta

$$\alpha^2\big[\alpha^2 - \alpha(r + s + 2q) + q^2\big] = 0. \tag{4.36}$$

Esta última relação nos fornece dois autovalores iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = - W$, e outros dois ($\lambda_\pm \equiv \alpha_\pm - W$) dados por

$$\alpha_\pm = \big[r + s + 2q \pm \sqrt{(r + s + 2q)^2 - 4q^2}\big]/2, \tag{4.37a}$$

$$\lambda_{\pm} = \left[2q + V \pm \sqrt{(r + s + 2q)^2 - 4q^2}\right]/2. \qquad (4.37b)$$

Daí observamos que $\alpha_{\pm}$ podem ser reais, se $(p+q+\omega+\varepsilon+2q)^2 \geq 4q^2$; ou complexos se $(p+q+\omega+\varepsilon+2q)^2 \leq 4q^2$ (o que é possível somente se $q < 0$) . No caso em que os dois autovalores são reais teremos sempre $\alpha_+ \geq \alpha_-$.

Vamos supor também que $V \equiv V(A,B) > 0$ (observe-se que podemos tomar $g = 0$), então teremos sempre $\lambda_+ \geq \lambda_- > 0$. Assim podemos associar λ_+ a um autovetor tipo tempo, e λ_- a um autovetor tipo espaço. Dessa forma o TEM (4.33) pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)U_\mu U_\nu + (\sigma-\pi)X_\mu X_\nu - \pi g_{\mu\nu}, \qquad (4.38)$$

onde $U_\mu U^\mu = -X_\mu X^\mu = 1$, e

$$\rho = [2q+V+\sqrt{(r+s\ +2q)^2-4q^2}]/2, \qquad (4.39a)$$

$$\sigma = [-2q - V + \sqrt{(r+s+2q)^2-4q^2}]/2, \qquad (4.39b)$$

$$\pi = W = (r + s - V)/2, \qquad (4.39c)$$

$$U_\mu = A_+ u_\mu + B_+ x_\mu, \qquad (4.39d)$$

$$X_\mu = A_- u_\mu + B_- x_\mu, \qquad (4.39e)$$

onde definimos

$$A_+ = \alpha_+/\sqrt{\alpha_+^2 - q^2}, \qquad (4.40a)$$

$$B_+ = -q/\sqrt{\alpha_+^2 - q^2}, \qquad (4.40b)$$

$$A_- = \alpha_-/\sqrt{q^2 - \alpha_-^2}, \qquad (4.40c)$$

$$B_- = -q/\sqrt{q^2 - \alpha_-^2}, \qquad (4.40d)$$

com $\alpha_{\pm}$ dados por (4.37a).

A relação (4.38) pode ser interpretada como o TEM de um fluido (anisotrópico) com densidade ρ, pressão isotrópica π, e com pressão anisotrópica σ. Vale observar que para determinados valores de r, s q e V podemos ter $\sigma < 0$, representando uma tensão do meio material na direção da anisotropia; ou ainda que $\sigma = 0$ para $q = \left[r+s-V \pm \sqrt{(r+s-V)^2+(r+s)^2-V^2}\right]/2$.

A situação em que os autovalores das equações (4.37a-b) são complexos resulta similar àquela descrita no capítulo II (no caso de autovalores complexos). Ou seja, obteremos um "fluido" com densidade ρ, tensão anisotrópica $\sigma = \rho$, pressão isotrópica π e um fluxo de calor μ (na direção da anisotropia) dados respectivamente por

$$\rho = \sigma =[2q + V(m,A,B)]/2, \tag{4.41a}$$

$$\pi = W = [r + s - V(m,A,B)]/2, \tag{4.41b}$$

$$\mu = [\sqrt{4q^2 - (r + s + 2q)^2}]/2, \tag{4.41c}$$

sendo que o TEM (4.33) toma a seguinte forma canônica

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} + \mu(U_\mu X_\nu + X_\mu U_\nu). \tag{4.42}$$

Conforme mencionamos anteriormente, um TEM como (4.42) não satisfaz a condição fraca de energia, mas pode ser interpretado como descrevendo um fluido de cordas com fluxo de calor na direção da corda.

O caso de um TEM dessa forma acoplado às equações de Einstein será tratado no capítulo V.

Para o caso em que $(r + s + 2q)^2 - 4q^2 = 0$, o TEM (4.33) reduz-se a seguinte forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho+\pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} + l_\mu l_\nu \\ &= (\rho+\mu+\pi)U_\mu U_\nu + (\mu-\rho-\pi)X_\mu X_\nu - \pi g_{\mu\nu} + \mu(U_\mu X_\nu + U_\nu X_\mu), \end{aligned} \tag{4.43}$$

com [ver também as equações (2.23)]

$$\rho = \sigma = [2q + V(m,A,B)]/2, \tag{4.44a}$$

$$\pi = W = [r + s - V(m,A,B)]/2, \tag{4.44b}$$

$$l_\mu = b(U_\mu + X_\mu) \tag{4.44c}$$

$$\mu = b^2. \tag{4.44d}$$

É importante salientar que as formas (4.38) e (4.39) somente são possíveis se $q < 0$. Por outro lado, tais casos somente têm interesse físico se $\rho = 2q + V > 0: \Longrightarrow V > -2q$, o que elimina a possibilidade de construir tais modelos a partir de campos não masssivos e sem interação, que resultaria na situação mais simples de ser tratada.

De forma análoga ao que vimos em (I) podemos estudar a situação (II):

II $- (\partial_\mu A)\partial^\mu A > 0$, $(\partial_\mu B)\partial^\mu B < 0$.

Nesse caso definimos

$$u^\nu = (\partial^\nu A)/\sqrt{(\partial_\mu A)\partial^\mu A}\ , \tag{4.45a}$$
$$y^\nu = (\partial^\nu B)/\sqrt{-(\partial_\mu B)\partial^\mu B}, \tag{4.45b}$$

com $u^\mu u_\mu = -y^\mu y_\mu = 1$, de modo que o TEM (4.28) toma a forma

$$T_{\mu\nu} = (r + 2q)u_\mu u_\nu + s v_\mu v_\nu + q[u_\mu x_\nu + u_\nu x_\mu] - W g_{\mu\nu}, \tag{4.46}$$

onde r, s, q e W são definidos por (4.34) [Note-se que agora $s < 0$].

A equação de autovalores resultante é (com $\alpha = \lambda - W$)

$$\alpha\Big[\alpha^3 - \alpha^2(r + s + 2q) + \alpha\{(r + 2q)s[1+(u^\mu y_\mu)^2] + q^2$$
$$+2qs(x^\sigma y_\sigma)(u^\nu y_\nu)\} + q^2 s[(u^\mu v_\mu)^2-(x^\nu v_\nu)^2-1]\Big] = 0, \tag{4.47}$$

a qual é, a exemplo de (4.35), uma equação algébrica de grau três (visto que uma solução é $\alpha = 0$, ou $\lambda = -W$). Para reduzir (4.47) a um polinómio de grau dois em α toma-se o caso particular $y_\mu = x_\mu$ ($x^\nu y_\nu = -1$), o que implica em $y^\nu u_\nu = 0$ e conduz à seguinte equação para α

$$\alpha^2\Big[\alpha^2 - \alpha(r + s + 2q) + (r + 2q)s + q^2\Big] = 0. \tag{4.48}$$

De (4.48) obtemos os autovalores $\lambda_2 = \lambda_3 = -W$ e

$$\lambda_\pm = \Big[2q + V \pm \sqrt{(r - s)^2 + 2q\ (r - s)}\Big]/2. \tag{4.49}$$

Analisando (4.49) vemos facilmente que a estrutura algébrica do TEM (4.46) é a mesma que a do TEM (4.33). Sendo assim, ambos podem descrever os mesmos tipos de materiais conforme mostrados em (4.38), (4.42) e (4.43).

As situações III: $(\partial_\mu A)\partial^\mu A < 0$, $(\partial_\mu B)\partial^\mu B > 0$ e IV: $(\partial_\mu A)\partial^\mu A < 0$, $(\partial_\mu B)\partial^\mu B < 0$ têm uma estrutura algébrica um pouco maior do que os casos I e II considerados até aqui, mas podem também ser tratados sem maiores dificuldades.

Ao compararmos os resultados desta seção com o que foi encontrado nos capítulos II e III, observamos que o "fluxo de calor" surge aqui de uma maneira mais natural do que naqueles modelos. No caso específico de (4.33) tal vetor de fluxo de calor qx_μ tem origem na interação entre o campo spinorial Ψ e o campo escalar A, enquanto que, por exemplo, nos modelos da seção 2.3 o fluxo de calor aparece como consequência da "extração" de energia e momento do TEM de um fluido perfeito.

Contudo, a mais importante característica do modelo desta seção em relação aos modelos anteriores é que o fluxo de calor existe mesmo no caso em que todos os campos sejam funções de uma única coordenada. Isto implica que, por exemplo, em (4.29) tenhamos $u_\mu = v_\mu$. Tal fato não ocorre no caso do TEM (2.5), por exemplo, onde o fluxo de calor desaparece se $u_\mu = v_\mu$, como pode ser visto facilmente através da equação (2.11). Uma tal qualidade pode simplificar em muito os cálculos no momento em que construirmos um modelo explícito (ver a seção 5.5).

Antes de passarmos a estudar algumas soluções das equações de Einstein tendo como fonte alguns dos materiais encontrados até aqui, vale a pena analisar a *interpretação clássica* de modelos σ supersimétricos dos quais o modelo de Wess-Zumino é um caso particular (pelo menos no caso de campos não massivos). Isto é tratado brevemente na próxima seção.

4.4 - Modelos Sigma Supersimétricos Não Lineares.

Um modelo σ supersimétrico é construído em analogia com modelos não supersimétricos. A densidade Lagrangeana de um modelo σ não supersimétrico e não linear é dada por

$$\mathcal{L}^{\sigma} = h_{i\bar{j}}(\phi,\bar{\phi})(\partial^{\mu}\phi^{i})\partial_{\mu}\bar{\phi}^{j}, \qquad (4.50)$$

onde $\phi^{i} = \phi^{i}(x)$ $(i = 1, \ldots, N)$ denota uma série de N campos escalares complexos, ∂_{μ} é a derivada parcial ordinária (lembrando que estamos trabalhando num espaço-tempo plano), a barra representa conjugação complexa e a matriz $h_{i\bar{j}}$ é hermitiana e positiva-definida (i.e. tal $h_{i\bar{j}}\zeta^{i}\bar{\zeta}^{j}$ seja positivo). Ao considerarmos ϕ^{i} e $\bar{\phi}^{j}$ como coordenadas locais em uma variedade complexa estamos atribuindo a $h_{i\bar{j}}$ o caráter de métrica definida sobre uma tal variedade [47,48]. Para obtermos a versão supersimétrica da Lagrangeana (4.50) substitui-se $\mathcal{L}$ por (ver apêndice A) [23,47,48]

$$\mathcal{L}^{\sigma}_{ss} = \int d^{4}\theta \; K(\Phi^{i},\bar{\Phi}^{j}), \qquad (4.51)$$

onde Φ^{i} (i=1, 2, ..., N) são supercampos quirais [cf. equações (A5a), (A5b), (A6a) e (A6b)] e K é uma função escalar real.

Para encontrar a Lagrangeana (4.51) explicitamente é necessário expandir Φ^i em componentes [cf. equação (A6a)]

$$\Phi^i(x,\theta,\bar{\theta}) = A^i(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A^i(x) - \theta^2\bar{\theta}^2\Box A^i(x) + \sqrt{2}\,\theta\psi^i(x)$$
$$+\theta^2 F^i(x) - i\theta^2(\partial_\mu\bar{\psi}^i(x)\sigma^\mu\bar{\theta})/\sqrt{2}, \qquad (4.52)$$

Expandindo a função K em componentes [levando em consideração (4.52)] e integrando em θ e $\bar{\theta}$, obtém-se

$$\mathcal{L}^\sigma_{ss} = H_{i\bar{j}}\left[\partial_\mu A^i\partial^\mu\bar{A}^j + i(\psi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^j - \partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^j)/2\right] + R_{\bar{j}ik\bar{l}}(\bar{\psi}^j\bar{\psi}^l)(\psi^i\psi^k)/4$$
$$-i\left[(\partial H_{i\bar{j}}/\partial A^k)(\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^j)\partial_\mu A^k - (\partial H_{i\bar{j}}/\partial\bar{A}^k)(\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^j)\partial_\mu\bar{A}^k)\right]/2, \qquad (4.53)$$

onde

$$R_{\bar{j}ik\bar{l}} \equiv R_{\bar{j}ik\bar{l}}(A,\bar{A}) = (\partial^2 H_{i\bar{j}}/\partial A^k\partial\bar{A}^l) - H^{m\bar{n}}(\partial H_{i\bar{n}}/\partial A^k)(\partial H_{m\bar{j}}/\partial\bar{A}^l)$$

são as componentes do tensor de curvatura, e $H_{i\bar{j}} \equiv \partial^2 K/\partial A^i\partial\bar{A}^j$.

A Lagrangeana (4.53) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}^\sigma_{ss} = H_{i\bar{j}}\left[\partial_\mu A^i\partial^\mu\bar{A}^j + i(\psi^i\sigma^\mu\bar{D}_\mu\bar{\psi}^j - D_\mu\psi^i\sigma^\mu\bar{\psi}^j)/2\right] - R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\bar{\psi}^j\bar{\psi}^l)(\psi^i\psi^k)/4, \qquad (4.54)$$

onde

$$D_\mu\psi^i = \partial_\mu\psi^i + \Gamma^i_{jk}\partial_\mu A^j\psi^k, \qquad (4.55a)$$

$$\bar{D}_\mu\bar{\psi}^i \equiv \overline{D_\mu\psi^i} = \partial_\mu\bar{\psi}^i + \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}\partial_\mu\bar{A}^j\bar{\psi}^k, \qquad (4.55b)$$

$$\Gamma^i_{jk} = H^{i\bar{l}}\partial H_{j\bar{l}}/\partial A^k, \quad \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} \equiv \overline{\Gamma^i_{jk}} = H^{l\bar{i}}\partial H_{l\bar{j}}/\partial\bar{A}^k, \qquad (4.55c)$$

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = - R_{\bar{j}ik\bar{l}} = - R_{i\bar{j}\bar{l}k} = R_{\bar{j}i\bar{l}k} = -H_{m\bar{j}}\partial\Gamma^{m}_{\ ik}/\partial\bar{A}^{l}. \tag{4.55d}$$

Os campos escalares A^{i} parametrizam uma variedade Kähleriana $\mathcal{M}$. ψ^{i} são bispinores que pertencem ao fibrado tangente (complexificado) sobre $\mathcal{M}$.

O TEM obtido de (4.54), levando-se em conta as equações de campo, é

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = H_{i\bar{j}}\Big[&(\partial_{\mu}A^{i}\partial_{\nu}\bar{A}^{j}+\partial_{\nu}A^{i}\partial_{\mu}\bar{A}^{j})/2 + i(\psi^{i}\sigma_{\mu}\bar{D}_{\nu}\bar{\psi}^{j}-D_{\nu}\psi^{i}\sigma_{\mu}\bar{\psi}^{j})/4 \\ &+ (\psi^{i}\sigma_{\nu}D_{\mu}\bar{\psi}^{j}- D_{\mu}\psi^{i}\sigma_{\nu}\bar{\psi}^{j})/4 - g_{\mu\nu}\partial_{\tau}A^{i}\partial^{\tau}\bar{A}^{j}/2\Big]. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Tal TEM pode ser escrito em termos dos quadrispinores de Majorana. Definindo

$$\Psi^{i} \equiv \begin{pmatrix} \psi^{i}_{A} \\ (\bar{\psi}^{i})^{\dot{A}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \bar{\Psi}^{i} = [(\psi^{i})^{A},\bar{\psi}^{i}_{\dot{A}}],$$

pode-se escrever (4.56) na forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = i\Big[&\bar{\Psi}^{j}\hat{H}_{i\bar{j}}(\gamma_{\mu}D_{\nu}\Psi^{i} + \gamma_{\nu}D_{\mu}\Psi^{i}) - [(\bar{D}_{\nu}\bar{\Psi}^{j})\gamma_{\mu}+(\bar{D}_{\mu}\bar{\Psi}^{j})\gamma_{\nu}]\hat{H}_{i\bar{j}}\Psi^{j}\Big]/4 \\ &+ H_{i\bar{j}}\Big[\partial_{\mu}A^{i}\partial_{\nu}\bar{A}^{j} + \partial_{\nu}A^{i}\partial_{\mu}\bar{A}^{j} - g_{\mu\nu}\partial_{\tau}A^{i}\partial^{\tau}\bar{A}^{j}\Big]/2, \end{aligned} \tag{4.57}$$

onde

$$\hat{H}_{i\bar{j}} \equiv (H_{i\bar{j}} + H_{j\bar{i}})/2 + \gamma^{5}(H_{i\bar{j}} - H_{j\bar{i}})/2. \tag{4.58}$$

A partir de (4.57) e (4.58) observa-se que para o caso de spinores comutantes (i.e., no caso semi-clássico onde ψ^{A}, $\bar{\psi}_{\dot{A}} \in \mathbb{C}$) a parte do TEM relativa aos campos fermiônicos resulta identicamente nula. Ou seja, os campos spinoriais comportam-se como *fantasmas* (cf. no caso do modelo de Wess-Zumino). Sendo assim, a equação (4.57) reduz-se ao TEM dos modelos sigma não supersimétricos

$$T_{\mu\nu}= H_{i\bar{j}}\left[\partial_{\mu}A^{i}\partial_{\nu}\bar{A}^{j} + \partial_{\nu}A^{i}\partial_{\mu}\bar{A}^{j} - g_{\mu\nu}\partial_{\tau}A^{i}\partial^{\tau}\bar{A}^{j}\right]/2. \tag{4.59}$$

O estudo generalizado do TEM (4.59) é similar ao que fizemos com os modelos sigma reais no capítulo III. De fato, note-se que podemos definir

$$A^{i} = (A^{i} + iB^{i})/\sqrt{2}; \qquad \bar{A}^{i} = A^{i}, \ \bar{B}^{i} = B^{i}, \tag{4.60a}$$

$$\varphi^{i} = A^{i}, \qquad \varphi^{i+N} = B^{i}, \tag{4.60b}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{N+i,N+j} = (H_{i\bar{j}} + H_{j\bar{i}})/2, \tag{4.60c}$$

$$\gamma_{i,N+j} = \gamma_{N+i,j} = -i(H_{i\bar{j}} - H_{j\bar{i}})/2. \tag{4.60d}$$

Substituindo (4.60a — d) em (4.59) obtemos

$$T_{\mu\nu}= \gamma_{ij}\left[\partial_{\mu}\varphi^{i}\partial_{\nu}\varphi^{j} - g_{\mu\nu}\partial_{\tau}\varphi^{i}\partial^{\tau}\varphi^{j}/2\right], \tag{4.61}$$

que é exatamente o TEM para um modelo σ [cf. eq. (3.54)].

A equação (4.61) resume a nossa "interpretação clássica" dos modelos σ supersimétricos. Isso implica que somente a parte do TEM devida aos campos escalares (e/ou pseudo-escalares) serve como fonte do campo gravitacional (a menos de contribuições obtidas a partir da adição de divergências totais à Lagrangeana inicial, como no modelo supersimétrico de Wess-Zumino descrito acima).

4.5 - A Formulação no Espaço-Tempo Curvo

A fim de podermos acoplar os modelos de campos descritos acima às equações de Einstein, necessitamos formular tais modelos sobre uma variedade pseudo-Riemanniana.

Para isso é necessário substituir a derivada parcial ∂ pela *derivada covariante* ∇ (definida de maneira que $\nabla_\mu \gamma_\nu = 0$) [49,50,51,52],

$$\nabla_\mu \gamma_\nu = \partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \gamma_\sigma + \lambda_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \lambda_\mu \equiv 0,$$

cuja ação sobre qualquer escalar (A), sobre qualquer vetor (V) e sobre qualquer spinor (Ψ) é dada por

$$\nabla_\mu A = \partial_\mu A \equiv A_{,\mu},$$

$$\nabla_\mu V^\nu = V^\nu{}_{;\mu} \equiv V^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} V^\sigma,$$

$$\nabla_\mu \Psi \equiv \Psi_{;\mu} = \Psi_{,\mu} + \lambda_\mu \Psi;$$

onde $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel usuais e λ_μ são definidos pelos comutadores

$$\lambda_\mu = [\gamma^\nu \, , \, \partial_\nu \gamma_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \gamma_\sigma]/8,$$

e onde γ_μ são as matrizes de Dirac para o espaço-tempo curvo, as quais são funções das cordenadas e satisfazem

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu}.$$

Note-se que no tratamento usual dos spinores na relatividade geral as matrizes γ_μ são constantes já que a formulação é feita no espaço tangente com a ajuda de tetradas [24,51,52].

∇_μ é na verdade a derivada exterior covariante "em relação" a x_μ, a qual tem a mesma ação que a derivada covariante usual quando age sobre tensores (que não contém índices spinoriais). Assim, podemos usar o mesmo símbolo para indicar as duas derivadas.

A unidade pseudo-escalar γ^5 passa a ser definida por

$$\gamma^5 = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma/(4!\sqrt{-g}),$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Levi-Civita. Note-se que podemos definir $B \equiv \gamma^5 \mathcal{B}$, onde B é um escalar e $\mathcal{B}$ pseudo-escalar. Assim, podemos escrever as equações utilizando $\mathcal{B}$ ou B, conforme for mais conveniente.

4.6 - Comentários

No presente capítulo mostramos como pode ser feita uma interpretação do modelo supersimétrico de Wess-Zumino como meio material, e que tipo de materiais podem ser contruídos a partir de tal modelo de campos. Generalizando o modelo de Wess-Zumino temos os modelos sigma supersimétricos, os quais, quando interpretados "classicamente", reduzem-se basicamente aos modelos σ não supersimétricos.

Ainda dentro desse contexto, podemos imediatamente nos perguntar o que acontece com os modelos de supercordas quando tratados de acordo com o escopo do nosso trabalho. Vamos ver resumidamente a seguir o que pode ser obtido nesse caso.

A ação para modelos de supercordas corresponde de algum modo a modelos supersimétricos simples. Por exemplo, segundo o procedimento de Ramon, Neveu e Schwarz [24, 53] a ação para cordas fermiônicas é (a chamada "world sheet formulation")

$$\mathcal{S} = a\int d\sigma d\tau(\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\bar{\Psi}^\mu \gamma^a \partial_a \Psi_\mu), \tag{4.62}$$

onde a = (τ, σ) = (0, 1) é um índice na folha (*world sheet*); μ é um índice (vetorial) num espaço-tempo de dez dimensões: μ = 0, 1, ..., 9; γ^a são as matrizes de Dirac em duas dimensões. A parte dependente de $X^\mu = X^\mu(\sigma,\tau)$ é a ação das cordas usuais em dez dimensões, enquanto que a outra parte é a ação para spinores de Majorana "bidimensionais": $\Psi^\mu = \Psi^\mu(\sigma,\tau)$. A ação (4.62) corresponde na verdade à ação para o modelo mais simples de supersimetria em duas dimensões.

O tensor de energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = a\left[\partial^a X_\mu \partial_a X_\nu - i(\bar{\Psi}_\mu \gamma^a \partial_a \Psi_\nu + \bar{\Psi}_\nu \gamma^a \partial_a \Psi_\mu) + i(\partial_a \bar{\Psi}_\mu \gamma^a \Psi_\nu + \partial_a \bar{\Psi}_\nu \gamma^a \Psi_\mu)\right]. \tag{4.63}$$

Dessa relação vemos facilmente que se tomamos as componentes dos spinores de Majorana como números $\Psi^A_\mu \in \mathbb{C}$, então a parte do TEM

(4.63) que depende de Ψ_μ resulta identicamente nula (como no caso dos spinores de Dirac e de Rarita-Schwinger que satisfazem a condição de Majorana, conforme discutido no apêndice B). Assim concluímos que, com nossa interpretação clássica, a parte não nula do TEM descrevendo um dado modelo de supercordas é exatamente, e somente, a parte correspondente ao modelo de cordas clássico. Obviamente, pode-se considerar novos termos na ação (4.62) que não quebrem a simetria do modelo, em especial divergências totais, tal como fizemos para o caso do modelo supersimétrico de Wess-Zumino. Essas divergências não modificam a dinâmica dos campos, mas modificam o TEM, o que pode ser interessante do ponto de vista das cordas cósmicas (desde que, nesse caso, restringirmos o modelo a espaço-tempos quadridimensionais).

CAPÍTULO V

SOLUÇÕES EXATAS DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN ACOPLADAS A FLUIDOS DE CORDAS COM FLUXO DE CALOR

5.1 - Introdução

No capítulo I fizemos um breve resumo acerca do estudo dos meios contínuos em relatividade geral. Mesmo assim, antes de tratarmos das aplicações propriamente ditas, vamos relembrar o mais importante a esse respeito.

Qualquer tensor de segunda ordem simétrico ($T_{\mu\nu}$) pode ser posto na seguinte forma [25,26]

$$T_{\mu\nu}= (p+\rho-\zeta\theta)u_{\mu}u_{\nu} -(p-\zeta\theta)g_{\mu\nu} + 2\eta\sigma_{\mu\nu} + (u_{\mu}q_{\nu}+u_{\nu}q_{\mu}), \tag{5.1}$$

onde

$$u^{\mu}u_{\mu}= 1;\ u^{\mu}q_{\nu} = 0;\ \sigma_{\mu\nu}u^{\nu} = 0;\ g^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0. \tag{5.2}$$

Ao interpretarmos o tensor (5.1) como o tensor de energia-momento de um fluido viscoso temos: u^{μ} é o vetor de fluxo (velocidade) do fluido, η seu coeficiente de viscosidade dinâmica, ζ viscosidade volumar (*bulk viscosity*), θ a expansão, q^{μ} é o vetor fluxo de calor e $\sigma_{\mu\nu}$ é o tensor de *shear* do fluido. Nesse caso impõem-se as condições $\eta \geq 0$ e $\zeta \geq 0$ (além de outras condições que garantam a positividade da energia do fluido, medida localmente).

O fluxo de calor q^{μ} em (5.1) está relacionado com a temperatura do fluido pela seguinte relação [25,26]

$$q^{\mu} = \chi h^{\mu\nu}(T_{,\nu} - T u_{\nu;\tau} u^{\tau}), \qquad (\chi \geq 0) \tag{5.3}$$

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}; \tag{5.4}$$

sendo que a expansão, e o *shear* são dados por

$$\theta = h^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = u^{\tau}{}_{;\tau}, \tag{5.5}$$

$$\theta^{\mu\nu} = h^{\mu\sigma}h^{\nu\tau}[u_{\sigma;\tau} + u_{\sigma;\tau}]/2, \tag{5.6}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}\theta/3. \tag{5.7}$$

Vamos então, a título de aplicação, procurar soluções exatas das equações de Einstein tomando o seguinte tensor de energia-momento, obtido nos capítulos anteriores

$$T_{\mu\nu} = (\rho+\pi)(u_{\mu}u_{\nu} - z_{\mu}z_{\nu}) + q(u_{\mu}z_{\nu} + u_{\nu}z_{\mu}) - \pi g_{\mu\nu}, \tag{5.8}$$

onde $u^{\mu}u_{\mu} = - z^{\mu}z_{\mu} = 1$; $u^{\mu}z_{\mu} = 0$. Tal TEM representa um fluido de cordas paralelas com fluxo de calor ao longo das cordas.

5.2 - Fluidos de Cordas Paralelas

Nos capitulos precedentes descrevemos algumas maneiras de se construir formalmente tipos especiais de meios materiais. Dentre eles destacamos o fluido de cordas, cujo TEM é da forma [cf. eq. (2.21)]

$$T_{\mu\nu}= (\rho+\pi)(u_\mu u_\nu - z_\mu z_\nu) - \pi g_{\mu\nu}, \tag{5.9}$$

com $u^\mu u_\mu = - z^\mu z_\mu = 1$; $u^\mu z_\mu = 0$.

Vamos agora estudar alguns casos simples onde fluidos de cordas são usados como fontes do campo gravitacional (acoplados às equações de Einstein). Iniciaremos com o caso de um modelo cosmológico e, em seguida, trataremos de um caso estático.

Devido à simetria do TEM é razoável tomarmos como ponto de partida uma métrica com simetria cilindrica [54]

$$ds^2 = Adt^2 - Bdz^2 - Cdr^2 - Dr^2d\theta^2, \tag{5.10}$$

onde, para os casos que estamos interessados, A, B, C e D serão funções somente de t, ou somente de r.

5.2.1 - Modelo Cosmológico

Na métrica (5.10) supomos que as funções A, B, C e D sejam funções somente do tempo t, o que corresponde a um espaço-tempo tipo Bianchi I. Vamos também escrevê-la na forma

$$ds^2 = h(e^{a}dt^2 - e^{-a}dz^2) - f(e^{\varphi}dr^2 + e^{-\varphi}r^2d\theta^2), \tag{5.11}$$

onde $a = a(t)$, $h = h(t)$, $f = f(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Definimos

$$u_{\mu} = \delta^{0}_{\mu}\sqrt{he^{a}}; \qquad z_{\mu} = \delta^{1}_{\mu}\sqrt{h/e^{a}}. \tag{5.12}$$

Com isso, da equação (5.9) obtemos

$$(T_{\mu}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

As equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{5.14}$$

com $T_{\mu\nu}$ fornecido por (5.13) na métrica (5.11), resultam no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{\varphi}/r = 0, \tag{5.15a}$$

$$\dot{h}\dot{f}/hf + \dot{f}^2/2f^2 - \ddot{f}/f = 0, \tag{5.15b}$$

$$\ddot{a} - \dot{a}^2 + \dot{a}\dot{h}/h + \dot{a}\dot{f}/f + \dot{h}^2/h^2 - \dot{h}\dot{f}/hf - \ddot{h}/h = 2\kappa e^a h\pi, \tag{5.15c}$$

$$\ddot{f}/f - \dot{a}\dot{f}/f = 2\kappa e^a h\rho; \tag{5.15d}$$

onde $\dot{f} \equiv df/dt$, etc..., e onde já levamos em conta a equação (5.15a) ao escrevermos (5.15b—d).

Observemos desde logo que, em virtude de (5.15a), a métrica (5.11) resulta com simetria plana [55], para qualquer solução do sistema (5.15).

Além do sistema (5.15), a identidade de Bianchi fornece a seguinte equação

$$\dot{\rho} + \rho\dot{f}/f + \pi\dot{f}/f = 0. \tag{5.16}$$

O sistema (5.15) apresenta quatro equações para seis incógnitas: a, f, h, φ, ρ, π. Todavia, o produto "$e^a h$" pode ser feito igual a unidade através de uma transformação de coordenadas adequada. Assim, ficamos com um grau de liberdade, o qual pode ser eliminado, por exemplo, tomando-se uma "equação de estado" do tipo $\pi = \pi(\rho)$.

Para $\pi = \gamma\rho$, com γ constante, o sistema (5.15) pode ser resolvido facilmente, sendo que uma solução é:

$$\kappa\rho = (1-2\gamma)\alpha^2/t^2, \tag{5.17a}$$

$$\kappa\pi = \gamma(1-2\gamma)\alpha^2/t^2, \tag{5.17b}$$

$$h = t^{-\gamma\alpha}, \tag{5.17c}$$

$$f = t^{2\alpha}, \tag{5.17d}$$

$$\varphi = 0, \qquad e^{a} = 1/h = t^{\gamma\alpha}, \tag{5.17e}$$

$$\alpha = 1/(1+\gamma). \tag{5.17f}$$

Depois de (5.17c), (5.17d) e (5.17e) a métrica (5.11) e os autovetores (5.12) se escrevem

$$ds^2 = dt^2 - t^{-2\gamma\alpha}dz^2 - t^{2\alpha}(dr^2 + r^2 d\theta^2), \tag{5.17h}$$

$$u_\mu = \delta^0_\mu; \qquad z_\mu = \delta^1_\mu/t^{\gamma\alpha}. \tag{5.17i}$$

Vale observar, em relação à métrica (5.17h), que enquanto há expansão nas direções ortogonais às cordas, ocorre contração na direção das mesmas.

A solução (5.17) tem uma singularidade essencial em $t = 0$, desde que $\gamma \neq 1/2$. As condições de energia apresentadas no capítulo I são satisfeitas se $-1 < \gamma \leq 1/2$. Para $\gamma = 0$, resulta: $\pi = 0$, $\alpha = 1$, $h = 1$, $f = t$, $\rho = 1/\kappa t^2$; que corresponde a um caso particular do que aparece na referência [28], e representa um modelo cosmológico preenchido por uma poeira de cordas. Quando $\gamma = 1/2$ obtém-se: $\pi = \rho = 0$, $h = t^{-2/3}$, $f = t^{4/3}$. Por outro lado, se $\gamma > 1/2$ as condições de energia não são satisfeitas. Na verdade, $\gamma > 1/2$ implica em $\rho < 0$, além de $\pi < 0$.

Outras soluções podem ser encontradas para a presente situação. Vamos, contudo, descrever novos exemplos de fluidos de cordas.

5.2.2 - Modelo Estático

A situação estática é obtida supondo que as funções h, a, f e p, dependam somente de r. Ou seja, o ponto de partida é a métrica

$$ds^2 = h(e^{a}dt^2 - e^{-a}dz^2) - f(e^{\varphi}dr^2 + e^{-\varphi}r^2d\theta^2), \qquad (5.19)$$

com $a = a(r)$, $h = h(r)$, $f = f(r)$, $\varphi = \varphi(r)$.

Com u_μ e z_μ definidos como em (5.12) o tensor de energia-momento (5.9) toma a forma (5.13). Assim, as equações de Einstein fornecem

$$-a'^2/2a^2 + h'/hr + h'^2/2h^2 + h'f'/hf - h''/h = 0, \qquad (5.20a)$$

$$a'\varphi' - a'/r - a'h'/h - a'' = 0, \qquad (5.20b)$$

$$h''/h + h'/hr - \varphi'h'/h = 2\kappa e^{\varphi}f\pi, \qquad (5.20c)$$

$$-\varphi'^2 + 3\varphi'/r + \varphi'' + \varphi'h'/h + \varphi'f'/f - h'f'/hf - 2h'/hr$$
$$-f'/fr + f'^2/f^2 - f''/f = 2\kappa e^{\varphi}f\rho; \qquad (5.20d)$$

onde $f' \equiv df/dr$, etc...

A identidade de Bianchi se reduz a

$$\pi' + \rho h'/h + \pi h'/h = 0. \qquad (5.21)$$

Temos, como no caso anterior, um sistema com quatro equações e com seis funções a determinar. Um desses graus de liberdade representa, na verdade, a invariança das equações frente a transformações gerais de coordenadas. Ou seja, analogamente ao que fizemos na seção 5.2.1 com o produto $e^{a}h$, podemos fixar o produto "$e^{\varphi}f$" igual à unidade através da transformação de coordenada $r \longrightarrow \bar{r}$ adequada. Contudo, ficamos ainda com uma incógnita a mais que o número de equações. Além do mais, no presente caso a escolha de uma equação de estado do tipo "barotrópico" $\pi = \pi(\rho)$, como feito na seção anterior, não parece ser conveniente para encontrarmos soluções exatas fisicamente aceitáveis para o problema. Por exemplo, tomando $\pi = \gamma\rho$ e a = constante, o sistema (5.20) produz $\rho < 0$ e $\pi < 0$ para qualquer r, quando $\gamma < 2$ (enquanto que para a não constante o sistema resultante somente pode ser resolvido numericamente). Por isso, vamos tratar inicialmente do fluido incoerente de cordas

$$\pi = 0. \tag{5.22}$$

Substituido (5.22) em (5.21) segue que

$$h = \text{constante}. \tag{5.23}$$

Levando (5.23) em (5.20a) resulta

$$a = \text{constante}, \tag{5.24}$$

e, com isso, (5.20b) e (5.20c) resultam identidades, enquanto que (5.20d) reduz-se a

$$-\varphi'^2 + 3\varphi'/r + \varphi'' + \varphi' f'/f - f'/fr + f'^2/f^2 - f''/f = 2\kappa e^{\varphi} f\rho.$$

(5.25)

Na equação (5.25) podemos eliminar φ fazendo $e^{\varphi}f = 1$, o que produz

$$f''/f + 2f'/fr = \kappa\rho, \tag{5.26}$$

onde f é uma função arbitrária de r. Sendo que a métrica (5.19) reduz-se, nesse caso, à simples expressão [56]

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 + f^2 r^2 d\theta^2. \tag{5.27}$$

Em vista do maior número de funções desconhecidas do que de equações, é possível encontrar muitas soluções exatas para o sitema (5.20). Vamos mostrar aqui apenas mais uma dentre elas: a solução que fornece a métrica conformemente plana ($a = 0$, $\varphi = 0$, $f = h$)

$$ds^2 = h(dt^2 - dz^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2), \tag{5.28a}$$

$$h = 1/(r^2 + a^2)^2, \tag{5.28b}$$

$$\rho = (8a^2 - 4r^2)/\kappa, \tag{5.28c}$$

$$\pi = (8r^2 - 4a^2)/\kappa; \tag{5.28d}$$

com a sendo uma constante arbitrária.

Em relação a essa solução, vale observar que a densidade de energia ρ se anula em $r = r_0 = \sqrt{2}\,a$. ρ é menor que zero, para $r > r_0$.

Por isso, a solução (5.28) somente tem interesse físico para $r < r_0$. Além do mais, se exigirmos que $\pi \leq \rho$, devemos nos restringir à região $r \leq a$. Por outro lado, a "pressão" π é negativa para $r < a/\sqrt{2}$, é nula para $r = a/\sqrt{2}$, e é positiva para $r > a/\sqrt{2}$. Este fato pode ser interpretado da seguinte maneira: o espaço-tempo em questão é preenchido por um "sólido anisotrópico" na região $0 \leq r < a/\sqrt{2}$ e por um fluido de cordas entre $a/\sqrt{2} \leq r \leq a$.

A seguir passamos a descrever alguns exemplos de fluidos de cordas com fluxo de calor.

5.3 - Feixe de Cordas Paralelas com Fluxo de Calor ao Longo das Cordas

Seja o problema de calcular a métrica no interior de um feixe (fluido incoerente) de cordas paralelas e com um fluxo de calor (q) na direção das mesmas. O tensor de energia-momento para um tal fluido é dado por (5.8) com $\pi = 0$, ou seja

$$T_{\mu\nu} = \rho(u_\mu u_\nu - z_\mu z_\nu) + q(u_\mu z_\nu + u_\nu z_\mu), \tag{5.29}$$

onde z^μ é a direção das cordas. O problema tem simetria axial, visto que as quantidades físicas envolvidas independem da coordenada "na direção" de z^μ. Assim, podemos tomar como ponto de partida uma métrica na forma

$$ds^2 = Adt^2+B(dt)(dz)-dz^2(h^2-B^2)/A-\alpha(e^{\varphi}dr^2+e^{-\varphi}r^2d\theta^2), \qquad (5.30)$$

onde A, B, h, α e φ são funções de t e r somente.

O termo cruzado B(dt)(dz) é necessário devido a assimetria do problema. Isto é, invertendo o sentido da evolução do tempo t, o fluxo de calor deve mudar de sinal. A única forma de representar essa assimetria por inversão temporal, no caso em que as funções de (5.30) dependerem somente de r, é através de um termo cruzado daquele tipo.

Os vetores u^{μ} e z^{μ} podem ser tomados na forma

$$u_{\mu} = hR\delta^{0}_{\mu}, \qquad (5.31a)$$

$$u^{\mu} = \delta^{\mu}_{0}/hR + \delta^{\mu}_{3}BR/h, \qquad (5.31b)$$

$$z_{\mu} = BR\delta^{0}_{\mu} - \delta^{3}_{\mu}/R, \qquad (5.31c)$$

$$z^{\mu} = R\delta^{\mu}_{3}; \qquad (5.31d)$$

onde

$$R \equiv \sqrt{A/(h^2-B^2)}. \qquad (5.32)$$

Com isso, o tensor de energia-momento (5.29) resulta

$$\{T_{\mu\nu}\} = \begin{Bmatrix} T_{00} & 0 & 0 & T_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{30} & 0 & 0 & T_{33} \end{Bmatrix}, \qquad (5.33)$$

onde

$$T_{00} = \rho A + 2q\, BhR^2, \tag{5.34a}$$

$$T_{03} = T_{30} = \rho B - qh, \tag{5.34b}$$

$$T_{33} = -\rho/R^2. \tag{5.34c}$$

Comparando o TEM (5.29) com a forma geral (5.1), e levando em conta (5.3), obtém-se a seguinte relação entre o fluxo de calor qz^μ e o gradiante de temperatura

$$qz^\mu = qR\delta^\mu_0 = \chi h^{\mu\nu}(T_{,\nu} - Tu_{\nu;\tau}u^\tau). \tag{5.35}$$

5.3.1 - Caso Estático

Vamos particularizar a discussão tomando o caso estático, onde as funções envolvidas na métrica (5.30) dependem somente de r. Então, (5.35) produz

$$\partial T/\partial r + T\left[a'/2 - B^2(h'/h - B'/B)/(h^2-B^2)\right] = 0, \tag{5.36a}$$

$$\partial T/\partial \theta = 0, \tag{5.36b}$$

$$-\chi(\partial T/\partial z)\sqrt{A/(h^2-B^2)} = q; \tag{5.36c}$$

onde ' indica derivação (ordinária) em relação a r.

A equação (5.36a) pode ser integrada fornecendo

$$T = \sqrt{(h^2-B^2)/A}\ f(t,z)/h, \tag{5.37}$$

onde $f(t,z)$ é uma função arbitrária de t e z somente, pois a equação (5.36b) implica que T e, consequentemente, f são independentes de θ.

Levando (5.37) em (5.36c) obtém-se

$$q = -\chi(\partial f/\partial z)/h, \tag{5.38}$$

o que implica, a princípio, que o fluxo de calor é originado por um gradiente de temperatura na direção z (ao longo da corda, ou das cordas).

Por outro lado, da simetria do problema segue que $\partial q/\partial z = 0$, o que implica, depois de (5.38), em $\partial^2 f/\partial z^2 = 0$. Ou seja, (visto que também $\partial f/\partial\theta = 0$ e $\partial f/\partial r = 0$) $f(t,z)$ é dada por

$$f(t,z) = g(t)(-c_0 z + c_1) + F(t), \tag{5.39}$$

c_0 e c_1 são constantes, enquanto $g(t)$ e $F(t)$ são funções arbitrárias de t.

Substituindo (5.39) em (5.38) obtemos a seguinte relação para o fluxo de calor q

$$q = \chi c_0 g(t)/h. \tag{5.40}$$

No caso estático que estamos considerando resulta

$$q = \chi k/h, \tag{5.41}$$

com k constante.

O sistema de equações obtido a partir das equações de Einstein com a métrica (5.30) e o TEM dado por (5.33) e (5.34) é

$$2\kappa e^{\varphi}\alpha\rho = -2h'/rh -\alpha'/r\alpha +3\varphi'/r -h'\alpha'/h\alpha +h'\varphi'/h +(\alpha')^2/\alpha^2$$
$$+\alpha'\varphi'/\alpha -\alpha''/\alpha -(\varphi')^2 + \varphi'', \tag{5.42a}$$
$$2\kappa e^{\varphi}\alpha q/B = -B'/Br +B'h'/Bh +B'\varphi'/B - B''/B +4h'/hr$$
$$+2h'\alpha'/\alpha h -2h'\varphi'/h, \tag{5.42b}$$
$$h'/r -h'\varphi'+ h''= 0, \tag{5.42c}$$
$$2BB'a'/h^2 - B^2(a')^2/h^2 -4h'/hr - (B')^2/h^2 - 2h'\alpha'/h\alpha$$
$$-2a'h'/h +2h'\varphi'/h +(a')^2 = 0, \tag{5.42d}$$
$$-B^2(a' -B'/B)^2/h^2 +h^2(-a'h'/h -a'/r +a'\varphi' -a'')/B^2$$
$$-2B'/Br -(B')^2/B^2 -2B''/B +2B'h'/Bh +2B'a'/B +2B'\varphi'/B$$
$$+a'/r -3a'h'/h -a'\varphi' +(a')^2 +a'' = 0. \tag{5.42e}$$

Juntamente com a seguinte relação, obtida a partir da identidade de Bianchi: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

$$\rho h' = q\left[Ba' + [-2Bhh' +(h^2 +B^2)B']/(h^2-B^2)\right], \tag{5.43a}$$

ou

$$\rho h'/h = q\left[(Ba'-B')/h + \frac{d}{dr} LN[(h+B)/(h-B)]\right], \tag{5.43b}$$

onde definimos $e^{a} \equiv A$.

A exemplo do que ocorreu na seção **5.2**, temos aqui também um número maior de incógnitas do que equações. As funções a determinar são ρ, q, A, B, h, α e φ, num total de sete incógnitas; enquanto que temos somente cinco equações independentes (5.42a—e). A equação (5.43) garante a integrabilidade do sistema (5.42), mas não é independente dele. Assim, ficamos com dois graus de liberdade os quais serão removidos através de relações "extras" entre as funções a determinar, que podemos juntar ao sistema (5.42).

Por exemplo, podemos fixar $\alpha = 1$ e $\varphi = 0$, encontrando o seguinte sistema de equações

$$\kappa\rho = -h'/rh, \tag{5.44a}$$

$$2\kappa q/B = -B'/Br + B'h'/Bh - B''/B + 4h'/hr\ , \tag{5.44b}$$

$$h'/r + h'' = 0, \tag{5.44c}$$

$$-B^2(a' - B'/B)^2/h^2 - 4h'/hr - 2a'h/h \quad + (a')^2 = 0, \tag{5.44d}$$

$$\begin{aligned} &h^2(-a'h'/h - a'/r - a'')/B^2 + 4h'/hr - 2B'/Br - (B')^2/B^2 \\ &\quad -2B''/B + 2B'h'/Bh + 2B'a'/B + a'/r - a'h'/h + a'' = 0; \end{aligned} \tag{5.44e}$$

sendo que a relação (5.43) não muda por não depender explicitamente de α e φ. Obtemos então um sistema com cinco equações e com igual número de funções a determinar, conforme o desejado.

A equação (5.44c) pode ser integrada, fornecendo

$$h = c_0 LN(r/r_0), \quad c_0 \text{ e } r_0 \text{ são constantes,} \tag{5.45}$$

o que, quando substituído em (5.44a), nos fornece a densidade ρ

$$\kappa\rho = r^{-2}/LN(r_0/r). \tag{5.46}$$

As funções A e B são determinadas pelas equações (5.44d) e (5.44e). No entanto, devido a não linearidade de tais equações, isso em geral somente pode ser feito numericamente. Portanto, a escolha $\alpha = 1$ e $\varphi = 0$ não é interessante dentro de nosso objetivo de determinar soluções fechadas para o sistema (5.42).

Note-se ainda que existe uma singularidade essencial em $r = r_0$ (dado que $R^{\nu}_{\ \nu} = 2\kappa\rho$ e ρ é singular em $r = r_0$), e $\rho > 0$ somente na região $r < r_0$.

Essas dificuldades nos levam a procurar outras soluções fixando outros vínculos entre as incógnitas a fim de remover os graus de liberdade do sistema. Além disso, visto que a não linearidade do sistema de equações diferenciais está associada principalmente às funções A, B e h, é natural agregar as condições extras sobre elas a fim de simplificar o sistema resultante. Ocorre, porém, que as hipóteses mais simples envolvendo tais funções não produzem resultados interessantes do ponto de vista físico. Por exemplo, uma condição que simplifica grandemente as equações, em especial (5.37d) e (5.37e), é a hipótese

$$a' = B'/B.$$

Contudo, tal relação implica em $q = 0$, como pode ser visto substituindo $a' = B'/B$ em (5.42d) e (5.42e) e levando o resultado disso à equação (5.42b).

De um modo geral pode-se fixar duas dentre as funções ρ, q, A, B, h, α e φ de uma forma completamente arbitrária, para então resolver o sistema resultante, que em geral pode ser feito apenas numericamente. Nós, contudo, estamos interessados em encontrar algumas soluções exatas para o problema. Por isso, vamos apenas transcrever aqui uma das possíveis soluções para o sistema (5.42), sem descrever os detalhes de como foi obtida.

Uma solução de (5.42) é

$$ds^2 = B^2(r^4 dt^2 - r^{-4} dz^2) + 2B^2 dt\, dz - B^3 r^{-4} dr^2 - r^2 d\theta^2/B, \tag{5.47a}$$

$$\rho = c_0 B^{-3}/r^{12}, \tag{5.47b}$$

$$\beta = c_1 B^{-3}/r^8, \tag{5.47c}$$

$$B = B(r) = B_0 e^{k^2/r^2}; \tag{5.47b}$$

onde B_0, c_0, c_1 e k são constantes reais arbitrárias.

Como vimos, as soluções exatas do sistema de equações gerados pelo presente modelo que podem ser encontradas, em geral não tem interesse físico. Em vista disso, deixamos de lado esse problema para ser atacado no futuro (através da busca de soluções numéricas).

Seria interessante procurar modelos cosmológicos com a métrica na forma (5.30) e com o TEM dado por (5.29). Tratamos disso brevemente a seguir.

5.3.2 - Modelo Cosmológico

Tomemos uma métrica como (5.30) e supomos que todas as funções A, B, h, α e φ dependam somente do tempo cosmológico t. Em tal situação, podemos sempre tomar A = 1, de modo que podemos escrever

$$ds^2 = dt^2 + B(dt)(dz) - (h^2 - B^2)dz^2 - \alpha(e^{\varphi}dr^2 + e^{-\varphi}r^2d\theta^2), \tag{5.48}$$

onde B, h, α e φ são funções de t somente.

Com isso, os vetores u^{μ} e z^{μ} do TEM (5.8) são os mesmos que em (5.31), porém com A = 1. As componentes não nulas do TEM são

$$T_{00} = \rho + 2q\, Bh/(h^2 - B^2). \tag{5.49a}$$

$$T_{03} = T_{30} = \rho B - qh, \tag{5.49b}$$

$$T_{33} = -\rho(h^2 - B^2). \tag{5.49c}$$

As equações de Einstein obtidas a partir da métrica (5.48) acopladas ao TEM (5.49) produzem o sistema

$$\dot{\varphi} = 0, \tag{5.50a}$$

$$q = 0, \tag{5.50b}$$

$$2\dot{h}\dot{\alpha}/h\alpha + \dot{\alpha}^2/\alpha^2 - 2\ddot{\alpha}/\alpha = 0, \tag{5.50c}$$

$$B(\dot{B}\dot{h}/h - \dot{B}\dot{\alpha}/\alpha - \ddot{B} - \dot{B}^2/B)/h^2 + \dot{\alpha}\dot{h}/h\alpha + \ddot{h}/h = 0, \tag{5.50d}$$

$$-B\dot{B}\dot{\alpha}/h^2\alpha + (1 - B^2/h^2)\dot{\alpha}^2/4\alpha^2 + \dot{\alpha}\dot{h}/h\alpha = \kappa\rho; \tag{5.50e}$$

onde o ponto sobre as funções indica derivação em relação à coordenada t.

Vemos então que a simetria do problema implica que o fluxo de calor na direção das cordas seja nulo, $q = 0$. Por outro lado, uma vez que φ e q são determinados respectivamente por (5.50a) e (5.50b), o sistema resultante apresenta três equações independentes para quatro funções desconhecidas. Porém, devido ao fato de termos $q = 0$, espera-se que o espaço-tempo resultante seja simétrico por inversão temporal. Isto significa que a métrica (5.48) deve ser invariante frente a substituição $t \longrightarrow -t$, o que somente pode ser verdade se

$$B = 0.$$

Portanto, o problema se reduz a um caso particular do que foi considerado na subseção 5.2.1.

Para possibilitar a existência de fluxo de calor na direção das cordas em um modelo cosmológico de cordas cósmicas é necessário, em vista do descrito acima, tomar uma métrica com simetria menor do que (5.48), tal como fazer as funções A, B, h, α e φ dependentes das coordenadas t e r. Nós, contudo, não trataremos disso neste momento. Vamos sim estudar a seguir uma nova situação, um pouco mais simples, a partir de um fluido não homogêneo de cordas com fluxo de calor.

5.4 - Feixe Não Homogêneo de Cordas com Fluxo de Calor ao Longo das Cordas

Consideremos agora o problema de um TEM como (5.8) numa métrica do tipo

$$ds^2 = e^{\omega}(dt^2-dx^2) - \alpha(e^{\varphi}dy^2 + e^{-\varphi}dz^2), \tag{5.51}$$

onde $\omega \equiv \omega(t,x)$; $\alpha \equiv \alpha(t,x)$; $\varphi \equiv \varphi(t,x)$.

Definindo

$$u_{\mu} = \delta^{0}_{\mu}e^{\omega/2}, \tag{5.52a}$$

$$x_{\mu} = \delta^{1}_{\mu}e^{\omega/2}, \tag{5.52b}$$

o TEM (5.8) se escreve

$$(T_{\mu}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & q & 0 & 0 \\ q & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

A diferença fundamental entre a presente situção e o caso da seção 5.3 é que em (5.51) não existe simetria na direção das cordas, de forma que densidade de energia (a tensão) e o fluxo de calor podem variar ao longo das mesmas, o que não é possível em situações como as descritas naquela seção [cf. eq. (5.30)].

O TEM (5.53) [levando em conta (5.51) e (5.52)] quando comparado com (5.1) implica em

$$q = \chi(T\omega_{x} + T_{x})/e^{\omega/2}. \tag{5.54}$$

Portanto, depois de (5.54), pode-se pensar que o fluxo de calor de (5.8) é devido ao gradiente de temperatura ao longo da corda (a corda se comporta, nesse caso como um material condutor de calor). Observe-se, porém, que é possível termos $\chi = 0$ em (5.54). Então, o fluxo de calor pode ser pensado, por exemplo, como devido a um feixe de luz (fótons) que se propaga na direção da corda.

As equações de Einstein, com uma métrica na forma (5.51) mais o TEM (5.53), implicam no seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = 2\kappa\alpha\rho e^{\omega}, \tag{5.55a}$$

$$\alpha_t\varphi_t - \alpha_x\varphi_x - \alpha\varphi_{xx} + \alpha\varphi_{tt} \equiv (\alpha\varphi_t)_t - (\alpha\varphi_x)_x = 0, \tag{5.55b}$$

$$2\alpha(\alpha_{tt}+\alpha_{xx})+\alpha^2(\varphi_t^2+\varphi_x^2)-2\alpha(\alpha_t\omega_t+\alpha_x\omega_x)-\alpha_t^2-\alpha_x^2 = 0, \tag{5.55c}$$

$$2\alpha\alpha_{tx}-\alpha_t\alpha_x+\alpha^2\varphi_t\varphi_x-\alpha(\alpha_t\omega_x+\alpha_x\omega_t) = -2\kappa\alpha^2 q e^{\omega}, \tag{5.55d}$$

$$2\alpha(\alpha_{tt}-\alpha_{xx})+\alpha^2(\varphi_t^2-\varphi_x^2)+2\alpha^2(\omega_{tt}+\omega_{xx})-\alpha_t^2+\alpha_x^2=-4\kappa\alpha^2\pi e^{\omega}. \tag{5.55e}$$

A identidade de Bianchi, por sua vez, fornece

$$\alpha\rho_t + \rho\alpha_t + \pi\alpha_t - \alpha q_x - q\alpha_x - \alpha q\omega_x = 0, \tag{5.56a}$$

$$\alpha\rho_x + \rho\alpha_x + \pi\alpha_x + \alpha q_t + q\alpha_t + \alpha q\omega_t = 0. \tag{5.56b}$$

Nas equações (5.55) e (5.56) usamos a notação $\alpha_t \equiv \partial\alpha/\partial t$; $\alpha_x \equiv \partial\alpha/\partial x$; $\alpha_{tx} \equiv \partial^2\alpha/\partial t\partial x$; etc...

As equações (5.56) garantem a integrabilidade do sistema de equações (5.55). Por outro lado, depois de um pouco de álgebra, verifica-se que (5.55c) e (5.55e) constituem identidades quando tomamos as equações (5.56) como parte do sistema, juntamente com (5.55a), (5.55b) e (5.55d).

Com isso, obtemos um sistema de cinco equações independentes para seis funções desconhecidas (α, ω, φ, ρ, q, π). Tal grau de liberdade é, no caso de fluidos em geral, removido postulando uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$. No caso do modelo acima, esse procedimento nos deixa com duas (ou três) possibilidades: $\pi = \pi(\rho)$ ou $q = q(\rho)$ [ou ainda $q = q(\pi)$]. Todavia, nosso objetivo inicial é o de encontrarmos alguma solução fechada para termos indicações de como se comportam as soluções do sistema (5.56)—(5.57). Para esse fim, o postulado de equações de estado não é indicado, pois geralmente conduz a sistemas cujas soluções somente podem ser obtidas numericamente.

Com a finalidade de encontrarmos soluções exatas, consideremos o sistema formado pelas equações

$$\alpha_t\varphi_t - \alpha_x\varphi_x - \alpha\varphi_{xx} + \alpha\varphi_{tt} \equiv (\alpha\varphi_t)_t - (\alpha\varphi_x)_x = 0, \tag{5.57a}$$

$$\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = 2\kappa\alpha\rho e^{\omega}, \tag{5.57b}$$

$$2\alpha\alpha_{tx} - \alpha_t\alpha_x + \alpha^2\varphi_t\varphi_x - \alpha(\alpha_t\omega_x + \alpha_x\omega_t) = -2\kappa\alpha^2 q e^{\omega}, \tag{5.57c}$$

$$\alpha\rho_t + \rho\alpha_t + \pi\alpha_t - \alpha q_x - q\alpha_x - \alpha q\omega_x = 0, \tag{5.57d}$$

$$\alpha\rho_x + \rho\alpha_x + \pi\alpha_x + \alpha q_t + q\alpha_t + \alpha q\omega_t = 0. \tag{5.57e}$$

Por simplicidade, vamos eliminar o grau de liberdade do sistema com a seguinte hipótese

$$\kappa\alpha\rho e^{\omega} = \text{constante} \equiv k, \tag{5.58}$$

o que implica em

$$\alpha_t\rho + \alpha\rho_t + \alpha\rho\omega_t = 0, \tag{5.59a}$$

$$\alpha_x\rho + \alpha\rho_x + \alpha\rho\omega_x = 0. \tag{5.59b}$$

Com a escolha (5.58), a solução de (5.57b) é da forma

$$\alpha(t,x) = f(t-x) + g(t+x) + k[t^2-x^2]/2, \tag{5.60}$$

onde f e g são funções arbitrárias dos argumentos. f + g corresponde à solução homogênea de (5.57b) [tal que $(f+g)_{tt} - (f+g)_{xx} = 0$].

A partir de (5.61) podemos tratar alguns casos particulares onde fixamos f e g.

I - Seja

$$\alpha = \alpha(x). \tag{5.61}$$

Observe-se que para uma boa interpretação geométrico-física da métrica (5.51), devemos impor $\alpha(x) > 0$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Esse vínculo, todavia, é incompatível com a equação (5.57b), pois como $\kappa\alpha e^{\omega} > 0$ e dado também que $\alpha(x) > 0$ em um certo domínio, tal equação implica que $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}\ |\ \alpha(x_0) = 0$, e que $\alpha(x)$ assume valores negativos para todo $x > x_0$ (ou $x < x_0$, dependendo da situação). Para ver isso em um caso particular, consideremos o sistema (5.56) com as escolhas (5.58) e (5.61)

$$\alpha\varphi_{tt} - (\alpha\varphi_x)_x = 0, \tag{5.62a}$$

$$-\alpha_{xx} = 2k, \tag{5.62b}$$

$$\alpha\varphi_t\varphi_x - \alpha_x\omega_t = -2\kappa\alpha q e^{\omega}, \tag{5.62c}$$

$$\alpha\rho_t + - \alpha q_x - q\alpha_x - \alpha q\omega_x = 0, \tag{5.62d}$$

$$\alpha\rho_x + \alpha q_t + \alpha q\omega_t = 0. \tag{5.62e}$$

A equação (5.62a) fornece

$$\alpha(x) = -kx^2 + c_0x + c_1, \tag{5.63}$$

onde c_0 e c_1 são constantes. De (5.63) conclui-se que α e, depois de (5.58), também a densidade de energia ρ somente são positivas no domínio $c_0/2k - R/2 < x < c_0/2k + R/2$, onde $R = \sqrt{(c_0)^2/4k^2 - 4c_1/k}$. Tal situação é pouco interessante, por isso passaremos a analisar outros casos.

II - Seja, então, a seguinte escolha

$$\alpha = \alpha(t) = kt^2 \tag{5.64}$$

Substituindo (5.64) no sistema de equações (5.55), encontramos

$$\varphi_{tt} + 2\varphi_t/t - \varphi_{xx} = 0, \tag{5.65a}$$

$$\kappa t^2\rho e^{\omega} = 1, \tag{5.65b}$$

$$t\varphi_t\varphi_x/2 - \omega_x = -2\kappa tqe^{\omega}, \tag{5.65c}$$

$$\alpha\rho_t + \rho\alpha_t + \pi\alpha_t - \alpha q_x - q\alpha_x - \alpha q\omega_x = 0, \tag{5.65d}$$

$$\alpha\rho_x + \rho\alpha_x + \pi\alpha_x + \alpha q_t + q\alpha_t + \alpha q\omega_t = 0. \tag{5.65e}$$

As equações (5.65), mais (5.59) e (5.60), podem ser integradas. Para isso, observemos que a solução de (5.65a) é da forma

$$\varphi = \varphi(t,x) = [F(t-x) + G(t+x)]/t, \tag{5.66a}$$

onde F e G são funções arbitrárias dos seus respectivos argumentos. As demais funções são dadas por

$$\alpha = kt^2, \tag{5.66b}$$

$$e^{\omega} = e^{\Sigma}H(x); \qquad \Sigma = \Sigma(t,x)=\int t(\varphi_t^2 + \varphi_x^2)/4\ dt, \tag{5.66c}$$

$$\rho = e^{-\Sigma}/kt^2H(x), \tag{5.66d}$$

$$q = e^{-\Sigma}\left[(H_x/H + \Sigma_x)/t - \varphi_t\varphi_x/2\right]/kH(x), \tag{5.66e}$$

$$\pi = t(qe^{\omega})_x/2e^{\omega} - t\rho_t/2 - \rho; \tag{5.66f}$$

onde H é uma função arbitrária que depende apenas de x.

Observe-se que como F(t-x) e G(t+x), além de H(x), são funcões arbitrárias, temos ainda uma variedade muito grande de diferentes soluções, mesmo tendo fixado a função α a priori. A seguir escrevemos algums casos particulares de (5.66), a partir da escolha da função φ.

a) φ = constante. (5.67a)

Nesse caso, temos

$$\alpha = kt^2, \tag{5.67b}$$

$$e^{\omega} = H(x) > 0, \tag{5.67c}$$

$$\rho = 1/\kappa t^2 H(x), \tag{5.67d}$$

$$q = H_x/\kappa t H^2, \tag{5.67e}$$

$$\pi = (H_x/H)_x/2\kappa H; \tag{5.67f}$$

sendo que a métrica (5.51) pode ser escrita na forma

$$ds^2 = h(X)dt^2 - dX^2 - t^2(dY^2 + dZ^2), \tag{5.68}$$

onde $X = \int\sqrt{H(x)}dx \Longrightarrow h(X) = dX/dx$, $Y = ky$ e $Z = kz$.

Com relação à solução (5.67) vale observar que se H = constante , o fluxo de calor q e a pressão do fluido de cordas π são nulos. Por outro lado, se $H_x \neq 0$, π será constante no tempo, enquanto q decresce mais lentamente do que a densidade de energia ρ, de forma que para $t \longrightarrow \infty$, a densidade ρ e o fluxo de calor q (para um dado $x = x_0$) se anulam, mas não π. Ou seja, para um tempo muito grande o TEM em x_0 evolui para aquele de um meio com densidade de energia nula, mas com pressão não nula em apenas "duas direções". Em vista disso, a situação fisicamente interessante desta solução particular parece ser somente o caso H = constante, onde novamente o fluxo de calor desaparece e a solução resultante é equivalente àquela mostrada na seção 5.2.1 [cf. eqs. (5.17) com $\gamma = 0$, $\alpha = 2$].

b) $\varphi = ax + b/t$ (a e b constantes). (5.69a)

Dessa escolha obtemos

$$\alpha = kt^2, \tag{5.69b}$$

$$e^{\omega} = e^{\Sigma}H(x), \tag{5.69c}$$

$$\rho = e^{-\Sigma}/\kappa t^2 H(x), \tag{5.69d}$$

$$q = e^{-\Sigma}\left[ab/2t + H_x/H\right]/\kappa tH, \tag{5.69e}$$

$$\pi = e^{-\Sigma}\left[(a^2 + b^2/t^4)/4 + (H_x/H)_x\right]/2\kappa H; \tag{5.69f}$$

onde

$$\Sigma = (a^2t^2 - b^2/t^2)/8, \tag{5.69g}$$

e onde H é uma função arbitrária de x. A métrica (5.51) fica, então

$$ds^2 = e^{\Sigma}H(x)(dt^2 - dx^2) - t^2(e^{(ax+b/t)}dy^2 + e^{-(ax+b/t)}dz^2). \tag{5.70}$$

Essa solução admite um caso particular interessante quando H = constante. Fica ainda o inconveniente (físico) de que a densidade de energia decresce mais rapidamente com o tempo do que a pressão π. Porém agora ρ e q decaem com o tempo da mesma forma, sendo que se $ab > 0$ o fluxo de calor é positivo (no sentido de x crescente), equanto que se $ab < 0$ o mesmo será negativo (no sentido de x decrescente). Para $a = 0$ o fluxo de calor se anula e vale $\pi = 8\rho/b^2$, o que é equivalente à solução (5.17) com $\gamma = 8/b^2$.

A situação H não constante tem as mesmas características discutidas a respeito da solução (5.67) acima.

c) $\varphi = a + bx/t$ (a e b constantes). (5.71a)

Com φ dado por (5.71a), encontra-se

$$\alpha = kt^2, \tag{5.71b}$$

$$e^{\omega} = t^r e^{-\Sigma} H(x), \tag{5.71c}$$

$$\rho = e^{\Sigma}/\kappa t^{(2+r)} H(x), \tag{5.71d}$$

$$q = e^{\Sigma}\left[rx/t^2 + H_x/H\right]/\kappa t^{(1+r)} H, \tag{5.71e}$$

$$\pi = e^{\Sigma}\left[r(2+x^2/t^2)/t^2 + (H_x/H)_x\right]/2\kappa t^r H; \tag{5.71f}$$

onde H é ainda uma função arbitrária de x (independente da anterior). No presente caso a função Σ é dada por

$$\Sigma = rx^2/2t^2; \quad r = b^2/4. \tag{5.71g}$$

A métrica (5.51), por sua vez, pode ser escrita como segue

$$ds^2 = e^{-\Sigma} t^r H(x)(dt^2 - dx^2) - t^2(e^{bx/t}dy^2 + e^{-bx/t}dz^2). \tag{5.72}$$

Na situação representada pela solução (5.71), para H constante, a pressão π apresenta o mesmo comportamento assintótico para grandes valores de t que a densidade de energia ρ. Por outro lado, o fluxo de calor q decresce mais rapidamente do que ρ e π com o tempo, mas tem um comportamento mais sutil em função de x. Para x positivo, o fluxo de calor é no sentido de x crescente, e aumenta em valor absoluto a medida que x também aumenta; q é nulo em $x = 0$ e é negativo (i. e., no sentido de x decrescente) para x negativo, aumentando em valor absoluto enquanto x se torna mais negativo.

5.5 - Comentários

Nas seções anteriores procuramos soluções exatas das equações de Einstein para algumas formas especificas de fluidos representando alguns dos TEM's que encontramos nos capítulos precedentes. Foi nossa intenção dar ênfase principalmente ao estudo do fluido de cordas com fluxo de calor na direção das cordas, visto que tal problema não havia até então sido considerado.

Esse tipo de fluido aparece primeiramente no capítulo II [cf. equações (2.28) e (2.29)] e, subsequentemente, na seção 4.3.

Observe-se que em ambos os casos é impossível obtermos um fluido de cordas sem fluxo de calor, pois em (2.28) R não pode ser nulo, e também em (4.42) se ρ for nulo o TEM não mais assume aquela forma (com $\rho = 0$), e sim a apresentada em (4.43). Por isso, para obtermos um fluido de cordas sem fluxo de calor dentro do nosso formalismo, necessitamos recorrer ao artifício usado na seção 2.3. Ou seja, tomamos os TEM's de dois fluidos perfeitos adequados e subtraímos um do outro, de tal maneira que o TEM possa ser escrito como em (2.21)

$$T_{\mu\nu} = (\lambda + \pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} + \kappa U_\mu U_\nu. \tag{5.73}$$

Daí, subtraímos o TEM de um fluido incoerente $T_{\mu\nu} = \omega u_\mu u_\nu$, com $\omega = \kappa$ e $u_\mu = U_\mu$. O resultado será, então

$$T_{\mu\nu} = (\lambda + \pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu}. \tag{5.74}$$

É necessário, assim, um modelo com três fluidos para se chegar à forma desejada para o fluido resultante.

O mesmo resultado pode ser obtido, usando o mesmo tipo de raciocínio, a partir das relações (4.38) no caso em que $\sigma < 0$ [cf. eq. (4.36b)].

Vejamos, então, de que forma um modelo como o estudado na seção 5.2.1 pode ser obtido a partir do método formal descrito acima. Na verdade, estamos interessados no problema inverso, ou seja dado o "fluido de cordas resultante" queremos mostrar que o mesmo representa a combinação de dois fluidos perfeitos com um fluido incoerente.

Temos U_μ, Z_μ, ρ e π conhecidos [cf. p. e. (5.17)]. A fim de determinarmos os fluidos componentes devemos calcular ω, ε, p, u_μ, ϵ, q, v_μ e κ (a velocidade do fluido incoerente é U_μ), tais que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\lambda + \pi)(U_\mu U_\nu - X_\mu X_\nu) - \pi g_{\mu\nu} \\ &= (\omega+p)u_\mu u_\nu - (\epsilon+q)v_\mu v_\nu - (p-q)g_{\mu\nu} - \kappa U_\mu U_\nu. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Da estrutura algébrica de $T_{\mu\nu}$ segue que o subespaço bidimensional tipo tempo gerado por U_μ e X_μ está definido, o que determina os vetores u_μ e v_μ como pertencentes a tal subespaço. Com isso, escrevemos

$$u_\mu = A_0 U_\mu + B_0 X_\mu, \tag{5.76a}$$

$$v_\mu = A_1 U_\mu + B_1 X_\mu. \tag{5.76b}$$

Ao substituirmos essas equações, junto com os vínculos $u_\mu u^\mu = v_\mu v^\mu = 1$, em (5.76) encontra-se um sistema de seis equações para as nove incógnitas ω, p, ε, q, κ, A_0, B_0, A_1, B_1. Podemos resolver tal sistema a menos de três "parâmetros" que, por conveniência, escolhemos ω, ε e p (ou r, s e p). Os parâmetros determinados em função destes são, então

$$q = p - \pi, \tag{5.77a}$$

$$\kappa = r - s - 2\lambda - 2\pi, \tag{5.77b}$$

$$A_0 = \sqrt{(r-s-\lambda-\pi)(r-\lambda-\pi)}\Big/\sqrt{r(r-s-2\lambda-2\pi)}, \tag{5.77c}$$

$$B_0 = \sqrt{(\lambda+\pi)(s+\lambda+\pi)}\Big/\sqrt{r(r-s-2\lambda-2\pi)}, \tag{5.77d}$$

$$A_1 = \sqrt{(r-s-\lambda-\pi)(s+\lambda+\pi)}\Big/\sqrt{s(r-s-2\lambda-2\pi)}, \tag{5.77e}$$

$$B_1 = \sqrt{(\lambda+\pi)(r-\lambda-\pi)}\Big/\sqrt{s(r-s-2\lambda-2\pi)}; \tag{5.77f}$$

Os parâmetros ω, ε, e p permanecem arbitrários. Contudo, essa arbitrariedade pode ser restringida se exigirmos que os fluidos componentes tenham as características usuais. Então os vínculos $\omega \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\kappa \geq 0$, $0 \leq p + \omega$ e $0 \leq q + \varepsilon$ (e ainda $p \geq q$, $p + \omega \geq q + \varepsilon$), o que pode ser feito com a liberdade desses três parâmetros.

No caso de fluidos de cordas com fluxo de calor, como aqueles estudados nas seções 5.3 e 5.4, temos que calcular os dois fluídos perfeitos componentes, de acordo com o modelo estudado na seção 2.3, tais que

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= (\rho+\pi)(U_\mu U_\nu - U_\mu U_\nu) + \beta(U_\mu X_\nu + U_\nu X_\mu) - \pi g_{\mu\nu} \\
&= (p+\omega)u_\mu u_\nu - (q+\varepsilon)v_\mu v_\nu - (p-q)g_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

No presente caso, U_μ e X_μ também definem um subespaço tipo tempo invariante, de forma que u_μ e v_μ ficam determinados por relações análogas a (5.76a) e (5.76b), respectivamente. Ao substituirmos tais equações em (5.78,) encontramos um sistema de seis equações para os oito parâmetros independentes ω, p, ε, q, A_0, B_0, A_1 e B_1. Tomando como parâmetros livres ω e p, resulta que ε, q, A_0, B_0, A_1 e B_1 ficam determinados em função de ρ, π, β, ω e p. Podemos, conforme discutido acima, fixar outros vínculos entre ω, ε, p e q fazendo uso desses dois parâmetros livres.

Na análise acima, utilizamos como componentes dois ou mais fluidos perfeitos, no espírito do modelo estudado no capítulo II. Naturalmente, podemos ir mais adiante e impor que tais fluídos componentes sejam irrotacionais calculando os campos escalares que definem as suas velocidades. Por outro lado, poder-se-ia também tomar como base o modelo descrito na seção 4.3. Em tal caso, determinar-se-iam os campos A, B e Ψ, os quais definem os dois fluidos irrotacionais e a corrente $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ que interage com o fluido definido pelo campo A. Por questões de tempo e espaço esses cálculos não serão apresentados aqui. Nos limitamos a afirmar que, conforme demonstramos anteriormente, existe a possibilidade de decompor os TEM's como aqueles mostrados na seção 5.4, por exemplo, em termos tanto dos modelos da seção 2.3 como dos modelos descritos no capitulo **IV**. A escolha de um dentre tais modelos a ser adotado é uma questão de conveniência, dependendo das características físicas e matemáticas do problema especifico em estudo.

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS FINAIS

6.1 - Contribuições Inéditas

O objetivo desta seção é destacar os estudos e resultados originais apresentados nos capítulos precedentes.

De acordo com nosso conhecimento é original no capítulo II o modelo apresentado na seção 2.3, bem como a sua generalização discutida na seção 2.4.

No capítulo III, é nova a parte final da seção 3.2, especialmente a partir da equação (3.20), onde mostramos que um modelo de N fluidos perfeitos (com velocidade não co-planares) podem ser equivalentes a um modelo sigma não linear particular. Outros resultados inéditos aparecem na seção 3.3 obtidos pela análise dos casos particulares (iv) e (v) da soma de dois campos escalares [cf. eq. (3.37)]. O estudo do caso particular da interpretação dos modelos sigma como meios materiais descrito na seção 3.4 também é original.

Todos os resultados correspondentes a "interpretação clássica" dos modelos de campos supersimétricos discutidos no capítulo IV são inéditos. Isso inclui a maior parte da seção 4.2, toda a seção 4.3 (acerca do modelo de Wess-Zumino) além do tratamento a respeito dos modelos σ e de supercordas considerados nas seções 4.4 e 4.6, respectivcamente.

Acreditamos ainda que de todas as soluções apresentadas no capitulo V, somente o caso da eq. (5.27) não é inédito. Além do mais, fluidos de cordas com fluxo de calor não haviam sido tratados anteriormante na literatura.

6.2 - Sobre a Continuação do Trabalho

De acordo com o que vimos nos capitulos II, III e IV, é possível construir modelos de fluidos (anisotrópicos) com fluxo de calor, bem como modelos de fluidos de cordas com ou sem fluxo de calor, entre outros, a partir de fluidos perfeitos e de campos escalares (em geral de modelos σ); ou ainda a partir de modelos de campos supersimétricos.

No capitulo V estudamos alguns fluidos dos tipos mencionados acima, mas não tratamos dos cálculos explícitos dos fluidos ou campos componentes. Em vista disso, temos vários aprofundamentos que podem ser feitos com base nos estudos realizados até aqui. Por exemplo, pode-se tratar da construção de modelos de materiais, como fluídos anisotrópicos, fluidos de cordas, etc..., a partir (i) de modelos concretos de campos escalares e/ou modelos σ, e (ii) da interpretação clássica do modelo supersimétrico de Wess-Zumino. É interessante também a obtenção de modelos cosmológicos a partir de tais modelos de campos.

Conforme dissemos mais acima, o trabalho desenvolvido nos fornece um método formal bastante útil na construção de modelos de estrelas e de outros objetos de interesse astrofísico, além de modelos σ cosmológicos. Com base nesse formalismo pode-se examinar a evolução de modelos cosmológicos de texturas com simetria $O(N)$ [57] e de outros modelos σ, como também, em princípio, analisar o colapso gravitacional de estruturas desse tipo.

Outro estudo interessante, que pode ser feito a partir dos resultados do presente trabalho, consiste na análise da possível relação entre os modelos de fluidos de cordas cósmicas com fluxo de calor e os modelos de fluidos de cordas supercondutoras [58]. Em particular, investigar-se-ia a obtenção de modelos destas a partir da interpretação de modelos de teorias de campos como meios materiais.

Por fim, as aplicações desse formalismo, como em geral, reduzem-se a procura de soluções de sistemas de equações diferenciais parciais não lineares. Na maioria das vezes é impossível encontrar soluções exatas para tais sistemas, o que nos deixa com a alternativa de tratarmos os modelos em questão (p. e. estrelas, galáxias, modelos cosmológicos, etc..., construídos a partir de modelos de campos) através dos métodos numéricos já utilizados na área da relatividade numérica [59].

APÊNDICE A

O FORMALISMO DO SUPERESPAÇO E OS SUPERCAMPOS: O MODELO DE WESS-ZUMINO

A fim de sermos capazes de construir modelos supersimétricos nos quais a supersimetria é prontamente verificada, como no caso da invariança de Lorentz no eletromagnetismo, precisamos do formalismo dos supercampos introduzido por A. Salam e J. Strathdee [44]. Para obtermos tal formalismo faz-se necessário estender o espaço-tempo quadridimensional usual para o chamado *superespaço*.

Por questões de simplicidade, adotaremos no que segue, como base para a formulação da supersimetria no superespaço, uma variedade espaço-temporal plana (de Minkowski). A generalização para variedades pseudo-Riemannianas é imediata.

Elementos do superespaço são as *supercoordenadas* (x^{μ}, ε_a; μ = 0,1,2,3 e a = 1,2,3,4), onde x^{μ} são as quatro coordenadas espaço-temporais usuais e ε_a são quatro números de Grassman anticomutantes e independentes de x^{μ}, satisfazendo a condição de Majorana ($\varepsilon^c=\varepsilon$, onde $\varepsilon^c\equiv C\bar{\varepsilon}^T$, $\bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon^{\dagger}\gamma^0$ e C é a matriz de conjugação de carga). Assim, o superespaço resultante possui oito dimensões.

Um supercampo Φ em geral é uma função (operador) definido no superespaço. Sua expansão em série de potências de ε (= {ε_a}) é finita [ε_a são números de Grassmann anticomutantes: $(\bar{\varepsilon}\varepsilon)^n=0$, para n > 2, $\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\varepsilon = 0$, $(\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^5\varepsilon)^2 = (\bar{\varepsilon}\varepsilon)^2$].

$$\Phi(x,\varepsilon) = A(x) + \bar{\varepsilon}\phi(x) + \bar{\varepsilon}\varepsilon F(x) + i(\bar{\varepsilon}\gamma^5\varepsilon)G(x) + (\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^5\varepsilon)V_{\mu}(x)$$
$$+ (\bar{\varepsilon}\varepsilon)\bar{\varepsilon}\kappa(x) + (\bar{\varepsilon}\varepsilon)(\bar{\varepsilon}\varepsilon)D(x), \qquad \text{(A1)}$$

onde $A(x)$, $F(x)$, $D(x)$, $G(x)$, $V_{\mu}(x)$, $\phi(x)$ e $\kappa(x)$ são chamados de campos componentes, e onde temos que: $A(x)$, $F(x)$, $D(x)$ são campos escalares complexos; $G(x)$ é um campo complexo pseudo-escalar; $V_{\mu}(x)$ é um campo vetorial (de Lorentz); $\phi(x)$ e $\kappa(x)$ são quadrispinores.

Apesar da expansão (A1) ser aparentemente simples, temos que algumas características dos supercampos (como a quiralidade) são mais facilmente descritas se utilizarmos a formulação de Weyl para os spinores, em termos das matrizes de Pauli, ao invés da formulação em termos das matrizes de Dirac como em (A1). Na formulação de Weyl escreve-se, por exemplo, $\varepsilon \equiv (\theta^{A}, \bar{\theta}_{\dot{A}})$, $A = 1, 2$; $\dot{A} = \dot{1}, \dot{2}$. Com essas novas supercoordenadas $(x^{\mu}, \theta^{A}, \bar{\theta}_{\dot{A}})$, a expansão em série de potências de θ^{A} e $\bar{\theta}_{\dot{A}}$ de um supercampo geral é dada por [41,42]

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x) + \theta\varphi(x) + \bar{\theta}\,\bar{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) + (\bar{\theta}^2)\theta\psi(x) +$$
$$+ (\theta^2)\bar{\theta}\,\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\sigma^{\mu}\theta)V_{\mu}(x) + (\bar{\theta}^2)(\theta^2)d(x), \qquad \text{(A2)}$$

onde os campos componentes têm as seguintes características: $f(x)$, $m(x)$, $n(x)$ são campos escalares ou pseudo-escalares complexos; $d(x)$ é um campo escalar real; $V_{\mu}(x)$ é um campo vetorial de Lorentz; $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ são spinores de Weyl "left-handed"; $\bar{\psi}(x)$ e $\bar{\varphi}(x)$ são spinores de Weyl "right-handed" (ver a seguir).

As leis de transformação para os supercampos são [44,41,42, 43]

$$\delta_S f(x) = \alpha\varphi(x) + \bar{\alpha}\,\bar{\chi}(x),$$
$$\delta_S \varphi_A(x) = 2\alpha_A m(x) + (\sigma^\mu\bar{\alpha})_A[i\partial_\mu f(x) + V_\mu(x)],$$
$$\delta_S \bar{\chi}_{\dot{A}}(x) = 2\bar{\alpha}_{\dot{A}} m(x) - (\alpha\sigma^\mu)_{\dot{A}}[i\partial_\mu f(x) - V_\mu(x)],$$
$$\delta_S m(x) = \bar{\alpha}\,\bar{\lambda}(x) - i(\partial_\mu\varphi(x))\sigma^\mu\bar{\alpha}/2,$$
$$\delta_S n(x) = \alpha\chi(x) + i(\alpha\sigma^\mu\partial_\mu\varphi(x))/2,$$
$$\delta_S V_\mu(x) = \alpha\sigma_\mu\bar{\lambda}(x) + \psi(x)\sigma_\mu\bar{\alpha} + i\partial_\mu[\alpha\varphi(x) - \bar{\chi}(x)\bar{\alpha}],$$
$$\delta_S \bar{\lambda}_{\dot{A}}(x) = 2\bar{\alpha}_{\dot{A}} d(x) + i\alpha_{\dot{A}}\partial_\mu V^\mu(x)/2 - i(\alpha\sigma^\mu)_{\dot{A}}\partial_\mu m(x),$$
$$\delta_S \psi_A(x) = 2\alpha_A d(x) - i\alpha_A\partial_\mu V^\mu(x)/2 + i(\sigma^\mu\bar{\alpha})_A\partial_\mu n(x),$$
$$\delta_S d(x) = i[\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\alpha} + \alpha\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(x)]/2. \qquad \text{(A3)}$$

Note-se que $\delta_S d(x)$ é uma derivada total (divergência total), fato que sugere ser possível tomarmos a componente d(x) de um determinado supercampo como sendo a densidade Lagrangeana para um dado modelo supersimétrico associado a tal supercampo.

Para a construção de Lagrangeanas supersimétricas devemos primeiramente calcular explicitamente os ditos supercampos. Uma classe importante de tais supercampos (para a teoria de partículas elementares) são os chamados campos chirais ou supercampos escalares. Esses campos têm uma chiralidade definida, o que na linguagem do superespaço consiste nas condições de vínculo

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = 0, \qquad \text{(A4a)}$$
$$D^A\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = 0; \qquad \text{(A4b)}$$

onde

$$\bar{D}_{\dot{A}} = -\,\partial/\partial\theta^{\dot{A}} - i\theta^B\sigma^\mu_{B\dot{A}}\partial_\mu,$$

$$D_A = \partial/\partial\theta^A + i\sigma^{\mu}_{A\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{A}}\partial_\mu, \tag{A5}$$

definem a "derivação covariante" no superespaço. O supercampo que satisfaz (A4a) é chamado *right-handed*, enquanto que ele é *left-handed* se satisfaz a equação (A4b).

Os supercampos quirais *left-handed* e *right-handed*, os quais podem ser construídos facilmente [41], são dados respectivamente por

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = A(x) + i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_\mu A(x) - \theta^2\bar{\theta}^2\Box A(x) + \sqrt{2}\,\theta\psi(x)$$
$$+ \theta^2F(x) - i\,\theta^2(\partial_\mu\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu}\bar{\theta})/\sqrt{2}, \tag{A6a}$$
$$\Phi^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta}) = \bar{A}(x) - i(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\partial_\mu\bar{A}(x) - \theta^2\bar{\theta}^2\Box\bar{A}(x) + \sqrt{2}\;\bar{\theta}\;\bar{\psi}(x)$$
$$+ \bar{\theta}^2\bar{F}(x) + i\bar{\theta}^2[\theta\sigma^{\mu}\partial_\mu\bar{\psi}(x)]/\sqrt{2}; \tag{A6b}$$

onde os campos componetes $A(x)$, $\psi(x)$ e $F(x)$ têm as características definidas em (A2). O supercampo definido em (A6b) é na verdade o hermitiano conjugado daquele definido em (A6a); p. e., $\bar{A}(x)$ é o complexo conjugado de $A(x)$.

Uma outra característica importante é que produtos de supercampos chirais são ainda supercampos chirais, ou seja, se Φ_i e Φ_j satisfazem (A4a), então

$$\bar{D}_{\dot{A}}(\Phi_i\Phi_j) = (\bar{D}_{\dot{A}}\Phi_i)\Phi_j + \Phi_i(\bar{D}_{\dot{A}}\Phi_j) = 0,$$

pois $\bar{D}_{\dot{A}}$ (assim como D_A) é um operador linear. Logo $\Phi_i\Phi_j$ (e $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$, e etc ...) é também um supercampo chiral *left-handed*.

Uma vez definidos esses campos, podemos construir Lagrangeanas supersimétricas a partir deles. Porém, para isso precisamos produtos do tipo $\Phi_i^\dagger \Phi_j$ (a Lagrangeana precisa ser hermitiana). Vamos apenas escrever a componente de $\theta^2\bar{\theta}^2$ (a qual é candidata à Lagrangeana) do produto $\Phi_i^\dagger \Phi_i$.

$$\Phi_i^\dagger \Phi_i \Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \partial_\mu \bar{A}(x)\partial^\mu A(x) + i[\psi_i(x)\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i(x) - \partial_\mu \psi_i(x)\sigma^\mu \bar{\psi}_i(x)]/2$$
$$+ \bar{F}_i(x)F_i(x) + \text{divergências totais.} \tag{A7}$$

A ação supersimétrica e renormalizável mais geral é dada por (ver [41,42,43,44])

$$\mathcal{A} = \int d^4x d^4\theta \ \mathcal{L},$$

onde

$$\mathcal{L} = \Phi_i^\dagger \Phi_i + [\lambda_i \Phi_i + m_{ij}\Phi_i \Phi_j/2 + g_{ijk}\Phi_i \Phi_j \Phi_k/3]\bar{\theta}^2 +$$
$$+ [\bar{\lambda}_i \Phi_i^\dagger + \bar{m}_{ij}\Phi_i^\dagger \Phi_j^\dagger/2 + \bar{g}_{ijk}\Phi_i^\dagger \Phi_j^\dagger \Phi_k^\dagger/3]\theta^2; \tag{A8}$$

onde soma-se sobre todos os índices repetidos e i, j, k = 1, 2, ..., N; sendo N o número de supercampos chirais. A integral $\int d^4\theta \equiv \int d^2\theta d^2\bar{\theta}$ sobre $\mathcal{L}$ é apenas um "projetor" que projeta $\mathcal{L}$ sobre $\theta^2\bar{\theta}^2$, ou seja, toma somente a componente "d(x)" de $\mathcal{L}$ [cf. equação (A2)].

A ação resultante é

$$\mathcal{A} = \int d^4x \ \mathcal{L}_d, \tag{A9}$$

onde

$$\mathcal{L}_d = \partial_\mu \bar{A}(x)\partial^\mu A(x) + i[\psi_i(x)\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i(x) - \partial_\mu \psi_i(x)\sigma^\mu \bar{\psi}_i(x)]/2$$

$$
\begin{aligned}
&-m_{ij}\psi_i(x)\psi_j(x)/2 - \overline{m}_{ij}\overline{\psi}_i(x)\overline{\psi}_j(x)/2 - g_{ijk}\psi_i(x)\psi_j(x)A_k(x)\\
&-\overline{g}_{ijk}\overline{\psi}_i(x)\overline{\psi}_j(x)\overline{A}_k(x) + [m_{ik}A_i(x) + g_{ijk}A_i(x)A_j(x)]F_k(x)\\
&+[\overline{m}_{ik}\overline{A}_i(x) + \overline{g}_{ijk}\overline{A}_i(x)\overline{A}_j(x)]\overline{F}_k(x) + \overline{F}_i(x)F_i(x) + \lambda_i F_i(x)\\
&+ \overline{\lambda}_i \overline{F}_i(x).
\end{aligned}
\tag{A10}
$$

Esta é a forma "off-shell" da ação, a qual envolve os campos auxiliares $F_i(x)$. Tais campos podem ser eliminados com a ajuda das equações de movimento, fornecendo a forma "on-shell" da ação. Considere-se para isso as equações de Euler-Lagrange

$$
\partial\mathcal{L}/\partial F_i - \partial_\mu\left[\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu F_i)\right] = 0 \Longrightarrow \partial\mathcal{L}/\partial F_i = 0.
$$

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_i(x) &= -\lambda_i - m_{ij}A_j(x) - g_{ijk}A_j(x)A_k(x),\\
F_i(x) &= -\overline{\lambda}_i - \overline{m}_{ij}\overline{A}_j(x) - \overline{g}_{ijk}\overline{A}_j(x)\overline{A}_k(x).
\end{aligned}
\tag{A11}
$$

Substituindo (A11) em (A10) obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_d = &\ \partial_\mu\overline{A}_i(x)\partial^\mu A_i(x) + i[\psi_i(x)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i(x) - \partial_\mu\psi_i(x)\sigma^\mu\overline{\psi}_i(x)]/2 +\\
&-m_{ij}\psi_i(x)\psi_j(x) - \overline{m}_{ij}\overline{\psi}_i(x)\overline{\psi}_j(x) - g_{ijk}\psi_i(x)\psi_j(x)A_k(x) -\\
&-\overline{g}_{ijk}\overline{\psi}_i(x)\overline{\psi}_j(x)\overline{A}_k(x) - V(A_i,\overline{A}_j),
\end{aligned}
\tag{A12}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
V(A_i,A_j) \equiv \overline{F}_j(x)F_j(x) = &\ \overline{\lambda}_i\lambda_i + \lambda_i\overline{m}_{ij}\overline{A}_j(x) + \overline{\lambda}_i m_{ij}A_j(x) +\\
&+ \overline{\lambda}_i g_{ijk}A_j(x)A_k(x) + \lambda_i\overline{g}_{ijk}\overline{A}_j(x)\overline{A}_k(x) + m_{ij}\overline{m}_{ik}A_j(x)\overline{A}_k(x) +\\
&+ m_{ij}\overline{g}_{ikl}A_j(x)\overline{A}_k(x)\overline{A}_l(x) + \overline{m}_{ij}g_{ikl}\overline{A}_j(x)A_k(x)A_l(x) +
\end{aligned}
$$

$$+ g_{ijk}\bar{g}_{lln}A_j(x)A_k(x)\bar{A}_l(x)\bar{A}_n(x). \qquad \text{(A13)}$$

O caso mais simples, em que temos somente um supercampo chiral Φ, é conhecido como o modelo de Wess-Zumino [19,40], onde

$$\mathcal{L}_d = \partial_\mu\bar{A}(x)\partial^\mu A(x) + i[\psi(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) - \partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\psi}(x)]/2 - m\psi(x)\psi(x) -$$
$$- m\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x) - g\psi(x)\psi(x)A(x) - g\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x)\bar{A}(x) - V(A,\bar{A}), \qquad \text{(A14)}$$

$$V(A,A) \equiv \bar{F}(x)F(x) = \lambda^2 + \lambda m[\bar{A}(x)+A(x)] + \lambda g[A(x)A(x)+\bar{A}(x)\bar{A}(x)] +$$
$$+ m^2A(x)\bar{A}(x) + mg[A(x)\bar{A}(x)\bar{A}(x) + \bar{A}(x)A(x)A(x)] +$$
$$+ g g\bar{A}(x)A(x)\bar{A}(x)A(x). \qquad \text{(A15)}$$

Para obtermos (A14) e (A15) a partir de (A12) e (A13) tomamos $m_{ij} \equiv m = \bar{m}$, $\lambda_i \equiv \lambda = \bar{\lambda}$, $g_{ijk} \equiv g = \bar{g}$.

Se substituirmos $A(x) \longrightarrow [A(x) + iB(x)]/\sqrt{2}$ e $g \longrightarrow \sqrt{2}g$ nas equações (A14) e (A15), e notando que $i[\psi(x)\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) - \partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\psi}(x)]/2 = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$ [onde $\Psi \equiv (\psi^A,\bar{\psi}_{\dot{A}})^t$], encontra-se que (A14) se reduz à equação (4.1) do capítulo IV, a qual é exatamente a Lagrangeana de Wess-Zumino.

Nosso objetivo é, em conexão com o discutido na seção 4.2, generalizar o modelo de Wess-Zumino adicionando termos supersimétricos [contendo os campos A, $\bar{A}$, ψ, e $\bar{\psi}$ (ou A, B e Ψ)], os quais dêem alguma contribuição ao TEM que não seja identicamente nula (quando substituímos spinores anticomutantes por spinores comutantes).

Para construir termos manifestamente supersimétricos devemos utilizar os supercampos chirais. Por sua vez, o supercampo Φ, definido por A, ψ e F, define uma representação irredutível da álgebra "super-Poincaré". Então é impossível construir um segundo supercampo Φ_2, a partir dos mesmos A, ψ e F, que não seja igual ao dado pelas equações (A6a) e (A6b). Dessa forma, nossa única possibilidade é a de tomarmos na Lagrangeana novos termos [além dos já considerados na construção da Lagrangeana (A14)] contendo combinações do supercampo Φ [eq. (A6a)] e seu hermitano conjugado [eq. (A6b)].

Depois de um pouco de investigação, vemos que os termos interessantes são os que envolvem produtos de ψ com derivadas de A, e vice-versa. Tais contribuições somente decorrem de produtos do tipo $(\Phi^\dagger\Phi^\dagger\Phi^\dagger\ldots)(\Phi\Phi\Phi\ldots)$. Assim, vamos tomar a Lagrangeana (A8), cancelar os índices como acima e, por simplicidade, fazer $m = \lambda = g = 0$. Então, adicionemos [à Lagrangeana da forma (A8)] um termo do tipo $\Phi^\dagger\Phi^\dagger\Phi + \Phi^\dagger\Phi\Phi$. Ou seja, consideremos a seguinte Lagrangeana

$$\mathscr{L} = \Phi^\dagger\Phi + \kappa[\Phi^\dagger\Phi^\dagger\Phi + \Phi\Phi\Phi^\dagger]/2, \tag{A16}$$

com Φ dado por (A6a), e onde κ é uma constante dimensional.

Tomando $\int d^4x d^4\theta \mathscr{L} \equiv \mathscr{A}$, com $\mathscr{L}$ dado por (A16) encontramos

$$\mathscr{A} = \int d^4x\Big[[1 + \kappa(A+\overline{A})][\partial_\mu\overline{A}\partial^\mu A + i(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} - \partial_\mu\psi\sigma^\mu\overline{\psi})/2 + \overline{F}F] \\ + \kappa[i\psi\sigma^\mu\overline{\psi}(\partial_\mu A - \partial_\mu\overline{A}) - \psi\psi\overline{F} - \overline{\psi}\,\overline{\psi}F]/2\Big]. \tag{A17}$$

As equações de Euler-Lagrange para F e $\overline{F}$ fornecem

$$2[1 + \kappa(A+\overline{A})]F - \kappa\psi\psi = 0,$$

$$2[1 + \kappa(A+\overline{A})]\overline{F} - \kappa\overline{\psi}\,\overline{\psi} = 0.$$

Substituindo essas equações em (A17) resulta

$$\mathcal{A} = \int d^4x\big[[1 + \kappa(A+\overline{A})][\partial_\mu\overline{A}\partial^\mu A + i(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} - \partial_\mu\psi\sigma^\mu\overline{\psi})/2] + i\kappa\psi\sigma^\mu\overline{\psi}(\partial_\mu A - \partial_\mu\overline{A})/2 - \kappa^2\overline{\psi}\ \overline{\psi}\psi\psi/4[1+\kappa(A+\overline{A})]\big]. \tag{A18}$$

Note-se que a parte da ação (A17) que não contém κ é exatamente a ação de Wess-Zumino na forma "on-shell" (A14), com $m = 0$ e $g = 0$. Obseve-se, no entanto, que a dinâmica dos campos obtida a partir da ação completa (A17) é muito mais complexa daquela dos campos do modelo de Wess-Zumino original. Tal Lagrangeana é, na verdade, um caso especial dos chamados modelos σ supersimétricos não linerares (ver p. e. [23]).

Tais modelos σ são descritos pela seguinte Lagrangeana (ver a seção 4.4)

$$\mathcal{L}^{\sigma}_{SS} = H_{i\bar{j}}\big[\partial_\mu A^i\partial^\mu\overline{A}^j + i(\psi^i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}^j - \partial_\mu\psi^i\sigma^\mu\overline{\psi}^j)/2\big] + R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\overline{\psi}^j\overline{\psi}^l)(\psi^i\psi^k)/4 + i\big[(\partial H_{i\bar{j}}/\partial A^k)(\psi^i\sigma^\mu\overline{\psi}^j\partial_\mu A^k - (\partial H_{i\bar{j}}/\partial\overline{A}^k)(\psi^i\sigma^\mu\overline{\psi}^j\partial_\mu\overline{A}^k)\big]/2, \tag{A19}$$

onde $R_{i\bar{j}k\bar{l}} \equiv R_{\bar{j}ik\bar{l}}(A,\overline{A}) = (\partial^2 H_{i\bar{j}}/\partial A^k\partial\overline{A}^l) - H^{m\bar{n}}(\partial H_{i\bar{n}}/\partial A^k)(\partial H_{m\bar{j}}/\partial\overline{A}^l)$, são as componentes do tensor de curvatura.

Agora, se cancelarmos todos o índices de (A19), podemos escrever

$H_{i\bar{j}} \equiv H = 1 + \kappa(A+\overline{A})$; $\Longrightarrow H^{i\bar{j}} \equiv H^{-1} = [1+\kappa(A+\overline{A})]^{-1}$, $\partial H_{i\bar{j}}/\partial A^k \equiv \partial H/\partial A = \kappa$, $\partial H_{i\bar{j}}/\partial\overline{A}^k \equiv \partial H/\partial\overline{A} = \kappa$, $R_{\bar{j}ik\bar{l}} \equiv R = -\kappa^2/[1+\kappa(A+\overline{A})]$.

Com esses resultados, vemos que a equação (A18) se escreve

$$\mathcal{L}^{\sigma}_{ss} = H\left[\partial_\mu A\partial^\mu \bar{A} + i(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi})/2\right] + R(\bar{\psi}\,\bar{\psi})(\psi\psi)/4$$
$$+ i\left[(\partial H/\partial A)(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}\partial_\mu A - (\partial H/\partial\bar{A})(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}\partial_\mu\bar{A})\right]/2$$
$$=[1+\kappa(A+\bar{A})]\left[\partial_\mu A\partial^\mu\bar{A} + i(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi})/2\right] + i\kappa(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}(\partial_\mu A - \partial_\mu\bar{A})/2$$
$$- \kappa^2(\bar{\psi}\,\bar{\psi})(\psi\psi)[1+\kappa(A+\bar{A})]^{-1}/4, \qquad \text{(A20)}$$

que é exatamente a Lagrangeana (A18) por nós construída através de outros argumentos.

Parece então que generalizações supersimétricas do modelo de Wess-Zumino, por mais simples que sejam, podem ser obtidas a partir de modelos σ supersimétricos. É importante observar, ainda, que "termos de interação", como os das equações (4.18a) e (4.18b) [seção 4.2] do capítulo IV, não são supersimétricos isoladamente. Isto pode ser visto notando, por exemplo, que o termo $i\kappa(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}(\partial_\mu A-\partial_\mu\bar{A})$ da Lagrangeana (A18) corresponde exatamente ao da equação (4.18a), pois temos que $i\kappa\psi\sigma^\mu\bar{\psi}(\partial_\mu A-\partial_\mu\bar{A}) = \sqrt{2}\,\kappa(\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\Psi)\partial_\mu B$, e que $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = 0$. Assim,

$$i\kappa\sqrt{2}\;\bar{\Psi}(\partial_\mu A - i\gamma^5\partial_\mu B)\gamma^\mu\Psi = i\kappa\psi\sigma^\mu\bar{\psi}(\partial_\mu A-\partial_\mu\bar{A}), \qquad \text{(A21)}$$

onde fizemos, como antes, as substituições $A \longrightarrow [A + iB]/\sqrt{2}$ e $\Psi \equiv (\psi^A,\bar{\psi}_{\dot{A}})^t$]. Observa-se então que (A18) contém o termo procurado [(A21)], mas não como único termo adicional à Lagrangeana de Wess-Zumino. Isto, portanto, responde à questão feita no capítulo IV, acerca de que tipo de termos, como o da equação (A21), poderiam ser adicionados à Lagrangeana de Wess-Zumino sem quebrar a (super) simetria do modelo.

APÊNDICE B

SOBRE A INTERPRETAÇÃO DOS CAMPOS DE DIRAC, WEYL E DE RARITA-SCHWINGER COMO MEIOS MATERIAIS

Vamos resumir aqui o tratamento dos campos spinoriais dentro do formalismo das tetradas. Em especial, trataremos dos campos de Dirac, de Weyl e de Rarita-Schwinger no chamado formalismo de Newman e Penrose [60]. Para isso, escreveremos suas equações de campo e os tensores de energia momento (TEM) a eles associados (sobre um espaço-tempo pseudo-Riemanniano) dentro de tal formalismo, com vistas a dar uma interpretação de tais campos, ou dos TEM's por eles produzidos, como TEM's de meios contínuos. Já são conhecidos vários trabalhos para o caso do campo de Dirac [12], em especial para neutrinos [18,21,22,33,36,45,61,62,63,64,65], em relatividade geral, aos resultados dos quais pode ser dada uma tal interpretação como meios materiais. Isto foi feito, por exemplo, por Wills [18] para o caso de neutrinos massivos. Trataremos sucintamente do estudo geral do TEM de cada um desses campos, observando os vários tipos de materiais que podem ser obtidos a partir deles.

Naturalmente, assumiremos que todos os campos spinoriais definidos no que segue sejam comutantes. Ou seja, todas as componentes de todos os campos spinoriais envolvidos devem comutar entre si.

1 - O Campo de Dirac

A ação para o campo de Dirac em um espaço-tempo curvo é dada por

$$\mathscr{A} = a\int dx^4\sqrt{-g}\,\mathscr{L}, \tag{B1}$$

sendo a uma constante e onde

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} - m)\Psi, \tag{B2}$$

com $g \equiv \det(g^{\mu\nu})$, $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\gamma^{0}$ ($\Psi^{\dagger}$ é o hermitiano conjugado de Ψ) e γ^{μ} são as matrizes de Dirac generalizadas, as quais satisfazem a seguinte álgebra (de Clifford)

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}. \tag{B3}$$

No caso de um espaço plano [$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$], as matrizes γ_{μ} são as conhecidas matrizes de Dirac (constantes). Para o caso geral elas devem ser funções das coordenadas.

Para estudarmos o campo de Dirac vamos utilizar a representação de Weyl. Nesse caso, a Lagrangeana (B2) se escreve

$$\mathscr{L} = i\psi\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\psi} + i\varphi\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\varphi} - m\psi\varphi - m\bar{\psi}\,\bar{\varphi} \tag{B4}$$

Dessa forma, a ação (B1) produz o seguinte TEM para o campo de Dirac

$$T_{\mu\nu} = ia\Big[\psi\sigma_{\mu}\nabla_{\nu}\bar{\psi} - \nabla_{\nu}\psi\sigma_{\mu}\bar{\psi} + \varphi\sigma_{\mu}\nabla_{\nu}\bar{\varphi} - \nabla_{\mu}\varphi\sigma_{\nu}\bar{\varphi} + \psi\sigma_{\nu}\nabla_{\mu}\bar{\psi} - \nabla_{\mu}\psi\sigma_{\nu}\bar{\psi}$$
$$+ \varphi\sigma_{\nu}\nabla_{\mu}\bar{\varphi} - \nabla_{\mu}\varphi\sigma_{\nu}\bar{\varphi}\Big]. \tag{B5}$$

sendo que a equação de Dirac se escreve

$$i\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\varphi} - m\psi = 0, \qquad i\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - m\bar{\varphi} = 0. \tag{B6}$$

De acordo com o formalismo de Newman e Penrose [60] vamos introduzir a base $\{o, \ell\}$ do espaço dos spinores, tal que

$$o^{A}\ell_{A} = -\ell^{A}o_{A} = 1; \qquad \bar{o}^{\dot{A}}\bar{\ell}_{\dot{A}} = -\bar{\ell}^{\dot{A}}\bar{o}_{\dot{A}} = 1. \tag{B7}$$

Definimos então a seguinte tetrada

$$l^{\mu} = o\sigma^{\mu}\bar{o} \equiv \sigma^{\mu}_{A\dot{B}}o^{A}\,\bar{o}^{\dot{B}}; \qquad n^{\mu} = \ell\sigma^{\mu}\bar{\ell} \equiv \sigma^{\mu}_{A\dot{B}}\ell^{A}\,\bar{\ell}^{\dot{B}};$$
$$m^{\mu} = o\sigma^{\mu}\bar{\ell} \equiv \sigma^{\mu}_{A\dot{B}}o^{A}\,\bar{\ell}^{\dot{B}}. \tag{B8}$$

de onde, depois de (B7) valem as seguintes identidades.

$$l^{\mu}l_{\mu} = m^{\mu}m_{\mu} = \bar{m}_{\mu}\bar{m}^{\mu} = n^{\mu}n_{\mu} = l^{\mu}m_{\mu} = l^{\mu}\bar{m}_{\mu} = n_{\mu}\bar{m}^{\mu} = n^{\mu}m_{\mu} = 0,$$
$$l^{\mu}n_{\mu} = -\bar{m}_{\mu}\bar{m}^{\mu} = 1. \tag{B9}$$

<u>OBS</u>: Por questões de simplicidade, usaremos aqui matrizes σ^{μ} que são, na verdade, as matrizes σ^{μ} definidas no apêndice A divididas pelo fator $\sqrt{2}$.

Assumindo que os spinores ψ^{A} e φ^{A} não são proporcionais podemos escrever

$$\psi^{A} = p\ \sigma^{A}; \qquad \varphi^{A} = f\ \ell^{A}, \tag{B10}$$

onde p e f são funções escalares complexas.

Com essas definições podemos escrever as equações de Dirac na forma

$$\begin{aligned}
i(Dp) &= i(\rho-\epsilon)p + m\bar{f},\\
(\delta p) &= (\tau-\beta)p,\\
i(\Delta f) &= i(\gamma-\mu)f - m\bar{p},\\
(\bar{\delta} f) &= (\alpha-\pi)f;
\end{aligned} \tag{B11}$$

sendo que o TEM (B5) se escreve

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = \Big[&A l_{\mu} l_{\nu} + 2B l_{(\mu} m_{\nu)} + 2\bar{B} l_{(\mu} \bar{m}_{\nu)} + 2C l_{(\mu} n_{\nu)} + 2H m_{(\mu} \bar{m}_{\nu)}\\
&+ E m_{\mu} m_{\nu} + \bar{E}\ \bar{m}_{\mu} \bar{m}_{\nu} + 2F m_{(\mu} n_{\nu)} + 2\bar{F}\ \bar{m}_{(\mu} \bar{n}_{\nu)} + G n_{\mu} n_{\nu} \Big],
\end{aligned} \tag{B12}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &\equiv T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 2ia[\bar{p}(\Delta p) - p(\Delta \bar{p}) + \bar{p}p(\gamma-\bar{\gamma})],\\
B &\equiv -T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = ia[-\bar{p}(\bar{\delta} p) + (2\bar{\tau}-\alpha)\bar{p}p - \bar{f}f\upsilon],\\
C &\equiv T_{\mu\nu} l^{\mu} n^{\nu} = ia[\bar{f}f(\mu-\bar{\mu}) + \bar{p}p(\rho-\bar{\rho}) - 2mi(pf + \bar{p}\ \bar{f}],\\
E &= T^{\mu\nu} \bar{m}_{\mu} \bar{m}_{\nu} = 2ia[\bar{f}f\lambda - \bar{p}p\bar{\sigma}],\\
F &= -T_{\mu\nu} l^{\mu} \bar{m}^{\nu} = ia[-f(\bar{\delta}\ \bar{f}) + \bar{f}f(\bar{\beta}-2\pi) + \bar{p}p\bar{\kappa}],\\
G &\equiv T_{\mu\nu} l^{\mu} l^{\nu} = 2ia[f(D\bar{f}) - \bar{f}(Df) + \bar{f}f(\epsilon-\bar{\epsilon})],\\
H &= T_{\mu\nu} m^{\mu} \bar{m}^{\nu} = ia[\bar{p}p(\rho-\bar{\rho}) + \bar{f}f(\mu-\bar{\mu})];
\end{aligned} \tag{B13a}$$

onde κ, π, ε, ρ, λ, α, σ, μ, β, ν, γ, τ são os *spin coefficients* [60] e $(Df) \equiv l^{\mu}\nabla_{\mu}f$; $(\delta f) \equiv m^{\mu}\nabla_{\mu}f$; $(\bar{\delta}f) \equiv \bar{m}_{\mu}\nabla^{\mu}f$; $(\Delta f) \equiv n^{\mu}\nabla_{\mu}f$.

Para facilitar a análise do TEM (B12), podemos usar a tetrada l^{μ}, n^{μ}, x^{μ} e y^{μ}, com $x^{\mu} \equiv (m^{\mu} + \bar{m}^{\mu})/\sqrt{2}$; $y^{\mu} \equiv -i(m^{\mu} - \bar{m}^{\mu})/\sqrt{2}$. Com isso, a relação (B12) se escreve

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = {} & A l_{\mu}l_{\nu} + G n_{\mu}n_{\nu} + 2C l_{(\mu}n_{\nu)} + [\mathcal{R}e(E)+G]x_{\mu}x_{\nu} + [G-\mathcal{R}e(E)]y_{\mu}y_{\nu} + \\
& + 2\sqrt{2}\,\mathcal{R}e(B)l_{(\mu}x_{\nu)} + 2\sqrt{2}\,\mathcal{I}m(B)l_{(\mu}y_{\nu)} + 2\sqrt{2}\,\mathcal{R}e(F)n_{(\mu}x_{\nu)} + \\
& + 2\sqrt{2}\,\mathcal{I}m(F)n_{(\mu}n_{\nu)} + 2\mathcal{I}e(E)x_{(\mu}y_{\nu)},
\end{aligned}
\tag{B14}
$$

onde p.e. $\mathcal{R}e(E)$ e $\mathcal{I}m(E)$ são a parte real e a parte imaginária da função complexa E, respectivamente.

Para completar, vamos lembrar que, tomando um *boost* adequado sobre a tetrada nula $(l^{\mu}, m^{\mu}, \bar{m}^{\mu}, n^{\mu})$, pode-se fazer os complexos escalares p e f iguais, de forma que $\bar{p}p = \bar{f}f$. Usando esse fato, as equações (B13a) se escrevem

$$
\begin{aligned}
A &\equiv T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = 2ia[\bar{p}(\Delta p) - p(\Delta\bar{p}) + \bar{p}p(\gamma-\bar{\gamma})],\\
B &\equiv -T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = ia[-\bar{p}(\bar{\delta}p) + (2\bar{\tau}-\alpha-\upsilon)\bar{p}p\ ],\\
C &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}n^{\nu} = ia[p\bar{p}(\mu-\bar{\mu}+\rho-\bar{\rho}) - 2mi(pp + \bar{p}\ \bar{p}],\\
E &= T^{\mu\nu}\bar{m}_{\mu}\bar{m}_{\nu} = 2ia[\bar{p}p(\lambda - \bar{\sigma})],\\
F &= -T_{\mu\nu}l^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia[-p(\bar{\delta}\ \bar{p}) + \bar{p}p(\bar{\beta}-2\pi+\bar{\kappa})],\\
G &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = 2ia[p(D\bar{p}) - \bar{p}(Dp) + \bar{p}p(\varepsilon-\bar{\varepsilon})],\\
H &= T_{\mu\nu}m^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia[\bar{p}p(\rho-\bar{\rho}+\mu-\bar{\mu})].
\end{aligned}
\tag{B13b}
$$

2 - O Campo de Weyl

O campo spinorial de Weyl nada mais é do que o campo de Dirac sem massa. Ou seja, depois das equações (B6), vemos que o campo de Weyl é definido por dois spinores ψ^A e φ^A que satisfazem as equações

$$i\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\bar{\varphi} = 0, \qquad i\sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi = 0. \tag{B15}$$

Tais equações, quando escritas no formalismo de Newman-Penrose descrito acima para o campo de Dirac, resultam na forma

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}p) &= (\rho-\varepsilon)p \\
(\delta p) &= (\tau-\beta)p, \\
(\Delta f) &= (\gamma-\mu)f, \\
(\bar{\delta}f) &= (\alpha-\pi)f;
\end{aligned} \tag{B16}$$

enquanto que o TEM para tal campo é escrito como em (B12), somente que neste caso os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &\equiv \mathrm{T}_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = 2ia[\bar{p}(\Delta p) - p(\Delta\bar{p}) + \bar{p}p(\gamma-\bar{\gamma})], \\
\mathrm{B} &\equiv -\mathrm{T}_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = ia[-\bar{p}(\bar{\delta}p) + (2\bar{\tau}-\alpha)\bar{p}p - \bar{f}f\upsilon], \\
\mathrm{C} &\equiv \mathrm{T}_{\mu\nu}l^{\mu}n^{\nu} = ia[\bar{f}f(\mu-\bar{\mu}) + \bar{p}p(\rho-\bar{\rho}) \\
\mathrm{E} &= \mathrm{T}^{\mu\nu}\bar{m}_{\mu}\bar{m}_{\nu} = 2ia[\bar{f}f\lambda - \bar{p}p\bar{\sigma}], \\
\mathrm{F} &= -\mathrm{T}_{\mu\nu}l^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia[-f(\bar{\delta}\ \bar{f}) + \bar{f}f(\bar{\beta}-2\pi) + \bar{p}p\bar{\kappa}], \\
\mathrm{G} &\equiv \mathrm{T}_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = 2ia[f(\mathrm{D}\bar{f}) - \bar{f}(\mathrm{D}f) + \bar{f}f(\varepsilon-\bar{\varepsilon})], \\
\mathrm{H} &= \mathrm{T}_{\mu\nu}m^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia[\bar{p}p(\rho-\bar{\rho}) + \bar{f}f(\mu-\bar{\mu})].
\end{aligned} \tag{B17}$$

Note-se, então, que o estudo a respeito da interpretação do TEM associado ao campo de Weyl geral é praticamente idêntico ao caso do campo de Dirac. Contudo, o TEM do campo de Weyl tem traço nulo, devido às suas equações de campo. Temos, porém, casos especiais como o dos neutrinos sem massa, os quais são descritos por spinores que satizfazem as equações de Weyl (B15) e que, além disso, preenchem a condição $\varphi^A = i\psi^A$. Casos como esses são bastante mais simples do que a situação geral, sendo que as equações derivadas acima não se aplicam a eles devido ao fato dos campos φ^A e ψ^A serem propocionais. A seguir vemos como tratar esses casos particulares.

3 - Campos Nulos: Espinores de Majorana, Neutrinos, etc...

Vamos tratar agora do caso em que os spinores ψ^A e φ^A são proporcionais. Tais campos são "campos nulos", por satisfazerem a identidade $\bar{\Psi}\Psi = \psi\varphi + \bar{\psi}\,\bar{\varphi} = 0$ e por fornecerem um TEM que corresponde a um fluído nulo. Nesse caso, podemos tomar um dos spinores da base (por exemplo, o^A) e "alinhá-lo" com os campos spinoriais, de forma que podemos escrever

$$\psi^A = p\ o^A; \qquad \varphi = f\ o^A. \tag{B18}$$

Depois disso, a equação de Dirac resulta

$$
\begin{aligned}
Dp &= (\rho - \varepsilon)p,\\
Df &= (\rho - \varepsilon)f,\\
i(\delta p) &= i(\tau - \beta)p - m\bar{f},\\
i(\delta f) &= i(\tau - \beta)f - m\bar{p}.
\end{aligned}
\tag{B19}
$$

O tensor de energia-momento, por sua vez, toma a mesma forma (B12), onde agora os coeficientes são dados por

$$
\begin{aligned}
A &\equiv T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = 2ia[\bar{p}(\Delta p) - p(\Delta\bar{p}) + f(\Delta\bar{f}) - \bar{f}(\Delta f) + (\bar{f}f - \bar{p}p)(\bar{\gamma} - \gamma)],\\
B &\equiv -T_{\mu\nu}n^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia[\bar{f}(\bar{\delta}f) - \bar{p}(\bar{\delta}p) + (2\bar{\tau} - \alpha)(\bar{p}p - \bar{f}f)],\\
C &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}n^{\nu} = H = ia(\bar{f}f - \bar{p}p)(\bar{\rho} - \rho),\\
E &= T^{\mu\nu}\bar{m}_{\mu}\bar{m}_{\nu} = 2ia[\bar{f}f - \bar{p}p]\sigma,\\
F &= -T_{\mu\nu}l^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia(\bar{p}p - \bar{f}f)\bar{\kappa},\\
G &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = 0,\\
H &= T_{\mu\nu}m^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia(\bar{p}p - \bar{f}f)(\rho - \bar{\rho}).
\end{aligned}
\tag{B20}
$$

Ou seja, escrevendo o TEM na forma de (B14),

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = \Big[&A l_{\mu}l_{\nu} + Cn_{\mu}n_{\nu} + 2Cl_{(\mu}n_{\nu)} + [\Re e(E) + C)x_{\mu}x_{\nu} + [C - \Re e(E))y_{\mu}y_{\nu}\\
&+ 2\sqrt{2}\,\Re e(B)l_{(\mu}x_{\nu)} + 2\sqrt{2}\,\Im m(B)l_{(\mu}y_{\nu)} + 2\Im m(E)x_{(\mu}y_{\nu)}\Big],
\end{aligned}
\tag{B21}
$$

ou ainda, se usarmos o fato (ver mais acima) que podemos tomar $\bar{p}p = \bar{f}f$, temos

$$
\begin{aligned}
A &\equiv T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = 2ia[\bar{p}(\Delta p) - p(\Delta\bar{p}) + f(\Delta\bar{f}) - \bar{f}(\Delta f)],\\
B &\equiv -T_{\mu\nu}n^{\mu}\bar{m}^{\nu} = ia[\bar{f}(\bar{\delta}f) - \bar{p}(\bar{\delta}p)],\\
C &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}n^{\nu} = H = ia(\bar{f}f - \bar{p}p)(\bar{\rho} - \rho) = 0,
\end{aligned}
$$

$$E = T^{\mu\nu}\overline{m}_\mu\overline{m}_\nu = 2ia[\overline{f}f - \overline{p}p]\sigma = 0,$$
$$F = -T_{\mu\nu}l^\mu\overline{m}^\nu = ia(\overline{p}p - \overline{f}f)\overline{\kappa} = 0,$$
$$G \equiv T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = 0,$$
$$H = T_{\mu\nu}m^\mu\overline{m}^\nu = ia(\overline{p}p - \overline{f}f)(\rho-\overline{\rho}) = 0; \tag{B20b}$$

sendo que o TEM fica, então, na forma

$$T_{\mu\nu} = \left[A l_\mu l_\nu + 2\sqrt{2}\,\mathcal{R}e(B) l_{(\mu}x_{\nu)} + 2\sqrt{2}\,\mathcal{I}m(B) l_{(\mu}y_{\nu)}\right]. \tag{B21b}$$

Nesse caso particular, em que os dois spinores bidimensionais ψ e φ são proporcionais, a corrente spinorial $\Psi\gamma^\mu\Psi = (\overline{p}p + \overline{f}f)l^\mu$ é um vetor nulo, enquanto que o TEM tem traço nulo. Satisfazendo esta situação existem dois casos de particular interesse: i) o caso dos neutrinos (spinores que satisfazem as equações de Weyl: $\varphi^A = i\psi^A \Longrightarrow f = ip$) e ii) o caso dos spinores de Majorana ($\varphi^A = \psi^A \Longrightarrow f = p$). Para este último caso o tensor de energia-momento (B21b) é identicamente nulo, como se observa facilmente fazendo $f=p$ nas equações (B20b). Note-se que este mesmo resultado foi por nós obtido ao interpretarmos classicamente o TEM do modelo supersimétrico de Wess-Zumino (cf. capítulo 4).

4 - O Campo de Rarita-Schwinger

A Lagrangeana de Rarita-Schwinger é [66,67]

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_\nu(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\Psi^\nu - i\bar{\Psi}_\nu(\gamma^\nu\nabla_\mu + \gamma_\mu\nabla^\nu)\Psi^\mu + \bar{\Psi}_\nu\gamma^\nu(i\gamma^\mu\nabla_\mu + m)\gamma_\tau\Psi^\tau. \tag{B22}$$

Tal Lagrangeana, a qual foi proposta para descrever campos spinoriais de spin 3/2, produz as seguintes equações para o campo Ψ^ν

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\Psi^\nu = 0, \\ &\gamma^\nu\Psi_\nu = 0, \\ &\nabla^\nu\Psi_\nu = 0. \end{aligned} \tag{B23}$$

Essas equações, na representação de Weyl, se escrevem

$$\begin{aligned} &i\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\varphi}^\nu - m\psi^\nu = 0, \qquad && i\sigma^\mu\nabla_\mu\psi^\nu - m\bar{\varphi}^\nu = 0; \\ &\bar{\sigma}^\nu\psi_\nu = 0, && \sigma^\nu\bar{\varphi}_\nu = 0, \\ &\nabla^\nu\psi_\nu = 0, && \nabla^\nu\bar{\varphi}_\nu = 0. \end{aligned} \tag{B24}$$

O tensor de energia momento associado à Lagrangeana de Rarita-Schwinger (B22), levando-se em conta (B23), é dado por

$$T_{\mu\nu} = ia\left[\bar{\Psi}_\tau\gamma_\mu\nabla_\nu\Psi^\tau - \nabla_\nu\bar{\Psi}_\tau\gamma_\mu\Psi^\tau + \bar{\Psi}_\tau\gamma_\nu\nabla_\mu\Psi^\tau - \nabla_\mu\bar{\Psi}_\tau\gamma_\nu\Psi^\tau\right]. \tag{B25}$$

Ou, em termos da representação de Weyl

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = ia\Big[&\psi^\tau\sigma_\mu\nabla_\nu\bar{\psi}_\tau - \nabla_\nu\psi^\tau\sigma_\mu\bar{\psi}_\tau + \varphi^\tau\sigma_\mu\nabla_\nu\bar{\varphi}_\tau - \nabla_\mu\varphi^\tau\sigma_\nu\bar{\varphi}_\tau + \psi^\tau\sigma_\nu\nabla_\mu\bar{\psi}_\tau \\ &- \nabla_\mu\psi^\tau\sigma_\nu\bar{\psi}_\tau + \varphi^\tau\sigma_\nu\nabla_\mu\bar{\varphi}_\tau - \nabla_\mu\varphi^\tau\sigma_\nu\bar{\varphi}_\tau\Big]. \end{aligned} \tag{B26}$$

Da mesma forma que nos casos precedentes, podemos introduzir a tetrada (l^{μ}, m^{μ}, $\overline{m}^{\mu}$, n^{μ}). Sendo que podemos ainda definir

$$\psi^{A}_{\tau} = p_{\tau}\sigma^{A}; \qquad \varphi^{A}_{\tau} = f_{\tau}\ell^{A}. \tag{B27}$$

Com essas definições, o TEM (B26) toma a forma (B12), onde os coeficientes agora são definidos por

$$\begin{aligned}
A &\equiv T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = 2ia[\overline{p}_{\tau}(\Delta p^{\tau}) - p^{\tau}(\Delta\overline{p}_{\tau}) + p^{\tau}\overline{p}_{\tau}(\gamma-\overline{\gamma})],\\
B &\equiv -T_{\mu\nu}n^{\mu}\overline{m}^{\nu} = ia[-\overline{p}_{\tau}(\overline{\delta}p^{\tau}) + (2\overline{\tau}-\tau)p^{\tau}\overline{p}_{\tau} - f^{\tau}\overline{f}_{\tau}\upsilon],\\
C &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}n^{\nu} = ia[f^{\tau}\overline{f}_{\tau}(\mu-\overline{\mu}) + p^{\tau}\overline{p}_{\tau}(\rho-\overline{\rho}) - 2mi(p^{\tau}f_{\tau}+\overline{p}_{\tau}\overline{f}^{\tau}],\\
E &= T^{\mu\nu}\overline{m}_{\mu}\overline{m}_{\nu} = 2ia[\overline{f}_{\tau}f^{\tau}\lambda - \overline{p}_{\tau}p^{\tau}\overline{\sigma}],\\
F &= -T_{\mu\nu}l^{\mu}\overline{m}^{\nu} = ia[-f^{\tau}(\overline{\delta}\ \overline{f}_{\tau}) + f^{\tau}\overline{f}_{\tau}(\overline{\beta}-2\pi) + \overline{p}_{\tau}p^{\tau}\overline{\kappa}],\\
G &\equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = 2ia[f^{\tau}(D\overline{f}_{\tau}) - \overline{f}_{\tau}(Df^{\tau}) + f^{\tau}\overline{f}_{\tau}(\varepsilon-\overline{\varepsilon})],\\
H &= T_{\mu\nu}m^{\mu}\overline{m}^{\nu} = ia[p^{\nu}\overline{p}_{\nu}(\rho-\overline{\rho}) + f^{\nu}\overline{f}_{\nu}(\mu-\overline{\mu})].
\end{aligned} \tag{B28}$$

As equações de campo (B24), por sua vez, são escritas na forma seguinte

$$\begin{aligned}
i(Dp_{\nu}) &= i(\rho-\varepsilon)p_{\nu} + \overline{m}f_{\nu},\\
(\delta p_{\nu}) &= (\tau-\beta)p_{\nu},\\
i(\Delta f_{\nu}) &= i(\gamma-\mu)f_{\nu} - m\overline{p}_{\nu},\\
(\overline{\delta}f_{\nu}) &= (\alpha-\pi)f_{\nu};
\end{aligned} \tag{B29}$$

$$\begin{aligned}
&l_{\nu}p^{\nu} = 0 \quad (\text{ou } l_{\nu}\overline{p}^{\nu} = 0),\\
&n_{\nu}\overline{f}^{\nu} = 0 \quad (\text{ou } n_{\nu}f^{\nu} = 0),\\
&n_{\nu}p^{\nu} = 0 \quad (\text{ou } n_{\nu}\overline{p}^{\nu} = 0),\\
&\overline{m}_{\nu}\overline{f}^{\nu} = 0 \quad (\text{ou } m_{\nu}f^{\nu} = 0);
\end{aligned} \tag{B30}$$

$$p^{\nu}[\rho m_{\nu} + \sigma\overline{m}_{\nu} - \tau l_{\nu} - \kappa n_{\nu}] = 0,$$
$$f^{\nu}[\lambda m_{\nu} + \mu\overline{m}_{\nu} - \nu l_{\nu} - \pi n_{\nu}] = 0,$$
$$\nabla_{\nu}p^{\nu} + p^{\nu}[\alpha m_{\nu} + \beta\overline{m}_{\nu} - \gamma l_{\nu} - \varepsilon n_{\nu}] = 0,$$
$$\nabla_{\nu}f^{\nu} + f^{\nu}[\alpha m_{\nu} + \beta\overline{m}_{\nu} - \gamma l_{\nu} - \varepsilon n_{\nu}] = 0. \tag{B31}$$

Da mesma forma que para spinores de spin 1/2, podemos tratar o caso em que os vários spinores ψ^{A}_{τ} e φ^{A}_{τ}, para cada τ, são proporcionais. Os resultados são análogos aos obtidos na seção 3 acima. Ou seja, temos as seguintes equações, análogas à (B19), (B20) e (B21)

$$Dp^{\nu} = (\rho - \varepsilon)p^{\nu},$$
$$Df^{\nu} = (\rho - \varepsilon)f^{\nu},$$
$$i(\delta p^{\nu}) = i(\tau - \beta)p^{\nu} - m\overline{f}^{\nu},$$
$$i(\delta f^{\nu}) = i(\tau - \beta)f^{\nu} - m\overline{p}^{\nu}; \tag{B31}$$

$$T_{\mu\nu} = \Big[Al_{\mu}l_{\nu} + Cn_{\mu}n_{\nu} + 2Cl_{(\mu}n_{\nu)} + [\Re e(E)+C)x_{\mu}x_{\nu} + [C-\Re e(E))y_{\mu}y_{\nu}$$
$$+ 2\sqrt{2}\,\Re e(B)l_{(\mu}x_{\nu)} + 2\sqrt{2}\,\Im m(B)l_{(\mu}y_{\nu)} + 2\Im m(E)x_{(\mu}y_{\nu)}\Big]; \tag{B32}$$

$$A \equiv T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} = 2ia[\overline{p}^{\nu}(\Delta p_{\nu}) - p^{\nu}(\Delta\overline{p}_{\nu}) + f^{\nu}(\Delta\overline{f}_{\nu}) - \overline{f}^{\nu}(\Delta f_{\nu}) +$$
$$+ (f^{\nu}\overline{f}_{\nu} - p^{\nu}\overline{p}_{\nu})(\overline{\gamma}-\gamma)],$$
$$B \equiv -T_{\mu\nu}n^{\mu}\overline{m}^{\nu} = ia[\overline{f}^{\nu}(\overline{\delta}f_{\nu}) - \overline{p}^{\nu}(\overline{\delta}p_{\nu}) + (2\overline{\tau}-\alpha)(p^{\nu}\overline{p}_{\nu} - f^{\nu}\overline{f}_{\nu})],$$
$$C \equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}n^{\nu} = H = ia(f^{\nu}\overline{f}_{\nu} - p^{\nu}\overline{p}_{\nu})(\overline{\rho}-\rho),$$
$$E = T^{\mu\nu}\overline{m}_{\mu}\overline{m}_{\nu} = 2ia[\overline{f}_{\nu}f^{\nu} - \overline{p}_{\nu}p^{\nu}]\sigma,$$
$$F \equiv -T_{\mu\nu}l^{\mu}\overline{m}^{\nu} = ia(\overline{p}_{\nu}p^{\nu} - \overline{f}_{\nu}f^{\nu})\overline{\kappa},$$
$$G \equiv T_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = 0.$$

$$H = T_{\mu\nu} m^{\mu} \overline{m}^{\nu} = ia(\overline{p}_{\nu} p^{\nu} - \overline{f}_{\nu} f^{\nu})(\rho - \overline{\rho}). \tag{B33}$$

Em especial, para spinores de Rarita-Schwinger que satisfazem a condição de Majorana, o TEM resulta identicamente nulo, como no caso dos spinores de Majorana-Dirac descrito acima. Isto é visto facilmente das equações (B32) e (B33), pois para spinores de Majorana-Rarita-Schwinger temos $p = f$. Esse resutado vale para spinores de qualquer ordem, desde que considerados classicamente (i.e. para spinores comutantes).

Com relação aos neutrinos de spin 3/2 não massivos, os resultados são análogos aos obtidos na seção 3 para neutrinos de spin 1/2 sem massa.

Para concluir, devemos observar que a equação de Rarita-Schwinger tem problemas quando tomamos como base um espaço-tempo Riemanniano qualquer, sendo que tais equações somente são compatíveis com espaços do tipo *Ricci flat* [68]. Sendo assim, essas equações somente têm sentido para "spinores fantasmas" como os de Majorana-Rarita-Schwinger descritos acima, ou então quando formuladas em um espaço-tempo plano, ou em uma geometria mais geral como a de Riemann-Cartan, onde a noção de torsão é introduzida e faz possível a compatibilidade das equações. Uma teoria assim descrita pode ser entendida como a origem da teoria de supergravidade.

Para podermos tratar da diagonalização de TEMs como (B12), vamos introduzir um novo conjunto de vetores (u^μ, x^μ, y^μ, z^μ), definidos por

$$u^\mu = (l^\mu + n^\mu)/\sqrt{2},$$
$$z^\mu = (l^\mu - n^\mu)/\sqrt{2},$$
$$x^\mu = (m^\mu + \overline{m}^\mu)/\sqrt{2},$$
$$y^\mu = -i(m^\mu - \overline{m})/\sqrt{2}. \qquad \text{(B34)}$$

Observe-se que, depois dessas definições, temos

$$u^\mu u_\mu = 1; \quad x^\mu x_\mu = y^\mu y_\mu = z^\mu z_\mu = -1;$$
$$u^\mu x_\mu = u^\mu y_\mu = u^\mu z_\mu = x^\mu y_\mu = x^\mu z_\mu = y^\mu z_\mu = 0. \qquad \text{(B35)}$$

Ou seja, o conjunto de vetores definido em (B34) constitui uma base ortonormal para o espaço em consideração.

Nessa base, o TEM resulta na forma

$$T_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu (A+G+2C)/2 + u_{(\mu}x_{\nu)}\mathcal{R}e(F+B) + u_{(\mu}y_{\nu)}\mathcal{I}m(B+F) +$$
$$+ u_{(\mu}z_{\nu)}(A-G)/2 + x_\mu x_\nu [H+\mathcal{R}e(E)] + x_{(\mu}y_{\nu)}\mathcal{I}m(E) + x_{(\mu}z_{\nu)}\mathcal{R}e(B-F)$$
$$+ y_\mu y_\nu [H - \mathcal{R}e(E)] + y_{(\mu}z_{\nu)}\mathcal{I}m(B-F) + z_\mu z_\nu (G+A-2C)/2. \qquad \text{(B36)}$$

Na diagonalização de (B36), obtemos a seguinte equação de autovalores

$$\varkappa^4 + \alpha\varkappa^3 + \beta\varkappa^2 + \gamma\varkappa + \delta = 0, \qquad \text{(B37)}$$

onde

$$\alpha = 2(H-C),$$

$$\beta = (H-C)^2 - 2HC - AG + 4\,\mathcal{R}e(F\overline{B}) - |E|^2,$$

$$\gamma = 2\left[(H-C)[2\mathcal{R}e(B\overline{F})-HC] - A(HG+|F|^2) + C|E|^2 + |B|^2G - 2\mathcal{R}e(B\overline{E}F)\right],$$

$$\delta = 2\left[\mathcal{R}e(\overline{B}^2F^2) - \mathcal{R}e(\overline{B}^2EG) + (B^2HG) - \mathcal{R}e(AE\overline{F}^2) + |F|^2AH - |BF|^2\right] +$$
$$- |D^2|(C^2+AG) + H^2(-AG+C^2) + 4\mathcal{R}e(BC\overline{E}F) - 4\mathcal{R}e(\overline{B}CHF).$$

(B38)

Como vemos, a análise acerca dos possíveis autovalores a partir das relações (B37) e (B38) é bastante complicada, devido à complexidade dos seus coeficientes dados em termos das componentes do TEM na base considerada. Vale observar, entretanto, que uma vez dado o campo spinorial, seja ele de Dirac, Weyl ou Rarita-Schwinger, pode-se calcular explicitamente A, B, C, E, F, G e H e então proceder a dita diagonalização do TEM, encontrando assim o tipo de fluido que ele pode representar. A princípio, o TEM de um campo spinorial pode representar fluidos bastante complexos, uma vez que temos alguns graus de liberdade (ver p. e. [17,18,61,62]) os quais permitem impor certas condições sobre esses campos, obtendo assim o fluido desejado.

(i) Como primeiro exemplo de casos particulares interessantes podemos citar o dos neutrinos de spin 1/2 (ou 3/2) sem massa (bispinores ψ e φ proporcionais, mas não iguais). Em tais situações a equação de autovalores se reduz a

$$\alpha^4 = 0. \qquad \text{(B39)}$$

A equação (B39) é consequência das relações (B20b) [ou (B33)], visto que $\overline{p}p = \overline{f}f$ (ou $\overline{p}_\nu p^\nu = \overline{f}_\nu f^\nu$) e, portanto, somente os coeficientes A e B são diferentes de zero. Nessa situação, o tensor de energia-momento toma a forma [ver equação (B21b)]

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= A l_\mu l_\nu + 2B\, l_{(\mu} m_{\nu)} + 2\overline{B}\, l_{(\mu} \overline{m}_{\nu)} = \\
&= A l_\mu l_\nu + 2\sqrt{2}\,\mathcal{R}e(B) l_{(\mu} x_{\nu)} + 2\sqrt{2}\,\mathcal{I}m(B) l_{(\mu} y_{\nu)}.
\end{aligned}
\tag{B40}
$$

As equações (B39) e (B40) caracterizam um fluido nulo (todos os autovalores são nulos), no caso, um fluido de radiação de neutrinos ou (esquecendo o fato que o TEM é devido a campos spinorias) um fluido de radiação de fótons.

(ii) Fluido com fluxo de calor: O TEM de um fluido com fluxo de calor pode ser escrito [definindo-se uma tetrada adequada (l^μ, n^μ, x^μ, y^μ)] como segue [33]

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= [(p+\omega)/2 + q] l_\mu l_\nu + [(p+\omega)/2 - q] n_\mu n_\nu + (\omega - p) l_{(\mu} n_{\nu)} \\
&\quad - p[x_\mu x_\nu + y_\mu y_\nu],
\end{aligned}
\tag{B41}
$$

Retornando à equação (B32), vemos que, impondo condições adequadas aos campos spinoriais, pode-se reduzí-la à forma (B41). De forma que podemos construir (entre outros) fluidos com fluxo de calor a partir de campos spinoriais adequados.

6 - Comentários

A segunda parte da tese é o estudo feito sobre o modelo supersimétrico de Wess-Zumino e sua interpretação como meio material (Capítulo 4). Neste apêndice mostramos como isso pode ser feito para spinores de Dirac, Weyl e Rarita-Schwinger, e que tipo de materiais podem ser construídos a partir de tais campos. Com esse estudo, ficou mais clara a razão porque o campo spinorial de Majorana não contribui para o TEM do modelo de Wess-Zumino segundo a nossa interpretação clássica.

Vimos que a interpretação dos campos spinoriais de Dirac, Weyl, e Rarita-Schwinger como meios materiais não é imediata, mas pode-se construir modelos interessantes destes, a partir de "casos particulares" daqueles. Ressalva feita ao campo de Rarita-Schwinger cujo TEM, devido à inconsistência das equações num espaço-tempo curvo, não serve como fonte do campo gravitacional, mas ainda serve para representar fluidos em espaço-tempos planos, ou em geometrias de Einstein-Cartan.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R.C. Tolman: *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology* (Oxford University Press, London, UK, 1934).

[2] Ya.B. Zel'dovich & J.D. Novikov: *Relativistic Astrophysics, Vol.I: Stars and Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1971).

[3] L. Herrera: *Evolution of Radiating Spheres in General Relativity: A Seminumerical Approach*, Fundamentals of Cosmic Physics **14**, 235 (1990) e suas refs.

[4] N.O. Santos: *Non-Adiabatic Radiating Collapse*, Montly Notices of The Royal Astronomical Society **216**, 403 (1985).

[5] C.A. Kolassis, N.O. Santos & D. Tsoubelis: *Energy Conditions for an Imperfect Fluid*, Classical and Quantum Gravity **5**, 1329 (1988).

[6] P.S. Letelier: *Anisotropic Fluids with Two-Perfect-Fluid Components*, Physical Review **D22**, 807 (1980).

[7] P.S. Letelier & P.S. Alencar: *Anisotropic Fluids with Multifluid Components*, Physical Review **D34**, 343 (1986).

[8] P.S. Letelier & E. Verdaguer: *Anisotropic Fluid with SU(2)-type Structure in General Relativity: A Model of Localized Matter*, Journal of Mathematical Physics **28**, 243 (1987).

[9] P. S. Letelier: *Clouds of Strings in General Relativity*, Physical Review **D20**, 1294 (1979) e refs. aí contidas.

[10] P.S. Letelier: *Fluids of Strings in General Relativity*, Il Nouvo Cimento **B11**, 519 (1981).

[11] A. Vilenkin: *Cosmic Strings and Domain Walls*, Physics Reports **121**, 265 (1985) e suas referências.

[12]P. Laguna-Castillo & R.A. Matzner: *Discontinuity Cilinder Model of Gravitating U(1) Cosmic Strings*, Physical Review **D35**, 2933 (1986).

[13]D. Garfinkle: *General Relativistic Strings*, Physical Review **D32**, 1323 (1985).

[14] R. Tabensky & A.H. Taub: *Plane Wave Self-Gravitating Fluids with Pressure Equal to Energy Density*, Communication in Mathematical Physics 29, 61 (1973)

[15]P.S. Letelier & E. Verdaguer: *Cosmic Walls and Axially Symmetric σ Models*, Classical and Quantum Gravity 6, 705 (1989).

[16]P.S. Letelier: *Solitary Waves of Mattter in General Relativity*, Physical Review **D26**, 2623 (1982).

[17]J.B. Griffiths: *On Dirac Fields in a Curved Space-time*, Journal of Physics **A12**, 2429 (1979).

[18]P. Wills: *Perfect Fluid Behaviour of Massive Neutrinos*, Physics Letters **A138**, 375 (1989).

[19]J. Wess & B. Zumino: *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Nuclear Physics **B70**, 39 (1974).

[20]L. I. Sédov: *Macroscopic Theories of Matter and Fields: A Thermodynamic Approach* (MIR, Moscow, 1983).

[21]C. Collinson & P. Morris: *Space-Times Admitting Nonunique Neutrino Fields*, Il Nuovo Cimento **16B**, 273(1973).

[22]T.M. Davis & J.R. Ray: *Ghost Neutrinos in General Relativity*, Physical Review **D9**, 331 (1974).

[23]J.A. Bagger: *Supersymmetric Sigma Models*, in Proceedings of The NATO Advanced Studies Institute on Supersymmetry, K. Dietz et al. eds., Plenum Press, New York, 1985. pp. 45-87.

[24]M. B. Green, J. H. Schwarz & E. Witten: *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) vol. II.

[25]A. H. Taub: *Relativistic Fluid Mechanics*, Annual Review of Fluid Mechanics 10, 301 (1978).

[26]N. Straumann: *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Spinger-Velag, Berlin, 1984) Apêndice **B**.

[27]S. W. Hawking & G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973) pg. 88.

[28]P. S. Letelier: *Strings Cosmologies,* Physical Review **D28**, 2414 (1983).

[29]Ya. B. Zel'dovich: *Cosmological Fluctuations Produced Near a Singularity*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 192, 663 (1980).

[30]N. Turok: *Grand Unified Strings and Galaxy Formation*, Nuclear Physics **B242**, 520 (1984).

[31]D.R. Matravers: *Solutions to Einstein's Field Equations with Kantowski-Sachs Symmetry and String Dust Source*, General Relativity and Gravitation **20**, 279 (1988).

[32]J. L. Synge: *Relativity: The Special Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1965).

[33]G.S. Hall & D.A. Negm: *Physical Structure of the Energy-Momentum Tensor in General Relativity*, International Journal of Mathematical Physics **25**, 405 (1986).

[34]B. Doubrovine, S. Novikov & A. Fomenko: *Geometrie Contemporaine,* I Partie (MIR, Moscou, 1985).

[35]S.R. Oliveira: *A model of Two Perfect Fluids for an Anisotropic*

and Homogeneous Universe, Physical Review D40, 3976 (1989).

[36]L. Herrera: *Radiating Weyl Metric*, Il Nuovo Cimento 43B, 283 (1978).

[37]P.S. Letelier: *Self-Gravitating Anisotropic Fluids*, Il Nuovo Cimento 69B, 145 (1982).

[38]N. Sanchez: *Connection Between the Nonlinear σ Model and the Einstein Equations of General Relativity*, Physical Review D26, 2589 (1982).

[39]L. Sédov: *Mécanique des Miliex Continus*, (MIR, Moscou, 1975).

[40]J. Wess & B. Zumino: *A Lagrangean Model Invariant Under Supergauge Transformations*, Physics Letters 49B, 52 (1974).

[41]H.J.W. Müller-Kirsten & A. Weidemann: *Supersymmetry* (World Scientific, Singapore, 1987).

[42]P. P. Srivastava: *Supesymmetry, Superfields and Supergravity: an Introdution*, ed. por D. F. Brewer (Adam Hilger by IOP Publishing Ltd., Bristol, 1986).

[43]P. West: *Introduction to Supersymmetry and Supergravity* (World Scientific Publishing, Singapore, 1986).

[44]A. Salam & J. Strathdee: *Supersymmetry and Superfields*, Fortschritte der Physik 26, 57 (1978).

[45]T. M. Davis & J. R. Ray: *Ghost Neutrinos in Plane-Symmetric Spacetimes*, Journal of Mathematical Physics 16, 75 (1974).

[46]Ver p.e. L. I. Sédov: "Applying the Basic Variational Equation for Building Models of Matters and Fields", em: *Macroscopic Theories of Fields: A Thermodinamic Approach*; ed. por L.I. Sédov (MIR, Moscou, 1983) capítulo II.

[47]J. Wess & B. Zumino: *The Component Formalism Follows from The Superspace Formulation of Supergravity*, Physics Letters **79B**, 394 (1978).

[48]S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Roček, W. Siegel: *Superspace* (Benjamin/Cummings, Massachusetts, 1983).

[49]A. Lichnerowicz: *Champs Spinorieles et Propagateurs en Relativité Generale*, Bulletin de la Société Mathématique de France **92**, 11 (1964).

[50]J.M. Souriau: *Géométrie et Relativité* (Hermann, Paris, 1964).

[51]R. Brill & J.A. Wheeler: *Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields*, Reviews of Modern Physics **29**, 465 (1957).

[52]D.R. Brill & J.M. Cohen: *Cartan Frames and General Relativistic Dirac Equation*, Journal of Mathematical Physics **7**, 238 (1966).

[53]J. Scherk: *An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings*, Reviews of Modern Physics **47**, 123 (1975) e bibliografia aí citada.

[54]J. L. Synge: *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

[55]A. H. Taub: *Empty Space-times Admiting a Three Parameter Group of Motions*, Annals of Mathematics **53**, 472 (1951).

[56]P.S. Letelier: *Multiple Cosmic Strings*, Classical and Quantum Gravity, **4**, L75 (1987).

[57]N. Turok: *Global Texture as the Origin of Cosmic Structure*, Physical Review Letters **63**, 2625 (1989).

[58]E. Witten: *Superconducting Strings*, Nuclear Physics **B249**, 557 (1985).

[59]J.M. Centrella ed.: *Dynamical Spacetimes and Numerical Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[60]E. Newman & R.Penrose: *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*, Journal of Mathematical Physics **3**, 566 (1962).

[61]J.B. Griffiths & R.A. Newing: *Tetrad Equations for the Two-Component Neutrino Field in General Relativity*, Journal of Physics **A3**, 269 (1970); *A contribution to the Rainich Theory of the Neutrino Field*, International Journal of Theoretical Physics **5**, 421 (1972).

[62]J. Wainwright: *Geometric Properties of Neutrino Fields in Curved Space-Time*, Journal of Mathematical Physics **12**, 828 (1971).

[63]J.B. Griffiths: *Colliding Neutrino Fields in General Relativity*, Journal of Physics **A9**, 45 (1976).

[64]C.A. Kolassis & N.O. Santos:*Einstein-Weyl Spacetimes with Geodesic and Shear-Free Neutrino Rays: Asymptotic Behaviour*, Annals of Physics **174**, 45 (1987).

[65]C.A. Kolassis: *On the stationary Axially Symmetric Einstein-Weyl Field Equations*, Journal of Physics **A16**, 749 (1983).

[66]W. Rarita & J. Schwinger: *On a Theory of Particles with Half-Integral Spin*, Physical Review **60**, 61 (1941).

[67]G. Velo & D. Zwanziger: *Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Eletromagnetic Potential*, Physical Review **186**, 1337 (1969).

[68]R.Penrose & W.Rindler: *Spinors and Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986) vol. I.

REFERÊNCIAS EM ORDEM ALFABÉTICA

[23]J.A. Bagger: *Supersymmetric Sigma Models*, in Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Supersymmetry, Ed. K. Dietz et al., Plenum Press, Ney York, 1985.

[51]R. Brill & J.A. Wheeler:*Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields*, Reviews of Modern Physics 29, 465 (1957).

[52]D.R. Brill & J.M. Cohen: *Cartan Frames and General Relativistic Dirac Equation*, Journal of Mathematical Physics 7, 238 (1966).

[59]J.M. Centrella ed.: *Dynamical Spacetimes and Numerical Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[21]C. Collinson & P. Morris: *Space-Times Admitting Nonunique Neutrino Fields*, Il Nuovo Cimento 16B, 273(1973).

[22]T.M. Davis & J.R. Ray: *Ghost Neutrinos in General Relativity*, Physical Review D9, 331 (1974).

[45]T. M. Davis & J. R. Ray: *Ghost Neutrinos in Plane-Symmetric Spacetimes*, Journal of Mathematical Physics 16, 75 (1974).

[34]B. Doubrovine, S. Novikov & A. Fomenko: *Geometrie Contemporaine,* I Partie (MIR, Moscou, 1985).

[13]D. Garfinkle: *General Relativistic Strings*, Physical Review D32, 1323 (1985).

[48]S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Roček, W. Siegel: *Superspace* (Benjamin/Cummings, Massachusetts, 1983).

[24]M. B. Green, J. H. Schwarz & E. Witten: *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) vol. II.

[63]J.B. Griffiths: *Colliding Neutrino Fields in General Relativity*,

Journal of Physics A9, 45 (1976).

[17]J.B. Griffiths: *On Dirac Fields in a Curved Space-time*, Journal of Physics A12, 2429 (1979).

[61]J.B. Griffiths & R.A. Newing: *Tetrad Equations for the Two-Component Neutrino Field in General Relativity*, Journal of Physics A3, 269 (1970); *A contribution to the Rainich Theory of the Neutrino Field*, International Journal of Theoretical Physics 5, 421 (1972).

[33]G.S. Hall & D.A. Negm: *Physical Structure of the Energy-Momentum Tensor in General Relativity*, International Journal of Mathematical Physics 25, 405 (1986).

[27]S. W. Hawking & G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973) pg. 88.

[36]L. Herrera: *Radiating Weyl Metric*, Il Nuovo Cimento 43B, 283 (1978).

[3] L. Herrera: *Evolution of Radiating Spheres in General Relativity: A Seminumerical Approach*, Fundamentals of Cosmic Physics 14, 235 (1990) e suas refs.

[65]C.A. Kolassis: *On the stationary Axially Symmetric Einstein-Weyl Field Equations*, Journal of Physics A16, 749 (1983).

[64]C.A. Kolassis & N.O. Santos:*Einstein-Weyl Spacetimes with Geodesic and Shear-Free Neutrino Rays: Asymptotic Behaviour*, Annals of Physics 174, 45 (1987).

[5] C.A. Kolassis, N.O. Santos & D. Tsoubelis: *Energy Conditions for an Imperfect Fluid*, Classical and Quantum Gravity 5, 1329 (1988).

[12]P. Laguna-Castillo & R.A. Matzner: *Discontinuity Cilinder Model of*

Gravitating U(1) Cosmic Strings, Physical Review **D35**, 2933 (1986).

[9] P. S. Letelier: *Clouds of Strings in General Relativity*, Physical Review **D20**, 1294 (1979) e refs. aí contidas.

[6] P. S. Letelier: *Anisotropic Fluids with Two-Perfect-Fluid Components*, Physical Review **D22**, 807 (1980).

[10]P.S. Letelier: *Fluids of Strings in General Relativity*, Il Nouvo Cimento **B11**, 519 (1981).

[16]P.S. Letelier: *Solitary Waves of Matter in General Relativity*, Physical Review **D26**, 2623 (1982).

[37]P.S. Letelier: *Self-Gravitating Anisotropic Fluids*, Il Nuovo Cimento **69B**, 145 (1982).

[28]P. S. Letelier: *Strings Cosmologies*, Physical Review **D28**, 2414 (1983).

[56]P.S. Letelier: *Multiple Cosmic Strings*, Classical and Quantum Gravity, **4**, L75 (1987).

[7] P.S. Letelier & P.S. Alencar: *Anisotropic Fluids with Multifluid Components*, Physical Review **D34**, 343 (1986).

[8] P.S. Letelier & E. Verdaguer: *Anisotropic Fluid with SU(2)-type Structure in General Relativity: A Model of Localized Matter*, Journal of Mathematical Physics **28**, 243 (1987).

[15]P.S. Letelier & E. Verdaguer: *Cosmic Walls and Axially Symmetric σ models*, Classical and Quantum Gravity **6**, 705 (1989).

[49]A. Lichnerowicz: *Champs Spinorieles et Propagateurs en Relativité Generale*, Bulletin de la Société Mathématique de France **92**, 11 (1964).

[31]D.R. Matravers: *Solutions to Einstein's Field Equations with*

Kantowski-Sachs Symmetry and String Dust Source, General Relativity and Gravitation 20, 279 (1988).

[41]H.J.W. Müller-Kirsten & A. Weidemann: *Supersymmetry* (World Scientific, Singapore, 1987).

[60]E. Newman & R.Penrose: *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*, Journal of Mathematical Physics 3, 566 (1962).

[35]S.R. Oliveira: *A model of Two Perfect Fluids for an Anisotropic and Homogeneous Universe*, Physical Review D40, 3976 (1989).

[68]R.Penrose & W.Rindler: *Spinors and Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986) vol. I.

[66]W. Rarita & J. Schwinger: *On a Theory of Particles with Half-Integral Spin*, Physical Review 60, 61 (1941).

[44]A. Salam & J. Strathdee: *Supersymmetry and Superfields*, Fortschritte der Physik 26, 57 (1978).

[38]N. Sanchez: *Connection Between the Nonlinear σ Model and the Einstein Equations of General Relativity*, Physical Review D26, 2589 (1982).

[4] N.O. Santos: *Non-Adiabatic Radiating Collapse*, Montly Notices of The Royal Astronomical Society 216, 403 (1985).

[53]J. Scherk: *An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings*, Reviews of Modern Physics 47, 123 (1975) e bibliografia aí citada

[39]L. Sédov: *Mécanique des Milìex Continus*, (MIR, Moscou, 1975)..

[20]L. I. Sédov: *Macroscopic Theories of Matter and Fields: A Thermodynamic Approach* (MIR, Moscow, 1983).

[46]Ver p.e. L. I. Sédov: "Applying the Basic Variational Equation for Building Models of Matters and Fields", em: *Macroscopic Theories of Fields: A Thermodinamic Approach*; ed. por L.I. Sédov (MIR, Moscou, 1983) capítulo II.

[50]J.M. Souriau: *Géométrie et Relativité* (Hermann, Paris, 1964).

[42]P. P. Srivastava: *Supesymmetry, Superfields and Supergravity: an Introdution*, ed. por D. F. Brewer (Adam Hilger by IOP Publishing Ltd., Bristol, 1986).

[26]N. Straumann: *General Relativity and Relativistic Astrphysics* (Spinger-Velag, Berlin, 1984) Apêndice B.

[54]J. L. Synge: *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

[32]J. L. Synge: *Relativity: The Special Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1965).

[14] R. Tabensky & A.H. Taub: *Plane Wave Self-Gravitating Fluids with Pressure Equal to Energy Density*, Communication in Mathematical Physics 29, 61 (1973)

[55]A. H. Taub: *Empty Space-times Admiting a Three Parameter Group of Motions*, Annals of Mathematics 53, 472 (1951).

[25]A. H. Taub: *Relativistic Fluid Mechanics*, Annual Review of Fluid Mechanics 10, 301 (1978).

[1] R.C. Tolman: *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology* (Oxford University Press, London, UK, 1934).

[30]N. Turok: *Grand Unified Strings and Galaxy Formation*, Nuclear Physics **B242**, 520 (1984).

[57]N. Turok: *Global Texture as the Origin of Cosmic Structure*,

Physical Review Letters 60, 2625 (1989).

[67]G. Velo & D. Zwanziger: *Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Eletromagnetic Potential*, Physical Review 196, 1337 (1969).

[11]A. Vilenkin: *Cosmic Strings and Domain Walls*, Physics Reports 121, 265 (1985) e suas referências.

[62]J. Wainwright: *Geometric Properties of Neutrino Fields ic Curved Space-Time*, Journal of Mathematical Physics 12, 828 (1971).

[19]J. Wess & B. Zumino: *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Nuclear Physics B70, 39 (1974).

[40]J. Wess & B. Zumino: *A Lagrangean Model Invariant Under Supergauge Transformations*, Physics Letters 48B, 52 (1974).

[47]J. Wess & B. Zumino: *The Component Formalism Follows from The Superspace Formulation of Supergravity*, Physics Letters 79B, 394 (1978).

[43]P. West: *Introduction to Supersymmetry and Supergravity* (World Scientific Publishing, Singapore, 1986).

[18]P. Wills: *Perfect Fluid Behaviour of Massive Neutrinos*, Physics Letters A138, 375 (1989).

[58]E. Witten: *Superconducting Strings*, Nuclear Physics B249, 557 (1985).

[2] Ya.B. Zel'dovich & J.D. Novikov: *Relativistic Astrophysics, Vol.I: Stars and Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1971).

[29]Ya. B. Zel'dovich: *Cosmological Fluctuations Produced Near a Singularity*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 192, 663 (1980)