

EFEITOS DA PRESSÃO FINITA DO
PLASMA NO MODO KINK INTERNO

por

Glaucia Maria Gleibe de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão

Tese apresentada ao Instituto de Física
"Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de
Campinas para obtenção do título de Mestre
em Física.

Campinas, agosto de 1980.

Para:

*papai e mamãe,
Jo e Hequinho,
Bel e Eros,
Wagner e Sueli,
Jorge e Dulce,
Angélica e Betinho,
Lena e Tuio
Lisinha,
Leãozinho*

e

*Marcello, Fabiana, Xerique, Bruno Zé Henrique,
Vinícius, Maria Inês, Ana Carolina e Beatriz.*

AGRADECIMENTOS:

De uma maneira menos formal do que a costumeira, quero dizer uma porção de muito-obrigado, às pessoas que foram importantes pra mim, na execução e término deste trabalho de tese.

Em primeiro lugar vem o Galvão, meu orientador de tese, pelo voto de confiança que em mim depositou, me propondo este trabalho. Pela honestidade com que me acompanhou nesta pesquisa, e ainda pelos incentivos e paciência que teve para comigo.

Ao Sakanaka eu agradeço o seu empenho na resolução numérica do problema abordado nesta tese, que lhe tomou muitas madrugadas de sono. Também pelo acompanhamento ininterrupto deste trabalho nestes últimos meses, discutindo resultados, redação do texto e me encorajando a concluir esta tese.

Aos professores e colegas do Grupo de Plasma eu agradeço a convivência saudável, em especial ao César e Milton. Não poderia me esquecer do Hisataki que me ajudou bastante com discussões e indicações bibliográficas para o problema que abordamos.

Vem agora um obrigado bem grande pra Carmen, (Carmencita !).

O Augusto merece o "reino do céu" pela datilografia e auxílio na montagem deste trabalho, além de ter me suportado no meu estado de cansaço e nervosismo.

Pros companheiros professores do departamento de

Física da Universidade do Amazonas, lá em Manaus, eu tenho que dizer 14 horas semanais de "muito obrigado", por me substituírem nas minhas aulas enquanto eu concluía e defendia esta tese.

À minha família, eu dediquei este trabalho. Eu agradeço o investimento que fizeram em mim durante 25 anos para que eu pudesse chegar até aqui, e certamente continuar. Foi um investimento caro, sofrido e que durante o mestrado custou muitas saudades. Obrigado pelos telefonemas sempre a cobrar, pelos bolos de chocolate e doce de abóbora, pelas visitas, cartas e desenhos das crianças, pelas diversas formas de carinho.

Dos meus companheiros no dia a dia de república, eu recebi muita força nessa minha etapa de vida, e em grande parte esse trabalho de tese é fruto de uma convivência realmente amiga que conseguimos ter.

Então um obrigado forte para o Wagner, Marcos, Lila, Agnaldo, Kiko, Renato, Marcílio, Waltair, Frigi, Noemia, Michel, Paulinho, Marinho.

Agora pra Lila, agradecer é muito pouco, pela amiga e companheira que foi na etapa final deste trabalho, nas viradas de noites de estudo e nos desgastantes finais de semana na Unicamp.

Ao Márcio, Graça, Geraldô, Regina e George eu agradeço pela lealdade e força que me deram nos meus momentos de baixa.

Pros meus amigos de Brasília que de um "longe-per-to" compartilharam da minha "alegria-triste" nestes últimos

três anos, em particular a Colan, Felício, Paulo, Bolzon e Lalá, eu também digo obrigado.

Lucinha, eu agradeço a amiga que você tem sido pra mim em Manaus, especialmente nos meus corre-corres de viagem pra concluir esta tese.

À vida, eu agradeço a capacidade de desenvolver este trabalho de tese.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade do Modo Kink Interno e do Modo Kink Central em plasmas cilíndricos, MHD ideais, devido a variações de pressão e diferentes perfis de corrente. Utiliza-se a equação de Euler para estabilidade- σ derivada por Goedbloed e Sakanaka.

A análise do problema é baseada num método de teoria de camada limite, onde efeitos devido à inércia do plasma são considerados numa pequena camada, no entorno do ponto onde a perturbação é paralela às linhas de campo. Para o Modo Kink Interno é feito também a análise numérica, integrando-se uma equação de valor característico.

Calculou-se a razão de crescimento da instabilidade para os dois modos para diferentes perfis de pressão e corrente.

Verificou-se que tanto para o Modo Kink Interno quanto para o Modo Kink Central, a razão de crescimento torna-se maior com o aumento nas variações destes perfis. Mas para o Modo Kink Interno obteve-se uma redução de até 50% na razão de crescimento, comparada com os resultados obtidos por Rosenbluth et al. Para o Modo Kink Central constatou-se que a razão de crescimento é proporcional ao β do plasma e às derivadas da pressão e corrente.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the stability of the Internal Kink and Central Kink modes in ideal MHD cylindrical plasmas due to the pressure variations and the different current profiles. It was used the σ - Euler equation derived by Goedbloed and Sakanaka.

Its analysis is based on the boundary layer method, where the effects due to the plasma inertia are only considered in a boundary layer in the neighborhood of the surface where the perturbation is parallel to the field lines. For the internal Kink mode a numerical analysis is also done by integrating the Euler equation.

It was calculated the growth rate of the two modes for the different pressure and current profiles.

It was verified that for both, the Internal Kink and Central Kink modes, the growth rate becomes larger as the derivative of these profiles increases. However, for the Internal Kink mode, one obtains a reduction of up to 50% in the growth rate calculated by Rosenbluth et al. For the Central Kink mode, one notices that the growth rate is proportional to β of the plasma and to the derivatives of the pressure and current.

Í N D I C E

	Páginas
I - Introdução	1
II - Modelo Teórico	17
III - Análise do Modo Kink Interno e Kink Central	
1 - Introdução	21
2 - Análise da Estabilidade- σ do Modo Kink Interno	24
3 - Análise da Estabilidade- σ do Modo Kink Central	34
IV - Análise dos Resultados	
1 - Modo Kink Interno	43
2 - Modo Kink Central	54
V - Conclusões	
1 - Modo Kink Interno	67
2 - Modo Kink Central	67
- Apêndices	
A - Obtenção das Equações que Descrevem o Modo Kink Interno	69
B - Equações para o Modo Kink Central	84
C - Determinação dos Parâmetros de Equilíbrio	91
- Referências	97

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O estudo de instabilidades do plasma tornou-se um alvo de interesse no mundo da ciência quando iniciaram-se as pesquisas de reatores de fusão termonuclear controlada, em 1952 [5]. O objetivo prático desta pesquisa era, e ainda é, o desenvolvimento de um reator auto-sustentável que obtenha sua energia a partir da fusão de núcleos leves. Para conseguir-se as condições para as quais um reator de fusão seja economicamente viável, é necessário confinar o plasma de deutério ou trítio através de campos magnéticos, para mantê-lo longe de qualquer sistema a baixas temperaturas como as paredes sólidas de um sistema de vácuo, em uma temperatura cinética de 100 KeV e com uma densidade de partículas de 10^{14} cm^{-3} , durante um período de pelo menos 1s. Entretanto, 1s é maior do que um período do plasma, surgindo então uma questão importante: se a configuração de equilíbrio na qual o plasma está magneticamente confinado é estável ou instável. Muitas das tentativas de confinar um plasma de alta temperatura magneticamente, falharam porque a configuração do campo magnético de equilíbrio usada experimentalmente era instável e o plasma se movia rapidamente ($\sim 1 \mu\text{s}$) para as paredes da câmara de vácuo.

Os experimentos tem demonstrado que as instabilidades mais destrutivas do estado de equilíbrio do plasma, são as chamadas instabilidades magnetohidrodinâmicas (MHD) ideais, e que estas podem ser eliminadas por uma configuração de cam

po magnético adequado. Entretanto a eliminação destas instabilidades não possibilitou ainda um reator de fusão satisfatório, pois o próprio plasma cria uma outra instabilidade, que de maneira geral é menos destrutiva do que aquela que se conseguiu eliminar, mas que mesmo assim é séria o suficiente, para provocar perda do plasma mais rapidamente do que a permitida para um reator de fusão viável.

As instabilidades MHD ideais são assim denominadas pelo fato de poderem ser descritas por um sistema de equações de fluidos macroscópicos, onde o plasma é considerado um fluido condutor perfeito, isto é, de condutividade infinita, imerso num campo magnético de equilíbrio.

Através deste modelo foram propostos vários métodos para a análise da estabilidade de uma configuração de equilíbrio do plasma, ou das propriedades das instabilidades associadas com um dado equilíbrio do plasma.

Um destes métodos está baseado em considerações da energia. Um estado de equilíbrio de um plasma com uma energia potencial W será estável se W é um mínimo e caso contrário, pode ser instável. Para investigar a estabilidade de um plasma através deste método, é necessário calcular a variação na energia potencial do plasma quando sujeito a uma dada perturbação. O equilíbrio do plasma é estável se a variação na energia potencial é positiva para todas as perturbações permitidas pelas equações do plasma. Se existir alguma perturbação possível para a qual a variação na energia potencial seja negativa, então o plasma é instável. Este método é muito útil para a determinação dos valores dos parâmetros

de equilíbrio que resultam num equilíbrio instável. Mas não é um bom método para se determinar a razão de crescimento de uma instabilidade particular.

Uma outra maneira para se determinar a estabilidade do equilíbrio de um plasma é a análise dos modos normais. Este método assume que se o equilíbrio a ser investigado é perturbado, as equações linearizadas do plasma para o desenvolvimento da perturbação no tempo podem ser resolvidas, sujeitas às condições de contorno apropriadas, assumindo uma dependência no tempo da forma $\exp(-i\omega t)$. Com este procedimento tem-se uma equação para ω em termos dos parâmetros de equilíbrio. Os ω obtidos desta equação podem ser real ou imaginário puro. Se todos os ω são reais, então todas as variáveis da perturbação oscilam harmonicamente (a amplitude da perturbação é limitada), e o plasma é estável. No caso de ω imaginário o sistema é instável, pois os modos normais crescem no tempo. A análise dos modos normais dá uma informação completa sobre as instabilidades associadas a um equilíbrio particular do plasma. O comportamento de qualquer perturbação inicial pode ser acompanhado respeitando os limites impostos pela linearização das equações. Infelizmente a análise dos modos normais pode ser aplicada somente aos casos onde o equilíbrio do plasma é simples o suficiente, para permitir a solução das equações diferenciais para o plasma.

Estes dois métodos de análise permitiram a derivação de critérios de estabilidade que são extremamente úteis para o estudo de uma determinada configuração de equilíbrio do plasma, que falaremos mais adiante.

Vamos discorrer agora sobre as perturbações num plasma, já que é com a introdução destas que se faz o estudo de um dado estado de equilíbrio. Considera-se um estado de equilíbrio estático em torno do qual introduz-se uma pequena perturbação. Em sistemas cilíndricos é costume representar-se estas perturbações por $\vec{\xi}$, que expressam os deslocamentos de elementos da coluna de plasma em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , além da dependência temporal t . Estes deslocamentos podem ser representados como uma superposição das componentes de Fourier na forma

$$\vec{\xi}(r, \theta, z) = (\xi_r(r), \xi_\theta(r), \xi_z(r) \exp [i(m\theta + kz - \omega t)] ,$$

onde k é o número de onda toroidal, que caracteriza a periodicidade da perturbação ao longo do eixo e está relacionado com o comprimento de onda da deformação, λ , por $k = 2\pi/\lambda$; m é o modo azimutal da perturbação e determina a periodicidade na direção θ .

A dependência temporal da perturbação é determinada resolvendo-se a equação linearizada de perturbações, como já dissemos na descrição da análise dos modos normais. Mas de qualquer forma, valeria a pena retomar este ponto para introduzir-se a definição de pinch. Então recomeçando esta explanação temos que, pelo fato do operador força,

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F} \{ \vec{\xi} \}$$

ser auto-adjunto, ω^2 é real e conseqüentemente ω pode ser real ou imaginário puro. Se ω for real o plasma é estável, isto é, o pinch é estável; caso contrário, ω imaginário, o

pinch é instável.

Define-se um pinch puro como aquele em que o plasma colunar é comprimido radialmente pelo campo magnético, induzido pela própria corrente ao longo do plasma. Um pinch puro é extremamente instável, de maneira que, para se conseguir uma maior estabilidade aplica-se externamente, campos longitudinais estabilizantes. Como resultado tem-se um campo helicoidal que comprime e confina, ou só confina, um plasma colunar. O termo pinch foi generalizado para expressar este sistema. Um pinch diz-se difuso quando a corrente se espalha ao longo da coluna de plasma, e diz-se abrupto quando a corrente está localizada numa camada extremamente fina no plasma.

Depois dessa definição de pinch, voltemos às perturbações. As perturbações de modo azimutal $m = 1$ são denominadas Modo Kink. Este modo corresponde a um deslocamento radial da coluna de pinch, que combinado com o modo k , faz com que a coluna de plasma se deforme de maneira helicoidal. Fisicamente ocorre então o seguinte mecanismo: na região encurvada resultante, a densidade de linhas de força ao redor da coluna de plasma é maior no lado côncavo do que no lado convexo desta, e conseqüentemente o campo azimutal, B_θ , exerce uma pressão magnética mais intensa no lado côncavo da coluna, tendendo a aumentar a curvatura. A estabilização pode ser feita com um campo magnético longitudinal, B_z , dentro do plasma. O encurvamento deste campo B_z produz uma tensão magnética que age como uma força restauradora, contra a desestabilização produzida pelo campo azimutal, B_θ . Foi mostrado

por Kruskal [7] e ainda por Kadomtsev [8] que a condição de estabilidade,

$$\left[\frac{B_z}{B_\theta} \right]^2 > \ln\left(\frac{1}{|ka|}\right)$$

não é efetiva para estabilizar perturbações de longo comprimento de onda, mesmo com um campo magnético longitudinal, B_z , muito intenso.

Por este motivo existem duas possibilidades para se estabilizar a instabilidade Kink:

1. colocar-se uma parede metálica condutora ao redor do vácuo,
2. superpor-se externamente um campo magnético longitudinal.

No primeiro caso, quando o pinch se desloca não há mudança no fluxo magnético entre o plasma e a parede condutora, pois as linhas de força não podem penetrar no metal. Caso a coluna de plasma mova-se para perto da parede, as linhas de força são comprimidas, causando um aumento da pressão magnética, de maneira que surge então uma força restauradora que estabiliza a instabilidade. Mas convém ressaltar que, se o raio da parede condutora for muito grande comparado com o raio da coluna de plasma, e ainda, o comprimento de onda da perturbação pequeno o bastante com relação a este último, então as linhas de força não são comprimidas apreciavelmente. Assim a força restauradora não é suficiente para estabilizar o Kink. Uma análise detalhada feita por Taylor [9], mostra qual deve ser a relação entre o raio da parede metálica, b , e o raio da coluna de plasma, a , para que todos os comprimentos de onda sejam estabilizados,

$$b < 5a \quad .$$

No segundo caso, a existência de um campo magnético longitudinal faz com que a estabilidade decresça. Isto está associado com a mudança na geometria do campo magnético. As linhas de força fora do pinch são helicoidais, sendo o passo desta hélice dado por :

$$h(r) = 2\pi \frac{rB_z}{B_\theta} \quad .$$

Entre as várias perturbações possíveis, pode existir uma com um comprimento de onda que coincida com o passo do campo magnético helicoidal. Uma deformação deste tipo provoca uma distorção mínima no campo fora do pinch (distorção incompressível). Diz-se então que o plasma se move entre as linhas de força sem distorcê-las. Na prática tem-se que o passo h não pode ser maior que o comprimento L do próprio pinch. A condição de estabilidade leva ao valor crítico da corrente de descarga I_c ,

$$I_c = \pi c \frac{r^2 B_z}{L} \quad .$$

Se a corrente de descarga excede este valor crítico surge então a instabilidade. Este resultado foi encontrado independentemente por Kruskal et al [10] e por Shafranov [11]. A corrente crítica I_c é sempre denominada de limite de Kruskal-Shafranov.

Até aqui, os casos tratados representam uma extrema idealização. Ao se considerar o sistema de pinch com contorno difuso, então o critério de estabilidade depende essencialmente dos perfis de distribuição de corrente, dos campos

magnéticos e da pressão do plasma, a que está sujeita a seção do pinch.

Temos então necessidade de voltar a falar sobre os métodos gerais de análise de estabilidade, já introduzidos anteriormente, para que através deles possamos mencionar critérios de estabilidade que são mais práticos para se obter informações sobre a condição de estabilidade, quando se leva em conta os perfis de equilíbrio.

A estabilidade de um pinch difuso pode ser melhor investigada através do princípio de energia, (já introduzido anteriormente), formulado por Bernstein et al [12], que é escrito em termos da equação de Euler,

$$\delta W = \frac{\pi}{2} \int_0^a [f(\frac{d\xi}{dr})^2 + g\xi^2] dr.$$

A equação de Euler é singular nos pontos $r = r_0$ onde quantidade $F = m \frac{B_\theta}{r} + kB_z$, que está contida em f , se anula. Ou seja, é singular nos pontos onde $\mu(r) = -k/m$. Uma expansão da equação de Euler em torno de tais pontos leva ao critério de estabilidade de Suydam [13],

$$\frac{dp}{dr} + \frac{rB_z^2}{8} \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right)^2 > 0,$$

onde r é a distância ao eixo do pinch e $\mu = \frac{B_\theta}{rB_z}$, é o inverso do passo das linhas de campo magnético helicoidal. Este critério, da maneira pela qual foi derivado por Suydam, é uma condição só necessária para a estabilidade. Newcomb [3] formulou por minimização da $W\{\vec{\xi}\}$, a condição necessária e suficiente para a estabilidade, que é expressa através do seguinte teorema: O pinch é estável para todos os valores de

m e k se e somente se é estável para $m = 1$, $-\infty < k < +\infty$, e para $m = 0$ no limite de $k \rightarrow 0$.

Uma generalização parcial do critério de Suydam para uma geometria toroidal de superfície circular foi feita por Ware e Haas [14]. Seus cálculos basearam-se numa expansão da razão de aspecto de δW , para o caso de uma densidade de corrente toroidal quase constante, e para q também quase constante. O termo q é o fator de segurança, que é a razão entre o comprimento de onda das linhas do campo magnético e o comprimento da circunferência maior do Plasma ($2\pi R_0$). Para configurações deste tipo o critério de estabilidade é então,

$$\frac{rB^2}{8} \left(\frac{q'}{q}\right)^2 > (-p')(1 - q^2) \quad ,$$

onde

$$\frac{q'}{q} = \frac{d}{dr} \left(\frac{B}{rB_p}\right) / \left(\frac{B}{rB_p}\right) \quad .$$

Em seguida, Shafranov e Yurchenko [15] trataram o caso de superfícies de fluxos circulares com perfis de $j_\phi(r)$ e $q(r)$ arbitrários. Usando tanto a análise dos modos normais para grandes m , quanto o método do princípio da energia, eles demonstraram que esta última equação é a generalização correta do critério de Suydam para geometria toroidal.

A primeira consequência deste critério é que a estabilidade dos modos é alcançada se $q > 1$ para todo r . Para distribuições de corrente monotonamente decrescente q tem seu mais baixo valor sobre o eixo, então $q_0 > 1$ garante a estabilidade.

Para finalizar a descrição dos critérios de estabilidade, vamos citar a teoria de estabilidade- σ , desenvolvida por Goedbloed e Sakanaka [1], e que será utilizada por nós neste trabalho.

Os autores desta teoria definiram um funcional de energia, W^σ , da forma

$$W^\sigma = W + \sigma^2 I$$

onde $W = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} d\tau$ é a variação da energia potencial já definida por Bernstein [12] e I é o virial

$$I = \frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \rho \vec{\xi} d\tau .$$

A grande diferença entre a equação σ -Euler obtida por esta teoria, para descrever o comportamento do plasma,

$$[f(\sigma)\chi']' - g(\sigma)\chi = 0 ,$$

sendo $\chi = r\xi_r$, $\chi(r=0) = \chi(r=a) = 0$;

e a equação usual obtida por Newcomb [3], é o fato de que a equação acima é não singular para $\sigma^2 > 0$, enquanto que a equação de Euler marginal ($\sigma = 0$), possui singularidades nos pontos onde $F = 0$, sendo $F = \frac{mB_\theta}{r} + kB_z$.

Usando o critério de Jacobi para o cálculo variacional, foi possível formular o seguinte teorema para estabilidade- σ : "para valores especificados de m e k , o pinch linear difuso é estável- σ , se e só se, a solução não trivial da equação de σ -Euler que se anula em $r=0$, não possua um zero no intervalo aberto $(0, a)$ ", (Goedbloed e Sakanaka [1]). O ponto $r = a$ é onde se encontra a parede ideal condutora

que limita um plasma cilíndrico.

Um equilíbrio é dito estável- σ se não existir nenhuma perturbação que cresça mais rapidamente do que $\exp(\sigma t)$, e caso contrário, é instável- σ . Se o equilíbrio for instável- σ , pode-se determinar a razão de crescimento γ da instabilidade, simplesmente aumentando-se o valor de σ tal que o zero de σ se desloque da região entre 0 e a até a posição a . Neste ponto o equilíbrio é marginalmente instável- σ , isto é, $\gamma = \sigma$.

A conexão entre esta teoria e o lado instável do espectro é feita ao se substituir σ^2 por $-\omega^2$ na equação σ -Euler, resultando em

$$[f(i\omega)\chi']' - g(i\omega)\chi = 0, \quad \chi(0) = \chi(a) = 0,$$

e que apresenta propriedade Sturmiana.

A vantagem em se utilizar o critério de estabilidade- σ , é que pode-se analisar a estabilidade de um sistema em intervalos de tempo de interesse, em vez de tempos infinitamente longos como é de costume nas análises usuais. Ou seja analisa-se perturbações que cresçam mais rapidamente do que $\exp(\sigma t)$, onde $\sigma = 1/\tau$, se τ é algum tempo característico necessário para a fusão. Esta aproximação para a estabilidade não está necessariamente restrita aos problemas de estabilidade de plasma termonuclear, pode inclusive ser muito útil para qualquer problema físico, onde um sistema dinâmico é estudado somente durante um período de tempo limitado. Na física de plasma por exemplo, poderia-se escolher τ como sendo o tempo durante o qual considera-se as equações da magnetohidrodinâmica simplificadas, como sendo uma aproximação

razoável da situação real. Um outro exemplo seria, um plasma que está contido durante um tempo que é unicamente determinado pelo decaimento das correntes externas; neste caso escolheria-se como sendo o tempo de decaimento das correntes, para se estudar a questão da estabilidade durante este tempo.

Os critérios de estabilidade descritos até agora são mais do que suficientes para analisar a instabilidade Kink, que é o objeto de estudo deste trabalho.

Como já dissemos, as perturbações de modo azimutal $m = 1$ são denominadas Modo Kink. Nos parágrafos precedentes descreveu-se o mecanismo pelo qual o modo se torna instável e as possíveis maneiras de estabilizá-lo. Este modo é classificado em três classes: Modo Kink Interno, Modo Kink Central e Modo Kink Externo.

O Modo Kink Interno foi previsto teoricamente por Shafranov [16] em tokamaks de baixo- β , sendo considerado baixo- β , os valores de β da ordem de 0.01. Esta instabilidade caracteriza-se principalmente pelo fator de segurança $q(r) = \frac{rB_z}{R_0 B_\theta}$ ser monotonicamente crescente, e pelo fato do vetor de deslocamento $\vec{\xi}$ ser constante para $r \leq r_0$ e zero para $r > r_0$. O ponto r_0 é o ponto de singularidade onde $\mu(r_0) = -k$ ou $q(r_0) = 1$. A instabilidade só é possível devido à presença deste ponto singular, daí o porque da instabilidade não ocorrer para $q_{\min}(r) = q(0) > 1$. Estas considerações teóricas estão ilustradas na Fig.(1.a). Os perfis de equilíbrio, pressão, $p(r)$, o inverso do passo das linhas de campo magnético helicoidal, $\mu(r)$, e a densidade de corrente longitudinal, $j_z(r)$, se caracterizam por serem monotonicamente crescentes

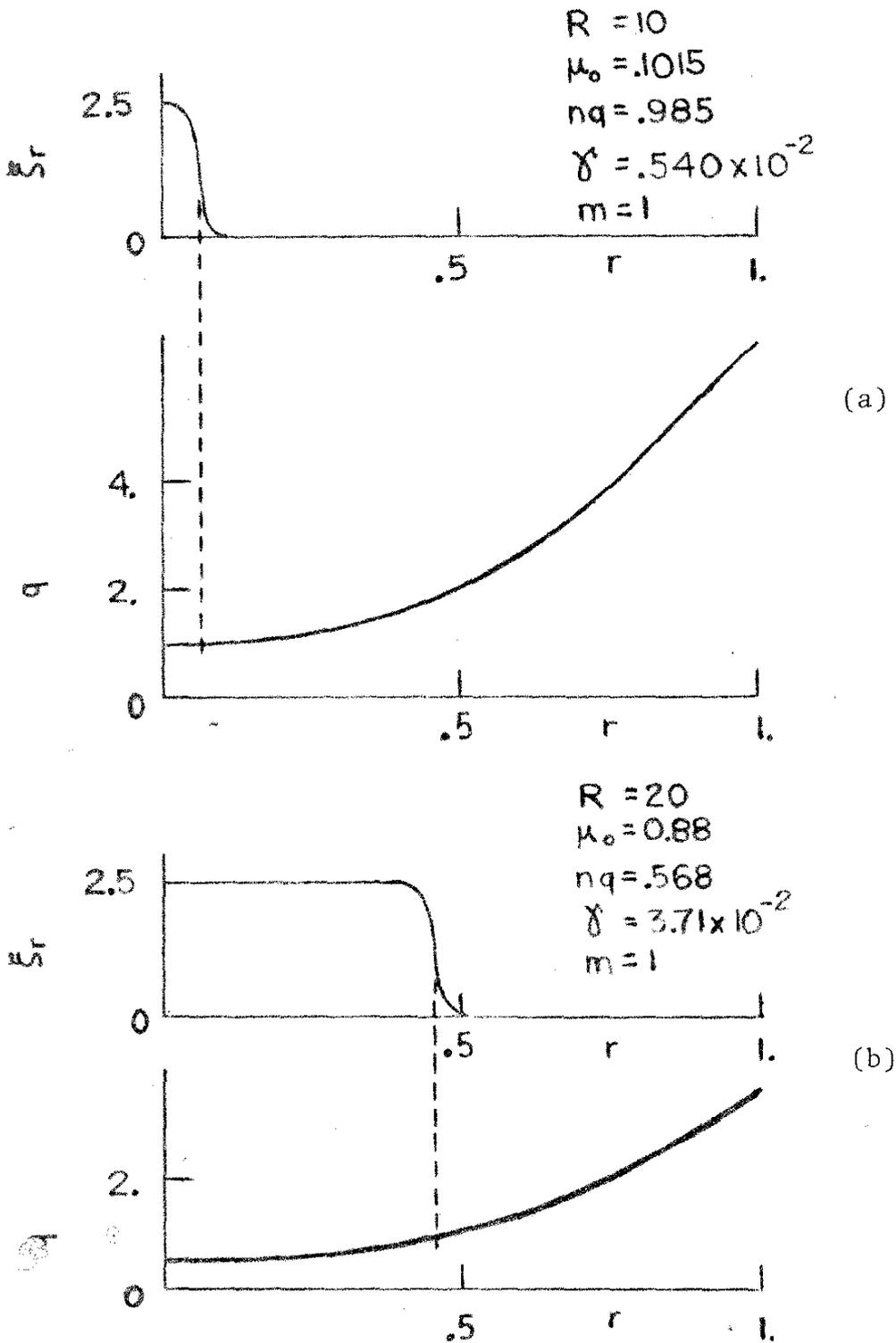


Fig. (1)* Auto função ξ_r , e o fator de segurança, q , para o Modo Kink. (a) Modo Kink Central. (b) Modo Kink Interno.

(*) Extratída da tese de mestrado do Hisataki Shigueoka [17].

Um outro Modo Kink, o que foi denominado Kink Central por Shigueoka [17] é mostrado na Fig.(1.b). Este Modo possui as mesmas propriedades do Modo Kink Interno, sendo que o ponto singular r_0 está localizado muito próximo do, ou sobre, o eixo magnético, e $q(r=0) = 1 \pm \epsilon$, onde ϵ é pequeno. Este modo instável tem surgido para $\frac{R_0}{a} < 15$, em contraste com o Modo Kink Interno que só aparece para $\frac{R_0}{a} > 15$, para os perfis de equilíbrio considerado.

Finalmente, o terceiro Modo Kink aparece para um equilíbrio de alto- β [1], sendo alto- β os valores de β entre 0.1 e 1.0 (máximo valor possível). Este modo instável é obtido para perfis de $\mu(r)$ crescente. Tais configurações têm distribuições de densidade de correntes diferentes das de um tokamak de baixo- β . Num tokamak de baixo- β a corrente longitudinal é alta no eixo, para se criar um perfil de $\mu(r)$ decrescente com bastante cisalhamento das linhas de força para a estabilidade. Num tokamak de alto- β o cisalhamento necessário é criado de maneira oposta, ou seja, por baixas densidades de corrente no eixo e altas na região exterior. A Fig. (2) mostra o perfil de equilíbrio que é mais ou menos uma imagem oposta daquele de um tokamak de baixo- β . Pela sua característica, a instabilidade de modo $m = 1$ para tokamak de alto- β é denominada instabilidade de Modo Kink Externo.

O objetivo deste trabalho é o estudo da estabilidade dos Modos Kink Interno e Kink Central através da teoria de estabilidade- σ , devido a efeitos de variações nos perfis de pressão, ou seja do termo $\beta \left(\frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right)$, e variações nos perfis de densidade de corrente $j_z(r)$. Tenta-se aqui verificar

$$P(r) = 0.2 \exp[-32r^4]$$

$$\mu(r) = 0.25 \exp[3r^2 - 2r^4]$$

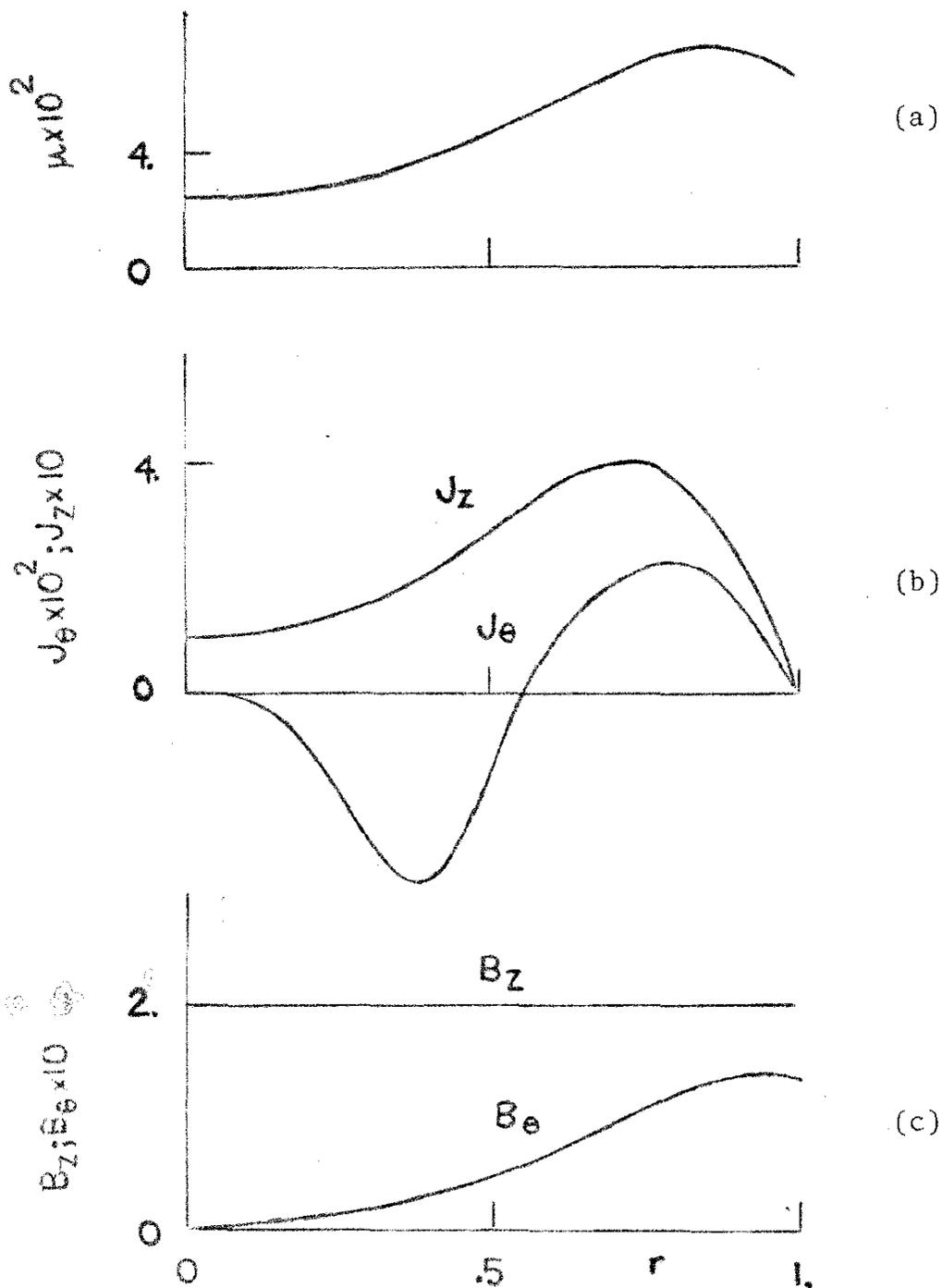


Fig. (2)* Perfil de Equilíbrio de Tokamak de alto- β . $\beta=0.1$. (a) perfil do passo magnético helicoidal μ . (b) perfis das densidades de correntes toroidal, J_z , e poloidal, J_θ . (c) perfis dos campos magnéticos toroidal, B_z , e poloidal, B_θ .

(*) Extraída da tese de mestrado do Hisataki Shigueoka [17].

se perfis de equilíbrio da forma $p(r) = p_0 \left[1 - \alpha \frac{r^2}{a^2} - (1-\alpha) \frac{r^4}{a^4} \right]$ e $j_z(r) = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^Y$, estabilizam ou desestabilizam os modos instáveis de um plasma cilíndrico, isto é, o quanto a razão de crescimento da instabilidade diminui ou aumenta pelo fato de se variar estes perfis de equilíbrio.

O conteúdo deste trabalho está distribuído da maneira que se segue. No capítulo II está apresentado o modelo teórico por nós adotado, e a técnica utilizada na resolução dos sistemas de equações que descrevem o comportamento do plasma (teoria da camada limite).

O capítulo III está dividido em três partes, sendo que na segunda delas, III-2, é feita a análise do Modo Kink Interno, analítica e numericamente, para as duas regiões em torno da camada inercial do plasma. É encontrada através do casamento assintótico das soluções para as regiões interna e externa a esta camada, a solução analítica geral para este modo. Na seção III-3 é explorado o Modo Kink Central para o qual obtém-se, depois das considerações necessárias, uma equação de auto-valor que será integrada numericamente. Tanto para o Modo Kink Interno como para o Modo Kink Central, as análises são iniciadas a partir da equação de σ -Euler, para o caso $m = 1$ e $k^2 r^2 \ll 1$, deduzidas da equação original de Goedbloed e Sakanaka [1].

O capítulo IV apresenta os resultados obtidos analítica e numericamente, como também a análise destes resultados para os dois modos.

No capítulo V tem-se as conclusões do trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

MODELO TEÓRICO

O trabalho por nós desenvolvido toma como configuração de equilíbrio, uma coluna de plasma cilíndrica infinita e periódica de raio a e período $L = 2\pi R$. Circula no plasma uma corrente longitudinal I_z na direção do campo B_z aplicado externamente, e esta corrente cria um campo magnético poloidal B_θ . A situação acima descrita está mostrada na figura (3).

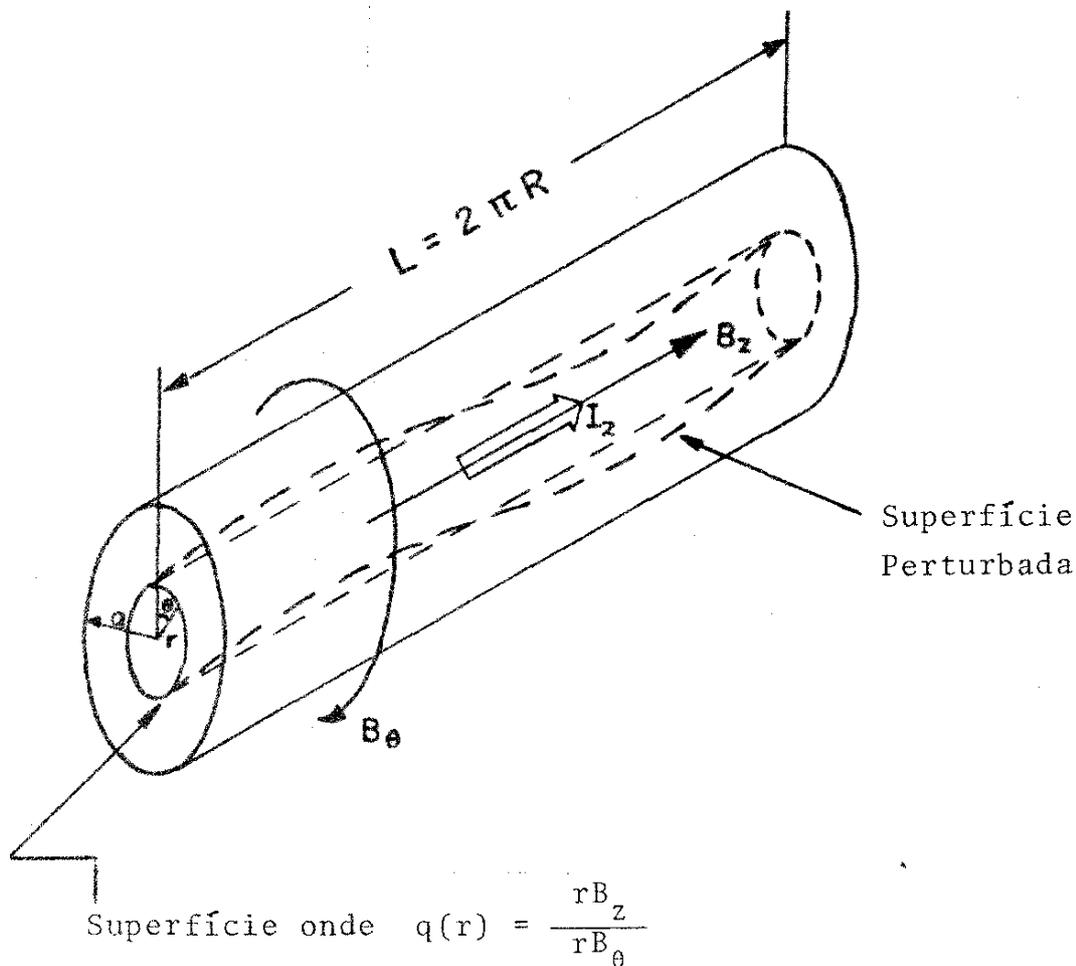


Fig. (3) - Modelo Teórico

Este sistema é um modelo de uma "coluna" toroidal de plasma de raio maior R e raio menor a , como em um tokamak [2]. Tem-se que, devido a estabilidade o campo poloidal B_θ é muito menor que o campo longitudinal B_z , ou seja, $B_\theta/B_z - a/R \ll 1$. O equilíbrio é considerado simétrico com relação ao centro da coluna de plasma e desta maneira, todas as grandezas de equilíbrio dependem somente da coordenada radial r . Assim as perturbações no entorno deste equilíbrio podem ser descritas em termos das componentes de Fourier nas coordenadas θ e z , isto é,

$\vec{\xi}(r, \theta, z, t) = \vec{\xi}(r) \exp [i(m\theta + kz - \omega t)]$, onde $\vec{\xi}$ representa o deslocamento do elemento da coluna de plasma localizada no ponto (r, θ, z) .

Como o nosso sistema de equilíbrio (coluna periódica de período $L = 2\pi R$) é um modelo para um sistema toroidal de raio maior R e raio menor a , um número inteiro n de comprimento de onda deve estar contido em um período do sistema, isto é

$$2\pi R = n\lambda .$$

Mas o comprimento de onda na direção longitudinal é dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} .$$

Sendô $\xi = n$, temos:

$$k = \frac{n}{R} .$$

De acordo com as observações experimentais, somente os modos com comprimento de onda longo (pequeno valor de

n) e $m = 1$, apresentam riscos para a situação de equilíbrio. Neste trabalho nós vamos nos restringir a um desses casos, a $|n| = 1$ e $m = 1$.

Um outro detalhe importante é que vamos nos deter a sistemas toroidais de grande razão de aspecto, ou seja a sistema onde $R/a \gg 1$. Tem-se então que:

$$ka \ll 1 .$$

Isto significa que vamos considerar somente os modos com comprimento de onda longo, comparado com o raio menor, a , da coluna de plasma.

Esta quantidade de ka , que é pequena, é usada como o parâmetro de comparação para as diversas quantidades que aparecem nas equações e cálculos por nós desenvolvidos.

As equações MHD ideais que descrevem o comportamento do plasma quando sujeito a perturbações no entorno do estado de equilíbrio, são resolvidas empregando-se a teoria da camada limite [6]. A razão disso é que a solução não trivial destas equações satisfazendo as devidas condições de contorno, tem em geral, um ou vários pontos singulares dentro do plasma onde esta solução diverge. Então no entorno desses pontos, considera-se uma pequena camada de espessura $\tau \ll a$, onde os fatores que queremos estudar (no nosso caso, a inércia do plasma e a razão de crescimento da instabilidade do modo) , não são desprezíveis. O sistema de equações resultantes para esta camada é resolvido com a condição de contorno de que sua solução tenda assintoticamente para a solução das equações das regiões externas a esta camada (onde para o nosso caso, a inércia do plasma, $\rho \sigma^2$, é praticamente nula). Se a equação

é uma equação de auto-valor, este é obtido através da condição de casamento assintótico das soluções nestas diferentes regiões. Esta situação está mostrada na Fig.(4).

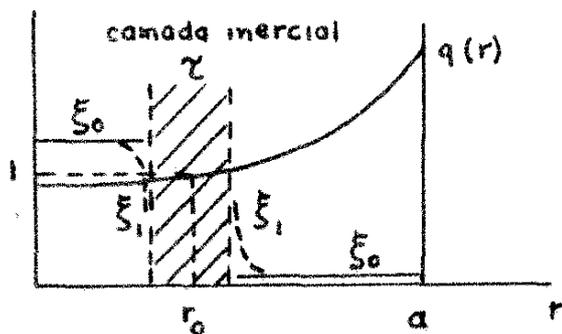


Fig.(4) - Técnica de Camada Limite

CAPÍTULO III

ANÁLISE DO MODO KINK INTERNO E KINK CENTRAL

III-1. Introdução

O desenvolvimento das análises do modo kink interno até atualmente feito, usando a técnica da camada limite, obtêm a auto função ξ para este modo resolvendo para a região interna à camada inercial, a seguinte equação [4]

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0 . \quad (3-1)$$

Em (3-1), $f = r^3(\rho\sigma^2 + F^2)$ como é mostrado no apêndice A, equação (A-2), e

$$g = k^2 r (r p' + 3k^2 r^2 B_z^2 + 2kr B_z B_\theta - B_\theta^2) ,$$

expressão esta obtida por Rosenbluth, Dagazian e Rutherford [4] , e que assume $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$.

Entretanto, quando os termos de inércia são incluídos na equação de modos normais ($\sigma \neq 0$), $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ não mais minimiza a energia associada com o modo. A equação de modos normais pode então ser obtida a partir da equação de Euler para a estabilidade- σ de Goedbloed e Sakanaka [1] , dada por

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

ou seja, a equação (A-1) do apêndice A

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} [(\rho\sigma^2 + F^2) \frac{\rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{D} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi)] - \\ & - [\rho\sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r}\right)' - \frac{4k^2 B_\theta^2}{r^2} \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \gamma p F^2}{D} + \\ & + r \left\{ \frac{2kB_\theta}{r^2} \left(\frac{mB_z}{r} - kB_\theta\right) \frac{\rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{D} \right\}'] \xi = 0 \quad (A-1) \end{aligned}$$

onde

$$F = \frac{mB_\theta}{r} + kB_z = \frac{1}{r} (mB_\theta + krB_z) ,$$

$$D = \frac{(m^2 + k^2 r^2)}{r^2} \left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right] .$$

Nas expressões acima, a variável ξ é a componente radial do deslocamento perturbado de um elemento do fluido, ρ é a densidade do fluido, σ é o parâmetro pré-fixado da técnica de estabilidade- σ , γ é a razão dos calores específicos.

De acordo com Goedbloed e Sakanaka [1], a minimização do funcional de energia modificado, W^σ , por eles definido, obtém uma expressão para $\nabla \cdot \vec{\xi}$ da forma:

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{\rho\sigma^2}{D} [(\rho\sigma^2 + F^2) \frac{1}{r} (r\xi)' - 2 \frac{kB_\theta}{r} \left(\frac{mB_z}{r} - kB_\theta\right) \xi] .$$

Se calcularmos $\nabla \cdot \vec{\xi}$ no ponto $r = r_s$ usando a expressão para ξ obtida por Rosenbluth, Dagazian e Rutherford [4], (que foi encontrada assumindo $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$),

$$\xi = \frac{1}{2} \xi_a \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{|F'|_{r_s}}{\rho^{1/2} \sigma} x \right| ; x = r - r_s$$

nós obtemos

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = k^2 r_s^2 \frac{\xi_a}{r_s}$$

que é pequeno, mas de mesma ordem da razão de crescimento $\sigma = k^2 r_s^2 \tau_H^{-1}$.

Nós vamos então resolver novamente a equação para a camada mantendo $\nabla \cdot \xi \neq 0$.

Quando $m = 1$ e $k^2 r^2 \ll 1$, que é o caso do nosso problema, a equação (A-1) se reduz a:

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

onde

$$f = r^3(\rho\sigma^2 + F^2) \tag{A-2}$$

$$g = 2k^2 r^2 \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} r(\rho\sigma^2 + F^2) + r \left\{ (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) + \rho\sigma^2 + 2 \frac{B_\theta^2}{r} T \right\} \tag{A-3}$$

e

$$F = \frac{B_\theta}{r} + kB_z$$

$$T = \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}$$

de acordo com os cálculos desenvolvidos no apêndice A.

Vamos trabalhar com as equações (A-2,3) em duas regiões distintas da camada inercial. Uma delas, a região externa, é caracterizada por $\rho\sigma^2 = 0$, isto é, a inércia do plasma é desprezível; e a outra região se situa nas vizinhanças onde $F = 0$ e nesta, $\rho\sigma^2 \neq 0$. Devido ao fato desta camada ser extremamente fina, consideramos a geometria do problema como sendo planar, ou seja, os termos de curvatura não

são incluídos.

Faremos duas análises distintas do problema: a primeira delas é quando a camada inercial está localizada longe do eixo magnético, e nos referimos a este caso como o modo kink interno.

A segunda situação é quando a camada inercial do plasma é ressonante com o eixo magnético, e este caso é chamado de modo kink central.

III-2. Análise da Estabilidade- σ do Modo Kink Interno

III-2.1. Solução Analítica

- Região Interna à Camada Inercial .

Nós vamos resolver a equação de Euler

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

onde f e g são dados pelas expressões (A-2) e (A-3) respectivamente, na camada inercial em torno de r_0 . Neste ponto temos que:

$$F = \frac{B}{r} + kB_z = 0 \quad ; \quad F(r_0) = 0$$

ou seja, a equação de Euler tem um ponto singular no ponto $r = r_0$.

De acordo com o desenvolvimento matemático e as argumentações físicas apresentadas no apêndice A, chegamos à equação

$$t(1-t) \frac{d^2\xi}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right) \frac{d\xi}{dt} + \frac{D}{4} \xi = 0 \quad (A-11)$$

onde $t = z^2$ e

$$z = \frac{1}{\tau} \frac{r - r_0}{a} \quad (A-4)$$

é a variável adimensional da camada inercial; τ é a largura adimensional da camada inercial; e a o raio da coluna de plasma.

As soluções desta equação são:

$$\xi_1(z) = {}_2F_1\left(a, \frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}; -z^2\right) \quad (3-2)$$

e

$$\xi_2(z) = z {}_2F_1\left(a + \frac{1}{2}, 1 - a, \frac{3}{2}; -z^2\right), \quad (3-3)$$

onde $a = \frac{1}{4} [1 - \sqrt{1 + 4D}]$

e
$$D = \left[\frac{a}{r} \frac{(ka)^2}{(a^2 \mu')^2} \beta \left(\frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right) \right]_{r=r_0} \quad (A-10)$$

Assim a solução mais geral para a equação de σ -Euler é:

$$\xi(z) = C_1 \xi_1(z) + C_2 \xi_2(z) \quad (3-4)$$

Vamos ver qual é o comportamento assintótico das soluções (3-2) e (3-3).

$$\xi_1(z) = {}_2F_1\left(a, \frac{1}{2} - a; \frac{1}{2}; -z^2\right)$$

pode ser reescrita como:

$$\xi_1(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - 2a)}{\Gamma(\frac{1}{2} - a) \Gamma(\frac{1}{2} - a)} F\left(a, \frac{1}{2} + a; \frac{1}{2} + 2a; \frac{1}{-z^2}\right) \frac{1}{z^{2a}} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + 2a)}{\Gamma(a) \Gamma(a)} F(\frac{1}{2} - a, 1 - a; \frac{3}{2} - 2a; \frac{-1}{z^2}) \cdot \frac{1}{z^2(\frac{1}{2} - a)} \quad (3-5)$$

A expressão (3-3) nos dá

$$\xi_2(z) = z {}_2F_1(a + \frac{1}{2}, 1 - a; \frac{3}{2}; -z^2),$$

que da mesma maneira de ξ_1 se escreve como

$$\begin{aligned} \xi_2(z) &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - 2a)}{[\Gamma(1 - a)]^2} F(a + \frac{1}{2}, a; \frac{1}{2}; \frac{1}{-z^2}) \frac{z}{z^2(a + \frac{1}{2})} + \\ &+ \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(2a - \frac{1}{2})}{[\Gamma(\frac{1}{2} + a)]^2} F(1 - a, \frac{1}{2} - a; \frac{3}{2} - 2a; \frac{1}{-z^2}) \frac{z}{z^2(1-a)}. \end{aligned} \quad (3-6)$$

Desde que

$$2a = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4D}) \quad ; \quad 1 - 2a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4D}) \quad \text{temos}$$

que se $D < 0$, (que é o nosso caso), $2a \ll (1 - 2a)$.

A solução geral (3-4) em termos de (3-5) e (3-6), torna-se:

$$\begin{aligned} \xi(z) &= C_1 \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - 2a)}{[\Gamma(\frac{1}{2} - a)]^2} F(a, \frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} + 2a; \frac{-1}{z^2}) \frac{1}{z^{2a}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2a - \frac{1}{2})}{[\Gamma(a)]^2} F(\frac{1}{2} - a, 1 - a; \frac{3}{2} - 2a; \frac{-1}{z^2}) \frac{1}{z^{(1-2a)}} \right\} \\ &+ C_2 \left\{ \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - 2a)}{[\Gamma(1-a)]^2} F(a + \frac{1}{2}, a; \frac{1}{2}; \frac{-1}{z^2}) \frac{1}{z^{2a}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(2a - \frac{1}{2})}{[\Gamma(\frac{1}{2} - a)]^2} F(1 - a, \frac{1}{2} - a; \frac{3}{2} - 2a; \frac{-1}{z^2}) \frac{1}{z^{(1-2a)}} \right\} \end{aligned} \quad (3-7)$$

Portanto o termo em $\frac{1}{z^{2a}}$ na expressão (3-7) é dominante com relação ao termo $\frac{1}{z^{(1-2a)}}$.

Quando $z \rightarrow \infty$, o termo $\frac{-1}{z}$ da hipergeométrica tende a zero, de modo que o primeiro termo desta série é 1. Sabendo que $\xi(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, temos que

$$\xi(z \rightarrow \infty) \approx \left[C_1 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - 2a)}{[\Gamma(\frac{1}{2} - a)]^2} + C_2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - 2a)}{[\Gamma(a)]^2} \right] \frac{1}{z^{2a}} \rightarrow 0$$

ou seja,

$$C_2 = -2 \left[\frac{\Gamma(1 - a)}{\Gamma(\frac{1}{2} - a)} \right]^2 C_1$$

Isto significa que de agora por diante, o comportamento dominante de ξ será dado por $1/z^{(1-2a)}$. De forma geral,

$$\xi(z) = C_1 \left[\xi_1(z) - 2 \left\{ \frac{\Gamma(1 - a)}{\Gamma(\frac{1}{2} - a)} \right\}^2 \xi_2(z) \right] \quad (3-8)$$

Podemos notar que se $\beta = 0$, $D = 0$ e $a = 0$, teremos $\xi_1 = 1$,

$$\Gamma(1 - a)/\Gamma(\frac{1}{2} - a) = 1/\sqrt{\pi}, \quad \text{ou seja,}$$

$$\xi_2 = 2 \operatorname{arctg} z$$

que é a expressão obtida por Rosenbluth, Dagazian e Rutherford [4].

Se $\beta \neq 0$, o casamento assintótico da solução interna quando $z \rightarrow -\infty$ depende de se saber a solução da região externa à externa.

Vamos agora então encontrá-la.

- Região Externa à Camada Inercial .

Na região externa à camada inercial, o termo de inércia do plasma, $\rho\sigma^2$, é ≈ 0 , como já falamos anteriormente.

Então as expressões (A-2) e (A-3) para f e g , respectivamente, tornam-se

$$f = r^3 F^2 \quad , \quad (3-9)$$

$$g = g_1 = 2k^2 r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r F^2 + r \left(k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2} \right) \right] \quad . \quad (3-10)$$

E a equação de Euler que descreve o sistema nesta região é portanto

$$\frac{d}{dr} (r^3 F^2) \frac{d\xi}{dr} - g_1 \xi = 0 \quad , \quad (3-11)$$

com as condições de contorno

$$\begin{cases} \xi = 1 & r = 0 \\ \xi = 0 & r = a \end{cases} \quad (3-12)$$

Inspecionando a equação (3-11) vemos que:

$$\frac{|g_1|}{|rF^2|} \sim (ka)^2 \ll 1 \quad .$$

Com isso podemos escrever a solução da equação (3-11) como uma expansão em potências do parâmetro $(ka)^2$. Fazendo $\epsilon = (ka)^2$ temos

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots$$

Portanto a equação (3-11) para ξ_0 é

$$\frac{d}{dr} r^3 F^2 \frac{d}{dr} \xi_0 = 0 \quad (3-13)$$

cuja solução (que obedece a (3-12)) é da forma

$$\xi_0 = \begin{cases} \text{const.} & r < r_0^- \\ 0 & r_0^+ < r < a \end{cases} \quad (3-14)$$

Quanto à equação para ξ_1 , desde que este é da ordem de ϵ , $\epsilon = (ka)^2 \sim \xi_1 \xi_0$, temos de (3-11),

$$\frac{d}{dr} r^3 F^2 \frac{d}{dr} \xi_1 - g_1 \xi_0 = 0 \quad (3-15)$$

Integrando esta última equação obtemos

$$\frac{d}{dr} \xi_1 = \frac{\xi_0}{r^3 F^2} \int_0^r g_1(r) dr \quad 0 < r < r_0^- \quad (3-16)$$

$$\frac{d}{dr} \xi_1 = \frac{\xi_0}{r^3 F^2} \int_0^{r_0} g_1(r) dr \quad r_0^+ < r < a$$

Temos então que fazer o casamento assintótico entre a solução interna, equação (3-8) e a solução externa. Para isso vamos analisar a solução interna em termos do parâmetro $\epsilon = (ka)^2$, já introduzido.

A quantidade D, dada pela expressão (A-10) é $\sim (ka)^2$. Assim, como tínhamos

$$a = \frac{1}{4} \left[1 - \sqrt{1 + 4D} \right],$$

podemos reescrevê-la sob a forma

$$a \approx \frac{1}{4} [1 - (1 + 2 \epsilon \mathfrak{D})] = - \epsilon \frac{\mathfrak{D}}{2}$$

onde

$$\mathfrak{D} = \frac{a}{r_0} \left[\frac{\beta}{(a^2 \mu')^2} \left(\frac{a}{p_0} \frac{dp}{dr} \right) \right]_{r=r_0} - 1$$

ou seja,
$$\mathfrak{D} = \frac{D}{(ka)^2} .$$

Isso nos permite expandir a solução interna em potências de ϵ como fizemos para a solução externa.

Convém notar que só podemos considerar a solução interna dada por (3-8) até a primeira ordem em ϵ , já que os termos de ordem ϵ^2 foram desprezados na equação a partir da qual nós obtivemos esta solução.

Usando (3-8), a solução interna de ordem zero é dada por:

$$\xi^{(0)} = C_1 \left[{}_2F_1 \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -z^2 \right) - 2 \left(\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right)^2 z {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2 \right) \right]$$

ou

$$\xi^{(0)} = C_1 \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg z \right] . \tag{3-17}$$

Quando $z \rightarrow -\infty$ a solução interna (3-17) é escrita como:

$$\begin{aligned} \xi^{(0)} &\approx C_1 \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^2} + \dots \right) \right] \\ \dots \xi^{(0)} &\approx C_1 \left[2 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{3z} + \dots \right) \right] . \end{aligned} \tag{3-18}$$

Quando $r \rightarrow r_0^-$ a solução externa é dada por

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots$$

com

$$\frac{d\xi_1}{dr} = \frac{\xi_0}{r^3 F^2} \int_0^{r_0} g_1 dr \quad ,$$

sendo $F = \frac{B_{z0}}{a} \cdot (a^2 \mu') \tau z \quad ,$

de acordo com o desenvolvimento feito no apêndice A.

Como $z = \frac{1}{\tau} \frac{r - r_0}{a}$

temos

$$\xi_1 \approx \frac{-\xi_0}{r_0^3 B_{z0}^2 (\mu')^2 (r - r_0)} \int_0^{r_0} g_1(r) dr \quad .$$

Assim o casamento assintótico pode ser conseguido

se

$$2C_1 = \xi_0 \rightarrow C_1 = \frac{\xi_0}{2}$$

e

$$\frac{2}{\pi} C_1 \frac{1}{z} = \frac{\xi_0}{r_0^3 B_{z0}^2 (\mu')^2 (r - r_0)} \int_0^{r_0} g_1(r) dr$$

isto é,

$$\frac{a \tau}{r - r_0} = \frac{-\pi}{r_0^3 B_{z0}^2 (\mu')^2 (r - r_0)} \int_0^{r_0} g_1(r) dr \quad .$$

Desde que τ foi definido como

$$\tau^2 = \frac{a^2 \rho \sigma^2}{B_{z0}^2 (a^2 \mu')^2} \quad , \quad (A-5)$$

a expressão acima nos fornece

$$\sigma = - \frac{\pi}{r_0^3 \sqrt{\rho} B_{z0} |\mu'| r_0} \int_0^{r_0} g_1(r) dr \quad , \quad (3-19)$$

que é a razão de crescimento da instabilidade por nós procurada.

Vemos então que a solução interna de ordem zero já é o suficiente para determinar a razão de crescimento e a largura τ da camada inercial.

A solução completa é dada portanto por

$$\xi(r) \approx \frac{\xi_0}{2} \left[{}_2F_1 \left(-\epsilon \frac{M}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon \frac{M}{2}, \frac{1}{2}; -z^2 \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\Gamma(1 + \epsilon \frac{M}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \epsilon \frac{M}{2})} z {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - \epsilon \frac{M}{2}, 1 + \epsilon \frac{M}{2}, \frac{3}{2}; -z^2 \right) \right] \quad (3-20)$$

e está mostrada na figura (5).

Na equação (3-20)

$$z = \frac{r - r_0}{\tau} \quad ; \quad \tau = \frac{a \sqrt{\rho} \sigma}{B_{z0} (a^2 \mu')} = \tau_H \sigma$$

$$\tau_H = \frac{a}{V_A |a^2 \mu'|} \quad ; \quad V_A = \frac{B_z}{\sqrt{\rho}}$$

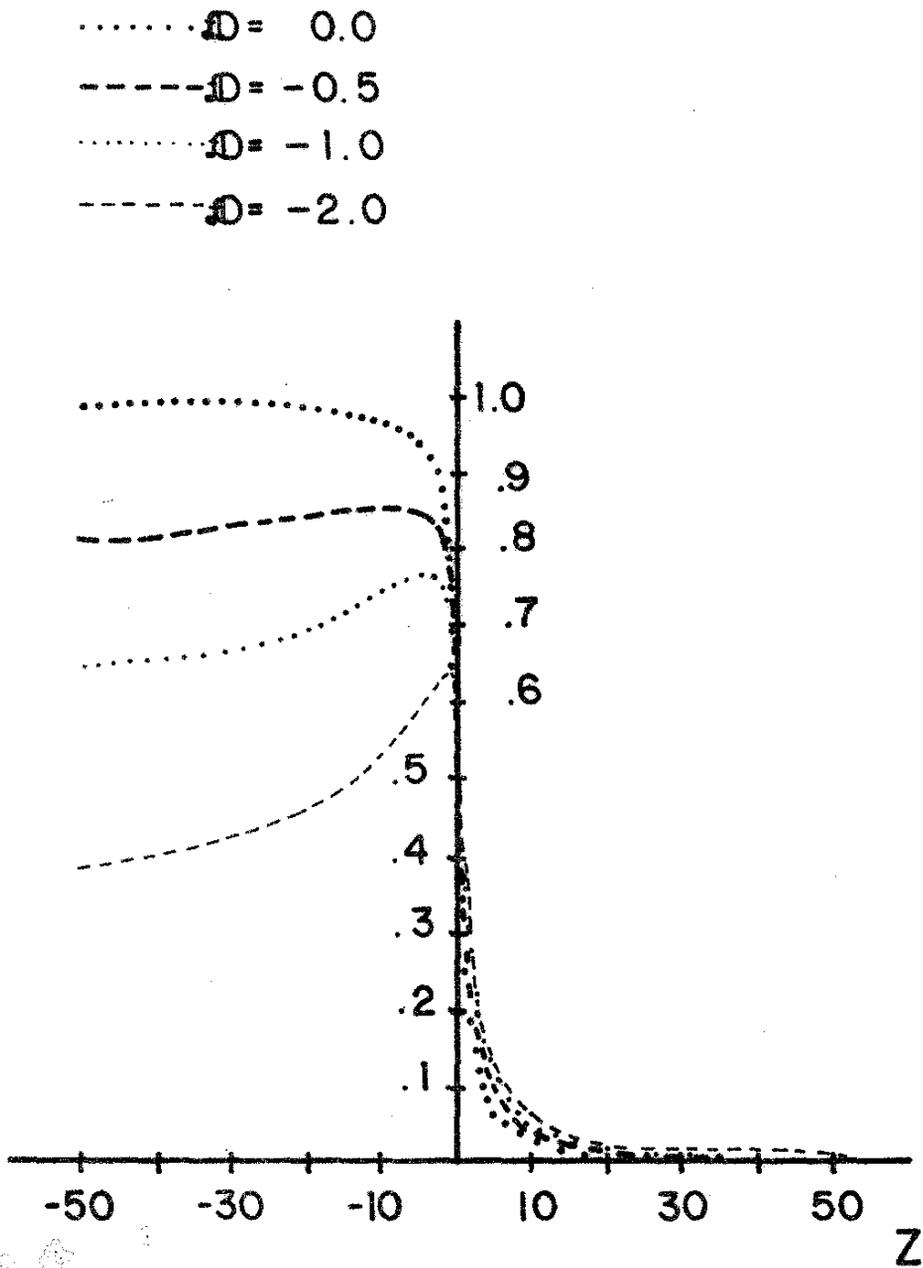


Fig.(5) Auto funções para o modo kink interno.

III-2-2. Modo Kink Interno - Solução Numérica

Abordamos o caso do modo kink interno também de uma outra maneira: integramos a equação

$$\frac{d}{dr} r^3 (F^2 + \rho\sigma^2) \frac{d\xi}{dr} - g_1 \xi = 0$$

no intervalo de 0 até a, com as condições de contorno

$$\xi(0) = 1, \quad \xi(a) = 0$$

onde

$$g_1(r) = 2k^2 r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r F^2 + r (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) \right].$$

Determinamos assim, a razão de crescimento σ , que é a solução desta equação de valor característico.

III-3. Análise da Estabilidade- σ do Modo Kink Central

Como já falamos anteriormente, o modo kink central é o caso degenerado do modo kink interno. Neste modo a camada inercial do plasma é ressonante com o eixo magnético, ou seja, estamos na superfície onde $\mu(0) = -k$.

Portanto a equação de Euler

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

tem um ponto singular em $r = 0$, já que, de acordo com as expressões (A-2) e (A-3) obtidas no apêndice A

$$f = r^3 (\rho\sigma^2 + F^2) \tag{A-2}$$

$$g = 2k^2 r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r(\rho\sigma^2 + F^2) + r \left\{ (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) + \rho\sigma^2 + 2 \frac{B_\theta^2}{r^2} T \right\} \right] \quad (A-3)$$

onde

$$F = \frac{B_\theta}{r} + kB_z$$

$$T = \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}$$

isto é ,

$$F(r = 0) = 0 .$$

Como no caso do modo kink interno, vamos trabalhar com as equações (A-2) e (A-3) em duas regiões distintas, externa e interna à camada inercial. Usaremos a técnica da camada limite para conseguir-se o casamento assintótico das soluções nas duas regiões, como mostrado na Fig.(4).

- Região Interna à Camada Inercial

Esta região se situa nas vizinhanças onde $F = 0$, e nela a inércia do plasma $\rho\sigma^2$, não é desprezível.

Tomando a equação de Euler

$$\frac{d}{dr} f - \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

onde f e g são dados pelas expressões (A-2) e (A-3) respectivamente, e introduzindo as definições

$$z = \frac{r}{a\tau} \quad (\text{variável adimensional da camada inercial})$$

τ (espessura da camada inercial)

a = raio da coluna de plasma

$$(\mu) = \frac{B_\theta}{rB_z}$$

$$\tau_H = \frac{a}{V_A} \text{ (tempo característico MHD)}$$

$$V_A = \frac{-B_{z0} (a^3 \mu'')}{2 \sqrt{\rho}} \text{ (velocidade de Alfvén)}$$

$$\Lambda^2 = \frac{\sigma^2 \tau_H^2}{\tau^4} \text{ (auto-valor a ser determinado)}$$

e considerando os perfis de pressão e corrente da forma

$$p(r) = p_0 \left(1 + \alpha_2 \frac{r^2}{a^2} + \alpha_4 \frac{r^4}{a^4} \right); \quad j_z(r) = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^\gamma,$$

obtemos a equação de auto-valor (B-11) para descrever a camada interna, de acordo com o desenvolvimento apresentado no apêndice B.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi}{dz} - 8k^2 a^2 \tau^{-2} z^2 \left[\frac{\beta_0}{(a^3 \mu'')^2} (\alpha_2 z + 2\alpha_4 \tau^2 z^3) + \right. \\ & + \frac{\tau^4}{8} z (3\Lambda^2 - z^4) + \frac{(ka)}{(a^3 \mu'')} \tau^2 z^3 + \\ & \left. + \Lambda^2 \frac{\gamma \beta_0}{(a^3 \mu'')^2} \frac{(aB'_p)^2}{(B_{z0})^2} \frac{z}{\frac{1}{2} \gamma \beta_0 (\Lambda^2 + z^4) + \Lambda^2} \right] \xi = 0. \quad (B-11) \end{aligned}$$

Vamos considerar somente o caso baixo β , isto é, $\beta_0 \sim k^2 a^2$. Temos então que

$$\frac{\beta_0}{(a^3 \mu'')} \sim 1, \quad \frac{(ka)}{(a^3 \mu'')} \sim 1, \quad \frac{\gamma \beta_0}{(a^3 \mu'')^2} \frac{(aB'_p)^2}{(B_{z0})^2} \sim k^2 a^2,$$

e o segundo termo da equação (B-11) fica da mesma ordem que a derivada de mais alta ordem se

$$\tau = ka \quad . \quad (3-21)$$

Esta relação estabelece a espessura da camada inercial no entorno de $r = 0$.

Portanto a equação (B-11) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi}{dz} - 8z^3 \left[\frac{\beta_0}{(a^3 \mu'')^2} (\alpha_2 + 2\alpha_4 \tau^2 z^2) + \right. \\ & + \frac{\tau^4}{8} (3\Lambda^2 - z^4) + \frac{(ka)}{(a^3 \mu'')} \tau^2 z^2 + \\ & \left. + \Lambda^2 \frac{\gamma \beta_0 (aB'_p)^2}{(a^3 \mu'')^2 (B_{z0})^2} \frac{1}{\frac{1}{2} \gamma \beta_0 (\Lambda^2 + z^4) + \Lambda^2} \right] \xi = 0 \quad . \quad (3-22) \end{aligned}$$

Nós fixamos $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$ e consideramos $\tau^2 \ll 1$. Então na camada inercial próximo da origem, supomos que a solução é dada por

$$\xi = \sum_n \tau^{2n} \xi_n$$

e substituímos esta expansão na equação (3-22). Na mais baixa ordem obtemos

$$\frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi_0}{dz} - Dz^3 \xi_0 = 0 \quad (3-23)$$

onde

$$D = \frac{8\beta_0 \alpha_2}{(a^3 \mu'')^2} \quad .$$

Em princípio nós teríamos que resolver esta equação (3-23) para ξ_0 , substituir na equação (3-22), solucionar

para ξ_1 , e assim por diante. Mas já a equação para ξ_0 possui mais pontos singulares do que a equação hipergeométrica e é bastante difícil solucioná-la analiticamente. A equação (3-23) tem então que ser integrada numericamente.

Vamos verificar o comportamento assintótico da solução quando $z \rightarrow \infty$.

A equação (3-23) quando $z \rightarrow \infty$ torna-se

$$\frac{d}{dz} z^7 \frac{d\xi_0}{dz} - Dz^3 \xi_0 = 0 \quad (3-24)$$

Supondo uma solução da forma

$$\xi_0 \approx z^a \Rightarrow a(a-1)z^{a+5} + 7az^{a+5} - Dz^{a+3} = 0$$

$$\Rightarrow a = -6.$$

Para encontrar a segunda solução, supomos $\xi_0 \approx e^{ax^b} f$, que substituída na equação (3-24) nos dá

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\frac{7}{z} + 2ab z^{b-1} \right] \frac{df}{dz} + \left[a^2 b^2 z^{2(b-1)} + ab(b+6)z^{b-2} - Dz^{-4} \right] f = 0 \quad (3-25)$$

$$\therefore b = -2,$$

$$ab(b+6) = D \Rightarrow a = -\frac{D}{8}.$$

Portanto, a equação (3-25) se escreve como

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\frac{7}{z} + \frac{D}{2z^3} \right] \frac{df}{dz} + \frac{D^2}{16z^6} f = 0$$

ou quando $z \rightarrow \infty$, fica-se com

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{7}{z} \frac{df}{dz} + \frac{D^2}{16z^6} f = 0 \quad (3-26)$$

Supondo que

$$f \approx e^{cz^d}$$

obtem-se, de (3-26),

$$c^2 d^2 z^{2d-2} + cd(d-1)z^{d-2} + 7cdz^{d-2} + \frac{D^2}{16} z^{-6} = 0$$

$$\therefore d = -4 \quad ; \quad c = \frac{D^2}{128}$$

Então as soluções assintóticas são

$$\xi_{01} \approx \frac{1}{z^6} e \quad (3-27)$$

$$\xi_{02} \approx e^{-D/8z^2 + D^2/128z^4} \approx 1 - \frac{D}{8z^2} \dots \quad (3-28)$$

Vamos agora determinar a solução na região exterior à camada inercial. Como no caso do modo kink interno, tomamos a equação

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g_1 \xi = 0 \quad (3-29)$$

onde $f = r^3 F^2$; $g_1 = g$ com $\rho\sigma^2 = 0$

(expressões (3-9) e (3-10)).

Desde que $g_1 \approx k^2 r^2 \ll 1$, a relação entre o primeiro e segundo termos da equação (3-29) é da ordem de $1/(kr)^2 \gg 1$. Desta forma a equação para ξ_0 na região exter-

na é simplesmente

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi_0}{dr} = 0 \quad , \quad (3-30)$$

ou seja , $\xi_0 = A \int \frac{dr}{r^3 F^2} + B \quad . \quad (3-31)$

Próximo de $r = 0$ temos que $F \sim r^2$, conforme os cálculos do apêndice B.

Então de (3-31) temos

$$\xi_0 = \frac{A_1}{r^6} + B_1 = C \left(1 - \frac{a^6}{r^6}\right) \quad (3-32)$$

sendo A_1, B_1, C , constantes.

O casamento assintótico das soluções interna e externa à camada inercial é feito da seguinte maneira.

A equação (3-23) da camada inercial

$$\frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi_0}{dz} - Dz^3 \xi_0 = 0 \quad (3-23)$$

é integrada a partir de $z = 0$ com as condições de contorno

$$\xi_0(0) = 1 ; \quad \left. \frac{d\xi_0}{dz} \right|_0 = 0 \quad . \quad \text{Quando } z \rightarrow \infty \text{ a solução deve}$$

se comportar como

$$\xi_0 = A_1 \xi_{01} + A_2 \xi_{02} \quad (3-33)$$

onde

$$\xi_{01} \approx \frac{1}{z^6} \quad (3-27) ; \quad \xi_{02} \approx 1 - \frac{D}{8z^2} + \dots \quad (3-28)$$

Quanto à região externa, obtivemos para ξ_0

$$\xi_0 \approx C \left(1 - \frac{a^6}{r^6} \right) \quad (3-32)$$

Portanto de (3-33) e (3-32), a condição de casamento assintótico é

$$\frac{A_1 \frac{1}{z^6}}{A_2} \approx - \frac{a^6}{r^6} = - \tau^{-6},$$

desde que $\tau = ka$, temos

$$\frac{A_2}{A_1} = - (ka)^6$$

ou seja, $\left| \frac{A_2}{A_1} \right| \ll 1 \quad (3-33)$

Como a solução ξ_{01} é sub-dominante com relação a ξ_{02} , não há possibilidade de se determinar a relação A_2/A_1 , numericamente. Mas a condição (3-33) é praticamente equivalente a impor $A_2 \rightarrow 0$.

Portanto uma boa aproximação para o auto-valor Λ^2 é obtida simplesmente integrando-se a equação (3-23) da região interna, com a condição de contorno

$$\xi_0(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{z} \quad (3-34)$$

O auto-valor Λ^2 é variado até que esta situação seja alcançada, não havendo necessidade de se integrar a equação de Euler-Lagrange na região externa. Isto é equivalente a considerar o modo localizado na origem, como mostra a figura 6(b).

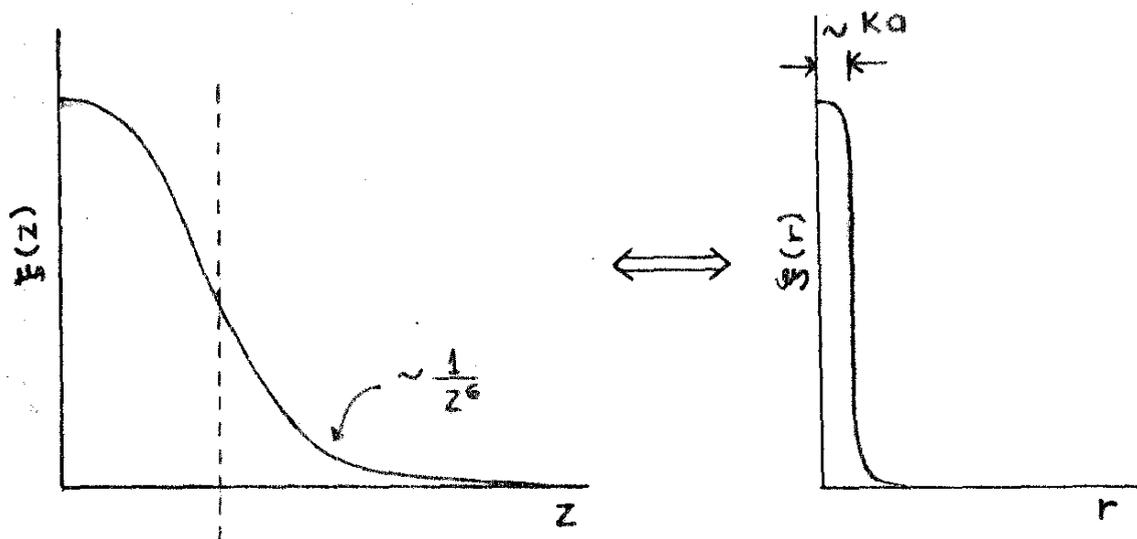


Fig.(6) Modo Kink Central.

A condição de contorno $\xi_0(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{z^6}$, para a integração da equação de auto-valor, localiza o modo na origem.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

IV-I. MODO KINK INTERNO

Resolvemos numericamente a equação

$$\frac{d}{dr} r^3 (\rho \sigma^2 + F^2) \frac{d\xi}{dr} - g_1 \xi = 0 ,$$

$$\text{onde } g_1 = 2k^2 r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r F^2 + r (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) \right] .$$

Desde que $F(r) \approx B_z(r_0) u'(r_0) [r - r_0]$, temos que g_1 pode ser reescrito como

$$g_1 = 2k^2 r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r B_z^2 u'^2 (r - r_0)^2 + r \left\{ B_z^2 u'^2 (r - r_0)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - 2B_z \frac{B_\theta}{r} u'(r - r_0) \right\} \right] ,$$

e portanto

$$g_1(r_0) = k^2 r_0^3 B_z^2 a^2 u'^2 \left[\frac{a}{r} \frac{1}{(a^2 u')^2} \beta \frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right]_{r_0} .$$

O que deve ser salientado então, é que na expressão para g_1 que é integrada numericamente, existe também, como na solução analítica, o parâmetro

$$\mathbb{D} = \frac{a}{r_0} \left[\frac{1}{(a^2 u')^2} \beta \frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right]_{r_0} , \quad (4-1)$$

que contém as variações nos perfis de pressão e corrente.

Consideramos os perfis de equilíbrio,

$$p(r) = p_0 \left[1 - \alpha \frac{r^2}{a^2} - (1 - \alpha) \frac{r^4}{a^4} \right] , \quad (4-2)$$

$$j_z(r) = j_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^\gamma ; \quad (4-3)$$

$$B_\theta(r) = \frac{j_0}{2(\gamma+1)} \frac{a^2}{r} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] \quad (C-5)$$

$$B_z(r) = \left\{ B_z(0) + \frac{r^2}{a^2} \left[2p_0\alpha - \frac{j_0^2 a^2}{2} \right] + \frac{r^4}{a^4} \left[(1-\alpha)2p_0 + \frac{3}{4} j_0^2 \frac{\gamma}{2} \right] \right\}^{1/2} \quad (C-12)$$

Nos cálculos desenvolvidos, tomamos $\alpha = 1$, $\gamma = 1$,

$$B_z(r) = B_z(0), \text{ e } r_0 = \frac{a}{2} .$$

Desde que $\mu(r)$ foi definida como

$$\mu(r) = \frac{B_\theta(r)}{r} \frac{1}{B_z(r)} , \text{ e que para } \gamma = 1$$

$$B_\theta(r) = \frac{j_0}{2} r \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} \right) , \quad B_z(r) = B_z(0) ;$$

tem-se

$$a\mu(r) = \frac{j_0 a}{2B_z} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} \right) . \quad (4-4)$$

Usando (C-20), e calculando a expressão (4-4) no ponto $r_0 = \frac{a}{2}$, obtemos

$$j_0 = \frac{-16}{7} \frac{B_z}{a} \text{ (ka)} . \quad (4-5)$$

Da expressão (4-4) chega-se a

$$a^2 \mu'(r) = \frac{-j_0 a}{4B_z} . \quad (4-6)$$

onde B_z foi considerado constante.

Portanto \mathbb{D} que foi dado por (4-1), com o auxílio de (4-2), (4-6) e da definição de β , torna-se para $r=r_0=\frac{a}{2}$:

$$\mathbb{D} = - \frac{32 p_0 (1 + \alpha)}{(j_0 a)^2} \quad (4-7)$$

Já que para iniciar-se a integração numérica dá-se de ante-mão um valor para \mathbb{D} , p_0 fica determinado como primeira aproximação, através desta relação (4-7). O valor mais correto é calculado pela iteração considerando agora B_z dado pela equação (C-12).

Sintetizando o que obtivemos até agora neste capítulo; tem-se:

$$\mathbb{D} = - \frac{32 p_0 (1 + \alpha)}{(j_0 a)^2} \quad (4-7)$$

$$j_z(r) = j_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \quad , \quad \gamma = 1 \quad ; \quad (4-3)$$

$$j_0 = - \frac{16}{7} \frac{B_z}{a} (ka) \quad , \quad (4-5)$$

$$p(r) = p_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \quad , \quad \alpha = 1 \quad (4-2)$$

$$B_\theta(r) = \frac{j_0}{2} r \left[1 - \frac{r^2}{2a^2} \right] \quad , \quad = 1 \quad ; \quad (C-5)$$

$$B_z(r) \approx B_z(0) \quad , \quad \alpha = 1, \gamma = 1 \quad ; \quad (C-12)$$

sendo $r_0 = \frac{a}{2}$.

Nossos cálculos foram feitos para os valores:

$$B_z(0) = 4 \text{ Tesla}, \quad a = 1 \text{ m}, \quad -ka = 0.1, \quad r_0 = \frac{a}{2} \quad ,$$

$$n = 10^{19} \text{ m}^{-3} \quad \text{e} \quad \rho = 1.67 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3,$$

resultando nos perfis de equilíbrio mostrado na Fig.(7), e nos resultados apresentados na Tabela I.

Os detalhes do campo $B_z(r)$ dados por (C-12), pode ser visto na Fig. (8).

Estes resultados nos mostram que o fato de se levar em conta o parâmetro \mathcal{M} na equação para o Modo Kink Interno, estabiliza-se o modo, se comparado com os resultados anteriores, obtidos por Rosenbluth. Para se concluir isto basta verificar-se a razão entre σ_{ROS} (obtida considerando-se $\mathcal{M} < 1$ e σ_{NUM} (para a qual $\mathcal{M} \gtrsim 1$); razão esta, mostrada graficamente na Fig.(9). Ou seja, a aproximação feita por Rosenbluth leva a uma razão de crescimento maior que a devida.

Vê-se também que com o aumento de $-\mathcal{M}$ os valores de σ_{ROS} e σ_{NUM} diferem mais acentuadamente. As razões de crescimento σ_{ROS} e σ_{NUM} estão plotadas na Fig.(10).

O comportamento da auto-função $\xi(r)$ para diversos valores de \mathcal{M} está mostrado na Fig.(11). Analisando esta figura vemos que o aumento de $-\mathcal{M}$ faz com que ξ tenha uma forma menos abrupta ao se aproximar da camada singular, do que a ξ proposta por Rosenbluth, que é uma onda quadrada. Isto significa que o deslocamento radial da coluna de plasma devido a uma perturbação externa, decresce e tende a zero, de uma maneira mais suave. Daí o por que de se obter σ_{NUM} menor do que σ encontrado por Rosenbluth.

Quanto aos resultados obtidos analiticamente para o Modo Kink Interno, não calculamos a razão de crescimento

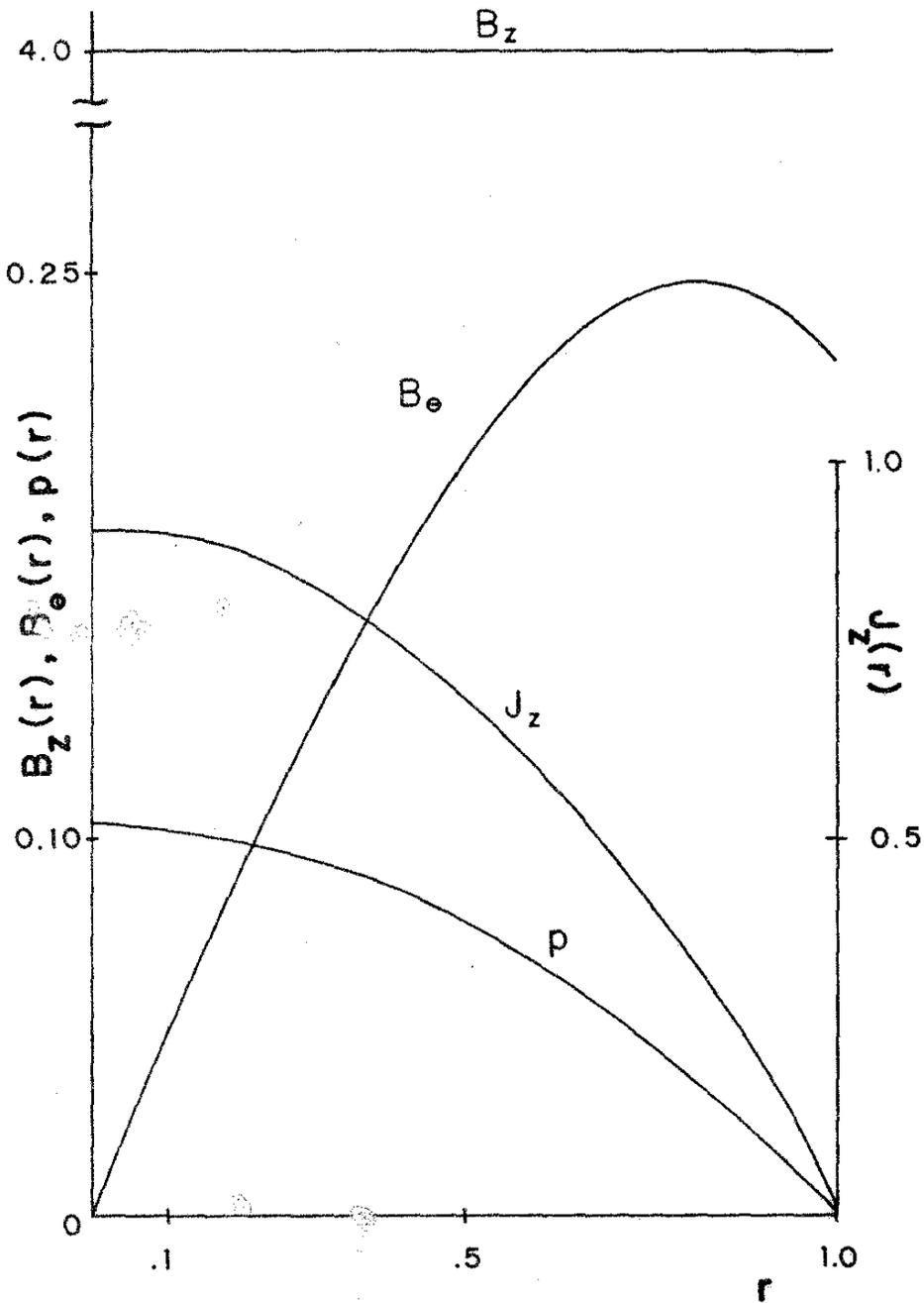


Fig. (7) Perfis de equilibrio
modo kink interno, $D = -8.0$,
 $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $a = 1$, $r_0 = \frac{a}{2}$, $B_z(0) = 4$.

T A B E L A I

MODO KINK INTERNO - SOLUÇÃO NUMÉRICA

com $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $\rho = 1.67 \times 10^{27} \text{ kg}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

β	$\sqrt{\rho\mu_0}\sigma_{\text{ROS}}$	$\sqrt{\rho\mu_0}\sigma_{\text{NUM}}$	$\sigma_{\text{ROS}}/\sigma_{\text{NUM}}$	$\sigma [\text{s}^{-1}]$
-0.2	7.076×10^{-4}	6.895×10^{-4}	1.026	4.75×10^3
-2.0	2.300×10^{-3}	2.054×10^{-3}	1.119	14.2×10^3
-4.0	4.080×10^{-3}	3.421×10^{-3}	1.196	23.6×10^3
-8.0	7.675×10^{-3}	5.883×10^{-3}	1.305	40.6×10^3
-12.0	1.132×10^{-2}	8.125×10^{-3}	1.393	56.1×10^3
-16.0	1.501×10^{-2}	1.024×10^{-2}	1.467	71.0×10^3
-20.0	1.876×10^{-2}	1.227×10^{-2}	1.529	85.0×10^3
-24.0	2.256×10^{-2}	1.425×10^{-2}	1.584	98.0×10^3

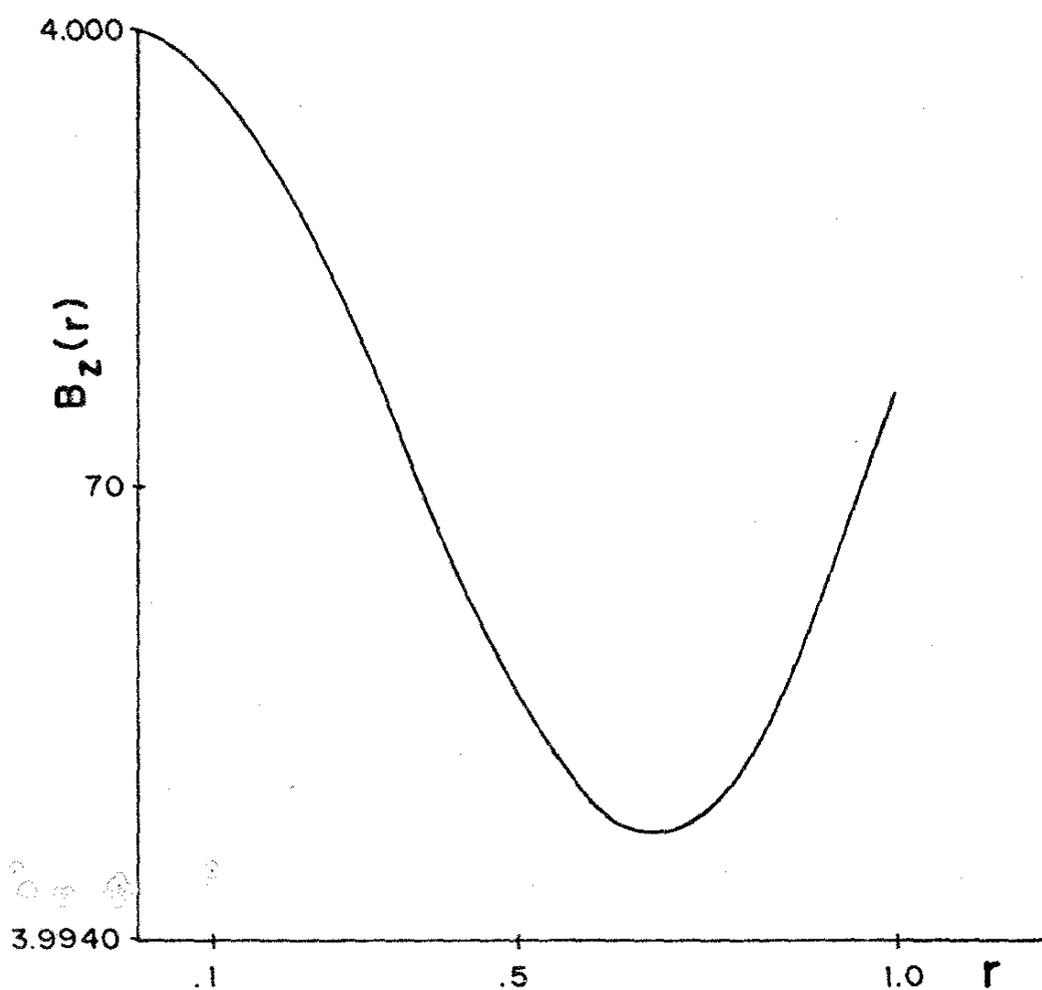


Fig. (8) Detalhe do perfil do campo $B_z(r)$.

$B_z(0) = 4 ; D = -8.0$

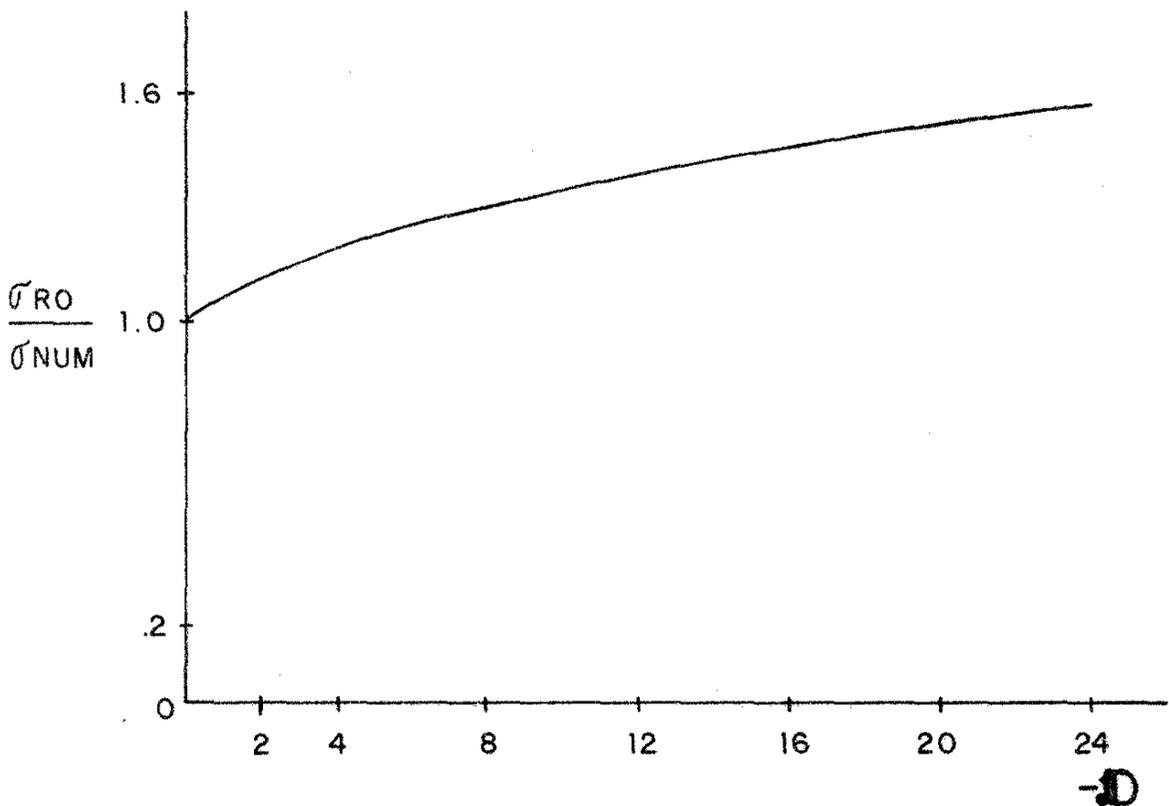


Fig. (9) Alteração na razão de crescimento para o modo kink interno, devido ao aumento de D .

σ_{RO} = Razão de crescimento obtida por Rosenbluth.

σ_{NUM} = Razão de crescimento obtida pelo método numérico.

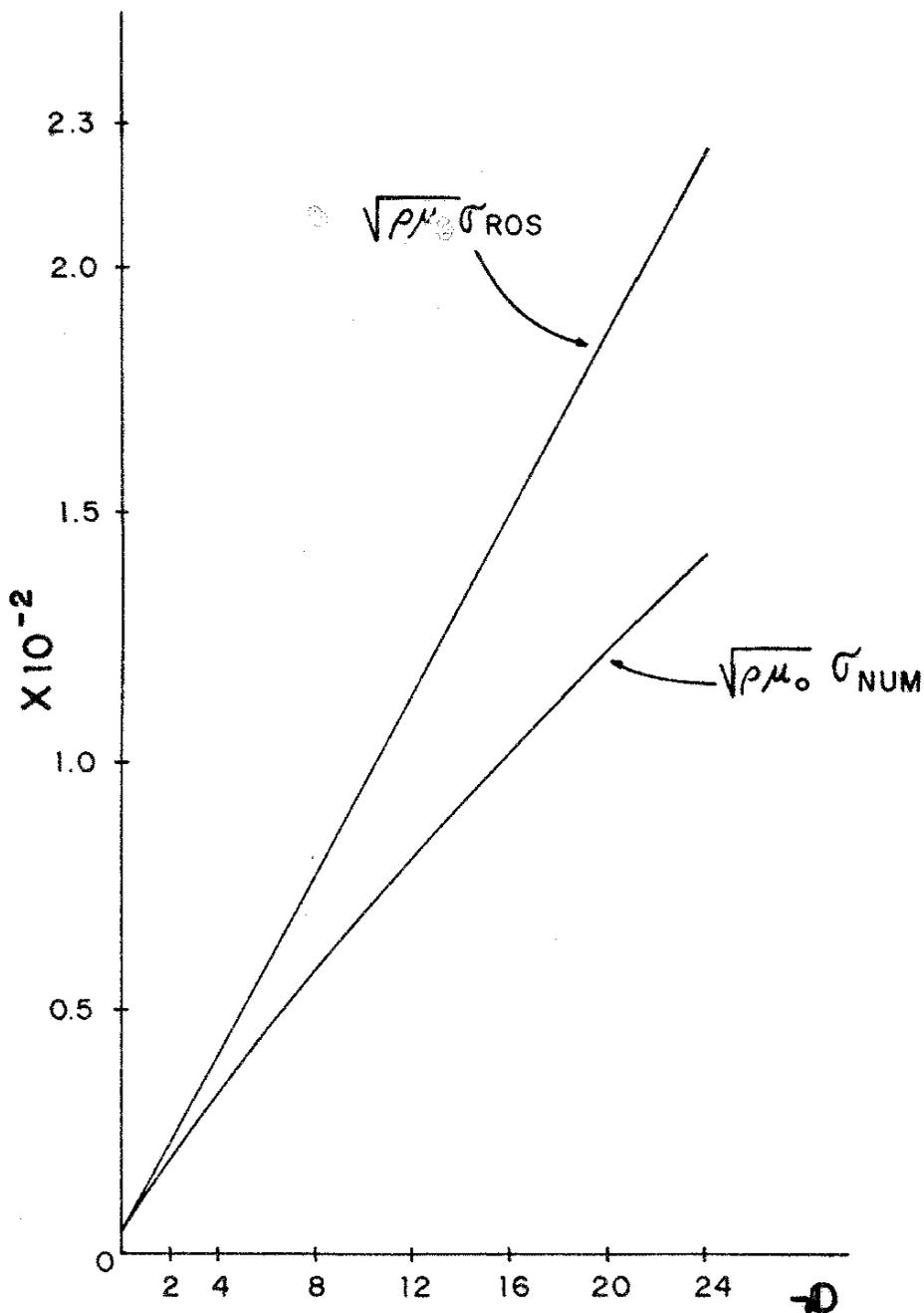


Fig.(10) Razões de crescimento para o modo kink interno obtidas por Rosenbluth e pelo método numérico.

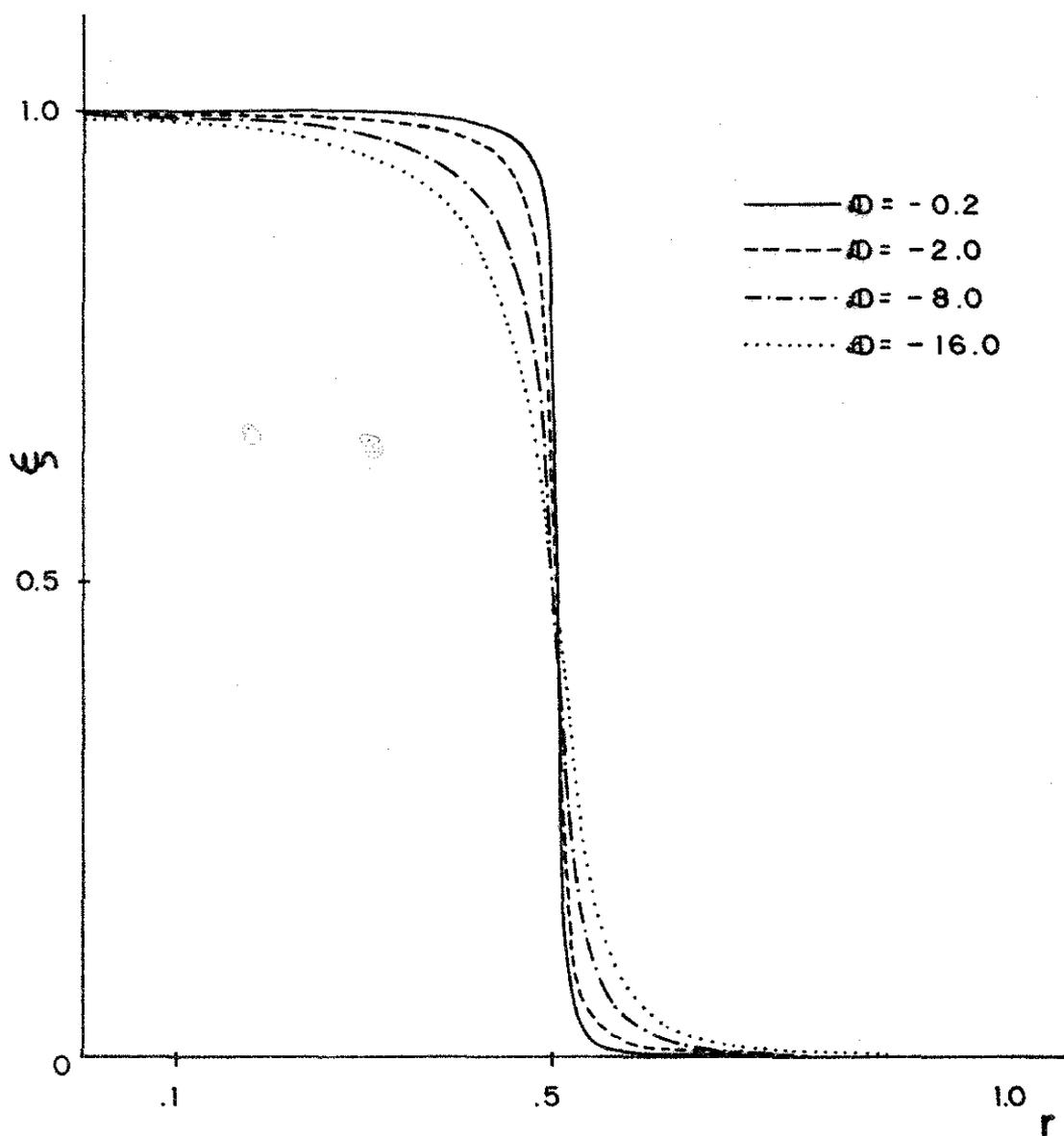


Fig. (11) Auto - Função para o modo kink interno

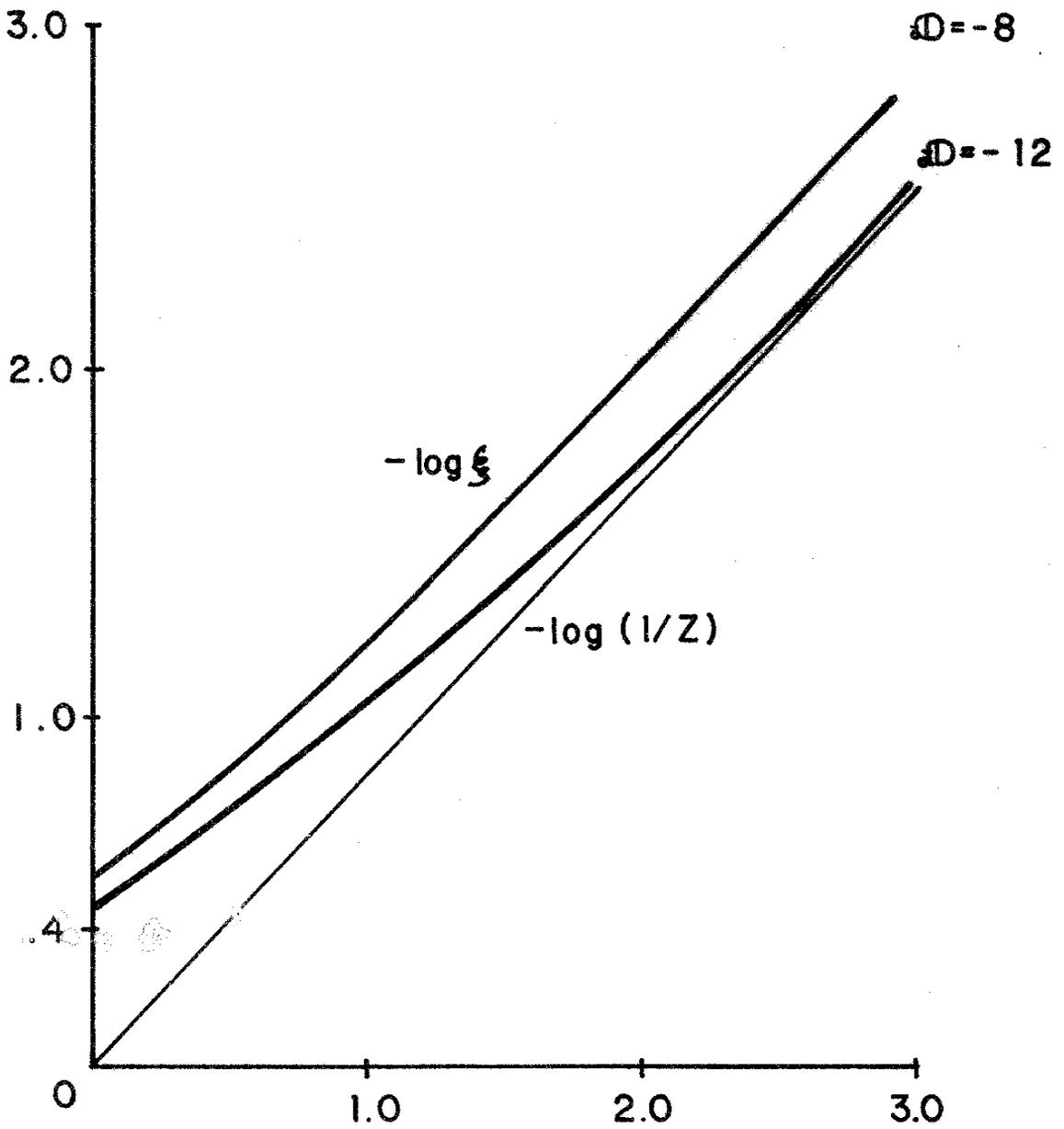


Fig.(12) Modo kink interno

Comportamento assintótico da auto-função.

por este método, pois verificou-se que o casamento assintótico das soluções interna e externa à camada inercial, não foi satisfatório para um valor finito de \mathfrak{D} . Isto nos leva a crer que devido às expansões feitas, o casamento assintótico conseguido só é válido para valores de $\mathfrak{D} \ll k^2 a^2$. Daí a razão de obtermos pelo método analítico, a mesma expressão para σ que foi obtida por Rosenbluth.

Entretanto o método analítico nos forneceu uma informação interessante, que é o comportamento da auto-função ξ em função da variável $z = \frac{r-r_0}{a\tau}$ que descreve a camada inercial, Fig.(5).

Podemos ver que na camada inercial quando $z \rightarrow 0$, ξ cresce ou seja, há um deslocamento maior da coluna de plasma nesta região, provocado pelo aumento do parâmetro \mathfrak{D} ; mas que tende a zero à medida em que se afasta de $z = 0$ (isto é $r = r_0$).

IV-II. MODO KINK CENTRAL

De acordo com o desenvolvimento apresentado no capítulo anterior, a obtenção da razão de crescimento para o Modo Kink Central é conseguida, integrando-se numericamente a equação de auto-valor

$$\frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi_0}{dz} - Dz^3 \xi_0 = 0,$$

a partir do ponto $z = 0$, com a condição de contorno

$\xi_0(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \approx 1/z^6$. Para cada valor de D dado, varia-se Λ^2 até que esta situação seja alcançada.

Nesta equação

$$z = \frac{r}{a\tau} , \quad \tau = |ka| , \quad \Lambda^2 = \frac{\sigma^2 \tau_H^2}{\tau^4} , \quad \tau_H = \frac{a}{V_A} ,$$

$$V_A = - \frac{B_{z0}(a^3 \mu'')}{2 \sqrt{\rho}} , \quad D = \frac{-8\beta_0 \alpha}{(a^3 \mu'')^2} , \quad \beta_0 = \frac{2p_0}{B_{z0}^2} ,$$

$$a^3 \mu'' = 2(ka)^3 + \beta_0(ka)\alpha + \gamma(ka) , \quad (C-25)$$

onde α e γ são constantes relacionadas com os perfis de pressão e corrente, respectivamente.

Usamos os perfis de equilíbrio

$$p(r) = p_0 \left[1 - \alpha \frac{r^2}{a^2} - (1 - \alpha) \frac{r^4}{a^4} \right] , \quad (C-1)$$

$$j_z(r) = j_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^\gamma , \quad (c-2)$$

$$B_\theta(r) = \frac{j_0}{2(\gamma+1)} \frac{a^2}{r} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] , \quad (C-5)$$

$$B_z(r) \approx B_{z0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{B_{z0}^2} \left(\frac{j_0^2}{2} - \frac{2p_0 \alpha}{a^2} \right) \right] . \quad (C-15)$$

Os perfis de pressão e corrente estão mostrados na Fig.(13) para alguns valores de α e γ .

A Tabela II fornece os valores de β_0 do plasma para vários D e diferentes perfis de equilíbrio, que são usados nos cálculos das razões de crescimento do Modo Kink Central.

Para os parâmetros, $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $\rho = 1.67 \times 10^{-8} \text{ kg/m}^3$, $\tau = 0.1$, $B_z \approx B_{z0} = 4 \text{ Tesla}$, $a = 1\text{m}$, $-ka = 0.1$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ e com os auto-valores Λ_0 encontrados numericamente, tem-se a razão de crescimento $\sigma/\sqrt{\mu_0}$, onde

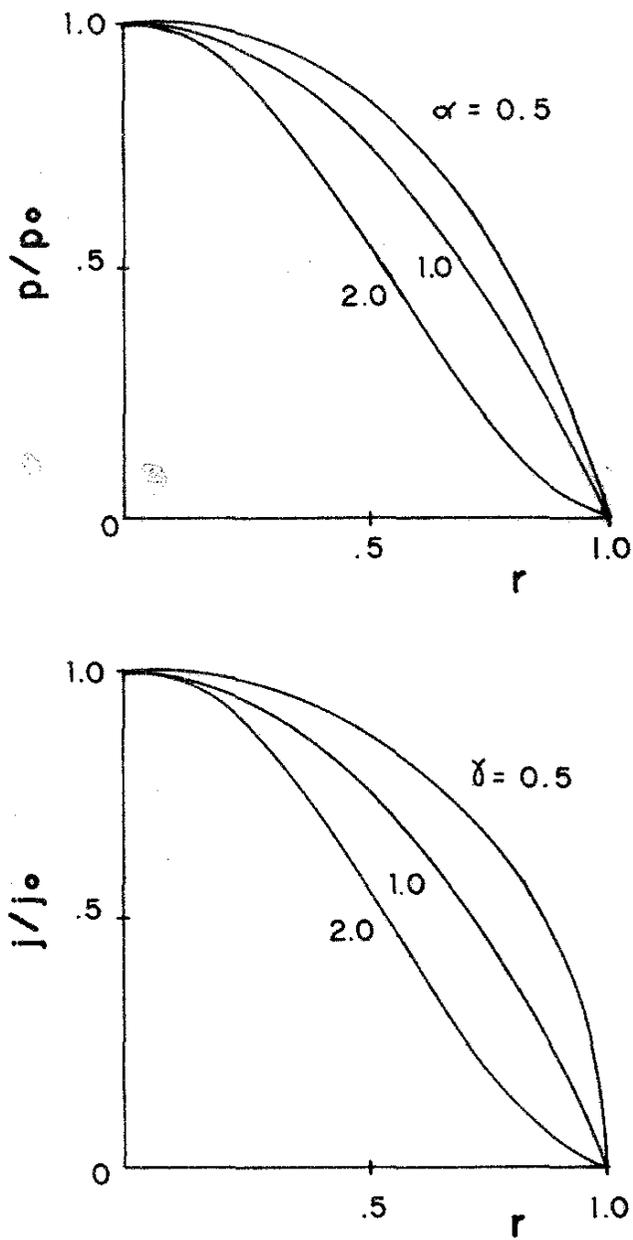


Fig. (13) Perfis de equilibrio
Modo kink central.

T A B E L A I I

M O D O K I N K C E N T R A L

-ka = 0.1

D=-2.0 $\alpha=0.25$	D=-4.0 $\alpha=0.5$	D=-6.0 $\alpha=0.75$	D=-8.0 $\alpha=1.0$	D=-10.0 $\alpha=1.25$	D=-12.0 $\alpha=1.50$	D=-14.0 $\alpha=1.75$	D=-16.0 $\alpha=2.0$
$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.27 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.40 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.27 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.30 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.27 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.28 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.27 \times 10^{-2}$	$\gamma=0.5$ $\beta_0=0.28 \times 10^{-2}$
$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.04 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.20 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.05 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.06 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.06 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.08 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.09 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.0$ $\beta_0=1.08 \times 10^{-2}$
$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.32 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.34 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.36 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.40 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.40 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.42 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.44 \times 10^{-2}$	$\gamma=1.5$ $\beta_0=2.46 \times 10^{-2}$
$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.12 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.08 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.20 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.26 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.47 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.34 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.39 \times 10^{-2}$	$\gamma=2.0$ $\beta_0=4.45 \times 10^{-2}$

$$\sigma = \frac{\tau^2 \Lambda_0}{\tau_H} ;$$

para diversos valores de D, que se encontram na Tabela III . Verifica-se que a ordem de grandeza das razões de crescimento deste modo se comparam com as do Modo Kink Interno, dadas na Tabela I.

A Fig.(14) mostra a variação de $\sigma/\sqrt{\mu_0}$ com o aumento de D, e vemos que o comportamento da curva é linear. Ou seja, já que para os parâmetros por nós estipulados, $\sigma \approx 155(a^3_{\mu''})\Lambda_0$, e que Λ_0 é proporcional a D, e lembrando ainda que $a^3_{\mu''}$ é o termo que contém as variações nos perfis de pressão e corrente $[(a^3_{\mu''}) = 2(ka)^3 + \beta_0\alpha(ka) + \gamma(ka)]$, chega-se à conclusão de que quanto maior o γ do perfil de corrente, tanto menor a estabilidade do modo. Daí o porque de σ crescer com D.

O comportamento para a auto-função $\xi(z)$ em função de z, $z = \frac{r}{a\tau}$, para alguns valores de D está mostrado na Fig.(15). Vê-se então que com o aumento de D, o deslocamento da coluna de plasma é maior. Pode-se observar ainda nesta figura e na Fig.(16) que as auto-funções caem muito bem com $1/z^6$, como era esperado.

Quanto aos auto-valores, o que podemos dizer é que, já que a equação é Sturmiana, esta apresenta várias auto-funções com os respectivos auto-valores, Λ_N , $N = 0, 1, 2, \dots$. Isto significa que podem estar ocorrendo no plasma, instabilidades que estão relacionadas com cada um destes Λ_N . As primeiras auto-funções estão mostradas na Fig.(17).

T A B E L A III

MODO KINK CENTRAL

D	α	γ	Λ_0	σ	$\sigma/\sqrt{\mu_0}$ [S ⁻¹]
-16	2	1	1.194	19.3	17.2x10 ³
		2		40.0	34.8x10 ³
-8	1	1	0.597	9.5	8.5x10 ³
		2		19.1	17.0x10 ³
-4	0.5	1	0.299	4.7	4.2x10 ³
		2		9.4	8.4x10 ³
-2	0.25	1	0.149	2.4	2.1x10 ³
		2		4.7	4.2x10 ³

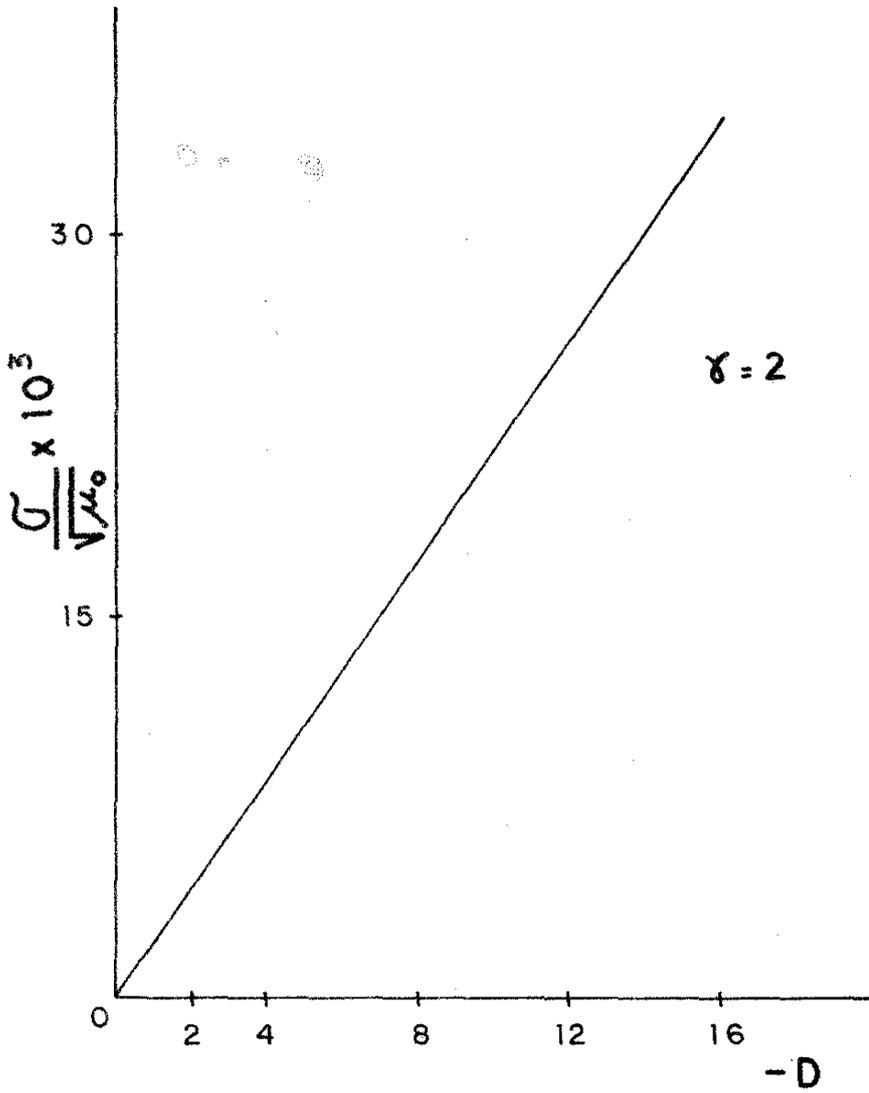


Fig.(14) Razão de crescimento para o modo kink central.

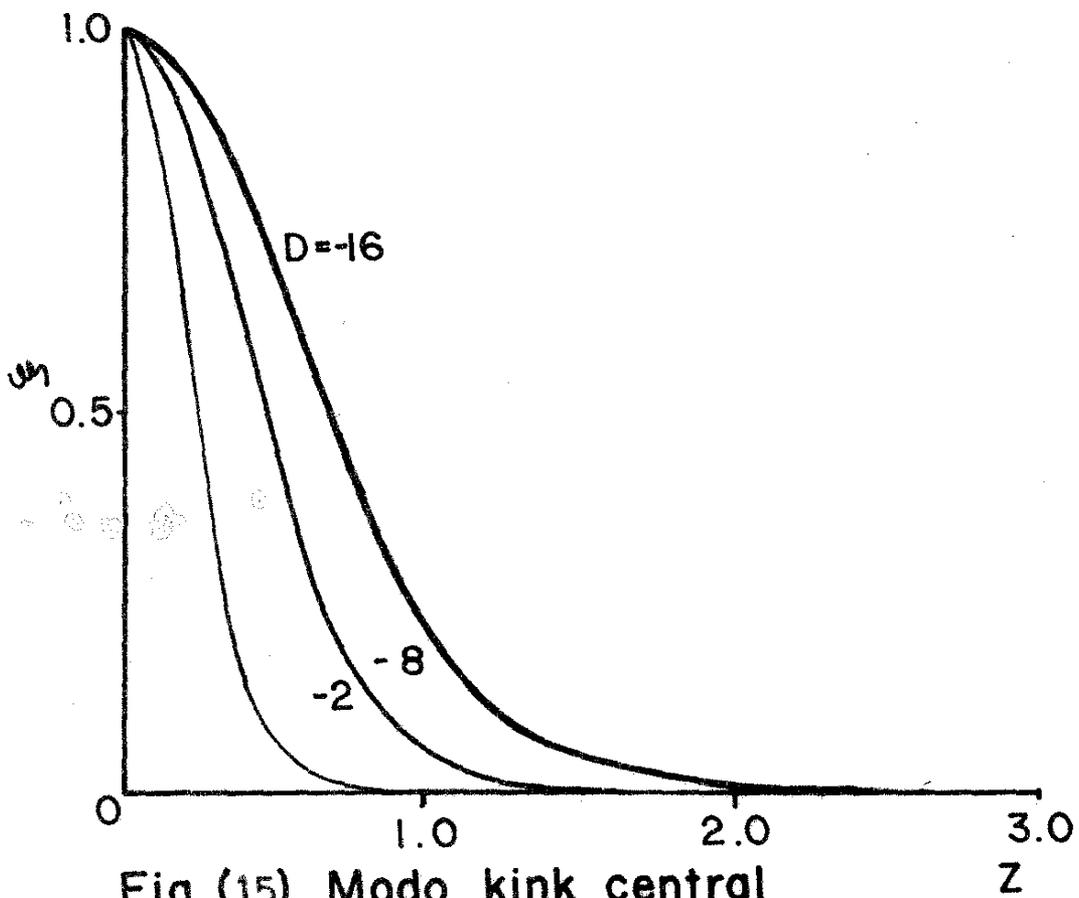


Fig. (15) Modo kink central

Auto funções para diferentes perfis de equilíbrio.

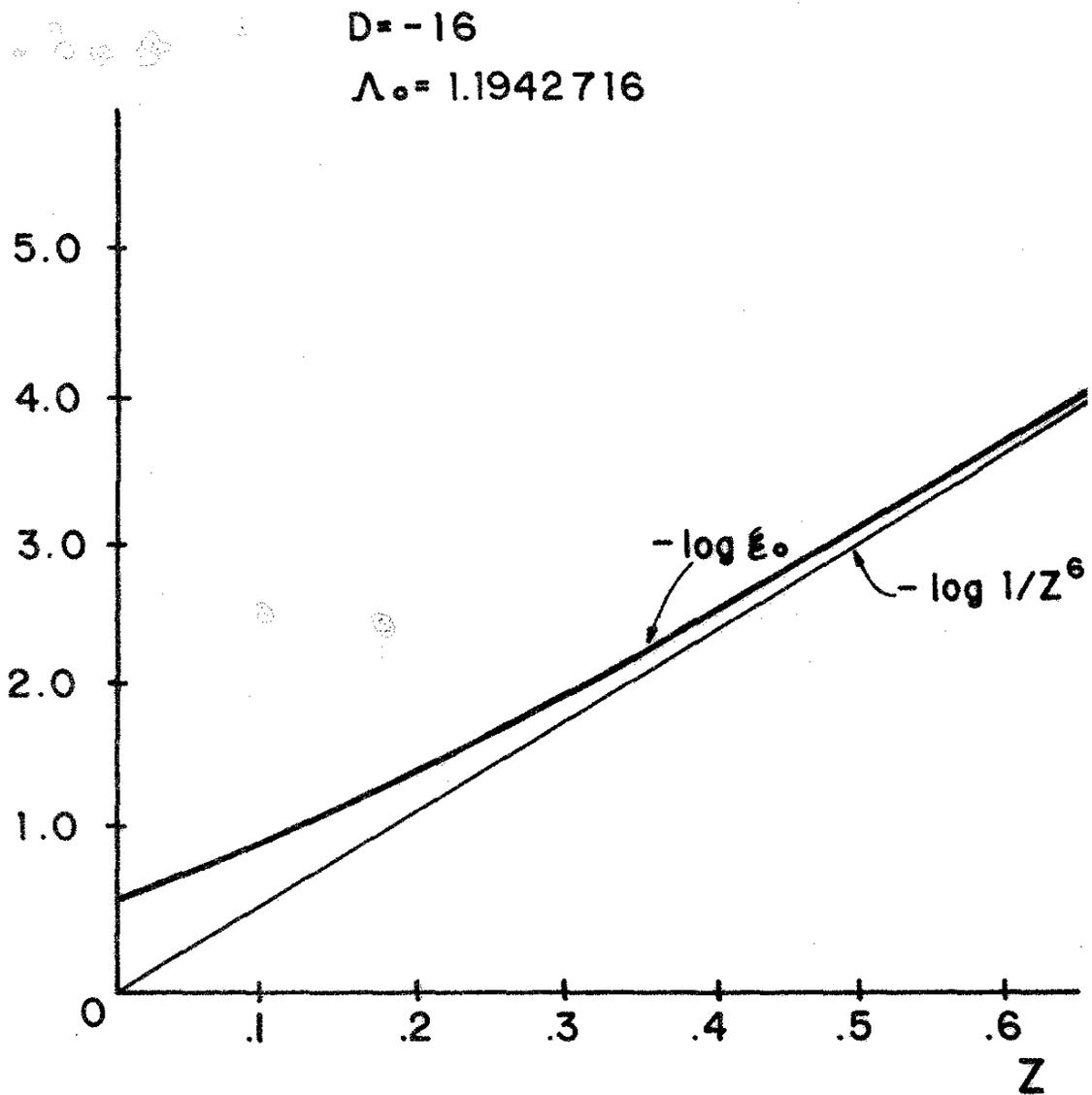


Fig. (16) Comportamento Assintótico das Auto-funções para o modo kink central.

$D = -16$

$\Lambda_0 = 1.1942716$

$\Lambda_1 = 0.5179151$

$\Lambda_2 = 0.296633$

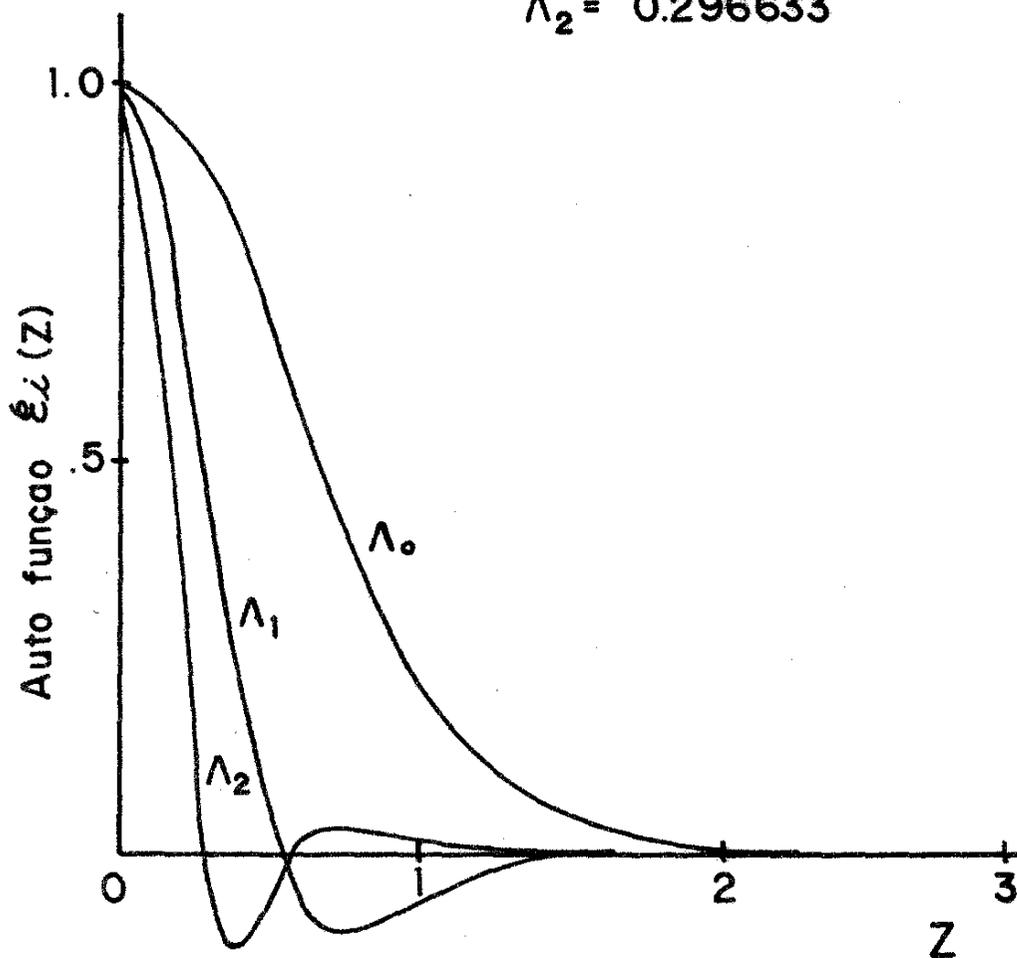


Fig.(17) Auto-funções para o Modo kink central.

A Fig.(18) apresenta a variação dos auto-valores em função de D. Nesta figura verifica-se que:

- (1) Λ_0 é o maior auto valor para cada valor de D,
- (2) Λ_N é proporcional a D,
- (3) a curva que melhor descreve Λ_N para N grande é $\Lambda_N \approx 0.844 (N-2)^{-3/2}$, onde o fator 0.844 corresponde a D = -16. Esta curva foi obtida numericamente, Fig.(19).

Verifica-se ainda que o Modo Kink Central exibe um comportamento muito semelhante aos modos de Suydam, calculados por Goedbloed e Sakanaka [1].

No estudo da estabilidade usamos para cada valor de D a auto-função correspondente ao modo N=0, pois esta auto-função corresponde ao maior dos auto-valores Λ_N calculados, isto é ao Λ_0 . Portanto o fato de poder estar ocorrendo outras instabilidades relacionadas a $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$, não afeta a análise do problema por nós feita, já que estes auto-valores são todos menores que Λ_0 e que a razão de crescimento por nós calculada usa como auto-valor o Λ_0 .

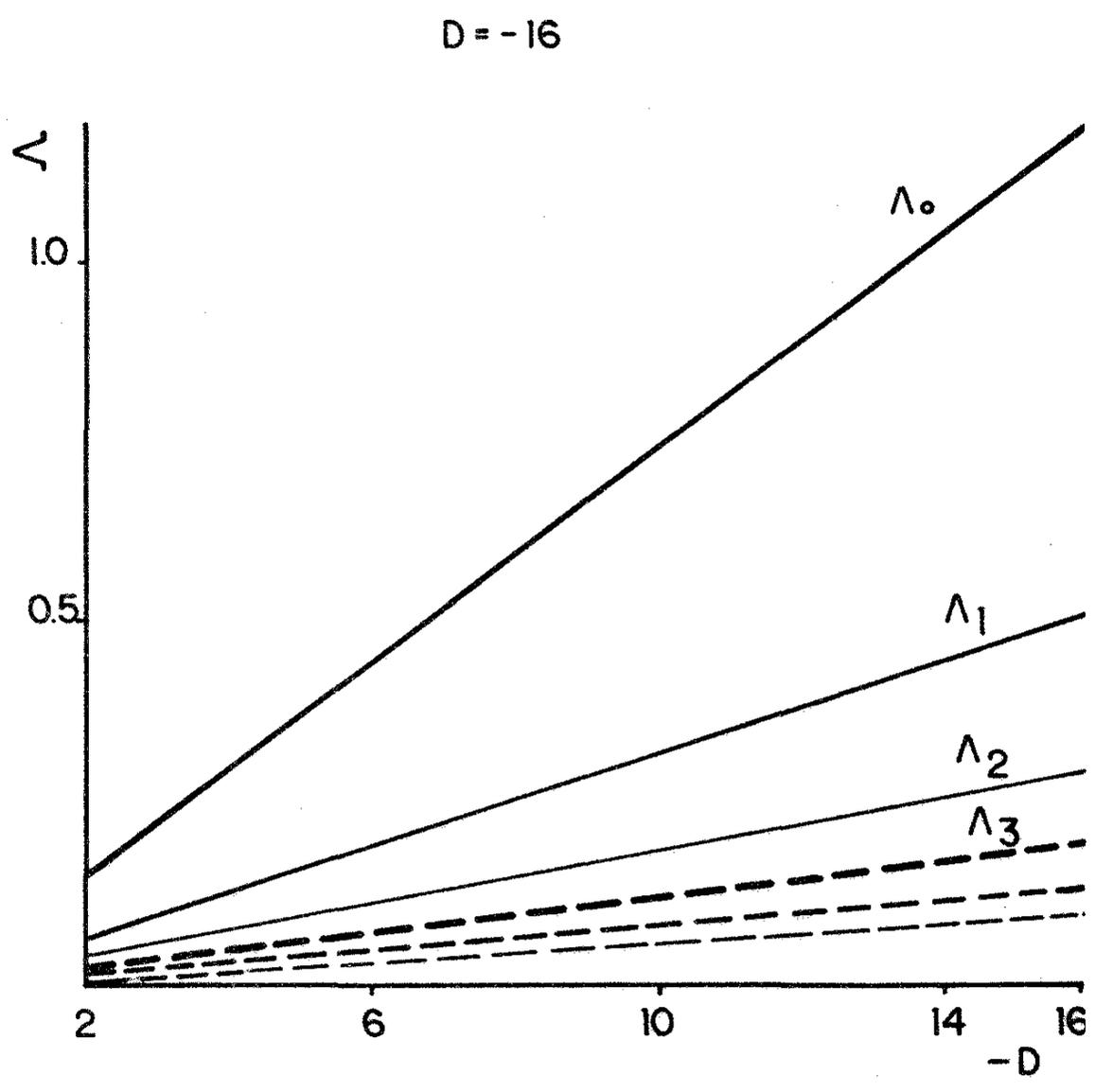


Fig. (18) Auto-valores para o modo kink central.

$$D = -16$$

$$A = 0.844$$

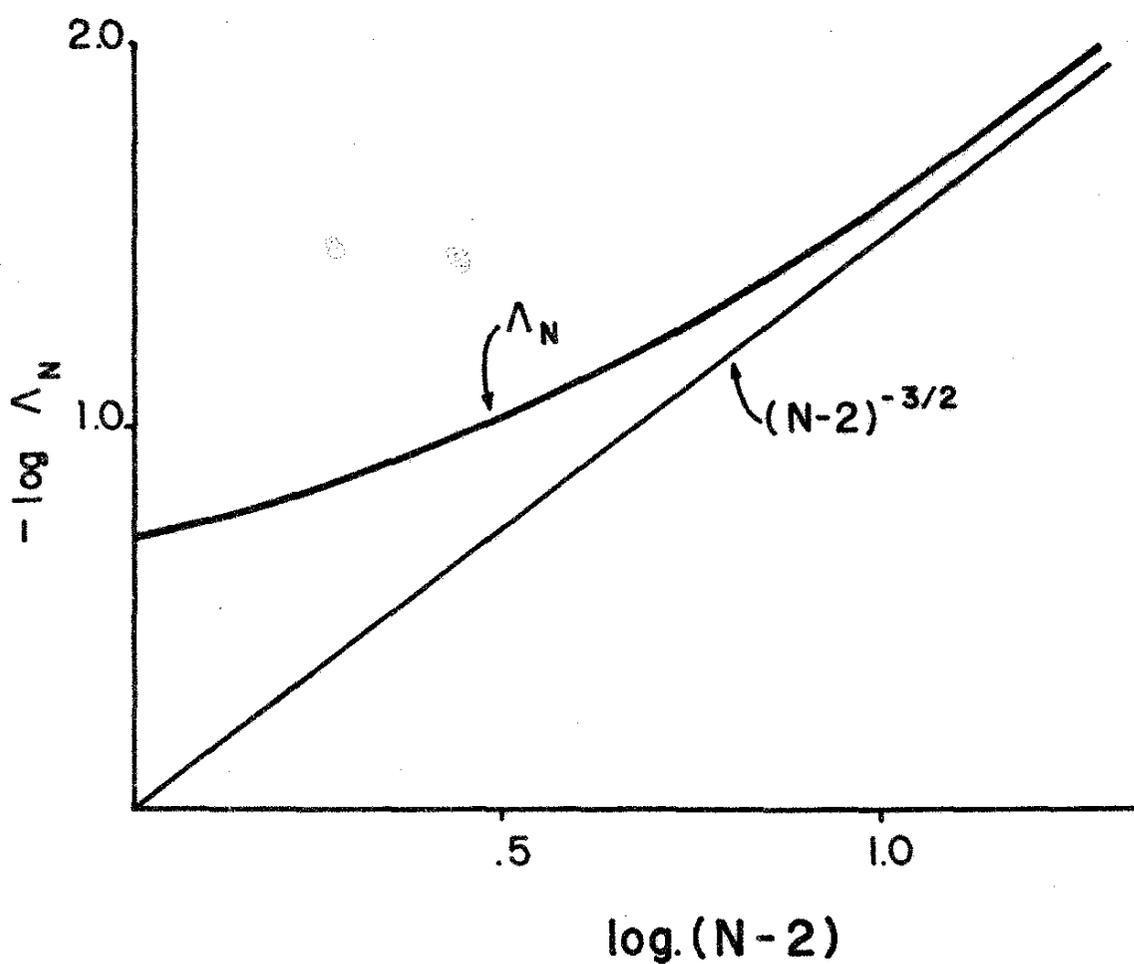


Fig.(19) Dependencia assintotica dos auto-
valores com N.

$$\Lambda_N (D = -16) \sim 0.844 (N-2)^{-3/2}$$

para N grande.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

V-1. Modo Kink Interno.

Neste trabalho verificou-se que devido ao fato de se considerar o parâmetro $\mathfrak{D} = \frac{a}{r_0} \left[\frac{1}{(a^2 \mu')^2} \beta \frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right]_{r_0}$, como $\mathfrak{D} \gtrsim 1$, nas equações que descrevem o comportamento de um plasma cilíndrico, MHD ideal, quando este é sujeito a perturbações do tipo $\vec{\xi}(r, \theta, z, t) = \vec{\xi}(r) \exp [i(m\theta + kz - \omega t)]$, a razão de crescimento da instabilidade para o modo $m = 1$, Kink Interno, diminui, se comparada com a razão de crescimento obtida por Rosenbluth, Dagazian e Rutherford [4]. A diferença entre a razão de crescimento por nós obtida, por integração numérica da equação de valor característico, e a razão de crescimento obtida pelos autores acima citados, torna-se mais pronunciada com o aumento de \mathfrak{D} . Para $\mathfrak{D} = -0.2$, $\sigma_{ROS}/\sigma_{NUM} = 1.026$; e $\mathfrak{D} = -20.0$, $\sigma_{ROS}/\sigma_{NUM} = 1.584$; ou seja a diferença para grandes valores de \mathfrak{D} chega a ser de até 50%, enquanto que para $\mathfrak{D} < 1$, as razões de crescimento obtidas pelos dois métodos se equivalem.

Conclui-se então que a aproximação feita por Rosenbluth et al para a auto-função ξ , como sendo uma onda quadrada, é válida somente para valores de $\mathfrak{D} < 1$.

V-2. Modo Kink Central

A camada inercial do plasma ocorre muito próximo ao eixo magnético, e para a análise das equações que descrevem

o comportamento da coluna de plasma, usou-se a técnica de camada limite.

A razão de crescimento para o Modo Kink Central por nós obtida é expressa aproximadamente por

$$\sigma/\sqrt{\mu_0} \cong -10^3 \gamma D \quad [s^{-1}] \quad ,$$

onde

$$D = \frac{8\beta_0\alpha}{(a^3 \mu'')^2} \quad ;$$

e α, γ são constantes dos perfis de pressão e corrente, respectivamente.

A sugestão para um próximo trabalho é retomar o tratamento analítico por nós desenvolvido para o Modo Kink Interno, expandi-lo em potências superiores a $(ka)^2$, a fim de investigar-se o aparecimento dos "picos" nas auto-funções para valores de $\mathfrak{D} > 1$, no entorno da camada inercial, e conseguir-se o casamento assintótico quando $z \rightarrow -\infty$.

Para o Modo Kink Central, poderia-se estudar o efeito de variações nos perfis de pressão e corrente, acrescentando a resistividade do plasma.

APÊNDICE A

Obtenção das equações que descrevem o modo Kink Interno.

- Região Interna à camada

Tomando a equação de Euler para a estabilidade - σ [1] ,

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g \xi = 0$$

isto é ,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[(\rho\sigma^2 + F^2) \frac{\rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{D} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi) \right] - \\ & - \left[\rho\sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - 4 \frac{k^2 B_\theta^2}{r^2} \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \gamma p F^2}{D} + \right. \\ & \left. + r \left\{ 2 \frac{k B_\theta}{r^2} \left(\frac{m B_z}{r} - k B_\theta \right) \frac{\rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{D} \right\}' \right] \xi = 0 ; \quad (1) \end{aligned}$$

onde

$$F = \frac{m B_\theta}{r} + k B_z = \frac{1}{r} (m B_\theta + k r B_z) ,$$

$$D = \rho^2 \sigma^4 + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) \left(\frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} \right) + \left(\frac{m^2 + k^2 r^2}{r^2} \right) \gamma p F^2 ,$$

$$D = \frac{(m^2 + k^2 r^2)}{r^2} \left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]$$

Trabalhando sobre a expressão:

$$(\rho\sigma^2 + F^2) \frac{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{rD} =$$

$$= (\rho\sigma^2 + F^2) \frac{r^2}{r (m^2 + k^2 r^2) \left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}$$

$$\cdot \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2$$

$$= \left\{ \rho\sigma^2 + \left[\frac{1}{r} (mB_\theta + krB_z) \right]^2 \right\} \frac{r}{(m^2 + k^2 r^2) \left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}$$

$$= \frac{r}{(m^2 + k^2 r^2)} \frac{1}{r^2} \left\{ \rho\sigma^2 r^2 + (mB_\theta + krB_z)^2 \right\} \frac{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{\left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}$$

Ou seja,

$$(\rho\sigma^2 + F^2) \frac{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{rD} = \frac{f}{r^2}$$

$$f = \frac{r^3}{(m^2 + k^2 r^2)} \frac{(\rho\sigma^2 + F^2)}{\left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}$$

$$f = \frac{r^3 (\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} R ; R = \frac{1}{r^2 D} [\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2]$$

$$f = \frac{r^3 (\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} \frac{1}{r^2 (m^2 + k^2 r^2)} \frac{[\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2]}{\left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}$$

$$\frac{f}{r^2} = \frac{r^3}{(m^2 + k^2 r^2) r^2} \left\{ \rho \sigma^2 + \frac{1}{r^2} (mB_\theta + krB_z)^2 \right\}.$$

$$\cdot \frac{[\rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2]}{(m^2 + k^2 r^2) \left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}$$

$$\frac{f}{r^2} = \frac{r}{(m^2 + k^2 r^2)} \frac{1}{r^2} \left\{ \rho \sigma^2 r^2 + (mB_\theta + krB_z)^2 \right\}.$$

$$\cdot \frac{[\rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2]}{(m^2 + k^2 r^2) \left[\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2 \right]}.$$

Portanto o 1º colchete de (1) escreve-se como:

$$\frac{d}{dr} \frac{f}{r^2} \frac{d}{dr} (r\xi) = \frac{d}{dr} \left[\frac{f}{r^2} \left(\xi + r \frac{d\xi}{dr} \right) \right] = \frac{d}{dr} \left[\frac{f\xi}{r^2} + \frac{f}{r} \frac{d\xi}{dr} \right] =$$

$$= \xi \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r^2} \right) + \frac{f}{r^2} \frac{d\xi}{dr} + \frac{r \frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - f \frac{d\xi}{dr}}{r^2}$$

$$= \xi \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r^2} \right) + \frac{f}{r^2} \frac{d\xi}{dr} + \frac{r}{r^2} \frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - \frac{f}{r^2} \frac{d\xi}{dr}$$

$$\therefore \frac{d}{dr} \frac{f}{r^2} \frac{d}{dr} (r\xi) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} + \xi \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r^2} \right).$$

Desde que:

$$\frac{\rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{rD} (\rho \sigma^2 + F^2) = \frac{f}{r^2}$$

$$\frac{\rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{D} = \frac{f}{r} \frac{1}{(\rho \sigma^2 + F^2)}$$

Assim a equação de Euler $\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$, torna-se:

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - \left\{ r \left[\rho\sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - 4 \frac{k^2 B_\theta^2}{r^2} \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \gamma p F^2}{D} \right] - r \left(\frac{f}{r^2} \right)' + \right. \\ \left. + r^2 \left[\frac{k B_\theta}{r} \left(\frac{m B_z}{r} - k B_\theta \right) \frac{f}{r^2 (\rho\sigma^2 + F^2)} \right] \right\} \xi = 0 .$$

$$g = r \left[\rho\sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - \frac{4k^2 B_\theta^2}{r^2} \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \gamma p F^2}{D} \right] - \\ - r \left(\frac{f}{r^2} \right)' + r^2 \left[\frac{2k B_\theta}{r (\rho\sigma^2 + F^2)} \left(\frac{m B_z}{r} - k B_\theta \right) \frac{f}{r^2} \right] .$$

$$f = \frac{r^3 (\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} C ; C = \frac{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2} ; C \Big|_{\sigma=0} = 1 .$$

$$E = \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \gamma p F^2}{\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2} ; E \Big|_{\sigma=0} = 1 .$$

$$\Rightarrow g = r \left[\rho\sigma^2 + F^2 + 2B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - \frac{4k^2 B_\theta^2}{m^2 + k^2 r^2} E \right] -$$

$$- r \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^3 (\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} C \right)' + r^2 \left\{ \frac{2k B_\theta}{m^2 + k^2 r^2} \left(\frac{m B_z}{r} - k B_\theta \right) C \right\}'$$

$$- r \left(\frac{r (\rho\sigma^2 + F^2) C}{m^2 + k^2 r^2} \right)' =$$

$$= -r \left[\frac{(m^2 + k^2 r^2) \cdot [(\rho\sigma^2 + F^2) C + r (\rho\sigma^2 C + F^2 C)']}{(m^2 + k^2 r^2)^2} - r (\rho\sigma^2 + F^2) C \frac{2k^2 r}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \right]$$

$$= \frac{-r(\rho\sigma^2 + F^2)C}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{r^2(F^2 C)'}{m^2 + k^2 r^2} + \frac{2k^2 r^3(\rho\sigma^2 + F^2)C}{(m^2 + k^2 r^2)^2} ;$$

$$2r^2 \left(\frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C \right)' =$$

$$= 2r^2 \left\{ \left[\left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C \right]' \cdot \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} + \frac{\left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C - 2k^2 r}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{2r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[\left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C \right]' - \frac{4k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C$$

$$\therefore g = r(\rho\sigma^2 + F^2) + 2rB_{\theta} \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)' - \frac{4k^2 B_{\theta}^2}{m^2 + k^2 r^2} rE + \frac{2k^2 r^3 C(\rho\sigma^2 + F^2)}{(m^2 + k^2 r^2)^2} -$$

$$- \frac{r(\rho\sigma^2 + F^2)C}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{r^2(F^2 C)'}{m^2 + k^2 r^2} - \frac{4k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C +$$

$$+ \frac{2r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[\left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C \right]' .$$

$$\textcircled{1} = r(\rho\sigma^2 + F^2) - \frac{r(\rho\sigma^2 + F^2)C}{m^2 + k^2 r^2} = \frac{r(\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} \left[m^2 + k^2 r^2 - C \right]$$

$$\textcircled{2} = - \frac{4k^2 B_{\theta}^2}{m^2 + k^2 r^2} rE + \frac{2k^2 r^3 C(\rho\sigma^2 + F^2)}{(m^2 + k^2 r^2)^2} - \frac{4k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left(\frac{kmB_{\theta} B_z}{r} - k^2 B_{\theta}^2 \right) C =$$

$$= \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[-2 \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)^2 E(m^2 + k^2 r^2) + (\rho\sigma^2 + F^2)C - \frac{2mkB_{\theta} B_z C}{r} + 2k^2 B_{\theta}^2 C \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[-2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 m^2 E - 2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 k^2 r^2 E + \rho \sigma^2 C + \frac{1}{r^2} (m B_\theta + k r B_\theta)^2 C + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2mk B_\theta B_z C}{r} + 2k^2 B_\theta^2 C \right] = \\
 &= \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[-2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 m^2 E - 2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 k^2 r^2 E + \rho \sigma^2 C + m^2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 C + \frac{2kmr B_\theta B_z C}{r^2} + \right. \\
 &\quad \left. + k^2 B_z^2 C - \frac{2mk B_\theta B_z C}{r} + 2k^2 B_\theta^2 C \right] \\
 &= \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[m^2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 (C - 2E) + 2k^2 B_\theta^2 (C - E) + \rho \sigma^2 C + k^2 B_z^2 C \right] .
 \end{aligned}$$

$$C - E = \frac{\rho \sigma^2 \gamma p}{\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2} \equiv T ;$$

$$C - 2E = - \frac{\rho \sigma^2 B^2 + \gamma p F^2 - \rho \sigma^2 \gamma p}{\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho \sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2} \equiv S ;$$

$$T \Big|_{\sigma=0} = 0 \quad ; \quad S \Big|_{\sigma=0} = -1 .$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} &= 2r B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - \frac{r^2 (F^2 C)'}{m^2 + k^2 r^2} + \frac{2r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[\left(\frac{km B_\theta B_z}{r} - k^2 B_\theta^2 \right) C \right]' = \\
 &= 2r B_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} \right)' - \frac{r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[\frac{1}{r^2} (m^2 B_\theta^2 + 2mk r B_\theta B_z + k^2 r^2 B_z^2) C \right]' + \\
 &\quad + \frac{2r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[km \left(\frac{B_\theta B_z C}{r} \right)' - k^2 (B_\theta^2 C)' \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2r^2}{m^2+k^2r^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{B_\theta^2}{r} \right)' (m^2+k^2r^2) - \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{B_\theta^2 C}{r^2} \right)' - km \left(\frac{B_\theta B_z C}{r} \right)' - \frac{1}{2} k^2 (B_z^2 C)' + \right. \\
 &+ \left. km \left(\frac{B_\theta B_z C}{r} \right)' - k^2 (B_\theta^2 C)' \right] \\
 &= \frac{2r^2}{m^2+k^2r^2} \left[\frac{m^2}{2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{r} (1-C) \right\}' + \frac{1}{2} k^2 (B_\theta^2)' - k^2 \frac{B_\theta^2}{r} - \frac{1}{2} k^2 (B_z^2)' C + \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} k^2 B_z^2 C' - k^2 (B_\theta^2)' C - k^2 B_\theta^2 C' \right] .
 \end{aligned}$$

Usando $(p + \frac{1}{2} B^2)' + \frac{B_\theta^2}{r} = 0$,

$$\Rightarrow -\frac{B_\theta^2}{r} = \frac{dp}{dr} + \frac{(B_\theta^2)'}{2} + \frac{1}{2} (B_z^2)' , \text{ e a \u00faltima express\u00e3o torna-se:}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \left[\frac{m^2}{2k^2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{r} (1-C) \right\}' + \frac{(B_\theta^2)'}{2} + \frac{dp}{dr} + \frac{(B_\theta^2)'}{2} + \frac{1}{2} (B_z^2)' + \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} (B_z^2)' C - \frac{1}{2} B_z^2 C' - (B_\theta^2)' C - B_\theta^2 C' \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \left[\frac{m^2}{2k^2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{r} (1-C) \right\}' + (B_\theta^2)' + \frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} (B_z^2)' (1-C) - \right. \\
 &- \left. C' \left(\frac{1}{2} B_z^2 + B_\theta^2 \right) - (B_\theta^2)' C \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \left[\frac{m^2}{2k^2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{r} (1-C) \right\}' + (B_\theta^2 + \frac{B_z^2}{2})' (1-C) - (B_\theta^2 + \frac{B_z^2}{2}) C' + \frac{dp}{dr} \right]$$

$$= \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2} \left[\frac{m^2}{2k^2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{r} (1-C) \right\}' + \left\{ (B_\theta^2 + \frac{B_z^2}{2}) (1-C) \right\}' + \frac{dp}{dr} \right] =$$

$$= \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[p + \frac{1}{2}(1-C) \left\{ \frac{B_\theta^2}{k^2 r^2} (m^2 + k^2 r^2) + B_z^2 \right\} \right]' .$$

Então

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} = \\ & = \frac{r(\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} [m^2 + k^2 r^2 - C] + \\ & + \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[m^2 \left(\frac{B_\theta}{r}\right)^2 S + 2k^2 B_\theta^2 T + \rho\sigma^2 C + k^2 B_z^2 C \right] + \\ & + \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[p + \frac{1}{2}(1-C) \left\{ \frac{B_\theta^2}{k^2 r^2} (m^2 + k^2 r^2) + B_z^2 \right\} \right]' = g \end{aligned}$$

Assim a equação σ - Euler fica escrita como:

$$\frac{d}{dr} f - \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

onde

$$f = \frac{r^3(\rho\sigma^2 + F^2)R}{m^2 + k^2 r^2} ; \quad F = \frac{mB_\theta}{r} + kB_z ;$$

$$R = C = \frac{\rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}{\frac{\rho\sigma^2 r^4}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}$$

e

$$g = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[p + \frac{1-R}{2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{k^2 r^2} (m^2 + k^2 r^2) + B_z^2 \right\} \right]' + \frac{r(\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} [m^2 + k^2 r^2 - R] +$$

$$+ \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[m^2 \frac{B_\theta^2}{r^2} S + 2k^2 B_\theta^2 T + (\rho\sigma^2 + k^2 B_z^2) R \right].$$

$$T = \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2};$$

$$S = - \frac{\rho\sigma^2 B^2 + \gamma p F^2 - \rho\sigma^2 \gamma p}{\frac{\rho^2 \sigma^4 r^2}{m^2 + k^2 r^2} + \rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}.$$

Usando a relação:

$$m^2 \frac{B_\theta^2}{r^2} S + 2k^2 B_\theta^2 T + (\rho\sigma^2 + k^2 B_z^2) R = (k^2 B_z^2 - m^2 \frac{B_\theta^2}{r^2}) R + m^2 \frac{B_\theta^2}{r^2} \stackrel{=2T}{(R+S)} + 2k^2 B_\theta^2 T + \rho\sigma^2 R,$$

Podemos escrever g como:

$$g = \frac{2k^2 r^2}{m^2 + k^2 r^2} \left[p + \frac{1-R}{2} \left\{ \frac{B_\theta^2}{k^2 r^2} (m^2 + k^2 r^2) + B_z^2 \right\} \right] +$$

$$+ \frac{r(\rho\sigma^2 + F^2)}{m^2 + k^2 r^2} [m^2 + k^2 r^2 - R] + \frac{2k^2 r^3}{(m^2 + k^2 r^2)^2} \left[(k^2 B_z^2 - m^2 \frac{B_\theta^2}{r^2}) R +$$

$$+ \rho\sigma^2 R + 2 \frac{B_\theta^2}{r^2} T (m^2 + k^2 r^2) \right]$$

Vamos desprezar σ^4 .

$$\text{Então } R \approx 1; \quad T \approx \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}. \quad \text{Para } m = 1 \text{ e } k^2 r^2 \ll 1, \text{ (que}$$

é o nosso caso), temos:

$$f = r^3(\rho\sigma^2 + F^2). \quad (A-2)$$

$$g = 2k^2r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r (\rho\sigma^2 + F^2) + \right. \\ \left. + r \left\{ (k^2B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) + \rho\sigma^2 + 2 \frac{B_\theta^2}{r^2} T \right\} \right]. \quad (A-3)$$

Relembrando,

$$F = \frac{B_\theta}{r} + kB_z \quad \text{e} \quad T = \frac{\rho\sigma^2\gamma p}{\rho\sigma^2(\gamma p + B^2) + \gamma pF^2}$$

Vamos resolver esta equação na camada inercial em torno de r_0 , dada $\left. \frac{dF}{dr} \right|_{r_0} = -k$. A quantidade $\mu(r)$ é definida por:

$$\mu(r) = \frac{B_\theta(r)}{rB_z(r)}$$

Assim

$$F(r) = B_z(r) [\mu(r) + k]$$

$$\text{e } F(r_0) = 0.$$

Portanto, perto de $r = r_0$, faremos:

$$F(r) = \left. \frac{dF}{dr} \right|_{r_0} (r - r_0).$$

Mas

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dB_z}{dr} [\mu(r) + k] + B_z \frac{d\mu}{dr}$$

$$\therefore \left. \frac{dF}{dr} \right|_{r_0} = B_z(r_0) \left. \frac{d\mu}{dr} \right|_{r_0}$$

Introduzindo a variável adimensional da camada inercial

$$z = \frac{1}{\tau} \frac{r - r_0}{a} \quad (A-4)$$

onde:

$a \rightarrow$ raio da coluna de plasma e

$\tau \rightarrow$ largura adimensional da camada inercial ($\tau \ll 1$).

Temos então:

$$F(r) = -\frac{B_{z0}}{a} (a^2 \mu') \tau$$

onde

$$\mu' = \left. \frac{d}{dr} \right|_{r_0} \quad \text{e} \quad B_{z0} = B_z(r_0).$$

Portanto, em termos de z o primeiro termo da equação da camada inercial torna-se:

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} = \frac{r_0^3}{a^2} (a\mu')^2 \frac{B_{z0}^2}{a^2} \frac{d}{dz} \left[\frac{a^2 \rho \sigma^2}{B_{z0}^2 (a^2 \mu')^2 \tau^2} + z^2 \right] \frac{d\xi}{dz}.$$

Escolhendo

$$\tau^2 = \frac{a^2 \rho \sigma^2}{B_{z0}^2 (a^2 \mu')^2} \quad (A-5)$$

a equação anterior fica

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} = \frac{r_0^3}{a^2} (a\mu')^2 \frac{B_{z0}^2}{a^2} \frac{d}{dz} (1 + z^2) \frac{d\xi}{dz}. \quad (A-6)$$

Vamos agora reescrever as várias quantidades que aparecem na expressão para g , em termos de z e τ^2 .

$$\frac{1}{2} r (\rho\sigma^2 + F^2) = \frac{r_0}{2} \left(\frac{B_{z0}}{a}\right)^2 (a^2_{\mu'})^2 \tau^2 (1 + z^2).$$

$$\begin{aligned} (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) &= B_z^2 (k^2 - \mu^2) = B_z^2 [k^2 - (-k + \frac{\tau}{a} a^2_{\mu'} z)^2] \\ &= B_z^2 \left[k^2 - k^2 + 2k \frac{\tau}{a} (a^2_{\mu'}) z - \frac{\tau^2}{a^2} (a^2_{\mu'})^2 z^2 \right] \end{aligned}$$

$$\therefore (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) = 2 \frac{B_z^2}{a} \tau (ka) (a^2_{\mu'}) z - \frac{B_z^2}{a^2} \tau^2 (a^2_{\mu'})^2 z^2$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\rho\sigma^2 B^2 (1 + \gamma p/B^2) + \gamma p F^2} \\ &= \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\rho\sigma^2 B_{z0}^2 (1 + \gamma p/B^2) + \gamma p \frac{B_{z0}^2}{a^2} (a^2_{\mu'})^2 \tau^2 z^2} \end{aligned}$$

Introduzindo a definição

$$\beta_0 = \frac{2p}{B_{z0}^2}$$

temos:

$$T = \frac{\frac{1}{2} \gamma \beta_0}{1 + \frac{1}{2} \gamma \beta_0 (1 + z^2)}$$

Assim g fica escrito como:

$$\begin{aligned} g &= 2k^2 r_0^2 \left[\frac{dp}{dr} \Big|_{r_0} + \frac{r_0}{2} \left(\frac{B_{z0}}{a}\right)^2 (a^2_{\mu'})^2 \tau^2 (1 + z^2) + \right. \\ &+ 2r_0 \frac{B_{z0}^2}{a^2} \tau (ka) (a^2_{\mu'}) z - r_0 \frac{B_{z0}^2}{a^2} \tau^2 (a^2_{\mu'})^2 z^2 \left. + \right. \end{aligned}$$

$$+ r_0 \rho \sigma^2 + r_0 \frac{B_{\theta 0}^2}{r_0^2} \left[\frac{\gamma \beta_0}{1 + \frac{1}{2} \gamma \beta_0 (1 + z^2)} \right]$$

ou ainda,

$$g \approx k^2 r_0^3 \left(\frac{B_{z0}}{a} \right)^2 (a^2 \mu')^2 \left[\frac{a}{r_0} \frac{\beta_0}{(a^2 \mu')^2} \left(\frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right) + 3 \tau^2 + \right. \\ \left. + 4 \frac{\tau(ka)}{(a^2 \mu')^2} z - \tau^2 z^2 + 2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B_{\theta 0}}{B_{z0}} \right)^2 \frac{1}{(a^2 \mu')^2} \frac{\gamma \beta_0}{1 + \frac{1}{2} \gamma \beta_0 (1 + z^2)} \right] \quad (A-7)$$

Portanto, usando as equações (A-6) e (A-7), a equação σ - Euler torna-se:

$$\frac{d}{dz} (1 + z^2) \frac{d\xi}{dz} - (ka)^2 \left[\frac{a}{r_0} \frac{\beta_0}{(a^2 \mu')^2} \left(\frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right) + 3\tau^2 + \right. \\ \left. + 4 \frac{\tau(ka)}{(a^2 \mu')^2} z - \tau^2 z^2 + 2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B_{\theta 0}}{B_{z0}} \right)^2 \frac{1}{(a^2 \mu')^2} \frac{\gamma \beta_0}{1 + \frac{1}{2} \gamma \beta_0 (1 + z^2)} \right] \xi = 0$$

Ora, espera-se ter:

$$\tau \sim (ka)^2$$

$$a^2 \mu' \Big|_0 = - (ka) a \left[\frac{B'_\theta}{B_\theta} - \frac{1}{r} - \frac{B'_z}{B_z} \right]_0 \sim ka$$

$$\left(\frac{B_{\theta 0}}{B_{z0}} \right)^2 \sim (ka)^2$$

$$\beta_0 \sim (ka)^2$$

Portanto

$$\frac{\beta_0}{(a^2 \mu')^2} \sim 1$$

$$\tau^2 \sim (ka)^4$$

$$\frac{\tau(ka)}{(a^2 \mu')^2} \sim (ka)^2$$

$$e \frac{(B_{\theta 0}/B_{z 0})^2}{(a^2 \mu')^2} \beta_0 \sim (ka)^2 .$$

Desse modo temos que a equação σ -Euler em mais baixa ordem, $(ka)^2$, é escrita como:

$$\frac{d}{dz} (1 + z^2) \frac{d\xi}{dz} - \frac{a}{r_0} \frac{(ka)^2}{(a^2 \mu')^2} \beta_0 \left(\frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right)_0 \xi = 0 \quad (A-8)$$

ou

$$(1 + z^2) \frac{d^2 \xi}{dz^2} + 2z \frac{d\xi}{dz} - D \xi = 0 \quad (A-9)$$

$$\text{onde } D = \frac{a}{r_0} \frac{(ka)^2}{(a^2 \mu')^2} \beta_0 \left(\frac{a}{p} \frac{dp}{dr} \right)_0 . \quad (A-10)$$

Fazendo a transformação de variável,

$$t = z^2$$

temos

$$\frac{d}{dz} = 2z \frac{d}{dt} ; \quad \frac{d^2}{dz^2} = 2 \frac{d}{dt} + 4z^2 \frac{d^2}{dt^2}$$

e ficamos com

$$t(1+t) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\right) \frac{d\xi}{dt} - \frac{D}{4} \xi = 0 .$$

Trocando o sinal da variável independente $t \rightarrow -t$,
obtemos:

$$t(1-t) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right) \frac{d\xi}{dt} + \frac{D}{4} \xi = 0 . \quad (\text{A-11})$$

APÊNDICE B

Equações para o Modo Kink Central.

1. Região interna à camada inercial

Partindo das expressões (A-2, 3) encontradas no apêndice A, temos:

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0$$

onde

$$f = r^3(\rho\sigma^2 + F^2)$$

$$g = 2k^2 r^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} r (\rho\sigma^2 + F^2) + r \left\{ (k^2 B_z^2 - \frac{B_\theta^2}{r^2}) + \rho\sigma^2 + 2 \frac{B_\theta^2}{r^2} T \right\} \right],$$

e ainda $F = \frac{B_\theta}{r} + kB_z$

$$T = \frac{\rho\sigma^2 \gamma p}{\rho\sigma^2 (\gamma p + B^2) + \gamma p F^2}.$$

Vamos resolver esta equação na camada inercial no entorno de $r_0 = 0$, dada por $\mu(r_0) = -k$. Conforme já dissemos, $\mu(r)$ é definido por:

$$\mu(r) = \frac{B_\theta(r)}{r B_z(r)}$$

e portanto:

$$F(r) = B_z(r) [\mu(r) + k] .$$

Em vez de fazermos

$$\mu + k \approx \mu'(r_0)(r - r_0)$$

como no caso para o modo kink interno, o que resultou em

$$F(r) = B_z(r_0) \mu'(r_0)(r - r_0) ,$$

faremos agora

$$\mu + k \approx \frac{1}{2} \mu'' r^2$$

o que implica em se ter

$$F(r) \approx \frac{1}{2} F''(0) r^2 ;$$

ou seja

$$F(r) \approx \frac{1}{2} B_{z0} \mu'' r^2 ; \quad B_{z0} = B_z(0) ; \quad \mu'' = \left. \frac{d^2 \mu}{dr^2} \right|_0$$

Definindo a variável adimensional da camada inercial

$$z = \frac{1}{\tau} \frac{r}{a}$$

onde a é o raio da coluna de plasma e $\tau \ll 1$, é a espessura adimensional da camada inercial, temos:

$$F(r) \approx \frac{1}{2} B_{z0} \mu'' r^2 = \frac{1}{2} B_{z0} \mu'' a^2 \tau^2 z^2$$

e desde que

$$\frac{d}{dr} = \frac{dz}{dr} \frac{d}{dz} = \frac{1}{\tau a} \frac{d}{dz} ,$$

o primeiro termo da equação para a camada inercial torna-se,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} &= \frac{1}{\tau a} \frac{d}{dz} a^3 \tau^3 z^3 (\rho \sigma^2 + \frac{1}{4} B_{z0}^2 \mu''^2 a^4 \tau^4 z^4) \frac{1}{\tau a} \frac{d\xi}{dz} \\ &= a^5 \tau^5 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 \frac{d}{dz} z^3 \left[\frac{\rho \sigma^2}{\frac{1}{4} B_{z0}^2 \mu''^2 a^4 \tau^4} + z^4 \right] \frac{d\xi}{dz} \end{aligned} \quad (B-1)$$

Definindo a velocidade de Alfvén e o tempo MHD característico como

$$V_A = \frac{-B_{z0} (a^3 \mu''')}{2 \sqrt{\rho}} \quad , \quad \tau_H = \frac{a}{V_A} \quad ,$$

temos que um dos termos que aparece em (B-1)

$$\frac{\rho \sigma^2}{\frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4} = \frac{\sigma^2 a^2}{V_A^2 \tau^4} = \frac{\sigma^2 \tau_H^2}{\tau^4} \quad .$$

Vamos definir nosso auto-valor Λ como:

$$\Lambda^2 = \frac{\sigma^2 \tau_H^2}{\tau^4}$$

e assumir que $\Lambda^2 \sim \mathcal{O}(1)$.

Dessa maneira, uma vez que Λ e τ estejam determinados, a razão de crescimento σ do modo é dada por:

$$\sigma = \Lambda \tau^2 \tau_H^{-1} \quad . \quad (B-2)$$

Com essas definições a equação (B-1) escreve-se como

$$\frac{d}{dr} f \frac{d\xi}{dr} = a^5 \tau^5 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 \frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi}{dz} \quad . \quad (B-3)$$

Vejamos então os termos que aparecem na expressão para g :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r (\rho \sigma^2 + F^2) &= \frac{1}{2} a_{\tau z} (\rho \sigma^2 + \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4 z^4) \\ &= \frac{1}{2} a_{\tau} \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4 z (\frac{\rho \sigma^2}{\frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4} + z^4) \\ \therefore \frac{1}{2} r (\rho \sigma^2 + F^2) &= \frac{1}{8} B_{z0}^2 \mu''^2 a^5 \tau^5 z (\Lambda^2 + z^4) \quad (B-4) \end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$\begin{aligned} (k^2 B_z^2 - \frac{B_{\theta}^2}{r^2}) &= B_z^2 (k^2 - \frac{B_{\theta}^2}{B_z^2 r^2}) = B_z^2 (k^2 - \mu^2) \\ &= B_z^2 \left[k^2 - \left(\frac{F(r)}{B_z} - k \right)^2 \right] \end{aligned}$$

e como $F(r) \approx \frac{1}{2} B_{z0} \mu'' a^2 \tau^2 z^2$,

chega-se que

$$(k^2 B_z^2 - \frac{B_{\theta}^2}{r^2}) = k B_z^2 \mu'' a^2 \tau^2 z^2 - \frac{B_z^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4 z^4 \quad (B-5)$$

Quanto à expressão para T,

$$T \approx \frac{\rho \sigma^2 \gamma p}{\rho \sigma^2 B_{z0}^2 (1 + \frac{\gamma p}{B_{z0}^2}) + \gamma p \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4 z^4}$$

temos ao definir $\beta_0 = \frac{2p_0}{B_{z0}^2}$

$$T \approx \frac{\frac{1}{2} \gamma \beta_0 \frac{p}{p_0}}{1 + \frac{1}{2} \gamma \beta_0 \frac{p}{p_0} + \frac{\frac{1}{2} \gamma \beta_0 \frac{p}{p_0} B_{z0}^2 \mu''^2 a^4 \tau^4 z^4}{4 \rho \sigma^2}}$$

isto é:

$$T \approx \frac{1}{2} \gamma \beta_0 \Lambda^2 \frac{p}{p_0} \left[\frac{1}{2} \gamma \beta_0 \frac{p}{p_0} (\Lambda^2 + z^4) + \Lambda^2 \right]^{-1} \quad (B-6)$$

Procedendo da mesma forma teremos para $a_{\rho\sigma}^2 \tau$, a expressão:

$$\begin{aligned} a_{\rho\sigma}^2 \tau &= a_{\tau} \Lambda^2 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^4 \tau^4 \\ &= \Lambda^2 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^5 \tau^5 \end{aligned} \quad (B-7)$$

Portanto, agrupando as equações (B-4, 5, 6, 7) g fica escrito como:

$$\begin{aligned} g &= 2k^2 a^2 \tau^2 z^2 \left[\frac{dp}{dr} + \frac{B_{z0}^2}{8} \mu''^2 a^5 \tau^5 z (\Lambda^2 + z^4) + kB_z^2 \mu'' a^3 \tau^3 z^3 - \right. \\ &- B_z^2 \frac{\mu''^2}{4} a^5 \tau^5 z^5 + \Lambda^2 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^5 \tau^5 + \\ &\left. + 2 \frac{B_{\theta}^2}{r^2} a_{\tau} \frac{\Lambda^2}{2} \gamma \beta_0 \frac{p}{p_0} z \left\{ \frac{1}{2} \gamma \beta_0 \frac{p}{p_0} (\Lambda^2 + z^4) + \Lambda^2 \right\}^{-1} \right] \quad (B-8) \end{aligned}$$

Vamos considerar que próximo a $r = 0$, $p(r)$, $B_{\theta}(r)$ e $B_z(r)$ são da forma

$$p(r) = p_0 \left(1 + \alpha_2 \frac{r^2}{a^2} + \alpha_4 \frac{r^4}{a^4} \right), \quad \begin{aligned} \alpha_2 &\sim \sigma(1) \\ \alpha_4 &\sim \sigma(1) \end{aligned}$$

$$B_{\theta}(r) = (a B'_p) \frac{r}{a}$$

$$B_z(r) = B_{z0}$$

Então

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{a\tau} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{a\tau} \frac{d}{dz} p_0 (1 + \alpha_2 \tau^2 z^2 + \alpha_4 \tau^4 z^4)$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = 2 \frac{p_0}{a} \tau (\alpha_2 z + 2\alpha_4 \tau^2 z^3) \quad (B-9)$$

$$\frac{B_{\theta}^2}{r^2} = (a B'_p)^2 \tau^2 z^2 \frac{1}{a^2 \tau^2 z^2} = \frac{(a B'_p)^2}{a^2} \quad (B-10)$$

Inserindo (B-9, 10) em (B-8) e juntando com (B-3),

a equação de Euler torna-se:

$$\begin{aligned} & a^5 \tau^5 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 \frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi}{dz} - 2k^2 a^2 \tau^2 z^2 \left[2 \frac{p_0}{a} \tau (\alpha_2 z + \right. \\ & \left. + 2\alpha_4 \tau^2 z^3) + \frac{B_{z0}^2}{8} \mu''^2 a^5 \tau^5 z (\Lambda^2 + z^4) + k B_{z0}^2 \mu'' a^3 \tau^3 z^3 + \right. \\ & \left. - B_{z0}^2 \frac{\mu''^2}{4} a^5 \tau^5 z^5 + \Lambda^2 \frac{B_{z0}^2}{4} \mu''^2 a^5 \tau^5 z + \right. \\ & \left. + \gamma \beta_0 (a B'_p)^2 \frac{\tau \Lambda^2}{a} z \left\{ \frac{1}{2} \gamma \beta_0 (\Lambda^2 + z^4) + \Lambda^2 \right\}^{-1} \right] \xi = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, nossa equação de auto-valor é então:

$$\frac{d}{dz} z^3 (\Lambda^2 + z^4) \frac{d\xi}{dz} - 8k^2 a^2 \tau^{-2} z^2 \left[\frac{\beta_0}{(a^3 \mu''^2)} (\alpha_2 z + 2\alpha_4 \tau^2 z^3) + \right.$$

$$+ \left. \frac{\tau^4}{8} (3\Lambda^2 - z^4) + \frac{(ka)}{(a^3 \mu'')} \tau^2 z^3 + \Lambda^2 \frac{\gamma \beta_0}{(a^3 \mu'')^2} \frac{(a B'_p)^2}{(B_{z0})^2} \frac{z}{\frac{1}{2} \gamma \beta_0 (\Lambda^2 + z^4) + \Lambda^2} \right] \xi = 0$$

(B-11)

APÊNDICE C

Determinação dos Parâmetros de Equilíbrio e Expressões destas Derivadas.

Os problemas físicos por nós abordados envolvem perfis de pressão e corrente expressos sob a forma:

$$p(r) = p_0 \left[1 - \alpha \frac{r^2}{a^2} - (1 - \alpha) \frac{r^4}{a^4} \right] \quad (C-1)$$

$$j_z(r) = j_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^\gamma \quad (C-2)$$

onde α e γ são constantes positivas quaisquer, de $\mathcal{O}(1)$.

Usando uma das leis básicas da magnetostática, a lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} \quad (C-3)$$

onde \vec{B} é o vetor indução magnética e \vec{J} a densidade de corrente e considerou-se $\mu_0 = 1$, temos em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = j_z(r) \quad (C-4)$$

$$\int \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} dr = \int r j_z dr .$$

Como $j_z(r)$ é dada por (C-2), tem-se:

$$\oint r B_\theta = \int r j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\gamma dr$$

$$\therefore B_{\theta}(r) = \frac{j_0}{2(\gamma+1)} \frac{a^2}{r} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma+1} \right] \quad (C-5)$$

Podemos calcular $B_z(r)$ a partir da equação de equilíbrio de pressão:

$$\nabla p = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (C-6)$$

que em coordenadas cilíndricas nos dá

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (B_{\theta}^2 + B_z^2) - \frac{B_{\theta}^2}{r}$$

ou seja

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dr} B_z^2 = \frac{dp}{dr} + \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (rB_{\theta})^2 \quad (C-7)$$

e portanto

$$-\frac{1}{2} (B_z^2(r) - B_z^2(0)) = p(r) - p(0) + \int_0^r \frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} (rB_{\theta})^2 dr \quad (C-8)$$

Em vez de substituirmos em (C-8) a expressão (C-5) obtida para $B_{\theta}(r)$, vamos tomar essa última e desenvolvê-la em série de potências já que ela contém um termo da forma $(1-x)^n$, isto é:

$$B_{\theta}(r) = \frac{j_0}{2(\gamma+1)} \frac{a^2}{r} \left[1 - (1 - (\gamma+1) \frac{r^2}{a^2} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \frac{r^4}{a^4} - \dots) \right]$$

obtendo-se então

$$B_{\theta}(r) = \frac{j_0}{2} \frac{a^2}{r} \left[\frac{r^2}{a^2} - \frac{\gamma}{2} \frac{r^4}{a^4} \right] \quad (C-9)$$

Com isso tem-se que

$$\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} (rB_\theta)^2 = \frac{j_0^2}{4} \left[2r - 3\gamma \frac{r^3}{a} \right] \quad (C-10)$$

e a expressão (C-8) pode ser reescrita como:

$$-\frac{1}{2}(B_z^2(r) - B_z^2(0)) = p(r) - p(0) + \int_0^r \left[\frac{j_0^2}{4} (2r - 3\gamma \frac{r^3}{a}) \right] dr. \quad (C-11)$$

Desde que $p(r)$ é dada por (C-1) e $p(0) = p_0$, a equação (C-11) torna-se:

$$B_z^2(r) - B_z^2(0) = \frac{r^2}{a} (2p_0^\alpha - \frac{j_0^2 a^2}{2}) + \frac{r^4}{4} \left[(1-\alpha) 2p_0 + \frac{3}{4} j_0^2 \frac{\gamma}{2} \right]. \quad (C-12)$$

Como $\frac{r}{a} \leq 1$ é razoável desprezar-se os termos em $\frac{r^4}{4}$ em (C-12).

Dessa forma temos

$$B_z^2(r) \approx B_z^2(0) + \frac{r^2}{a} (2p_0^\alpha - j_0^2 \frac{a^2}{2}) \quad (C-13)$$

ou seja,

$$B_z(r) \approx B_{z0} \left[1 + \frac{r^2}{B_{z0}^2} \left(\frac{2p_0^\alpha}{a^2} - \frac{j_0^2}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (C-14)$$

onde $B_{z0} = B_z(0)$.

Expandindo (C-14) em série de potências,

$$B_z(r) \approx B_{z0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{B_{z0}^2} \left(\frac{j_0^2}{2} - \frac{2p_0^\alpha}{a^2} \right) \right]. \quad (C-15)$$

Portanto $p(r)$, $j_z(r)$, $B_\theta(r)$ e $B_z(r)$ são dados pelas expressões (C-1, 2, 9, 15) respectivamente.

Devemos lembrar-nos que estamos trabalhando numa camada inercial no entorno de $r = r_0$ dada por $\mu(r_0) = -k$. Vamos então explorar este fato.

A quantidade $\mu(r)$ foi definida como

$$\mu(r) = \frac{B_\theta(r)}{r} \cdot \frac{1}{B_z(r)} .$$

Ora, de (C-9) tem-se:

$$\frac{B_\theta(r)}{r} = \frac{j_0}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{r^2}{a^2} \right] , \quad (C-16)$$

de modo que usando (C-15, 16) obtêm-se

$$\mu(r) = \frac{\frac{j_0}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{r^2}{a^2} \right]}{B_{z0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{B_{z0}^2} \left(\frac{j_0^2}{2} - \frac{2p_0^\alpha}{a^2} \right) \right]} . \quad (C-17)$$

Desde que $\frac{1}{1-\epsilon} = 1 + \epsilon$, ,

podemos reescrever (C-17) como

$$\mu(r) = \frac{j_0}{2B_{z0}} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{r^2}{a^2} \right] \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{B_{z0}^2} \left(\frac{j_0^2}{2} - \frac{2p_0^\alpha}{a^2} \right) \right] .$$

Pela mesma razão mencionada anteriormente, $\frac{r}{a} \leq 1$, faremos então:

$$\mu(r) \approx \frac{j_0}{2B_{z0}} \left[1 - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2p_0^\alpha}{a^2 B_{z0}^2} - \frac{j_0^2}{2B_{z0}^2} + \frac{\gamma}{a^2} \right) \right] . \quad (C-18)$$

Portanto,

$$\mu(0) = \frac{j_0}{2B_{z0}} \quad (C-19)$$

Se estamos no entorno $r_0 = 0$, temos através da expressão

$$\mu(r_0) = -k$$

que

$$a\mu(0) = -ka \quad (C-20)$$

e usando (C-19) obtém-se:

$$\frac{a j_0}{2B_{z0}} = -ka$$

ou seja

$$j_0 = -2ka \frac{B_{z0}}{a} \quad (C-21)$$

Também já definimos no apêndice A

$$\beta_0 = \frac{2p_0}{B_{z0}^2} ,$$

então tem-se que

$$2p_0 = \beta_0 B_{z0}^2 \quad (C-22)$$

- Derivação da expressão para $(a^3 \mu''(r))$

Os nossos cálculos para o modo Kink Central envolvem a expressão $a^3 \mu''(r)$, ou mais precisamente o parâmetro:

$$D = \frac{8\beta_0 \alpha_2}{(a^3 \mu'')^2} , \quad \alpha_2 = -\alpha ,$$

contêm este termo.

Da equação (C-18) temos

$$\mu'(r) = \frac{j_0}{2B_{z0}} \left[-r \left(\frac{2p_0\alpha}{a^2 B_{z0}^2} - \frac{j_0^2}{2B_{z0}^2} + \frac{\gamma}{a^2} \right) \right]$$

então

$$\mu''(r) = - \frac{j_0}{2B_{z0}} \left[\frac{2p_0\alpha}{a^2 B_{z0}^2} - \frac{j_0^2}{2B_{z0}^2} + \frac{\gamma}{a^2} \right], \quad (C-23)$$

ou ainda

$$\mu''(r) = \frac{j_0^3}{4B_{z0}^3} - \frac{2p_0 j_0\alpha}{2a^2 B_{z0}^3} - \frac{j_0\gamma}{2a^2 B_{z0}} \quad (C-24)$$

Fazendo uso de (C-21, 22), a equação (C-24) fica escrita como:

$$\mu''(0) = \frac{2(ka)^3}{a^3} + \frac{\beta_0(ka)\alpha}{a^3} + \frac{(ka)\gamma}{a^3}$$

$$\therefore a^3 \mu''(0) = 2(ka)^3 + \beta_0(ka)\alpha + \gamma(ka) \quad (C-25)$$

REFERÊNCIAS

- [1] Goedbloed, J.P. e Sakanaka, P.H., Phys Fluids 17, 908 (1974-I).
- [2] Furth, H.P., Nuclear Fusion and Scientific American.
- [3] Newcomb, W.A., Ann. Phys. (N.Y.) 10, 232 (1960).
- [4] Rosenbluth, M.N. e Dagazian, R.Y., e Rutherford, P.H., Phys. Fluids 16, 1894 (1973).
- [5] Bishop, A.S., "Project Sherwood", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958.
- [6] Schlichting, H.; Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill series in Mechanical Engineering, 6th Edition (1968).
- [7] Kruskal, M.D., e Tuck, J.L., Proc. Roy. Soc. (London) A245, 222 (1958).
- [8] Kadomtsev, B.B., em Reviews of Plasma Physics, vol. 2, editado por M.A. Leontovich, Consultants Bureau, New York, 153 (1966).
- [9] Taylor, J.B., "Plasma Physics", International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965, p. 449.
- [10] Kruskal, M.D., Johnson, J.L., Gottlieb, M.B., e Goldman, L.M., Phys. Fluids 1, 421, (1958).
- [11] Shafranov, V.D., Soviet Phys. JETP, 6, 545 (1958).
- [12] Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D., e Kulsrud, R.M., Proc. Roy. Soc. (London) A244, 17 (1958).
- [13] Suydam, B.R., em Proceedings of the Second International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, vol. 31, United Nations, Geneva, 157, (1958).
- [14] Ware, A.A., Haas, F.A., Phys. Fluids 9, 956 (1966).
- [15] Shafranov, V.D., Yurchenko, E.I., Soviet Phys. JETP 26, 682 (1968).

- [16] Shafranov, V.D., Soviet Phys. - Tech. Phys. 15, 175 (1970).
- [17] Shigueoka, H., Tese de Mestrado, UNICAMP, (1977).
- [18] Wesson, J.A., "Review Paper", Nucl. Fus. 18, 1 (1978) p. 87.
- [19] Goedbloed, J.P., Notes on Magnetohydrodynamics, Universidade Estadual de Campinas, (1979).
- [20] Krall, N.A., Trivelpiece, A.W., em Principles of Plasma Physics, Mc Graw-Hill Book Co., New York, 94 (1973).