POTENCIAIS GENERALIZADOS E CARGAS DUAIS:

UM ENSAIO SOBRE MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Adolfo Maia Jr. e aprovada pela Comissão Julgadora.

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Adolfo Maia Jr. e aprovada pela comissão julgadora
04/08/87

Campinas, 04 de agosto de 1987.

Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.
Orientador

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

AGOSTO - 1987

AGRADECIMENTOS

Queremos aqui agradecer aos colegas do Grupo de Física-Matemática do IMECC-UNICAMP onde a idéia do presente trabalho surgiu entre tantas outras interessantes. Em particular agradecemos as frequentes discussões, sugestões e o estímulo do Professor Márcio A. de Faria-Rosa. Agradecemos também ao Professor A. Rigas pelos ensinamentos preciosos que resultaram do Seminário de Geometria do Departamento de Matemática.

Também devemos agradecer a Lourdes pelo serviço de datilografia em tempo tão reduzido, aos amigos do IMECC e do I.F.G.W. pelo constante encorajamento; a Maria Goretti, que suportou com amor durante todo o tempo minhas variações de humor de $+\infty$ à $-\infty$; finalmente ao Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr., pela orientação não só deste trabalho, mas ao longo dos anos, mostrando que a física pode ser ao mesmo tempo surpreendente e bela.

Cabe aqui, também um agradecimento à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), pelo apoio financeiro no início desta pesquisa.

Dedicatória

Este trabalho é dedicado às duas mulheres da minha vida: à minha mãe, Dona Alaide e à Maria Goretti, uma menina muito especial.

"A existência humana está baseada sobre dois pilares: compaixão e conhecimento. Compaixão sem conhecimento é inefectiva; Conhecimento sem compaixão é desumano"

Victor Weisskopf.

Pretty Mathematics

"A good deal of my research work in physics has consisted in not setting out to solve some particular problem, but simply examining mathematical quantities of a kind that physicists use and trying to fit them together in an interesting way regardless of any application that the work may have. It is simply a search for pretty mathematics. It may turn out later that the work does have an application. Then one has had good luck.

Another example of pretty mathematics led to the idea of the magnetic monopole. When I did this work I was hoping to find some explanation of the fine-structure constant $\hbar c/e^2$. But this failed. The mathematics led inexorably, to the monopole.

From the theoretical point of view one would think monopoles should exists, because of the prettiness of the mathematics. Many attemps to find them have been made, but all have been unsuccessful. One should conclude that pretty mathematics by itself is not an adequate reason for nature to have made use of a theory. We still have much to learn in seeking for the basic principles of nature"

P.A.M. Dirac [3]

"Contra o positivismo que pára perante os fenômenos e diz: "Há apenas fatos", eu digo: "Ao contrário, fatos é o que não há; há apenas interpretações".

F. Nietzche .

RESUMO

Neste trabalho mostramos, primeiramente, a diferença entre monopolos magnéticos fenomenológicos que aparecem como fontes para a Equação Homogênea de Maxwell e os monopolos topológicos em que a Equação Homogênea é mantida, mas em contrapartida, a topologia do espaço-tempo é modificada. Introduzimos então os conceitos de potencial e campo generalizados e obtemos suas equações de campo na linguagem das formas diferenciais. Estendemos a teoria para um grupo de gauge arbitrário. Obtemos para os monopolos fenomenológicos a condição de Quantização de Dirac de duas maneiras distintas. A primeira usa propriedades grupais fundamentais dos operadores que representam os elementos de grupos de simetria no espaço de Hilbert do sistema físico sob consideração. A segunda utiliza uma generalização do Método de Mandelstam para a formulação da eletrodinâmica quântica. Como os monopolos fenomenológicos aparecem naturalmente nas equações de campo eles aqui foram chamados *cargas duais*.

Numa terceira etapa escrevemos as equações de campo na linguagem de Fibrado de Clifford. Utilizando o Cálculo Geométrico da Álgebra de Clifford, deduzimos a Equação de Movimento de cargas elétricas e monopolos magnéticos diretamente das equações de campo escritas no Formalismo de Clifford.

ABSTRACT

In this work we first show the difference between phenomelogical magnetic monopoles that appear as sources in Maxwell's Homogeneous Equation and the topological monopoles in which the Homogeneous Equation is valid, but where the topology of space-time is modified. We then introduce the concepts of a generalized potential and field. We then obtain their field equations in the language of differential forms. We obtain for the phenomenological monopoles Dirac's quantization condition in two different ways. The first uses the fundamental group properties of the operators that represent the elements of the symmetry groups in the Hilbert space of the physical system which are being studied.

The second uses a generalization of Mandelstam's method for the formulation of quantum electrodynamics.

As the phenomenological monopoles appear naturally in the field equations here they have been called *dual charges*.

In a third step we write the field equations in the language of Clifford Bundles. By using the Geometrical Calculus of Clifford's Algebra, the equation of motion of the eletric charges and magnetic monopoles are deduced directly from the Field Equations which are written in Clifford's Formalism.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell se escrevem como:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E} = \rho_e & &\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ &\nabla\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \overrightarrow{j_e} & &-\nabla\times\vec{E} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde todas as funções vetoriais são aplicações de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\rho_e : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis (eventualmente no sentido das distribuições). Se a qualquer pessoa, que conhece o significado físico dos diversos objetos geométricos que ocorrem nestas equações, fizermos a seguinte pergunta: Como generalizar o conjunto das Equações de Maxwell para descrever monopolos magnéticos? - A resposta natural seria escrever o novo conjunto de equações(+):

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E} = \rho_e & &\nabla\cdot\vec{B} = \rho_m \\ &\nabla\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \overrightarrow{j_e} & &-\nabla\times E - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{j_m} \end{aligned} \tag{2}$$

Como é bem conhecido, para a descrição da interação de partículas carregadas com o campo eletromagnético é necessário postular-se em nível clássico que esta interação é dada no caso de uma

---

(+) No Capítulo I nós mostramos que as equações (2) descrevem uma teoria efetivamente diferente daquela descrita pelas equações (1) se e somente se a razão entre a carga elétrica e a carga magnética de todas as partículas não for uma constante universal.

partícula elétrica com carga $\underline{e}$, pela força de Lorentz

$$\vec{F}_e = e\vec{E} + e\vec{v}_e \times \vec{B} \tag{3}$$

onde $\vec{v}_e$ é o vetor velocidade da partícula.

No caso da interação de um monopolo magnético de carga magnética $\underline{g}$ com o campo eletromagnético é ainda necessário que a interação seja dada pela força de Lorentz:

$$\vec{F}_g = -g\vec{B} + g\vec{v}_g \times \vec{E} \tag{4}$$

onde $\vec{v}_g$ é o vetor-velocidade da partícula.

No caso da teoria definida pelas equações (1) e (3), é bem conhecido que existe uma reformulação da teoria em termos dos potenciais A_o e $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{E} = - \nabla A_o - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5a}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5b}$$

Além disso é possível escrevermos uma Lagrangeana que fornece não somente as equações de campo mas também as equações de movimento corretas das partículas carregadas. Nesta formulação o momento canônico das partículas é:

$$\pi_\mu = P_\mu + eA_\mu \quad , \quad \mu = 0,\dots,3 \tag{6}$$

e este formalismo é aquele natural para a quantização canônica da teoria (Eletrodinâmica Quântica).

No caso da teoria em que cargas elétricas e monopolos estão presentes, isto é, a teoria definida pelas equações (2), (3) e (4) sabemos que é impossível expressar $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos de um único potencial. Neste caso precisamos de dois potenciais, cuja expressão correta é apresentada no Capítulo II.

Além do mais sabe-se, depois dos estudos de Rohrlich [9], Rosenbaum [10] e Carter [11], que esta teoria não admite uma formulação lagrangeana. A não existência da formulação lagrangeana afastou a maioria dos físicos do caminho natural de se formular uma teoria para os monopolos com as soluções óbvias das equações (2), (3) e (4). Do ponto de vista histórico devemos dizer que Dirac usou o sistema de eqs.(2,3,4) mas insistiu em representar o campo eletromagnético do monopolo por um potencial. Tal insistência se deveu ao fato de Dirac estar interessado na formulação quântica para o problema da interação carga-monopolo. Para a formulação quântica é necessário o potencial A_μ que aparece no momento canônico [eq.(6)]. O potencial encontrado por Dirac [ver §1.4 para detalhes] é singular ao longo de uma linha unindo o infinito ao ponto onde se encontra o monopolo. Esta linha infinita é conhecida como a "string de Dirac". Evidentemente dado que o potencial é singular ao longo da string de Dirac, esta teoria encontra diversas dificuldades matemáticas que foram estudadas por diversos autores tanto em nível clássico como em nível quântico. Veja-se, por exemplo, Frenkel [12].

Na teoria de Dirac, mostra-se que uma transformação de gauge(+) apropriada pode levar a string de Dirac para qualquer

(+) Veja Apêndice A para a definição de transformação de gauge.

outra linha arbitrária do $\mathbb{R}^3$. Tal mostra que a string de Dirac deve ser não observável e de fato impondo esta condição à teoria obtém-se, na versão quântica da mesma, a conhecida *Condição de Quantização de Dirac* entre a carga elétrica e a carga magnética, ou seja:

$$\frac{eg}{4\pi} = \frac{n}{2} \tag{7}$$

Para obtermos uma teoria matemática rigorosa com um único potencial que seja singular somente no ponto em que se encontra o monopolo é necessário obtermos monopolos a partir das eqs. (1). Tal é efetivamente possível quando se reformula a teoria de Maxwell em termos de uma teoria de Fibrado Principal (Ver Apêndice A e §1.5.1 do Cap. I). Na reformulação os monopolos aparecem como soluções das equações de Maxwell quando se muda a topologia da base do fibrado.

Nas teorias de fibrado principal o conjunto das equações homogêneas é descrito por uma identidade denominada Identidade de Bianchi, e que é uma característica fundamental destas teorias (Ver Apêndice A).

Por outro lado, com tal formulação do eletromagnetismo de Maxwell em termos de fibrado principal, fica evidente que monopolos só podem aparecer se a topologia da base do fibrado é mudada. Em particular o caso do monopolo de Dirac aparece como uma solução das equações de Maxwell (1) num Fibrado Principal em que o espaço base é $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, ou equivalentemente, S^2, e com fibra $U(1)$. A carga do monopolo neste caso é $n = -\mathbf{C}_1$, onde $\mathbf{C}_1$ é o chamado *primeiro número de Chern*, que é um invariante topológico e classifica todos os fibrados não-equivalentes com base S^2 e fibra U(1). (Ver §1.5.2).

Então, finalmente entendemos que a string de Dirac é simplesmente o resultado de uma representação errônea no $\mathbb{R}^3$ dos potenciais que descrevem o campo eletromagnético sobre S^2.

Os monopolos mencionados acima são denominados de *monopolos topológicos* e lembramos também que eles aparecem em várias teorias de gauge não-abelianas. Veja por exemplo 't Hooft [5], Preskill [6], Olive and Goddard [7] , Coleman [8].

Neste ponto é necessário refletirmos que não existem evidências fortes de que devamos admitir teorias nas quais a topologia do espaço seja diferente da topologia canônica do $\mathbb{R}^3$. Se assumimos tal atitude, devemos forçosamente voltar à teoria dos monopolos fenomenológicos. A existência dos monopolos fenomenológicos implica na violação da Identidade de Bianchi. Como consequência, uma formulação natural desta teoria não pode ser feita com o uso de fibrados principais(*). Considerando que o uso de fibrados principais é a arma empregada pelos físicos modernos nas teorias atuais de unificação [4;13,14], o fato de tentarmos formular uma teoria sem fazer uso de fibrados principais só se justifica se for possível apresentar a teoria dos monopolos fenomenológicos com uma estrutura matemática que forneça resultados mais fundamentais que aqueles que podem ser obtidos com fibrados principais.

Este trabalho mostra que uma tal teoria efetivamente existe! Assim é que depois de recordar no Capítulo I a história dos

---

(*) Pode-se obter uma teoria de fibrado principal usando-se o conceito de "splicing bundle", mas tal formulação ainda é problemática (Ver [29]).

monopolos topológicos e fenomenológicos, incluindo a condição de quantização de Dirac para ambos, apresentamos no Capítulo II uma formulação, em termos de formas diferenciais no Fibrado de Hodge (Ver Apêndice B), dos monopolos magnéticos fenomenológicos. Nossa formulação inclui não somente os monopolos magnéticos descritos pela equação (2) (teoria abeliana), mas também monopolos mais gerais que resultam de teorias ditas não-abelianas. Por tal razão e por causa da aparente simetria na equação (2) damos aos monopolos fenomenológicos o nome genérico de "cargas duais"

No Capítulo III mostramos que é possível dar a teoria das cargas duais uma estrutura de Fibrado de Clifordd. Neste fibrado as equações de campo podem ser obtidas por considerações heurísticas elementares através da simples comparação da graduação(+) dos elementos geométricos que entram na formulação.

Surpreendentemente na nossa formulação da teoria no Fibrado de Clifford podemos deduzir que o acoplamento das cargas elétricas e das cargas magnéticas são dadas respectivamente pelas equações (3) e (4), e daí deduzir as equações de movimento corretas para tais cargas num campo eletromagnético. Com esses resultados, fica justificado termos abandonado o formalismo de fibrado principal, onde o resultado acima não pode ser deduzido.

Em conclusão, este é um trabalho de Física-Matemática no sentido da "pretty mathematics" de Dirac [3], isto é, procuramos estruturas matemáticas belas que possam eventualmente descrever fenômenos físicos. Nosso trabalho não avaliou o status experimental concernente a existência de monopolos (cargas duais) no mundo em que vivemos e também deixamos infelizmente de apresentar aqui a generalização da teoria do Capítulo III para o caso não-abeliano.

(+) Veja Apêndice B.

CAPÍTULO I

MONOPOLOS MAGNÉTICOS FENOMENOLÓGICOS E TOPOLÓGICOS

1.0. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos de monopolos magnéticos fenomenológico (carga dual), topológico e o monopolo de Dirac, bem como obter para todos os tipos de monopolos a condição de quantização de Dirac $\frac{eg}{4\pi} = n\hbar/2$, de forma rigorosa. Tal é necessário dadas as inúmeras confusões que aparecem em geral na literatura sobre o assunto em questão.

Nossa apresentação também deverá deixar clara a razão pela qual optamos por desenvolver uma teoria matemática rigorosa para os monopolos fenomenológicos (Cap. I, §1.3 e §1.4; Caps. II e III).

Neste capítulo como é usual na teoria eletromagnética postulamos que uma partícula elétrica sob a ação de um campo eletromagnético, fica sujeita (classicamente) à força de Lorentz(*). Estudamos em detalhes o movimento de uma carga elétrica e no campo de um monopolo fenomenológico g e quantizamos o movimento da carga elétrica no campo de monopolo. É dessa maneira que obtemos a condição de quantização de Dirac para os monopolos fenomenológicos. (Uma outra dedução usando o conceito de função de onda (ou campo de partículas) dependente do caminho, devido a Mandelstam [19] é apresentada no Cap. II. Apresentaremos também como a quantização

(*) No capítulo III mostraremos que o formalismo de Clifford permite inferir univocamente os acoplamentos de cargas elétricas e dos monopolos magnéticos com o campo eletromagnético, diretamente das equações de Maxwell generalizadas para monopolos fenomenológicos. Este é um dos resultados importantes do presente trabalho.

de Dirac aparece para o caso dos monopolos magnéticos topológicos.

1.1. EQUAÇÕES DE MAXWELL EM FORMA INTRÍNSECA

Seja $N = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e sejam $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j} : N \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\rho_e : N \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações(*). As equações de Maxwell em N, o espaço-tempo Newtoniano de nossa percepção imediata(**), se escrevem:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E} = \rho_e \qquad && \nabla \times B = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_e \\ &\nabla\cdot\vec{B} = 0 && -\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

$\vec{E}$ é dito vetor campo elétrico, $\vec{B}$ é dito o vetor campo de indução magnética, ρ_e é a densidade de corrente.

Consideremos agora uma variedade $\mathbf{E} = (M,g,D)$ onde M é uma variedade com métrica Lorentziana g de assinatura -2 e D é a conexão de Levi-Civita compatível com g em M. Postulando $R(D) = 0$, onde R é o tensor de Riemann, temos o espaço da Relatividade Especial. Neste caso $M = \mathbb{R}^4$ e existem cartas locais $\langle x^\mu \rangle$, $\mu = 0,1,2\ 3$ tais que $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$.

Para cada par $(\mu\nu)$ fixo seja $\mathbf{F}_{\mu\nu} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(*) As aplicações aqui são supostas diferenciáveis (eventualmente no sentido das distribuições) quantas vezes for necessário para que nossas afirmações façam sentido.

(**) N tem uma estrutura deveras complicada. Ver ref. [27].

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

e

$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, onde $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita com $\varepsilon_{0123} = +1$.

Definimos também $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ onde $g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Temos explicitamente:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (^*F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Sendo ainda a densidade de carga e corrente respectivamente dadas por $J^o_e = \rho_e$, $J^i_e = j^i_e$ $(i = 1,2,3)$, as equações de Maxwell podem ser escritas

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= J^\mu_e \\ \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Os $F_{\mu\nu}$ podem ser interpretados como as componentes de uma 2-forma $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ na carta local $\langle x^\mu \rangle$ de $\mathbf{E}$. Calculando o diferencial de $\mathbf{F}$ obtemos:

$$d\mathbf{F} = 0 \iff \begin{cases} -\nabla \times \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Calculando agora $\delta\mathbf{F}$, onde $\delta = *d*$ é o codiferencial de Hodge em $\mathbf{E}$, obtemos:

$$\delta\mathbf{F} = J_e \iff \begin{cases} \nabla\times\vec{B} = \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_e \\ \\ \nabla\cdot E = \rho_e \end{cases} . \tag{1.6}$$

Assim as equações de Maxwell se escrevem na linguagem das formas como:

$$\begin{cases} d\mathbf{F} = 0 \\ \\ \delta\mathbf{F} = J_e \end{cases} \tag{1.7}$$

Aplicando δ na equação não-homogênea obtemos

$$\delta J_e = 0 \iff \frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}_e = 0 \tag{1.8}$$

que é a lei da conservação da corrente.

É importante observar que as equações $d\mathbf{F} = 0$, $\delta\mathbf{F} = J_e$ tem significado intrínseco, sendo portanto válidas em qualquer variedade Lorentziana de dimensão quatro independentemente de sua topologia global. Esta observação é essencial para a compreensão de como podemos obter monopolos topológicos (§1.5).

Antes de concluirmos este parágrafo precisamos completar a formulação da eletrodinâmica de partículas e campos. Tal é feito como segue: (i) introduz-se o conceito de partícula carregada eletricamente como uma tripla (m,q,γ) onde $m > 0$ é dita a *massa de repouso* da partícula, $q \in \mathbb{R}$ é dita a *carga da partícula* e $\gamma : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow \mathbf{E}$ é uma curva tipo-tempo que aponta para o futuro. (ii) postula-se que o movimento das partículas é regido pela equação:

$$\frac{d}{ds}\, p = \frac{e}{m}\, \tilde{\mathbf{F}}(p,\cdot) \quad \text{(Força de Lorentz)} \tag{1.9}$$

com $p = m\gamma_*$, onde $s \in I$ é o tempo próprio, γ_* é o vetor velocidade da partícula e $\tilde{\mathbf{F}} = F^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu} \otimes e_{\mu}$ é o tensor eletromagnético misto.

1.2. O POTENCIAL ELETROMAGNÉTICO

As equações de Maxwell homogêneas, i.e., $d\mathbf{F} = 0$ são trivialmente válidas se existir uma 1-forma ω tal que

$$\mathbf{F} = d\omega \tag{1.10}$$

pois então:

$$d\mathbf{F} = d(d\omega) = 0 \quad (d^2 \equiv 0)$$

ω é denominado um *potencial de gauge*(*).

A equação não-homogênea seria escrita então como:

$$\delta d\omega = J_e \ . \tag{1.11}$$

Em coordenadas escreve-se usualmente:

$$\omega = A_{\mu} dx^{\mu} \ , \quad \text{onde} \quad (A_{\mu}) = (A_o, \vec{A}) \equiv (\phi, \vec{A})$$

ϕ é dito potencial escalar e $\vec{A}$, o potencial vetor.

(*) Para maiores detalhes ver o Apêndice A.

A equação $\mathbf{F} = d\omega$ é equivalente à:

$$\mathbf{F} = d\omega = d(A_\mu dx^\mu) = \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu<\nu}}^{3} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) dx^\nu \wedge dx^\mu .$$

Em forma vetorial:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad e \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.12}$$

A existência de ω depende em geral da topologia do domínio de definição $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Em geral ω existe se o domínio de $\vec{B}$ for contráctil. Grosseiramente falando isto quer dizer que podemos reduzir o domínio de $\vec{B}$ à um ponto por uma transformação (na verdade de uma deformação) contínua. ω então terá como singularidades apenas a fonte do campo elétrico $\vec{E}$. Isto pode ser melhor vizualizado com o seguinte exemplo.

Suponhamos que temos uma carga elétrica em repouso na origem, ou seja, temos as seguintes equações de Maxwell:

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla \times E + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.13a}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho_e \qquad \nabla \times B - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{1.13b}$$

onde $\rho_e = q\delta(\vec{x})$.

Temos apenas a fonte singular do campo elétrico na origem. Daí em $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ vale:

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla \times E + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.14a}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{1.14b}$$

Em Ω, como não há cargas elétricas ou magnéticas, as equações (1.14) mostram que não há diferença entre campo elétrico ou magnético. No entanto eles são diferentes se quisermos representá-los através de um potencial de gauge. No caso acima podemos escolher o potencial de gauge $\omega = (\phi, \vec{A})$ com

$$\phi = \frac{q}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \vec{A} \equiv 0 \tag{1.15}$$

que satisfaz (1.14a) claramente, ou seja temos $d\omega = 0$ válida em Ω. No entanto, se tivermos um monopolo magnético na origem com carga $g \neq 0$, i.e., com $\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^3}\vec{r}$, então $\vec{B}$ não pode ser representado por um potencial de gauge, ou seja, não pode ser escrito como $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Isto é claro, pois neste caso, se tivermos uma superfície S fechada ($\partial S = \phi$) envolvendo g, o Teorema de Stokes nos daria:

$$g = \int_S (\vec{B}\cdot\vec{n})\, dS = \int_S (\nabla \times \vec{A})\cdot\vec{n}\; dS = \int_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{1.16}$$

(pois $\partial S = \phi$), o que é uma contradição, pois por hipótese $g \neq 0$. Daí concluímos que não existe, no caso do polo magnético, uma 1-forma ω definida em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ tal que $\mathbf{F} = d\omega$.

1.3. MONOPOLOS MAGNÉTICOS FENOMENOLÓGICOS.

A idéia óbvia para produzir uma teoria envolvendo monopolos magnéticos é a de generalizar as equações (1.7) como segue:

$$d\mathbf{F} = (*J_m) \iff \begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = \rho_m \\ -\nabla\times\vec{E} = \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_m \end{cases}$$

$$\delta\mathbf{F} = J_e \iff \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \rho_e \\ \nabla\times\vec{B} = \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_e \end{cases} \tag{1.17}$$

As equações (1.17) são invariantes sob as transformações:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}'\cos\theta + \vec{B}'\sin\theta \\ \vec{B} = -\vec{E}'\sin\theta + \vec{B}'\cos\theta \\ \rho_e = \rho_e'\cos\theta + \rho_m'\sin\theta \;;\; \vec{j}_e = \vec{j}_e'\cos\theta + \vec{j}_m'\sin\theta \\ \rho_m' = -\rho_e'\sin\theta + \rho_m'\cos\theta \;;\; \vec{j}_m = -\vec{j}_e'\sin\theta + \vec{j}_m'\cos\theta \end{cases} \tag{1.18}$$

como é trivial verificar. Consequentemente se todas as partículas da natureza tiverem a mesma razão entre a carga elétrica e a carga magnética, isto é, $J_e = kJ_m$, k = constante, é sempre possível escolhermos um ângulo θ nas equações (1.18) tal que as equações (1.17) se transformam nas equações (1.7), i.e., as equações de Maxwell usuais. Neste caso, a escolha do rótulo carga elétrica ou magnética para as partículas é arbitrário.

Como é bem conhecido, a existência do formalismo Lagrangeano para a eletrodinâmica de campos e partículas elétricas repousa no fato básico que podemos escrever $F = d\omega$, pois como é bem conhecido neste caso o momento canônico π é dado por:

$$\pi_\mu = p_\mu + eA_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \tag{1.19}$$

onde

$$L = \frac{1}{2}\,(p_\mu + eA_\mu)^2 - \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.20}$$

No caso em que existem monopolos magnéticos fenomenológicos vimos no §1.2 que não existe ω tal que $d\omega = F$ e portanto não existe formalismo lagrangeano(+). Notemos aqui que Rohrlich [9] e Rosembaum [10] incidentalmente provaram que a condição para a existência do formalismo Lagrangeano é que sejam válidas entre as componentes de J_e e J_m as relações,

$$J_e^\mu(x)\;J_m^\nu(x) - J_e^\nu(x)\;J_m^\mu(x) = 0 \tag{1.21}$$

Estas equações são satisfeitas se e somente se uma das correntes é nula ou se elas são proporcionais. Em ambos os casos a teoria se reduz ao eletromagnetismo usual de cargas elétricas (sem monopolos) como fica claro da discussão acima e fica óbvio que nestas condições existe o formalismo Lagrangeano.

Se insistirmos em desenvolver uma teoria não-trivial de monopolos fenomenológicos (onde $\mathbf{F} \neq d\omega$) não podemos portanto contar com o formalismo analítico e canônico. Será portanto necessário entre outras coisas obter as equações de movimento de cargas elétricas e monopolos sem o uso de Lagrangeanas. Um dos resultados importantes desse trabalho refere-se exatamente a esse problema. De fato, mostraremos no Cap. III, que é possível escrever as equações (1.17) (Equações de Maxwell Generalizadas) no formalismo do fibrado de Clifford sobre $\mathbf{E}$ e deduzir sem a introdução de nenhum postulado ad-hoc, como é o caso da força de Lorentz (Eq.1.9), as equações de movimento corretas para cargas e monopolos.

Se insistirmos em manter o formalismo Lagrangeano usando um potencial singular somente no ponto onde se encontra o monopolo

(+) A menos é claro que se adote a solução de Dirac de monopolos com string (Ver §1.4).

esses não podem ser fenomenológicos. Assim, se uma solução existe, deve resultar das equações (1.7), isto é,

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \delta F = J_e \end{cases} \tag{1.7'}$$

Se admitimos a possibilidade de usarmos um potencial singular ao longo de uma linha unindo o monopolo ao infinito então temos a solução de Dirac (válida para o espaço de Minkowski) que estudamos em seguida.

1.4. O POTENCIAL VETOR PARA UM MONOPOLO: A "STRING" DE DIRAC.

O campo magnético de um monopolo fenomenológico em repouso na origem é dado por:

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^3}\,\vec{r} \quad ; \quad \nabla\cdot B = \delta(\vec{x})\,g\ . \tag{1.22}$$

Daí, para qualquer superfície fechada S, contendo a origem, temos:

$$g = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \tag{1.23}$$

Mas, se $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, esta integral seria *zero*. Daí $\vec{A}$ não pode existir globalmente sobre S, muito embora $\nabla\cdot\vec{B}$ é somente diferente de zero na origem. O melhor que pode ser feito é encontrar um $\vec{A}$ definido em $\mathbb{R}^3$ menos uma linha ligando a origem ao infinito e que satisfaz $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ fora dessa linha, chamada "string de Dirac". Para ver que isto é possível considere o campo de um solenóide infinitamente longo e fixo colocado ao longo do semi-eixo negativo z com seu polo positivo na origem com intensidade

g. Seu campo magnético seria:

$$\vec{B}_{SOL} = \frac{g}{4\pi r^3}\,\vec{r} + g\theta(-z)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z} \tag{1.24}$$

onde $\hat{z}$ é o vetor unitário na direção $-z$ e

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \xi < 0 \\ 1 & \text{se} \quad \xi \geq 0 \end{cases} \quad .$$

Este campo magnético difere do campo $\vec{B}$ em (1.22) somente pelo fluxo magnético singular ao longo do solenóide. No entanto $\vec{B}_{SOL}$ tem divergência nula, mesmo na origem, pois:

$$\nabla\cdot\vec{B}_{SOL} = \nabla\cdot\left(\frac{g}{4\pi r^3}\,\vec{r}\right) + \nabla\cdot[g\theta(-z)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}] =$$

$$= g\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) + g\delta(x)\,\delta(y)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\theta(-z) \tag{1.25}$$

$$= g\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) - g\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = 0$$

Daí podemos representar $\vec{B}_{SOL}$ por um potencial vetor, ou seja:

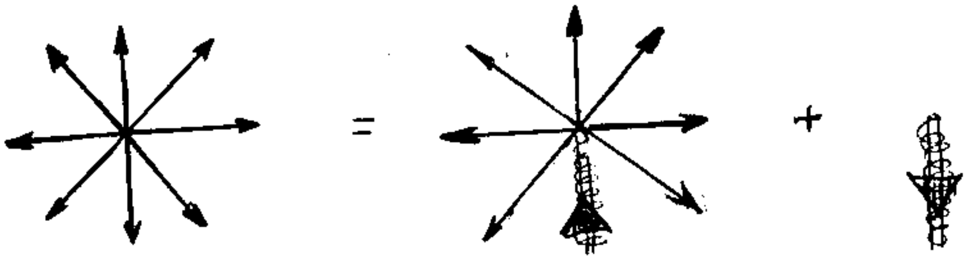
$$\vec{B}_{SOL} = \nabla\times\vec{A}$$

e daí temos:

$$\frac{g}{4\pi r^3}\,\vec{r} = \nabla\times\vec{A} - g\theta(-z)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z} \tag{1.26}$$

A linha ocupada pelo solenóide é então a "string de Dirac".

A equação (1.26) pode ser graficamente representada pela figura abaixo.



O que mostra que o campo de um monopolo tem uma contribuição singular da "string de Dirac".

Dado a nossa escolha da posição da string como o semi-eixo negativo z, nós podemos facilmente calcular uma forma explícita para $\vec{A}$ explorando a simetria axial do sistema. Usando coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) teremos por simetria que o potencial vetor é do tipo:

$$A(\vec{r}) = A(r,\theta)\,\hat{\phi}$$

onde $\hat{\phi}$ é o vetor unitário na direção ϕ.

O fluxo magnético através de um círculo C, (correspondendo a valores fixos de r e θ, e ϕ variando de 0 a 2π) é dado pelo ângulo sólido subentendido por C na origem multiplicado por $\frac{g}{4\pi}$, ou seja, $\frac{1}{2}\,g(1-\cos\theta)$. Consequentemente

$$\frac{1}{2}\,g(1-\cos\theta) = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = 2\pi A(r,\theta)\,r\sin\theta$$

Daí

$$A(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi r}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,\hat{\phi} \tag{1.27}$$

mostrando a singularidade no semi-eixo negativo de z $(\theta = \pi)$.

É fundamental observarmos que a linha ocupada pela string pode ser mudada em qualquer outra linha arbitrária no $\mathbb{R}^3$ com início na origem por uma transformação de gauge, isto é, uma transformação do tipo (veja [7]):

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \frac{g}{4\pi} \nabla\Omega \tag{1.28}$$

onde $\Omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Tal fato mostra que a string de Dirac é um objeto não-físico e sua aparência se deve ao fato de algum conceito matemático importante estar sendo desprezado. Este é efetivamente o caso, como mostraremos no próximo parágrafo.

Antes de concluirmos esta secção desejamos observar que Dirac em 1931 [1] e depois em 1948 [2] desenvolveu, usando o potencial dado pela equação (1.27), uma teoria Lagrangeana para o movimento de uma partícula carregada no campo do monopolo. Em particular, em 1931 estudando o movimento quântico de uma partícula carregada no campo do monopolo ele obteve a famosa condição de quantização $\frac{eg}{4\pi} = n\hbar/2$ (+).

Nós obtemos no §1.6 esta condição para os monopolos magnéticos fenomenológicos e no §1.7 para os monopolos com string usando um procedimento diferente do original de Dirac.

Finalmente desejamos observar que no caso da formulação quântica do movimento das partículas, os problemas relativos ao aparecimento da string no formalismo de Dirac são não-triviais e tem sido seguidamente discutidos na literatura [2], [17].

(+) Eventualmente faremos $\hbar = 1$.

1.5. MONOPOLOS MAGNÉTICOS TOPOLÓGICOS

Para entendermos o significado (geométrico) da string de Dirac precisamos mostrar que as equações de Maxwell (Eq. 1.7)

$$dF = 0$$

$$\delta F = J_e$$

possuem soluções que representam monopolos magnéticos se mudarmos a topologia do espaço-tempo. Para tanto faz-se necessário formular a teoria de Maxwell como uma teoria de fibrado principal. Tais teorias foram exaustivamente discutidas no Apêndice A e aqui apenas adaptamos o caso geral para descrever o eletromagnetismo (Vide Bleecker [4]).

1.5.1. FORMULAÇÃO DO ELETROMAGNETISMO COM UMA TEORIA DE FIBRADO PRINCIPAL

Seja (M,g) onde M é uma variedade Lorentziana e g uma métrica Lorentziana com assinatura -2.

Seja $\begin{matrix} P \\ \downarrow \pi \\ M \end{matrix}$ um fibrado principal com grupo $U(1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$, cuja Álgebra de Lie é $\hat{U}(1) = \{\alpha i\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Seja ω uma 1-forma de conexão sobre P e seja $\sigma_U : U \longrightarrow P$ uma secção local (ou seja, uma escolha de gauge). O pull-back de ω é dado por:

$$\omega_U = \sigma_U^* \omega = -iA_U \qquad (1.29)$$

onde $A_U \in \Lambda^1(U,\mathbb{R})$ é chamado uma "1-forma de potencial", ou simplesmente "potencial".

O campo eletromagnético relativo a $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ é então:

$$\mathbf{F}_U = -dA_U \in \Lambda^2(U,\mathbb{R}) \tag{1.30}$$

Se $\sigma_V : V \longrightarrow \mathbf{P}$ é outra secção local então o fato que o grupo U(1) é abeliano implica

$$\mathbf{F}_U = \mathbf{F}_V \tag{1.31}$$

Realmente, de acordo com (A.2.3) temos:

$$\omega_V = g_{UV}^{-1}\, dg_{UV} + g_{UV}^{-1}\, \omega_U g_{UV} = g_{UV}^{-1} dg_{UV} + \omega_U \tag{1.32}$$

Mas $g_{UV}^{-1}\, g_{UV} = \mathrm{Id}$ e daí

$$(dg_{UV}^{-1})\, g_{UV} + g_{UV}^{-1}\, dg_{UV} = 0$$

e então

$$dg_{UV}^{-1} = -g_{UV}^{-1}(dg_{UV})\, g_{UV}^{-1} = -g_{UV}^{-2}\, dg_{UV} \; .$$

Daí

$$d(g_{UV}^{-1}\, dg_{UV}) = dg_{UV}^{-1} \wedge dg_{UV} = -g_{UV}^{-2}\underbrace{(dg_{UV} \wedge dg_{UV})}_{=0} = 0.$$

Daí obtemos (1.31), i.e.,

$$\mathbf{F}_V = d\omega_V = d(g_{UV}^{-1}dg_{UV}) + d\omega_U = d\omega_U = \mathbf{F}_U \; .$$

Portanto a curvatura da conexão (neste caso é o campo eletromagnético **F**) é uma 2-forma bem definida na base. Outra maneira de ver isto é que se G é abeliano então por (A.4.3)

$$\Omega_V = g_{UV}^{-1}\ \Omega_U\ g_{UV} = \Omega_U \tag{1.33}$$

ou seja o campo local é na verdade global (independente da escolha de gauge).

No entanto para uma teoria de gauge não-abeliana

$$\Omega_V \neq g_{UV}^{-1}\ \Omega_U\ g_{UV} \quad . \tag{1.34}$$

Além disso para uma teoria abeliana a Equação de Bianchi dá simplesmente:

$$d\Omega_U = [\ \Omega_U\ ,\omega_U] = 0 \tag{1.35}$$

que é a Equação Homogênea do campo. Ela é claramente uma equação linear em Ω, uma vez que $\Omega_U = d\omega_U$.

Para um grupo não-abeliano, no entanto, além do campo não ser bem definido na base, o que nos obriga a formular as equações intrinsicamente no espaço-total **P** do fibrado, o campo já não é mais uma função linear do potencial. O comutador, responsável pela não-linearidade, fornece um autoacoplamento do potencial.

Fixando, portanto um $U \subset M$, se $\omega \in \Lambda^1(U,\mathbb{R})$ é o potencial dado, então o campo é dado por

$$\mathbf{F} = d\omega \ .$$

Em componentes se $\omega = (A_\mu)$ então:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ .$$

Daí $d\mathbf{F} = d(d\omega) = d^2\omega = 0$ (Eq. Homogênea do Campo)

e

$\delta\mathbf{F} = \delta d\omega = J$ (Eq. Inhomogênea do Campo)

onde J é a 1-forma de corrente introduzida fenomenologicamente. Estas são as Equações de Maxwell usuais.

1.5.2. FORMULAÇÃO TOPOLÓGICA DO MONOPOLO MAGNÉTICO

Seja um monopolo magnético situado na origem em $\mathbb{R}^3$. Como o grupo de gauge da Eletrodinâmica é $U(1)$, então teremos um fibrado principal $\mathbf{P}$ sobre $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ com grupo estrutural $U(1)$. Mas $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ pode ser contraído à S^2 sem mudar a topologia do fibrado $\mathbf{P}$. Daí $\mathbf{P}$ pode ser visto como um fibrado sobre S^2 com grupo $U(1)$.

O monopolo magnético aparece da classificação dos fibrados $\mathbf{P}$ com base S^2 e grupo $U(1)$. $\mathbf{P}$ é classificado pelos elementos do primeiro grupo de homotopia $\pi_1(U(1)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Agora o inteiro $\underline{n}$ correspondente ao elemento $\pi_1(S^1)$ é dado avaliando-se a primeira classe de Chern de $\mathbf{P}$, $c_1(\mathbf{P}) \in H^2(S^2,\mathbb{R})$ sobre S^2, (veja Milnor-Stasheff [15]). $c_1(\mathbf{P})$ é dada (a menos de um fator 2π) por:

$$c_1(\mathbf{P}) = -\mathbf{F} \tag{1.36}$$

onde $\mathbf{F}$ é a curvatura do campo eletromagnético. O número obtido de (1.36) por $\int_{S_2} c_1$ é um inteiro chamado "primeiro número de

Chern" e classifica os fibrados não-equivalentes com base S_2 e fibra S^1 e daí classifica também as soluções das Equações de Maxwell em $\mathbb{R}^3 - \{0\} \cong S^2$. Este número inteiro <u>n</u> é chamado de *carga magnética*.

Queremos então resolver a equação $\overset{\text{div}\,\vec{B}=0}{}$ em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Como $\mathbb{R}^3 - \{0\} \cong S^2$ não é contrátil, existe soluções desta equação que não são da forma $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. De fato, estas outras soluções são parametrizadas pelo segundo grupo de cohomologia $H^2(\mathbb{R}^3 - \{0\};\mathbb{R})$, pois $\vec{B}$ é uma 2-forma. Temos que $H^2(S^2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Para descrever um monopolo magnético, introduzimos duas cartas locais U_+ e U_- cobrindo as regiões $z > -t$ e $z < +t$ de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ com a região de intersecção $U_+ \cap U_-$ efetivamente igual ao plano x-y em $z = 0$ menos a origem. Os potenciais de gauge que são bem definidos nestas respectivas regiões são tomados como:

$$A_{\pm} = \frac{1}{4\pi}(\pm 1 - \cos\theta)d\phi = \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{z \pm r}(xdy - ydx) \tag{1.37}$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

A_+ e A_- tem uma singularidade do tipo string de Dirac em $\theta = \pi$ e $\theta = 0$ respectivamente. Também, note que A_+ e A_- são relacionados pela transformação de gauge:

$$A_+ = A_- + \frac{1}{2\pi} d\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = A_- + \frac{1}{2\pi}d\phi. \tag{1.38}$$

Na região de intersecção $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r > 0$ ambos os potenciais são regulares. O campo é dado por $\mathbf{F} = dA_{\pm}$ em $U_{\pm}$, e temos:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi r^3}(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy) \tag{1.39a}$$

ou na linguagem vetorial:(+)

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \quad \text{com} \quad \vec{r} = (x,y,z). \tag{1.39b}$$

Nesta versão moderna do monopolo magnético, $A_\pm$ são definidos somente nas suas cartas locais $U_\pm$. Na formulação de Dirac, não foram usadas cartas locais e então $A_\pm$ foram definidas sobre todo $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Isto levou ao aparecimento das "singularidades tipo string" fictícias sobre o eixo $\pm z$ (§1.4).

1.5.3. FIBRADO PRINCIPAL CORRESPONDENTE AOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS

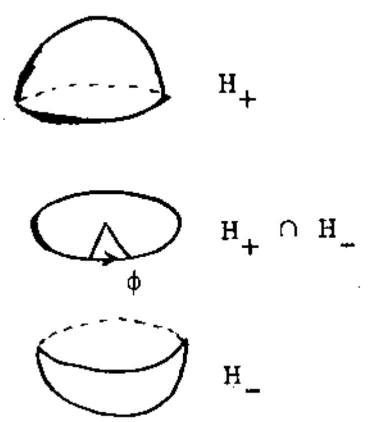
Os monopolos magnéticos correspondem a classificação dos fibrados principais com base S^2 e fibra $U(1)$. Estes fibrados podem ser vistos da seguinte maneira:

Base: $M = S^2$, coordenadas (θ,ϕ), $0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \phi < 2\pi$

Fibra: $U(1) \cong S^1$, coordenada $e^{i\psi}$, $0 \leq \psi < 2\pi$

Decompomos S^2 em dois hesmifērios (vizinhanças) H_+ e H_- onde $H_+ \cap H_-$ é uma faixa fina no equador parametrizada pelo ângulo ϕ, como na figura abaixo.



(+) Aqui $\vec{B}$ corresponde a um monopolo de carga $g = 1$.

Daí o fibrado é decomposto em duas trivializações locais:

$$H_+ \times U(1), \text{ coordenadas } (\theta,\phi,e^{i\psi_+})$$

$$H_- \times U(1), \text{ coordenadas } (\theta,\phi,e^{i\psi_-}).$$

As funções de transição são funções de ϕ ao longo de $H_+ \cap H_-$ e devem ser elementos de $U(1)$ para dar um fibrado principal. Relacionamos então H_+ com H_- por:

$$e^{i\psi_-} = e^{in\phi}\, e^{i\psi_+} . \tag{1.40}$$

Para que a estrutura resultante seja uma variedade, $\underline{n}$ deve ser um inteiro, isto quer dizer que as fibras devem se identificar completamente, quando se dá uma volta completa ao redor do equador em ϕ. Esta é em essência a versão topológica da condição de quantização do monopolo de Dirac.

Para $n = 0$, temos um fibrado trivial $\mathbf{P}(n=0) = S^2 \times S^1$.

O caso $n = 1$ é a famosa fibração de Hopf da 3-esfera:

$$\mathbf{P}(n = 1) = S^3$$

e descreve um monopolo de Dirac com carga $n=1$. Para $\underline{n}$ geral, temos um fibrado mais complicado correspondente ao monopolo de carga $\underline{n}$. Este $\underline{n}$ corresponde a primeira classe de Chern e caracteriza os fibrados com base S^2 e fibra $U(1)$ não-equivalentes.

Vejamos agora o que isto tem haver com o campo eletromagnético $\mathbf{F}$ produzido por um monopolo.

Coloquemos uma conexão sobre o fibrado principal $\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \downarrow\\ S^2\end{array}$ com grupo $U(1)$. Se escolhermos uma conexão particular que satisfaça as equações de Maxwell, o sistema físico descrito corresponde ao monopolo magnético de Dirac. Seja então ω uma conexão sobre $\mathbf{P}$, globalmente definida. Fazendo um pull-back para as duas trivializações locais $H_{\pm}$, temos:

$$\omega = \begin{cases} A_{+} + \frac{i}{2\pi} d\psi_{+} & \text{sobre } H_{+} \\ \\ A_{-} + \frac{i}{2\pi} d\psi_{-} & \text{sobre } H_{-} \end{cases} \tag{1.41}$$

A escolha da função de transição (1.40)

$$e^{i\psi_{-}} = e^{in\phi} e^{i\psi_{+}}$$

implica na transformação de gauge:

$$A_{+} = A_{-} + \frac{n}{2\pi} d\phi \ . \tag{1.42}$$

Os potenciais que satisfazem as equações de Maxwell (em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$) e são regulares em H_{+} e H_{-} são dados por:

$$A_{\pm} = \frac{n}{4\pi}\,(\pm 1 - \cos\,\theta)\,d\phi = \frac{n}{4\pi r}\,\frac{xdy - ydx}{z \pm r} \tag{1.43}$$

A curvatura (ou campo) é dado por:

$$\mathbf{F} = dA_{\pm} = \frac{n}{4\pi} \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = \frac{n}{4\pi r^3}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \ . \tag{1.44}$$

É fácil ver que embora $A_{\pm}$ sejam regulares em $H_{\pm}$, eles tem uma singularidade tipo "string" em $H_{\mp}$. Mas os $A_{\pm}$ só podem ser usados dentro de sua vizinhança regular. É claro que $\mathbf{F}$ é fechada, mas não é exata.

1.5.4. INVARIÂNCIA TOPOLÓGICA E CARGA MAGNÉTICA

A primeira classe de Chern do fibrado do monopolo (base S^2 e fibra $U(1)$) depende somente das funções de transição dos fibrados e é independente se a conexão ω satisfaz ou não as equações de Maxwell. Isto ocorre pelo seguinte: A transformação de gauge no equador é dada por (1.42):

$$A_+(x) = A_-(x) + \frac{n}{2\pi}\, d\phi \;.$$

Aplicando o teorema de Stokes obtemos:

$$-C_1 = -\int_{S^2} c_1 = -\int_{S^2} -\mathbf{F} = \int_{S^2} \mathbf{F} =$$

$$= \{\int_{H^+} dA_+ + \int_{H^-} dA_-\} = \int_{S^1} (A_+ - A_-)$$

onde o sinal foi trocado por $\partial H_- = S^1$ tem orientação oposta de $\partial H_+ = S^1$. Usando (1.42), obtemos:

$$-C_1 = \int_{S^1} \frac{n}{2\pi}\, d\phi = \frac{n}{2\pi} \cdot 2\pi = n \tag{1.45}$$

Observe que somente as transformações de gauge entraram no cálculo de C_1 (por 1.45), isto é, C_1 independe da conexão ω escolhida. C_1 é portanto um número que é um invariante topológico do fibrado. C_1 é denominado "primeiro número de Chern".

Vemos portanto que a carga do monopolo é na verdade uma carga topológica e é igual a menos o primeiro número de Chern.

1.6. A CONDIÇÃO DE QUANTIZAÇÃO PARA MONOPOLOS MAGNÉTICOS FENOMENOLÓGICOS.

Seja uma partícula de massa m e carga elétrica q movendo-se no campo de um monopolo magnético de carga g, situado na origem. Temos então:

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^3}\, r \tag{1.46}$$

A equação de movimento da partícula é dada pela Força de Lorentz:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \tag{1.47}$$

onde $\times$ é o produto vetorial usual no $\mathbb{R}^3$.

O campo $\vec{B}$ sendo esfericamente simétrico, esperava-se que houvesse uma conservação do momento angular. Isto não acontece porque a Força de Lorentz não é uma força central. De fato, calculando-se a variação do momento angular orbital, temos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \frac{qg}{4\pi r^3}\, \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{qg}{4\pi}\, \hat{\vec{r}}\right) \quad , \quad \text{onde} \quad \hat{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r} \; .$$

OBS.: Esta última igualdade vem de:

$$\frac{d}{dt}\hat{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \frac{1}{r^3}\left(r^2\dot{\vec{r}} - r\frac{dr}{dt}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^3}\left[(\vec{r}\cdot\vec{r})\dot{\vec{r}} - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[\vec{r}\times(\dot{\vec{r}}\times\vec{r})\right]$$

onde usamos a identidade

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}\ .$$

Este resultado, devido a Poincaré (1896) sugere que deveríamos definir o momento angular total como sendo:

$$\vec{J} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} - \frac{qg}{4\pi}\hat{\vec{r}} \tag{1.48}$$

e que portanto será conservado.

Para dar uma interpretação física ao segundo termo aparecendo em (1.48), devemos buscá-la na única fonte de momento angular (já que a partícula é pontual), ou seja, o campo eletromagnético. Classicamente o momento angular do campo eletromagnético é obtido integrando o momento do vetor de Poynting $\vec{E}\times\vec{B}$ sobre todo o espaço:

$$\vec{J}_{em} = \int d^3x\ \vec{x}\times(\vec{E}\times\vec{B})\ . \tag{1.49}$$

Aqui $\vec{B}$ é o campo radial dado por (1.46) e $\vec{E}$ é o campo elétrico devido a carga q em r.

Temos então:

$$\vec{J}_{em} = \int d^3x\ \vec{x} \times (\vec{E} \times \frac{g}{4\pi x^3}\ \vec{x}) = \int d^3x\ \frac{g}{4\pi x^3}\ \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{x}) =$$

$$= \int d^3x\ \frac{g}{4\pi x^3}\ [(\vec{x}\cdot\vec{x})\vec{E} - (\vec{x}\cdot\vec{E})\vec{x}] =$$

$$= \int d^3x\ [\frac{g}{4\pi x}\ \vec{E} - \frac{(\vec{x}\cdot\vec{E})}{4\pi x^3}\ \vec{x}]$$

Daí a i-ésima componente J^i_{em} é dada por: (fazendo $\hat{x}_i = \frac{x_i}{x}$):

$$J^i_{em} = \int d^3x\ [\frac{g}{4\pi x}\ E^i - \frac{(x_j E^j)\, x_i}{4\pi x^3}] =$$

$$= \int d^3x\ \frac{g}{4\pi x}\ [E^i - \hat{x}_i \hat{x}_j\ E^j] =$$

$$= \int d^3x\ \frac{g}{4\pi x}\ E^j (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j)\ .$$

Agora usando que $x = (\Sigma\ x_k^2)^{1/2}$ e $\frac{\partial x}{\partial x_j} = \frac{x_i}{x}$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\ \hat{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\ (\frac{x_i}{x}) = \frac{1}{x}\ (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j)\ .$$

Portanto, podemos escrever (usando integração por partes):

$$J^i_{em} = \int d^3x\ E^i\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ (\frac{g\hat{x}_i}{4\pi}) = - \int d^3x\ \frac{\partial E^j}{\partial x_j} \cdot \frac{g}{4\pi}\ \hat{x}_i =$$

$$= - \int d^3x (\nabla\cdot\vec{E})\ \frac{g}{4\pi}\ \hat{x}_i = - \int d^3x\ \frac{qg}{4\pi}\ \delta(\vec{x} - \vec{r})\hat{x}_i =$$

$$- \frac{qg}{4\pi} \int d^3x \ \delta(\vec{x} - \vec{r})\hat{x}_i = - \frac{qg}{4\pi} \hat{r}_i$$

onde usamos que $\nabla \cdot E = q\delta(\vec{x} - \vec{r})$.

Portanto temos:

$$\vec{J}_{em} = - \frac{qg}{4\pi} \hat{\vec{r}} \ . \tag{1.50}$$

Daí o momento angular total que é conservado é realmente a soma do momento angular orbital da partícula e o momento angular do campo eletromagnético. Usando a identidade:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

obtemos da equação (1.48):

$$\hat{\vec{r}} \cdot \vec{J} = \hat{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) \ \frac{qg}{4\pi} \ \underbrace{(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{r}})}_{=1} =$$

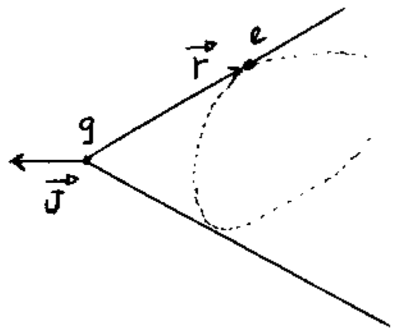
$$= \frac{\vec{r}}{r} \cdot (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) - \frac{qg}{4\pi} =$$

$$= \frac{1}{r} \underbrace{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})}_{=0} - \frac{qg}{4\pi} = - \frac{qg}{4\pi}$$

ou seja,

$$\hat{\vec{r}} \cdot \vec{J} = - \frac{qg}{4\pi} \quad . \tag{1.51}$$

Como $\vec{J}$ é uma constante de movimento, isto significa que a partícula move-se sobre um cone com ângulo $\theta_J = \cos^{-1}(\frac{qg}{4\pi J})$ e o eixo $-\vec{J}$, com seu vértice no monopolo. As cargas q e g comportam-se como se repelissem uma a outra.



$$\theta_J = \cos^{-1}\left(\frac{qg}{4\pi J}\right)$$

onde $J = |\vec{J}|$.

Até agora estudamos o momento angular total no contexto da mecânica clássica não-relativística em que desprezamos os efeitos de radiação. Queremos agora estudar a versão quântica da teoria e suas implicações no que concerne a existência dos monopolos fenomenológicos.

Começamos por observar que sendo $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ a força que atua em uma carga elétrica no campo do monopolo então o campo magnético não realiza trabalho e portanto a energia cinética da carga elétrica é uma constante do movimento. Assim escolhemos como Hamiltoniano quântico para o nosso problema o operador

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} \quad ; \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \tag{1.52}$$

Postulamos agora as regras de comutação

$$[x_i, x_j] = 0 \quad ; \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{1.53a}$$

$$[p_i, p_j] = iq\varepsilon_{ijk} B_k \tag*{(1.53b) (+)}$$

onde B_i , $i = 1,2,3$ são as componentes de $\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^3}\vec{r}$. O operador de momento angular J é dado por

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} - \frac{qg}{4\pi}\vec{r} \tag{1.54}$$

(+) As eq.(1.53) são verdadeiras para o caso em que os p_i são os momentos cinéticos na teoria usual do eletromagnetismo sem monopolos.

e temos como usual

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}\, J_k \tag{1.55}$$

de maneira que

$$[\mathbf{H}, J] = 0 \tag{1.56}$$

Os autovalores de J são portanto quantidades conservadas. Nosso problema agora é: como podemos obter os autovalores de $\mathbf{H}, J^2$ e $J_r = \vec{J}\cdot\vec{r} = \frac{qg}{4\pi}$? Antes de respondermos esta questão verifiquemos que as regras de comutação acima postuladas levam as equações de movimento corretas para os operadores. De fato, temos que $\dot{\vec{r}} = i[\vec{r}, H]$ e segue que

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m}\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{B} - \vec{B} \times \dot{\vec{r}}) \tag{1.57}$$

que é a expressão da força de Lorentz.

Retornemos agora ao problema da determinação dos autovalores de $\mathbf{H}, J^2$ e $J_r = \vec{J}\cdot\vec{r}$. Para tanto comecemos por observar que se desejamos que o conjunto dos operadores da forma $U(\vec{a}) = e^{i\vec{a}\cdot\vec{p}}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ formem uma representação projetiva do grupo das translações no espaço de Hilbert do sistema carga ⊕ monopolos devemos ter

$$U(\vec{a})\, \vec{r}\, U^{-1}(\vec{a}) = \vec{r} + \vec{a}\ ;\ U(\vec{a})U(\vec{b}) = e^{iq\Phi}\, U(\vec{a} + \vec{b}) \tag{1.58}$$

e

$$[U(\vec{a})U(\vec{b})]\,U(\vec{c}) = U(\vec{a})[U(\vec{b})U(\vec{c})] \text{ (lei associativa)} \tag{1.59}$$

As eqs.(1.58) são facilmente verificadas usando as eqs. (1.53a) e (1.53b). Encontramos que Φ é o fluxo de B que atravessa a área do triângulo determinada por $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Usando novamente as eqs.(1.53a) e (1.53b) podemos verificar sem dificuldades que vale

$$[U(\vec{a})U(\vec{b})]U(\vec{c}) = e^{iq\Psi}\, U(\vec{a})[U(\vec{b})U(\vec{c})] \tag{1.59'}$$

onde Ψ é o fluxo que atravessa a área do tetraedro determinado pelos vetores $\vec{a},\vec{b}$ e $\vec{c}$. As eqs. (1.59) e (1.59') são compatíveis se e somente se $q\Psi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Temos então que se existe um monopolo fenomenológico dentro do volume do tetraedro determinado por $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ que $\Psi = g$ e segue que

$$\boxed{\frac{qg}{4\pi} = n/2} \tag{1.60}$$

que é a condição de *quantização de Dirac*. A consequência mais espetacular da eq.(1.60), aqui deduzida de maneira rigorosa é que o momento angular do sistema carga ⊕ monopolo pode ser o de um fermion ainda que a carga elementar e o monopolo elementar sejam bosons!

A determinação do espectro de $\mathbf{H}$ cai agora no problema do pião simétrico [16] e não será tratada aqui.

Terminamos esta secção com a observação que os p_i não satisfazem a identidade de Jacobi mesmo no caso em que os monopolos sejam representados por singularidades tipo delta de Dirac. De fato usando (1.53) temos que

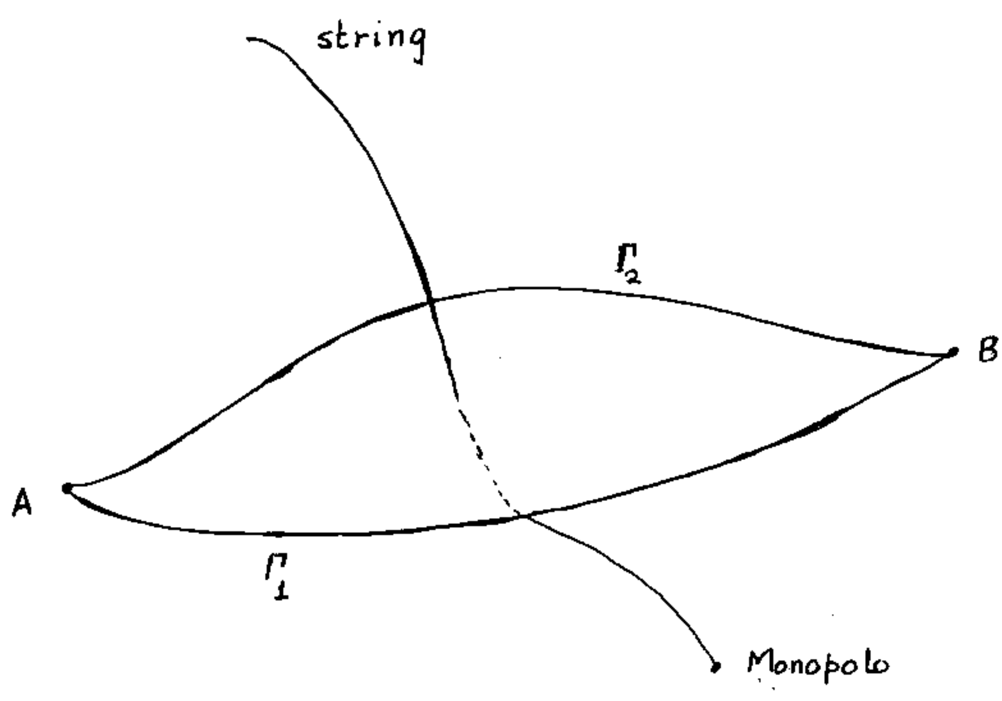
$$\sum_{\text{cíclica}} [p_i,[p_j,p_k]] = e\nabla\cdot\vec{B} \tag{1.61}$$

Assim vemos que os p_i só formam uma álgebra de Lie se $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, o que não é o caso quando existem monopolos fenomenológicos. A condição $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ é a identidade de Bianchi quando formulamos o eletromagnetismo como uma teoria de fibrado principal (Ver §1.5.1). A violação desta identidade fornece portanto uma nova física e a necessidade de novos métodos matemáticos para a formulação da teoria clássica e principalmente para a formulação quântica.

1.7. CONDIÇÃO DE QUANTIZAÇÃO PARA MONOPOLOS COM STRING

Aqui apresentaremos uma versão muito elegante [17], que usa o conceito de "path integral" de Feymann e está relacionada com o efeito Bohn-Aharonov.

Considere duas curvas Γ_1 e Γ_2 que ligam o ponto inicial A com o ponto final B como na figura abaixo:



Suponha também que as curvas passam uma de cada lado da string. Então Γ_1 e Γ_2 formam a fronteira de uma superfície Ω que é cruzada pela string do monopolo.

A amplitude $K(B|A)$ para uma partícula carregada se propagar de A até B é a soma de todas as amplitudes $\phi_\Gamma(B|A)$, onde:

$$\phi_\Gamma(B|A) = e^{\frac{i}{\hbar} S_\Gamma(B|A)} \tag{1.62}$$

Daí temos:

$$K(B|A) = \int \phi_\Gamma(B|A) D(\Gamma) = \int e^{\frac{i}{\hbar} S_\Gamma(B|A)} D(\Gamma) \tag{1.63}$$

Quando a partícula carregada move-se em um campo eletromagnético externo, este provoca uma mudança na fase dada por:

$$e^{\frac{iq}{\hbar} \int_\Gamma A_\alpha dx^\alpha} . \tag{1.64}$$

As contribuições de Γ_1 e Γ_2 se interferirão e esta interferência é dada por:

$$e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{\Gamma_2} A_\alpha dx^\alpha} e^{-\frac{iq}{\hbar} \int_{\Gamma_1} A_\alpha dx^\alpha} = e^{\frac{iq}{\hbar} \oint_\Gamma A_\alpha dx^\alpha} \tag{1.65}$$

onde agora $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ é uma curva fechada.

Agora o Teorema de Stokes com $A = A_\alpha dx^\alpha$ nos dá:

$$\oint_\Gamma A_\alpha dx^\alpha = \int_{\partial\Omega} A = \int_\Omega dA = \int_\Omega \mathbf{F} + S = \int_\Omega \mathbf{F} + \int_\Omega S \tag{1.66}$$

onde usamos que $dA = \mathbf{F} + S$ que é a versão intrínseca da (Eq.(1.26) onde S denota a contribuição da "string de Dirac".

Consequentemente a mudança na fase devido ao campo externo é dada por:

$$e^{\frac{iq}{\hbar}\int_{\Omega} \mathbf{F}} \cdot e^{\frac{iq}{\hbar}\int_{\Omega} S} \quad . \tag{1.67}$$

O primeiro termo de (1.67) está bem porque a partícula deve ser mesmo influenciada pelo campo do monopolo, mas o segundo termo não pode ter nenhuma contribuição, pois de outra forma nós poderíamos determinar experimentalmente a posição da string usando o Efeito Bohm-Aharonov! Nós então somos forçados a colocar:

$$e^{\frac{iq}{\hbar}\int_{\Omega} S} = 1 \tag{1.68}$$

Mas $\int_{\Omega} S$ é o fluxo magnético concentrado na string que passa através de S, e é igual a g. Logo

$$\frac{qg}{\hbar} = 2\pi n$$

ou ainda

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{n}{2}\hbar \tag{1.69}$$

que é novamente a Condição de Quantização de Dirac.

1.8. OBSERVAÇÕES FINAIS

Vimos nos parágrafos precedentes que os manopolos magnéticos podem ser introduzidos basicamente de duas maneiras: i) Fenomenologicamente, introduzindo-se correntes como fontes do campo elétrico e magnético e ii) Mudando-se a topologia do espaço-tempo, conservando válidas as Equações de Maxwell.

Os monopolos topológicos estão presentes nas teorias dos Campos de Yang-Mills e são soluções tipo soliton das Equações de Yang-Mills que são não-lineares. Esta formulação usa crucialmente o conceito de conexão em fibrados principais. Para maiores detalhes ver Wu-Yang [13], Eguchi et all [14] e as referências lá contidas.

Para os monopolos fenomenológicos, vimos que uma formulação Lagrangeana é possível no espaço de Minkowski se admitimos potenciais singulares ao longo de uma linha unindo o monopolo ao infinito (o monopolo Dirac). Se insistimos no uso de potenciais que são singulares somente no ponto onde se encontra o monopolo então não existe um formalismo Lagrangeano pois precisamos trabalhar com dois potenciais. No entanto veremos no próximo capítulo que é possível introduzir "potenciais generalizados" que fornecem as equações de Maxwell com monopolos. Tal é feito usando-se a linguagem das formas diferenciais. Posteriormente no Capítulo III veremos que as formas diferenciais podem ser descritas dentro de um formalismo de Álgebra de Clifford. Dentro deste formalismo a equação de movimento de uma partícula carregada (Força de Lorentz) é obtida como consequência das Equações de Campo e não colocada ad-hoc.

CAPÍTULO II

POTENCIAIS GENERALIZADOS E CARGAS DUAIS

Neste capítulo apresentamos uma formulação da eletrodinâmica com monopolos fenomenológicos usando a linguagem de formas diferenciais sobre o Espaço de Minkowski. A seguir fazemos a generalização da teoria para um grupo de gauge arbitrário, visando extender a teoria para outras interações.

2.1. CASO ABELIANO

Seja $\mathbf{E} = (\mathbb{R}^4, g, D)$ como no §1.1 o espaço de Minkowski. Sabemos que em teorias de gauge os potenciais são conexões em fibrados principais e o campo associado é dado pela curvatura da conexão, ou seja, o campo é uma 2-forma derivado do potencial (Veja Apêndice A.1).

Podemos obter 2-formas de uma maneira intrínseca como a imagem dos operadores diferenciais de primeira ordem $\underline{d}$ e δ.

$$\Lambda^1(\mathbf{E}) \xrightarrow{\ d\ } \Lambda^2(\mathbf{E}) \xleftarrow{\ \delta\ } \Lambda^3(\mathbf{E})$$

onde aqui $\Lambda^k(\mathbf{E})$ é o espaço das k-formas sobre $\mathbf{E}$.

Considere agora o fibrado principal

$$\begin{array}{l} U(1) \\ \big| \\ \mathbf{P} \cong \mathbf{E} \times U(1) \\ \big\downarrow \pi \\ \mathbf{E} \end{array}$$

$\mathbf{P} \cong \mathbf{E} \times U(1)$, isto é, $\mathbf{P}$ é um fibrado trivial.

Seja C o espaço das conexões (ou potenciais) em $\mathbf{P}$. Os elementos de C tomam valores na Álgebra de Lie de $U(1)$, ou seja $i\mathbb{R}$, que é uma álgebra comutativa.

Para se obter potenciais de gauge definidos no espaço de Minkowski, usa-se uma trivialização local (A.1.3) (ou escolha de gauge na linguagem dos físicos):

$$\sigma : U \subset E \longrightarrow \mathbf{P}$$

onde U é um aberto de $\mathbf{E}$.

Dado então uma conexão $\bar{\alpha}$ definida em $\mathbf{P}$, $\alpha \equiv \sigma^* \bar{\alpha}$ é um potencial de gauge definido na base $\mathbf{E}$ (2.2.4) com valores em $i\mathbb{R}$.

Agora dado o par de conexões $(\bar{\alpha},\bar{\alpha}') \in C \times C$ em $\mathbf{P}$, utilizamos a secção local σ para obtermos o par $(\alpha,\alpha') \equiv (\sigma^* \bar{\alpha},\sigma^* \bar{\alpha}')$ de potenciais de gauge sobre $\mathbf{E}$. Definimos então:

$$\omega = \alpha + {*\alpha'} \in \Lambda^1(\mathbf{E}) \oplus \Lambda^3(\mathbf{E}) \tag{2.1}$$

onde $*$ é o operador de dualidade de Hodge e $\oplus$ é a soma direta.

Chamaremos ω aqui de "potencial generalizado". Para ver como ω opera, fazemos o seguinte:

A métrica g sobre $\mathbf{E}$ nos permite definir um isomorfismo canônico:

$$\begin{aligned} i_x : T_x\mathbf{E} &\longrightarrow \Lambda^1(T_x\mathbf{E}) \\ v &\longrightarrow \varphi_v \equiv g(v,\cdot) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definindo a métrica induzida em $\Lambda^1(T_x\mathbf{E})$ por

$$\tilde{g}(\varphi_v,\varphi_w) = g(v,w) \tag{2.3}$$

temos que i_x é uma isometria.

Daí temos que as álgebras de Hodge [20] são isomorfas, i.e.

$$(\bigoplus_k T_x^k\,\mathbf{E},g) \cong (\bigoplus_k \Lambda^k(T_x\mathbf{E}),\tilde{g}) \quad 0 \leq k \leq n \,. \tag{2.4}$$

O isomorfismo é dado por:

(1) Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ base de $T_x\mathbf{E}$. Então

$\{i_x e_1,\ldots,i_x e_n\}$ é base de $\Lambda^1(T_x\mathbf{E})$.

(2) Seja $\{e_1\wedge \ \ldots \ \wedge e_k\}$ um k-vetor, i.e., um elemento de $T_x^k\mathbf{E}$. Então $i_x(e_1\wedge \ \ldots \ \wedge e_k) = i_x e_1\wedge \ \ldots \ \wedge i_x e_k \in \Lambda^k(T_x\mathbf{E})$. (Os elementos de $\Lambda^k(T_x\mathbf{E})$ são as k-formas).

(1) e (2) se estende por linearidade para toda a álgebra de Hodge(+) $(\bigoplus_k T_x^k\mathbf{E},g)$.

É fácil verificar que o isomorfismo (2.4) preserva a graduação. Agora, em $\bigoplus \Lambda^k(T_x\mathbf{E})$ temos definido o *operador estrela de Hodge*(++)

$$\begin{aligned} * : \Lambda^k &\longrightarrow \Lambda^{n-k} \quad \text{onde} \quad n = \dim \mathbf{E} \\ \beta &\longrightarrow * \beta \end{aligned} \tag{2.5}$$

(+) Ver Apêndice B.

(++) Queremos salientar que todo este formalismo é válido para uma variedade com dimensão arbitrária. Aqui tomamos a dimensão como sendo quatro. (Espaço de Minkowski).

definido pela equação:

$$\alpha \wedge * \beta = \tilde{g}(\alpha,\beta) \quad , \quad \forall\alpha \in \Lambda^k(T_x\mathbf{E}) \tag{2.6}$$

onde $\tilde{g}$ é a métrica induzida sobre $\Lambda^k(T_x\mathbf{E})$ pela métrica Lorentziana g.

Daí podemos definir um operador estrela de Hodge $*_i$ em $\bigoplus_k T_x^k\mathbf{E}$, por:

$$*_i : T_x^k\mathbf{E} \longrightarrow T_x^{n-k}\mathbf{E}$$

onde

$$*_i = i_x^{-1} * i_x \tag{2.7}$$

ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} T_x^k\mathbf{E} \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "*_i"'] & \Lambda^k(T_x\mathbf{E}) \arrow[d, "*"] \\ T_x^{n-k}\mathbf{E} \arrow[r, "i_x"] & \Lambda^{n-k}(T_x\mathbf{E}) \end{tikzcd}$$

OBS. Todas as aplicações no diagrama acima são isomorfismos de espaço vetorial.

O potencial generalizado ω em (2.1) opera sobre a parte ímpar de $(\bigoplus_k T_x^k\mathbf{E}, g)$, ou seja, sobre $T_x\mathbf{E} \oplus T_x^3\mathbf{E}$. Agora todo trivetor v pode ser escrito como (por 2.7)

$$\vec{\vec{v}} = *_i\vec{v} \quad , \quad \text{onde} \quad \vec{v} \in T_x\mathbf{E} \tag{2.8}$$

Daí

$$\omega(\vec{v} + \vec{\vec{w}}) = (\alpha + *\alpha')(\vec{v} + *_i\vec{w}) = \alpha(\vec{v}) \oplus (*\alpha')(*_i\vec{w})$$

$$= \alpha(\vec{v}) \oplus \alpha'(\vec{w}) \in i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

ou seja:

$$\omega : T_x\mathbf{E} \oplus T_x^3\mathbf{E} \longrightarrow G \oplus G \quad \text{onde} \quad G = i\mathbb{R}$$

$$v + \vec{\vec{w}} \longrightarrow \alpha(\vec{v}) \oplus \alpha'(\vec{w}) \tag{2.9}$$

Portanto o grupo de Gauge fica duplicado para o potencial generalizado ω.

Nas teorias de gauge o campo associado a um potencial α é obtido pela derivada covariante ou seja $\Omega^{\alpha} = D^{\alpha}\alpha$ (A.3.7). No caso do eletromagnetismo temos que $D^{\alpha} \equiv d$, isto é, a derivada exterior usual.

Agora, precisamos de uma "derivada covariante" que possa agir naturalmente no "potencial generalizado" $\omega = \alpha + *\alpha'$. Propomos então o *Operador de Dirac*

$$\mathbb{D} = d + \delta \tag{2.10}$$

onde $\delta = * d *$ é o codiferencial covariante.

O operador de Dirac é a "raiz quadrada" do Laplaciano de Hodge:

$$\Box = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d \quad (\text{pois } d^2 = \delta^2 = 0) \tag{2.11}$$

Em geral $\mathbb{D}$ opera em *fibrados de Clifford* [Ap.B]. A nossa versão desse operador atua em formas diferenciais definidas no espaço base $\mathbf{E}$. O preço a pagar por isto é que o campo associado ao potencial de gauge não é mais uma 2-forma somente pois,

$$\Omega = \mathbb{D}\omega = (d+\delta)(\alpha + *\alpha') = \underbrace{[d\alpha + \delta *\alpha']}_{\text{2-forma}} + \underbrace{\delta\alpha}_{\text{0-forma}} + \underbrace{d(*\alpha')}_{\text{4-forma}} \tag{2.12}$$

ou seja temos que o "potencial generalizado" é elemento da parte ímpar de $\Lambda = \oplus \Lambda^k(T_x\mathbf{E})$, isto é, $\omega \in \Lambda^1 \oplus \Lambda^3$, e o "campo generalizado" associado é elemento da parte par de Λ, isto é $\Omega \in \Lambda^0 \oplus \Lambda^2 \oplus \Lambda^4$.

Como usualmente se faz em teorias de gauge, para se obter as equações inhomogêneas do campo, precisamos aplicar o operador dual da derivada covariante $\mathbb{D}$ no espaço generalizado Ω (ver A.8.9). No caso abeliano temos:

$$\Delta = *\mathbb{D}* = *(d+\delta)* = d+\delta = \mathbb{D} .$$

Daí temos

$$\Delta\Omega \equiv \mathbb{D}\Omega = (d+\delta)[d\alpha + \delta(*\alpha') + \delta\alpha + d(*\alpha')] =$$

$$= (d\delta + \delta d)(\alpha + *\alpha') = \Box\omega$$

onde usamos que $d^2 = \delta^2 = 0$.

Ou seja, por (2.11) temos:

$$\Delta\Omega \equiv \Box\omega .$$

Introduzimos agora, como no Capítulo I as fontes do campo fenomenologicamente como um elemento $J + * G \in \Lambda^1(\mathbf{E}) \oplus \Lambda^3(\mathbf{E})$ onde:

J = corrente de polo (ou carga) elétrico.

G = corrente de polo magnético.

Obtemos então a equação não-homogênea

$$\Box(\alpha + *\alpha') = J + G \tag{2.13}$$

Desacoplando esta equação obtemos:

$$\begin{cases} \Box\alpha = J \\ \Box *\alpha' = *G \quad \text{ou} \quad \Box\alpha' = G \end{cases} \tag{2.14}$$

já que $\Box * = * \Box$ e $** = 1$ sobre 1-formas.

Para obtermos 2-formas na equação (2.13) ou seja o campo eletromagnético convencional, basta que tomemos o "gauge de Lorentz", isto é:

$$\begin{cases} \delta\alpha = 0 \\ \delta\alpha' = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

e então obtemos:

$$\Omega = d\alpha + * d\alpha' \tag{2.16}$$

OBS. É claro que a escolha da secção local $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ deve ser compatível com (2.15).

Cabibbo e Ferrari [18] desenvolveram um formalismo (em coordenadas) onde equações equivalentes as equação (2.14) são obtidas somente tomando-se o gauge de Lorentz. Na nossa versão o gauge de Lorentz é usado para que o "campo generalizado" seja uma 2-forma como usual. Realmente, escrita em coordenadas locais (2.16) nada mais é que a *Relação de Cabibbo-Ferrari*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho B^\sigma \qquad (2.17)$$

onde fizemos as identificações óbvias

$$\alpha = (A_\mu) \quad , \quad \alpha' = (B_\mu) \ .$$

Na ausência de monopolos magnéticos no espaço teremos para (2.14)

$$\Box\alpha' = 0 \qquad (2.18)$$

ou seja, α' é uma 1-forma harmônica.

Agora é fisicamente razoável pensar que os potenciais vão a zero no infinito. Daí podemos supor que α' é limitada em todo o espaço. Assim, sendo α' harmônica e limitada, a única solução de (2.18) é

$$\alpha' = cte$$

e daí por uma redefinição de escala

$$\alpha' \equiv 0$$

e ficamos somente com

$$\Box\alpha = J \ .$$

A equação para o campo (2.12) fica:

$$\Omega = d\alpha + \delta\alpha$$

Tomando-se $\delta\alpha = 0$ (gauge de Lorentz) obtemos, como na literatura usual:

$$\mathbf{F} \equiv \Omega = d\alpha$$

e

$$\Box\alpha = (d\delta + \delta d)\alpha = \delta d\alpha = \delta\mathbf{F} = J \ .$$

Claro que $d\mathbf{F} = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0$.

Obtemos portanto as equações de Maxwell usuais:

$$\begin{cases} d\mathbf{F} = 0 \\ \delta\mathbf{F} = J \ . \end{cases}$$

2.2. CASO GERAL

A próxima etapa agora é generalizar as equações (2.14) e (2.16) para um grupo de gauge arbitrário. Deste modo, nesta formulação, toda teoria de gauge terá "cargas duais" ou monopolos como citados na literatura corrente.

Seja $\mathbf{P}$ um fibrado principal com base (M,g) e grupo estrutural G onde agora M é uma variedade diferenciável de dimensão quatro e g é uma métrica com assinatura $(+,-,-,-)$ sobre M. Novamente, dado o par de conexões $(\bar{\alpha},\bar{\alpha}') \in C \times C$ sobre $\mathbf{P}$, via pull-back da secção local $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ obtemos o par de potenciais de gauge (α,α') definidos em $U \subset M$ e com valores na Álgebra de Lie $\mathcal{G}$ do grupo G.

Definimos então o "Operador de Dirac generalizado" por:

$$\mathbb{D}^{\omega} = D^{\alpha} + \delta^{\alpha'} \tag{2.19}$$

onde D^{α} é a derivada exterior covariante (A.3.5) e $\delta^{\alpha'}$ é o codiferencial covariante (A.7.10), e aqui D^{α} e $\delta^{\alpha'}$ aplicam em $\bigoplus_k \Lambda^k(M)$.

Então se $\omega = \alpha + *\alpha' \in \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^3(M)$ temos:

$$\begin{aligned} \Omega \equiv \mathbb{D}^{\omega}\omega &= (D^{\alpha} + \delta^{\alpha'})(\alpha + *\alpha') = \\ &= D^{\alpha}\alpha + \delta^{\alpha'}(*\alpha') + D^{\alpha}(*\alpha') + \delta^{\alpha'}\alpha = \\ &= \underbrace{\Omega^{\alpha} + *\,\Omega^{\alpha'}}_{\text{2-forma}} + \underbrace{\delta^{\alpha'}\alpha}_{\text{0-forma}} + \underbrace{D^{\alpha}(*\alpha')}_{\text{4-forma}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $\Omega^{\alpha} \equiv D^{\alpha}\alpha$ e $\Omega^{\alpha'} \equiv D^{\alpha'}\alpha'$ são as curvaturas usuais das conexões $\underline{\alpha}$ e $\underline{\alpha'}$ respectivamente. Lembramos aqui que Ω^{α} e $\Omega^{\alpha'}$ são definidas em $U \subset M$. Usamos também que $** = 1$ sobre 1-formas.

Definimos o operador dual de $\mathbb{D}^{\omega}$, como:

$$\Delta^{\omega} \equiv *\mathbb{D}^{\omega}* = *(D^{\alpha} + \delta^{\alpha'})* = D^{\alpha'} + \delta^{\alpha} \tag{2.21}$$

Comparando (2.19) com (2.21) é fácil ver que identificando

$\omega \cong (\alpha,\alpha')$ e $\omega^{t} = (\alpha',\alpha)$

$$\Delta^{\omega} \equiv \Delta^{(\alpha,\alpha')} = \mathbb{D}^{(\alpha',\alpha)} = \mathbb{D}^{\omega^{t}} . \tag{2.22}$$

Aplicando o operador Δ^{ω} no campo Ω (2.20)

$$\begin{aligned}\Delta^{\omega}\Omega &= (D^{\alpha'} + \delta^{\alpha})[\Omega^{\alpha} + *\Omega^{\alpha'} + \delta^{\alpha'}\alpha + D^{\alpha}(*\alpha')] \\ &= D^{\alpha'}\Omega^{\alpha} + D^{\alpha'}(*\Omega^{\alpha'}) + D^{\alpha'}\delta^{\alpha'}\alpha + D^{\alpha'}D^{\alpha}(*\alpha') \\ &+ \delta^{\alpha}\Omega^{\alpha} + \delta^{\alpha}(*\Omega^{\alpha'}) + \delta^{\alpha}\delta^{\alpha'}\alpha + \delta^{\alpha}D^{\alpha}(*\alpha') .\end{aligned}$$

Observe agora que como α e α' pertencem a Λ^{1} e $\dim M = 4$ então:

$$\begin{cases} D^{\alpha'}D^{\alpha}(*\alpha') = 0 \\ \\ \delta^{\alpha}\delta^{\alpha'}\alpha = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Fazemos aqui uma observação simples mas importante sobre as equações (2.23). A teoria aqui é modelada sobre um espaço-tempo e portanto a dimensão mínima usada aqui é quatro.

Agora é fácil ver que as equações (2.23) valem trivialmente para dimensão quatro. O mesmo não poderia ser dito (para a primeira equação) se a dimensão de M fosse superior a quatro.

Concluímos então que a teoria dos monopolos duais não-abeliana é mais simples em dimensão 4.

Coletando os termos de $\Delta^{\omega}\Omega$ em 1-forma + 3-formas temos:

$$\Delta^{\omega}\Omega = (\delta^{\alpha}\Omega^{\alpha} + *D^{\alpha}\Omega^{\alpha'} + D^{\alpha'}\delta^{\alpha'}\alpha) + + *(\delta^{\alpha'}\Omega^{\alpha'} + D^{\alpha'}\Omega^{\alpha} + D^{\alpha}\delta^{\alpha}\alpha') \quad . \tag{2.24}$$

É bom observar aqui que se $\alpha' \equiv 0$ então o operador em (2.19) reduz-se a D^{α}, a conexão generalizada torna-se usual, isto é, $\omega = \alpha$ e daí (2.20) fica $\Omega = \Omega^{\alpha}$ e (2.24) $\Delta^{\omega}\Omega = \delta^{\alpha}\Omega^{\alpha}$.

Novamente se as fontes do campo são dadas por uma "corrente generalizada"

$$\overline{J} + *\overline{G} \tag{2.25}$$

obtemos a seguinte equação inhomogênea do campo:

$$\Delta^{\omega}\Omega = \overline{J} + *\overline{G} \tag{2.26}$$

que fornece igualando as formas de mesma graduação

$$\begin{cases} \overline{J} = \delta^{\alpha}\Omega^{\alpha} + *D^{\alpha}\Omega^{\alpha'} + D^{\alpha'}\delta^{\alpha'}\alpha \\ \overline{G} = \delta^{\alpha'}\Omega^{\alpha'} + *D^{\alpha'}\Omega^{\alpha} + D^{\alpha}\delta^{\alpha}\alpha' \end{cases} \tag{2.27}$$

e utilizando as equações (A.8.9):

$$\delta^{\alpha}\Omega^{\alpha} = J^{\alpha} \quad \text{e} \quad \delta^{\alpha'}\Omega^{\alpha'} = J^{\alpha'} \tag{2.28}$$

Igualando as partes mixtas com "correntes de interação" ou seja

$$\begin{cases} J_{int}^{(\alpha,\alpha')} = *D^{\alpha}\Omega^{\alpha} + D^{\alpha'}\delta^{\alpha'}\alpha \\ \\ J_{int}^{(\alpha',\alpha)} = *D^{\alpha'}\Omega^{\alpha} + D^{\alpha}\delta^{\alpha}\alpha' \end{cases} \tag{2.29}$$

temos que:

$$\begin{cases} \overline{J} = J^{\alpha} + J_{int}^{(\alpha,\alpha')} \\ \\ \overline{G} = J^{\alpha'} + J_{int}^{(\alpha',\alpha)} \end{cases} \tag{2.30}$$

que satisfazem (2.27), (2.28) e (2.29) cada parte. Observe que os papéis de $\overline{J}$ e $\overline{G}$ são trocados pela simetria $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$. Se não existe interação entre o campo do monopolo e o campo da carga elétrica então $J_{int}^{(\alpha,\alpha')}$ e $J_{int}^{(\alpha',\alpha)}$ são identicamente nulos.

Também em analogia com teorias de gauge, teríamos a "equação homogênea". Mas na verdade temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{\omega}\Omega &= \delta^{\alpha'}\Omega^{\alpha} + D^{\alpha}(*\Omega^{\alpha'}) + D^{\alpha}\delta^{\alpha'} + \delta^{\alpha'}D^{\alpha}(*\alpha') = \\ &= (D^{\alpha}\delta^{\alpha'} + \delta^{\alpha'}D^{\alpha})(\alpha + *\alpha') \end{aligned} \tag{2.31}$$

e é claro que em geral $\mathbb{D}^{\omega}\Omega \neq 0$.

Definindo o "Laplaciano de Hodge mixto" por:

$$\Box_{\omega} \equiv \Box_{(\alpha,\alpha')} \equiv D^{\alpha}\delta^{\alpha'} + \delta^{\alpha'}D^{\alpha}$$

escrevemos (2.31) como:

$$\mathbb{D}^{\omega}\Omega \equiv \Box_{\omega}\,\omega \tag{2.32}$$

Para entender o significado de (2.31) vamos nos restringir ao caso abeliano já descrito na secção (2.1) e vamos supor também que vale a equação homogênea do campo $\mathbb{D}^{\omega}\Omega = 0$.

Neste caso $D^{\alpha} = d$ e $\delta^{\alpha} = \delta$ e então $D^{\omega}\Omega = 0$ fica

$$\Box(\alpha + *\alpha') = 0 \quad \text{o que implica}$$

$$\begin{cases} \Box\alpha = 0 \\ \Box\alpha' = 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

A equação inhomogênea fica:

$$\Box(\alpha + *\alpha') = \overline{J} + *\overline{G} \quad \text{o que implica}$$

$$\begin{cases} \Box\alpha = \overline{J} \\ \Box\alpha' = \overline{G} \end{cases} . \tag{2.34}$$

É claro que as equações (2.34) não são compatíveis com (2.33). O que acontece é o seguinte: A presença de uma nova corrente $J^{\alpha'}$ com seu respectivo potencial α' implica que as novas equações (2.33) não são mais homogêneas, ou seja, identicamente nulas. Para ser compatível elas devem ser idênticas as equações (2.34), que portanto descreverá as equações de Maxwell-Dirac (com os monopolos) como na secção (2.1). Por exemplo, é fácil ver que se não existem monopolos então $\alpha' \equiv 0$ e $J^{\alpha'} \equiv 0$. Daí $\omega = \alpha + *\alpha' = \alpha$ e $\mathbb{D}^{\omega} \equiv D^{\alpha}$. A equação (2.31) fica

$$D^{\omega}\Omega = D^{\alpha}\Omega^{\alpha} = 0$$

(por causa da Identidade de Bianchi para a conexão ω).

A equação inhomogênea fica $\Box\alpha = J$.

Vemos neste caso que os monopolos são responsáveis pela não integrabilidade da "curvatura" (ou campo).

Para mostrar que realmente as equações (2.20) e (2.27) generalizam as equações (2.12) e (2.14) respectivamente utilizamos as Equações Estruturais de Cartan para as conexões α e α' (A.4.1):

$$\begin{cases} D^{\alpha}\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha] \\ \\ D^{\alpha'}\alpha' = d\alpha' + \frac{1}{2}[\alpha',\alpha'] \end{cases} \tag{2.35}$$

No caso abeliano $[\alpha,\alpha] = [\alpha',\alpha'] = 0$. Daí $D^{\alpha}\alpha = d\alpha$ e $D^{\alpha'}\alpha' = d\alpha'$.

Na teoria abeliana os operadores D^{α} e δ^{α} independem de α, isto é, $D^{\alpha} = d$ e $\delta^{\alpha} = \delta$ usuais.

Daí se $\varphi \in \Lambda^{k}(M) \Longrightarrow D^{\omega}\varphi = d\varphi + \underbrace{[\alpha,\varphi]}_{=0} = d\varphi$.

A equação (2.20) fica então:

$$\Omega = (d\alpha + *d\alpha') + \delta\alpha + d(*\alpha')$$

que é exatamente a equação (2.12).

A equação (2.27) fica

$$\begin{cases} \bar{J} = \delta d\alpha + \underbrace{*dd\alpha'}_{=0} + d\delta\alpha = \Box\alpha \\ \text{e} \\ G = \delta d\alpha' + \underbrace{*dd\alpha}_{=0} + d\delta\alpha' = \Box\alpha' \end{cases}$$

que são as equações (2.14).

Se tomarmos o "gauge de Lorentz" para α e α', isto é, $\delta\alpha = 0$ e $\delta\alpha' = 0$, obtemos para o campo Ω:

$$\Omega = d\alpha + *d\alpha'$$

como em (2.16).

Se o grupo G não é abeliano, podemos tomar o análogo das condições de Lorentz (2.15), isto é:

$$\begin{cases} \delta^{\alpha'}\alpha = 0 \\ \delta^{\alpha}\alpha' = 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

Daí o campo generalizado Ω em (2.20) fica reduzido a soma de duas 2-formas

$$\Omega = \Omega^{\alpha} + *\Omega^{\alpha'} \; . \tag{2.37}$$

Para escrevermos a *Relação de Cabibbo-Ferrari não-abeliana*, isto é, as equações (2.37) em componentes, identificamos (para fins de notação somente, em concordância com a literatura usual)

$$\alpha = A \quad e \quad \alpha' = B$$

Se $\{E_1,\ldots,E_r\}$ é uma base para a Álgebra de Lie $\mathcal{G}$ do grupo de gauge G, então:

$$[E_k, E_j] = C^i_{kj} E_i \tag{2.38}$$

onde os C^i_{kj} são os "coeficientes de estrutura de G".

Como A e B são 1-formas G-valorizadas, então existem formas A^i e B^j $\mathbb{R}$-valorizadas tais que:

$$A = A^i \otimes E_i \quad \text{e} \quad B = B^j \otimes E_j \tag{2.39}$$

Se $\varphi \in \Lambda^r$ e $\psi \in \Lambda^s$, então:

$$[\varphi,\psi] = C^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) \otimes E_\gamma \tag{2.40}$$

Fazendo $\varphi = A$ e $\psi = B$ ambas pertencendo ã Λ^1 e levando (2.38), (2.39) e (2.40) na expressão (2.37) encontramos

$$\begin{aligned}\Omega^i_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + \frac{1}{2} A^k_\mu A^j_\nu C^i_{kj} \\ &\quad - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho (B^i)^\sigma + \frac{1}{2} (A^k)^\rho (A^j)^\sigma C^i_{kj}\end{aligned} \tag{2.41}$$

ou ainda escrevendo $F^i_{\mu\nu} \equiv \Omega^i_{\mu\nu}$ como usualmente:

$$\begin{aligned}F^i_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho (B^i)^\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2} A^k_\mu A^j_\nu C^i_{kj} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{1}{2} (A^k)^\rho (A^j)^\sigma C^i_{kj} .\end{aligned} \tag{2.42}$$

É claro que quando $G = U(1)$, ou seja, abeliano, então todos os C^i_{kj} se anulam e (2.42) se reduz ãs Relações de Cabibbo-Ferrari usuais (2.17).

2.3. CONDIÇÃO DE QUANTIZAÇÃO DAS CARGAS DUAIS

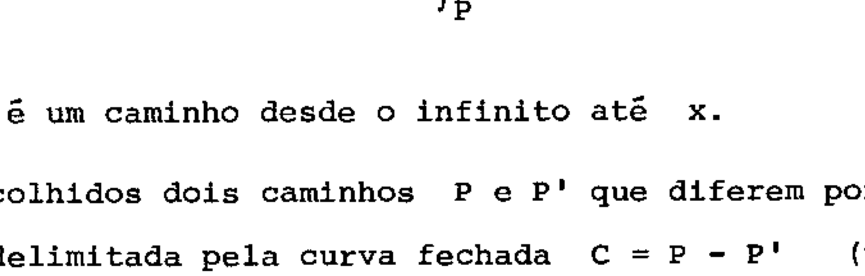
Estudamos nesta secção o problema de uma carga elétrica sujeita ao potencial generalizado $\omega = \alpha + *\alpha'$.

Se $\varphi(x)$ é a função de onda de uma partícula com carga $\underline{e}$ em interação com o campo eletromagnético $\mathbf{F} = d\alpha$, então Mandelstam [19] e Cabibbo-Ferrari [18] definem o campo de partículas dependente do caminho por:

$$\phi(x,\mathbf{P}) = \varphi(x) \exp \int_{\mathbf{P}}^{x} -ie\alpha \qquad (2.43)$$

onde $\mathbf{P}$ é um caminho desde o infinito até x.

Escolhidos dois caminhos P e P' que diferem por uma região finita, delimitada pela curva fechada $C = P - P'$ (vide figura abaixo),



temos pelo Teorema de Stokes:

$$\phi(x,P') = \phi(x,P) \exp \int_{S} -ied\alpha \qquad (2.44)$$

onde S é uma superfície arbitrária tal que $\partial S = C$.

Como o potencial generalizado $\omega = \alpha + *\alpha'$ é formado com dois potenciais usuais, propomos substituir o campo $\mathbf{F} = d\alpha$ em (2.44) pelo campo generalizado $\Omega = d\alpha + *d\alpha'$ (onde tomamos o gauge de Lorentz $\delta\alpha = \delta\alpha' = 0$).

Daí temos:

$$\phi(x,P') = \phi(x,P) \exp \int_S -ie(d\alpha + *d\alpha') \qquad (2.45)$$

A equação (2.45) é independente da superfície S escolhida com $\partial S = C$. Daí para duas superfícies arbitrárias S_1 e S_2 temos:

$$\phi(x,P) \exp \int_{S_1} -ie(d\alpha + *d\alpha') = \phi(x,P) \exp \int_{S_2} -ie(d\alpha + *d\alpha') \qquad (2.46)$$

logo

$$\exp \int_{S_1} -ie(d\alpha + *d\alpha') = \exp \int_{S_2} -ie(d\alpha + *d\alpha')$$

e então:

$$\exp \oint_{S_o} -ie(d\alpha + *d\alpha') = 1 \qquad (2.47)$$

onde $S_o = S_1 - S_2$ é uma superfície fechada.

Esta integral pode ser transformada numa integral de volume pelo Teorema de Stokes:

$$1 = \exp \int_V -ied(d\alpha + *d\alpha') = \exp \int_V -ie(d * d\alpha') =$$

$$= \exp \int_V -ie * \delta d\alpha' \qquad (2.48)$$

Agora as equações (2.14) fornecem para o caso do monopolo estático na origem:

$$G = (g\delta(\vec{r}),0,0,0) \tag{2.49}$$

onde g é a carga magnética, e temos:

$$\Box\alpha' = (d\delta + \delta d)\alpha' = \delta d\alpha' = G \tag{2.50}$$

Logo, substituindo (2.50) em (2.48), temos:

$$\exp \int_V -ie \star G = \exp(-ie \int_V \star G) = \exp(-ieg) = 1$$

ou seja, temos que

$$\exp(-ieg) = 1$$

o que fornece a Condição de Quantização de Dirac

$$eg = 2\pi n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2.51}$$

ou ainda

$$\boxed{\frac{eg}{4\pi} = \frac{n}{2}} \ , \ n \in \mathbb{Z} \tag{2.52}$$

Concluímos este parágrafo com a observação relevante que a derivação da equação (2.52) por Cabibbo-Ferrari [18] é non-sequitur. De fato, estes autores não deixam claro que para a dedução de (2.52) é necessário *postular* a validade da equação (2.45). A equação não pode ser deduzida de nenhum formalismo conhecido.

Para a teoria não-abeliana a tentativa de quantização com o método acima leva ao aparecimento de termos espúrios para os quais não temos ainda nenhuma interpretação física. Assim sendo, resolvemos não apresentar neste trabalho o caso geral.

2.4. OBSERVAÇÕES GERAIS

Até aqui a teoria dos Potenciais Generalizados e cargas duais tem sido construída no espaço-base $\mathbf{E}$. Seria desejável que esta teoria fosse extendida ao fibrado todo $\mathbf{P} = E \times U(1)$ como também para o caso não-abeliano. Isto permitiria comparar com mais facilidade a presente teoria com as demais teorias de gauge onde os monopolos estão presentes. No entanto, tal não foi possível até o momento. O ponto crucial é a extensão do operador estrela de Hodge para o espaço total do fibrado $\mathbf{P}$, de uma maneira coerente com o que se construiu para o espaço-base $\mathbf{E}$. Esforços neste sentido estão sendo feitos.

Outra observação importante é a seguinte: A álgebra exterior $= \oplus \Lambda^p$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada, isto é, $\Lambda = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, onde Λ^+ é a parte par e Λ^-, a parte ímpar da álgebra. Propomos nesta teoria que potenciais e campos são objetos graduados que estão em partes distintas da mesma Álgebra. O operador natural (morfismo) entre as duas partes é o Operador de Dirac. Esta generalização do conceito de campo e potencial, poderá eventualmente levar a um novo conceito de partícula e fontes que nesta teoria são elementos da parte ímpar da Álgebra.

CAPÍTULO III

OS POTENCIAIS GENERALIZADOS NO FORMALISMO DO FIBRADO DE CLIFFORD. A FORÇA DE LORENTZ GENERALIZADA

Como dissemos no Cap. II não foi possível fornecer uma estrutura de fibrado principal para a teoria do potencial generalizado que descreve como vimos cargas e monopolos fenomenológicos.

Nosso objetivo no presente capítulo é mostrar que a teoria do potencial generalizado pode ser formulada como uma teoria de fibrado de Clifford (sobre o espaço-tempo). Esta passagem de uma teoria de fibrado principal para o fibrado de Clifford tem uma consequência não-trivial. De fato, no caso da teoria eletromagnética usual (formulada como um fibrado principal $\mathbf{P} = M \times U(1)$, onde M é o espaço de Minkowski) a equação de movimento das partículas elétricas precisa ser postulada com a introdução ad-hoc da força de Lorentz. Uma maneira de se obter a força de Lorentz de princípios básicos é na Teoria de Kaluza-Klein [31]. No entanto é fundamental para esta teoria que se acrescente uma dimensão espacial à variedade espaço-tempo. Na nossa formulação do eletromagnetismo generalizado (com a introdução do fibrado de Clifford (Apêndice B)), a força de Lorentz generalizada será deduzida como consequência das equações de campo, dentro de um espaço-tempo quadridimensional usual.

3.1. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO NO FIBRADO DE CLIFFORD

No Apêndice B aprendemos entre outras coisas que podemos dar uma estrutura de Álgebra de Clifford a $\oplus \Lambda^p V$ e podemos consequentemente definir o fibrado de Clifford (B.3).

Vimos que no fibrado de Clifford o operador de derivada natural é o operador de Dirac

$$\gamma^\mu \nabla_{e_\mu} \tag{3.1}$$

onde $\gamma^\mu \equiv dx^\mu$ no caso de uma base natural e ∇_{e_μ} é o operador derivada covariante.

No que segue restringimos por simplicidade nossos estudos ao caso em que o espaço de base do fibrado é o espaço-tempo de Minkowski, e nesse caso

$$\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \nabla_{e_\mu} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.2}$$

Vimos que

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow d + \delta \tag{3.3a}$$

e

$$*f_p = (-1)^t \gamma_5 f_p \tag{3.3b}$$

Definimos então o potencial generalizado como

$$\omega = \alpha + \gamma_5 \alpha' \tag{3.4}$$

e temos

$$\mathbf{F} = \partial\!\!\!/ \omega \ , \text{ se } \partial^\mu \alpha_\mu = 0 \text{ e } \partial^\mu \alpha'_\mu = 0 \text{ (gauge de Lorentz)} \tag{3.5}$$

$$\partial\!\!\!/ \mathbf{F} = J_e + \gamma_5 J_m \tag{3.6}$$

que são as traduções no fibrado de Clifford das equações (2.13) com as condições de gauge (2.15).

3.2. LEIS DE CONSERVAÇÃO E A FORÇA DE LORENTZ GENERALIZADA

Observemos que da eq.(3.6) aplicando-se o antiautomorfismo + (reversão), temos a equação:

$$\mathbf{F}^{+} \overleftarrow{\partial\!\!\!/} = J_e + J_m \gamma_5 \tag{3.7}$$

onde $\overleftarrow{\partial\!\!\!/}$ significa que o operador de Dirac atua agora pela direita, isto é, $\mathbf{F}^{+} \overleftarrow{\partial\!\!\!/} = \partial_\alpha (F_{\mu\nu}) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha$.

Multiplicando a eq.(3.6) por $\mathbf{F}^{+}$ pela esquerda e a equação (3.7) por $\mathbf{F}$ pela direita e somando as equações resultantes temos:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{+} \partial\!\!\!/ \mathbf{F} + \mathbf{F}^{+} \overleftarrow{\partial\!\!\!/} \mathbf{F}) = \frac{1}{2} (J_e \mathbf{F} - \mathbf{F} J_e) + \frac{1}{2}[J_m (* \mathbf{F}) - (* \mathbf{F}) J_m] \tag{3.8}$$

Definindo

$$S^\mu = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{+} \gamma^\mu \mathbf{F} \tag{3.9}$$

a eq.(3.8) pode ser escrita como:

$$\partial_\mu S^\mu = J_e \cdot \mathbf{F} + J_m \cdot (* \mathbf{F}) \tag{3.10}$$

Da eq.(3.9) temos imediatamente que $S^{\mu +} = S^\mu$ e $\bar{S}^\mu = - S^\mu$, onde a barra $-$ indica o operador de inversão, ou seja o automorfismo principal α definido no Apêndice B. Os únicos objetos em $\mathbb{R}_{1,3}$ que se comportam dessa maneira sob inversão $(-)$ e reversão $(+)$ são vetores. Segue então que os S^μ são vetores.

Para interpretarmos a eq.(3.10) mostremos primeiramente que $S^\mu \cdot \gamma^\nu = E^{\mu\nu}$ são as componentes (na base canônica) do tensor de energia-momento do campo eletromagnético.

Para tanto precisamos projetar os vetores S^μ na Álgebra de Pauli $\mathbb{R}_{3,0} \cong \mathbb{R}^+_{1,3}$ (Ver Apêndice C).

Temos,

$$S^o = -\frac{1}{2}\mathbf{F}\gamma^o\,\mathbf{F}\gamma^o\gamma^o = -\frac{1}{2}\mathbf{F}\,\tilde{\mathbf{F}}\gamma_o \text{ , onde } \tilde{\mathbf{F}} = \gamma^o\mathbf{F}\gamma^o \tag{3.11}$$

Assim, escrevendo $\mathbf{F} = \vec{E} + \gamma_5\vec{B}$, podemos mostrar imediatamente que:

$$S^o\gamma_o = U + \overrightarrow{S^o} \tag{3.12}$$

com

$$\text{e} \quad \begin{cases} U = \frac{1}{2}\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) & (3.12a) \\ \\ \overrightarrow{S^o} = \vec{E} \times \vec{B} \end{cases}$$

onde reconhecemos U como a densidade de energia do campo eletromagnético e $\overrightarrow{S^o}$ como o vetor de Poynting (que representa o momento linear do campo eletromagnético).

Também temos,

$$S^j = \frac{1}{2}\mathbf{F}\gamma^j\mathbf{F}\gamma_j\gamma_j \text{ (onde não se soma sobre o índice } j) \tag{3.13}$$

Notamos que $\gamma^j \mathbf{F} \gamma_j = \vec{E} - \gamma_5 \vec{B} - 2(E^j - \gamma_5 B^j)\gamma_j \gamma_o$, temos após alguma álgebra:

$$
\text{e} \quad \begin{cases} S^j \gamma_o = S^{jo} + \overrightarrow{S^j} & (3.14a) \\ \\ S^{jk} = U\delta^{jk} - 2(E^j E^k + B^j B^k) & (3.14b) \end{cases}
$$

que identificamos com o tensor das tensões de Maxwell.

Projetemos agora $K_e = \mathbf{F} \cdot J_e = -J_e \cdot \mathbf{F}$ e $K_m = (*\mathbf{F}) \cdot J_m = -J_m \cdot (*\mathbf{F})$ na Álgebra de Pauli.

Temos:

$$
J_e \gamma_o = \rho_e + \overrightarrow{j_e}
$$

$$
\begin{aligned}
K_e \, \gamma_o = (\mathbf{F} \cdot J_e)\gamma_o &= (K_e)_o + \overrightarrow{K_e} = \\
&= \frac{1}{2} \, (\mathbf{F} \cdot J_e - J_e \cdot \mathbf{F})\gamma_o = \\
&= \frac{1}{2} \, (\mathbf{F} \cdot J_e \gamma_o - J_e \gamma_o \cdot \tilde{\mathbf{F}}) = \\
&= \frac{1}{2} \quad (\vec{E} + \gamma_5 \vec{B}) \cdot (\rho_e + \overrightarrow{j_e}) - (\rho_e + \overrightarrow{j_e}) \cdot (-\vec{E} + \gamma_5 \vec{B}) \\
&= \rho_e \vec{E} + \overrightarrow{j_e} \cdot \vec{E} + \overrightarrow{j_e} \times \vec{B} \quad .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{cases} (K_e)_o = \vec{j}_e \cdot \vec{E} & (3.15a) \\ \\ \overrightarrow{K_e} = \rho_e \, \vec{E} + \overrightarrow{j_e} \times \vec{B} & (3.15b) \end{cases}
$$

onde a eq,(3.15b) representa a força de Lorentz que age nas cargas elétricas.

Analogamente, obtemos

$$K_m \gamma_o = (K_m)_o + \overrightarrow{K_m}$$

com

$$\begin{cases} (K_m)_o = -\overrightarrow{j_m} \cdot \vec{B} & (3.16a) \\ \overrightarrow{K_m} = -\rho_m \vec{B} + \overrightarrow{j_m} \times E & (3.16b) \end{cases}$$

onde a eq.(3.16b) representa a força de Lorentz que age nos monopolos magnéticos, e evidentemente colocamos $J_m \gamma_o = \rho_m + \overrightarrow{j_m}$. (Vide Apêndice C).

Observamos aqui que aplicando o operador $\partial\!\!\!/$ novamente na Eq.(3.6) resulta, após alguma álgebra e considerações sobre a graduação dos elementos resultantes, as leis de conservação das correntes elétrica e magnética, ou seja $\partial_\mu J^\mu_e = 0$ e $\partial_\mu J^\mu_m = 0$ (+).

A interpretação da equação (3.10) é agora clara. Temos

$$\partial_\mu E^{\mu\nu} = (J_e \cdot \mathbf{F}) \cdot \gamma^\nu + [J_m \cdot (*\mathbf{F})] \cdot \gamma^\nu \qquad (3.17)$$

que significa que, na presença da matéria descrita por J_e e J_m, a energia-momento do campo eletromagnético não é conservada. Somente a energia-momento do campo e da matéria é que podem ser simultaneamente conservados. Escrevemos, portanto a eq.(3.17) na forma de uma equação de conservação, i.e.

(+) Veja Hestenes [21] para o caso da teoria só com cargas elétricas.

$$\begin{cases} \partial_\mu E^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} & (3.18a) \\ \\ \partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} = (J_e \cdot \mathbf{F}) \cdot \gamma^\nu + [J_m \ (*\mathbf{F})] \cdot \gamma^\nu & (3.18b) \end{cases}$$

Os $\mathbf{T}^{\mu\nu} = \mathbf{T}^{\nu\mu}$ acima definidos são as componentes (na base canônica) do tensor energia-momento da matéria. Em nossa teoria temos o campo eletromagnético descrito por $\mathbf{F}$ e a matéria é representada fenomenologicamente pela existência de uma partícula dotada de carga elétrica e uma partícula dotada de carga magnética.

Especificamente definimos que a matéria elétrica é representada por uma tripla $(m_e\, , e\, , \sigma)$ onde m_e é a massa da partícula, $\underline{e}$ é sua carga elétrica e $\sigma : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow \mathbf{E}$ é uma curva que representa a trajetória da partícula elétrica. A matéria magnética é representada pela tripla $(m_g\, , g\, , \gamma)$ onde m_g é a massa do monopolo magnético, $\underline{g}$ é a carga magnética e $\gamma : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow \mathbf{E}$ é uma curva que representa a trajetória do monopolo.

O tensor $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mu\nu} \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ mais geral que podemos escrever para representar a matéria é então:

$$\mathbf{T} = -m_e \int ds\, \delta(x - \sigma(s))\, \sigma_* \otimes \sigma_* - m_g \int ds'\, \delta(x - \gamma(s'))\, \gamma_* \otimes \gamma_* \qquad (3.19)$$

Em componentes, escrevendo-se $x^\mu(\sigma(s)) \equiv z^\mu(s)$, $\sigma_* = \dfrac{dz^\mu}{ds} \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$; $x^\mu(\gamma(s')) \equiv y^\mu(s')$, $\gamma_* = \dfrac{dy^\mu}{ds'} \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ (3.19) escreve-se como:

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = -m_e \int ds\, \delta(x^\alpha - z^\alpha) \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} - m_g \int ds'\, \delta(x^\alpha - y^\alpha) \frac{dy^\mu}{ds'} \frac{dy^\nu}{ds'} \qquad (3.20)$$

Substituindo-se a equação (3.20) na equação (3.18b) temos:

$$\partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} = -m_e \int ds \frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz^\nu}{ds}\partial_\mu \delta(x^\alpha - z^\alpha) - m_g \int ds' \frac{dy^\mu}{ds'}\frac{dy^\nu}{ds'}\partial_\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha)$$

$$= m_e \int ds \frac{dz^\nu}{ds}\frac{d}{ds}[\delta(x^\alpha - z^\alpha)] + m_g \int ds' \frac{dy^\nu}{ds'}\frac{d}{ds}[\delta(x^\alpha - y^\alpha)]$$

$$= m_e \int ds \frac{d}{ds}[\frac{dz^\nu}{ds}\delta(x^\alpha - z^\alpha)] - m_e \int ds \frac{d^2 z^\nu}{ds^2}\delta(x^\alpha - z^\alpha)$$

$$+ m_g \int ds' \frac{d}{ds'}[\frac{dy^\nu}{ds'}\delta(x^\alpha - y^\alpha)] - m_g \int ds' \frac{d^2 y^\nu}{ds'^2}\delta(x^\alpha - y^\alpha)$$

Os termos $m_e \int ds \frac{d}{ds}[\frac{dz^\nu}{ds}\delta(x^\alpha - z^\alpha)]$ e

$$m_g \int ds' \frac{d}{ds'}[\frac{dy^\nu}{ds}\delta(x^\alpha - y^\alpha)]$$

se anulam e ficamos então com:

$$\partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} = -m_e \int ds \frac{d^2 z^\nu}{ds^2}\delta(x^\alpha - z^\alpha(s)) - m_g \int ds' \frac{d^2 y^\nu}{ds'^2}\delta(x^\alpha - y^\alpha(s')) \qquad (3.21)$$

Substituindo (3.21) na equação (3.18b) temos:

$$-m_e \int ds \frac{d^2 z^\nu}{ds^2}\delta(x^\alpha - z^\alpha) - m_g \int ds' \frac{d^2 y^\nu}{ds'^2}\delta(x^\alpha - y^\alpha)$$

$$= (J_e \cdot \mathbf{F})\cdot\gamma^\nu + [J_m \cdot (*\mathbf{F})]\cdot\gamma^\nu \qquad (3.22)$$

Note que os vetores J_e e J_m tem que ser escritos com os vetores que caracterizam a matéria. Escrevemos então:

$$\begin{cases} J_e = e \int_{-\infty}^{\infty} ds \ \sigma_*(s)\,\delta(x - \sigma(s)) & (3.23a) \\ \\ J_m = g \int_{-\infty}^{\infty} ds' \ \gamma_*(s)\,\delta(x - \gamma(s)) & (3.23b) \end{cases}$$

ou, em componentes

$$\begin{cases} J_e^{\mu} = e \int ds \ \frac{dz^{\mu}}{ds} \ \delta(x^{\alpha} - z^{\alpha}(s)) & (3.24a) \\ \\ J_m^{\mu} = g \int ds' \ \frac{dy^{\mu}}{ds'} \ \delta(x^{\alpha} - y^{\alpha}(s)) & (3.24b) \end{cases}$$

Note que temos a conservação das correntes elétrica e magnética, ou seja:

$$\begin{cases} \partial_{\mu} J_e^{\mu} = 0 & (3.25a) \\ \\ \partial_{\mu} J_m^{\mu} = 0 & (3.25b) \end{cases}$$

De fato,

$$\partial_{\mu} J_e^{\mu} = e \int ds \ \frac{dz^{\mu}}{ds} \ \partial_{\mu} \delta(x^{\alpha} - z^{\alpha}(s))$$

Como $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f(x-z) = - \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} f(x-z)$ e $\frac{\partial f}{\partial z^{\mu}} \frac{dz^{\mu}}{ds} = \frac{df}{ds}$

temos então:

$$\partial_{\mu} J_e^{\mu} = -e \int_{-\infty}^{\infty} ds \ \frac{d}{ds} \ \delta(x^{\alpha} - z^{\alpha}(s)) = -e\,\delta(x^{\alpha} - z^{\alpha}))\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \ .$$

Do mesmo modo, prova-se $\partial_\mu J^\mu_m = 0$.

Note ainda que (veja Eq.(3.15) e (3.16)):

$$-K_e = J_e \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{F} \cdot J_e = -(K_e)_o \gamma^o - (K_e)_i \gamma^i$$

$$-K_m = J_m \cdot (*\mathbf{F}) = -(*\mathbf{F}) \cdot J_m = -(K_m)_o \gamma^o - (K_m)_i \gamma^i \;.$$

Assim, considerando-se na eq.(3.22), $\nu = i$, $i = 1,2,3$, obtemos:

$$-m_e \int ds \, \frac{d^2 z^i}{ds^2} \, \delta(x^\alpha - z^\alpha(s)) - m_g \int ds' \, \frac{d^2 y^i}{ds'^2} \, \delta(x^\alpha - y^\alpha(s)) =$$

$$= (K_e)^i + (K_m)^i \tag{3.26}$$

Tendo em conta as equações (3.15) e (3.16) e as equações (3.24) temos:

$$\begin{cases} m_e \dfrac{d^2 z^i}{ds^2} = \rho_e E_i + (\vec{j_e} \times \vec{B})_i & (3.27a) \\ \\ m_g \dfrac{d^2 y^i}{ds'^2} = -\rho_m B_i + (\vec{j_m} \times \vec{E})_i & (3.27b) \end{cases}$$

As equações (3.27) são as equações de movimento de partículas elétricas e monopolos magnéticos.

3.3. CONCLUSÕES

Vimos que a tradução da teoria do potencial generalizado (Cap. II) para a linguagem de Fibrado de Clifford permite deduzir que o acoplamento correto da corrente elétrica com o campo eletromagnético é $J_e \cdot \mathbf{F}$ e o acoplamento correto da corrente magnética com o campo eletromagnético é $J_m \cdot (*\mathbf{F})$. Assim em nossa formulação a força de Lorentz que é usualmente introduzida de maneira ad-hoc aparece como consequência não-trivial das equações de campo.

Desejamos aqui observar que uma vez encontrado o acoplamento correto, as equações de movimento das partículas elétricas e dos monopolos podem ser deduzidos resultando as equações corretas (3.27).

É ainda importante enfatizar que, não existindo formalismo lagrangeano que forneça para os monopolos fenomenológicos as equações de movimento corretas (3.27) [9;10;11], fica sem sentido as tentativas de construção de equações não-standards como na referência [23]. De fato, Gamblim para construir o formalismo Lagrangeano supõe que o acoplamento do monopolo não é dado pela força de Lorentz $J_m \cdot (*\mathbf{F})$. Tal é incorreto pois este é o único acoplamento que segue das equações de Maxwell Generalizadas como visto no parágrafo §3.2.

APÊNDICE A

TEORIA DE GAUGE EM FIBRADOS PRINCIPAIS(+)

A.1. FIBRADOS PRINCIPAIS (Principal Fibre Bundles).

A.1.1. DEFINIÇÃO. Um fibrado principal (P.F.B) é constituído de um espaço $\mathbf{P}$, chamado espaço total, um grupo de Lie G e uma projeção $\pi : \mathbf{P} \to M$, onde M é uma variedade C^∞-diferenciável, n-dimensional, a qual chamaremos de variedade base e valem as seguintes condições.

a) G age livremente à direita em $\mathbf{P}$, ou seja,

Dado $g \in G$, existe aplicação (um difeomorfismo).

$$\begin{aligned} R_g : \mathbf{P} &\longrightarrow \mathbf{P} \\ p &\longrightarrow R_g(p) = pg \; . \end{aligned}$$

b) $\pi : \mathbf{P} \to M$ é sobrejetora.

Se $x = \pi(p) \in M$, a órbita de G através de p:

$$\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\pi(p)) = \{pg,\ g \in G\}$$

é chamada fibra sobre $x = \pi(p)$.

Desse modo dado $p \in \pi^{-1}(x)$, existe um difeomorfismo (não-canônico).

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ g &\longrightarrow pg \; . \end{aligned}$$

c) $\mathbf{P}$ é localmente trivial, ou seja:

Para cada $x \in M$, existe um aberto $U \subset M$, com $x \in U$ e um difeomorfismo,

(+) Vide demonstrações em Bleecker [4].

$$T_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

da forma

$$T_U(p) = (\pi(p), S_U(p))$$

onde

$S_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ tem a propriedade

$$S_U(pg) = S_U(p)g \quad , \quad \forall g \in G \ , \quad \forall p \in \pi^{-1}(U)$$

T_U é chamada uma *trivialização local* (TL) ou uma *escolha* de Gauge.

A.1.2. DEFINIÇÃO. FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO. Seja um P.F.B. $\begin{array}{c} P \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ com grupo G e duas trivializações locais

$$T_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

$$T_V : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times G \ .$$

Definimos a função de transição de T_U para T_V pela aplicação:

$$g_{UV} : U \cap V \longrightarrow G$$

$$g_{UV}(x) = S_U(p)S_V(p)^{-1}$$

para $x = \pi(p) \in U \cap V$.

$g_{UV}(x)$ é bem definida pois:

$$S_U(pg)S_V(pg)^{-1} = S_U(p)g\,[S_V(p)g]^{-1} = S_U(p)gg^{-1}S_V(p)^{-1} = S_U(p)S_V(p)^{-1}.$$

e valem as propriedades:

1) $g_{UU}(y) = e \quad , \quad \forall y \in U$

2) $g_{VU}(y) = g_{UV}(y)^{-1} \quad , \quad \forall y \in U \cap V$

3) $g_{UV}(y)g_{VW}(y)g_{WU}(y) = e \quad , \quad \forall y \in U \cap V \cap W$.

A.1.3. DEFINIÇÃO. Uma secção local de um P.F.B. $\begin{matrix} \mathbf{P} \\ \downarrow \pi \\ M \end{matrix}$ com grupo G é uma aplicação:

$$\sigma : U \subset M \longrightarrow \mathbf{P} \quad \text{tal que}$$

$$\pi \circ \sigma = Id_U \equiv \text{identidade em } U.$$

É fácil mostrar o seguinte:

A.1.4. TEOREMA. Existe uma correspondência natural entre secções locais e trivializações locais. ∎

Uma secção tal que $U \equiv M$ é chamada secção global e neste caso P é globalmente trivial, ou seja

$$\mathbf{P} = M \times G \ .$$

A.2. CONEXÕES EM FIBRADOS.

Vamos dar aqui três definições equivalentes de conexão em um fibrado principal.

A.2.1. DEFINIÇÃO. Conexão é uma maneira pela qual associamos a cada $p \in \mathbf{P}$ um subespaço $\mathbf{H}_p$ de $\mathbf{T}_p\mathbf{P}$ (espaço vetorial tangente à $\mathbf{P}$ no ponto p), de forma que:

$$R_g^*(\mathbf{H}_p) = \mathbf{H}_{pg}$$

e se

$$\mathbf{V}_p = \{X \in \mathbf{T}_p\mathbf{P} \quad \text{tal que} \quad \pi_*(X) = 0\}$$

então

$$\mathbf{T}_p\mathbf{P} = \mathbf{H}_p \oplus \mathbf{V}_p$$

A aplicação $p \longrightarrow \mathbf{H}_p$ é C^∞-diferenciável. $\mathbf{H}_p$ é chamado *subespaço horizontal* e $\mathbf{V}_p$ subespaço vertical.

A.2.2. DEFINIÇÃO. *Conexão* é uma 1-forma C^∞-diferenciável ω em $\mathbf{P}$ que assume valores na álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G tal que:

a) Dado $A \in \mathcal{G}$ e A^* o campo vetorial em $\mathbf{P}$ definido por

$$A_p^* = \frac{d}{dt}\,(p \exp tA)\Big|_{t=0}$$

então

$$\omega_p(A_p^*) = A$$

A^* é chamado de *campo fundamental*.

b) Dado $g \in G$, exigimos que

$$\omega_{pg}(R_{g*}X) = Ad_{g^{-1}}\omega_p(X) \quad , \; \forall g \in G \; , \; p \in \mathbf{P} \quad e \quad X \in \mathbf{T}_pP \; .$$

Podemos escrever esta relação na forma:

$$R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$$

ω é chamada de 1-forma de conexão.

OBS.: Em geral, e por uma questão de simplicidade, os físicos utilizam G como um grupo de matrizes através da sua *representação adjunta*

$$G \longrightarrow GL(\mathcal{G})$$

$$g \longrightarrow Ad_g \ .$$

Identificamos então G com sua imagem em $GL(\mathcal{G})$.

Neste caso se $A \in GL(\mathcal{G})$ e $B \in \hat{\mathcal{G}}$ então:

$$Ad_A B = \frac{d}{dt} Ad_A(\exp t\, B)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (A^{-1} \exp(tB)A)\Big|_{t=0} =$$

$$= A^{-1} BA \ .$$

Supondo então, sem perda de generalidade, que G é um grupo de matrizes temos a seguinte definição.

A.2.3. DEFINIÇÃO. Uma *conexão* associa para cada trivialização local (ou seja, uma escolha de Gauge)

$$T_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

uma 1-forma ω_U, $\mathcal{G}$-valorizada sobre U, com a seguinte condição de compatibilidade:

Se $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow G$ é a função de transição de T_U para T_V então requeremos

$$\omega_V = g_{UV}^{-1}\, dg_{UV} + g_{UV}^{-1}\, \omega_U\, g_{UV}$$

ou mais compactamente (usando a observação acima).

$$\boxed{\omega_V = g^{-1}dg + Ad_{g^{-1}}\,\omega_u}$$

Demonstra-se que as três definições são equivalentes.

A.2.4. DEFINIÇÃO. Dada uma conexão ω em $\mathbf{P}$, e uma secção local $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$, o retrocesso (pull-back)

$$\omega_U = \sigma_U^* \omega$$

é chamado potencial (local) de Gauge.

A.3. CURVATURA E FORMAS DIFERENCIAIS G-VALORIZADAS.

Seja N uma variedade e G uma álgebra de Lie. Denotamos o conjunto de todas as k-formas G-valorizadas sobre N por $\Lambda^k(N,G)$.

A.3.1. DEFINIÇÃO. Seja $\varphi \in \Lambda^i(N,G)$ e $\psi \in \Lambda^j(N,G)$, definimos o comutor $[\varphi,\psi] \in \Lambda^{i+j}(N,G)$ por:

$$[\varphi,\psi](X_1,\ldots,X_{i+j}) = \frac{1}{i!j!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}[\varphi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(i)}),\psi(X_{\sigma(i+1)},\ldots,X_{\sigma(i+j)})]$$

onde

$\sigma \in Per\{1,2,\ldots,i+j\}$ $(-1)^{\sigma} = \pm$ é o sinal da permutação. O colchete $[\ ,\ ]$ no lado direito é o Colchete de Lie de G e $X_1,\ldots,X_{i+j}$ são campos vetoriais arbitrários em N.

A.3.2. DEFINIÇÃO. FORMULAÇÃO EM COMPONENTES.

Se $A \in G$ e $\overline{\varphi} \in \Lambda^k(N)$ então definimos $\overline{\varphi} \otimes A \in \Lambda^k(N,G)$ por:

$$(\overline{\varphi} \otimes A)(X_1,\ldots,X_k) = \overline{\varphi}(X_1,\ldots,X_k)A \quad \text{para} \quad X_1,\ldots,X_k \in T_yN\,.$$

Daí é fácil mostrar que:

$$[\overline{\varphi} \otimes A \, , \, \overline{\psi} \otimes B] = (\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}) \otimes [A,B]$$

Se $\{E_1,\ldots,E_r\}$ é uma base de G satisfazendo

$$[E_\alpha, E_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} E_\gamma$$

Dadas $\varphi \in \Lambda^i(N,G)$ e $\psi \in \Lambda^j(N,G)$ existem formas φ^α, ψ^β $\mathbb{R}$-valorizadas $(\alpha,\beta = 1,\ldots,r)$ univocamente determinadas tal que

$$\varphi = \varphi^\alpha E_\alpha \qquad \text{e} \qquad \psi = \psi^\beta E_\beta$$

Daí temos o comutador escrito em componentes reais

$$[\varphi,\psi] = (\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) \otimes [E_\alpha, E_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} (\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) \otimes E_\gamma \, .$$

A álgebra das formas G-valorizadas sobre N é uma Álgebra de Lie Graduada, ou seja:

Para $\varphi \in \Lambda^i(N,G)$, $\psi \in \Lambda^j(N,G)$ e $\rho \in \Lambda^k(N,G)$ temos:

(1) $[\psi,\varphi] = -(-1)^{ij} [\varphi,\psi]$

(2) $(-1)^{ik}[[\varphi,\psi],\rho] + (-1)^{kj}[[\rho,\varphi],\psi] + (-1)^{ji}[[\psi,\rho],\varphi] = 0$.

Temos o seguinte teorema importante:

A.3.3. TEOREMA. Para $\varphi \in \Lambda^i(N,G)$ e $\psi \in \Lambda^j(N,G)$ temos:

$$d[\varphi,\psi] = [d\varphi,\psi] + (-1)^i [\varphi,d\psi] \quad . \quad \blacksquare$$

Dada uma 1-forma de conexão ω sobre um fibrado principal $\begin{smallmatrix} P \\ \downarrow \pi \\ M \end{smallmatrix}$ com grupo G, podemos escrever para cada $X \in T_p P$ com $X = X^V + X^H$ onde X^V é *vertical* (isto é, $\pi_*(X^V) = 0$) e X^H é *horizontal* (isto é, $\omega(X^H) = 0$).

A.3.4. DEFINIÇÃO. Se $\varphi \in \Lambda^k(\mathbf{P}, G)$ então definimos $\varphi^H \in \Lambda^k(\mathbf{P}, G)$ por:

$$\varphi^H(X_1, \ldots, X_k) = \varphi(X_1^H, \ldots, X_k^H)$$

A.3.5. DEFINIÇÃO. A *derivada exterior covariante* de $\varphi \in \Lambda^k(\mathbf{P}, G)$ é

$$D^\omega \varphi \equiv (d\varphi)^H \in \Lambda^{k+1}(\mathbf{P}, G)$$

onde $d\varphi$ é a derivada exterior usual.

A.3.6. DEFINIÇÃO. A *curvatura da conexão* $\omega \in \Lambda^1(\mathbf{P}, S)$ é

$$\Omega^\omega \equiv D^\omega \omega \in \Lambda^2(\mathbf{P}, G)$$

Quando ω é considerado como um potencial, Ω^ω é chamado de *campo de força de* ω.

A seguinte equação permite que a curvatura se torne mais manejável.

A.3.7. TEOREMA. (A equação estrutural de Cartan).

A forma de curvatura é dada por:

$$D^\omega \omega \equiv \Omega^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] .$$

A forma de curvatura também satisfaz certas condições de integrabilidade chamadas *Identidade de Bianchi*, que em física são chamadas *Equações Homogêneas do Campo*.

A.3.8. TEOREMA (Identidade de Bianchi ou Eq. Hom. do Campo).

Se ω é uma 1-forma de conexão sobre **P** com curvatura Ω^{ω}, então:

$$D^{\omega}\Omega^{\omega} = 0$$

ou ainda

$$d\Omega^{\omega} = [\Omega^{\omega},\omega]$$

A.3.9. TEOREMA. Sob a ação (à direita) de G, a curvatura se comporta como:

$$R_g^{*}\Omega^{\omega} = Ad_{g^{-1}}\Omega^{\omega} \ . \qquad \blacksquare$$

A.4. EXPRESSÕES LOCAIS

Vimos que o potencial de Gauge ω_U é relacionado com a conexão ω por

$$\omega_U = \sigma_U^{*}\omega \in \Lambda^1(U,G) \ .$$

Agora, o campo de força associado à ω_U é

$$\Omega_U \equiv \sigma_U^{*}\Omega^{\omega}$$

e vale o seguinte teorema.

A.4.1. TEOREMA. $\Omega_U = d\omega_U + \frac{1}{2}[\omega_U,\omega_U]$.

Geralmente os grupos usados em Física são grupos de matrizes. Daí é conveniente escrever o colchete de formas neste caso.

Então se $\varphi \in \Lambda^{i}(N,G)$ e $\psi \in \Lambda^{j}(N,G)$ temos:

$$[\varphi,\psi] = \varphi \wedge \psi - (-1)^{ij}\, \psi \wedge \varphi$$

onde φ e ψ são consideradas como matrizes de formas $\mathbb{R}$-valorizadas e $\varphi \wedge \psi$ é a multiplicação matricial, onde as entradas são multiplicadas via operador wedge $\wedge$. Temos então o seguinte Corolário.

A.4.2. COROLÁRIO. Se G é um grupo de matrizes, então

$$\Omega^{\omega} = d\omega + \omega \wedge \omega$$

e

$$\Omega_U = d\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U$$

A regra para transformações dos campos de força, sob uma mudança de Gauge (trivializações ou secções locais) é mais simples para a curvatura que para os potenciais (A.2.3). Temos o seguinte:

A.4.3. TEOREMA. Seja T_U e T_V duas trivializações locais com função de transição

$$g_{UV} : U \cap V \longrightarrow G .$$

Então em $U \cap V$ temos:

$$\Omega_V = Ad_{g_{UV}^{-1}} \Omega_U$$

No caso de G ser um grupo de matrizes obtemos:

$$\Omega_V = g_{UV}^{-1}\, \Omega_U\, g_{UV} .$$

Diz-se em física que a curvatura (ou campo) se transforma de uma maneira homogênea sob transformação de Gauge, enquanto que os potenciais tem ainda uma parte não homogênea $g_{UV}^{-1}\,dg_{UV}$.

A.4.4. TEOREMA. (Forma local da Identidade de Bianchi).

Relativamente a uma trivialização local

$$T_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

a identidade de Bianchi escreve-se como:

$$d\Omega_U = [\,\Omega_U, \omega_U]$$

se G for um grupo de matrizes temos:

$$d\Omega_U = \Omega_U \wedge \omega_U - \omega_U \wedge \Omega_U$$

A.5. CAMPO DE PARTÍCULAS E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE.

A.5.1. DEFINIÇÃO. Seja G um grupo de Lie que atua pela esquerda numa variedade F, ou seja, temos:

$$G \times F \longrightarrow F$$
$$(g,f) \longrightarrow g\cdot f$$

sendo esta aplicação C^∞.

Definimos

$$C(\mathbf{P},F) = \{\tau : \mathbf{P} \longrightarrow F \ \text{ tal que } \ \tau(pg) = g^{-1}\cdot\tau(p)\}.$$

No caso onde a ação de G define uma representação (sobre um espaço vetorial V) $G \longrightarrow GL(V)$, os elementos de $C(\mathbf{P},V)$ são chamados *Campos de Partículas*.

A.5.2. DEFINIÇÃO. (Formas equivariantes).

Seja $\overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ o espaço das k-formas diferenciais φ com valores em V definidos em $\mathbf{P}$ e tal que (para uma dada representação $G \longrightarrow GL(V)$):

a) Para $X_1,\ldots,X_k \in \mathbf{T}_p\mathbf{P}$ temos

$$\varphi(R_{g*}X_1,\ldots,R_{g*}X_k) = g^{-1}\cdot\varphi(X_1,\ldots,X_k)$$

(isto é, $R_g^*\varphi = g^{-1}\cdot\varphi$).

b) Se um dos $X_1,\ldots,X_k$ é vertical, então $\varphi(X_1,\ldots,X_k) = 0$.

Os elementos de $\overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ são denominados k-*formas horizontais equivariantes* V-*valorizadas*.

Se φ é uma 0-forma (isto é, uma função $\varphi : \mathbf{P} \longrightarrow V$) então a condição b) é desnecessária e a condição a) fica $\varphi(pg) = g^{-1}\cdot\varphi(p)$

No caso especial onde $V = \mathcal{G}$ e $G \longrightarrow GL(\mathcal{G})$

$g \longrightarrow Ad_g$

é a representação adjunta a curvatura Ω^ω da conexão ω pertence a $\overline{\Lambda}^2(\mathbf{P},\mathcal{G})$. Também é fácil ver que

$$C(P,V) \cong \overline{\Lambda}^0(\mathbf{P},V)$$

A.5.3. DEFINIÇÃO. A derivada covariante D^ω (definida em 3.5) preserva as condições a) e b) da definição (A.5.2) ou seja: se $\varphi \in \overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ então $D^\omega\varphi \in \overline{\Lambda}^{k+1}(\mathbf{P},V)$. Daí pode-se definir o operador:

$$D^{\omega} : \overline{\Lambda}^{k}(\mathbf{P},V) \longrightarrow \overline{\Lambda}^{k+1}(\mathbf{P},V)$$

por:

$$D^{\omega}\varphi = (d\varphi)^{H} .$$

Para conseguir escrever o análogo das Equações de Estrutura de Cartan (A.3.7) para formas equivariantes precisamos da seguinte definição:

A.5.4. DEFINIÇÃO. Seja $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}\ell(V)$ homomorfismo de Álgebra de Lie induzido pela representação $G \longrightarrow GL(V)$, isto é para $A \in \mathcal{G}$ e $v \in \mathbf{V}$ colocamos:

$$A.v \equiv \frac{d}{dt}\left[(\exp tA)\cdot v\right]\Big|_{t=0} \in \mathbf{V}$$

(aqui identificamos $\mathbf{T}_{v}V = \mathbf{V}$).

Se $\varphi \in \Lambda^{k}(\mathbf{P},V)$ e $\rho \in \Lambda^{j}(\mathbf{P},\mathcal{G})$, definimos $\rho \dot{\wedge} \varphi \in \Lambda^{j+k}(\mathbf{P},V)$ por:

$$(\rho \dot{\wedge} \varphi)(X_{1},\ldots,X_{j+k}) = \frac{1}{j!k!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \rho(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(j)})\cdot \varphi(X_{\sigma(j+1)},\ldots,X_{\sigma(j+k)})$$

onde $\sigma \in \mathrm{Per}\{1,\ldots,j+k\}$.

Com esta definição demonstra-se o seguinte teorema.

A.5.5. TEOREMA. Para $\tau \in \overline{\Lambda}^{k}(P,V)$ temos que $D^{\omega}\tau = d\tau + \omega \dot{\wedge} \tau$.

Se tivermos a representação adjunta $G \longrightarrow GL(\mathcal{G})$ então para $\tau \in \overline{\Lambda}^{k}(\mathbf{P},\mathcal{G})$ temos que $\omega \dot{\wedge} \tau = [\omega,\tau]$ e daí

$$D^{\omega}\tau = d\tau + [\omega,\tau] \quad \blacksquare$$

OBS. Como a curvatura $\Omega^{\omega} \in \overline{\Lambda}^{2}(\mathbf{P},\mathcal{G})$ então o teorema A.5.5. mostra que:

$$D^{\omega}\Omega^{\omega} = d\Omega^{\omega} + [\omega, \Omega^{\omega}]$$

que se anula pela identidade de Bianchi.

A.5.6. DEFINIÇÃO. (Transformação de Gauge).

Um automorfismo de P.F.B. $\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \downarrow\pi\\ M\end{array}$ com grupo G é um difeomorfismo $f : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$ tal que:

$$f(pg) = f(p)g\ , \quad \forall g \in G\ ,\ p \in \mathbf{P}\ .$$

Note que f induz um difeomorfismo bem definido

$$\overline{f} : M \longrightarrow M$$

$$\overline{f}(\pi(p)) = \pi(f(p))\ .$$

Uma *transformação de Gauge* (calibre) de um P.F.B. é um automosfismo $f : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$ tal que $\overline{f} = 1_M$ (isto é, $\pi(p) = \pi(f(p))$). Denotamos:

GA($\mathbf{P}$) = o grupo de todas as transformações de Gauge de $\mathbf{P}$.

As transformações de Gauge são definidas acima como automorfismos do P.F.B. que preservam a base. Localmente elas medem a mudança do referencial "interno" ou Gauge, para uma variação no espaço-tempo.

A.5.7. TEOREMA. Seja $C(\mathbf{P},G)$ o espaço definido em (A.5.1) onde G atua sobre si mesmo via conjugação:

$$g \cdot g' = gg'g^{-1}\ .$$

Existe um (anti)-isomorfismo natural

$$C(\mathbf{P},G) \cong GA(\mathbf{P}) \ .$$

■

A.5.8. TEOREMA. Se $f \in GA(\mathbf{P})$ e ω é uma 1-forma de conexão, então $f^*\omega$ é uma 1-forma de conexão. ■

A.5.9. TEOREMA. Dada uma representação $G \longrightarrow GL(V)$ e $f \in GA(\mathbf{P})$, o pull-back f^* fornece um isomorfismo

$$f^* : \overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V) \longrightarrow \overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V) \ , \ k=0,1,2,\ldots$$

■

Seja $\mathcal{C}$ o espaço de todas as 1-forma de conexão sobre $\mathbf{P}$. Note que $\mathcal{C} \neq \overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},\mathcal{G})$ mas estes espaços estão muito relacionados:

A.5.10. TEOREMA. Para uma dada $\omega \in \mathcal{C}$, a aplicação

$$\overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

dada por

$$\tau \longrightarrow \tau + \omega$$

é injetiva e sobre.

■

$\mathcal{G}$ = álgebra de Lie de G.

Note que para $\tau \in \overline{\Lambda}^1(P,\mathcal{G})$ a curva

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$t \longrightarrow \gamma(t) = \omega + t\tau$$

passa por ω e tem $\gamma'(0) = \tau$. Deste modo podemos considerar $\overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},\mathcal{G})$ como o "espaço tangente" $T_\omega\mathcal{C}$ à "variedade $\mathcal{C}$ em ω.

A.5.11. DEFINIÇÃO. A *Álgebra de Gauge* de um P.F.B. com grupo G

é o espaço $C(\mathbf{P},\mathcal{G})$ com a representação adjunta $G \longrightarrow GL(\mathcal{G})$

$$g \longrightarrow Ad_g \,.$$

Os teoremas que seguem, indicam o sentido em que $C(\mathbf{P},\mathcal{G})$ pode ser considerado como Álgebra de Lie de $C(\mathbf{P},G) \cong GA(\mathbf{P})$.

OBS. G age sobre $C(\mathbf{P},\mathcal{G})$ através da representação adjunta $G \longrightarrow GL(\mathcal{G})$.

Seja $g \in G$ e $\tau \in C(\mathbf{P},\mathcal{G})$ ou seja $\tau : \mathbf{P} \longrightarrow \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} G \times C(\mathbf{P},\mathcal{G}) &\longrightarrow C(\mathbf{P},\mathcal{G}) \\ (g,\tau) &\longrightarrow g\cdot\tau \end{aligned}$$

isto é, para cada τ associamos $\tau_g = g\cdot\tau$ onde

$$\tau_g(p) = \underbrace{g\cdot\tau(p)}_{\text{multiplicação na álgebra de Lie } \mathcal{G}.}$$

A.5.12. TEOREMA. Se $H,H' \in C(\mathbf{P},\mathcal{G})$ então a aplicação

$$\begin{aligned} [H,H'] : \mathbf{P} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ p &\longrightarrow [H(p),H'(p)] \end{aligned}$$

está também em $C(\mathbf{P},\mathcal{G})$. Consequentemente, $C(\mathbf{P},\mathcal{G})$ tem uma estrutura de Álgebra de Lie. ∎

A.5.13. TEOREMA. Existe uma aplicação

$\mathrm{Exp}: C(\mathbf{P},\mathcal{G}) \longrightarrow C(\mathbf{P},G)$ definida por:

$\mathrm{Exp}(H)(p) = \exp(H(p))$ com $H \in C(P,\mathcal{G})$

tal que

$$t \longrightarrow \operatorname{Exp}(t\,H)$$

é um subgrupo a um parâmetro de $C(P,G)$ com:

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Exp}(t\,H)(p) = H(p).$$

Além disso, se H e $H' \in C(\mathbf{P},G)$ então:

$$[H,H'](p) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\operatorname{Exp}(tH)_p \operatorname{Exp}(sH')_p \operatorname{Exp}(tH)_p^{-1}\Big|_{s,t=0}$$

A.5.14. DEFINIÇÃO. Definimos

$$\exp\colon C(\mathbf{P},G) \longrightarrow GA(\mathbf{P})$$

por

$$\exp(H)(p) = p\,\exp(H(p)).$$

Note que isto é a Exp de (A.5.13) seguido pelo isomorfismo (A.5.7).

Os teoremas (A.5.8) e (A.5.9) nos dizem que $GA(\mathbf{P})$ atua sobre os espaços C e $\overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ respectivamente. Como $C(P,G)$ é a "Álgebra de Lie" de $GA(\mathbf{P})$ podemos considerar os efeitos de $C(\mathbf{P},G)$ (movimentos infinitesimais) sobre estes espaços.

A.5.15. TEOREMA. Para $\varphi \in \overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$, $f \in GA(\mathbf{P})$ e $\tau \in C(\mathbf{P},G)$ com $f(p) = p\tau(p)$, temos:

$$f^*\varphi = \tau^{-1}\cdot\varphi\ . \qquad \blacksquare$$

As "versões infinitesimais" das ações em (A.5.8) e (A.5.9) são os seguintes dois teoremas:

A.5.16. TEOREMA. Seja $\omega \in C$ e $H \in C(\mathbf{P},G)$. Então

$$\frac{d}{dt}(\exp tH)^*\omega|_{t=0} = dH + [\omega,H] = D^{\omega}H \in \overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},G) \ . \qquad \blacksquare$$

A.5.17. TEOREMA. Seja $\varphi \in \overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ e $H \in C(\mathbf{P},G)$. Então

$$\frac{d}{dt}(\exp tH)^*\varphi|_{t=0} = -H\cdot\varphi \ . \qquad \blacksquare$$

Portanto os teoremas (A.5.16) e (A.5.17) mostram como são as ações infinitesimais do $GA(\mathbf{P})$ sobre C e $\overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ através de sua Álgebra de Lie $C(\mathbf{P},G)$.

A.6. LAGRANGEANOS E INVARIÂNCIA DE GAUGE

Seja $\begin{matrix} P \\ \downarrow \pi \\ M \end{matrix}$ um fibrado principal com grupo G e seja $G \longrightarrow GL(V)$ uma representação.

A.6.1. DEFINIÇÃO. O espaço dos 1-jatos de aplicações de $\mathbf{P}$ para V é:

$$J(\mathbf{P},V) \equiv \{(p,v,\theta) \ / p \in P, \ v \in \mathbf{V} \ \text{e} \ \theta : \mathbf{T}_p\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{V} \ \text{é linear}\}.$$

Pode-se verificar que à $J(\mathbf{P},V)$ pode-se dar uma estrutura diferenciável de um modo natural, daí $J(\mathbf{P},V)$ é uma variedade diferenciável.

A.6.2. DEFINIÇÃO. Um *Lagrangeano* é uma aplicação $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(p,v,\theta) \in J(\mathbf{P},V)$ e $g \in G$, temos:

$$L(pg, g^{-1}\cdot v, g^{-1}\cdot \theta \circ R_{g^{-1}}{}^*) = L(p,v,\theta).$$

Como resultado desta imposição temos:

A.6.3. TEOREMA. Dado um Lagrangeano $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma função bem definida $\mathcal{L}_o : C(\mathbf{P},V) \longrightarrow C^\infty(M)$ dada por (para $x \in M$, $\psi \in C(\mathbf{P},V)$, e $p \in \mathbf{P}$ com $\pi(p) = x$):

$$\mathcal{L}_o(\psi)(x) = L(p,\psi(p),d\psi_p) \quad . \quad \blacksquare$$

Demonstra-se este teorema mostrando que o lado direito é invariante sob a ação de G (pela direita).

A.6.4. DEFINIÇÃO. Um lagrangeano $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado G-invariante se:

$$L(p,g\cdot v,\ g\cdot\theta) = L(p,v,\theta) \quad .$$

Quase todos os lagrangeanos que aparecem na prática tem este tipo de invariância.

Agora suponhamos que $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangeano G-invariante. Isto não implica necessariamente que $\mathcal{L}_o$ seja gauge invariante, ou seja, que

$$\mathcal{L}_o(\psi) = \mathcal{L}_o(f^*\psi) \quad .$$

Lembramos aqui que o grupo de gauge $GA(\mathbf{P})$ atua sobre $C(\mathbf{P},V) = \overline{\Lambda}^o(\mathbf{P},V)$ via pull-back:

$$(f^*\psi)(p) = \psi(f(p)) \quad \text{com} \quad f \in GA(\mathbf{P}),\ \psi \in C(\mathbf{P},V)$$

Para remediar esta não-invariância de gauge de $\mathcal{L}_o$, os físicos inventaram um objeto que (quando incorporado a $\mathcal{L}_o$ como uma nova variável) produz um termo (sob transformação de gauge) que se cancela com o termo problemático. Foi deste modo que o conceito de conexão foi introduzido na física. O próximo teorema mostra como o conceito de conexão resolve o problema de invariância de gauge.

A.6.5. TEOREMA. Seja $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano G-invariante e seja $\mathcal{C}$ o espaço das conexões em $\mathbf{P}$. Defina uma função

$$\mathcal{L}: C(\mathbf{P},V) \times \mathcal{C} \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

por

$$\mathcal{L}(\psi,\omega)(x) = L(p,\psi(p),D^{\omega}\psi_p)$$

onde $x \in M$, $p \in \pi^{-1}(x)$, $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ e $\omega \in \mathcal{C}$.

Então $\mathcal{L}$ não somente é bem definido, mas também é gauge invariante, no sentido que para $f \in GA(\mathbf{P})$

$$\mathcal{L}(f^*\psi,\ f^*\omega) = \mathcal{L}(\psi,\omega) \ .$$

A.6.6. DEFINIÇÃO. Se $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangeano e $\mathcal{L} : C(P,V) \times \mathcal{C} \longrightarrow C^{\infty}(M)$ é bem definida como em (A.6.5) então $\mathcal{L}(\psi,\omega) \in C^{\infty}(M)$ é chamada a *Densidade de Ação do par* (ψ,ω).

A.7. EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA CAMPOS DE PARTÍCULAS.

Aqui formulamos o princípio de mínima (ou estacionária) Ação para campos de partículas sob a influência de um potencial de gauge. Mostra-se então que o campo de partículas obedece este princípio se e somente se satisfaz a equação de Lagrange. A presente formulação coloca as Equações de Lagrange no espaço total, em vez da base. Na Literatura física, as equações de campo são formuladas no espaço-tempo, e elas explicitamente envolvem potenciais de gauge locais. Daí, em geral, as equações não são manifestamente gauge invariantes, muito embora as equações são satisfeitas para todas as escolhas de gauge, se elas são satisfeitas para uma dada escolha. Aqui tomamos a Equação de Lagrange estando no espaço total, onde ela é manifestamente gauge invariante e tem uma aparência mais natural.

Seja $\begin{array}{c} P \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ um fibrado principal com grupo G e seja $G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. Seja h um tensor métrico definido sobre M. Por simplicidade supomos que M é orientável. Portanto existe uma forma volume μ bem definida sobre M associada a $\underline{h}$. Suponha que $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangeano e ω é uma conexão fixa sobre **P**.

Já definimos uma função (A.6.5)

$$\mathcal{L}: C(\mathbf{P},V) \times \mathcal{C} \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

Escrevemos

$$\mathcal{L}^{\omega}: C(\mathbf{P},V) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

onde

$$\mathcal{L}^{\omega}(\psi) \equiv \mathcal{L}(\psi,\omega) \ .$$

Idealmente a ação de $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ seria

$$\int_M \mathcal{L}^{\omega}(\psi)\mu \ .$$

Entretanto, não há garantia que esta integral exista, pois M pode não ser compacto. Para remediar isto faremos as seguintes definições:

A.7.1. DEFINIÇÃO. Usamos a notação $U \subset\subset M$ significando que U é aberto com fecho compacto.

Para $U \subset\subset M$ definimos a Ação de $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ sobre U como sendo

$$\overline{\mathcal{L}}^{\omega}_{U}(\psi) = \int_U \mathcal{L}^{\omega}(\psi)\mu \in \mathbb{R}.$$

A.7.2. DEFINIÇÃO. Para $\psi \in C(\mathbf{P},V)$, definimos o *suporte projetado* de ψ como sendo o fecho do conjunto $\{\pi(p) \in M \,/\, \psi(p) \neq 0\}$.

A.7.3. DEFINIÇÃO. Dizemos que $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ é *estacionário* relativo à $\mathcal{L}^{\omega}$ se para todo $U \subset\subset M$ e também $\sigma \in C(\mathbf{P},V)$ com suporte projetado contido em U, temos:

$$\frac{d}{dt}\,\overline{\mathcal{L}}^{\omega}_{U}(\psi + t\sigma)\Big|_{t=0} = 0 \,.$$

Equivalentemente dizemos que ψ obedece o princípio de Mínima Ação.

Neste parágrafo mostra-se que $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ é estacionário segundo a definição (A.7.3) se e somente se ψ satisfaz a Equação de Lagrange. Para isto é necessário algumas noções adicionais.

A métrica h_x sobre T_xM induz uma métrica $\overline{h}_p$ sobre o subespaço horizontal $H_p \subset \mathbf{T}_p\mathbf{P}$ $(p \in \pi^{-1}(x))$ via o isomorfismo

$$\pi_* : H_p \longrightarrow T_xM \,.$$

ou seja

$$\overline{h}_p(X,Y) = h_x(\pi_*X\,,\,\pi_*Y) \quad \text{para} \quad X,Y \in \mathbf{T}_p\mathbf{P} \,.$$

Do mesmo modo um elemento de volume $\overline{\mu}$ é induzido sobre H_p

pelo emento de volume μ sobre T_xM e daí podemos definir um operador

$$\tilde{*}_p : \Lambda^k(H_p) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(H_p) \qquad n = \dim M$$

tal que se $\tau \in \Lambda^k(T_xM)$

$$\tilde{*}_p(\pi^*\tau) = \pi^*(*_x\tau)$$

onde $\pi^* : \Lambda^k(T_xM) \longrightarrow \Lambda^k(H_p)$ é o retrocesso induzido por $\pi_* : H_p \longrightarrow T_xM$.

A.7.4. DEFINIÇÃO. Definimos $\bar{*} : \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{n-k}(\mathbf{P},V)$ colocando (para $\varphi \in \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$) $(\bar{*}\varphi)_p$ igual a extensão única de $\bar{*}_p(\varphi|_{H_p})$ à uma (n-k)-forma V-valorizada que se anula nos vetores verticais. Em outras palavras, $\bar{*}\varphi$ é a única forma em $\bar{\Lambda}^{n-k}(\mathbf{P},V)$ tal que:

$$(\bar{*}\varphi)H_p = \tilde{*}_p(\varphi|_{H_p}) \ .$$

Vale então o seguinte teorema

A.7.5. TEOREMA. Se $\alpha \in \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ e $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ é uma secção local então:

$$\sigma^*(\bar{*}\alpha) = *\sigma^*\alpha \ .$$

Vamos supor que o espaço vetorial V tem uma métrica $\hat{h}$ (não necessariamente positiva definida, mas ao menos não-degenerada) tal que a representação $G \longrightarrow GL(V)$ é ortogonal relativamente à $\hat{h}$ (ou seja):

$$\hat{h}(g\cdot v\ ,\ g\cdot w) = \hat{h}(v,w)\ ,\quad \forall v,w \in \mathbf{V}\ .$$

Esta suposição é satisfeita em todos os exemplos físicos que consideraremos.

A.7.6. DEFINIÇÃO. Sejam g e h métricas sobre dois espaços vetoriais E e F respectivamente. Definimos então uma métrica (gh) sobre $\Lambda^k(E,F)$ como segue:

se $\{f_1,\ldots,f_m\}$ é uma base de F, podemos escrever

$$\alpha \in \Lambda^k(E,F) \quad \text{como} \quad \alpha = \Sigma\, \alpha^i f_i\ , \text{ onde } \alpha^i \in \Lambda^k(E,\mathbb{R}).$$

Seja $h_{ij} = h(f_i,f_j)$. Então se $\alpha,\beta \in \Lambda^k(E,F)$:

$$(gh)(\alpha,\beta) = \sum_{i,j} h_{ij}\, \tilde{g}(\alpha^i\ ,\ \beta^j)$$

onde $\tilde{g}$ é a métrica induzida por g em $\Lambda^k(E,\mathbb{R}) \equiv \Lambda^k(E)$.

Relativamente a uma base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ de E e com $g_{ij} = g(v_i,v_j)$ e g^{ij} sua matriz inversa, temos para $\alpha,\beta \in \Lambda^k(E)$

$$\tilde{g}(\alpha,\beta) = \frac{1}{k!}\, \Sigma\, g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_k j_k}\, \alpha_{i_1\ldots i_k}\, \beta_{j_1\ldots j_k}$$

A.7.7. DEFINIÇÃO. Como nós temos uma métrica $\bar{h}_p$ sobre H_p e uma métrica $\hat{h}$ sobre V, podemos definir uma métrica $(\bar{h}_p\hat{h})$ sobre o espaço das k-formas V-valorizadas sobre H_p como na definição (A.7.6).

Para $\alpha,\beta \in \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$, definimos

$$(\bar{h}\hat{h})_p(\alpha_p,\beta_p) \equiv (\bar{h}_p\hat{h})(\alpha_p|_{H_p}, \beta_p|_{H_p})$$

Utilizando esta definição temos:

A.7.8. TEOREMA. Existe uma função bem definida

$$(\bar{h}\hat{h}) : \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V) \times \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V) \longrightarrow C^\infty(M)$$

dada por

$$(\bar{h}\hat{h})(\alpha,\beta)(x) = (\bar{h}\hat{h})_p(\alpha_p,\beta_p) \text{ onde } \pi(p) = x \in M .$$

Também existe uma função óbvia pela Definição (A.7.6)

$$(h\hat{h}) : \Lambda^k(M,V) \times \Lambda^k(M,V) \longrightarrow C^\infty(M) .$$

A.7.9. TEOREMA. Seja $\alpha,\beta \in \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ e seja $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ uma secção local. Então temos

$$(h\hat{h})(\sigma^*\alpha,\sigma^*\beta) = (\bar{h}\hat{h})(\alpha,\beta) .$$

A.7.10. DEFINIÇÃO. O *codiferencial covariante*

$$\delta^\omega : \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V) \longrightarrow \bar{\Lambda}^{k-1}(\mathbf{P},V) \quad \text{é definido}$$

para $\varphi \in \bar{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ por:

$$\delta^\omega(\varphi) = -(-1)^h(-1)^{n(k+1)} \;\bar{*}\, D^\omega(\bar{*}\varphi)$$

onde $(-1)^h$ é o sinal do determinante de $h(\partial_i,\partial_j)$ e $n \doteq \dim M$.

Observe que quando M é o espaço-tempo $(-1)^h = -1$ e $n=4$. Daí $\delta^\omega = \bar{*}\, D^\omega \bar{*}$. Neste caso temos o seguinte:

A.7.11. TEOREMA. Seja $U \subset\subset M$ e suponha que $\alpha \in \overline{\Lambda}^k(\mathbf{P},V)$ e $\beta \in \overline{\Lambda}^{k+1}(\mathbf{P},V)$. Assuma que o suporte projetado de α está contido em U. Então:

$$\int_U (\bar{h}\hat{h})(D^\omega\alpha,\beta)\mu = \int_U (\bar{h}\hat{h})(\alpha,\delta^\omega\beta)\mu$$

A.7.12. DEFINIÇÃO. Seja $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano e denotemos $\overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},V)_p$ o espaço das aplicações lineares $T_pP \longrightarrow V$ que anula vetores verticais. Para $(p,v,\theta) \in J(\mathbf{P},V)$ definimos $\nabla_3 L(p,v,\theta) \in \overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},V)_p$ pela equação:

$$(h\hat{h})_p(\nabla_3 L(p,v,\theta),\beta) = \frac{d}{dt} L(p,v,\ \theta + t\beta)\Big|_{t=0} .$$

Para $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ definimos uma 1-forma V-valorizada $\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}$ sobre P por:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}\right]_p = \nabla_3 L(p,\psi(p),D^\omega\psi_p) .$$

O seguinte teorema garante que $\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}$ é equivariante.

A.7.13. TEOREMA. $\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} \in \overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},V)$.

A.7.14. DEFINIÇÃO. Para $(p,v,\theta) \in J(\mathbf{P},V)$ definimos $\nabla_2 L(p,v,\theta) \in V$ pela equação:

$$\hat{h}(\nabla_2 L(p,v,\theta),w) = \frac{d}{dt} L(p,v+tw,\theta)\Big|_{t=0} .$$

Se $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ definimos uma função V-valorizada $\frac{\partial L}{\partial \psi}$ sobre P por:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi}(p) = \nabla_2(p,\psi(p),\, D^{\omega}\psi_p) \; .$$

A.7.15. TEOREMA. Temos que $\frac{\partial L}{\partial \psi} \in C(\mathbf{P},V) \cong \overline{\Lambda}^{o}(P,V)$.

A.7.16. TEOREMA. Suponha que $U \subset \subset M$ e seja $\tau \in C(\mathbf{P},V)$ tendo suporte projetado em U. Então em $t = 0$:

$$\frac{d}{dt}\, \mathcal{L}^{\omega}_{U}(\psi + t\tau)\Big|_{t=0} \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{d}{dt}\int_U \mathcal{L}^{\omega}(\psi + t\tau)\mu =$$

$$= \int_U \hat{h}(\delta^{\omega} \frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}\, ,\tau)\mu$$

A consequência imediata do teorema (A.7.16) é:

A.7.17. TEOREMA. (Equação de Lagrange).

O campo de partículas $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ é estacionário (para um Lagrangeano $L : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma conexão ω fixada sobre $\mathbf{P}$) se e somente se vale a Equação de Lagrange:

$$\delta^{\omega}(\frac{\partial L}{\partial (D^{\omega}\psi)}) + \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \; .$$

A.7.18. EXEMPLO. (Eletrodinâmica de spin zero).

Seja $\begin{matrix} P \\ \downarrow \pi \\ M \end{matrix}$ um fibrado principal com grupo $U(1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$ e uma conexão fixa ω. Vamos supor que M é um espaço-tempo com métrica h. Seja $V = \mathbb{C}$ (considerado como um espaço vetorial 2-dimensional sobre $\mathbb{R}$) e suponha que

$U(1) \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ é a representação dada por:

$$e^{i\theta} \cdot z = e^{i\theta} z \text{ (multiplicação complexa).}$$

A álgebra de Lie de $U(1)$ é o espaço

$$\hat{U}(1) = \{i\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$$

Como $\frac{d}{dt} e^{ti\theta} \cdot z \Big|_{t=0} = i\theta z$

vemos que $\hat{U}(1)$ opera sobre $\mathbb{C}$ via multiplicação complexa. Seja $\hat{h}$ a métrica $\mathbb{R}$-valorizada sobre $\mathbb{C}$ dada por:

$$\hat{h}(z,w) = \frac{1}{2}(z\overline{w} + w\overline{z})$$

(ou seja, o produto interno euclidiano sobre $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$).

Vimos que h induz uma métrica $\overline{h}_p$ sobre os subespaços horizontais

$$H_p = \{X \in T_pP : \omega(X) = 0\} .$$

Definimos o Lagrangeano

$$L : J(P,V) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$L(p,z,\Theta) = \frac{1}{2}\,(\overline{h}\hat{h})_p(\Theta^H,\Theta^H) - \frac{1}{2}\,m^2 z\overline{z}$$

Se $E_1,\ldots,E_4$ é uma base de H_p e $\Theta_i \equiv \Theta(E_i)$ e $\overline{h}_{ij} = \overline{h}_p(E_i,E_j)$, então:

$$(h\hat{h})_p(\Theta^H,\Theta^H) = \frac{1}{2}\,\overline{h}^{\,ij}\,(\Theta_i\overline{\Theta}_j + \Theta_j\overline{\Theta}_i)$$

Para qualquer $\Theta' \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},V)_p$

$$(\bar{h}\hat{h})_p(\nabla_3 L(p,z,\Theta),\Theta') = \frac{d}{dt} L(p,z,\Theta + t\Theta') = (\bar{h}\hat{h})_p(\Theta^H,\Theta')$$

donde

$$\nabla_3 L(p,z,\Theta) = \Theta^H .$$

Semelhantemente

$$\nabla_2 L(p,z,\Theta) = -m^2 z .$$

Daí para $\psi \in C(\mathbf{P},V) \equiv \{\psi : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi(pe^{i\theta}) = e^{-i\theta}\psi(p)\}$

$$\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} = D^\omega\psi \qquad e \qquad \frac{\partial L}{\partial\psi} = -m^2\psi .$$

Daí a Equação de Lagrange fica:

$$\boxed{\delta^\omega D^\omega\psi - m^2\psi = 0}$$

Embora esta equação seja elegante, os físicos costumam pensar em ψ como uma função definida sobre a base M. Isto requer uma secção local $\sigma : U \longrightarrow \mathbf{P}$ (ou seja, uma escolha de gauge) para trazer a equação para $U \subset M$.

Escrevemos então

$$\psi' = \psi \circ \sigma : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

e

$$-iA = \sigma^*\omega .$$

Note que como ω toma valores nos imaginários puros, então A é uma 1-forma real sobre U.

$\underline{\underline{A}}$ pode ser identificado como o "4-vetor potencial" a menos de uma constante multiplicativa dependente da carga.

$$D^{\omega}\psi = d\psi + \omega \dot{\wedge} \psi$$

$$\sigma^{*}D^{\omega}\psi = \sigma^{*}(d\psi) + \sigma^{*}\omega \wedge \sigma^{*}\psi =$$

$$= d\sigma^{*}\psi + \sigma^{*}\omega \wedge \sigma^{*}\psi = d\psi' - iA\psi'$$

Daí usando o Teorema (A.7.5)

$$0 = \sigma^{*}(\delta^{\omega}D^{\omega}\psi - m^{2}\psi) = \sigma^{*}(\bar{*}\, D^{\omega}\, \bar{*}\, D^{\omega}\psi - m^{2}\psi) =$$

(Teor. A.5.5)

$$= *\, \sigma^{*}(D^{\omega}\, \bar{*}\, D^{\omega}\psi) - m^{2}\sigma^{*}\psi =$$

$$= *\, \sigma^{*}(d(\bar{*}\, D^{\omega}\psi) + \omega \dot{\wedge} \bar{*}\, D^{\omega}\psi) - m^{2}\sigma^{*}\psi =$$

$$= *\, \sigma^{*}(d(\bar{*}\, D^{\omega}\psi)) + *(\sigma^{*}\omega \wedge *\, \sigma^{*}(D^{\omega}\psi)) - m^{2}\sigma^{*}\psi =$$

$$= *\, \sigma^{*}(d\, \bar{*}\, (d\psi + \omega \dot{\wedge} \psi)) + *\, (-iA) \wedge *(d\psi' - iA\psi')) - m^{2}\psi'$$

$$= *\, (d * (d\psi' - iA\psi')) + *\, (-iA \wedge * (d\psi' - iA\psi')) - m^{2}\psi' =$$

$$= \delta d\psi' - i\delta(A\psi') - i * (A \wedge * d\psi') - i * (A \wedge (* A\psi')) - m^{2}\psi'$$

ou

$$\boxed{\Box\psi' - i\,\mathrm{div}(A\psi') - i\tilde{h}(A, d\psi') - \tilde{h}(A,A)\psi' - m^{2}\psi' = 0}$$

Esta é a equação para a função de onda (em primeira quantização) de uma partícula carregada de spin zero (por exemplo, um meson π^-) de massa m sob a influência de um potencial eletromagnético A (Ver por exemplo, Schiff [1968], Quantum Mechanics, pg. 468, para o caso especial onde M é o espaço de Minkowski).

Agora junto com a equação homogênea de Maxwell $d^2A = 0$, há a equação não-homogênea de Maxwell

$$\delta(-dA) = j'$$

onde

$$j' = \hat{h}(d\psi', i\psi') - A\psi'\psi' =$$

$$= -i(\psi' d\bar{\psi}' - d\psi'\bar{\psi}') - A\psi'\psi'$$

é a corrente.

Esta equação é deduzida de um princípio de mínima Ação com respeito a variações em ω.

A.8. EQUAÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA DO CAMPO

Dado um campo de partículas e um potencial de gauge ao qual ele responde, definiremos uma 1-forma Lie-valorizada sobre o espaço total. Esta forma é chamada a *corrente*. Damos a seguir várias caracterizações equivalentes da corrente.

Para definir a corrente $J \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P}, \mathcal{G})$, nós precisamos de uma métrica $\hat{h}$ sobre V tal que $G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação ortogonal, e precisamos de uma métrica k sobre $\mathcal{G}$ tal que:

$$Ad : G \longrightarrow GL(\mathcal{G}) \quad \text{também seja ortogonal.}$$

Então temos:

$$(\bar{h}k) : \bar{\Lambda}^j(\mathbf{P},G) \in \bar{\Lambda}^j(\mathbf{P},G) \longrightarrow C^\infty(M)$$

como um caso especial do Teorema (A.7.8).

A.8.1. DEFINIÇÃO. Para $\omega \in C$, $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ e $p \in \mathbf{P}$, a corrente $J \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$ é definida em p, pela equação

$$(\bar{h}\hat{h})_p\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}, \tau\cdot\psi\right) = (\bar{h}\,k)_p(J_p,\tau)$$

onde se requer que seja válida para todo $\tau \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$. Observe que J_p existe e é única porque $(\bar{h}k)_p$ é não-degenerada. Esta definição mostra que $J \in \Lambda^1(P,G)$. Para garantir que $J \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$ falta mostrar que J é equivariante e horizontal. Isto é o que diz o próximo teorema.

A.8.2. TEOREMA. $J \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$.

A corrente pode ser expandida na base da Álgebra de Lie e temos então a seguinte caracterização.

A.8.3. TEOREMA. Seja $\{e_1,\ldots,e_r\}$ uma base para a Álgebra de Lie G e suponha que $(k^{\alpha\beta})$ é a inversa da matriz $(k_{\alpha\beta})$ onde $k_{\alpha\beta} = k(e_\alpha,e_\beta)$. Então:

$$J(X) = k^{\alpha\beta}\hat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}(X), e_\alpha \cdot \psi\right)e_\beta .$$

O próximo teorema afirma que a corrente é a primeira variação da Ação com respeito ao potencial de gauge.

A.8.4. TEOREMA. Seja $\mathcal{L} : C(\mathbf{P},V) \times C \longrightarrow C^\infty(M)$ como definida em (A.6.5). Seja $J^\omega(\psi) \in \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$ a corrente associada ao par (ψ,ω).

Então para todo $\tau \in T_\omega C \cong \bar{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$, temos:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\psi,\omega+t\tau)\Big|_{t=0} = (\bar{h}k)(J^\omega(\psi),\tau)$$

A.8.5. TEOREMA. (*Conservação da Carga*).

Seja $h : J(\mathbf{P},V) \longrightarrow \mathbb{R}$ um lagrangeano G-invariante. Para $\omega \in C$ fixa, suponha que $\psi \in C(\mathbf{P},V)$ é estacionária relativamente à L no sentido da definição (A.7.3). Então a corrente $J^\omega(\psi)$ obedece a "equação da continuidade generalizada"

$$\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0 .$$

∎

A.8.6. TEOREMA. Se não supomos que ψ é estacionário em (A.8.5) então ainda temos que:

$$k^{\alpha\beta}\,\hat{h}(\delta^\omega[\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}] + \frac{\partial L}{\partial\psi},\ e_\alpha\cdot\psi)e_\beta = \delta^\omega J^\omega(\psi)$$

onde $\{e_1,\ldots,e_r\}$ é uma base para G e $(k^{\alpha\beta})$ é a matriz inversa de $(k_{\alpha\beta})$, $k_{\alpha\beta} = k(e_\alpha,e_\beta)$.

∎

É fácil ver que se ψ é estacionário, então ele satisfaz a Equação de Lagrange e daí (A.8.6) reduz-se a (A.8.5).

Vemos pelo Teorema (A.8.5) que se a densidade de ação é gauge-invariante então a corrente é covariantemente conservada independentemente da Equação não-homogênea do Campo $\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0$.

No entanto se a densidade de ação não é gauge invariante, nós podemos usar a equação não-homogênea de campo para obter a conservação da corrente. Para isto é necessário adicionar a densidade de ação do campo de partículas uma função gauge-invariante sobre a base, construída a partir do potencial de gauge. Esta função é chamada *densidade de Auto-ação* do potencial *de gauge*, porque ela não envolve nenhum campo de partículas. A densidade de *Ação total* é portanto a soma da densidade de Ação do campo de partículas e a densidade de Auto-ação. Vamos obter então que o campo de partículas ψ e o potencial de gauge ω são estacionários para a *Ação Total* se e somente se valem a Equação de Lagrange e a equação não-homogênea do campo.

Classicamente o novo termo a ser adicionado à densidade de ação $\mathcal{L}(\psi,\omega)$ é $\frac{1}{2}(\|\vec{E}\|^2 - \|\vec{B}\|^2)$ ou $-\frac{1}{2}\tilde{g}(F,F)$ onde F é o tensor (2-forma) eletromagnético e $\tilde{g}$ é a métrica sobre 2-formas no espaço de Minkowski. A próxima definição é a generalização natural.

A.8.7. DEFINIÇÃO. Suponha que existe uma métrica k sobre G tal que $Ad : G \longrightarrow GL(G)$ é ortogonal.

Defina

$$S : \mathcal{C} \longrightarrow C^{\infty}(M) \quad \text{por}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2}(\bar{h}k)(\Omega^{\omega},\Omega^{\omega}) \ .$$

$S(\omega)$ é chamada de *Densidade de Auto-Ação* de ω. Então temos:

$$(\mathcal{L} + S) : C(P,V) \times \mathcal{C} \longrightarrow C^{\infty}(M) \quad \text{onde}$$

$$(\mathcal{L} + S)(\psi,\omega) = \mathcal{L}(\psi,\omega) + S(\omega)$$

é a Densidade de Ação Combinada (ou total) do par (ψ,ω).

A.8.8. DEFINIÇÃO. Dizemos que o par (ψ,ω) é estacionário em relação a $(\mathcal{L} + S)$ se, para todos os conjuntos abertos $U \subset M$ com fecho compacto e $\sigma \in C(\mathbf{P},V)$ e $\tau \in \overline{\Lambda}^1(\mathbf{P},G)$ com suportes projetados em U, temos:

$$\frac{d}{dt}\int_U (\mathcal{L} + S)(\psi + t\sigma, \omega + t\tau)_\mu = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \ .$$

A.8.9. TEOREMA. O par (ψ,ω) é estacionário em relação a $(\mathcal{L} + S)$ se e somente se as condições (A) e (B) valem:

(A) $\delta^\omega\left(\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}\right) + \dfrac{\partial L}{\partial\psi} = 0$ (Equação de Lagrange)

(B) $\delta^\omega\Omega^\omega = J^\omega(\psi)$ (Equação não-homogênea do campo).

Uma consequência deste teorema é a conservação corrente (Teorema (A.8.11)).

A.8.10. LEMA. $\delta^\omega(\delta^\omega\Omega^\omega) = 0$.

De (A.8.9B) e (A.8.10) temos imediatamente:

A.8.11. TEOREMA. $\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0$.

OBSERVAÇÃO 1. No Teorema (A.8.9) não supomos que a Lagrangeana $L: J(P,V) \longrightarrow \mathbb{R}$ é G-invariante ou que $\mathcal{L}: C(\mathbf{P},V) \times C \longrightarrow C^\infty(M)$ é gauge-invariante.

No entanto para obter a Equação não-homogênea do campo e consequentemente a Conservação da Corrente (A.8.11) foi preciso postular que o par (ψ,ω) é estacionário para $(\mathcal{L} + S)$.

Por outro lado o Teorema (A.8.5) postula um Lagrangeano L G-invariante, mas a conexão $\omega \in C$ é arbitrária e obtém-se também a conservação da carga (ou corrente).

OBSERVAÇÃO 2. No caso que a corrente é *zero* (ou seja, um potencial livre de campos de partículas), então a equação não-homogênea de campo é de fato homogêna, ou seja

$$\delta^{\omega}\Omega^{\omega} = 0 .$$

Esta é chamada *Equação de Yang-Mills*.

Se o grupo é não-abeliano, a equação de Yang-Mills e não linear no potencial de gauge, tal como a Equação Homogênea de Campo (ou Identidade de Bianchi (A.3.8)). Entretanto diferentemente da Identidade de Bianchi, que vale para qualquer potencial de gauge, a equação de Yang-Mills vale somente se o potencial de gauge é estacionário para a Auto-Ação.

A.8.12. (*Equação Não-homogênea de Campo no Caso da Eletrodinâmica de Spin-Zero*).

Vamos justificar aqui a equação não-homogênea de Maxwell

$$\delta(-dA) = j'$$

vista no exemplo (A.7.18).

A Álgebra de Lie $\widehat{U(1)}$ é gerada por $i = \sqrt{-1}$ e escolhemos a métrica k sobre $\widehat{U(1)}$ tal que $k(i,i) = 1$.

De acordo com (A.8.3), a corrente é,

$$J = \hat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^{\omega}\psi)}, i\psi\right)i .$$

Em (A.7.18) encontramos que $\dfrac{\partial L}{\partial(D^{\omega}\psi)} = D^{\omega}\psi$ e então:

$$J = \hat{h}(D^{\omega}\psi\ , i\psi)i = \hat{h}(d\psi + \omega\cdot\psi\ , i\psi)i$$

Aplicando uma secção local σ, obtemos

$$\sigma^{*}J = \hat{h}(d\psi' - iA\psi'\ , i\psi')i = \hat{h}(d\psi'\ , i\psi')i - A\psi'\overline{\psi}'k(i,i)i$$

$$\boxed{k(i,i) = 1}$$

$$= \hat{h}(d\psi'\ , i\psi')i - A\psi'\overline{\psi}'i = i\underbrace{[h(d\psi'\ , i\psi')i - A\psi'\overline{\psi}']}_{j'} = ij'$$

ou seja

$$\sigma^{*}J = ij' \ .$$

Agora no eletromagnestismo, o grupo sendo abeliano $(U(1))$ $\Omega^{\omega} = d\omega$.

Como a base é o espaço de Minkowski (flat) então:

$$\delta^{\omega} = \delta \quad \text{pois} \quad \overline{*} = * \quad \text{e} \quad D^{\omega} \equiv d\ .$$

Daí

$$\sigma^{*}(\delta^{\omega}\Omega^{\omega}) = \sigma^{*}(\delta d\omega) = \delta d\sigma^{*}\omega =$$

$$= \delta d(-iA) = i\delta d(-A)\ .$$

Logo a equação inhomogênea $\delta^{\omega}\Omega^{\omega} = J$ escrita na base através de uma escolha de gauge σ é:

$$i\delta d(-A) = ij'$$

ou seja

$$\boxed{\delta d(-A) = j'}$$

APÊNDICE B

FORMALISMO DE CLIFFORD

B.1. ALGUMAS ÁLGEBRAS E SUAS RELAÇÕES

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Vamos nesta secção apresentar várias álgebras, que serão úteis para a derivação das equações de movimento de partículas carregadas elétricas e magnéticas no campo de monopolos magnéticos e cargas elétricas.

(1) A *Álgebra Tensorial* $T(V)$ *sobre* $\mathbb{R}$ é o $\mathbb{R}$-espaço vetorial da soma direta das potências $\otimes^p V$ com o produto tensorial usual $\otimes$ de seus elementos. Temos então:

$$T(V) = \left(\bigoplus_{p=0}^{\infty} \otimes^p V \, , \otimes \right) \tag{B.1.1}$$

$T(V)$ é a $\mathbb{Z}$-graduada: $(\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V) \subset \otimes^{p+q} V$ e de dimensão infinita se $n \geq 1$. Como V é de dimensão finita podemos identificar V com sua imagem $\otimes^1 V$ em $T(V)$ e também definimos $\otimes^0 V = \mathbb{R}$.

Sobre $T(V)$ existe dois importantes morfismos involutivos (ambos sendo automorfismos lineares de $\left(\bigoplus_{p=0}^{\infty} \otimes^p V \right)$):

a) O *automorfismo principal* α *com*:

$$\begin{cases} \alpha(A \otimes B) = \alpha(A) \otimes \alpha(B) & \text{(B.1.2)} \\ \alpha(A) = A \text{ se } A \in \otimes^0 V; \; \alpha(A) = -A, \text{ se } A \in \otimes^1 V & \text{(B.1.3)} \end{cases}$$

b) O *antiautomorfismo principal (ou reversão)* β, aplicando $T(V)$ na sua álgebra oposta:

$$\begin{cases} \beta(A \otimes B) = \beta(B) \otimes \beta(A) & \text{(B.1.4)} \\ \beta(A) = A \quad \text{se} \quad A \in \otimes^{o} V + \otimes^{1} V & \text{(B.1.5)} \end{cases}$$

(2) A *Álgebra Exterior* $\Lambda(V)$ *sobre* o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V pode ser definida como a álgebra quociente $T(V)/J$ de $T(V)$ pelo ideal bilateral $J \subset T(V)$ gerado pelos elementos da forma $a \otimes a$, onde $a \in V$.

Como usual, denotaremos o produto exterior pelo sinal $\wedge$. Como J é homogêneo na $\mathbb{Z}$-graduação de $T(V)$ então também $\Lambda(V)$ é $\mathbb{Z}$-graduada: $\Lambda(V) = \oplus\ \Lambda^{p}(V)$, com $\Lambda^{p}(V) \wedge \Lambda^{q}(V) \subset \Lambda^{p+q}(V)$. Aqui também identificamos $\Lambda^{1}(V) = V$ e $\Lambda^{o}(V) = \mathbb{R}$. Os subespaços $\Lambda^{p}(V)$ são de dimensão $\binom{n}{p}$ e $\Lambda(V)$ tem dimensão 2^{n}. Para elementos $A \in \Lambda^{p}(V)$ e $B \in \Lambda^{q}(V)$, seu produto exterior é comutativo ou anticomutativo:

$$A \wedge B = (-1)^{pq}\, B \wedge A\,. \tag{B.1.6}$$

Os morfismos α e β de $T(V)$ passam ao quociente $\Lambda(V)$. Denotando-os com os mesmos símbolos α e β, temos:

$$\alpha(A \wedge B) = \alpha(A) \wedge \alpha(B) \tag{B.1.7}$$

$$\beta(A \wedge B) = \beta(B) \wedge \beta(A) \tag{B.1.8}$$

Se $A \in \Lambda^{p}(V)$, então $\alpha(A) = (-1)^{p} A$ e $\beta(A) = (-1)^{\binom{p}{2}} A$ (B.1.9)

(3) Como *Álgebra de Grassmann* $\Lambda(V,Q)$, denotaremos o par $(\Lambda(V),Q)$ formado por uma álgebra exterior $\Lambda(V)$ junto com um produto interno $(\ ,\ )_Q : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ induzido em $\Lambda(V)$ pela forma quadrática Q sobre V como segue:

i) Se $A \in \Lambda^p(V)$ e $B \in \Lambda^q(V)$ com $p \neq q$ então $(A,B)_Q := 0$.

ii) Se $A = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ e $B = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_p$ com $a_i, b_i \in \Lambda^1(V)$, então $(A,B)_Q := \det(\mathbb{B}(a_i,b_j))$, onde $\mathbb{B}$ é a forma bilinear associada à Q por:

$$2\mathbb{B}(x,y) := Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \tag{B.1.10}$$

iii) Extende-se para o caso geral de $A,B \in \Lambda(V)$ por linearidade.

(4) A *Álgebra de Clifford* $C(V,Q)$ do espaço vetorial real V com forma quadrática Q é definido como a álgebra quociente $T(V)/J'$, onde o ideal bilaterial J' é gerado pelos elementos da forma $a \otimes a - Q(a).1$, com $a \in V$. Como antes, podemos identificar V com sua imagem em $C(V,Q)$. Denotando o produto de Clifford por justaposição para $a,b \in V$ temos:

$$ab + ba = 2\mathbb{B}(a,b) \tag{B.1.11}$$

com a forma bilinear $\mathbb{B}$ como definida em (B.1.10).

O ideal J', sendo inhomogêneo de grau par em $T(V)$, induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação na Álgebra de Clifford, $C(V,Q) = C^+ + C^-$, onde C^+ é a imagem dos elementos de grau par em $T(V)$. Como $\alpha(J') = \beta(J') = J'$, os morfismos α e β induzem morfismos (indicados com os mesmos símbolos) em $C(V,Q)$.

$$\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B) \tag{B.1.12}$$

$$\beta(AB) = \beta(B)\beta(A) \tag{B.1.13}$$

$$\begin{cases} \alpha(a) = \beta(a) = a \quad , & \text{se} \quad a \in \mathbb{R} \\ -\alpha(a) = \beta(a) = a \ , & \text{se} \quad a \in V \end{cases} \tag{B.1.14}$$

Em particular, para $A \in C^{+}$, $\alpha(A) = A$ e para $A \in C^{-}$, $\alpha(A) = -A$.

B.2. ESTRUTURA DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Nesta secção estudamos a estrutura das Álgebras de Clifford e suas relações com as Álgebras de Grassmann.

Primeiro, para qualquer elemento X do espaço vetorial dual V^*, definimos a *contração* de um elemento de $T(V)$ com $X \in V^*$ como a aplicação bilinear $V^* \times T(V) \longrightarrow T(V)$ de grau -1 com:

i) $X \lrcorner 1 = 0$

ii) $X \lrcorner a = X(A)$, se $a \in V \subset T(V)$

iii) $X \lrcorner (A \otimes B) = (X \lrcorner A) \otimes B + \alpha(A) \otimes (X \lrcorner B)$

Em particular, $X \lrcorner X \lrcorner$ anulará qualquer elemento de $T(V)$.

Como $X \lrcorner J = J$ e $X \lrcorner J' = J'$ a contração também passa aos quocientes $\Lambda(V)$, $C(V,Q)$ e $\Lambda(V,Q)$ e temos:

Se $A,B \in \Lambda(V)$ ou $\Lambda(V,Q)$

$$X \lrcorner (A \wedge B) = (X \lrcorner A) \wedge B + \alpha(A) \wedge (X \lrcorner B) \tag{B.2.1}$$

e

$$X \lrcorner (AB) = (X \lrcorner A)B + \alpha(A)(X \lrcorner B), \text{ se } A,B \in C(V,Q) \tag{B.2.2}$$

com

$$\begin{cases} X \lrcorner a = 0 \quad \text{se} \quad a \in \mathbb{R} \subset \Lambda(V), \Lambda(V,Q), C(V,Q) \\ \\ X \lrcorner a = X(a) \quad \text{se} \quad a \in V \subset \Lambda(V), \Lambda(V,Q), C(V,Q) \end{cases} \tag{B.2.3}$$

Agora, dado $a \in V$, definimos o Q-adjunto de $a \in V \subset T(V)$, $\Lambda(V)$, $\Lambda(V,Q)$, $C(V,Q)$ como o elemento $\tilde{a} \in V^*$ tal que:

$$\tilde{a} \lrcorner b = \mathbb{B}(a,b) \quad , \quad b \in V \tag{B.2.4}$$

Para qualquer $a \in V \subset \Lambda(V,Q)$ e $B \in \Lambda(V,Q)$, definimos seu produto $a \nabla B$ como:

$$a \nabla B = a \wedge B + \tilde{a} \lrcorner B \tag{B.2.5}$$

Então:

$$a \nabla a = Q(a) \cdot 1 \tag{B.2.6}$$

Pelo teorema sobre universalidade das Álgebras de Clifford [30], a ∇-Álgebra gerada por esta relação sobre os elementos $\Lambda(V,Q)$ é a Álgebra de Clifford $C(V,Q)$ com o produto de Clifford (indicado por justaposição) substituído por ∇.

Reciprocamente, se para a Álgebra de Clifford $C(V,Q)$ definimos o Δ-produto de $a \in V \subset C(V,Q)$ com $B \in C(V,Q)$ como:

$$a \Delta B := aB - \tilde{a} \lrcorner B \tag{B.2.7}$$

obtemos

$$a \wedge a = 0 \qquad (B.2.8)$$

que é a relação definindo a Álgebra Exterior. Como na Álgebra de Clifford $aa = Q(a)$, esta álgebra exterior pode ser feita uma Álgebra de Grassmann.

Esta correspondência das Álgebras de Clifford e Grassmann não depende de Q ser ou não degenerada. Em particular se $Q = 0$, o Q-adjunto anula-se e $C(V,0) = \Lambda(V,0) = \Lambda(V)$.

Outra observação importante é que a Álgebra de Grassmann $\Lambda(V,Q)$ e a de Clifford $C(V,Q)$ são isomorfas como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Daí, os geradores de $\Lambda(V,Q)$ são geradores de $C(V,Q)$ e vice-versa.

Portanto, se $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, então o conjunto dos p-vetores, $p = 0,1,2,\ldots,n$

$$\{e_o = \lambda \in \mathbb{R},\ e_1, e_2, \ldots, e_n,\ e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3, \ldots, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \ldots,$$
$$, \ldots, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\}$$

geram $\Lambda(V,Q)$ e também $C(V,Q)$. Ambas têm dimensão 2^n. Qualquer elemento $A \in \Lambda(V,Q)$ ou $C(V,Q)$ pode ser escrito como

$$A = \sum_{p=0}^{n} A_p \text{ , onde } A_p \text{ é um p-vetor, ou seja } A_p \in \Lambda^p(V).$$

Temos portanto que, sobre a soma direta $\oplus \Lambda^p(V)$ dos espaços lineares $\Lambda^p(V)$ nós não somente podemos impor a estrutura de uma Álgebra de Grassmann por meio de $\wedge$ e Q, mas também a estrutura de uma Álgebra de Clifford e cada um dos dois produtos pode ser reduzido no outro como visto acima.

Para elementos gerais, os produtos de Clifford e Exterior são relacionados como segue:

$$AB = \sum_p \frac{(-1)^{\binom{p}{2}}}{p!} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} \alpha^p (e^*_{i_1} \lrcorner \ldots e^*_{i_p} \lrcorner A) \wedge$$

$$\wedge (e^*_{j_1} \lrcorner \ldots e^*_{j_p} \lrcorner B) \qquad (B.2.9)$$

$$A \wedge B = \sum_p \frac{(-1)^{\binom{p}{2}}}{p!} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} (e^*_{i_1} \lrcorner \ldots e^*_{i_p} \lrcorner \alpha^p(A))(e^*_{j_1} \lrcorner \ldots e^*_{j_p} \lrcorner B) \qquad (B.2.10)$$

onde $g^{ik} := \mathbb{B}(e^i, e^k)$ e e^*_i é a base dual de qualquer base $e^j \in \Lambda^1(V)$, e o produto entre os elementos entre parêntesis em (B.2.10) é o produto de Clifford.

As fórmulas (B.2.9) e (B.2.10) para os casos especiais em que a ou $b \in \Lambda^1(V)$ ficam:

$$a \in \Lambda^1(V) \text{ então } a\psi = a \wedge \psi + \tilde{a} \lrcorner \psi \qquad (B.2.11)$$

$$b \in \Lambda^1(V) \text{ então } \phi b = b \wedge \alpha(\phi) - \tilde{b} \lrcorner \alpha(\phi) \qquad (B.2.12)$$

B.3. ALGUNS FIBRADOS VETORIAIS RELACIONADOS COM O FIBRADO COTANGENTE. O OPERADOR DE DIRAC.

Como as estruturas algébricas consideradas nos parágrafos anteriores possuem uma estrutura $\mathbb{R}$-linear herdada do espaço vetorial V, para sua generalização a variedades é necessário usar o formalismo de Fibrados Vetoriais (com as estruturas algébricas adicionais). Aqui M será uma variedade C^∞-diferenciável e de dimensão n. Também os fibrados construídos, as secções transversais e aplicações são de classe C^{∞}. τ_M denota o Fibrado Tangente associado à M.

1. O fibrado básico para nossas construções será o *fibrado cotangente* τ_M^* da variedade M. Secções transversais $c \in \mathrm{Sec}(\tau_M^*)$ são chamadas 1-formas.

2. Dada uma secção transversal $g \in \mathrm{Sec}(\tau_M \times \tau_M)$ tal que em cada fibra $\pi^{-1}(x)$, g_x é uma forma quadrática sobre o espaço cotangente T_x^*M e então o par (τ_M^*, g) denotará um Fibrado Vetorial Riemanniano (ou Lorentziano).

3. O *Fibrado de Cartan*, denotado por $\Lambda\tau_M^*$ é o fibrado vetorial cujas fibras são Álgebras Exteriores ΛT_x^*M sobre $V = T_x^* M$ das formas diferenciais sobre M.

Como é bem conhecido, sobre um *Fibrado de Cartan* a *derivada exterior* pode ser univocamente caracterizada pelas seguintes condições:

i) $d(A + B) = dA + dB$

ii) $d(A \wedge B) = dA \wedge B + \alpha(A) \wedge dB$

iii) $d^2 = 0$

iv) $X \lrcorner (df) = X(f)$

para quaisquer $A,B \in \mathrm{Sec}\, \Lambda\tau_M^*$, $f \in \Lambda^0 \tau_M^*$ e $X \in \mathrm{Sec}\, \tau_M$.

Em particular d é homogêneo de grau $+1$ na $\mathbb{Z}$-graduação do anel de secções transversais de $\Lambda\tau_M^* = (\oplus \Lambda^p \tau_M^*, \wedge)$.

4. O par $(\Lambda\tau^*_M, g)$ onde cada fibra $(\Lambda(T^*_x M), g_x)$ é uma *Álgebra de Grassmann*, chamaremos de *Fibrado de Hodge* sobre M com métrica g.

Se para qualquer $x \in M$, $Q := g_x$ é não-degenerada, teremos além de $\underline{d}$, uma *divergência* δ, que é o operador formalmente g-adjunto de $\underline{d}$ definido (Vide Westenholz [31]):

$$\delta\omega_p = (-1)^p \star^{-1} d \star \omega_p \quad \text{com} \quad \omega_p \in \Lambda^p \tau^*_M \tag{B.3.1}$$

onde o operador $\star$ ("Estrela de Hodge") (+) é definido como o isomorfismo linear:

$$\star : \Lambda^p \tau^*_M \longrightarrow \Lambda^{n-p} \tau^*_M$$

$$\psi \longrightarrow \star\, \psi$$

dado por

$$\varphi \wedge \star\, \psi = (\varphi \cdot \psi)\, \tau \tag{B.3.2}$$

para todas as p-formas $\varphi \in \text{Sec}\, \Lambda^p \tau^*_M$, onde τ é *a n-forma de volume*, ou seja:

$$\tau = \frac{1}{n!}\, \tau_{i_1 \ldots i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{B.3.3}$$

se $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$ é uma base ortonormal então τ pode ser escrita como: $\tau = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$.

Por causa que $d^2 = \delta^2 = 0$, o Laplaciano para formas

(+) O operador $\star^{-1}$ [illegible] inido por:

$\star^{-}$ [illegible] $^{(n-p)}\, (-1)^g \star \omega_p$, com $\omega_p \in \Lambda^p \tau^* M$.

diferenciais $\Box := d\delta + \delta d$ pode ser escrito também como um quadrado

$$\Box = (d + \delta)^2 \qquad (B.3.4)$$

5. Um fibrado vetorial é chamado um *Fibrado de Clifford* $C(\tau_M^*, g)$ se cada fibra é uma Álgebra de Clifford $C(T_x^*M, g_x)$.

Se g é não-degenerada, existe um particular operador diferencial $\not{\partial}$ chamado o *Operador de Dirac*, ímpar na $\mathbb{Z}_2$-graduação de $C(T_x^*M, g_x)$ definido como segue:

Para qualquer $t^* \in \text{Sec}\ \tau_M^* \subset \text{Sec}\ C(\tau_M^*, g)$ e qualquer $t \in \text{Sec}\ \tau_M$, considere a aplicação tensorial bilinear de tipo (1,1) dada por:

$$\psi \longrightarrow t^* \nabla_t \psi \qquad (B.3.5)$$

onde ψ é qualquer elemento de $\text{Sec}\ C(\tau_M^*, g)$ e ∇_t é a derivada covariante de ψ, considerada como elemento do fibrado tensorial, na direção de t (+). Então $\not{\partial}$ é definido como o traço tensorial desta aplicação:

$$\not{\partial} := T_r(t^* \nabla_t) \qquad (B.3.6)$$

Em termos de uma base local $\{e^i\}$ de 1-formas e sua base dual $\{e_j^*\}$ de campos vetoriais, nós podemos também escrever

---

(+) Por causa que $\nabla_t J' \subset J'$, ∇_t passa ao fibrado quociente $C(\tau_M^*, g)$.

$$\not{\partial} = e^{i}\nabla_{e_i^*} \; . \tag{B.3.7}$$

Em particular tomando uma base coordenada local $\{dx^\mu\}$, temos:

$$\not{\partial} = dx^\mu \nabla_{\partial_\mu} \tag{B.3.8}$$

A relação com o Operador de Dirac da Relatividade Especial é como segue. Em um espaço-tempo chato, conexo e simplesmente conexo existe uma base coordenada global $\{dx^\mu\}$ ortonormalizada com respeito a forma bilinear de Lorentz usual. Para $n=4$ existe uma representação $dx^\mu \longrightarrow \gamma^\mu$ do Fibrado de Clifford pelas matrizes complexas 4×4 e então obtemos o Operador de Dirac na forma usual

$$\gamma^\mu \partial_\mu \tag{B.3.9}$$

mas agindo sobre as secções transversais da representação de $C(\tau_M^*, g)$. Para uma representação irredutível ele se torna exatamente o operador de Dirac original agindo sobre os espinores de Dirac [26].

O *Operador de Dirac* pode ser reformulado da seguinte maneira: tome qualquer vizinhança local $U \subset M$ com base coordenada $\{dx^\mu\}$. Então em U, $\not{\partial} = dx^\mu \nabla_\mu$ pode ser escrito como

$$\not{\partial} \equiv dx^\mu \nabla_\mu = dx^\mu \wedge \nabla_\mu + d\tilde{x}^\mu \lrcorner \nabla_\mu \tag{B.3.10}$$

Aplicando este operador a uma forma local

$$\psi = \frac{1}{p!}\, \psi_{\rho_1 \ldots \rho_p}\, dx^{\rho_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\rho_p}$$

$$(dx^{\mu} \wedge \nabla_{\mu})\psi = \frac{1}{p!} \nabla_{[\mu}\psi_{\rho_1 \ldots \rho_p]} dx^{\mu} \wedge dx^{\rho_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\rho_p} = d\psi$$

e

$$(d\tilde{x}^{\mu} \lrcorner \nabla_{\mu})\psi = \frac{1}{(p-1)!} \nabla_{\mu}\psi^{\mu}_{\rho_2 \ldots \rho_p} dx^{\rho_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\rho_p} = \delta\psi$$

Como as expressões do lado direito são independentes da base, obtemos então:

$$\boxed{\partial\!\!\!/ = d + \delta} \qquad (B.3.11)$$

B.4. O CÁLCULO GEOMÉTRICO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Nesta secção mostramos como fazer alguns cálculos na Álgebra de Clifford $C(V,Q)$. Isto é particularmente importante para os físicos que necessitam de expressões explícitas das quantidades envolvidas numa teoria física. Seguimos aqui Hestenes [22] que mostra interpretações geométricas para os elementos e operações numa Álgebra de Clifford, razão pela qual denominamos de Cálculo Geométrico esta secção.

Vimos (Sec. B.2) que a Álgebra de Grassmann é isomorfa, como espaço vetorial à Álgebra de Clifford. Daí qualquer $A \in C(V,Q)$ pode ser escrito como

$$A = \langle A \rangle_o + \langle A \rangle_1 + \ldots = \sum_{r=0}^{n} \langle A \rangle_r \qquad (B.4.1)$$

onde $\langle A \rangle_r$ é a componente de A em $\Lambda^r(V)$. Por causa da decomposição acima os elementos de $C(V,Q)$ serão chamados de multivetores. Se $A = \langle A \rangle_r$ para algum inteiro $0 \leq r \leq n$ então diremos que A é homogêneo de graduação $\underline{\underline{r}}$. Os elementos de $\Lambda^r V$ serão chamados , como usual, de r-vetores.

Precisamos agora introduzir os seguintes produtos em $C(V,Q)$

i) *Produto Interno* entre multivetores homogêneos

$$\begin{cases} A_r \cdot B_s \equiv \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} \quad \text{se} \quad r,s > 0 & \text{(B.4.2a)} \\ A_r \cdot B_s = 0 \quad \text{se} \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad s = 0 & \text{(B.4.2b)} \end{cases}$$

O produto interno de multivetores arbitrários é então definido por:

$$AB \equiv \sum_r \langle A \rangle_r \cdot B = \sum_s A \cdot \langle B \rangle_s = \sum_r \sum_s \langle A \rangle_r \cdot \langle B \rangle_s \qquad \text{(B.4.3)}$$

A equivalência das três expressões no membro direito de (B.4.3) é uma consequência óbvia da distributividade do produto de Clifford.

ii) *Produto Exterior* de multivetores homogêneos

$$A_r \wedge B_s \equiv \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \qquad \text{(B.4.4)}$$

Note que em contraste com o produto interno temos:

$$A_r \wedge \lambda = \lambda \wedge A_r = \lambda A_r \quad \text{se} \quad \lambda = \langle \lambda \rangle_o \in \mathbb{R}$$

O Produto Exterior de multivetores arbitrários é definido por

$$A \wedge B = \sum_r \langle A \rangle_r \wedge B = \sum_s A \wedge \langle B \rangle_s = \sum_r \sum_s \langle A \rangle_r \wedge \langle B \rangle_s \qquad \text{(B.4.5)}$$

Vamos agora no que segue denominar o antiautomorfismo β em $C(V,Q)$ (Sec. B.1) por $+$ e chamá-lo *reversão*. Temos, com $A,B \in C(V,Q)$:

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+} \tag{B.4.6}$$

$$(A + B)^{+} = A^{+} + B^{+} \tag{B.4.7}$$

$$\langle A^{+} \rangle_{o} = \langle A \rangle_{o} \tag{B.4.8}$$

$$a^{+} = a \quad , \quad \text{se} \quad a = \langle a \rangle_{1} \tag{B.4.9}$$

Segue imediatamente que o reverso do produto de Clifford de um produto de vetores é:

$$(a_1 a_2 \ldots a_r)^{+} = a_r \ldots a_2 a_1 \tag{B.4.10}$$

Temos também que:

$$\langle A^{+} \rangle_{r} = \langle A^{+} \rangle_{r} = (-1)^{r(r-1)/2} \langle A \rangle_{r} \tag{B.4.11}$$

Podemos ainda verificar que valem:

$$\langle AB \rangle_{r} = (-1)^{r(r-1)/2} \langle B^{+}A^{+} \rangle_{r} \tag{B.4.12}$$

$$\langle A_r B_s \rangle_{r} = \langle B_s^{+} A_r \rangle_{r} = (-1)^{s(s-1)/2} \langle B_s A_r \rangle_{r} \tag{B.4.13}$$

$$\langle AB_r C \rangle_{r} = \langle C^{+} B_r A^{+} \rangle_{r} \tag{B.4.14}$$

Usando as igualdades (B.4.11) e (B.4.12), podemos verificar que valem as seguintes regras de reordenação para os produtos interno e exterior que definimos acima:

$$\begin{cases} A_r \cdot B_s = (-1)^{r(s-1)}\, B_s \cdot A_r \quad \text{para} \quad r \leq s & \text{(B.4.15)} \\ \\ A_r \wedge B_s = (-1)^{rs}\, B_s \wedge A_r & \text{(B.4.16)} \end{cases}$$

Os produtos interno e exterior foram definidos obviamente por intermédio do produto de Clifford que é o produto fundamental na Álgebra de Clifford.

Note que usando (B.4.15) e (B.4.16) podemos mostrar facilmente que:

$$\begin{cases} a \cdot A_r = \frac{1}{2}\,(aA_r - (-1)^r A_r a) & \text{(B.4.17)} \\ \\ a \wedge A_r = \frac{1}{2}\,(aA_r + (-1)^r A_r a) & \text{(B.4.18)} \end{cases}$$

e então:

$$aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r \tag{B.4.19}$$

Para as aplicações que temos em mente é fundamental(+):

i) a *Identidade*

$$a \cdot (a_1 a_2 \ldots a_r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1}\, a \cdot a_k (a_1 \ldots \check{a}_k \ldots a_r) \tag{B.4.20}$$

onde o circunflexo sobre o k-ésimo termo significa que ele está

(+) Prova em Hestenes [22].

ausente da expressão em questão.

ii) *Fórmula Fundamental*

$$A_rB_s = \langle A_rB_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_rB_s \rangle_{|r-s|+2} + \dots + \langle A_rB_s \rangle_{r+s}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \langle A_rB_s \rangle_{|r-s|+2k} \qquad \text{(B.4.21)}$$

onde $m = \frac{1}{2}(r+s-|r-s|)$.

OBSERVAÇÕES:

OBS.1. Notemos que a equação (B.4.19)

$$aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r$$

é idêntica a equação (B.2.5) se o produto exterior na Álgebra de Clifford é identificado com o produto exterior usual e se $a \cdot A_r \equiv \tilde{a} \lrcorner A_r$.

OBS.2. Note que o produto interno de Clifford entre multivetores de mesma graduação é dado pelo produto interno de Grassmann, isto é:

$$A_r \cdot B_r = (A_r, B_r)_Q \ .$$

Mas é fundamental ter em mente que enquanto $(\ , \ )_Q$ só é definido para elementos de mesma graduação, o produto interno de Clifford $(\cdot)$ é definido para elementos quaisquer da álgebra $C(V,Q)$.

OBS.3. O produto interno de Clifford permite introduzir um isomorfismo muito importante, para os cálculos que temos em mente, entre

$\Lambda(V)$ e $\Lambda(V^*)$, como segue:

$$\Lambda^r(V) \ni \alpha_r \longrightarrow A_r \in \Lambda(V)$$

dado por:

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \in V$$

$$\alpha_r(a_1, \ldots, a_r) = A_r^+ \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_r) \quad \text{(B.4.22)}$$

Com esse isomorfismo fica claro traduzir o nosso approach para aquele das referências [25;26].

OBS.4. Se V é um espaço vetorial de dimensão n com um tensor métrico g de assinatura (p,q), então a Álgebra $C(V,Q)$ onde $Q(a) = g(a,a)$ é usualmente denotada por $\mathbb{R}_{p,q}$.

OBS.5. A Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{1,3}$ (chamada Álgebra de Minkowski ou Álgebra do espaço-tempo) das formas $\{dx^\mu\}$ é isomorfa a $\mathbb{H}(2) =$ = {matrizes quaterniônicas 2×2}. A Álgebra das matrizes complexas de Dirac $\{\gamma_\mu\}$ com $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\mathbf{1}$ é a álgebra $\mathbb{C}(4) \cong$ $\cong \mathbb{R}_{4,1}$. Temos a inclusão $\mathbb{R}^+_{4,1} \cong \mathbb{R}_{1,3}$, onde $\mathbb{R}^+_{4,1}$ é a parte par de $\mathbb{R}_{4,1}$. Por completeza, notamos que $\mathbb{R}_{3,1} \cong \mathbb{R}(4)$ é chamada Álgebra de Majorana.

OBS.6. Vale a seguinte relação(+) entre $\omega^n = dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$ e o operador estrela de Hodge:

(+) Salingaros [24].

Se $f_p \in \Lambda^p(V)$, com $V = T_x^* M$, então

$$* f_p = (-1)^t \omega^n f_p \qquad \text{(B.4.23)}$$

onde o índice t depende da assinatura, e da graduação de f_p.

No caso particular do $\mathbb{R}_{1,3}$ temos que $* = -\gamma_5$ para $p = 0,3,4$ e $* = \gamma_5$ para $p = 1,2$.

É entendido que no 2º membro de (B.4.23) o produto é o de Clifford.

APÊNDICE C

A ÁLGEBRA DE PAULI ([21])

A *Álgebra de Pauli* é definida como a sub-álgebra par da Álgebra do espaço-tempo $\mathbb{R}_{1,3}$. Na verdade ela é a Álgebra de Clifford do espaço euclidiano tridimensional $\mathbf{E}_3$, ou seja $\mathbb{R}_{3,0}$. Temos portanto um isomorfismo $\mathbb{R}^+_{1,3} \cong \mathbb{R}_{3,0}$. Este isomorfismo é dado por:

$$\sigma_k = \gamma_k \gamma_o \tag{C.1}$$

onde os $\gamma_\mu \in \mathbb{R}_{1,3}$ e γ_o é tipo-tempo ($\gamma_o^2 = 1$).

Mostra-se que a Álgebra de Pauli $\mathbb{R}_{3,0}$ é isomorfa à $\mathbb{C}_2$ = matrizes complexas 2×2, razão pela qual os físicos usam esta representação de $\mathbb{R}_{3,0}$ com base, por exemplo $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3\}$ onde:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

Os vetores σ_k satisfazem a regra de multiplicação:

$$\sigma_j \cdot \sigma_k = \frac{1}{2} (\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j) = \delta_{jk} \tag{C.3}$$

Tomando todos os produtos dos σ_k, gera-se uma base tensorial para $\mathbb{R}_{3,0}$. Este é um espaço vetorial de dimensão $2^3 = 8$. Os outros elementos da base são os bivetores $\sigma_{jk} = \sigma_j \wedge \sigma_k = \frac{1}{2} (\sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j)$ e o pseudoescalar $i = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$.

O elemento i comuta com todos os outros elementos e $i^2 = -1$.

Segue do isomorfismo em (C.1) que:

$$\sigma_{jk} = -\gamma_{jk} \tag{C.4}$$

e

$$i = \gamma_5 \tag{C.5}$$

Vemos portanto que escolhido um vetor tipo-tempo arbitrário γ_o, obtemos a *Álgebra de Pauli de* γ_o pelo isomorfismo em (C.1).

Dado um vetor p em $\mathbb{R}_{1,3}$, ele pode ser representado como:

$$p\gamma_o = p_o + \vec{p} \tag{C.6}$$

onde

$$p_o \equiv p\cdot\gamma_o \tag{C.7a}$$

$$\vec{p} = p \wedge \gamma_o \tag{C.7b}$$

O operador de Dirac $\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ é um operador vetorial. Temos então:

$$\gamma_o \not\partial = \partial_o + \nabla \tag{C.8}$$

onde

$$\partial_o = \gamma_o \cdot \not\partial \tag{C.9a}$$

$$\nabla = \gamma_o \wedge \not\partial \tag{C.9b}$$

OBS. Se $A \in \mathbb{R}_{1,3}$ então

$$\not\partial A = \not\partial\cdot A + \not\partial \wedge A \tag{C.10}$$

$\not\partial\cdot A$ é chamada *divergência de* A e $\not\partial \wedge A$ é chamado de *rotacional de* A.

BIBLIOGRAFIA/REFERÊNCIAS

[1] DIRAC, P.A.M. - Proc. R. Soc. A 133, 60 (1931).

[2] DIRAC, P.A.M. - Phys. Rev. 74, 817 (1948).

[3] DIRAC, P.A.M. - Int. J. of Theor. Phys. 21, Nº 8/9 (1982).

[4] BLEECKER, D.D. - "Gauge Theory and Varational Principles", Addison-Wesley Reading, Mass. (1981).

[5] 'tHOOFT, G. - Nuclear Physics B 79, 276 (1974).

[6] PRESKILL, J. - Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 34, 461, (1984).

[7] GODDARD, P. and D.I. OLIVE - Rep. Prog. Phys. 41, 1357 (1978).

[8] COLEMAN, S. in A. Zichichi (ed) - "The magnetic monopole fifty years Later" Proc. of "The Unit of the Fundamental Interactions". Plenum Press - London (1983).

[9] ROHRLICH, F. - Phys. Rev. 150, 1104 (1966).

[10] ROSENBAUM, D. - Phys. Rev. 140B, 804 (1965).

[11] CARTER, E.F. - Am. J. of Phys. 41, 994 (1973).

[12] FRENKEL, A. - preprint KFKI . 1986 - 12/A Hungarian Academy of Sciences - Central Research Institute for Physics - Budapeste.

[13] WU, T.T. and YANG, C.N. - Phys. Rev. D, 12, 3845 (1975).

[14] EGUCHI, T. ; GILKEY, P.B.; HANSON, A.J. - Physics Reports 66, Nº 6, 213 (1980).

[15] MILNOR, J.W. and STASHEFF, J.D. - Characteristic Classes - Princeton Univ. Press (1974).

[16] OLIVEIRA, E. C. - On the Symmetrical Top - Relatório Técnico RT.371/86 - IMECC-UNICAMP.

[17] FELSAGER, B. - Geometry, Particles and Fields, Odense University Press (1981).

[18] CABIBBO, N. and FERRARI, E. - Il Nuovo Cimento 23,Nº6, 1147 (1962).

[19] MANDELSTAM, S. - Ann. Phys. 19, 1 (1962).

[20] GRAF, W. - Ann. Inst. Henri Poincaré A29, Nº 1, 85 (1978).

[21] HESTENES, D. - Space-Time Algebra, Gordon and Breach (1966).

[22] HESTENES, D. and SOBCZYK, G. - Clifford Algebra to Geometric Calculus. D. Reidel Pub. Co., Dordrecht (1984).

[23] GAMBLIM, R.L. - Journal of Math. Phys. 10, 46 (1969).

[24] SALINGAROS, N. - J. Math. Phys. 22, Nº 9, 1919 (1981).

[25] FARIA-ROSA, M.A. ; RECAMI, E. ; RODRIGUES, W.A. - Phys. Letters B173, 233 (1986).

[26] MAIA, A., Jr., RECAMI, E.; RODRIGUES, W.A. and FARIA-ROSA, M.A., Relatório Técnico 14/87 - IMECC - UNICAMP (1987).

[27] SCANAVINI, M., Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP (1986).

[28] FIGUEIREDO, V.L. and RODRIGUES, W.A. - "Alternative Representation of Spinors by Clifford Algebras", Relatório Técnico 22/88 - IMECC-UNICAMP (1987)

[29] FARIA ROSA, M.A. (informação pessoal).

[30] LAWSON, H.B. and M.L. MICHELSOHN - Spin Geometry. Monografia - Universidade Federal do Ceará - 1983.

[31] WESTENHOLZ, C. von - Differential Forms in Mathematical Physics. North-Holland Pub. Co. (1981).

[32] MIGNANI, R. and RECAMI, E. - IL Nuovo Cimento, Vol.30A, Nº4 (1975)