

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Este exemplar corresponde à versão final
da tese defendida pelo aluno Ruy Hanazaki
do Amarel Farias e aprovado pelo COMISSÃO
Julgadora.

Campinas, 13 de julho de 1987

Vincent Buonamano

UMA INTRODUÇÃO AOS FUNDAMENTOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

Ruy Hanazaki do Amarel Farias

Orientador: Prof. Dr. Vincent Buonamano

Tese apresentada ao Instituto de Física
Gleb Wataghin da Universidade Estadual
de Campinas (UNICAMP), como requisito
parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Campinas, 1987

Classif.

Autor

V. Ex.

Tombo BC/ 8228

I. FÍSICA - UNICAMP

n.º classif. TM

n.º autor 7226i

..... ed. ex.

n.º tombo. IM1671

CM 00298751

Aos meus pais,
à minha esposa Celli,
e à minha filha Layse.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Vincent Buonomano, pela preciosa orientação na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Harvey Robert Brown, por me colocar em contato com os problemas relativos à área de fundamentos.

Aos professores Wilson de Castro Ferreira e Erasmo Recami, pelo auxílio e apoio.

Aos meus amigos André Koch Torres de Assis, Carlos Augusto Silva e Werner Martins Vieira, pelo interesse e estímulo à realização deste trabalho.

A todos aqueles que me auxiliaram nos momentos de dificuldades.

Ao CNPq e à Capes, pelo apoio financeiro fornecido.

RESUMO

Apresenta-se aqui uma abordagem introdutória aos fundamentos da mecânica quântica, objetivando prover um texto acessível àqueles que possam ter algum interesse em tomar conhecimento do que se pesquisa e o que se discute nessa área. Faz-se uma apresentação das interpretações mais acatadas do formalismo, mostrando os problemas que elas enfrentam, assim como as tentativas de contorná-los. Deste modo, aborda-se os problemas de medição e do paradoxo onda-partícula, assim como as tentativas de reinterpretar o princípio de incerteza e as controvérsias ligadas ao paradoxo de Einstein, Podolski e Rosen (EPR) e a desigualdade de Bell. Todos estes tópicos são abordados no contexto do confronto dos pontos de vista clássicos com a posição de Bohr-Heisenberg, sendo analisadas as consequências da mecânica quântica sobre conceitos como realismo, localidade, causalidade e objetivismo, tão presentes na física clássica.

ABSTRACT

This work presents an introduction to the Foundation of Quantum Mechanics. Its purpose is to furnish a text which is accessible to anyone interested in an introduction to the research and fundamental debate that is currently going on in this area.

The most accepted interpretations of the quantum mechanical formalism are presented along with their difficulties as well as some attempts to confront these difficulties. The basic topics that are discussed are the measurement problem, the wave-particle paradox, the principle of uncertainty, the Einstein, Podolski and Rosen Paradox (EPR) and Bell's Inequality. All these topics are presented within the context of the conflict between the concepts of classical physics and the position of Bohr-Heisenberg. The important concepts from classical physics that we are referring to are realism, locality, causality and objectivity.

RESUMO

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO	1
I - INTRODUÇÃO	3
I.1 - Considerações históricas acerca da origem da mecânica quântica	4
I.2 - Resumo histórico da controvérsia acerca dos fundamentos	6
I.3 - O que se discute acerca dos fundamentos	8
I.4 - Tópicos a serem abordados no trabalho	10
II - RESUMO DO FORMALISMO DA MECÂNICA QUÂNTICA	13
II.1 - Conceitos básicos acerca dos espaços de Hilbert	15
II.2 - O formalismo da mecânica quântica	17
III - AS INTERPRETAÇÕES DA MECÂNICA QUÂNTICA	25
III.1 - Introdução	26
III.2 - Interpretação de Copenhagen	28
(1) Aspectos gerais da interpretação	
(2) A interpretação probabilística da função de onda	
(3) O princípio de incerteza de Heisenberg	
(4) Princípio de complementaridade	
III.3 - Interpretação Estatística da Mecânica Quântica	34
III.4 - Aspectos Problemáticos das duas Interpretações	37
(1) Princípio de superposição	
(2) O problema de medição	
IV - O PARADOXO DE EPR E A DESIGUALDADE DE BELL	47
IV.1 - Introdução	48
IV.2 - O Paradoxo de EPR	50
(1) O argumento de Einstein-Podolski-Rosen (EPR)	
(2) A resposta de Bohr ao argumento de EPR	
IV.3 - A Variante de Bohm do Experimento de EPR	55

- IV.4 - Realismo, Localidade e a Desigualdade de Bell58
 - (1) O problema de realismo e localidade no experimento de EPR-Bohm
 - (2) Derivação da desigualdade de Bell
 - (3) Comentário sobre outras derivações da desigualdade de Bell
- IV.5 - Testes Experimentais da Desigualdade de Bell71
 - (1) Introdução
 - (2) Experimentos tipo cascata de fótons
 - (3) Experimentos de aniquilação do positrônio
 - (4) Experimentos de espalhamento próton-próton
 - (5) Comentários sobre os experimentos já realizados
- IV.6 - A Controvérsia Acerca da Desigualdade de Bell89
 - (1) Alguns dos pontos de vista dessa controvérsia
 - (2) Comentários acerca do real significado da controvérsia

- V - O PARADOXO ONDA - PARTÍCULA 96
 - V.1 - Introdução 97
 - V.2 - O Experimento da Dupla Fenda 100
 - V.3 - Experimentos Realizados Envolvendo o Paradoxo Onda-Partícula 105
 - V.4 - A Interpretação de Copenhagen e o Paradoxo Onda-Partícula 110
 - V.5 - A Teoria da Dupla Solução de De Broglie e outras interpretações 112

- VI - O PRINCÍPIO DE INCERTEZA 116
 - VI.1 - Introdução 117
 - VI.2 - Derivações da Relações de Incerteza 120
 - (1) Derivações das relações a partir do formalismo
 - (2) Derivações das relações fora do contexto do formalismo
 - VI.3 - Várias Interpretações das Relações de Incerteza 127
 - (1) O ponto de vista ortodoxo
 - (2) Interpretação estatística das relações de incerteza
 - VI.4 - A Importância do princípio de Incerteza para a Interpretação de Copenhagen 135
 - (1) O princípio de incerteza e o paradoxo onda-partícula
 - (2) Implicações filosóficas do princípio de incerteza

- VII - CONSIDERAÇÕES FINAIS 140

APÊNDICES	143
Ap.1 - O Formalismo Quântico da Medição	144
Ap.2 - Experimentos que Sustentam a Concepção do Estado Quântico como Superposição	150
Ap.3 - Comentários sobre a Prova de Von Neumann da Impos- sibilidade de termos Teorias de Variáveis Escondidas	153
Ap.4 - Derivação da Função de Correlação da Mecânica Quântica	156
Ap.5 - Outras Derivações da Desigualdade de Bell	161
NOTAS	168
REFERÊNCIAS	182

APRESENTAÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar os debates em torno dos fundamentos da mecânica quântica, que talvez seja a teoria mais bem sucedida já formulada, em termos da concordância de suas previsões com os resultados experimentais. Questionar a fundamentação da teoria não é, de maneira alguma, questionar o seu formalismo, e muito menos a sua validade. É por em questão a interpretação corrente subjacente a este formalismo, e que é devida principalmente a Bohr e Heisenberg. É por em evidência que, com essa interpretação, a teoria representa uma situação de extrema ruptura com a concepção do mundo, clássico e intuitivo, onde exercitamos a nossa racionalidade.

Da maneira como interpretada por Bohr e Heisenberg, a mecânica quântica nada mais é que um algoritmo que prevê com extrema precisão os resultados possíveis de experimentos, nada nos dizendo a respeito dos processos físicos que produzem estes resultados. A interpretação abole as noções de realidade objetiva e de causalidade, além de ser não-local, de modo que alguns fenômenos só são explicáveis se se assume a possibilidade de transmissão instantânea de informações de um ponto a outro do espaço.

Quando se questiona tal interpretação, o que se tenta é associar à mecânica quântica um significado físico, torná-la uma teoria científica, no sentido mais puro da palavra. Deste modo, encabeçados por Einstein, Schroedinger e De Broglie, entre outros, vários físicos se puseram contra esta interpretação, já à época do aparecimento da teoria. Após 1965, as discussões em torno dessa interpretação voltaram à tona, após um trabalho de Bell possibilitando testes experimentais confrontando as teorias realistas-locais com a mecânica quântica (como interpretada por Bohr). Essas discussões vem se intensificando muito nos últimos anos, atraindo um número cada vez maior de pesquisadores, com dezenas de publicações nas revistas especializadas mais conceituadas, com vários experimentos em andamento e já realizados (experimentos estes tecnologicamente de extrema sofisticação), enfim, muitas idéias novas e muitas dúvidas a serem esclarecidas.

Muitos físicos acreditam que vivenciamos um momento de crise na fundamentação da física e mesmo na própria concepção que temos do mundo. A solução dos problemas aqui discutidos tem implícita a solução do problema da dualidade onda-partícula, o que nos levará mais próximo do conhecimento da natureza dos componentes elementares dessa realidade que vivenciamos. Portanto, um problema que deveria estar sempre presente na mente de todo físico, mas que tem sido deixado à margem da física acadêmica de nossos dias.

Este trabalho visa prover um texto introdutório às discussões em torno dos fundamentos da mecânica quântica, abordando alguns dos tópicos mais problemáticos e algumas das interpretações já formuladas para o formalismo. Procura-se sempre uma exposição simples das contradições, onde se enfatiza os aspectos físicos envolvidos nas questões mais que os filosóficos. As menções históricas, sempre que possível,

acompanharão a exposição dos vários tópicos, sendo citados os trabalhos pioneiros tanto em termos dos fundamentos quanto da própria elaboração da teoria. Procura-se também fornecer um bom número de referências sobre os vários pontos de vista em discussão, a fim de facilitar ao leitor o seu aprofundamento em qualquer dos pontos que o interessar. Assim, este trabalho é destinado àqueles que, tendo uma certa familiaridade com a mecânica quântica, queiram se inteirar das discussões em torno da sua fundamentação.

I - INTRODUÇÃO

I.1 - Considerações históricas acerca da origem da mecânica quântica

**I.2 - Resumo histórico da controvérsia acerca dos fundamentos da
Mecânica Quântica**

I.3 - O que se discute acerca dos fundamentos da Mecânica Quântica

I.4 - Tópicos a serem abordados no trabalho

I - INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações históricas acerca da origem da mecânica quântica:

A mecânica quântica moderna surgiu, como a teoria que hoje conhecemos, na década de 1920, numa época extremamente agitada tanto no plano cultural quanto político. As três primeiras décadas do século XX e o final do século XIX marcaram profundamente toda a evolução da civilização humana desde então. Foi a época das grandes mudanças em todos os campos: nas artes, na política e nas ciências como um todo.

A situação político-cultural em que surgiu a mecânica quântica foi muito bem focalizada por P. Forman, em seu artigo "A cultura de Weimar, a causalidade e a teoria quântica, 1918 - 1927". Antes mesmo do aparecimento da teoria já eram intensas as discussões em torno de conceitos como causalidade e determinismo, e acerca da natureza dual ondulatório-corpúscular do comportamento da luz. A concepção de uma natureza essencialmente causal, que sempre caracterizou a física clássica, já vinha sendo debatida desde o século passado. Mas o fato de não se ter conseguido formular leis causais que explicassem fenômenos como as transições atômicas e os decaimentos radioativos, mas apenas e tão somente leis probabilísticas, fez com que as discussões se intensificassem. Segundo Forman, as controvérsias em torno da causalidade envolveram praticamente todos os físicos, além de outras personalidades no campo cultural, à época em atividade na Europa, inclusive personalidades tão diversas quanto Spengler e Rudolf Steiner.

A questão da causalidade, ou seja, da concepção de que os fenômenos físicos se manifestam em função de uma causa ou um conjunto de causas, que seriam os fatores determinantes de sua ocorrência, está intimamente ligada à do determinismo, ao qual é imprescindível a existência de leis causais. E, certamente, a busca de teorias deterministas que descrevessem os fenômenos que ocorrem na natureza foi responsável pelo avanço das ciências nos últimos séculos. A aparente negação desses pontos até então básicos da ciência não foi removido pela mecânica quântica. Foi, ao contrário, ainda mais evidenciada.

Quanto à natureza dual da luz, a situação não foi diferente. A concepção da luz como fenômeno eletromagnético, reinante no princípio do século, foi fortemente abalada pela absoluta incapacidade de explicar fenômenos como os efeitos fotoelétrico e Compton. Quando Einstein formulou o seu tratamento do efeito fotoelétrico, assumindo a quantização da radiação para explicar o fenômeno, evidenciou-se a necessidade de se recorrer a um modelo corpúscular para a luz, idéia que fora praticamente abandonada após os experimentos de Hertz no século passado. No entanto, os efeitos deste trabalho e da experiência de Millikan, em 1914, confirmando a teoria de Einstein, só passaram a ser mais intensamente debatidos após o término da 1ª Guerra Mundial. Assim, passaram a coexistir duas descrições distintas para a radiação luminosa, ligadas respectivamente às duas grandes formulações teóricas da física clássica: o eletromagnetismo e a mecânica. O problema da

dualidade da natureza da luz, e a sua posterior generalização por De Broglie, foi de fundamental importância para o estabelecimento da atual mecânica quântica. Mas esta, pelo menos na forma em que foi aceita pela grande maioria da comunidade física, não solucionou o problema, passando a considerá-lo um problema de ordem metafísica, irrelevante para a descrição física possível do mundo.

Após os trabalhos de Planck e Einstein, em que a quantização de grandezas físicas até então tidas por contínuas determinou a derivação de leis corretas para fenômenos que até então desafiavam os físicos, o recurso à quantização foi novamente utilizado por Bohr na formulação do seu modelo atômico. Com este modelo, Bohr conseguiu explicar várias particularidades relativas aos espectros de emissão do Hidrogênio, mas não tocou no problema da natureza do campo eletromagnético. O mesmo se verificou quando de seu trabalho sobre o princípio de correspondência. Essa é uma característica geral da antiga teoria quântica que, como salienta Jammer, "era, do ponto de vista metodológico, um lamentável amontoado de hipóteses, princípios, teoremas, ao invés de uma teoria logicamente consistente". No entanto, foi uma teoria extremamente bem sucedida na descrição de uma série de fenômenos e que dependia em muito das formulações clássicas para ser aplicada.

Foi da tentativa de explicar e descrever matematicamente os fenômenos que mencionamos, dentro de uma única formulação, que surgiu a mecânica quântica. Curiosamente, apareceu em duas formulações distintas, publicadas quase que simultaneamente: a mecânica matricial, de Heisenberg, e a mecânica ondulatória, de Schroedinger, que foram criadas sob inspirações filosóficas também diferentes.

A formulação de Heisenberg introduz a noção de observável, como sendo toda quantidade possível de ser medida experimentalmente e cuja inclusão na teoria implique na sua correção (comprovação experimental) e, com base nesta argumentação, abole a noção de posição e momento de elétrons no átomo, por serem não-observáveis. Isto evidencia duas das características desse formalismo, no que tange ao seu substrato filosófico: "a divisão do mundo em observador e sistema observado, impedindo a formulação clara da lei de causa e efeito" (Heisenberg, 1930, p.58); e o fato de que a física é reduzida à categoria de teoria preditiva de fenômenos experimentalmente observáveis, sem qualquer caráter extraprolativo que leve a conceitos além daqueles tecnicamente especificáveis.

Por sua vez, o formalismo de Schroedinger surgiu da tentativa de explicar o problema da natureza dual da luz. Ao contrário de Heisenberg, Schroedinger concebia o mundo como sendo intrinsecamente causal, e os fenômenos físicos como sendo manifestações de uma realidade física objetiva, podendo ser descritos por meio de uma teoria determinista. Deste modo, a principal característica do formalismo de Schroedinger é a tentativa de redução dos fenômenos microscópicos a fenômenos puramente ondulatórios, abolindo o caráter corpuscular. A famosa equação de Schroedinger representava inicialmente a lei dinâmica governando a evolução temporal de uma onda real.

Foram estas duas as primeiras formalizações da moderna mecânica quântica, sendo reconhecidas como equivalentes pelo próprio

Schroedinger, em 1926. As concepções filosóficas antagônicas que formam os seus substratos refletem bem o porquê de existirem controvérsias em torno dos fundamentos da teoria.

1.2 - Resumo histórico da controvérsia acerca dos fundamentos da mecânica quântica:

As discussões em torno dos fundamentos da mecânica quântica se iniciaram, deste modo, juntamente com o estabelecimento da própria teoria. A interpretação das ondas de Schroedinger como representando amplitudes de probabilidades acerca do comportamento do sistema a elas relativo, por Born em 1926; o princípio de incerteza, limitando a possibilidade de se conhecer simultaneamente a posição e o momento de um sistema microscópico, enunciado por Heisenberg em 1927; e o princípio de complementaridade de Bohr (1927), formam a base de uma interpretação do formalismo da mecânica quântica, conhecida por "interpretação de Copenhagen", que foi duramente combatida por vários físicos naquela época. Por meio desses três pontos básicos, dotava-se a teoria de características bem opostas à da tradicional física clássica: era uma teoria intrinsecamente probabilística e não-realista, no sentido positivista da negação. Esse caráter não clássico ficou bem evidenciado pelo princípio de complementaridade, segundo o qual, os caracteres ondulatório e corpuscular dos objetos do mundo microscópico são complementares, cada um deles se manifestando dependendo da situação experimental a que o sistema é submetido, nunca aparecendo simultaneamente. O princípio de incerteza é consistente com essa afirmação de Bohr, e mesmo essencial à sua validade.

Esse ponto de vista de Bohr-Heisenberg, que denominaremos também por "interpretação ortodoxa" é a que se adota, implícita ou explicitamente, na grande maioria dos livros textos de mecânica quântica. A este ponto de vista estão historicamente ligados os nomes de Bohr, Heisenberg, Born, Dirac, Pauli, Kramers, Jordan e Sommerfeld, entre vários outros. Em linhas gerais, as características básicas da interpretação são a consideração de que toda realidade é subjetiva, no sentido de depender do observador; a consideração de que a descrição quântica encerra um caráter probabilístico irreduzível, que não é "probabilidade de ignorância"; e, finalmente, que a mecânica quântica provê a mais completa descrição possível para um dado fenômeno.

As características que mencionamos estão embutidas na interpretação adotada, consciente ou inconscientemente, pela grande maioria dos físicos. No entanto, alguns físicos nunca a aceitaram, acreditando na validade dos conceitos clássicos já mencionados, mas que veremos logo adiante com mais detalhe. Entre eles, os mais ativos contestadores foram Einstein, De Broglie, Planck, Schroedinger e Ehrenfest. Ficaram famosos os debates entre Einstein e Bohr sobre a natureza da "realidade quântica", e que culminaram com a publicação do famoso artigo de Einstein, Podolski e Rosen, em 1935.

Naquele artigo, Einstein tenta mostrar, fazendo uso de um experimento imaginário, a inconsistência de se considerar a descrição

quântica como sendo a descrição mais completa possível de um fenômeno físico. Einstein, assim como os demais oponentes da mecânica quântica (teremos sempre subentendido que tratamos da interpretação de Bohr), era um realista convicto. Acreditava ser a realidade perfeitamente descritível por meio de leis causais, por meio de teorias deterministas.

Foram intensos os debates entre as duas correntes de pensamento. Por fim, o ponto de vista de Bohr-Heisenberg acabou por prevalecer em meio à comunidade científica, em especial após o famoso trabalho de von Neumann, mostrando a impossibilidade de se completar a descrição quântica a fim de torná-la determinista, sem comprometer a correção da teoria. Assim, em função da incrível precisão das previsões da teoria, à época imediatamente após ao seu aparecimento, em que as discussões acerca dos fundamentos foram muito intensas, envolvendo a quase totalidade de seus fundadores, seguiu-se um período de estagnação, em que muito poucos se manifestaram acerca do assunto (Em 1948, Einstein salientou que além de não-realista, a posição de Bohr seria também não-local, assumindo a possibilidade de transmissão instantânea de informações de um a outro ponto do espaço).

Quando Bohm publicou um trabalho acerca da possibilidade de se completar a descrição quântica com a inclusão no formalismo do que chamou de "variáveis escondidas", em 1952, obtendo uma teoria realista inteiramente concordante com as previsões quânticas, um novo impulso foi dado às discussões. Mas foi a partir dos trabalhos de Bell (1965, 1966) que o debate se intensificou. Bell mostrou a inconsistência física da prova de von Neumann e, mais importante do que isto, derivou uma desigualdade, a partir de uma variante de Bohm do experimento imaginário de Einstein, que possibilitou que pela primeira vez se comparasse experimentalmente as previsões quânticas com previsões de teorias com características realistas e locais.

Como consequência, as discussões em torno dos fundamentos sofreram um novo impulso e vêm se intensificando dia-a-dia, envolvendo um número cada vez maior de pesquisadores, tanto teóricos quanto experimentais. De 1972 a 1986 foram realizados 15 experimentos, e existem alguns em andamento, testando diretamente as previsões dos dois tipos de teorias. Muito embora a grande maioria desses experimentos tenha favorecido o ponto de vista de Bohr, nada de conclusivo pôde ainda ser extraído desses resultados. As polêmicas são muitas e, em função da grande dificuldade experimental envolvida, questionamentos são frequentes acerca da validade de tais resultados. Ou seja, não existe ainda um experimento que seja conclusivo, muito embora um dos experimentos (Aspect et al, 1982) venha sendo considerado como tal por muitos pesquisadores.

O que realmente importa é que a controvérsia existe, e tem envolvido um número cada vez maior de físicos. É uma polêmica que, nas últimas duas décadas envolveu nomes como De Broglie, Landé, Fock, Popper, Wheeler, Bohm, Rosenfeld, Wigner, e muitos outros mais.

1.3 - O que se discute acerca dos fundamentos da teoria:

Uma vez apresentadas, em linhas gerais, as considerações históricas que envolvem este trabalho, resta-nos apresentar quais são as questões que o motivam.

Quando se fala em controvérsias acerca dos fundamentos da mecânica quântica tem-se implícito que, de algum modo, a teoria e a sua interpretação corrente apresentam aspectos incompatíveis com concepções que sempre foram tomadas como básicas pela física clássica (que chamaremos concepções clássicas). Por "física clássica" queremos dizer toda a física não-quântica, incluindo portanto as relatividades especial e geral. Conforme já mencionamos, podemos considerar como características da concepção clássica do mundo os seguintes aspectos, que não são necessariamente independentes entre si:

(1) A física clássica é **realista**, no sentido de assumir a existência de uma realidade externa com propriedades bem definidas e que independe do observador (realidade objetiva).

(2) É **determinista**, de modo que, se conhecemos todas as condições iniciais acerca de um dado sistema e seu meio, podemos prever com certeza o seu comportamento futuro. Ou seja, admite que os fenômenos sejam completamente descritos por leis causais.

(3) É **objetivista**, no sentido que assume que a realidade seja descritível por leis que independam da presença de um observador.

(4) Assume que é possível uma descrição completa da realidade, de modo que todo elemento da realidade seja representável pela teoria (**completeza**).

(5) Finalmente, uma concepção que, muito embora não haja uma razão efetiva para assumi-la, é intuitivamente válida: a **localidade**. Assume-se então que nenhuma informação pode viajar com velocidade infinita, ou seja, instantaneamente.

De um certo modo, veremos que a mecânica quântica, como interpretada por Bohr, nega quase todos estes requisitos: "é uma teoria não-realista, não-determinista, não-objetiva, não-local, mas completa" (Jammer, 1980, p. 519). Quando se busca elaborar uma teoria que dê alguns destes aspectos clássicos à mecânica quântica, ou seja, assume-se uma posição que denominaremos de 'realista-local', passam a existir alguns problemas que não apareciam no ponto de vista de Bohr.

Primeiramente, o próprio problema da dualidade onda-partícula, 'solucionado' por Bohr com o princípio de complementaridade, mas que não foi ainda compreendido ao nível de uma teoria tipo-clássica. O problema da dualidade onda-partícula está intrinsecamente ligado à inexistência de uma concepção clássica equivalente ao que, no formalismo da mecânica quântica, é representado por um estado superposto. Além

de ser o mais antigo problema relacionado com a teoria quântica, a questão da dualidade é, no dizer de Feynmann, o problema mais essencial relativo aos fundamentos, não só da mecânica quântica, mas da própria física como um todo. Solucioná-lo é desvendar a natureza dos componentes mais elementares da realidade até agora observada.

Pode-se até mesmo dizer que todas as outras áreas de investigação acerca dos fundamentos se relacionam com o problema da dualidade. Por exemplo, um outro aspecto que precisa ser modificado, quando se assume um ponto de vista clássico, é a interpretação que se dá às relações de incerteza. Em geral, aceita-se a expressão matemática das relações, mas não a interpretação a ela agregada por Heisenberg. Existem algumas interpretações alternativas, havendo mesmo um certo consenso, entre os proponentes das teorias realistas-locais, em torno da formulada por Margenau, que associa as incertezas ao processo de preparação do estado quântico. Atualmente, não existem muitos pesquisadores trabalhando nesta área mas, certamente, o verdadeiro significado das relações ficaria bem mais claro, se não totalmente esclarecido, se se conhecesse a verdadeira natureza dos elementos do mundo microscópico.

Um terceiro ponto que precisa ser esclarecido se relaciona com a desigualdade derivada por Bell e, indiretamente, com o próprio paradoxo de Einstein-Podolski-Rosen (EPR), onde se concentram o maior número dos trabalhos publicados nos últimos 15 anos. A questão é saber se é possível a existência de tais teorias tipo-clássicas. Se é possível formular uma teoria que dê as mesmas previsões experimentais que a mecânica quântica, e que seja realista, determinista e local. As evidências experimentais indicam que, provavelmente, se existirem, certamente devem ser não-locais.

Finalmente, um aspecto que não abordaremos neste trabalho, intimamente relacionado com o princípio de incerteza, mas que é centrado em dificuldades de ordem matemática relativas a uma possível extensão do formalismo quântico: a impossibilidade de se definir uma distribuição de probabilidades conjunta, de modo que as distribuições para cada variável, como existentes no formalismo quântico, sejam dela derivadas (nota 1.1).

São quatro, portanto, os campos de investigação nos fundamentos, ligados à consideração da existência de teorias tipo-clássicas. Tais problemas não existem para a interpretação de Copenhagen, muito embora sejam evitados por meio de postulados. No entanto, se se assume esta interpretação, existe um aspecto ainda obscuro a ela relacionado, sobre o qual muitos pontos de vista têm sido formulados: o problema de medição ou do colapso ou redução do pacote de ondas, como é comumente chamado. O problema surge quando preparamos um sistema em um estado superposto (também chamado de superposição de estados) e efetuamos sobre ele uma medição. Para solucionar mais este problema, introduziu-se o "postulado de projeção", que vem sendo duramente criticado desde então (o postulado foi introduzido por von Neumann, em 1932).

Tem-se então duas maneiras distintas de evolução do sistema: uma contínua, de acordo com a equação de Schroedinger, e outra descontínua, por "saltos", que se verifica apenas quando sobre ele se efetua uma medição. Essa dicotomia na evolução do estado tem levado a muitos questionamentos acerca da interpretação ortodoxa, e são muitas as tentativas de unificar os processos evolutivos, o que faz com que surjam vários pontos de vista bastante distintos dentro da interpretação.

Do mesmo modo, são muitas as interpretações alternativas à ortodoxa, das quais as mais importantes são as interpretações estatísticas. São interpretações que, contrariamente à concepção do estado quântico estabelecida por Copenhagen, associam a ele a descrição não de um único sistema, mas sim de um ensemble de sistemas identicamente preparados. Uma outra proposta alternativa é a **teoria da dupla solução** de De Broglie, que assume a coexistência dos caracteres ondulatório e corpuscular num mesmo objeto quântico. Outros pontos de vista, que apenas mencionaremos, são as interpretações estocásticas, para as quais a mecânica quântica é uma teoria clássica de processos estocásticos, tendo conceitualmente a estrutura de uma teoria de processos de difusão.

Em linhas bastante gerais, são estes os pontos abordados neste trabalho. Temos que salientar que a discussão não atinge o corpo do formalismo, em si, da teoria. Quando se fala em questionamento da mecânica quântica, o que se questiona é a interpretação de Bohr, e não o formalismo. A mecânica quântica prevê excepcionalmente bem os resultados das situações onde ela é aplicada, de modo que não há evidências que levem a qualquer dúvida acerca do formalismo. Apenas que, no entender de muitos físicos, este formalismo pode comportar uma interpretação mais próxima de nossa intuição, e que não leve a contradições com outras teorias bem estabelecidas da física como, por exemplo, a teoria da relatividade especial. A interpretação de Bohr-Heisenberg não nos dá idéia intuitiva nenhuma dos processos físicos que levam a um determinado resultado experimental. Não temos conhecimento do que se passa durante um processo de medição. Certamente, quando se faz ciência, espera-se algo mais que isto.

1.4 - Tópicos a serem abordados no trabalho:

Primeiramente (Cap. II), apresentamos, de forma bastante resumida, o formalismo da mecânica quântica, aproveitando assim para estabelecer a base da notação a ser utilizada neste trabalho. A exposição pretende, pelo menos em linhas gerais, dar uma idéia do rigor matemático subjacente ao formalismo atual da teoria, cuja primeira axiomatização foi feita por von Neumann, no final da década de 1920. Em seguida (III.3), fazemos a exposição das duas mais importantes interpretações (com maior número de adeptos) desse formalismo: a interpretação de Copenhagen e a interpretação estatística. Após apresentá-las, salientamos as dificuldades impostas por cada uma delas, se assumidas, quais sejam, o fato de não termos numa descrição clássica de um fenô-

menos nada equivalente ao que é representado, no formalismo quântico, por uma superposição de estados; e o problema de medição.

Apresentadas as interpretações, passamos então a abordar as questões surgidas quando assumimos um ponto de vista realista, como é o caso da interpretação estatística. Primeiramente (Cap. IV) apresentamos o ponto de maior discussão no momento, que é associado à "desigualdade de Bell". Antes de tratarmos diretamente dos aspectos atuais relativos a esta discussão, fazemos uma breve exposição do trabalho de Einstein et al (EPR, 1935), onde é formulado o experimento imaginário sobre o qual EPR elaboram a sua famosa argumentação contra a completude da descrição quântica (IV.2). Em seguida, apresentamos a sua reelaboração por Bohm, que foi importante por tornar mais clara a questão (IV.3). Somente então partimos para o trabalho de Bell, derivando a sua famosa desigualdade (IV.4), apresentando os testes experimentais já realizados (IV.5), e relatando a situação atual dos debates acerca desses experimentos, e da própria igualdade (IV.6).

O segundo tópico que abordamos (Cap. V) é o que se costuma chamar de "paradoxo onda-partícula", isto é, o problema da dualidade que tanto temos salientado. Procuramos mostrar alguns experimentos já realizados, que visam estabelecer até que ponto é válido o princípio de complementaridade de Bohr. Nesse capítulo, apresentamos um esboço do que é a **teoria da dupla solução**, na qual De Broglie trabalhou desde a época de sua primeira versão, em 1926.

Finalmente, no capítulo VI, tratamos do princípio de incerteza, ressaltando que as expressões das relações, em si, não são questionadas. Novamente, o que se questiona é a interpretação de Heisenberg. Tentamos fazer, também, uma avaliação da importância do princípio, como formulado por Heisenberg, para a interpretação de Copenhagen. Enfim, apresentamos algumas alternativas já propostas para uma reinterpretção das relações de incerteza.

Após algumas considerações finais (Cap. VII), temos algumas notas, objetivando esclarecer alguns pontos que possam ter sido muito superficialmente citados no corpo do trabalho; e alguns apêndices. Tais apêndices mostram alguns dos pontos de vista dentro de Copenhagen em que se tenta solucionar o problema de medição (Ap1); descrevem dois experimentos muito interessantes relacionados com a existência de estados superpostos (Ap2); apresentam um resumo da famosa prova de von Neumann sobre a impossibilidade de se completar o formalismo quântico (Ap3); apresentam a derivação para o caso ideal da função de correlação quântica, que se define para derivar a desigualdade de Bell (Ap4); e, finalmente, apresentam algumas outras derivações dessa desigualdade (Ap5). A lista de referências, muito embora esteja longe de representar todas as correntes de pensamento associadas à fundamentação da mecânica quântica, é uma amostra significativa do que se publicou até agora a esse respeito.

1.5- Algumas referências gerais:

A lista abaixo relacionada diz respeito a uma série de textos até certo ponto básicos acerca dos fundamentos da mecânica quântica, e que servem como referência inicial a quem se interessar pelo assunto:

- Jammer, M (1974) *The Philosophy of Quantum Mechanics* (Wiley, NY).
Selleri, F (1986) *El Debate de la Teoría Cuántica* (Alianza, Madrid)
Rae, A (1986) *Quantum Physics: Illusion or Reality?* (Cambridge U P)
Selleri, F; Tarozzi, G (1981) *Riv. Nuovo Cim.* 4 (2)
Ballentine, L E (1970) *Rev. Mod. Phys.* 42 (4), 358
Jaks, A (1986) *Quantum Theory in Terms of Realism* (IF USP, Rio de Janeiro, Pp, Brasil)
Bell, J S (1981) *J. de Physique* 42, 62-41
Jammer, M (1980) *La Recherche* 111 (11), 510
D'Espagnat, B (1984) *Phys. Rep.* 110 (4), 201
Leggett, A V (1984) *Contemp. Phys.* 25 (60), 583

II - RESUMO DO FORMALISMO DA MECÂNICA QUÂNTICA

II.1 - Conceitos básicos acerca dos Espaços de Hilbert

II.2 - O Formalismo da Mecânica Quântica

Neste capítulo fazemos um resumo bastante abreviado dos elementos do formalismo da mecânica quântica que serão utilizados no decorrer do trabalho, objetivando principalmente o estabelecimento da notação a ser utilizada. Todos os conceitos utilizados neste trabalho estão bem definidos nos livros textos em que se apresenta a teoria (Cohen-Tannoudji et al, 1977; Messiah, 1964) com praticamente as mesmas notações. Além disso, a apresentação que faremos dos postulados da mecânica quântica segue aproximadamente a ordem estabelecida no texto de Cohen-Tannoudji et al.

Segundo Prugovecki (1967), uma análise geral das teorias físicas existentes permite considerar os seguintes constituintes estruturais nos quais qualquer teoria física pode ser dividida:

(a) O formalismo ou linguagem, que é a estrutura matemática em que são postulados os conceitos primitivos, por meio dos quais se provê a axiomatização da teoria.

(b) As regras de dedução, por meio das quais somos capacitados a derivar teoremas, pela manipulação dos símbolos que aparecem no formalismo.

(c) A lei dinâmica, que impõe restrições sobre os valores assumíveis pelos elementos primitivos do formalismo, dotando a teoria de poder preditivo e da habilidade de aumentar a informação empírica relevante.

(d) As regras de correspondência, que estabelecem a relação entre os conceitos e elaborações teóricos com o procedimento experimental no laboratório, por meio do qual temos acesso à realidade física.

Tal divisão não é, de modo algum, absoluta, havendo uma certa interdependência entre cada um dos elementos. No caso da mecânica quântica, estas três primeiras divisões se manifestam de modo a termos como conceitos primitivos os conceitos de estado e de observável. As regras de dedução são providas pela álgebra de operadores definida sobre os espaços de Hilbert onde, falando a grosso modo, estão axiomatizadas as operações efetuáveis com os elementos acima. E a lei dinâmica, para o caso não-relativístico, é representada pela equação de Schrodinger. Antes de começarmos a tratar da mecânica quântica propriamente dita, é conveniente que façamos primeiramente um breve resumo das noções básicas acerca do espaço de Hilbert.

De um certo modo, o que apresentamos como sendo o formalismo da mecânica quântica envolve as três primeiras divisões, enquanto que as questões relativas aos fundamentos da teoria estão relacionadas com alguns aspectos do que denominamos por regras de correspondência.

II.1 - Conceitos básicos acerca dos espaços de Hilbert:

Os espaços de Hilbert constituem a generalização natural, para dimensões infinitas, dos espaços vetoriais euclidianos, e podem ser definidos como segue.

Um espaço de Hilbert \mathcal{H} é qualquer espaço vetorial para o qual temos definido um produto interno, e que seja completo. Com isto queremos dizer:

(1) Por definição, um espaço vetorial \mathcal{V} sobre um corpo F (que pode ser o corpo dos números reais ou dos complexos; para o formalismo quântico, definiremos sobre o corpo \mathbb{C} dos números complexos) é um conjunto de elementos (chamados vetores) para os quais estão definidos duas operações: a soma $u + v$ e a multiplicação por escalar $a.u$, quaisquer que sejam $u, v \in \mathcal{V}$ e $a, b \in \mathbb{C}$, de modo que

(i) \mathcal{V} é um grupo abeliano sob a adição;

(ii) As operações são distributivas:

$$a.(u + v) = a.u + a.v$$

$$(a + b).u = a.u + b.u$$

(iii) A multiplicação por escalar é associativa e possui um elemento unitário:

$$(a.b).u = a.(b.u)$$

$$1.u = u,$$

onde 1 é o elemento identidade de \mathbb{C} .

(2) Um produto interno (u, v) é definido para todo $u, v \in \mathcal{H}$, e é uma função com domínio em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e imagem no corpo escalar \mathbb{C} , tal que:

(i) $(u, av) = a.(u, v)$; $(au, v) = a^*.(u, v)$, sendo a^* o conjugado do complexo a .

(ii) $(u, v) = (v, u)^*$ (conjugação hermitiana)

(iii) $(u, u) \geq 0$; $(u, u) = 0$ se e somente se $u = 0$.

(3) \mathcal{H} é completo com relação à norma definida por $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Definido o que seja um espaço de Hilbert, podemos agora introduzir alguns elementos definidos em função dele, e que serão posteriormente relacionados a elementos do formalismo quântico:

Subespaço: Um conjunto fechado de elementos de \mathcal{H} que também é um espaço de Hilbert é um subespaço de \mathcal{H} .

Funcional linear: Um funcional linear em \mathcal{H} é uma função

$$\begin{array}{l} l : \mathcal{H} \text{ ---->} \mathbb{C} \\ u \text{ ---->} l(u) \end{array}$$

que associa a todo elemento $u \in \mathcal{H}$ um elemento $l(u)$ de \mathbb{C} , e que é linear:

$$l(au + bv) = al(u) + bl(v) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Se o funcional linear é limitado (se existe uma constante k tal que $|l(u)| \leq k \|u\|$, qualquer que seja $u \in \mathcal{H}$), pode-se mostrar (teorema de Riesz) que existe um único elemento u_0 em \mathcal{H} tal que

$$l(u) = (u_0, u), \text{ para todo } u \in \mathcal{H}.$$

Neste caso, o funcional associa a um conjunto limitado de \mathcal{H} um conjunto limitado de \mathbb{C} .

Operador linear: Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é uma transformação

$$\begin{array}{l} A : \mathcal{H} \text{ ---->} \mathcal{H} \\ u \text{ ---->} u' = A(u) \end{array}, \quad u, u' \in \mathcal{H}$$

tal que

$$A(au + bv) = aA(u) + bA(v) \quad (2.2)$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$ e $u, v \in \mathcal{H}$.

A equação de autovalores do operador A é uma relação do tipo

$$A u = a u \quad (2.3)$$

em que todo vetor $u \in \mathcal{H}$ que a obedece é chamado um autovetor do operador A , sendo $a \in \mathbb{C}$ o autovalor correspondente. Em 11.2.2, retomaremos

estes conceitos, aplicados à mecânica quântica.

Os operadores lineares interessantes para o formalismo da mecânica quântica são os operadores hermitianos. O adjunto (ou hermitiano conjugado) A^\dagger de um operador linear A é, por definição, o único operador A^\dagger que satisfaz à relação

$$(A u, v) = (u, A^\dagger v) \quad (2.4)$$

quaisquer que sejam $u, v \in \mathcal{H}$.

Quando $A = A^\dagger$, o operador A é dito um operador hermitiano. Uma propriedade muito importante dos operadores hermitianos é a de possuírem apenas autovalores reais.

O operador inverso A^{-1} do operador A é definido como sendo o operador tal que, quando existir

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I \quad (2.5)$$

onde I é o operador identidade ($Iu = u, \forall u \in \mathcal{H}$). Quando $A^{-1} = A^\dagger$ diremos, por definição, que A é um operador unitário, o qual denotaremos por U , sendo que

$$(Uu, Uv) = (u, v) \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{H} \quad (2.6)$$
$$U^{-1} = U^\dagger \quad , \quad \text{de modo que} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = I.$$

Apresentamos, assim, resumidamente, algumas definições que serão úteis na apresentação do formalismo da mecânica quântica propriamente dito. Uma apresentação matemática bastante detalhada e rigorosa da teoria dos espaços de Hilbert e é dada por Richtmyer (1978).

11.2 - O formalismo da mecânica quântica:

A descrição quântica de um sistema físico se baseia, como já mencionamos, em dois conceitos fundamentais: estado e observável. Faremos a exposição dos elementos fundamentais do formalismo sempre assinalando os paralelos existentes entre este formalismo e os conceitos introduzidos na apresentação dos espaços de Hilbert.

11.2.1 - Estado físico de um sistema: Na mecânica quântica, a todo sistema físico corresponde um espaço de Hilbert \mathcal{H} (que chamaremos "espaço dos estados" do sistema), cujos vetores (que denominamos "vetores estados") descrevem completamente os estados do sistema. Utilizaremos a notação de Dirac, segundo a qual um vetor estado é denota-

do por um vetor ket $|\psi\rangle$, que é um elemento do espaço dos estados do sistema. $|\psi\rangle$ é também chamada a "função de onda" do sistema e escrito também como $\Psi(r,t)$, sendo ambos normalizados.

Na notação de Dirac, os funcionais lineares χ que atuam sobre os elementos $|\psi\rangle$ do espaço de Hilbert \mathcal{H} são denotados por $\langle \chi |$ (vetor bra), de modo que

$$\chi(|\psi\rangle) = \langle \chi | \psi \rangle \quad (2.7)$$

onde $\langle \chi | \psi \rangle$ é o número que, por definição, resulta da ação do funcional sobre o vetor estado. Pelo teorema de Riezs, pode-se mostrar que o produto interno entre dois vetores estado é dado por

$$(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \langle \phi | \psi \rangle \quad (2.8)$$

com $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

11.2.2 - Observáveis: Denomina-se observável toda quantidade física que se pode medir em um sistema, por exemplo, a posição, o momento, a energia, a componente do spin em uma dada direção, ... No formalismo da mecânica quântica os observáveis são símbolos que se relacionam com procedimentos experimentais específicos para medi-los, e são representados por operadores hermitianos definidos sobre o espaço de Hilbert.

Na secção 11.1 definimos o que seja um operador. Na notação que ora adotamos para os vetores estado e funcionais, podemos reescrever a equação de autovalores desses operadores (2.3) por

$$A |\psi\rangle = a |\psi\rangle \quad (2.3')$$

e a equação (2.4') por

$$\langle A \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle = \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle \quad (2.4')$$

de modo que, quando o operador A é hermitiano,

$$\langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle = \langle \phi | A | \psi \rangle \quad (2.9)$$

sempre para quaisquer $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Temos, então, que toda quantidade física mensurável Q é descrita por um operador hermitiano A atuando em \mathcal{H} , sendo este operador um observável.

Quando o sistema se encontra em um estado que é um autoestado do operador A , a medição do observável Q dará como resultado, com certeza, o autovalor correspondente. O único resultado possível da medição de uma quantidade física é um dos autovalores do operador A correspondente.

11.2.3 - Comutatividade dos observáveis: Uma vez apresentado o conceito de observável e sua ligação com um operador definido sobre um espaço de Hilbert, convém estabelecer algumas características destes operadores.

Matematicamente, temos para os operadores lineares uma operação de multiplicação definida por

$$A B |\psi\rangle = A (B |\psi\rangle), \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (2.10)$$

Se o produto assim definido for comutativo, de tal forma que

$$A B = B A \quad (2.11)$$

dizemos que os dois operadores A e B comutam entre si. Podemos agora definir o comutador $[A, B]$ de dois operadores, que é uma transformação que associa a dois operadores A, B um único operador

$$[A, B] = A B - B A \quad (2.12)$$

que não se anula quando os operadores não comutam entre si.

11.2.4 - Conjunto completo de observáveis comutáveis (CCOC): Uma propriedade muito importante de dois operadores A e B que comutam entre si é a possibilidade de se construir uma base ortonormal do espaço dos estados com autovetores comuns a estes operadores.

Um conjunto de observáveis A, B, C, \dots é chamado um CCOC se todos eles comutam por pares, e se existe uma única base de autovetores comuns a estes operadores (a menos de fatores de fase). Deste mo-

do, especificando-se um autovalor de cada um dos operadores A , B , C , ..., fica determinado um único autovetor comum a estes operadores, a menos de um fator multiplicativo. Por exemplo, um operador cujos autovalores são todos não degenerados forma, por si só, um CCOC. Para um dado sistema, existem vários CCOC, como por exemplo os dois formados pelas três coordenadas da posição e do momento do sistema.

11.2.5 - Representações: Escolher uma representação significa escolher uma base ortonormal, discreta ou contínua, no espaço dos estados \mathcal{H} , sendo então os vetores e operadores representados, nessa base, por **números**: componentes no caso de vetores, e elementos de matriz no caso dos operadores.

Para o caso de uma base discreta $\{|u_i\rangle\}$, as componentes de um vetor estado $|\Psi\rangle$ são dadas por

$$c_i = \langle u_i | \Psi \rangle, \text{ sendo então } |\Psi\rangle = \sum c_i |u_i\rangle \quad (2.13)$$

podendo ser arranjadas na forma de uma matriz-coluna. Por sua vez, um operador A tem os seus elementos

$$A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle \quad (2.14)$$

na mesma base, formando uma matriz quadrada hermitiana.

Para o caso de uma base contínua, a situação é semelhante. Mas agora as componentes do vetor estado formam um conjunto infinito contínuo de números (um eixo), enquanto que os elementos matriciais passam a ser pontos definidos por dois eixos perpendiculares. Um caso muito importante de representação contínua é a representação $\{|r\rangle\}$, a base de autovetores do operador posição R , em cuja base a função de onda $\Psi(r)$ é o componente do ket $|\Psi\rangle$, servindo r de índice.

A representação matricial de um operador A permite definir um conceito característico de matrizes: o traco do operador A ,

$$\text{Tr } A = \sum_i \langle u_i | A | u_i \rangle \quad (2.15)$$

que é invariante por uma mudança da base de vetores ortonormais escolhida.

11.2.6 - Valor médio de um observável: Se temos um sistema físico no estado $|\Psi\rangle$, então o valor médio de um observável A naquele sistema é dado por

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \quad (2.16)$$

O valor médio é o único resultado previsto pela mecânica quântica que não é expresso explicitamente em termos de probabilidades. Para ser verificado experimentalmente, no entanto, é necessário fazer um número grande de medições independentes da quantidade física Q sobre o sistema e tirar a média dessas medições.

Quando uma quantidade física Q é medida sobre um sistema no estado normalizado $|\Psi\rangle$, a probabilidade $P(a_n)$ de se obter o autovalor a_n (por simplicidade, trataremos apenas do caso não-degenerado) do observável correspondente A é:

$$P(a_n) = |\langle u_n | \Psi \rangle|^2 = |c_n|^2 \quad (2.17)$$

11.2.7 - A lei dinâmica - a equação de Schroedinger: A lei dinâmica ou equação de movimento que rege a evolução temporal do vetor estado $|\Psi(t)\rangle$ é a equação de Schroedinger (para situações não-relativísticas):

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (2.18)$$

onde $H(t)$ é o operador hamiltoniano do sistema e está associado à energia total do sistema. Deste modo, a equação, por meio de $H(t)$, depende do sistema físico em consideração.

A evolução temporal pode ser também representada por meio de um operador evolução, que é um operador unitário $U = U(t, t_0)$, tal que

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (2.19)$$

sendo $U(t, t_0)$ determinado a partir da equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) \quad (2.20)$$

11.2.8 - O Postulado de Projeção: O postulado de projeção estabelece que, se a medição de uma quantidade física \hat{A} sobre um sistema num estado $|\Psi\rangle$ dá como resultado o operador a_n de \hat{A} , então o estado do sistema imediatamente após a medição é a projeção normalizada de $|\Psi\rangle$ sobre o autosubespaço associado a a_n :

$$\frac{P_n |\Psi\rangle}{[\langle \Psi | P_n | \Psi \rangle]^{1/2}} \quad (2.21)$$

sendo P_n o operador de projeção sobre o autosubespaço definido pelo autovalor a_n e que, para casos não degenerados, é definido por

$$P_n = |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| \quad (2.22)$$

onde $|\Psi_n\rangle$ é o autoestado associado ao autovalor a_n .

Como se verá no capítulo III, quando se tratar do problema de medição, este postulado vem sendo muito criticado, principalmente após os trabalhos de Margenau (1958, 1963a,b).

11.2.9 - Operador densidade e o formalismo das matrizes de densidade: O operador densidade é uma ferramenta matemática muito importante, já que inclui no formalismo o fato de nem sempre se ter uma informação completa acerca do estado do sistema. É, portanto, uma maneira de incluir probabilidades de ignorância no formalismo da mecânica quântica. Temos que salientar, aqui, que a probabilidade aparece em dois níveis distintos na mecânica quântica. Num primeiro nível, temos a probabilidade intrínseca decorrente da própria interpretação da função de onda como portando apenas informações probabilísticas acerca do sistema. No segundo nível, temos o que chamamos de probabilidade de ignorância, que é a probabilidade que aparece nas teorias clássicas, como a mecânica estatística clássica. No capítulo III, veremos a importância que esses dois níveis de probabilidade têm na caracterização da mecânica quântica.

O estado do sistema pode ser definido por meio do operador densidade que, por definição, deve ser hermitiano, não negativo e de traço unitário. Qualquer operador assim pode ser diagonalizado em termos de seus autovalores e autovetores, sendo dado por

$$\rho = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| \quad (2.23)$$

com $0 \leq p \leq 1$ e $\sum_n p_n = 1$, p_n sendo a probabilidade de termos o sistema no estado $|\Psi_n\rangle$.

Quando sabemos com certeza que o sistema está em um estado $|\psi\rangle$, então tais probabilidades de ignorância não mais existem e

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.24)$$

é o que se chama um estado puro ($\rho^2 = \rho$). Neste caso o estado do sistema pode ser descrito por uma superposição de estados, por exemplo,

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle + \dots + c_k |\psi_k\rangle \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^k |c_i|^2 = 1$$

Um estado mais geral, chamado estado misto (ou mistura de estados) e não representável na forma de uma superposição de estados, já inclui tais probabilidades de ignorância relativas ao estado inicial do sistema, uma vez que ele não é bem determinado, p_n indicando a probabilidade dele estar no estado $|\psi_n\rangle$.

No capítulo III, a diferença entre esses dois tipos de estado será analisada com bastante detalhe.

Escolhida uma representação, temos para o operador densidade uma matriz densidade. Por meio dessa matriz densidade, podemos reescrever os conceitos já definidos no formalismo em função do operador

(a) valor médio de um observável:

$$\langle A \rangle = \text{Tr} (\rho A) \quad (2.16')$$

(b) probabilidade de obtermos, numa medição do observável A , o autovalor a_n :

$$P(a_n) = \text{Tr} (P_n \rho) \quad (2.17')$$

(c) lei dinâmica (equação de Schroedinger):

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H(t), \rho] \quad (2.18')$$

(d) atuação do operador evolução:

$$\rho = U \rho(t_0) U^\dagger \quad (2.19')$$

Estas expressões fazem parte do formalismo de matrizes de densidade, estabelecido a partir da definição do operador densidade, como o fizemos no início desta secção.

* * * * *

De uma maneira bastante resumida, esses são os elementos básicos do formalismo da mecânica quântica, e que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Apenas uma observação deve ser feita acerca da notação, com relação a observáveis e operadores: o fato de algumas vezes utilizarmos a notação A para denotarmos o observável Q implica que tratamos da quantidade física, tendo implícito o seu carácter de operador (com os respectivos autovalores e autoestados).

III - AS INTERPRETAÇÕES DA MECÂNICA QUÂNTICA

III.1 - Introdução

III.2 - A Interpretação de Copenhagen

III.3 - Interpretação Estatística da Mecânica Quântica

III.4 - Aspectos problemáticos das duas interpretações

Dentre as várias interpretações físicas existentes para o formalismo matemático da mecânica quântica, duas serão tratadas com um enfoque especial: a interpretação de Copenhague e a interpretação estatística.

Originalmente, estas interpretações estiveram ligadas a duas das correntes de pensamento sobre os fundamentos da mecânica quântica, já na época do aparecimento da teoria. A interpretação de Copenhague associa-se, historicamente, os pontos de vista de Bohr e Heisenberg, entre muitos outros; e à interpretação estatística, principalmente os de Einstein, De Broglie e Schroedinger. Na realidade, o que hoje se convencionou designar por estes nomes são grupos de pontos de vista que têm pelo menos um aspecto em comum: a interpretação do conceito de estado quântico de um sistema. Deste modo, os pontos de vista que consideram que um estado puro forneça uma descrição completa e exaustiva de um sistema individual, são englobados sob a denominação genérica de interpretação de Copenhague. Muito embora tenham o mesmo ponto de vista com relação a esse aspecto do estado quântico, as posições de Bohr, Heisenberg, Wigner, Dirac e outros, são diferentes em vários outros aspectos.

Os pontos de vista estatísticos são aqueles que consideram que um estado quântico forneça uma descrição relativa a um ensemble de sistemas preparados de maneira idêntica, e não uma descrição completa de um sistema individual. Assim como no caso de Copenhague, os pontos de vista de Einstein, Popper, Bohm, Landé e de Broglie, entre outros, são bem diferentes entre si, embora tenham todos o mesmo caráter estatístico definido acima. Um bom resumo da interpretação estatística encontra-se em Ballentine (1970).

Conforme comentamos na introdução geral do trabalho (Cap. I), os vários pontos de conflito nos fundamentos da mecânica quântica surgem quando da tentativa de analisarmos, por um ponto de vista clássico, os aspectos probabilísticos da teoria tidos como fundamentais pela interpretação de Copenhague. Questões que surgem quando buscamos um ponto de vista alternativo ao "ortodoxo", e que são questões irrelevantes se acatamos a interpretação de Copenhague e o caráter não realista e não-local do mundo que ela descreve. O que se tem são os problemas já mencionados no capítulo I: o paradoxo onda-partícula, o princípio de incerteza, o paradoxo de EPR e a desigualdade de Bell, e a inexistência de uma função distribuição de probabilidades conjunta. São problemas, em especial, para a interpretação estatística e, de uma maneira mais geral, para qualquer interpretação que pretenda ser realista e local.

O outro ponto de debate nos fundamentos, o problema de medição, pelo contrário, está fundamentalmente ligado à concepção ortodoxa do estado quântico de um sistema. A primeira formalização do processo de medição foi elaborada por von Neumann (1932). Se se assume que a mecânica quântica tenha validade irrestrita, ou seja, que a estrutura

geral da mecânica quântica tenha validade irrestrita, de modo que todas as observações que se faça sobre um sistema impliquem em previsões apenas estatísticas, a teoria de von Neumann, se seguida às últimas consequências, leva a um dilema epistemológico (Jauch et al, 1967). Qual seja, ou se assume que a mecânica quântica nada diz acerca da "realidade física", sendo apenas um algoritmo para fazer previsões estatísticas acerca de resultados de experimentos; ou se assume que o vetor estado seja uma descrição da realidade física, o que leva ao problema de medição, qual seja, ao problema do colapso do pacote de ondas. A tentativa de solucionar o problema de medição sem abandonar a interpretação de Copenhagen leva a vários pontos de vista distintos dentro desta interpretação.

Esta controvérsia dentro da interpretação adotada na grande maioria dos livros textos foi, até o aparecimento do trabalho de Bell (1964), o tema mais visitado pelos estudiosos dos fundamentos da mecânica quântica. Pode-se mencionar que, num levantamento bibliográfico realizado por Scheibe (1968), mais da metade dos 578 trabalhos publicados até então sobre os fundamentos eram referentes ao problema de medição. Apesar de toda a relevância que continua tendo, o problema não será tratado com muita ênfase neste trabalho, uma vez que a complexidade de cada ponto de vista acerca do assunto é grande, o que exigiria muito tempo de dedicação a cada um deles. Além disso, o problema de medição é, por si só, um problema filosófico, na medida em que ele se mistura com a própria teoria do conhecimento. Tentaremos não entrar nos aspectos filosóficos, até onde for possível, e procuraremos fazer uma análise do problema por meio dos conceitos físicos que a mecânica quântica e a física clássica nos colocam à disposição.

Deste modo, nos limitaremos a apresentar o problema de medição da maneira como ele aparece dentro da interpretação de Copenhagen, e não dedicaremos a ele um capítulo especial. Na secção III.2 apresentaremos a interpretação de Copenhagen, a sua estrutura básica e mencionaremos brevemente alguns dos vários pontos de vista que nela se alinham. De maneira semelhante apresentaremos a interpretação estatística na secção III.3. Finalmente, na secção III.4 procuraremos mostrar as vantagens e desvantagens destas duas interpretações, assim como as motivações que levaram uns e outros a optarem por uma ou outra interpretação. O formalismo da medição, por não estar intrínsecamente relacionado com uma ou outra interpretação, mas sim com o formalismo da teoria, será apresentado no Apêndice 1.

III.2 - INTERPRETAÇÃO DE COPENHAGEN

III.2.1 - Aspectos gerais da interpretação:

O que se entende por interpretação de Copenhagen compreende algumas das primeiras tentativas de sistematizar, numa abordagem gnosiológica, os novos e revolucionários aspectos da natureza, revelados pela "teoria dos quanta". As implicações filosóficas da interpretação representam uma ruptura no modo de pensar a física, como sendo uma ciência que se ocupa de uma realidade imanente a si mesma, a cavaleiro de qualquer conotação subjetiva. Pelo contrário, a interpretação de Copenhagen, não obstante possuir hoje em dia várias facetas ou pontos de vista distintos entre si (Ballentine fala em 'várias versões' da interpretação), não é de tendência a admitir aquela realidade, que diremos objetiva, e muito menos a causalidade que sempre esteve presente na física clássica.

De um modo bastante geral, pode-se dizer que a formulação desta interpretação deveu-se principalmente a Bohr e a Heisenberg, mas foram muito importantes, se não essenciais, as contribuições de Born, Jordan, Kramers, Dirac e muitos outros que deixaremos de mencionar. Pauli, embora não tenha se envolvido com profundidade nos debates, acaçava sem restrições o ponto de vista de Bohr-Heisenberg. Uma vez ter sido Copenhagen o centro principal de gestação da interpretação (ao lado de Göttingen, onde trabalhavam Born, Heisenberg, Pauli, von Neumann), e devido ao fato de que todos os que mencionamos terem lá estado para discutir com Bohr os seus pontos de vista, é conveniente que tratemos a interpretação como refletindo o pensamento do que se costuma chamar 'Escola de Copenhagen', muito embora as influências mais marcantes sejam mesmo as de Bohr e Heisenberg.

Neste trabalho, apresentaremos a interpretação de Copenhagen seguindo o ponto de vista de Bohr-Heisenberg, que forma o arcabouço da interpretação. Muito embora seja a interpretação mais aceita pela grande maioria dos físicos, ela apresenta um problema sério (problema de medição), que será analisado na secção III.4. Deste modo, utilizaremos, como uma caracterização mais ampla e atual da interpretação, englobando os vários outros pontos de vista que possam ser considerados na linha de Copenhagen, no sentido de possuírem em comum vários aspectos estruturais mas diferirem basicamente na apologética desta estrutura. Estes vários pontos de vista têm como principal ponto em comum o fato de interpretarem o estado quântico puro como fornecendo uma descrição completa e exaustiva de um sistema individual (nota 3.1). Salienciamos este aspecto por ser justamente o mais problemático, fundamental para o aparecimento do problema de medição. É principalmente em função deste problema, na tentativa de solucioná-lo, que vários dos pontos de vista se originam. A motivação para se assumir tal posição com relação ao estado quântico, no entanto, é muito forte, e a estudaremos na secção III.4.

Pode-se dizer, de um modo bastante geral, que a interpretação de Copenhagen se baseia em três aspectos fundamentais que a distin-

quem da física clássica: o princípio de complementaridade, o princípio de incerteza e a interpretação probabilística da função de onda que descreve o estado de um sistema. Todos esses três aspectos, da maneira como são interpretados por Copenhagen, levam a consequências conflitantes com as concepções clássicas que temos do mundo físico. Um desenvolvimento histórico sobre o aparecimento da interpretação, mais precisamente, dos três aspectos assinalados acima pode ser encontrado de uma maneira sintética em Selleri (1986), e aprofundada em Jammer (1966, 1974).

O aparecimento desses três aspectos básicos está intrinsecamente relacionado com a conjuntura científica da época em que surgiram. Em sua forma original, todos eles apareceram praticamente na mesma época: complementaridade (1927), incerteza (1927) e a interpretação probabilística (1926). Salientaremos também, nessa conjuntura, a influência do trabalho de Schroedinger.

III.2.2 - A interpretação probabilística da função de onda:

Quando citamos a interpretação devida a Schroedinger, que tentava interpretar a mecânica quântica como uma teoria eletromagnética, não aceitando a existência de partículas e reduzindo luz e matéria a fenômenos puramente ondulatórios, deixamos de mencionar a sua importância histórica. As maiores contribuições da interpretação eletromagnética de Schroedinger foram, primeiramente, o formalismo desenvolvido como substrato a ela, e que hoje está presente em todos os livros textos sobre mecânica quântica, juntamente com a mecânica matricial de Heisenberg (nota 3.2); e a discussão a que deu margem, influenciando, em especial, a Born, que interpretou as ondas de Schroedinger como ondas meramente probabilísticas. Na interpretação de Born (1926) o valor de Ψ em um ponto é considerado como sendo a medida de probabilidade de se encontrar ali a partícula ou quantum de luz descrito pela função de onda. A onda em questão não tem qualquer aspecto de realidade, propagando-se no espaço abstrato das configurações. As ondas Ψ de Schroedinger definiriam apenas uma densidade de probabilidade dada por $|\Psi|^2$ (sendo observáveis apenas por meio da medida desta), não representando qualquer propriedade real do sistema físico ao qual ela está ligada, introduzindo um caráter probabilístico irredutível, intrínseco, na formulação quântica do sistema. Segundo ele, "o movimento das partículas segue leis probabilísticas, mas a função distribuição de probabilidades se propaga segundo uma lei causal" (citação em Selleri, 1986, p.95). Esta lei causal é a equação de Schroedinger e a probabilidade intrínseca aí envolvida não é, como a que ocorre na mecânica estatística clássica, uma probabilidade de ignorância. Ela não dá lugar a especulações acerca da existência de variáveis outras, até então desconhecidas, que poderiam vir a eliminar esse caráter probabilístico. Juntamente com a interpretação probabilística da função de onda, Copenhagen assevera que esta função de onda provê a descrição mais completa possível do sistema físico. Estas duas considerações juntas dão o caráter não-causal da interpretação. A motivação para se assumir esta não-causalidade é, em parte, o princípio de incerteza.

De um certo modo, na década de 1920 definiram-se os rumos que

norteariam os trabalhos nos fundamentos que se apresentaria a partir de então. De um lado a tendência a buscar uma maneira de trazer de volta a física ao mundo das nossas intuições, dos fenômenos macroscopicamente imagináveis, da realidade objetivamente existente e das relações de causa e efeito. Do outro lado, a tendência a negar todos esses pressupostos que, por longa data, guiaram os caminhos da pesquisa científica, sendo mesmo tomados como sendo o embasamento filosófico da ciência, assumindo a não-causalidade e impondo limitações no que tange ao conhecimento completo da realidade. Aquela época, o centro das discussões era a duplicidade de comportamento da luz e dos sistemas microscópicos, em especial do elétron. O fato da luz e do elétron se comportarem ora como ondas, ora como partículas, levou ao aparecimento de vários pontos de vista em que se tentava uma redução de um caráter ao outro (Schroedinger), ou se admitia a coexistência desses aspectos (de Broglie), ou ainda em que se assumia uma atitude filosoficamente pragmática acerca do assunto, relacionando intrínsecamente um determinado comportamento do objeto a um determinado arranjo experimental. Este último caso representa a posição assumida por Bohr, e que foi adotada por muitos dos que defendem a interpretação de Copenhagen. Por essa época, não havia ainda uma axiomatização da teoria, que apareceria com o trabalho de von Neumann (1932), de modo que tanto o princípio de incerteza, quanto o de complementaridade e a interpretação probabilística de Born foram originalmente formuladas dentro do contexto do paradoxo onda-partícula.

III.2.3 - O princípio de incerteza de Heisenberg:

O princípio de incerteza, formulado por Heisenberg em 1927, será analisado com mais detalhe no capítulo VI. Existem várias tentativas de interpretar a desigualdade, fora do escopo de Copenhagen. Para o momento importa como o princípio foi formulado de modo a ter influenciado na elaboração da interpretação. Em sua formulação original, que desde então é a que mais frequentemente se encontra repetida nos livros textos, o princípio limita a possibilidade de se conhecer, simultaneamente, os valores da posição x e do momento p de uma partícula microscópica, uma vez que uma medição de x causaria uma perturbação imprevisível e incontrollável de p , e vice versa (3.1). Do mesmo modo formula uma relação semelhante entre energia e tempo (3.2).

$$\Delta p \cdot \Delta x \leq \hbar/2 \quad (3.1)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \leq \hbar/2 \quad (3.2)$$

A descoberta das relações de incerteza e os experimentos de Compton e Simon (1925) e Bothe e Geiger (1925), que refutaram a teoria eletromagnética com que Bohr, Kramers e Slater (1924) tentaram resolver o problema da dualidade onda-partícula (nota 3.3), foram muito importantes para que Bohr acomodasse a sua concepção de mundo, o dualismo, no que denominou princípio de complementaridade (Selleri, 1986). O princípio foi apresentado pela primeira vez durante o Congresso Internacional de Física, em Como, Itália, em 1927 (Jammer, 1974), e desde então

tem sido interpretado das mais diversas maneiras e aplicado nas mais diversas áreas do conhecimento. Tomando como base a exposição de Selleri (1986), o introduziremos agora.

III.2.4 - Princípio de complementaridade:

No capítulo 'A Interpretação de Copenhagen da Teoria Quântica', em seu *Physics and Philosophy*, Heisenberg (1958) diz que o ponto de partida dessa interpretação é um paradoxo: vivemos em um mundo macroscópico que concebemos causal, de fenômenos que concebemos ocorrerem dentro de uma estrutura espaço-temporal, e os conceitos que formulamos de nossa interação com este mundo assim concebido são os únicos de que dispomos para podermos representar o mundo microscópico. Para Bohr, a existência do quantum de ação finito (h , a constante de Planck) implica que não podemos assumir a validade dos conceitos e teorias clássicas (no sentido macroscópico) fora do âmbito em que foram elaborados, isto é, para o domínio microscópico (Bohr, 1949). Para ele, causalidade é sinônimo de um processo que se verifica conforme regras bem definidas que são, na prática, as leis de conservação da energia e do momento. Deste modo, se analisarmos o significado experimental das consequências de se assumir a causalidade, assumindo também as relações de incerteza de Heisenberg, temos que para um dado processo físico, as leis de conservação de energia e momento para uma partícula implicam em:

$$\Delta E = 0 = \Delta p \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \Delta t = \infty = \Delta x,$$

ou seja, na completa ausência da determinação da localização espaço-temporal da partícula. Adotando uma posição positivista, Bohr argumentou que esta falta completa de determinação significa que, para a situação considerada, espaço e tempo simplesmente não existem. A situação inversa é semelhante, pois se considerarmos a espaço-temporalidade concretizável para o objeto, então não teremos as relações causais de conservação, carecendo de sentido falar-se em causalidade neste caso. Daí conclui Bohr a existência de uma relação complementar entre a causalidade e a coordenação espaço-temporal. Conclusão similar se obtém, a partir da consideração acima, estudando a dualidade onda-partícula: o caráter ondulatório e o corpuscular são complementares, no sentido de que jamais ocorrem simultaneamente (uma abordagem simples é feita por Heisenberg, 1930, p.64). Contorna-se assim o problema da dualidade.

O princípio de complementaridade é hoje muito mais abrangente do que foi até aqui exposto. Ele está intrinsecamente relacionado com o princípio de incerteza de Heisenberg. Por este princípio, uma descrição exhaustiva de um sistema físico só é possível em meio a observáveis cujos operadores sejam compatíveis entre si, ou seja, dentro de um conjunto completo de observáveis comutáveis, o que não engloba todos os observáveis necessários para descrever o sistema de um modo completo. Os aspectos que correspondem a observáveis cujos operadores não comutam entre si são complementares. Seguindo o princípio de incerteza como o formulamos anteriormente e a concepção de Bohr de que a

propriedade do sistema está intrinsecamente relacionada com o aparato experimental que se utiliza para medi-la, Fock (1962) reenunciou o princípio de complementaridade como um princípio de relatividade com relação aos meios de observação. Deste modo, reafirmando o ponto de vista de Bohr, não se pode falar em propriedades de um sistema sem que se possa medi-las. Aqui cabe incluímos um outro aspecto do pensamento de Bohr-Heisenberg. Segundo Heisenberg (1930), uma das consequências dessa ligação intrínseca entre aparelho e sistema é que, a nível de descrição quântica eles são indistinguíveis entre si, e a separação objeto-aparelho só pode ser feita arbitrariamente. Deste modo, a função de onda (que evolui de acordo com a equação de Schroedinger) descreveria apenas o sistema conjunto. Este ponto foi muito enfatizado por Bohr em sua defesa contra EPR. Se considerarmos como objetivos os resultados de observações em que seja possível fazer uma distinção precisa entre a ocorrência observada e os métodos de observação (Schlick, 1949), de modo a excluir, assim, qualquer influência subjetiva, temos que essa posição de Bohr nega a possibilidade de uma descrição objetiva da realidade. Veremos nos capítulos que seguem, que características de onda (interferência) e de partícula (trajetória) não foram até hoje simultaneamente detectadas experimentalmente. Do mesmo modo, posição e momento não podem ser medidos simultaneamente (paradoxo de EPR), o que é o que Jammer (1974) chama de a versão de Pauli do princípio de complementaridade.

O princípio de complementaridade, embora plenamente aceito como indispensável pelos vários proponentes da interpretação de Copenhagen, teve suas consequências ontológicas consideradas das mais diversas maneiras por esses mesmos proponentes. Para Feyerabend (1958), por exemplo, o princípio, como formulado por Bohr, afirma que a única maneira possível de, a nível microscópico, poder-se utilizar o conceito de objeto quântico, é admitindo a sua caracterização como um conjunto de 'aparências' (clássicas), sem que qualquer indicação seja dada acerca de sua natureza. Já Jordan (1936) adotou um ponto de vista segundo o qual não é papel da mecânica quântica "ir além da experiência e entender a essência das coisas". De qualquer maneira, pode-se dizer que a tendência mais incisiva de Copenhagen é em direção a uma posição positivista e pragmática.

As três assumpções acima formam a base da interpretação de Copenhagen. Certamente o ponto mais crucial é o princípio de complementaridade, já que os outros dois são enquadráveis dentro de uma interpretação estatística, formulados de outra maneira.

As influências filosóficas mais marcantes na formação do ponto de vista de Bohr foram Kierkegaard (Selleri, 1986) e William James (Stapp, 1972; Jammer, 1966). Salienta Selleri que Bohr fora, na juventude, muito ligado à filosofia existencialista de Kierkegaard, cuja dialética qualitativa tinha como uma das bases a declaração de que as contradições na vida e na natureza são rígidas e impossíveis de superar. De um certo modo, Bohr estende ao princípio de complementaridade essa posição filosófica. A influência de James é mais perceptível e se deu tanto por meio de sua psicologia quanto por meio de seu pragmatismo, o qual responde muito pela posterior falta de interesse da grande

maioria dos físicos no que tange à fundamentação da teoria quântica. Na concepção pragmática de James (1909), a verdade de uma idéia só pode ser aferida pela sua funcionalidade, ou, em outras palavras, uma idéia é verdadeira se ela é eficaz. Eficaz no sentido de prever os resultados de situações experimentais bem definidas. Pode-se mesmo dizer que o pragmatismo de James é uma filosofia dos resultados, onde o conhecimento possui um caráter teleológico. Testar é esforçar-se por distinguir entre o falso e o verdadeiro através dos resultados. O objetivo da ciência seria apenas aumentar e ordenar a nossa experiência, e não construir uma imagem mental ou matemática do mundo. Stapp (1972) faz uma análise bem detalhada da influência dessa corrente filosófica sobre o ponto de vista de Bohr. Para Stapp, Bohr não questionava a existência de uma realidade externa e aceitava a hipótese de que nossas experiências físicas ocorressem, em parte, causadas por ela. Para Bohr, a questão era saber se a descrição clássica das experiências garantiriam uma comunicação inambígua e a objetividade. A posição pragmática está em considerar a utilização da linguagem clássica apenas como uma questão de conveniência, sendo o preço a pagar por isto justamente a imprecisão da descrição que se faz do sistema microscópico. Segundo Stapp, a noção de complementaridade de Bohr é inteiramente pragmática: "As idéias devem ser julgadas pela sua utilidade; as idéias físicas deveriam ser julgadas por seu sucesso em ordenar a experiência física, não pela precisão com a qual se acredita que elas espelhem a essência da realidade externa" (Stapp, 1972, p.1107). Mesmo a afirmação de completeza da teoria quântica é formulada de modo pragmático: a teoria quântica é completa porque nenhuma teoria que se elabore pode fornecer previsões experimentalmente verificáveis que não possam ser obtidas a partir de uma descrição quântica.

Outros aspectos ligados à interpretação de Copenhagen aparecerão no decorrer do trabalho. De qualquer maneira, há de se salientar que o ponto de vista de Bohr-Heisenberg não é muito claro e que a interpretação em si forma um corpo heterogêneo de pontos-de-vista que torna difícil uma abordagem simples e completa. O que se expôs aqui forma a base da interpretação. As variações que aparecem, como a posição Subjetivista de Heisenberg, serão mencionadas no apêndice 1, juntamente com algumas das tentativas de contornar o problema de medição, dentro de Copenhagen.

Conforme já foi enunciado na introdução deste capítulo, as "interpretações estatísticas" são aquelas que associam a um estado puro a descrição de propriedades estatísticas de um ensemble de sistemas similarmente preparados. Ao contrário do ponto de vista ortodoxo, o estado puro não fornece, necessariamente, uma descrição completa de um sistema individual. Assim como ocorre com a interpretação de Copenhagen, no entanto, existem vários pontos de vista distintos dentro do que convencionamos chamar interpretação estatística.

Historicamente, a primeira proposta de uma interpretação estatística foi formulada por Einstein, por ocasião do Congresso Solvay de 1927. A teoria quântica não seria uma teoria completa do mundo microscópico, de modo que as probabilidades envolvidas no formalismo, longe de serem intrínsecas a ele, fossem probabilidades de ignorância, num sentido semelhante ao em que as temos na mecânica estatística clássica. Segundo Einstein (1936) "a função ψ de modo algum descreve uma condição relativa a um único sistema: ao contrário, ela se refere a muitos sistemas, a um 'ensemble de sistemas' no sentido da mecânica estatística." A motivação para tal proposta foi principalmente a assumpção de que o vetor estado pudesse descrever exhaustivamente um sistema individual (Einstein, 1949). Essa assumpção de completeza se relaciona com a irredutibilidade do caráter estatístico da mecânica quântica e com a consequente não causalidade daí advinda. Além disso, o ponto de vista de Bohr acerca da relação aparelho-objeto leva a situações em que a não localidade está implícita (ver paradoxo de EPR). Ou seja, como já salientamos anteriormente, o ponto de vista de Copenhagen destrói muitas concepções mas não coloca outras em seu lugar. O ponto de vista estatístico proposto por Einstein encontrou vários adeptos, entre os quais os mais ativos foram Ehrenfest, Slater, Langevin, Kemble e Blokhintsev (Jammer, 1974).

No entanto, se se considera que as probabilidades envolvidas na mecânica quântica não são intrínsecas a ela, mas são 'probabilidades de ignorância', então a interpretação estatística traz implícita um determinismo que só não se manifesta na formulação quântica devido ao desconhecimento de todas as variáveis envolvidas em cada processo de medição. Ou seja, pressupõe a existência de variáveis outras que não as envolvidas na formulação e que, conhecidas, dariam à teoria um caráter determinístico. Tais variáveis, denominadas "variáveis escondidas" (ver tópico relativo ao paradoxo de EPR), seriam desconhecidas devido à sua inacessibilidade, no estágio atual do desenvolvimento tecnológico, e as distribuições estatísticas da teoria quântica seriam, então, médias sobre estas variáveis.

Quando, em 1932, von Neumann publicou a sua famosa prova da impossibilidade de se ter teorias de variáveis escondidas cujos resultados fossem compatíveis com os previstos pela mecânica quântica, e que foi quase que unanimemente acatada como conclusiva, o interesse pela interpretação estatística diminuiu muito. O brilhante desempenho

da teoria na descrição dos fenômenos fez com que se preterisse o ponto de vista estatístico, poucos sendo aqueles que se mantiveram a defendê-lo. Além de Einstein e daqueles que aderiram ao seu ponto de vista, duas outras interpretações estatísticas em especial, foram apresentadas, não obstante a prova de von Neumann: a de Popper, desenvolvida no início da década de 1930, fundamentada numa interpretação "propensitiva" da probabilidade e que objetivava, inicialmente, prover para as relações de incerteza de Heisenberg uma interpretação estatística; e a de Landé, desenvolvida a partir da década de 1950, segundo a qual a 'estatística quântica' seria derivada de um princípio de continuidade de causa e efeito: "...um aumento gradual de causa leva a um aumento gradual de efeito." (Landé, 1973, p.79)

A publicação, por Bohm (1952), de uma teoria de variáveis escondidas com previsões idênticas à da mecânica quântica, fez com que se renovasse o interesse pela prova de von Neumann e se atentasse à sua possível não universalidade. Jammer (1974) enfoca o amplo debate pró e contra a legitimidade das variáveis escondidas e da prova de von Neumann, suscitado pelo trabalho de Bohm. Maiores detalhes sobre o trabalho de von Neumann, serão apresentados no Apêndice 2.

De um certo modo, pode-se dizer que o reacendimento da discussão em torno da interpretação estatística tomou novo ânimo após os trabalhos de Bell. Questionando não a correção matemática da prova de von Neumann, mas sim a sua relevância física, Bell (1966) apresentou uma crítica a uma das premissas assumidas, implicando em sérias restrições à demonstração, restrições estas extendidas às reformulações posteriores do argumento de von Neumann devidas a Jauch e Piron (1963) e a Gleason (1959).

Ballantine (1970) publicou um artigo onde apresenta a interpretação estatística, da maneira como a enunciamos anteriormente. A exposição que se seguirá tem por base esse artigo.

Recapitulando, a base da interpretação estatística é a asserção de que um estado quântico representa um ensemble de sistemas preparados de uma mesma maneira. A figura 3.1 exemplifica bem que, implícito ao conhecimento de um estado quântico está um processo de preparação ou, citando as palavras de Ballentine, "um estado quântico é uma representação matemática do resultado de um certo procedimento de preparação de estado". Quanto ao fato do estado quântico prover uma descrição completa de um sistema individual, o princípio de incerteza impõe limitações na preparação do estado, no que tange a quantidades físicas representadas por operadores que não comutam entre si. Assim sendo, não é possível preparar o estado de modo que todos os elementos do ensemble tenham todas as propriedades idênticas, o que ocorreria caso tal descrição completa se verificasse. Deve-se ter sempre em mente que a noção de ensemble, em princípio idêntica à utilizada na mecânica estatística clássica, envolve réplicas imaginárias de um sistema, daí o raciocínio acima.

A diferença entre o ensemble em questão e aquele da mecânica estatística se manifesta não na idéia básica do ensemble em si, mas pelo fato de que a confrontação das previsões com a experimentação não se obtém por meio de uma única medição sobre um único sistema. Ao con-

trário, é necessário aqui que se efetue a medição sobre um número tão grande quanto possível de sistemas, todos preparados de maneira idêntica, e confrontar as previsões com a média dessas medições, o que significa que a noção de ensemble é estendida também a nível experimental.

Convém salientar a diferença entre a previsão quântica no caso, que é uma probabilidade obtida como uma frequência relativa dos vários resultados possíveis de uma medição, a partir de considerações matemáticas sobre um ensemble abstrato, conceitual, de réplicas da situação experimental de interesse; e o resultado da sequência de experimentos, que é uma frequência estatística. Para Popper (1967), um dos sérios erros cometidos pelos defensores do ponto de vista de Copenhagen foi confundir a distribuição de probabilidades oferecida pela mecânica quântica e que, na interpretação estatística é uma propriedade do estado (do ensemble), com uma propriedade física de um sistema individual (equivalentemente, dos elementos do ensemble). A esta confusão de conceitos, Popper denominou "the Great Quantum Muddle" que, segundo ele, levou ao aparecimento do paradoxo da dualidade onda-partícula e, como consequência, ao princípio de complementaridade (Jammer, 1974).

Sendo a distribuição de probabilidades uma propriedade do estado, diferentes interpretações da probabilidade implicam em diferentes interpretações do estado quântico (Popper, 1967). Deste modo, a interpretação já citada de Popper está relacionada com uma interpretação tipo frequência relativa, enquanto que a de Heisenberg leva em conta uma interpretação 'subjetivista' da probabilidade como medida de conhecimento (muito embora seja um ponto de vista dentro de Copenhagen, uma vez que para Heisenberg o estado dá as "potencialidades" de um único sistema).

Mais recentemente, outras versões da interpretação estatística foram formuladas, como as de Pearle (1967) e Park (1968), em que se tenta mostrar falhas lógicas no fato de se assumir o vetor estado como descrevendo o comportamento de um sistema individual. Não nos ocuparemos dessas várias versões por irem além do caráter introdutório do trabalho. Da maneira como caracterizamos a interpretação estatística, podemos dizer que as teorias de variáveis escondidas pressupõem uma descrição de ensemble para o estado, envolvendo probabilidades redutíveis. A interpretação estatística abre ampla liberdade com relação a tais teorias, das quais as mais famosas são as de Bohm (1952) e Bohm - Bub (1966). Também é estatística a interpretação não-ergódica, proposta por Buonomano (1978, 1980), formulada no sentido de tentar resolver o problema do paradoxo onda-partícula, assumindo o ponto de vista estatístico.

III.4 - ASPECTOS PROBLEMÁTICOS DAS DUAS INTERPRETAÇÕES

Nas duas secções anteriores mostramos os aspectos básicos das duas interpretações mais importantes, sem a preocupação de mostrar as suas falhas e as suas vantagens, uma sobre a outra, no que tange ao aspecto físico. Na verdade, alguns aspectos positivos e negativos foram mencionados, mas como dois pontos em especial são muito importantes, os deixamos para esta secção: o problema de medição e o princípio de superposição dos estados. O primeiro é um problema dentro da interpretação de Copenhague e deu origem, como tentativas para solucioná-lo, a pontos de vista completamente diferentes entre si. O problema de medição não é um problema para a interpretação estatística. O segundo é uma característica proveniente da linearidade da equação de evolução do estado quântico (Schroedinger) e representa, ao mesmo tempo, a principal motivação para que se assuma a interpretação de Copenhague, e o principal ponto de fraqueza da interpretação estatística. No entanto, o problema de medição surge justamente como uma consequência deste segundo ponto.

III.4.1 - Princípio de superposição :

A equação fundamental da mecânica quântica não relativística (equação de Schroedinger) é uma equação de primeira ordem em t , linear e homogênea. O fato de ser uma equação de primeira ordem em t garante que, dado o estado do sistema em um dado instante (estado inicial), pode-se determinar o estado em qualquer instante subsequente, não havendo portanto qualquer indeterminação na evolução temporal do estado. Devido ser a equação diferencial de Schroedinger linear e homogênea, ela tem por propriedade que a soma de quaisquer das suas soluções é também uma solução da equação. Seja a equação de Schroedinger

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (3.3)$$

Se $|\Psi_1(t)\rangle$ e $|\Psi_2(t)\rangle$ são soluções da equação, então o estado superposto

$$|\Psi\rangle = a_1 |\Psi_1\rangle + a_2 |\Psi_2\rangle \quad (3.4)$$

também é solução, e a_1 e a_2 são constantes complexas. Veremos agora que esta superposição não pode ser confundida com uma mistura estatística dos estados $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$, onde a_1 e a_2 seriam os "pesos" dos respectivos estados na mistura.

Para analisarmos o princípio de superposição, tomaremos um sistema para o qual a medição de uma quantidade física resulta em apenas duas alternativas possíveis, e.g., a componente S_z do spin do

elétron. Denotamos os dois estados possíveis, correspondentes aos autovalores $+\hbar/2$ de S_z por $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$. Um traço fundamental do formalismo quântico é que, não importa o quão complicado seja o sistema descrito, a teoria é linear, de modo que permite estados mais gerais que os dois autoestados $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$, descritos pela superposição linear dos mesmos:

$$|\Psi\rangle = a |+\rangle_z + b |-\rangle_z ; |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (3.5)$$

Qual o significado desta superposição, em termos da situação física que ela representa é um dos principais desafios para que se possa ter um entendimento dos fundamentos da mecânica quântica. Independentemente dos pontos de vista acerca desse significado, ou seja, de o estado assim descrito descrever uma única partícula ou um ensemble de partículas, temos que, pelo formalismo, a única previsão que podemos fazer com relação ao resultado de uma medição sobre o sistema é probabilística. O formalismo só nos permite dizer que a probabilidade de obtermos o autovalor $+\hbar/2$ é $|a|^2$ e que a probabilidade de obtermos $-\hbar/2$ é $|b|^2$, uma previsão que só pode ser testada quando se repete o procedimento sobre um ensemble de partículas preparadas no mesmo estado (3.5). Assim sendo, para fins práticos, temos sempre que considerar um ensemble de partículas para podermos testar as previsões.

Numa correlação com o que se verifica a nível macroscópico, pode-se pensar que tal ensemble seja composto por partículas com o valor da componente S_z já definido, mesmo antes de passarem pelo aparelho de medição. Ter-se-ia o que se chama uma "mistura de estados", estando algumas partículas no estado $|+\rangle_z$ e outras no estado $|-\rangle_z$, numa proporção dada por $|a|^2$ e $|b|^2$. A figura 3.1 dá uma ilustração da situação que descrevemos. No processo de preparação, os elétrons produzidos pelas duas fontes são selecionados de modo tal, que de cada uma delas chegue ao aparelho de medição apenas elétrons em um determinado estado. Nas duas fontes o procedimento é idêntico, exceto pelo fato de que o anteparo colocado após o aparelho de Stern-Gerlach deixe passar da fonte 1 apenas elétrons no estado $|-\rangle_z$ e da fonte 2, apenas elétrons no estado $|+\rangle_z$. Por algum processo que não interfira com o estado de spin dos elétrons, eles são postos numa mesma direção (tem-se então o estado $|\Psi\rangle$), e são feitos passar por um outro aparelho de Stern-Gerlach que, juntamente com o anteparo à sua frente, compõem o aparelho de medição. Daí a consideração de que o que se teria neste caso seria uma mistura de estados, onde $|\Psi\rangle$ representaria não um estado individual mas sim o estado de um número N de elétrons provenientes das fontes (um 'ensemble', se abstrairmos N como sendo um número infinitamente grande e fizermos, naturalmente, uma assumpção ergódica), sendo que $N|a|^2$ seria o número de elétrons no estado $|+\rangle_z$ e $N|b|^2$ seria o número de elétrons no estado $|-\rangle_z$.

Podemos mostrar que tal inferência não é válida. Se tomarmos o caso particular em que $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_z + |-\rangle_z] \equiv |+\rangle_x \quad (3.6)$$

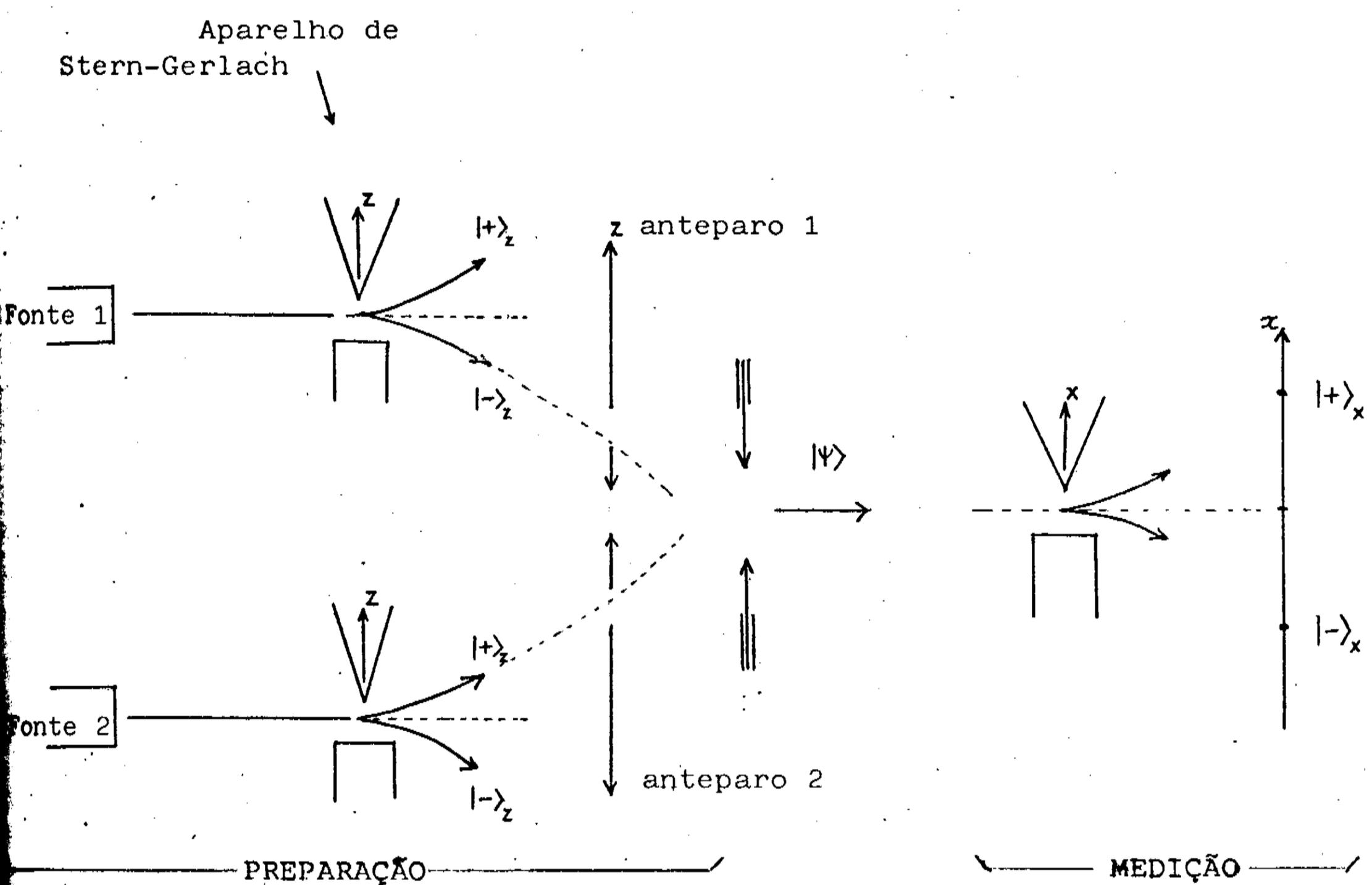


Fig. 3.1 - *Sucessão de estados: Vemos aqui o processo de preparação de um estado superposto. Elétrons são emitidos por cada uma das fontes coerentes 1 e 2 em direção ao respectivo aparelho de Stern-Gerlach, estando os dois aparelhos orientados de modo a determinar o spin na direção z . Os anteparos 1 e 2 são convenientemente dispostos de modo a permitir a passagem, respectivamente, de elétrons com spin $|-\rangle_z$ e $|+\rangle_z$. Por algum processo que não interfira com o estado de spin dos elétrons, estes são postos numa mesma direção. Temos então o estado $|\Psi\rangle$ superposto. O que se pode mostrar experimentalmente é que tal estado $|\Psi\rangle$ não pode ser considerado como sendo uma mistura de estados $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$. Ou seja, não podemos dizer que $|\Psi\rangle$ representa um ensemble de partículas, das quais uma parte veio da fonte 1, e a outra da fonte 2.*

que corresponde ao estado em que a componente S_x do spin é dada por $+\hbar/2$. No caso mostrado na figura 3.1, se mudamos a orientação do aparelho para medirmos S_x , mantendo a mesma preparação do estado dada pela superposição, encontraríamos para todas as partículas o autovalor $+\hbar/2$.

Agora, para o caso de uma mistura estatística dos estados $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$ o que se prevê é um resultado inteiramente diferente, uma vez que, na base de autoestados $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$, eles são descritos por

$$\begin{aligned} |+\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x] \\ |-\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x - |-\rangle_x] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fica, assim, evidenciada a diferença existente a nível de carácter experimental, entre considerar $|\psi\rangle$ como sendo uma superposição linear ou uma mistura estatística de estados. Como se pode observar, a previsão, neste experimento imaginário, do resultado de uma medição de S_x , não é uma probabilidade unitária de que se obtenha sempre o autovalor $+\hbar/2$ como no caso da superposição. A previsão é de que a probabilidade de se obter um ou outro é a mesma.

Quando dizemos que o princípio de superposição é um ponto muito importante de apoio à interpretação de Copenhagen, levamos em conta os vários aspectos empíricos fundamentais a ele relacionados. Uma diferença fundamental entre uma superposição de estados e uma mistura estatística de estados é que, na primeira, estão presentes fenómenos de interferência entre os estados. Tomando a situação experimental analisada acima, podemos mostrar matematicamente essa diferença.

Sendo o estado $|\psi\rangle$, preparado conforme a figura 3.1, dado pela expressão

$$|\psi\rangle = a |+\rangle_z + b |-\rangle_z \quad (3.5)$$

vamos determinar qual a probabilidade de obtermos o autovalor $+\hbar/2$, quando realizamos uma medição da componente do spin na direcção x , de elétrons preparados nesse estado. Caso tivéssemos $|\psi\rangle$ como sendo uma mistura estatística de estados, tal probabilidade seria dada por

$$P_{\text{mist}}(+\hbar/2) = |a|^2 P_+(+\hbar/2) + |b|^2 P_- (+\hbar/2) \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} P_+(+\hbar/2) &= | \langle + | + \rangle_x |^2 \\ P_- (+\hbar/2) &= | \langle + | - \rangle_x |^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

são as probabilidades de se obter o autovalor $+\hbar/2$ em elétrons provenientes de cada uma das fontes separadamente.

A probabilidade, para o caso de $|\Psi\rangle$ representar uma superposição pura de estados é, segundo o formalismo da mecânica quântica, dado por

$$P_{\text{sup}}(+\hbar/2) = | \int_X \langle +|\Psi\rangle |^2 \quad (3.10)$$

Levando em conta que $\int_X \langle +|\Psi\rangle = a \int_X \langle +|+\rangle_Z + b \int_X \langle +|-\rangle_Z$ (3.11)

e utilizando as equações (3.9) de modo a termos um padrão de comparação com a expressão para o caso da mistura estatística, temos a seguinte expressão para a probabilidade:

$$P_{\text{sup}}(+\hbar/2) = |a|^2 P_+(+\hbar/2) + |b|^2 P_- (+\hbar/2) + 2\text{Re}(ab^* \int_X \langle +|+\rangle_Z \int_X \langle +|-\rangle_Z^*) \quad (3.12)$$

Deste modo, temos para as duas possibilidades de interpretação, expressões diferentes para a probabilidade. Como se pode observar, comparando as duas expressões, a diferença se dá devido à presença, no caso superposto, de um termo misto em que influam características das duas partes do processo de preparação. É o termo de interferência entre os estados preparados pelas duas fontes, e que depende também da diferença de fase entre a e b.

O apoio ao ponto de vista de Copenhagen advém dessa diferença fundamental entre as expressões (3.8) e (3.12), sendo que todas as evidências experimentais apontam para a superposição. Do ponto de vista intuitivo, o que denominamos mistura de estados pressupõe de imediato uma interpretação estatística, estando o estado $|\Psi\rangle$ relacionado com a descrição de um ensemble de sistemas, e que cada um possui propriedades selecionadas durante o processo de preparação, que serão medidas durante o processo de medição. Quanto à superposição, não podendo ser pensada como uma mistura de estados, parece indicar que o estado $|\Psi\rangle$ se refira a apenas um sistema. Não temos uma imagem intuitiva do que seria uma superposição, pois não temos evidência de que ocorra a nível macroscópico (Leggett, 1984, discute a possibilidade de se ter a superposição linear de estados macroscopicamente distintos, o que é previsto pelo formalismo da mecânica quântica, analisando a situação em seus aspectos teóricos e experimentais).

Para a interpretação de Copenhagen, o estado $|\Psi\rangle$ representa uma superposição de estados desde que estes sejam indistinguíveis. Assim, tem-se uma superposição quando não podemos saber de qual das fontes se originou o elétron; quando o sabemos, o que se tem é uma mistura de estados. Este aspecto está diretamente relacionado com o paradoxo onda-partícula, e esta posição de Copenhagen se baseia no princípio de complementaridade. O fenômeno de interferência só se verifica se tivermos uma superposição de estados, não sendo então possível determinar as trajetórias dos elétrons (caráter ondulatório). Esta interferência se manifesta na forma do termo adicional da eq. (3.12). Os

efeitos de interferência estão ausentes para o caso da mistura estatística, pois podemos saber, em princípio, por meio de algum artifício, de onde proveio cada um dos elétrons, o que permite determinar-lhe a trajetória (caráter corpuscular).

As evidências experimentais confirmaram, até agora, a perfeita consonância entre o ponto de vista assumido por Copenhagen e os fenômenos microscópicos. Quando tratarmos do paradoxo onda-partícula, alguns tipos de experimentos serão analisados. No entanto, não nos furtaremos de mencionar aqui dois experimentos interessantes, por reafirmarem a diferença que salientamos, que apresentaremos no Apêndice 2.

Como se viu, a interpretação estatística tem aqui o seu grande problema, uma vez que não consegue explicar esta superposição de estados, e por que a mistura estatística, que é o cerne da interpretação, não dá conta dos fenômenos de interferência. Por sua vez, no ponto de vista de Copenhagen, o fenômeno da superposição é perfeitamente inteligível (dentro dos limites de inteligibilidade impostos pela interpretação) e a eficácia do princípio de complementaridade é comprovada. É sob este aspecto que consideramos a superposição como um ponto a favor de Copenhagen. No entanto, essa ligação do estado superposto a um único sistema, aparentemente inevitável, leva ao problema mais sério para a interpretação, ou seja, ao problema de medição.

III.4.2 - Problema de Medição:

Quando se fala em problema de medição, certamente a primeira idéia que se tem em mente é ligar o problema à questão da interação aparelho vs. objeto, e relacioná-lo com as limitações impostas pelo princípio de incerteza. Este é o problema clássico de medição, no sentido que existe, independentemente do princípio de incerteza, e já vem sendo debatido desde há muito tempo, muito antes do aparecimento da física quântica. É um problema ligado à teoria do conhecimento e é um ponto em que se discute a busca de uma descrição completamente objetiva do mundo. Se bem que a nível microscópico este problema se acentue muito mais, visto serem as interações aparelho-objeto proporcionalmente mais intensas com relação às propriedades que se queira medir, não é o problema que nos interessa agora. O outro problema de medição, que é um problema exclusivo da interpretação de Copenhagen, decorre da consideração do estado quântico como descrevendo um sistema individual, e é conhecido como o problema da 'redução (ou colapso) do pacote de ondas'.

Isto não significa, em absoluto, que o problema que aqui estudaremos não seja também um problema de ordem epistemológica, uma vez que está envolvido no processo de aquisição de conhecimento acerca do mundo externo inanimado (Wigner, 1963). Pode-se dizer que estes são

dois problemas distintos dentro do problema de medição (Fine, 1973). O primeiro problema, relacionado com a questão da objetividade da descrição quântica, será exposto com mais clareza no Apêndice 1, quando trataremos da formalização quântica do processo de medição. O segundo se liga à questão da completeza da descrição quântica, e dele trataremos a seguir. De qualquer modo, não se deve perder de vista que Copenhague impõe limitações com relação a uma descrição objetiva da realidade (se a consideramos existente) e considera a descrição quântica uma descrição completa, no sentido em que expusemos anteriormente.

Como vimos no tópico anterior, o princípio de superposição é uma motivação forte para se assumir a interpretação de Copenhague. Trabalhemos, então, com $|\Psi\rangle$ representando um estado superposto. Poderemos, assim, expor o problema.

Seja um operador R cuja equação de autovalores é dada por

$$R |r\rangle = r |r\rangle \quad (3.14)$$

sendo que este observável descreve uma quantidade física \mathcal{R} que desejamos medir num sistema, r representa o espectro de autovalores (que suporemos discretos e não degenerados, para facilitar) de R , e $\{|r\rangle\}$ a base de autovetores do operador.

Vamos supor, tendo em mente a idéia do procedimento estampado na fig. 3.1, que o estado inicial do sistema, ou seja, o estado no qual ele é preparado para a medição seja um estado superposto. $|\Psi\rangle$ é então uma combinação linear dos autovalores de R , sendo dado por:

$$|\Psi\rangle = \sum_r \langle r|\Psi\rangle |r\rangle \quad (3.15)$$

De uma maneira bastante simplificada, sem entrarmos nos detalhes do formalismo da medição (Apêndice 1), podemos dizer que o problema de medição consiste em não haver uma explicação plausível de como este estado superposto $|\Psi\rangle$ transita para o estado $|r\rangle$ que se obtém ao final do processo de medição. Ou seja, por que é que $|\Psi\rangle$, que evolui temporal e causalmente segundo a equação de Schroedinger, no momento da medição se reduz a um de seus autoestados, não mais obedecendo àquela lei de evolução?

Segundo a interpretação de Copenhague, o estado do sistema evolui de duas maneiras distintas: uma, como resultado da evolução temporal, continuamente, de acordo com a equação de Schroedinger; a outra, como resultado de uma medição efetuada sobre o sistema, descontínua, abrupta, que é chamada de redução do pacote de ondas. Wigner (1963), um dos assíduos proponentes da interpretação, considera este comportamento como um "verdadeiro dualismo", e analisa os dois tipos de mudança: a incerteza no comportamento do sistema não aumenta no tempo se o sistema é deixado evoluir sem que se efetue sobre ele uma medição. Independente do intervalo em que ele seja deixado evoluir,

essa evolução é causal, de modo que, em princípio, a quantidade de informação que temos sobre o sistema não muda com o tempo. A evolução deixa de ser causal quando efetuamos sobre o sistema uma medição. A redução do estado superposto implica numa mudança instantânea de todas as probabilidades ligadas a cada um dos autovalores possíveis.

Podemos apresentar o problema de uma outra forma. Considerando agora o acoplamento do objeto medido com o aparelho de medição, temos pela interpretação de Copenhagen que o sistema composto aparelho + objeto deve evoluir causalmente segundo a equação de evolução (secção III.2.4). Se considerarmos que o aparelho, após concluída a medição, apresenta o resultado sob a forma de uma posição de ponteiro num valor bem definido de uma escala, não é injustificável se assumir que, de algum modo, esta posição do ponteiro representa algum aspecto da evolução do sistema composto. Assim sendo, se a teoria quântica fornece uma descrição completa do processo de medição, este fato deve estar refletido no estado final do sistema composto. Deve existir algum tipo de interação no processo de medição, de modo a levar o estado inicial do objeto (que pode ser desconhecido) para um estado final do sistema composto, que é uma mistura de estados (Fine, 1973). O que ocorre é que parece não existir tal interação (Fine, 1970).

Uma ilustração interessante do problema, assim como do tipo de descrição fornecida por uma superposição de estados foi elaborada por Schroedinger (1935), em seu célebre "paradoxo do gato". Foi uma tentativa de transplantar a situação para o mundo macroscópico, com o fim de mostrar o absurdo de suas conclusões: um gato é preso dentro de uma caixa, totalmente isolado do mundo exterior, juntamente com um contador Geiger e uma fonte radioativa tal que, após o intervalo de uma hora, a probabilidade de que o detector tenha detectado o decaimento de um núcleo seja de 50%. O contador está ligado a um dispositivo que libera um gás venenoso, e que é acionado quando da detecção do decaimento. Após uma hora, a função de onda total do sistema terá uma forma superposta, em que o gato é 50% vivo e 50% morto. O que apresentamos como uma redução do estado superposto ocorre quando abrimos a caixa e observamos ou o gato vivo, ou o gato morto. Do mesmo modo o aparelho de medição que consideramos acima, ao ser observado, mostra o ponteiro assinalando um único resultado. Ele não apresenta simultaneamente todos os resultados possíveis no mostrador, o que realmente não tem sentido se considerarmos o aparelho como um todo como sendo um objeto clássico macroscópico.

O paradoxo do gato ilustra bem o quão insólita é a descrição fornecida pelo formalismo quântico, quando observada a partir de uma perspectiva clássica. Uma extrapolação tão extremada como essa elaborada por Schroedinger é, sob alguns aspectos, questionável. No entanto, a física parece não fornecer uma base sólida para a distinção entre o mundo macro e o mundo micro (nota 3.5).

A controvérsia acerca do que representa fisicamente essa redução do estado vetor tem produzido uma quantidade muito grande de pontos de vista tentando solucionar ou contornar o problema. Trataremos de alguns destes pontos de vista (infelizmente, não teremos condições de nos aprofundarmos neles) no Apêndice 1, uma vez que se relacionam com o formalismo da medição. Procuraremos aqui dar uma idéia

geral dos vários pontos de vista sugeridos, em suas considerações acerca do que representa o formalismo quântico.

Inicialmente, se assumimos que o formalismo da mecânica quântica tem validade irrestrita, de tal modo que observações que possamos vir a fazer sobre um sistema só podem ser previstas estatisticamente, dentro de limites bem definidos; e assumirmos também que esse formalismo nada diz acerca da realidade física, o problema de superposição deixa de ser um problema. No entanto, tiramos da teoria o caráter de 'teoria física', do modo como a entendemos, tomando-a apenas como um algoritmo que fornece correlações estatísticas entre observações subsequentes (citado por Jauch et al, 1967). Certamente, esta é uma posição muito extremada que, assumida, traz consigo a necessidade de se explicar o por que da teoria ser tão bem sucedida.

Antes de apresentarmos as posições de Bohr e de outros proponentes da interpretação de Copenhague, temos que realçar, também, que o problema de medição não é um problema para a interpretação estatística. Isto porque quando se tem o estado representando um ensemble de sistemas similarmente preparados, o que se prevê é a distribuição de frequências dos resultados possíveis da medição. Deste modo, obter um determinado resultado numa medição não implica em qualquer tipo de redução de estado, uma vez que o que se obtém é a confirmação de um resultado que seria previsível, caso todas as variáveis envolvidas fossem conhecidas. Dentro deste contexto, podemos incluir teorias de variáveis escondidas, como a de Bohm-Bub (1966), em que se inclui um "potencial quântico" atuante durante o processo de medição, que torna a equação de Schroedinger não linear e causa a redução. Deste modo, consegue-se uma formalização do processo de redução, mas com mudanças no formalismo da teoria. Dentro de um ponto de vista estatístico, podemos citar também Popper (1967), segundo o qual a redução do estado não deve ser vista como sendo um processo físico, uma vez que o estado oriundo da redução passa a representar um subensemble do ensemble original, ao qual se adicionou a informação relativa ao resultado da medição (posição do ponteiro no mostrador do aparelho).

Também dentro da interpretação de Copenhague tem-se vários pontos de vista distintos. No entanto, o de maior repercussão certamente foi o de von Neumann. Quando da sua formalização do processo de medição, von Neumann (1932) assumiu que o colapso do estado superposto é um fenômeno fundamental e irredutível, e que imediatamente após a medição o estado do sistema seria o autoestado correspondente ao autovalor medido (postulado de projeção). Este, pode-se dizer, é o ponto de vista ortodoxo acerca do problema de medição. Tal concepção do processo de redução é muito criticada, e muitos vêem nela uma tendência a tornar a mecânica quântica um mero algoritmo, onde se "renuncia a qualquer concepção da ordem e da estrutura do movimento de um microsistema em favor de um conjunto de regras para previsão dos resultados de experimentos específicos" (Bohm, Bub, 1966, p.457). Esse ponto de vista reflete ainda a concepção de Bohr da inseparabilidade entre objeto e aparelho, e das limitações decorrentes da descrição necessariamente clássica que se faz do experimento, o que implica que o estado quântico não representa propriedades do sistema, mas apenas a sua 'aparência' dentro de um determinado contexto experimental.

No entanto, von Neumann foi o primeiro a tentar justificar a introdução do postulado de projeção, introduzindo um aspecto subjetivo no processo de medição. Segundo o seu ponto de vista, posteriormente desenvolvido por London e Bauer (1939), o que produz, durante a medição, a redução do estado superposto a um dos autoestados que o compõem, é a consciência do observador. Segundo Shimony (1963), em uma análise do papel do observador na teoria quântica, London e Bauer assumem para o observador um nível ontológico igual ao do aparelho e do objeto, e parecem assumir que os estados do observador também sejam superponíveis. A redução do sistema composto aparelho + objeto + observador seria uma transição não linear e estocástica, isto devido à faculdade de introspecção do observador. Assumem a dualidade no comportamento do estado, que mudaria causalmente exceto em caso de uma medição. Entre as ressalvas que se faz a esta interpretação está em como incluir na equação de Schroedinger um hamiltoniano que leve em conta os estados mentais e a dualidade assumida no comportamento do estado. Este ponto de vista foi retomado, entre outros, por Wigner (1963, 1971), que tenta evitar esta dualidade, assumindo que a mecânica quântica fornece apenas conexões de probabilidades entre observações sucessivas de um sistema, desenvolvendo uma formulação em que não se usa o estado vetor, atribuindo grande primazia ao ato de observação por parte do observador. Um outro ponto de vista onde o observador toma parte atuante na descrição quântica é a interpretação subjetivista de Heisenberg, onde o estado representa uma "mistura de duas coisas: em parte um fato (ligado a situações de certeza completa, i.e., probabilidade um) e em parte nosso conhecimento desse fato" (Heisenberg, 1958).

Ainda dentro de Copenhagen, podemos citar uma série de pontos de vista: o de Ludwig (1971), segundo o qual a mecânica quântica não se aplica a sistemas macroscópicos, e o desconhecimento da descrição que se aplica na região de transição entre os domínios macro e micro nos impede de conhecer o processo de redução do estado superposto (micro) para o autoestado observado (macro); já para Messiah (1964), pode-se considerar que a redução descontínua ocorra em função de uma perturbação até certo ponto incontrollável do objeto, pelo aparelho de medição; e muitos outros: Zeh (1970), Fine (1970), Fock (1968), Moldauer (1972), ... Mencionar esses pontos de vista tem aqui apenas a intenção de explicitar a controvérsia na área.

Poderíamos ter dado mais ênfase às várias interpretações, mas isto nos levaria muito além daquilo a que nos propusemos, dada a complexidade de cada uma delas. Importante é ter em mente que este é o único problema da interpretação de Copenhagen, se considerarmos válidas as suas violações às nossas concepções clássicas do mundo; e que é um problema que, aparentemente, está longe de ser resolvido.

IV - O PARADOXO DE EPR E A DESIGUALDADE DE BELL

IV.1 - Introdução

IV.2 - O Paradoxo de EPR

IV.3 - A Variante de Bohm do experimento de EPR

IV.4 - Realismo, Localidade e a Desigualdade de Bell

IV.5 - Testes experimentais da Desigualdade de Bell

IV.6 - A controvérsia acerca da Desigualdade de Bell

IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos o que se considera hoje o mais importante avanço dentro do estudo dos fundamentos da mecânica quântica: a desigualdade de Bell. Importante no sentido de que, pela primeira vez, é possível se ter uma comparação experimental entre as previsões da mecânica quântica e das teorias realistas locais, consideradas em sua generalidade. E pelo fato de que várias experiências neste sentido já foram realizadas, a grande maioria concordando com a mecânica quântica.

De importância histórica muito profunda foi e é o artigo de Einstein, Podolski e Rosen (EPR, 1935) em que é proposto um experimento imaginário, acompanhado de uma argumentação visando refutar a concepção de completeza da descrição provida pelo formalismo quântico para os fenômenos físicos, defendida por Bohr e seguidores. Por tal concepção, a teoria quântica seria uma teoria intrinsecamente não-determinista, com o qual não concordava Einstein. Muito embora a argumentação inicial de EPR não tenha sido imprescindível para o trabalho de Bell, a sua reformulação por Bohm (1951), trazendo à tona o problema da não-localidade que seria intrínseca à teoria quântica caso se adotasse o ponto de vista de Bohr, o foi. A não-localidade decorrente da completeza da descrição fornecida pela mecânica quântica assumida por Bohr foi primeiramente considerada por Einstein (1948), mas Bohm, reelaborando o experimento imaginário de EPR, tornou mais clara a questão.

O trabalho de Bell (1964, 1971) se fundamenta nessa reelaboração de Bohm do argumento de EPR e mostra que, se tentamos completar a mecânica quântica de modo a dar a ela um caráter determinista, realista e local, chegamos a incompatibilidades com as previsões quânticas, para o experimento de EPR-Bohm.

No contexto atual da controvérsia em torno dos fundamentos da mecânica quântica, quando se considera a teoria, hoje identificada com a interpretação de Copenhagen, sob o prisma da física clássica, têm-se que conceitos fundamentais a esta são violados. Determinismo, realismo, localidade, causalidade e completividade são conceitos primitivos sobre os quais se alicerçam todas as teorias anteriores à mecânica quântica. Realismo e localidade são definidos na secção IV.4.2, onde servirão de base para a derivação da desigualdade de Bell. Na física clássica, tem-se a idéia de que, uma vez conhecido o estado de um sistema em um dado instante, é teoricamente possível se prever com certeza o estado do sistema num instante posterior. Esta é, a grosso modo, a idéia de **determinismo**. A **causalidade** está ligada a idéia de que existe um princípio, uma causa, subjacente a todo fenômeno físico e que o antecede, e ao qual, em princípio, podemos ter acesso. Finalmente, a **completividade** ou **completeza**, segundo a qual todo elemento da realidade física tem um elemento correspondente na teoria física. Segundo Jammer (1980), a mecânica quântica, pela interpretação de Bohr, é não-local, não-determinista, não-causal, não-realista, mas completa.

Trataremos, então, da contradição que surge quando consideramos possíveis, simultaneamente, numa teoria que dê as mesmas previsões que a mecânica quântica, as características de realismo e localidade. A importância da desigualdade de Bell está em propiciar testes experimentais em que se compara as previsões quânticas com as de teorias tipo clássicas.

Apresentaremos, primeiramente, o argumento original de EPR devido à sua importância histórica (sec. IV.2), assim como a resposta de Bohr a ele, e a sua reelaboração por Bohm (sec. IV.3). Apenas então trataremos especificamente da desigualdade de Bell e de suas derivações alternativas (sec. IV.4). Os trabalhos posteriores, que possibilitaram a obtenção de uma desigualdade experimentalmente testável também são comentados, assim como as várias realizações experimentais já concluídas (sec. IV.5). Finalmente, fazemos uma análise dos experimentos e algumas observações sobre as consequências dos resultados obtidos sobre os conceitos filosóficos citados acima (sec. IV.6).

Finalmente, queremos salientar que existem vários textos interessantes em que o assunto é tratado. Por sua especial clareza, gostaríamos de citar Brown (1984), Jammer (1980), Selleri (1986) e Grib (1984), que são textos de divulgação bastante atuais. São textos que, embora não venham necessariamente a ser citados no decorrer do capítulo, foram essenciais para a sua elaboração.

IV.2.1 - O argumento de Einstein-Podolski-Rosen (EPR):

Faremos, inicialmente, uma rápida abordagem do argumento de Einstein - Podolski - Rosen (EPR, 1935), uma vez que a sua importância para os objetivos deste trabalho, é apenas histórica. Na verdade, o questionamento que se faz aqui é reflexo da filosofia realista, que Einstein resolutamente acatava, e que é amplamente identificada com a física clássica.

Em 1935, EPR publicaram um artigo em que questionavam, através de uma argumentação baseada na correção dos resultados obtidos pela mecânica quântica e na crença da existência de uma realidade física objetiva e local, a completeza da descrição quântica do mundo.

Considerando que, para ser satisfatória, uma teoria física tenha que ser correta e fornecer uma descrição completa da realidade física - a qual certamente independe da teoria que possamos criar para descrevê-la -, analisaram a descrição que a mecânica quântica fornece desta realidade física. Como base para a sua argumentação, EPR introduziram critérios e definições no sentido de precisar, com clareza, os termos nela empregados. Assumiram que o critério de julgamento da correção da teoria (**critério de correção**) estaria no grau de concordância entre as suas conclusões (previsões) e a experiência humana objetiva, a qual se manifestaria sob a forma da experimentação e da mensuração. A sua completeza estaria vinculada à condição de que todo elemento de realidade física, que deve ser encontrado por processo experimental, deva ter um correspondente na teoria física (**condição de completeza**). Por esta necessidade de se recorrer à experimentação para que se possa determinar quais são os elementos de realidade física, EPR propuseram um "**critério de realidade**" (na verdade, o ponto central da argumentação). Este critério é enunciado, literalmente, da seguinte maneira: "Se, sem de modo algum perturbar um sistema, pudermos prever com certeza (ou seja, com probabilidade igual à unidade) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondente a esta quantidade física". Desse modo, os elementos de realidade física não devem ser definidos por considerações filosóficas 'a priori', mas sim por recorrência à experimentação e a resultados de medições. Assim, utilizando o formalismo da mecânica quântica, se um sistema físico está num estado descrito por algum autoestado de algum operador A , isto é, se

$$A |\psi\rangle = a |\psi\rangle \quad (4.1)$$

então a quantidade física correspondente a este operador tem o valor a (que é conhecido com certeza, isto é, probabilidade um, desde que se conheça $|\psi\rangle$). Assim, existe um elemento de realidade correspondente a esta quantidade física. Note-se que este elemento de realidade é as-

sumido sem que se especifique sua natureza e suas relações com o valor médio da quantidade física selecionada. Deve-se salientar, portanto, que não é atribuída realidade física ao valor a , uma vez que é convencionalmente uma unidade, contendo elementos subjetivos. Segundo Selleri (1986), o que se apresenta de imediato como sendo essa grandeza a poderia ser o resultado de propriedades realmente diferentes das que nossa percepção nos permite perceber. Tais propriedades, salienta, poderiam se manifestar de uma forma tal, que aquilo a que nossa percepção tem acesso seja apenas uma distorção topológica da verdadeira propriedade física.

Após enunciarem a condição de completeza e o critério de realidade, EPR abordam um dos aspectos básicos do que é hoje conhecido por interpretação de Copenhague, mas que, como se pode perceber dos debates da época, era identificado com a própria mecânica quântica: o princípio de incerteza. Pelo princípio de incerteza (cap. VI), se duas quantidades físicas são representadas por operadores que não comutam entre si, o conhecimento preciso de uma destas quantidades impede que se tenha conhecimento da outra. Assim, EPR argumentam que, se se adota o critério de realidade enunciado acima, a função de onda da mecânica quântica não dá uma descrição completa do sistema físico. Em outras palavras: ou a descrição que a função de onda da mecânica quântica fornece da realidade não é completa, ou então quando os operadores correspondentes a duas quantidades físicas não comutam, estas quantidades físicas não podem ter realidade simultânea. Uma situação paradoxal ocorre porque, se se assume que a mecânica quântica é uma teoria completa, tem-se pela condição de completeza enunciada acima que o princípio de incerteza não pode ser válido. Isto porque para ser completa, as quantidades físicas às quais o princípio se refere deveriam fazer parte da descrição fornecida pela teoria, o que implicaria na possibilidade de serem simultaneamente conhecidas. A base para tal argumentação, EPR a forneceram por meio de um famoso experimento imaginário (Gedankenexperiment), que descreveremos mais abaixo.

Podemos agora, em linhas gerais, transcrever o argumento de EPR. Como ponto de partida, EPR assumiram a impossibilidade da existência de ação à distância (**condição de localidade**), e que todas as previsões estatísticas da mecânica quântica são corretas (a teoria satisfaz o critério de correção, e este aspecto não foi questionado por EPR). Considerando um sistema com quantidade de movimento total nula que se cindisse em dois sub-sistemas se movendo em sentidos opostos, mostraram que os resultados de vários experimentos são pré-determinados, e que se poderia saber com certeza, para cada subsistema, simultaneamente, sua posição e momento.

Podemos descrever o experimento imaginário de EPR da seguinte maneira: seja um sistema composto por duas partículas, 1 e 2, que interagem de um instante $t=0$ até o instante $t=T$, a partir de quando elas deixam de interagir. Vamos primeiramente supor conhecido o estado inicial do sistema composto, de modo que se possa calcular a evolução do sistema conjunto, por meio da equação de Schroedinger; e também que, ao cessar a interação, as duas partículas sejam emitidas em direções opostas, de modo a conservar a quantidade de movimento total inicial, que consideraremos nula. Equidistantes do ponto inicial onde se encontrava o sistema composto (ou, poderíamos dizer, do centro de gra-

vidade do sistema, se as partículas forem idênticas) colocamos dois aparelhos. Levando em conta a condição de localidade de Einstein (o limite máximo na velocidade de transmissão de uma informação é a velocidade da luz no vácuo), temos os aparelhos colocados de modo tal que, ou eles efetuam as medições sobre as respectivas partículas simultaneamente (num mesmo instante $t' > T$), ou as efetuam dentro de um intervalo de tempo tal que nenhuma informação acerca de uma detecção chegue ao outro aparelho antes que a outra partícula seja detectada. Além disso, determina-se que os dois aparelhos medirão observáveis diferentes, por exemplo: o primeiro aparelho medirá a posição da partícula 1, enquanto que o segundo, o momento da partícula 2.

Na descrição quântica, o estado do sistema como um todo é representado por uma função de onda comum a ambos os sub-sistemas. Desse modo, utilizando o experimento descrito acima, EPR salientaram que, efetuando-se medições sobre o primeiro sub-sistema podemos prever com certeza, e sem perturbarmos de modo algum o segundo sub-sistema, os valores das quantidades correspondentes a este sub-sistema. Como a medição sobre o primeiro sub-sistema não afeta de modo algum o segundo, é necessário reconhecer, pelo critério de realidade assumido, que para este as quantidades físicas correspondentes ao momento e à posição existem simultaneamente. Isto é ainda mais paradoxal quando se recorda que a momento e posição correspondem operadores que não comutam entre si, de modo que para a mecânica quântica elas não podem ser conhecidas simultaneamente (princípio de incerteza, cap. VI). Uma vez que a função de onda é, na mecânica quântica, a descrição mais completa possível do estado do sistema, EPR concluíram que ela não é completa, uma vez que não prevê esta situação.

Toda a argumentação de EPR objetiva mostrar essa não completude da teoria quântica. Como salienta Jammer (1974), para tal são formulados dois critérios (realidade e completude) e assumidas duas hipóteses (localidade e validade). Com base no critério de realidade, o argumento de EPR mostra que as duas hipóteses assumidas implicam na não completude da mecânica quântica. EPR tinham consciência de que ressalvas poderiam ser feitas ao seu critério de realidade. Sabiam que instrumentos que medissem quantidades físicas incompatíveis são incompatíveis, o que, aos olhos da mecânica quântica (da interpretação ortodoxa) implica que estas quantidades não tem realidade simultânea para um mesmo subsistema.

No mesmo trabalho, EPR analisam uma provável crítica que se pudesse fazer ao critério de realidade, a qual se baseasse no argumento de que a realidade de uma quantidade física só possa ser considerada se se puder medi-la ou prevê-la, argumento este extensível a situações de simultaneidade, como no caso do experimento imaginário (devem ser medidas ou previstas simultaneamente). Tal critério, portanto, não atribui realidade simultânea a posição e momento quando tomados sobre um mesmo sistema, por não cumprirem esta última especificação. No entanto, se associamos o critério à situação descrita pelo experimento imaginário, a realidade simultânea de posição e momento para cada uma das partículas dependerá da medição que se efetua na outra, mesmo que não mais interajam entre si. Como consideramos na descrição que fizemos acima do experimento, não há possibilidade de que nenhum sinal que se propague com velocidade menor ou igual à da luz, viaje de um a ou-

tro aparelho no lapso de tempo entre as duas detecções. Ou seja, a interação implica que o sinal se propaga com velocidade maior que a da luz, ou ainda, que é instantânea (ação à distância). É esse aspecto que Schroedinger denominou de "paradoxo de EPR". Em sua crítica a tal situação (o critério de realidade considerado é, em linhas gerais, a concepção de Bohr da realidade física), EPR concluem salientando que "nenhuma definição razoável de realidade pode permitir tal coisa" (EPR, 1935, p.780).

Temos que salientar que a condição de localidade que apresentamos acima, que chamaremos de separabilidade de Einstein, foi estendida posteriormente, de modo a considerar como local qualquer fenômeno que envolva transmissão de informações que se propaguem com velocidade finita (não limitada superiormente por c). Por **separabilidade** entendemos que sistemas separados espacialmente entre si e cuja interação tende a zero quando a sua distância tende a infinito podem ser considerados como possuindo propriedades independentes um do outro. A não-localidade implica, nesse contexto mais amplo, em ação à distância: transmissão instantânea de informação de um ponto a outro do espaço. Na próxima seção, abordaremos a argumentação de EPR aplicada ao sistema de duas partículas de spin $1/2$, aproveitando a simplicidade desta situação, onde cada partícula tem apenas dois estados possíveis.

IV.2.2 - Resposta de Bohr ao argumento de EPR:

Embora não tenha sido a primeira reação à publicação do trabalho de EPR, a resposta de Bohr apareceu ainda no mesmo ano de 1935. Bohr não critica a argumentação de EPR, bastante clara e consistente, mas impõe sérias restrições ao critério de realidade por eles adotado. Segundo Bohr, "O quanto é possível atribuir de significado inequívoco a uma expressão como 'realidade física' não pode, evidentemente, ser deduzido a partir de concepções filosóficas 'a priori', mas ... deve se fundamentar no recurso direto a experiências e medidas." (Bohr, 1935, p.693). Essa premissa é, sob todos os aspectos, idêntica à assumida por Einstein, mas é para Bohr um ponto chave na sua refutação do critério de realidade, no que tange à sua validade. Bohr salienta que a existência do quantum de ação finito h resulta numa interação mútua mínima finita e irredutível entre o objeto medido e o aparelho de medição. A existência desse quantum de ação evidencia, para Bohr, a inadequância dos ideais clássicos de realismo e causalidade, e mostra, por sua vez, que a visão fornecida pelo princípio de complementaridade é mais apropriada para os fenômenos quânticos.

Utilizando esse aspecto característico da teoria quântica, tem-se duas ressalvas muito importantes ao critério de realidade de EPR. Primeiramente, com relação à primeira parte do critério, segundo a qual "Se, sem de modo algum perturbar o sistema, pudermos prever com certeza o valor de uma quantidade física...", Bohr diz que ela não pode ser cumprida experimentalmente. Para o caso específico do experimento imaginário de EPR, a argumentação se dá da seguinte maneira: quando medimos a posição da partícula 1 e o momento da partícula 2, a medição desse momento não implica que possamos saber o momento da partícula 1. Isso porque, quando a partícula 2 interage com o aparelho,

uma parcela incontrollável do momento desta partícula é transmitida ao aparelho (com limite inferior dado por h), o que nos impede de utilizar a lei de conservação do momento para determinarmos o momento da outra partícula:

$$P_1 = P_2 + P_{int}$$

onde P_{int} é totalmente desconhecido. Deste modo, mesmo se se assume que a partícula 1 possua um determinado momento, ele jamais poderá ser previsto com certeza (probabilidade 1).

A outra consequência da existência do quantum de ação h , embora de certo modo relacionada com a que acabamos de mencionar, é bem mais radical, e já inclui as concepções filosóficas subjacentes à interpretação de Copenhagen. Segundo Bohr, toda experimentação (que sempre envolve algum tipo de medição) é limitada no que se refere ao alcance da informação que se pode obter por meio dela, de forma que o significado que se quer atribuir a tal informação também é limitado. Em outras palavras, atribuir realidade a um sistema e estabelecer as suas propriedades não é possível fora do contexto do aparato experimental utilizado. Qualquer informação que se obtenha é sempre dependente tanto do sistema quanto do aparelho. Não podemos, portanto, atribuir a objetos quânticos a existência de propriedades, independentemente da situação experimental em que elas se manifestam. Esta é mais uma característica do ponto de vista de Bohr: a noção de **totalidade do fenômeno quântico**. Não se pode tratar o fenômeno independentemente da situação experimental e nem se pode atribuir uma realidade independente a ele. Quando temos o par de partículas no estado $|\Psi_s\rangle$, o fato de estarmos efetuando uma medição sobre uma das partículas corresponde a um fenômeno que diz respeito ao sistema total, incluindo a outra partícula. Nega-se, portanto, a noção de separabilidade que enunciávamos anteriormente.

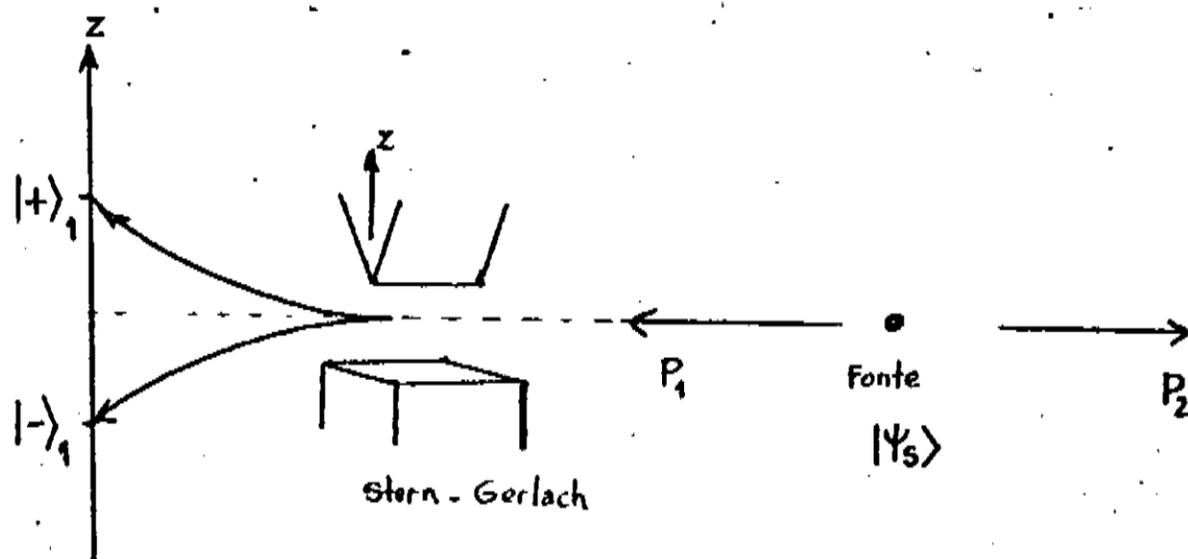
Desta maneira, a medição do momento de um subsistema não pode implicar na previsão do momento de um outro subsistema, uma vez que não podemos afirmar que ele exista antes que o meçamos. Bohr acreditava que o objetivo da descrição física da natureza seria estabelecer, na medida do possível, as relações entre os diferentes aspectos de nossa experiência. Uma vez aceito isto, não haveria paradoxo.

A repercussão do trabalho de EPR foi muito grande e imediata, e muitos foram os argumentos apresentados, em sua grande maioria, para refutar o argumento. Uma discussão bastante ampla desses argumentos é feita por Jammer (1974), que serve como referência, uma vez que não nos ocuparemos deles. A importância do trabalho de EPR, atualmente, reside na motivação para a derivação da desigualdade de Bell, de que trataremos mais adiante.

IV.3 - A VARIANTE DE BOHM DO EXPERIMENTO DE EPR

Em 1951, em seu famoso livro-texto sobre a teoria quântica, que muitos consideram como sendo a melhor exposição da interpretação de Copenhagen, Bohm elaborou uma variante do experimento imaginário de EPR, em termos de estados discretos, sob todos os aspectos muito mais compreensível e menos problemático que o experimento original. Em seu experimento imaginário, que a partir de agora designaremos como de EPR-Bohm, considera um sistema composto de duas partículas de spin $1/2$ no estado singlete (spin total nulo). Bohm descreve o experimento, assinala as considerações de EPR, e procura argumentar em defesa da teoria quântica e de sua interpretação ortodoxa, devida principalmente a Bohr. Nesse texto, Bohm argumenta que se as conclusões de EPR fossem corretas e a mecânica quântica uma teoria incompleta, haveria a necessidade de se complementar o formalismo da teoria por meio de "variáveis escondidas" (hidden variables) adicionais ('escondidas', ou ocultas, porque, no estágio atual da ciência, pode-se apenas conjecturar acerca de sua existência). No entanto, salienta que a teoria quântica (e, conseqüentemente, a sua interpretação ortodoxa) deve ser assumida como sendo substancialmente correta, até que se verifique uma discordância entre as suas previsões e algum resultado experimental. É curioso notar que, não obstante a defesa e a clara exposição do ponto de vista ortodoxo, no ano seguinte ao da publicação do livro, Bohm (1952) publicava a sua famosa teoria de variáveis escondidas, passando a ser um dos mais assíduos críticos da interpretação de Copenhagen. Vamos agora descrever o experimento de EPR - Bohm.

Temos um sistema composto de duas partículas de spin $1/2$ no estado singlete, que se movem livremente em direções opostas (fig. 4.1). O fato do sistema composto estar no estado singlete, isto é,



(Fig. 4.1)

com spin total nulo, implica que o spin de uma partícula está orientado no sentido oposto ao da outra, até onde se pode dizer que o spin tenha uma direção definida (Bohm, 1951, p.614). Tendo-se esse sistema, pode-se medir, por meio de um aparelho de Stern-Gerlach, as componentes nas direções desejadas (digamos, x e y , se as partículas se deslocam na direção z) dos spins, S_x e S_y , correspondentes a cada uma das partículas. O estado singleto é esfericamente simétrico, o que implica que, qualquer que seja a direção \hat{a} que se escolha para realizar uma medição, temos a descrição quântica do sistema dada pelo estado superposto

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{2} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2) \quad (4.2)$$

onde $|+\rangle_1$ e $|+\rangle_2$ são os estados que descrevem o estado atômico em que as partículas 1 e 2 têm valores da componente de spin dados por $\pm\hbar/2$ (nota 4.1).

Se as duas partículas são separadas por um método que não influencie no spin total até que estejam suficientemente longe uma da outra e deixem de interagir, pode-se então escolher uma determinada direção e medir a componente de spin de uma das partículas nessa direção. Uma vez que o sistema é ainda descrito por $|\Psi_s\rangle$, temos que a medição sobre uma das partículas implica no conhecimento imediato da componente correspondente (na mesma direção) da outra partícula, devido ao fato de que, uma vez efetuada a medição sobre o sistema, seu estado vetor se reduz a uma de suas possíveis soluções:

$$\begin{array}{l} |+\rangle_1 |-\rangle_2 \\ |-\rangle_1 |+\rangle_2 \end{array} \quad \text{ou} \quad \text{----} \rightarrow \quad (\text{redução do estado superposto})$$

Podemos, desta maneira, preparar o aparelho de modo a efetuar a medição do spin da partícula P1 em uma dada direção. Isto nos permite obter informação acerca do spin da partícula P2 na mesma direção, sem interagirmos diretamente com ela. Uma vez obtida a medida do spin da partícula P1 conhecemos, com probabilidade 1, a componente do spin da partícula P2 na mesma direção. Podemos fazer o mesmo procedimento com qualquer outra direção que escolhermos, e sempre saberemos qual o spin da partícula P2 nesta direção, com probabilidade unitária. Assim, é possível prevê-lo com certeza em qualquer direção, por meio de medições efetuadas sobre a partícula P1. Se assumimos uma hipótese de localidade, isto é, a inexistência de ação à distância com a consequente impossibilidade de que a medição em 1 afete instantaneamente a partícula P2, temos como consequência que o spin da partícula P2 deve estar definido ao mesmo tempo em todas as direções, e pode ser previsto com probabilidade 1. Desse modo, com base no critério de realidade de EPR, a componente do spin da partícula P2, em qualquer das direções, possui um elemento de realidade física e deve ter existido antes mesmo que se efetuasse a medição sobre a outra partícula.

Se o critério de realidade é válido, e chegamos às conclusões acima, atribuindo às componentes do spin em qualquer direção a qualidade de serem elementos de realidade coexistindo simultaneamente na

partícula, temos então uma discordância marcante com a mecânica quântica. O fato dos operadores correspondentes a componentes do spin em direções diferentes não comutarem resulta na possibilidade, de acordo com a mecânica quântica, de se especificar apenas uma dessas componentes de cada vez, com precisão completa. A mecânica quântica não atribui realidade simultânea a observáveis cujos operadores não comutam e é esse, segundo o argumento que expusemos acima, o traço de sua não completeza.

Fica, assim, mais claro o argumento de incompletude de EPR. Bohm também chamou a atenção para a natureza não clássica das correlações do spin e analisou testes experimentais imaginários para saber se as previsões do formalismo da mecânica quântica são realmente corretas. Considerou também que, em sendo a descrição fornecida pelo estado vetor incompleta, ela o é pelo fato de não conter as variáveis que lhe dariam o caráter determinístico: as variáveis escondidas, citadas no início desta secção. Em princípio, essas teorias de variáveis escondidas são clássicas, ou seja, busca-se dar a elas uma conformação clássica: deterministas, locais, e que tentam reestabelecer o realismo como uma premissa básica para as teorias físicas. No entanto, nem todas elas seguem essa regra. Por exemplo, a teoria de variáveis escondidas elaborada por Bohm (1952) é não-local, e prevê todos o resultados que a mecânica quântica prevê. Na verdade, as teorias de variáveis escondidas que concordam com a teoria quântica têm, todas elas, essa característica não-local, e esta foi uma das motivações de Bell na realização de seu trabalho (nota 4.2).

Atualmente, a ênfase das análises que se faz do experimento de EPR-Bohm não está mais centrada na questão da completeza da teoria quântica, muito embora este aspecto esteja implícito nas considerações que se faz. Veremos, no capítulo seguinte, que os debates se centram na possibilidade ou não de existirem teorias tipo - clássicas que concordem com as previsões da mecânica quântica.

Antes de passarmos a abordar o trabalho de Bell e as questões de realismo e localidade, devemos lembrar que muitas tentativas foram feitas no sentido de mostrar a impossibilidade da existência dessas teorias, em especial os trabalhos de von Neumann, Jauch e Piron, e de Gleason, todos eles analisados por Bell (1966), que mostrou serem todos falhos, no sentido de não serem satisfatoriamente gerais. Faremos uma breve análise do trabalho de von Neumann, historicamente o mais importante, no apêndice 3.

IV.4.1 - O problema de realismo e localidade no experimento de EPR-Bohm:

Como salientamos no final do capítulo anterior, atualmente, quando se fala em paradoxo de EPR, fala-se no problema de realismo e localidade, e não na questão de se a teoria quântica é completa ou não. A ênfase atual que se dá ao problema, a partir do trabalho de Bell, está na questão da existência ou não de teorias realistas e locais, cujas previsões sejam idênticas às da mecânica quântica. Mais uma vez, não se questiona o fato da teoria quântica ser correta ou não, uma vez que a corroboração experimental de suas previsões não fornece bases para qualquer questionamento de sua validade. O que faremos nos capítulos subsequentes se relaciona com a possibilidade de existência de tais teorias tipo-clássicas. Primeiramente, faremos uma outra análise do experimento de EPR-Bohm.

Tomamos a situação representada pela fig. 4.1, em que temos um sistema composto por duas partículas P1 e P2 de spin 1/2, estando o sistema no estado singleto $|\Psi_s\rangle$. De alguma maneira que não influencie o seu estado total, esse sistema se desintegra e cada uma das duas partículas segue numa mesma direção, mas em sentidos opostos. Temos então que, se efetuamos uma medição num instante $t=t_0$, da componente S_x da partícula P1 e obtemos um resultado, por exemplo $+\hbar/2$, sabemos, de imediato, que qualquer medida que se efetue posteriormente ($t > t_0$) sobre a outra partícula, da mesma componente, nos dará o valor oposto. Isso é decorrente do estado singleto, se assumimos que a mecânica quântica é correta, e as probabilidades de obtermos um ou outro autovalor na medição em P1 são iguais.

Pela condição de localidade, no instante $t=t_0$, nenhum efeito da medição em P1 é sentido pela partícula P2, já que as duas partículas se encontram convenientemente distantes entre si. Sabemos, então, o valor que a componente S_x da partícula P2 assume, mesmo antes que ela "saiba" que se efetuou a medição em P1, de modo que podemos concluir que o valor da componente já estava determinado mesmo antes de t_0 . Ou seja, o estado da partícula P2 é, seguindo o exemplo acima, $|-\rangle_2$, tanto antes quanto depois de efetuada a medição em P1.

Agora, quando consideramos o sistema total P1 + P2 temos, pelo que acabamos de concluir, que o seu estado é dado por

$$|\Psi\rangle = C |+\rangle_1 |-\rangle_2$$

mesmo antes de efetuada a medição (C é uma constante de normalização).

Temos, então, o mesmo problema devido à existência do estado superposto. Se considerarmos um ensemble de N desintegrações como a que descrevemos acima, o conjunto dos resultados é uma mistura de estados $|+\rangle_1 |-\rangle_2$ e $|-\rangle_1 |+\rangle_2$. Chegamos, portanto, a uma situação para-

doxal, uma vez que, como já salientamos no cap. III, o estado superposto não é uma mistura estatística de estados, que é o que nos faz concluir o fato acima (nota 4.1).

Se se considera que a mecânica quântica seja uma teoria correta, uma vez que as suas previsões são sempre observadas experimentalmente, inclusive o fato de $|\Psi_s\rangle$ ser realmente um estado superposto, significa que na descrição que fizemos existem elementos incompatíveis com a descrição quântica do fenômeno. Se se analisam os passos que levam à conclusão a que se chegou, encontra-se que a afirmação incompatível é justamente a hipótese de localidade (Selleri, 1986). Ou seja, não podemos assumir que, no instante $t=t_0$, em que se efetua a medição em P1, nenhum efeito se verifique em P2. Todos os outros passos são ou consequências desta hipótese, ou consequências estritas da mecânica quântica.

Segundo Selleri (1986), pode-se contornar essa situação ou (1) negando-se a hipótese de localidade e assumindo que realmente existe ação-à-distância, de modo que além da interação entre as duas partículas ser instantânea, ela produz os mesmos efeitos independentemente da distância entre elas; ou então, (2) pode-se dizer que como não se efetua a medição em P2, nada se pode dizer acerca de suas propriedades, sendo pura conjectura de ordem metafísica qualquer afirmação que se faça a esse respeito.

Mas essa última concepção, de caráter tipicamente positivista, nega também a existência de uma realidade objetiva. Ou seja, temos as seguintes alternativas: se assumimos realismo e localidade, temos uma discordância com a descrição quântica, que é corroborada experimentalmente; se assumimos a existência de uma realidade objetiva, temos que assumir também a não localidade (1); ou então, assume-se que a localidade não é problemática, mas temos que abdicar da existência de uma realidade objetiva (2); ou ainda, negamos tanto realismo quanto localidade.

Selleri mostra também que esse problema com localidade e realismo aparece mesmo se se considera a mecânica quântica como não sendo uma teoria completa. Um outro exemplo do caráter não-realístico da mecânica quântica é provido pelo paradoxo de De Broglie (nota 4.3), onde não se faz qualquer consideração acerca da completeza ou não da teoria.

IV.4.2 - Derivação da Desigualdade de Bell:

Baseando-se no trabalho de EPR e Bohm, mas com uma ênfase diferente, Bell (1965, 1971) mostrou que a mecânica quântica é inconsistente com as teorias realistas locais (ou teorias locais de variáveis escondidas) em um tipo ideal de experimento de correlação de spin descrito por Bohm. Uma teoria realista-local representa intuitivamente nossos conceitos de algumas condições necessárias que uma teoria clássica deveria ter. Afinal, toda a nossa estrutura de pensamento, nossa linguagem, nossa vivência, tem um correlato macroscópico por excelência clássico. De maneira informal, podemos dizer que uma teoria rea-

doxal, uma vez que, como já salientamos no cap. III, o estado superposto não é uma mistura estatística de estados, que é o que nos faz concluir o fato acima (nota 4.1).

Se se considera que a mecânica quântica seja uma teoria correta, uma vez que as suas previsões são sempre observadas experimentalmente, inclusive o fato de $|\Psi_s\rangle$ ser realmente um estado superposto, significa que na descrição que fizemos existem elementos incompatíveis com a descrição quântica do fenômeno. Se se analisam os passos que levam à conclusão a que se chegou, encontra-se que a afirmação incompatível é justamente a hipótese de localidade (Selleri, 1986). Ou seja, não podemos assumir que, no instante $t=t_0$, em que se efetua a medição em P1, nenhum efeito se verifique em P2. Todos os outros passos são ou consequências desta hipótese, ou consequências estritas da mecânica quântica.

Segundo Selleri (1986), pode-se contornar essa situação ou (1) negando-se a hipótese de localidade e assumindo que realmente existe ação-à-distância, de modo que além da interação entre as duas partículas ser instantânea, ela produz os mesmos efeitos independentemente da distância entre elas; ou então, (2) pode-se dizer que como não se efetua a medição em P2, nada se pode dizer acerca de suas propriedades, sendo pura conjectura de ordem metafísica qualquer afirmação que se faça a esse respeito.

Mas essa última concepção, de caráter tipicamente positivista, nega também a existência de uma realidade objetiva. Ou seja, temos as seguintes alternativas: se assumimos realismo e localidade, temos uma discordância com a descrição quântica, que é corroborada experimentalmente; se assumimos a existência de uma realidade objetiva, temos que assumir também a não localidade (1); ou então, assume-se que a localidade não é problemática, mas temos que abdicar da existência de uma realidade objetiva (2); ou ainda, negamos tanto realismo quanto localidade.

Selleri mostra também que esse problema com localidade e realismo aparece mesmo se se considera a mecânica quântica como não sendo uma teoria completa. Um outro exemplo do caráter não-realístico da mecânica quântica é provido pelo paradoxo de De Broglie (nota 4.3), onde não se faz qualquer consideração acerca da completeza ou não da teoria.

IV.4.2 - Derivação da Desigualdade de Bell:

Baseando-se no trabalho de EPR e Bohm, mas com uma ênfase diferente, Bell (1965, 1971) mostrou que a mecânica quântica é inconsistente com as teorias realistas locais (ou teorias locais de variáveis escondidas) em um tipo ideal de experimento de correlação de spin descrito por Bohm. Uma teoria realista-local representa intuitivamente nossos conceitos de algumas condições necessárias que uma teoria clássica deveria ter. Afinal, toda a nossa estrutura de pensamento, nossa linguagem, nossa vivência, tem um correlato macroscópico por excelência clássico. De maneira informal, podemos dizer que uma teoria rea-

lista-local se baseia em três premissas básicas:

(1) **Realismo**, que é uma visão filosófica segundo a qual a realidade externa é assumida existente e tendo propriedades bem definidas.

(2) **Indutivismo**, que assevera que a inferência indutiva é válida, de modo que conclusões verdadeiras podem ser obtidas a partir de observações consistentes.

(3) **Localidade**, que considera que nenhum tipo de informação pode se propagar instantaneamente, ou seja, com velocidade infinita, de um ponto a outro do espaço.

A conclusão de Bell é muito mais vigorosa que a de EPR. Enquanto EPR asseveram que a mecânica quântica é incompleta no sentido de que a teoria não tem em si aspectos de realidade previsíveis com probabilidade um, Bell diz que a teoria é inconsistente com os conceitos filosóficos acima enunciados, e que estão implícitos na física clássica, em certos experimentos ideais de correlação. Em 1952, para reproduzir as previsões da mecânica quântica para um experimento do tipo EPR, Bohm postulou a existência de interações não-locais entre partículas espacialmente separadas. Bell (1965) estudou este tratamento e mostrou que a não-localidade é uma característica genérica de toda a classe de teorias deterministas de variáveis escondidas, no domínio de aparelhos e sistemas ideais, para que possam concordar com as previsões estatísticas da mecânica quântica.

Nesse trabalho (Bell, 1965), que foi o responsável pelo reacendimento dos debates em torno dos fundamentos da mecânica quântica, Bell provou matematicamente o que ficou conhecido posteriormente como teorema de Bell: "**nenhuma teoria local de variáveis escondidas pode reproduzir todas as previsões estatísticas da mecânica quântica, para experimentos do tipo EPR-Bohm**". Para provar esse teorema, Bell derivou a primeira versão de sua famosa desigualdade, que não será, no entanto, a que derivaremos aqui. Em 1971, Bell apresentou uma desigualdade formalmente um pouco diferente, mas cujo objetivo já é obter uma expressão que realce as diferenças de previsão entre os dois tipos de teorias. Enquanto na demonstração da primeira desigualdade (1965) Bell parte de um ponto de vista determinístico, na derivação de 1971 o ponto de partida é probabilístico. Isto é, considera que as teorias realistas-locais caracterizadas tenham um caráter estocástico. Assim, a última desigualdade é, pelas considerações tomadas na própria derivação um pouco mais geral que a anterior.

Transcrevemos em seguida a demonstração melhorada de Bell (1971) de que, qualquer que seja a teoria local e realista, ela não pode concordar com a mecânica quântica para o experimento ideal de EPR-Bohm. Faremos, após a demonstração, um comentário acerca de outras contribuições, para que se chegasse à possibilidade de verificação experimental.

Utilizaremos o mesmo sistema composto que descrevemos na sec-

ção anterior (IV.4.1), mas incluiremos agora dois aparelhos de medição, um para cada partícula, e que determinam as componentes do spin ao longo das direções \hat{a} e \hat{b} , respectivamente (fig. 4.2). Seja λ o conjunto de variáveis escondidas, com domínio Γ , que representam todas as propriedades das duas partículas, necessárias para tornar completa a descrição do estado inicial, e cuja distribuição de probabilidades (no caso, probabilidades de ignorância) é $\rho(\lambda)$ para o estado quântico considerado.

Sejam A e B os observáveis que dão as componentes do spin nas direções \hat{a} e \hat{b} respectivamente, sendo que os resultados possíveis para a medição de cada um deles são ± 1 (na verdade, $\pm \hbar/2$). É válida a suposição de que os resultados de medições, A e B , desses observáveis dependam, respectivamente, de (λ, \hat{a}) e (λ, \hat{b}) , mas a condição de localidade requer que o resultado A não dependa da orientação \hat{b} , nem que o resultado B dependa de \hat{a} .

Podemos supor, também, que os próprios instrumentos contenham em si variáveis escondidas que possam influenciar nos resultados. Caracterizamos, então, o estado dos aparelhos por meio de um conjunto de variáveis s , com domínio S , de modo que agora os resultados das medições também dependem delas. Ou seja, temos

$$A(\hat{a}, \lambda, s) = \pm 1 \quad \text{e} \quad B(\hat{b}, \lambda, s') = \pm 1 \quad (4.3)$$

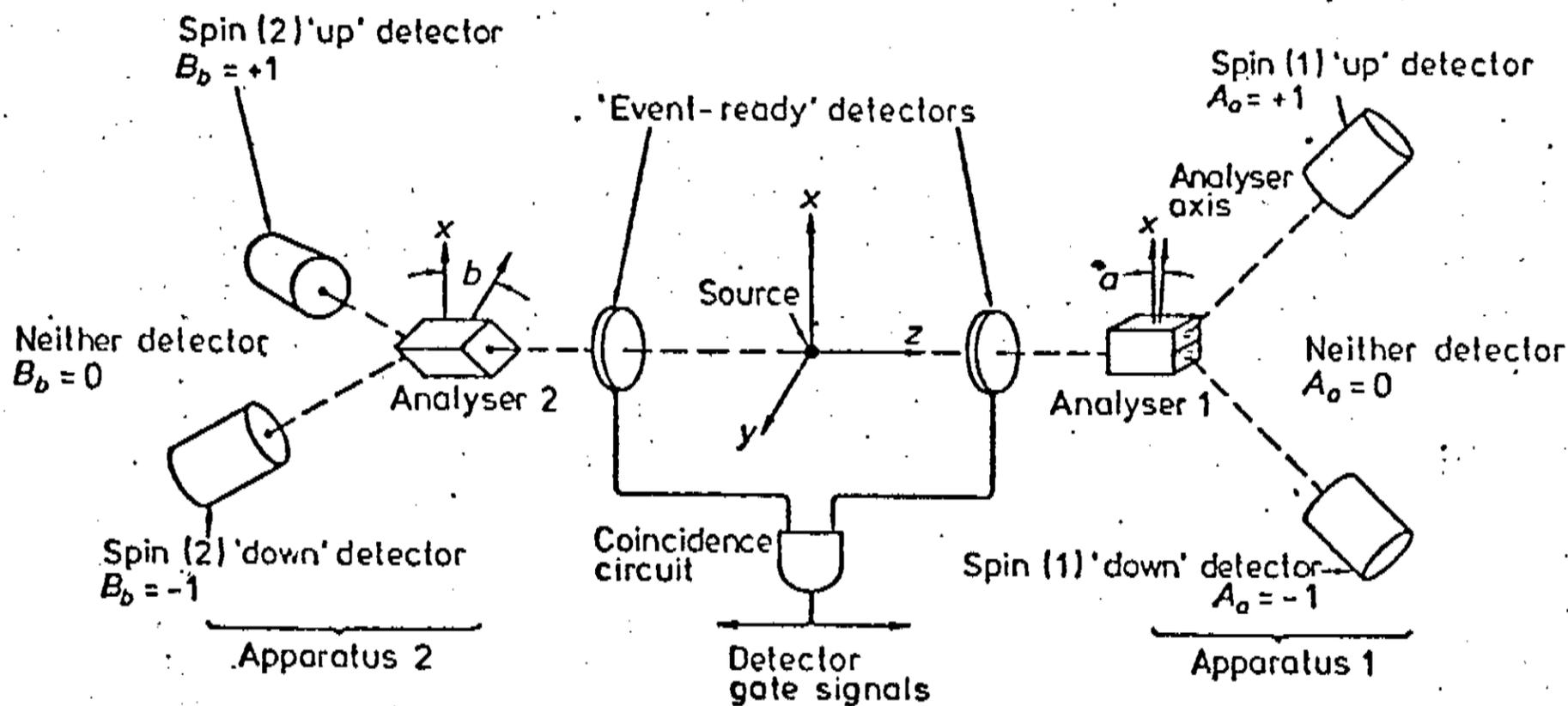


Fig. 4.2 - Esquema do aparato experimental utilizado na derivação da desigualdade de Bell (1971).

sendo que a distribuição de probabilidades das variáveis escondidas, $\rho(\mathbf{a}, \lambda, \mathbf{s})$, é normalizada:

$$\int_{S^T} \rho(\mathbf{a}, \lambda, \mathbf{s}) \, ds \, d\lambda = 1$$

o que se verifica igualmente para $\rho(\mathbf{b}, \lambda, \mathbf{s}')$; e fatorizável, uma vez se podendo considerar o aparelho como independente, inicialmente, do objeto que está sendo medido:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{a}, \lambda, \mathbf{s}) &= \rho(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \cdot \rho(\lambda) \\ \rho(\mathbf{b}, \lambda, \mathbf{s}') &= \rho(\mathbf{b}, \mathbf{s}') \cdot \rho(\lambda) \end{aligned} \tag{4.4}$$

De um certo modo, estas considerações caracterizam matematicamente um processo determinístico e causal, sendo uma maneira válida de se expressar as teorias de variáveis escondidas.

Podemos determinar, agora, o valor médio dos resultados das medições de A e B , avaliados sobre a distribuição dos estados dos aparelhos. Supomos que $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ e $\rho(\mathbf{b}, \mathbf{s}')$ assumem valores independentes para os dois aparelhos de medição, isto é, que temos no aparelho I a distribuição $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ e para o aparelho II, $\rho(\mathbf{b}, \mathbf{s}')$. Isto para que as médias $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ sejam independentes de \mathbf{b} e \mathbf{a} , respectivamente. Tais médias são dadas por:

$$\begin{aligned} \langle A(\mathbf{a}, \lambda) \rangle &= \int_S \rho(\mathbf{a}, \mathbf{s}) A(\mathbf{a}, \mathbf{s}, \lambda) \, ds \\ \langle B(\mathbf{b}, \lambda) \rangle &= \int_{S'} \rho(\mathbf{b}, \mathbf{s}') B(\mathbf{b}, \mathbf{s}', \lambda) \, ds' \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $A = \pm 1$ e $B = \pm 1$, temos que $|\langle A \rangle| \leq 1$ e $|\langle B \rangle| \leq 1$. Denotaremos, a fim de simplificar a notação, as médias acima por \bar{A} e \bar{B} , respectivamente.

Vamos considerar que possamos reorientar os aparelhos I e II de modo que possamos medir componentes do spin segundo outras direções, que notaremos por \mathbf{a}' e \mathbf{b}' , respectivamente.

A possibilidade de comparação de resultados com as previsões da mecânica quântica se dá através da função de correlação das medidas realizadas nos aparelhos I e II, definida como o valor médio do produto dos resultados obtidos nesses aparelhos, nas mesmas desintegrações. Ou seja,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{S^T} d\lambda \, ds \, ds' \, A(\mathbf{a}, \mathbf{s}, \lambda) B(\mathbf{b}, \mathbf{s}', \lambda) \rho(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \rho(\mathbf{b}, \mathbf{s}') \rho(\lambda)$$

e, integrando-se sobre as variáveis escondidas dos aparelhos,

$$P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}) = \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\hat{\mathbf{b}}, \lambda) \quad (4.6)$$

De todas as considerações feitas acima, podemos derivar a restrição sobre P conhecida por Desigualdade de Bell. Devemos notar que todo o desenvolvimento até aqui foi efetuado em termos de valores médios, o que indica que podemos efetuar uma série de experiências com os analisadores nas posições \mathbf{a} e $\hat{\mathbf{b}}$, o que nos dá $P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}})$, e depois, variando as suas orientações, podemos determinar as funções de correlação correspondentes a estes pares de orientação.

Seja a expressão

$$P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}) - P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}') = \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}) - \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}') \quad (4.7)$$

Se adicionarmos ao lado direito da igualdade a expressão unitária

$$+ \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}') + \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}')$$

temos, então, que:

$$P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}) - P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}') = \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}) [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}')] - \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}') [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}})] \quad (4.8)$$

Tomando em conta o módulo da expressão acima, e considerando que $|\bar{A} - \bar{B}| \leq |\bar{A}| + |\bar{B}|$, temos

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}) - P(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}')| &\leq \left| \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}) [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}')] \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}') [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}})] \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) |\bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}})| |1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}')| \\ &\quad + \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) |\bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}}')| |1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}') \bar{B}(\lambda, \hat{\mathbf{b}})| \quad (4.9) \end{aligned}$$

Como

$$|\bar{A}(\lambda, a)\bar{B}(\lambda, \hat{b})| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\bar{A}(\lambda, a)\bar{B}(\lambda, \hat{b}')| \leq 1,$$

então

$$\begin{aligned} |P(a, \hat{b}) - P(a, \hat{b}')| &\leq \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) |1 \pm \bar{A}(\lambda, a')\bar{B}(\lambda, \hat{b}')| \\ &+ \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) |1 \pm \bar{A}(\lambda, a')\bar{B}(\lambda, \hat{b})| \end{aligned} \quad (4.10)$$

Uma vez que $-1 \leq \bar{A}\bar{B} \leq 1$, isto significa que $|1 \pm \bar{A}\bar{B}| = 1 \pm \bar{A}\bar{B}$. Deste modo, podemos rearranjar a expressão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |P(a, \hat{b}) - P(a, \hat{b}')| &\leq \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(\lambda, a')\bar{B}(\lambda, \hat{b}')] \\ &+ \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(\lambda, a')\bar{B}(\lambda, \hat{b})] \\ &= 2 \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \pm \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, a')\bar{B}(\lambda, \hat{b}') \\ &\quad \pm \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\lambda, a')\bar{B}(\lambda, \hat{b}) \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} |P(a, \hat{b}) - P(a, \hat{b}')| &\leq 2 \pm P(a', \hat{b}') \pm P(a', \hat{b}) \\ &= 2 \pm [P(a', \hat{b}') + P(a', \hat{b})] \end{aligned}$$

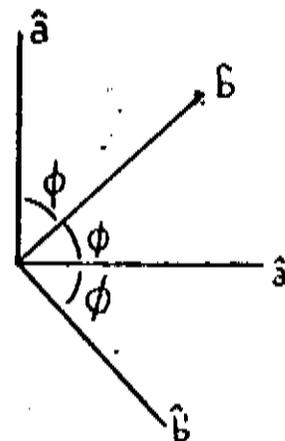
ou

$$|P(a, \hat{b}) - P(a, \hat{b}')| + [P(a', \hat{b}') + P(a', \hat{b})] \leq 2 \quad (4.11)$$

o que nos leva diretamente à famosa Desigualdade de Bell:

$$|P(a, \hat{b}) - P(a, \hat{b}')| + |P(a', \hat{b}') + P(a', \hat{b})| \leq 2 \quad (4.12)$$

Para ilustrar a discordância desta igualdade com a mecânica quântica, tomemos as seguintes orientações para os analisadores ($\hat{a}, \hat{b}, \hat{a}', \hat{b}'$):



$$\text{com } \phi = \frac{\pi}{4}$$

Para estas orientações, temos uma discordância acentuada com a previsão da mecânica quântica. Para um sistema de duas partículas de spin 1/2 no estado singleto, a função de correlação da mecânica quântica (através de todo este trabalho toda previsão quântica sempre tem por índice o símbolo **HQ**) tem a seguinte forma para casos ideais (dedução no apêndice 4):

$$P_{MQ}(\hat{a}, \hat{b}) = -\hat{a} \cdot \hat{b} = -|\hat{a}| |\hat{b}| \cos(\hat{a}, \hat{b}) \quad (4.13)$$

de modo que a expressão da desigualdade assume a forma, se substituirmos os valores para as várias funções de correlação, que segue:

$$|P_{MQ}(\hat{a}, \hat{b}) - P_{MQ}(\hat{a}, \hat{b}')| + |P_{MQ}(\hat{a}', \hat{b}) + P_{MQ}(\hat{a}', \hat{b}')| = 2\sqrt{2}. \quad (4.14)$$

Assim, fica evidenciada a discordância entre as previsões da mecânica quântica e as teorias realistas-locais, como caracterizadas por Bell, cujas consequências trataremos numa secção adiante.

Como pudemos observar, a função de correlação $P(\hat{a}, \hat{b})$ que definimos, entre as medidas efetuadas nos dois aparelhos, não consegue reproduzir as previsões obtidas com a função de correlação quântica. Isso nos permite dizer que a mecânica quântica, para certos casos, prevê correlações mais intensas entre os sistemas do que as teorias realistas-locais que caracterizamos. Existem várias críticas acerca dessa caracterização e da generalidade da desigualdade mas, como veremos a seguir, desigualdades do tipo Bell podem ser derivadas a partir de várias considerações diferentes.

IV.4.3 - Comentários sobre outras derivações da desigualdade de Bell:

Atualmente, quando se fala em desigualdade de Bell, não se refere apenas à desigualdade que derivamos acima, mas sim a toda uma classe de desigualdades. Em diferentes trabalhos, essas desigualdades são encontradas como expressões formalmente diferentes entre si, derivadas de modos totalmente diferentes umas das outras, derivações estas baseadas em hipóteses também diferentes. Existem tantas derivações de desigualdades tipo - Bell, que é difícil até mesmo fazer um comentário geral sobre elas.

Mostraremos, assim, uma outra derivação da desigualdade de Bell, devida a Clauser e Horne (CH, 1974), baseada, por sua vez, numa derivação anterior de Clauser et al (CHSH, 1969). Isso porque, devido a problemas técnicos, as desigualdades derivadas por Bell (1965, 1971) apresentam muitas dificuldades quando se tenta testá-las experimentalmente. Tanto CH quanto CHSH derivaram a nova desigualdade assumindo uma hipótese auxiliar, a fim de propiciar o teste experimental da expressão obtida. Antes de comentarmos esta derivação, vamos apresentar as razões pelas quais a derivação que transcrevemos apresenta dificuldades para ser testada.

Dos experimentos realizados até agora (sec. IV.5) apenas um (Aspect et al, 1982a) se utiliza diretamente da desigualdade de Bell (1971). Todos os demais se utilizam da desigualdade derivada por CHSH e CH. A dificuldade experimental em se utilizar a desigualdade que derivamos se deve ao fato de os termos envolvidos serem de difícil medição, uma vez que:

- 1) a baixa eficiência dos detectores faz com que a taxa de coincidência detectada seja muito menor que a emergente;
- 2) as emissões dos pares nem sempre se dão em direções opostas (nas experiências com cascata radioativa), o que significa que fótons podem ser emitidos e perdidos, sem que possamos distinguir se a não detecção se deve a isto ou à baixa eficiência dos detectores.

Essas dificuldades motivaram CHSH a utilizarem um arranjo experimental diferente, como se pode ver na figura 4.3. Em sua derivação, assumiram que o determinismo era válido para as teorias consideradas, hipótese esta que não foi utilizada posteriormente nem por Bell (1971), nem por CH. A derivação de CHSH foi a primeira rederivação da desigualdade após Bell (1965).

Com relação ao postulado de localidade, CHSH introduziram uma hipótese auxiliar de que, "se uma partícula passa por um analisador de spin, sua probabilidade de detecção é independente da orientação do analisador". Mas, infelizmente, é uma hipótese que se assumiu "ad hoc", já que não está contida nas hipóteses de localidade, realismo ou determinismo sobre as quais se erigiu a derivação. No entanto, ela permite que se obtenha uma formulação experimentalmente testável para a desigualdade, muito embora essa hipótese torne o processo de passagem ou não passagem pelo polarizador um processo primitivo, excluindo

as teorias para as quais uma passagem parcial é desejável. CHSH fizeram uma modificação no arranjo experimental ideal que Bell utilizou, reinterpretando os valores $+1$ e -1 de $A(\hat{a})$ e $B(\hat{b})$ como significando detecção e não-deteção, respectivamente, das partículas. Assim, o novo arranjo experimental permite que se obtenha, juntamente com a hipótese adicional assumida, uma expressão em termos de razões de contagens de detecção das partículas.

CHSH foram mais além e propuseram um experimento real factível, utilizando como fonte a correlação de polarização de um par de fótons emitidos em uma cascata atômica (uma variação do experimento de Kocher e Commins, 1967, realizado para observar correlações na polarização linear de um par de fótons, mas sem nenhuma intenção de testar a desigualdade de Bell), e derivaram a expressão quântica para casos não ideais. Trataremos das experiências que se realizaram a partir de então em IV.5.

Em 1974, Clauser e Horne rederivaram a expressão de CHSH utilizando uma hipótese mais forte: "para todo par de emissões - isto é, para cada valor de λ - a probabilidade de se ter uma contagem com o polarizador posicionado é menor ou igual à probabilidade correspondente quando ele é retirado" (hipótese de não-'realçamento' - non enhancement). Aqui, o processo de passagem e não passagem através do polarizador já não é mais considerado primitivo. O arranjo experimental de que CH se utilizam na derivação é o mesmo introduzido por CHSH e os resultados são formulados em termos de probabilidades para contagens simples e de coincidência, ao invés dos valores esperados considerados por Bell (1971).

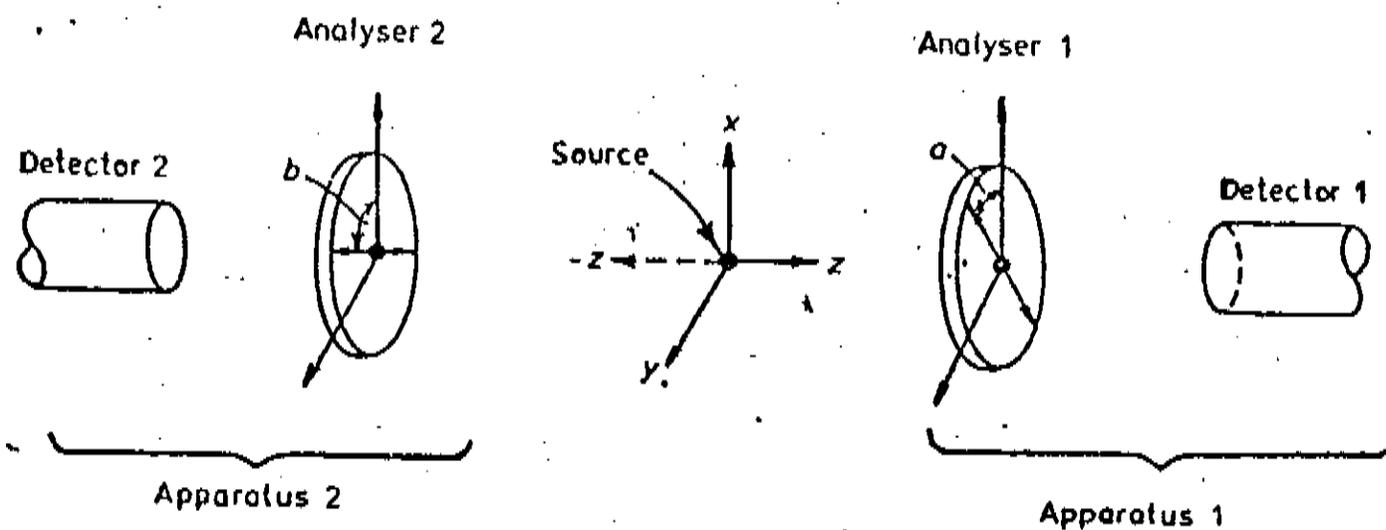


Fig. 4.3 - Esquema do arranjo experimental modificado de CHSH, mais factível experimentalmente, e no qual se basearam a maior parte dos experimentos tipo-cascata realizados. No caso deste arranjo, se obtemos, por exemplo, $A(\hat{a}) = +1$, significa que a partícula passou pelo analisador 1. (Clauser e Shimony, 1978)

Vamos supor que os parâmetros ajustáveis dos polarizadores estejam orientados no sentido de medir \hat{a} e \hat{b} e que a fonte emita N pares de partículas (no caso, fótons), do modo como temos considerado até agora. Se os detectores I e II detectam $N_1(\hat{a})$ e $N_2(\hat{b})$ partículas respectivamente, e temos como sendo $N_{12}(\hat{a}, \hat{b})$ o número de contagens coincidentes, então, se N é suficientemente grande, podemos definir as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} p_1(\hat{a}) &= N_1(\hat{a}) / N \\ p_2(\hat{b}) &= N_2(\hat{b}) / N \\ p_{12}(\hat{a}, \hat{b}) &= N_{12}(\hat{a}, \hat{b}) / N \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se assumimos a localidade, e que as partículas, após separadas, mantêm o estado conjunto λ e evoluem de maneira inerentemente estocástica, podemos dizer que as probabilidades acima dependem também de λ :

$$p_1(\lambda, \hat{a}) ; p_2(\lambda, \hat{b}) ; p_{12}(\lambda, \hat{a}, \hat{b})$$

e que

$$p_{12}(\lambda, \hat{a}, \hat{b}) = p_1(\lambda, \hat{a}) p_2(\lambda, \hat{b}) \quad (4.16)$$

onde λ caracteriza o sistema físico das duas partículas com um estado no intervalo de tempo intermediário entre a emissão e a medição, e pode ou não descrever a essência última do sistema, no instante escolhido. Assim, assumimos que o ensemble das emissões é caracterizado pela densidade de probabilidade normalizada $\rho(\lambda)$. Deste modo, tomando as médias sobre o ensemble das emissões, temos

$$\begin{aligned} p_1(\hat{a}) &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) p_1(\lambda, \hat{a}) \\ p_2(\hat{b}) &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) p_2(\lambda, \hat{b}) \\ p_{12}(\hat{a}, \hat{b}) &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) p_1(\lambda, \hat{a}) p_2(\lambda, \hat{b}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

De modo a proceder a demonstração, CH provam que a expressão abaixo, conhecida como lema de Clauser - Horne, é válida

$$-XY \leq xy - xy' + x'y + x'y' - Yx' - Xy \leq 0$$

desde que todos os termos sejam números reais e obedeçam às seguintes relações:

$$0 \leq x, x' \leq X \quad \text{e} \quad 0 \leq y, y' \leq Y$$

Assim, mostram que as probabilidades acima definidas obedecem à seguinte desigualdade

$$-1 \leq p_{12}(\lambda, a, \hat{b}) - p_{12}(\lambda, a, \hat{b}') + p_{12}(\lambda, a', \hat{b}) + p_{12}(\lambda, a', \hat{b}') - p_1(\lambda, a') - p_2(\lambda, \hat{b}) \leq 0 \quad (4.18)$$

que, integrada sobre λ com a distribuição $\rho(\lambda)$, dá

$$-1 \leq p_{12}(a, \hat{b}) - p_{12}(a, \hat{b}') + p_{12}(a', \hat{b}) + p_{12}(a', \hat{b}') - p_1(a') - p_2(\hat{b}) \leq 0 \quad (4.19)$$

que é a variante da desigualdade de Bell conhecida por **desigualdade de Clauser - Horne**. CH mostraram também que a relação que obtivemos acima é completamente análoga à que derivamos anteriormente. Para que esta desigualdade passe a ser experimentalmente testável, temos que reescrevê-la em termos de grandezas que podem ser medidas no laboratório. Para isso, redefinimos as probabilidades em termos de taxas de detecção coincidentes, que é o que ocorre quando as duas partículas oriundas de uma mesma desintegração são detectadas pelos aparelhos. Podemos redefinir as probabilidades em termos de taxas de detecção coincidentes:

$$\begin{aligned} p_1(a) &= R_1(a) / R_0 & p_2(\hat{b}) &= R_2(\hat{b}) / R_0 \\ p_{12}(a, \hat{b}) &= R(a, \hat{b}) / R_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde:

$R(a, \hat{b})$ - taxa de detecção coincidente obtida para o caso em que os dois polarizadores estão em seu lugar.

$R_1(a)$ - taxa de detecção coincidente obtida quando apenas o polarizador II é removido.

$R_2(\hat{b})$ - taxa de detecção coincidente obtida quando apenas o polarizador I é removido.

R_0 - taxa de detecção coincidente obtida quando ambos os polarizadores são removidos, ou seja quando as partículas incidem diretamente sobre os detectores.

Nestas redefinições já está implícita a hipótese adicional de não-realçamento de CH que mencionamos anteriormente, o que justifica a introdução dessas taxas de detecção com polarizadores removidos. CH provam que essa hipótese é suficiente e imprescindível para que se possa verificar experimentalmente uma incompatibilidade entre os re-

sultados das medições e a previsão para as teorias realistas-locais.

Devido à baixa eficiência dos detectores, com a consequente não detecção de todos os fótons transmitidos, para relacionarmos estas probabilidades com os valores obtidos experimentalmente, temos ainda que assumir mais uma hipótese adicional, de que a probabilidade de detecção para um fóton seja independente de se ele passou ou não pelo analisador. Se aplicamos as redefinições acima à desigualdade (4.19), temos que

$$-R_0 \leq R(a, \hat{b}) - R(a, \hat{b}') + R(a', \hat{b}) + R(a', \hat{b}') - R_1(a') - R_2(\hat{b}) \leq 0 \quad (4.20)$$

que é uma previsão geral para qualquer teoria realista-local (e é uma expressão idêntica à obtida por CHSH, muito embora derivada de uma maneira diferente). Aqui, como no trabalho de CHSH, já se elimina a dificuldade experimental de se saber se uma partícula passou ou não pelo analisador, se foi ou não emitida, se foi ou não detectada, e que aparecem já que lidamos com equipamentos reais, e que possuem uma eficiência limitada.

Na secção seguinte, ao tratarmos do caso específico de experimentos elaborados para testar essas desigualdades, utilizando como fonte de pares de fótons correlacionados uma cascata atômica, retomaremos a expressão acima. Na realidade, a expressão (4.20) sofre ainda algumas simplificações para ser utilizada experimentalmente.

IV.5.1 - Introdução:

Sempre que passamos de considerações idealizadas para uma abordagem real dos fundamentos, temos que começar a levar em conta toda uma série de detalhes que, se ignorados, podem tornar enganosas as observações que fazemos do mundo. Em especial, se o experimento por meio do qual vinculamos uma observação for muito sensível, qualquer descontrolo pode nos levar a conclusões totalmente errôneas, sem que possamos nos aperceber disso. A principal dificuldade para se testar a desigualdade de Bell contra as previsões da mecânica quântica é encontrar situações experimentalmente realizáveis em que as duas previsões são claramente discordantes. Isso sem contar as inúmeras dificuldades com relação ao próprio arranjo experimental. Os experimentos elaborados para este fim, e que já foram até agora realizados no laboratório, podem, com base na maneira como se obtém os pares de partículas correlacionadas, ser divididos em três grupos:

- (1) Experimentos de cascata de fótons.
- (2) Experimentos de aniquilação elétron - pósitron.
- (3) Experimento de espalhamento próton - próton.

Estudaremos com mais detalhe os experimentos tipo cascata de fótons, por serem os que apresentam menos dificuldades experimentais, mas trataremos também dos outros dois tipos de experimentos, assinalando para os três as dificuldades que envolvem e dando os resultados dos vários experimentos realizados. Analisaremos com um pouco mais de detalhe o experimento de Aspect et al (3º exp. de Aspect, 1982), que utiliza um novo arranjo experimental proposto por Aspect (1975).

Em geral, os experimentos se utilizam de um arranjo baseado no proposto por CHSH (fig. 4.3) na derivação de sua desigualdade, uma vez que o utilizado por Bell (fig 4.2) implica numa dificuldade experimental maior. As únicas exceções se fazem aos recentes experimentos de Aspect et al (2º exp de Aspect, 1982), que veremos mais adiante, e de Rapisarda (1982). Uma análise bem detalhada dos experimentos e da derivação da expressão testável da desigualdade de Bell é feita por Clauser e Shimony (1978) e Paul (1980), que fazem também uma ampla discussão acerca das possíveis falhas desses experimentos.

Clauser e Shimony analisam os requisitos básicos necessários para um teste experimental geral, por meio do estudo da previsão quântica para experimentos do tipo proposto por CHSH. As previsões da mecânica quântica para taxas de detecção e correlação exibem uma simetria cilíndrica em torno do eixo de emissão e têm a seguinte forma característica (nota 4.4):

$$[p12(\phi)]_{MQ} = p \cdot \cos(n\phi)$$

onde $\phi = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, e n é igual a 1 ou 2 para experimentos realizados com férmions ou bósons, respectivamente.

(4.21)

$$[p1(\mathbf{a})]_{MQ} \equiv p1 \quad ; \quad [p2(\mathbf{b})]_{MQ} \equiv p2$$

de modo que tanto p , quanto $p1$ e $p2$ dependem de vários fatores experimentalmente relevantes. Após considerarem a hipótese de que tal simetria se verifica também nas previsões das teorias realistas-locais, otimizarem a escolha dos ângulos de orientação dos analisadores, reescrevem as desigualdades de Bell e CH, que já obtivemos aqui, sob esta nova perspectiva (repetiremos estas etapas com mais detalhes mais adiante), e analisarem os dados obtidos, Clauser e Shimony chegam a várias prerrogativas experimentais necessárias para que se possa ter um teste direto da desigualdade. Estes requisitos estão relacionados com os parâmetros dos quais dependem p , $p1$ e $p2$. Quais sejam:

a) a fonte deve emitir pares de sistemas com estados distintos, mas correlacionados, que possam ser suficientemente detectáveis, produzindo-o por um decaimento tipo "dois corpos";

b) a mecânica quântica deve prever correlações fortes dos observáveis relevantes de cada par;

c) os analisadores devem ter transmitâncias elevadas e mínimas, segundo uma base ortogonal pertinente;

d) os colimadores e filtros que se utilize devem ter alta transmitância e não devem despolarizar as emissões;

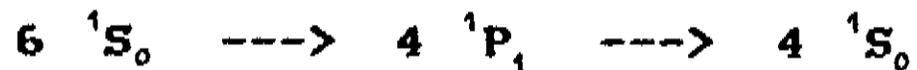
e) de modo a chegarmos a um argumento contra a localidade, os parâmetros \mathbf{a} e \mathbf{b} devem variar rapidamente no decorrer de uma emissão, eliminando-se a possibilidade de que os pares emitidos sejam influenciados pela presença de polarizadores com uma dada orientação. Esta sugestão foi primeiramente feita por Bohm e Aharonov (1957).

Como veremos mais adiante, os experimentos são elaborados de modo a tentar conciliar, da maneira mais eficiente possível, esses fatores. E isso é quase sempre muito difícil tecnicamente.

Antes de iniciarmos uma análise mais detalhada de cada um dos três tipos de experimentos cabe mencionar que, até agora, a única experiência em que não se utilizou fótons como sistema correlacionado foi a de Laméhi-Rachti e Mittig (1976), de espalhamento próton-próton. E mais, as hipóteses adicionais para a adequação do processo experimental ao caso ideal estudado sempre existem, não havendo nenhuma experiência que teste diretamente a desigualdade de Bell, apenas com suas hipóteses estruturais.

IV.5.2 - Experimentos tipo cascata de fótons:

Foram Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH, 1969) quem primeiro vislumbrou no trabalho de Bell (1965) a possibilidade de uma verificação experimental das previsões de teorias realistas-locais de variáveis escondidas frente às da mecânica quântica. CHSH fizeram uma proposta de um experimento para tal teste, baseada num experimento anterior de Kocher e Commins (1967), em que era estudada a correlação da polarização de pares de fótons emitidos numa cascata



do cálcio. Os resultados de Kocher e Commins não serviram para testar a desigualdade de Bell (não era este o objetivo da experiência), devido à baixa eficiência dos polarizadores e pelas orientações não adequadas dos mesmos. Não é para qualquer orientação relativa entre \hat{a} , \hat{a}' , \hat{b} e \hat{b}' que se pode obter a violação da desigualdade de Bell. A fonte utilizada naquele experimento foi, então, o par de fótons emitido de uma cascata tipo $J=0 \ \longrightarrow \ J=1 \ \longrightarrow \ J=0$, para a qual CHSH derivaram a previsão das taxas de contagem $R(\phi)$ [ϕ sendo o ângulo entre os eixos de polarização]. Quando tratamos da derivação de CH, definimos a taxa de detecção coincidente $R(\hat{a}, \hat{b})$. Ali assumimos implicitamente que a eficiência ideal de detecção não distorce as razões de coincidência, de modo que a relação

$$\frac{R(\hat{a}, \hat{b})}{R_0} = P(\hat{a}, \hat{b})$$

fôsse válida, lembrando que R_0 é a taxa de coincidência quando os dois polarizadores são removidos.

Tomemos novamente a expressão (4.19) que derivamos na secção anterior, ou seja

$$-1 \leq p_{12}(\hat{a}, \hat{b}) - p_{12}(\hat{a}, \hat{b}') + p_{12}(\hat{a}', \hat{b}) + p_{12}(\hat{a}', \hat{b}') - p_1(\hat{a}') - p_2(\hat{b}) \leq 0$$

onde os dois últimos termos são probabilidades de contagem em um único detector. Segundo Clauser e Shimony, a introdução da hipótese de CH facilita a realização experimental em torno dessa desigualdade, já que transforma todos os termos em probabilidades conjuntas de contagens coincidentes nos dois detectores. Pela hipótese de CH,

$$0 \leq p_1(\lambda, \hat{a}) \leq p_1(\lambda, \infty) \leq 1$$

$$0 \leq p_2(\lambda, \hat{b}) \leq p_2(\lambda, \infty) \leq 1$$

onde ∞ significa que o polarizador correspondente foi retirado.

Seguindo a argumentação que fizemos de (4.17) até chegarmos à expressão acima, reobtemos a desigualdade de CH de uma maneira um pouco diferente:

$$-p_{12}(\infty, \infty) \leq p_{12}(\hat{a}, \hat{b}) - p_{12}(\hat{a}, \hat{b}') + p_{12}(\hat{a}', \hat{b}) + p_{12}(\hat{a}', \hat{b}')$$

(4.22)

$$- p_{12}(\hat{a}', \infty) - p_{12}(\infty, \hat{b}) \leq 0$$

que é uma expressão bem geral onde só se assumiu a mais a hipótese de CH, mas que é experimentalmente muito mais fácil de ser testada.

Em geral, o par de partículas correlacionadas é preparado de modo que apresentem uma simetria cilíndrica em torno do eixo de propagação, e simetria de reflexão com relação a um plano normal ao eixo de propagação. Como já salientamos, as previsões quânticas possuem estas simetrias, e podemos supor que as previsões realistas-locais também as tenham. Desse modo,

(i) $p_{12}(\hat{a}, \infty)$ é independente de \hat{a} , assim como $R_1(\hat{a}) = R_1$,

(ii) $p_{12}(\infty, \hat{b})$ é independente de \hat{b} , assim como $R_2(\hat{b}) = R_2$,

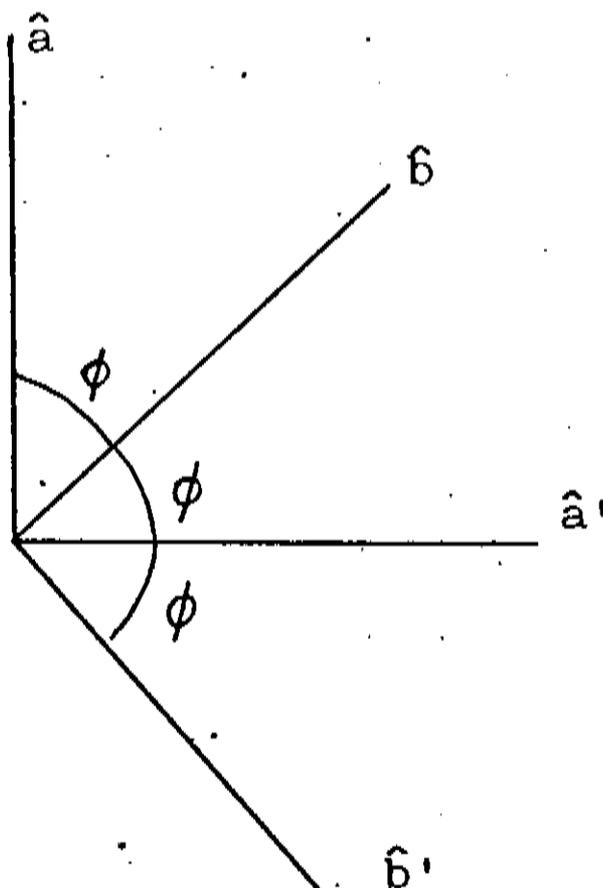
(iii) $p_{12}(\hat{a}, \hat{b}) = p_{12}(\phi)$ e $R(\hat{a}, \hat{b}) = R(\phi)$ são independentes de \hat{a} e de \hat{b} , sendo ϕ o ângulo já definido entre as duas orientações.

que, embora não sejam inteiramente gerais, são condições válidas para as situações experimentais que se utiliza (Clauser e Shimony, 1978, p.1905), e são susceptíveis de verificação experimental. Podemos, agora reescrever a desigualdade (4.22), como

$$-p_{12}(\infty, \infty) \leq 3p_{12}(\phi) - p_{12}(3\phi) - p_{12}(\hat{a}', \infty) - p_{12}(\infty, \hat{b}) \leq 0$$

onde se assume a seguinte disposição relativa entre as orientações dos polarizadores:

(Fig. 4.4)



Por meio de uma redefinição das probabilidades em termos de taxas de detecção, como se fez na secção anterior, temos que

$$-R_0 \leq 3R(\phi) - R(3\phi) - R_1 - R_2 \leq 0 \quad (4.23)$$

Em 1972, Freedmann chegou a uma forma reduzida dessa expressão, muito conveniente para a comparação com os resultados experimentais:

$$\frac{[R(\pi/8) - R(3\pi/8)]}{R_0} \leq \frac{1}{4} ;$$

ou

$$\delta = \frac{[R(\pi/8) - R(3\pi/8)]}{R_0} - \frac{1}{4} \leq 0 \quad (4.24)$$

expressão esta que foi derivada a partir de um estudo das previsões quânticas, de onde provêm os ângulos expressos na desigualdade. Ela limita a intensidade da correlação para as teorias realistas-locais, limitação esta que a mecânica quântica não obedece, e pode ser checada com apenas três séries de medições.

Uma vez que se utilizam fótons nesse tipo de experimento, uma nova derivação quântica é necessária (fizemos uma derivação para elétrons no apêndice 4). Para a correlação $J=0 \rightarrow J=1 \rightarrow J=0$ de dois fótons no caso idealizado, temos que a polarização da função de onda do par de fótons é (Clauser e Shimony, 1978, p. 1906)

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.25)$$

a partir do que pode-se chegar à expressão da previsão quântica:

$$[R(\phi)/R_0] = \langle \Psi_0 | Q(\hat{a}) Q(\hat{b}) | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\phi) \quad (4.26)$$

onde $Q(\hat{a})$ e $Q(\hat{b})$ são operadores de projeção para a polarização linear ao longo de eixos no plano xy , fazendo ângulos \hat{a} e \hat{b} com x , respectivamente. Assim, acha-se que as previsões quânticas

$$\frac{[R(\pi/8) - R(3\pi/8)]}{R_0} = \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

violam a desigualdade.

As previsões para o caso não idealizado foi derivada por CHSH e não a transcreveremos aqui (ver Freedman, 1972). Ela já leva em conta a transmitância dos analisadores (ξ_M^I , para luz polarizada paralela ao eixo do polarizador I, e ξ_m^I , para luz perpendicularmente polarizada), e o meio-ângulo θ do cone de incidência de luz sobre os analisadores de polarização ($F1(\theta)$, que cresce monotonicamente e tem $F1(0) = 1$, é uma função que representa a depolarização devida à não colinearidade dos fótons).

$$[R(\phi)/R0] = 1/4 (E_+ + E_- F1(\theta) \cos 2\phi) \quad (4.27)$$

com
$$E_{\pm} = (\xi_M^I \pm \xi_m^I) (\xi_M^II \pm \xi_m^II)$$

que também resulta numa violação da desigualdade, para transmitâncias adequadamente escolhidas.

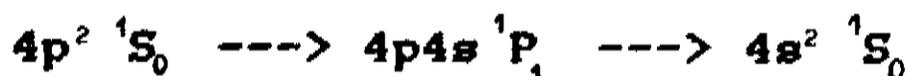
De acordo com a análise feita por Clauser e Shimony (1978), podemos definir a condição para a violação da desigualdade de CH por

$$\sqrt{2} F1(\theta) + 1 \geq 2/\xi_M \quad (4.28)$$

que é obtida substituindo-se a eq. (4.27) em (4.24). Portanto, para um dado $F1(\theta)$, é necessário que se tenha um valor mínimo em ξ_M . As regiões abaixo das curvas da fig. 4.5 caracterizam um experimento conclusivo para cada um dos tipos de cascata assinalado. Para uma cascata do tipo ($J=1 \rightarrow J=1 \rightarrow J=0$), a expressão é semelhante, apenas que temos que trocar $F1(\theta)$ por $-F2(\theta)$, que decresce monotonicamente mais depressa que $F1(\theta)$. Os experimentos realizados tentam sempre preencher estas condições.

Faremos, agora, um resumo dos experimentos deste tipo que já foram efetuados, mostrando os resultados obtidos:

FREEDMAN, CLAUSER (1972): foi o primeiro experimento realizado para testar a desigualdade de Bell, na sua forma reduzida por Freedman, e se baseou no trabalho de CHSH. Utilizou-se polarizadores tipo 'pile of plates' com alta eficiência (ou seja, que podem ser arrançados de modo a terem transmitância elevada na direção relevante, e mínima na ortogonal a ela), e um meio-ângulo de abertura da ordem de 30° . A eficiência de contagem dos fotomultiplicadores utilizados foi da ordem de $1,5 \times 10^{-3}$. Devido a essa baixa eficiência a taxa de contagem coincidente foi muito baixa, de modo que foi necessário utilizar um período total de medição bastante longo (± 200 horas). A fonte utilizada foi a cascata (fig. 4.6)



do cálcio, de modo que em cada decaimento é emitido um fóton. Para poder comparar a desigualdade de Bell com os resultados, Freedman e Clauser assumem que todos os fótons que incidem sobre o detector tem

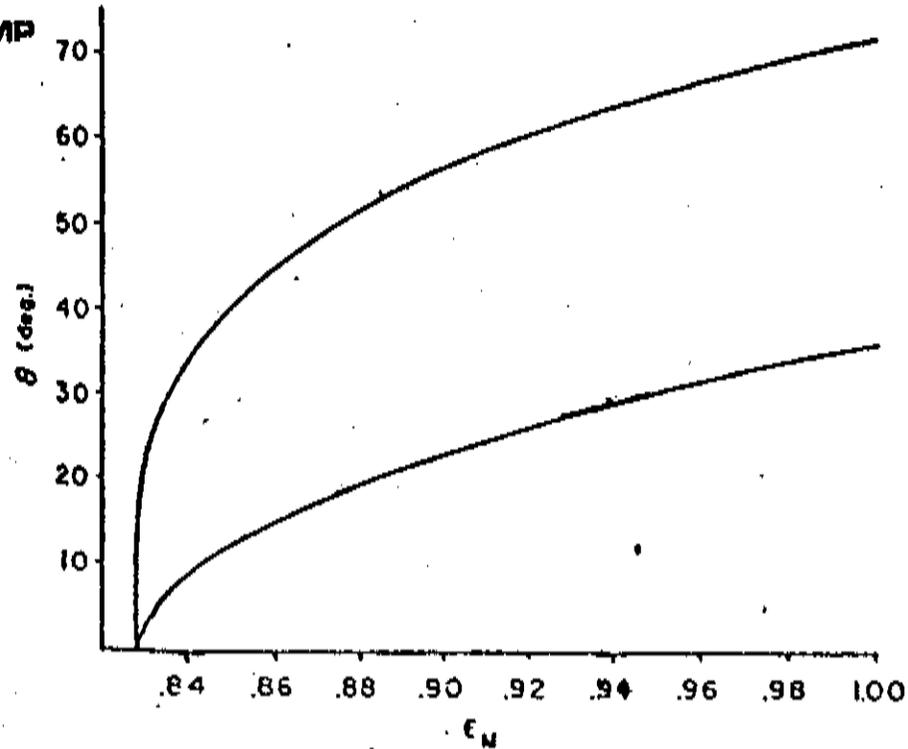


Fig. 4.5 - As regiões abaixo de cada uma das curvas caracterizam um experimento conclusivo do tipo cascata, em função da eficiência do polarizador e do meio ângulo do detector. A curva de cima é para uma cascata do tipo (0-1-0), e a de baixo, para cascata (0-1-1). (CHSH, 1969)

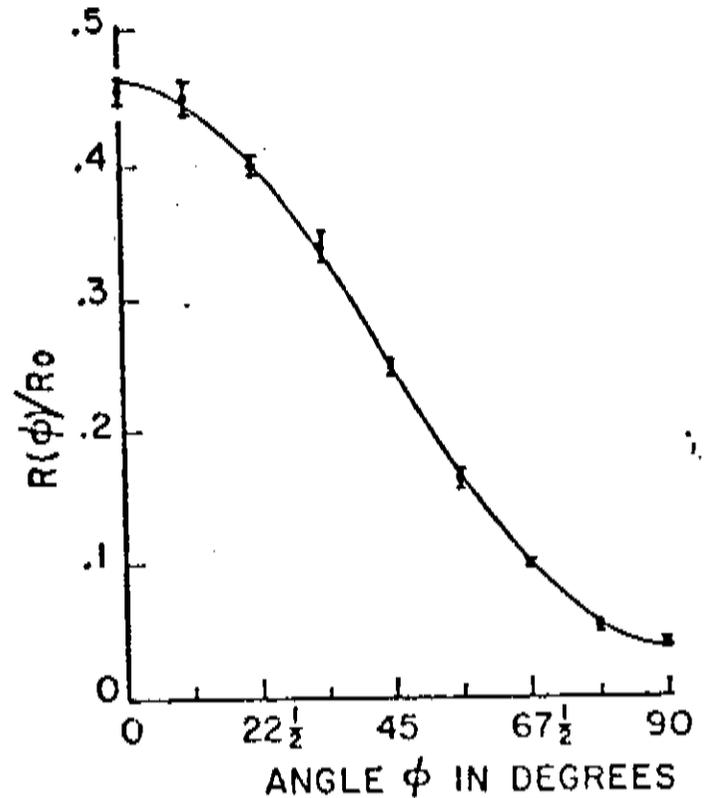


Fig. 4.6 - Resultado do experimento realizado por Freedman e Clauser. A linha contínua é a previsão quântica. (FC, 1972)

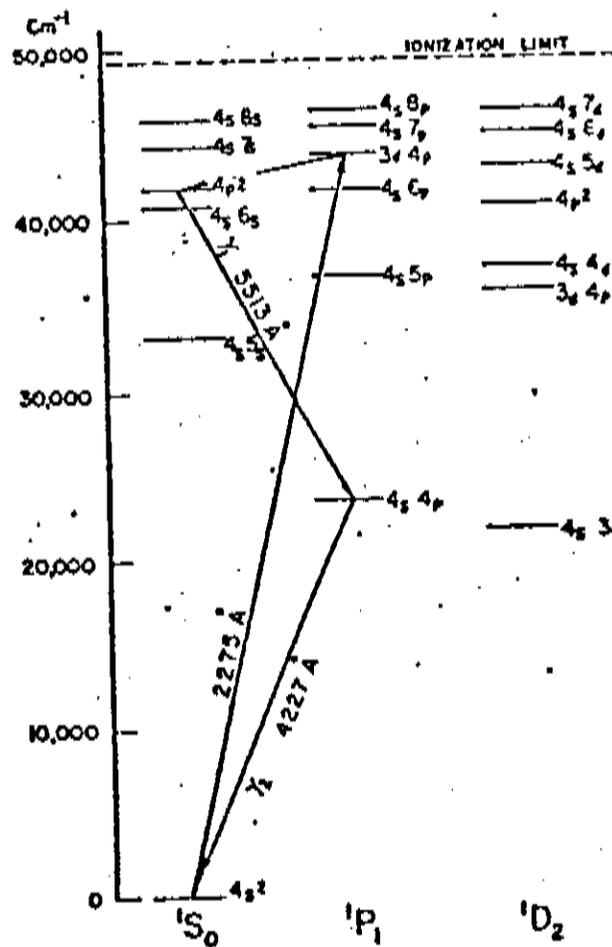


Fig. 4.6 - Esquema parcial dos níveis de excitação do Cálcio, representando a cascata de fótons onde é emitido o par correlacionado utilizado em alguns dos experimentos já realizados. Os átomos de cálcio são excitados até o nível 3d 4p 1P_1 , e uma fração considerável deles decai para $4p^2 \ ^1S_0$, a partir de onde se tem a cascata desejada. O intervalo de tempo médio entre a emissão de γ_1 e γ_2 é da ordem de 5ns. (Freedman, 1972)

uma probabilidade de detecção que é independente de se o fóton passou ou não por um polarizador. Assumem também que para qualquer teoria realista-local de variáveis escondidas os dois fótons se propagam como partículas localizadas separadas, sendo que cada fóton, ao incidir sobre o polarizador, ou passa ou não passa por ele, não havendo passagem parcial. O resultado obtido foi o seguinte:

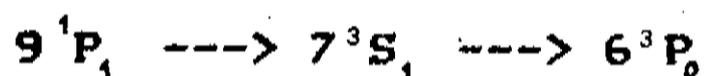
$$\delta_{\text{exp}} = +0.050 \pm 0.008$$

que viola a previsão das teorias realistas locais (4.24) em mais de seis desvios-padrões, e é plenamente concordante com a previsão quântica para o experimento

$$\delta_{\text{MQ}} = +0.051$$

Os resultados podem ser vistos na fig. 4.7.

HOLT, PIPKIN (1973): foi o segundo experimento realizado utilizando uma cascata de fótons. A cascata utilizada foi



do tipo $J=1 \rightarrow J=1 \rightarrow J=0$, obtida pela excitação, por meio de um feixe de elétrons, do isótopo de spin nuclear nulo ^{198}Hg , e que produz nos dois decaimentos um par de fótons ($\gamma_1 = 567.6\text{nm}$; $\gamma_2 = 404.7\text{nm}$). Os polarizadores utilizados foram prismas de calcita, com transmitância na direção relevante um pouco menor que o do experimento anterior, mas com transmitância muito menor na direção perpendicular. O meio-ângulo de abertura foi $\theta = 13^\circ$.

Surpreendentemente, os resultados obtidos favoreceram as teorias realistas-locais, não violando a desigualdade de Bell:

$$\delta_{\text{exp}} = -0.034 \pm 0.013$$

e que discorda da previsão quântica para o experimento:

$$\delta_{\text{MQ}} = +0.016$$

em mais de seis desvios padrões. Em seu artigo, Holt e Pipkin analisaram cuidadosa e exaustivamente as possibilidades de erros experimentais, mas não conseguiram encontrar nenhuma falha que pudesse impugnar o resultado obtido. Não existem críticas satisfatórias ao desempenho deste experimento mas, como a grande maioria dos erros sistemáticos tende a reduzir a correlação quântica, eles permanecem cautelosos quanto ao resultado obtido. De qualquer modo, o valor apresentado acima já inclui as correções de possíveis falhas no experimento, segundo a avaliação feita por Holt e Pipkin.

O fato deste experimento ter resultado numa discordância com a mecânica quântica, levou Clauser (1976) e Fry e Thompson (1976) a realizarem novos experimentos. Estes foram variações sobre o experimento de Holt e Pipkin, mas diferentes em vários aspectos e que, rigorosamente, não os capacitam a servir como referência com relação àque-

le experimento.

CLAUSER (1976): utilizou como fonte a mesma cascata que Holt e Pipkin, mas do isótopo de spin nuclear nulo ^{202}Hg . Clauser mudou os polarizadores para 'pile of plates' e obteve, após 412 horas de medições

$$\delta_{\text{exp}} = +0.0385 \pm 0.0093$$

violando a desigualdade de Bell, e em ótima concordância com a previsão quântica

$$\delta_{\text{NR}} = +0.0348$$

FRY, THOMPSON (1976): utilizaram a mesma cascata, mas a partir do isótopo de spin nuclear nulo ^{200}Hg , excitado de maneira diferente, e obtendo fótons com energias diferentes dos obtidos por Holt e Pipkin. A abundância do isótopo e o fato do processo de excitação resultar numa taxa de decaimentos muito alta, tornou o tempo de medição menor: 80 min. O resultado foi concordante com a previsão quântica:

$$\delta_{\text{exp}} = +0.045 \pm 0.014$$

$$\delta_{\text{NR}} = +0.044 \pm 0.007$$

ASPECT, GRANGIER, ROGER (1981): os três experimentos efetuados por Aspect et al, dos quais este foi o primeiro são, provavelmente, os mais precisos realizados até agora para testar as previsões das teorias realistas-locais. O primeiro experimento é, de um modo geral, um aperfeiçoamento do experimento de Freedman e Clauser, sendo utilizada como fonte de pares correlacionados a mesma cascata do cálcio (utilizada também nos outros dois experimentos), muito embora o processo de excitação seja diferente, permitindo uma taxa de decaimentos muito alta (aprox. 4×10^7 pares/s).

Com outras modificações no que se refere ao arranjo experimental, Aspect et al testaram as previsões da mecânica quântica para toda a faixa de 360° de orientações relativas dos polarizadores, assim como fizeram também um teste mais geral em que não se requer a hipótese de invariância rotacional, ou seja, testaram diretamente a desigualdade de CH na sua forma (4.20)

$$-1 \leq S = [R(a, \hat{b}) - R(a, \hat{b}') + R(a', \hat{b}) + R(a', \hat{b}') - R_1(a') - R_2(\hat{b})] / R_0 \leq 0$$

Para a forma reduzida de Freedman, da desigualdade de Bell, obtiveram um resultado amplamente concordante com a previsão quântica:

$$\delta_{\text{exp}} = +0.0572 \pm 0.0043$$

$$\delta_{\text{NR}} = +0.058 \pm 0.002$$

discordando em 13 desvios padrões da desigualdade de Bell! Para a medição dos elementos da desigualdade de CH, onde não se assume a invari-

riância rotacional de $R(\hat{a}, \hat{b})$ assumida por Freedman, obtiveram:

$$S_{\text{exp}} = +0.126 \pm 0.014$$

violando a desigualdade $-1 \leq S \leq 0$ em nove desvios-padrões. Além disso, Aspect et al realizaram o experimento para grandes distâncias entre a fonte e os polarizadores (6,5 m, ou 4 comprimentos de coerência do pacote de ondas associado com a meia vida do estado intermediário da cascata: 5ns), constatando a conservação das correlações quânticas para distâncias macroscópicas, em oposição a hipóteses que apregoavam o contrário (Furry, 1936; Schroedinger, 1935)

ASPECT, GRANGIER, ROGER (1982a): o aspecto mais importante do 2º experimento de Aspect et al foi o fato de ser o primeiro experimento realizado, em que se utiliza um arranjo experimental que permite testar diretamente a desigualdade de Bell (1971):

$$-2 \leq P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{b}') + P(\hat{a}', \hat{b}) + P(\hat{a}', \hat{b}') \leq 2$$

Ao contrário dos experimentos anteriores em que só se mede uma das polarizações e bloqueia-se a ortogonal, este experimento se aproxima muito do experimento ideal de EPR-Bohm, efetuando uma medição similar, para o caso da polarização dos fótons, ao que se efetua para o spin com aparelhos de Stern-Gerlach. Segundo Aspect et al, a hipótese que se tem que assumir é que o ensemble de pares detectados reflita fielmente o conjunto de todos os pares emitidos. O arranjo experimental (fig. 4.8) elimina a necessidade das medições auxiliares imprescindíveis nos experimentos anteriores (medições com polarizadores removidos), a única mudança necessária no decorrer das medições sendo a rotação dos polarizadores, o que certamente diminui a probabilidade de erros experimentais. O experimento em si é muito detalhado, eliminando uma série de erros sistemáticos inevitáveis nos experimentos anteriores sendo, provavelmente, o experimento tecnicamente mais perfeito já realizado. O resultado revela a maior violação da desigualdade de Bell já obtida (mais de 40 desvios-padrões!):

$$S_{\text{exp}} = 2.697 \pm 0.015$$

$$S_{\text{MR}} = 2.70 \pm 0.05$$

ASPECT, DALIBARD, ROGER (1982b): O 3º experimento de Aspect et al é o mais importante já realizado testando a desigualdade de Bell. Todos os experimentos já realizados, muito embora pareçam ser uma boa realização do experimento de EPR-Bohm, têm o inconveniente de serem realizados com arranjos fixos, em que a orientação dos polarizadores são fixas durante toda uma operação. Segundo Bell (1965), "os ajustes dos instrumentos são feitos com antecedência suficiente para permití-los chegar a uma relação mútua por uma troca de sinais com velocidades menores ou iguais à da luz". Ou seja, a condição de localidade de Bell, assim como a própria desigualdade, não seriam aplicáveis a experimentos estáticos como os já realizados. Assim, baseado numa proposta de Bohm e Aharonov (1957), Aspect (1975, 1976) propôs um arranjo experimental que contornasse este problema, interpondo um comutador ótico no

caminho de cada fóton. Este aparelho é composto por um líquido (água), no qual se gera uma onda acústica permanente. A interação dos fótons com esta onda dá lugar a duas fases: uma que difrata o feixe e outra que o transmite. A fig. 4.9 ilustra o arranjo. Os comutadores redirecionam rapidamente a luz incidente de um polarizador para o outro e a comutação entre os dois canais ocorre num intervalo muito menor que o tempo de voo dos fótons, da fonte ao detector. Para fins de comparação, o tempo de voo de cada fóton é de aproximadamente 40ns, o intervalo médio entre a primeira emissão e o segundo decaimento na cascata é de 5ns, e o intervalo de redirecionamento dos feixes pelos comutadores é de 10ns.

Se se considera que os comutadores trabalham aleatoriamente e que não são correlacionados (eles funcionam em frequências diferentes, ligados a geradores diferentes), pode-se escrever a desigualdade de Bell na forma de CH: $-1 \leq S \leq 0$. O resultado experimental obtido viola a desigualdade acima em cinco desvios-padrões, e é concordante com a previsão quântica:

$$S_{exp} = +0.101 \pm 0.020$$

$$S_{MQ} = +0.112$$

No entanto, muito embora os comutadores funcionem em frequências diferentes, não se pode dizer que sejam realmente aleatórios, pois essas frequências são fixas para cada comutador. Este é um ponto que tem sido questionado neste experimento mas, de qualquer maneira, é um experimento bastante significativo.

PERRIE, DUNCAN, BEYER, KLEINPOPPEN (1985): este é o último experimento já concluído (há outros em andamento) e difere dos demais experimentos com cascata de fótons pelo fato de que não há, aqui, um estado instável intermediário entre a emissão dos dois fótons do par correlacionado. A fonte utilizada foi o decaimento do deutério atômico meta-estável que, ao fazê-lo, emite simultaneamente dois fótons correlacionados (na transição $2S \rightarrow 1S$). Este experimento apresenta outro aspecto interessante além desse: não apresenta, em princípio, problemas com a absorção e reemissão de fótons pela fonte, que é uma das críticas que se tem feito aos experimentos anteriores (sec. IV.5.5). Além do mais, o fato da emissão ser simultânea assegura que as detecções dos dois fótons são eventos separados, no sentido relativístico. Não entraremos em detalhes quanto ao arranjo experimental. Os resultados foram concordantes com a mecânica quântica e discordantes com as previsões de qualquer teoria realista-local em que se assume a hipótese de não-realçamento de CH:

$$\delta_{exp} = +0.018 \pm 0.010$$

$$\delta_{MQ} = +0.022 \pm 0.008$$

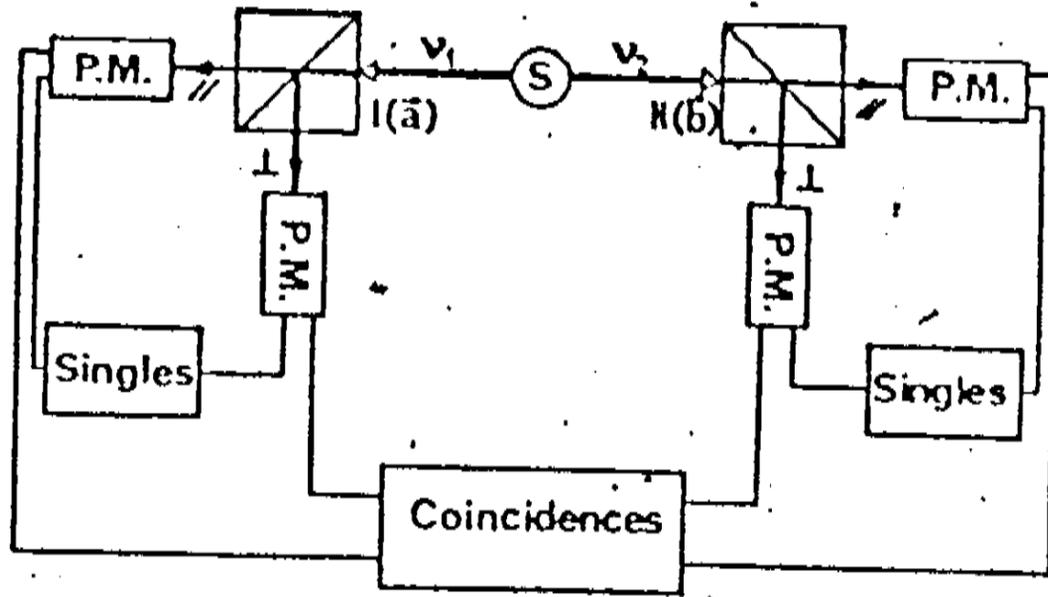


Fig. 4.8 - Esquema simplificado do segundo experimento de Aspect, o único até agora realizado utilizando o arranjo original da derivação de Bell. (Aspect et al, 1982a)

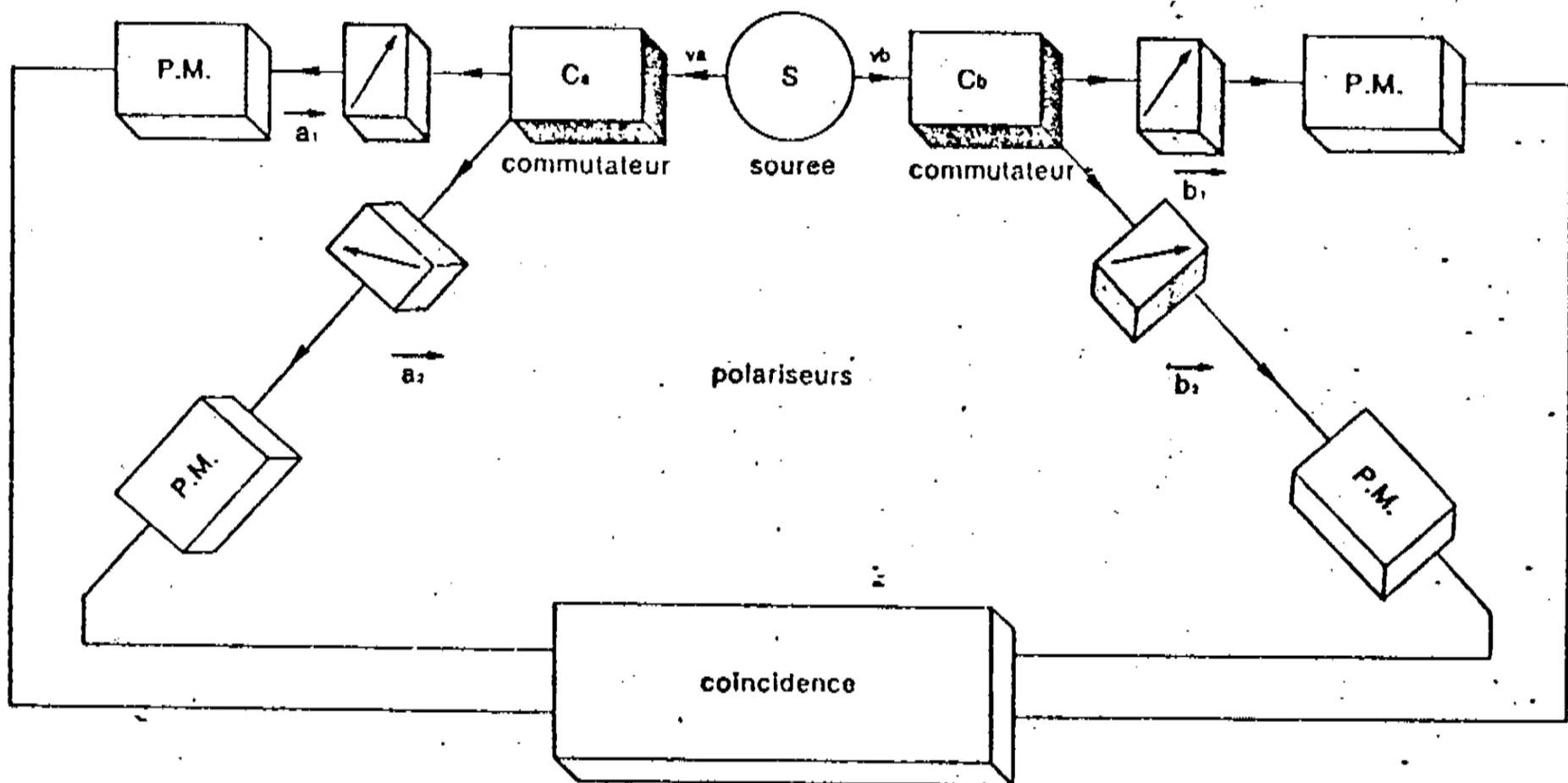


Fig. 4.9 - Esquema do 3º experimento de Aspect, em que são utilizados comutadores que redirecionam o feixe luminoso para polarizadores com orientações diferentes. (Jammer, 1980)

IV.5.3 - Experimentos de aniquilação do Positrônio:

Os experimentos utilizando fótons de alta energia (radiação γ) produzidos por aniquilação elétron-pósitron se baseiam num experimento de Wu e Shakhov (1950), elaborado para determinar a paridade do estado fundamental do positrônio (ver Cohen-Tannoudji, 1977, p.808). A utilização deste tipo de fonte na realização de experimentos para testar a desigualdade de Bell é motivada por dois aspectos muito importantes:

(1) a existência de detectores altamente eficientes para a radiação γ produzida no processo de aniquilação;

(ii) e o fato da aniquilação elétron-pósitron do positrônio no estado fundamental ser um decaimento tipo 'dois corpos' (sec. IV.5.1), o que não ocorre com o processo de cascata atômica.

CHSH (1969) investigaram a possibilidade de se utilizar uma variação do experimento de Wu e Shakhov para testar a desigualdade de Bell mas a descartaram, devido à inexistência de polarizadores suficientemente eficientes para fótons de tão alta energia. Neste tipo de experimento é, portanto, imprescindível a utilização de um processo alternativo indireto para se determinar a polarização de cada fóton. Para isto, utiliza-se o espalhamento Compton. Segundo Kasday et al (1975), em analogia com o espalhamento Thompson clássico, tem-se que os fótons espalhados o fazem numa direção perpendicular à polarização do fóton incidente. Detectar o fóton espalhado em um dado ângulo de posicionamento do dispositivo de detecção implica em encontrar a polarização do fóton incidente no ângulo perpendicular. Como os dois fótons de aniquilação são ortogonalmente polarizados, tem-se que os fótons espalhados o fazem também em direções perpendiculares.

Segundo CHSH (1969), o fato do espalhamento Compton fornecer apenas uma distribuição de espalhamento que depende da direção da polarização linear de cada fóton incidente (dada pela fórmula de Klein-Nishina) impediria que experimentos desse tipo fossem utilizados para testar a desigualdade de Bell. No entanto, alguns experimentos foram realizados, dos quais o mais citado é o de Kasday et al (1975). Dos seis experimentos realizados, apenas o de Faraci et al (1974) obteve um resultado discordante com a mecânica quântica. Os experimentos já realizados são os seguintes:

KASDAY, ULLMAN, WU (1975): A proposta para a realização de um experimento utilizando como fonte de pares correlacionados a aniquilação elétron-pósitron foi feita em 1970 (Kasday et al, 1970). A elaboração teórica, assim como o arranjo experimental para o experimento foram apresentados por Kasday (1971), que argumentou que o par de fótons assim obtido poderiam ser utilizados para testar a desigualdade de Bell, uma vez que se assumisse duas hipóteses auxiliares:

(1) de que pelo menos em princípio podemos construir polarizadores lineares ideais para fótons de alta energia;

(2) os resultados, que seriam obtidos em um experimento usando analisadores ideais, e aqueles obtidos em um experimento com espalhamento

Compton, são corretamente relatados pela teoria quântica.

A idéia do experimento é a seguinte (fig. 4.10): uma fonte radioativa (^{64}Cu) emite pósitrons que são parados e aniquilados no alvo de cobre em O. A emissão de raios γ de aniquilação se dá em todas as direções, mas a direção vertical é selecionada por um colimador de chumbo. Os fótons de aniquilação assim selecionados sofrem espalhamento Compton com elétrons nos espalhadores S1 e S2, e entram respectivamente nos detectores D1 e D2, que medem as suas respectivas energias. Fendas de chumbo selecionam uma estreita margem de aceitação azimutal em torno dos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 , sendo o ângulo relativo entre estas orientações variável pela rotação do detector D1 em torno do eixo vertical. Se os fótons são polarizados ortogonalmente, espera-se que a taxa de contagem coincidente seja maior para $\phi_1 - \phi_2 = 90^\circ$.

Utilizando tal aparato experimental e as hipóteses adicionais acima, Kasday et al calcularam as previsões quânticas e das teorias realistas locais (não é direto o teste das desigualdades anteriores), e obtiveram um resultado concordante com as previsões quânticas.

Segundo Clauser e Shimony (1978), as hipóteses adicionais acima são muito criticáveis, o que diminui a credibilidade deste tipo de experimento, como um teste decisivo para a desigualdade de Bell. Infelizmente, foge dos objetivos deste trabalho entrar em maiores detalhes acerca desses experimentos. Além do experimento de Faraci et al (1974), o único desse tipo de experimento a dar um resultado compatível com a desigualdade de Bell, temos ainda os experimentos de Wilson et al (1976), que primeiro mostrou que as correlações quânticas se mantêm a grandes distâncias (distância de 2,45m entre a fonte e os espalhadores, enquanto que o comprimento de coerência dos fótons foi da ordem de 0,057m); Bruno et al (1977) e Bertolini et al (1981), dois experimentos bem elaborados tentando refazer o experimento de Faraci et al; e o de Nesenheimer (1979). Todos estes experimentos obtiveram resultados concordantes com os da mecânica quântica, violando a desigualdade de Bell.

IV.5.4 - Experimento de espalhamento próton-próton:

A única experiência utilizando partículas de massa de repouso não nula foi a de Laméhi-Rachti e Mittig (1976), baseada em uma idéia original de Fox (1971). Fox propôs um experimento de espalhamento próton-próton a baixa energia com o fim de testar a desigualdade de Bell. A principal motivação para se efetuar um experimento deste tipo se deve ao fato de se utilizar partículas localizáveis por uma transformação de Lorentz, o que não ocorre com fótons. Os experimentos que mencionamos se utilizam de pares de fótons correlacionados, cujo "tamanho" é definido por meio do comprimento de coerência $\Lambda = c\tau$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e τ o tempo de vida médio do estado que produz o fóton. Desse modo, para experimentos tipo cascata, esse comprimento é de aproximadamente 3m, enquanto que para os experimentos

Fig. 4.10 - Diagrama do arranjo experimental utilizado por Kasday et al. Não é mostrado o colimador de Chumbo. (Paty, 1976)

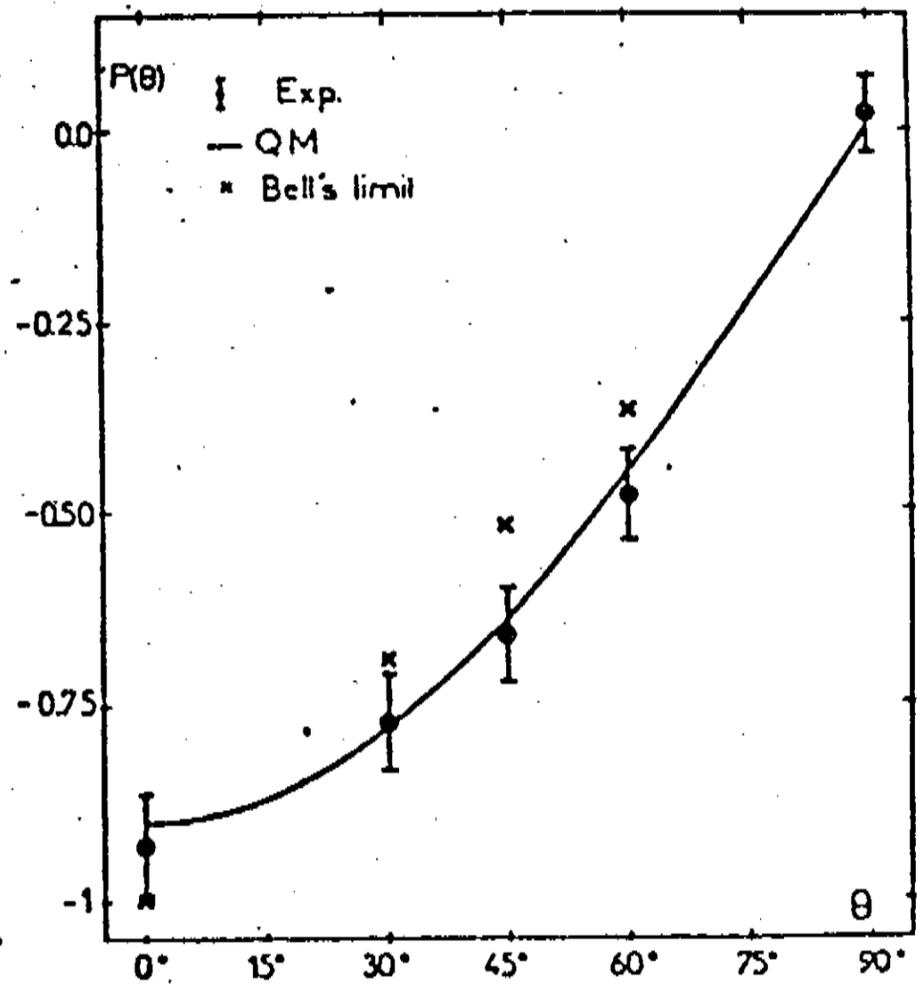
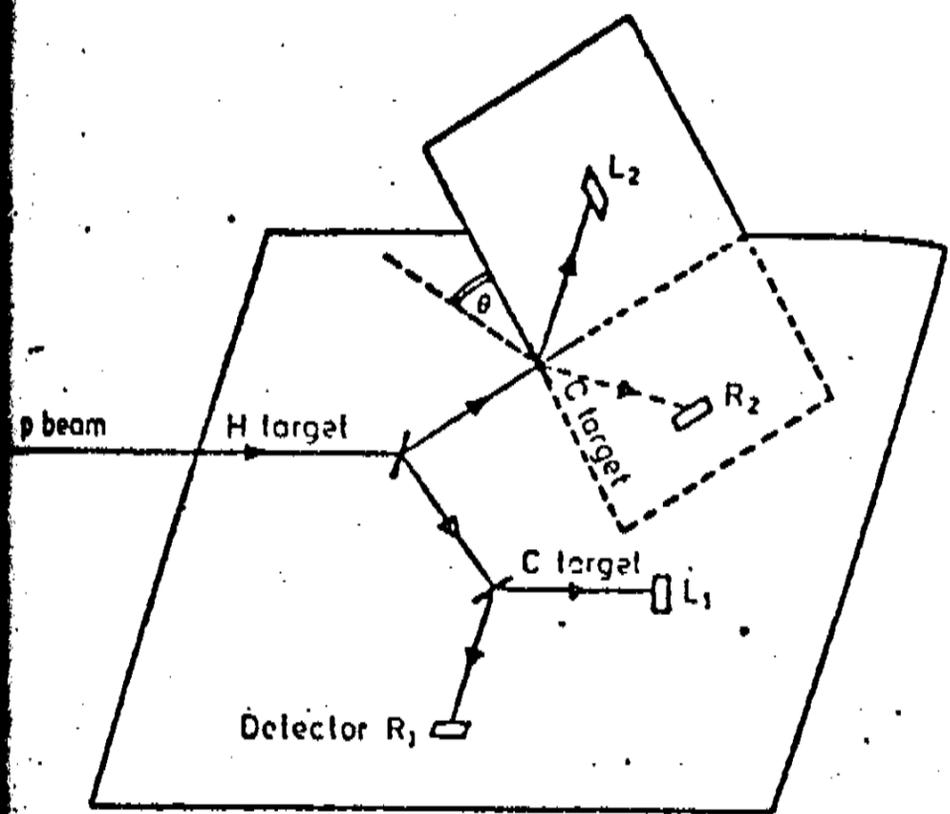
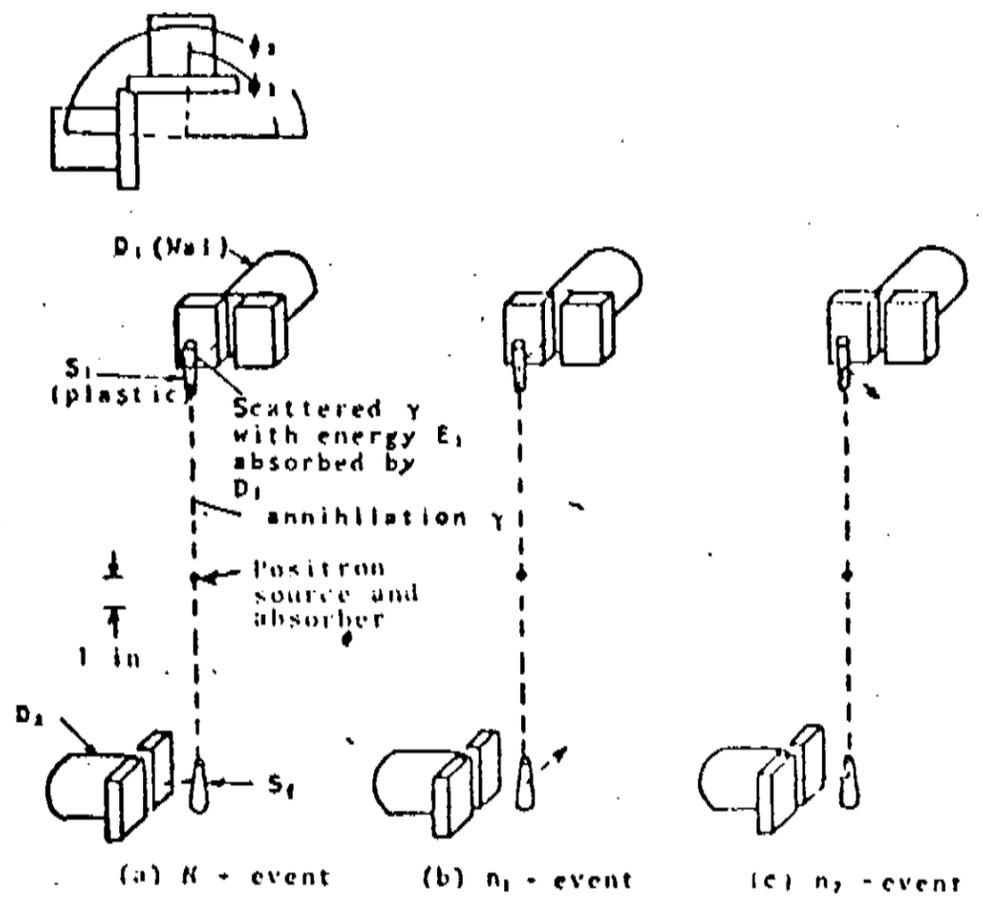


Fig. 4.11 - Geometria do espalhamento próton-próton para o experimento de Laméhi-Rachti e Mittag, e os resultados experimentais. (Laméhi-Rachti e Mittag, 1976)

de aniquilação, aprox. 17cm, ou seja, bastante grandes com relação ao tamanho dos aparatos utilizados.

Nos experimento de Laméhi-Rachti e Mittag, prótons são acelerados e espalhados por um alvo contendo hidrogênio, resultando pares de prótons no estado singleto. As partículas do par se separam por distâncias macroscópicas. Cada partícula passa, então, por um polarímetro de carbono, que só transmite prótons com polarização correspondente à de seus átomos que definem, assim, uma projeção do spin sobre estes eixos. De modo a comparar os resultados obtidos no experimento, com a desigualdade de Bell, Laméhi-Rachti e Mittag assumiram necessárias hipóteses similares às requisitadas para os experimentos com o positrônio, além de uma outra devida à sensibilidade dos polarizadores. Não entraremos em detalhes acerca dessas hipóteses, mas citaremos apenas uma delas. A função de correlação quântica para o experimento tem a seguinte forma:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = C \cos(\hat{a}) \cos(\hat{b})$$

que não viola a desigualdade de Bell. Segundo Laméhi-Rachti e Mittag, isto se deve ao fato dos analisadores utilizados serem sensíveis apenas à componente transversal da polarização. A hipótese adicional assumida para contornar a situação e obter uma violação da desigualdade considera a factorizabilidade da função de correlação em uma parte rotacionalmente invariante (correspondente à contribuição do estado singleto) e uma parte que não é rotacionalmente invariante (estado tripleto). É ao limite superior para a contribuição do estado tripleto que ligam a desigualdade de Bell. A validade do experimento está, portanto, ligada à aceitação de hipóteses como esta.

O arranjo experimental, assim como os resultados obtidos, concordantes com a previsão quântica, estão na fig. 4.11. A precisão estatística deste experimento é bem limitada, sendo menos preciso que os anteriores, mas é o fato de utilizar partículas com massa de repouso não nula que o torna interessante (nota 4.5).

IV.5.5 - Comentários sobre os experimentos realizados:

Temos então, até agora, quinze experimentos realizados, onde apenas dois deles favorecem às teorias realistas-locais de variáveis escondidas. Embora seja uma evidência muito significativa a favor da mecânica quântica, não se pode dizer que a questão esteja encerrada, e que não sejam possíveis teorias realistas-locais que concordem com ela. Existem muitas controvérsias, agora mais do que nunca, acerca da validade dos resultados obtidos como sendo provas conclusivas contra tais teorias. De qualquer modo, devido à natureza fundamental do que procuramos verificar com estes experimentos, uma decisão pela maioria não é certamente satisfatória, principalmente em se levando em conta que nenhuma explicação satisfatória foi encontrada para as experiências discordantes, em especial a de Holt e Pipkin.

Além do mais, nenhum dos experimentos realizados contrasta diretamente a localidade e a mecânica quântica, sendo sempre necessárias hipóteses adicionais de modo a tornar possível a comparação entre experimento e teoria, hipóteses estas nem sempre diretamente testáveis.

No caso dos experimentos de aniquilação do positrônio e o de Laméhi-Rachti e Mittig, a inexistência de polarizadores para os raios γ e prótons força a utilização de um processo indireto de medição (por meio do espalhamento). O que se mede nestes experimentos é a direção de propagação das partículas espalhadas, ou seja, um momento. Assim, os erros experimentais envolvidos serão certamente maiores. Além disso, existe o problema das hipóteses adicionais que têm que ser necessariamente assumidas, uma vez que, com salienta Kasday (1971), se não o forem, pode-se formular teorias locais de variáveis escondidas que dão as mesmas previsões, para os experimentos, que a mecânica quântica. Pelo fato de necessitar de hipóteses adicionais mais fortes, esses experimentos são considerados menos conclusivos que os de cascata de fótons.

Para os experimentos de cascata de fótons temos duas hipóteses adicionais básicas, que já enunciámos:

1- Hipótese de CHSH: dado que um par de fótons emerge dos polarizadores, a probabilidade de sua detecção conjunta é independente da orientação dos polarizadores.

2- Hipótese de CH: para todo par de emissões, a probabilidade de uma contagem com o polarizador posicionado é menor ou igual à probabilidade correspondente com o polarizador removido ('no-enhancement').

A hipótese de CHSH é menos razoável que a de CH, muito embora nenhuma das duas seja diretamente testável. Mencionaremos dois fatos relevantes relacionados a estas hipóteses. Primeiramente, lembramos que existe uma teoria semi-clássica da radiação que prevê corretamente uma grande quantidade de dados da física atômica, e que viola a hipótese de CHSH. Segundo Selleri (1986), essa hipótese contraria o espírito das teorias de variáveis escondidas: uma vez saídos do polarizador os fótons deveriam ter sofrido uma seleção em seus valores de variáveis escondidas, as quais poderiam ser as que determinam a detecção pelo fotomultiplicador. Isto faria com que esta detecção pudesse depender da orientação dos polarizadores que selecionam as variáveis escondidas.

Segundo, quanto à hipótese de CH, Selleri opõe um raciocínio semelhante ao anterior, segundo o qual se o polarizador implica numa seleção das variáveis escondidas, pode ocorrer que a probabilidade de detecção seja maior com as variáveis escondidas selecionadas do que com as variáveis escondidas "normalmente distribuídas".

Além dos problemas envolvendo as hipóteses assumidas, existem críticas com relação às fontes utilizadas. Para o experimento tipo cascata, argumenta-se que é possível que existam efeitos coletivos nas excitações e de-excitações atômicas na fonte, que não foram consideradas nos experimentos (Marshall et al, 1983b). Retomaremos este ponto

na próxima secção, mas salientamos que foi justamente este problema que o experimento de Perrie et al (1985) procurou evitar.

Uma crítica semelhante pode ser levantada contra o terceiro experimento de Aspect que, muito embora seja o experimento mais elaborado tecnicamente, se utiliza de um arranjo experimental do tipo de CHSH (fig. 4.3), assumindo, assim, a hipótese de "no-enhancement", para a desigualdade testável. Quanto ao fato do experimento utilizar um par de comutadores onde cada um redireciona os feixes para dois polarímetros (polarizador + detector) diferentes, ao que muitos atribuem o carácter essencial que tornou famoso o experimento, objeções também existem. Isto porque, muito embora os comutadores funcionem em frequências diferentes, eles não são verdadeiramente aleatórios, de modo que após um certo intervalo de tempo, o sistema total atinge o que se poderia chamar de um estado dinâmico estacionário. Se tal intervalo é bem menor que o tempo total de duração de cada série de medições, é possível elaborar modelos em que, mesmo assumindo apenas informações viajando a velocidades subluminais, a desigualdade é violada. A realização ideal de um experimento deste tipo, como proposto por Rohm e Aharonov (1957), implica na utilização de comutadores verdadeiramente aleatórios e completamente independentes entre si. Esta é a principal objeção que se faz ao terceiro experimento de Aspect et al.

Assim, muito embora as hipóteses assumidas sejam mais razoáveis que as dos experimentos de aniquilação e espalhamento, existem margens para dúvidas no que tange ao carácter conclusivo desses experimentos.

IV.6.1 - Alguns dos pontos de vista dessa controvérsia:

Apresentada a desigualdade de Bell e a série de experimentos que ela inspirou cabe, finalmente, comentarmos a sua importância no estabelecimento dos conceitos filosóficos básicos da física. Procuraremos apontar os vários pontos de vista discordantes entre si, em que se tenta compreender o verdadeiro significado da desigualdade e suas reais consequências sobre os nossos conceitos clássicos. Muito embora existam objeções quanto à generalidade da desigualdade, no que tange à sua caracterização das teorias locais de variáveis escondidas, a confirmação das previsões da mecânica quântica por quase todos os experimentos é digna de nota. O fato de apenas duas das quinze experiências já concluídas terem sido favoráveis às previsões quânticas, contrariando a limitação imposta pela desigualdade de Bell, com a sua caracterização das teorias realistas-locais, certamente é um ponto muito positivo para a mecânica quântica. Principalmente se levarmos em conta que as experiências foram efetuadas de maneiras bastante diferentes, utilizando fontes diferentes, e que as duas experiências discordantes estão entre as primeiras realizadas para testar a desigualdade. Em princípio, existe sempre uma tendência no sentido de que os experimentos se tornem cada vez mais sofisticados e precisos, que deve ser levada em conta. Além do fato de que para as diversas possibilidades de erros experimentais, a tendência geral é de uma diminuição das correlações, ou seja, o erro experimental tende, em princípio, a favorecer as previsões das teorias locais.

As opiniões acerca do papel desempenhado pela desigualdade diferem amplamente entre si, não havendo um consenso nem mesmo quanto às possíveis deficiências das derivações existentes. Estas deficiências, em geral, são apontadas nas hipóteses iniciais assumidas. De um certo modo, podemos abordar as discussões em torno da desigualdade considerando dois grandes pontos básicos de conflito: o primeiro está ligado à questão do que realmente representa a desigualdade de Bell; o segundo, se se assume que a desigualdade realmente representa uma limitação nas correlações possíveis no caso do experimento de EPR-Bohm, para teorias realistas-locais, qual a relevância dos experimentos realizados para a discussão do problema.

Existem muitas opiniões de que a desigualdade não seja tão abrangente quanto pretenda ser, em especial devido à caracterização que se faz das teorias realistas-locais quando da sua derivação. Uma posição extremada, como a de que a desigualdade não caracteriza absolutamente nada, sendo apenas mais uma comprovação das previsões da mecânica quântica e não uma caracterização exaustiva das teorias locais de variáveis escondidas, é defendida, entre outros, por Popper (1985) e Brody (1985). Segundo Brody, o fato de ser possível derivar a desigualdade sem que se faça qualquer consideração acerca de variáveis escondidas (Eberhard, 1977; Wigner, 1970; e outras) evidencia a não-relevância da desigualdade com relação à questão de se a mecânica quântica

tica pode ou não ser completada por adição dessas variáveis. Além disso, Brody argumenta que assumir a localidade é essencial para a derivação da desigualdade, de modo que ela só tem sentido se a localidade for assumida. Da mesma maneira que a essência do argumento de FPR passa a ser irrelevante se se assume a possibilidade da existência de interações não-locais. Isto porque, sendo possíveis tais interações entre as duas partículas do par correlacionado, isso implicaria no fato de que, na verdade, elas nunca chegarão a ser independentes uma da outra. Assim sendo, não se pode falar que a medição de uma não influencie a outra partícula e, dentro do contexto de FPR, não se pode assumir a realidade simultânea de posição e momento (as variáveis escondidas seriam, então, desnecessárias e voltaríamos à interpretação de Copenhague).

Um outro ponto de vista que podemos citar dentro da discussão em torno do significado da desigualdade de Bell é o de De Broglie, que é um ponto de vista elaborado dentro do contexto de sua teoria da dupla solução. Suas críticas à derivação de Bell (1971) incidem principalmente sobre a condição de localidade e sobre as distribuições estatísticas assumidas para as variáveis escondidas, que são consideradas na derivação. Segundo De Broglie, a condição de localidade assumida pressupõe uma extensão finita dos pacotes de ondas associados a cada um dos sistemas, condição esta que se reflete na expressão da função de correlação $P(\hat{a}, \hat{b})$ definida. Por sua vez, a função de correlação quântica exprime a simetrização da função de onda (antissimetrização, para férmions) dos dois sistemas (bósons), o que só é justificável se se assume que os respectivos pacotes de ondas se superponham, ao menos parcialmente, no espaço. Assim sendo, é uma contradição assumir que os dois sistemas estejam separados um do outro e que sejam descritos por uma mesma função de ondas (o estado singleto) (De Broglie, 1974). Por outro lado, a tentativa de se associar às variáveis escondidas uma distribuição de probabilidades usual já traz uma contradição com a mecânica quântica, que não a obedece. Segundo Lochak (1976), entre vários outros pontos, é incoerente utilizar uma densidade de probabilidade de variáveis escondidas, independente do arranjo experimental utilizado, associada ao estado inicial do sistema, para determinar o valor médio dos resultados de todas as medições efetuadas. Devido a estes aspectos, De Broglie se mostra bastante cauteloso quanto ao caráter crucial da desigualdade.

Por outro lado, temos também aqueles que acreditam na representatividade da desigualdade de Bell e aceitam a caracterização que ela faz das teorias locais. Entre estes, podemos citar Bohm e Vigier, para quem as evidências experimentais são conclusivas no que se refere ao caráter necessariamente não-local de qualquer teoria de variáveis escondidas equivalente à mecânica quântica. Tanto Bohm (1985) quanto Vigier (1985) são realistas, para quem a desigualdade de Bell apenas põe em destaque a característica não-local dessa realidade física objetiva que assumem existente. Assim sendo, a descrição quântica é para eles incompleta, sendo possíveis teorias de variáveis escondidas que a complete, no sentido de torná-la determinista.

Outras limitações à abrangência da desigualdade de Bell têm sido formuladas, em geral defendendo o caráter local da realidade física. Dentre elas, destacamos o ponto de vista de Buonomano (1980,

1986), elaborada no contexto de sua interpretação não-ergódica da mecânica quântica. Segundo este ponto de vista, a desigualdade não caracteriza todas as classes de teorias locais de variáveis escondidas, uma vez que o seu teste experimental força a assumpção de uma hipótese ergódica havendo, assim, a possibilidade de que teorias de caráter não-ergódico a violem. Assume-se tal hipótese quando se toma a média em tempo do resultados de medições consecutivas em um mesmo arranjo experimental como sendo igual à média teórica que é tomada sobre um ensemble de aparelhos, nos quais apenas uma medição é efetuada.

No entanto, há uma tendência bastante acentuada a se considerar a desigualdade de Bell como realmente provendo uma caracterização das teorias realistas-locais, centrando-se as discussões em torno da validade dos experimentos em termos de serem ou não conclusivos como testes da mesma. A quantidade de trabalhos publicados neste sentido é muito grande, em especial após os famosos experimentos de Aspect et al (1981, 1982a,b). Do mesmo modo, é também expressivo o número de trabalhos em que se expõem modelos de teorias realistas locais que violam a desigualdade de Bell, no sentido de mostrar a sua não generalidade. Tais modelos, muito embora muitas vezes um tanto quanto "artificiais", sendo formulados apenas com a intenção de mostrar uma concordância com a mecânica quântica e a consequente violação da desigualdade, não deixam de ser significativos. Alguns desses modelos são formulados dentro do contexto de um determinado tipo de experimentos, os experimentos tipo cascata de fótons (que vimos serem possivelmente os mais conclusivos), tentando mostrar que a não consideração de certos detalhes experimentais é que resultam na violação da desigualdade. Os trabalhos mais importantes neste aspecto são os ligados a Selleri, Marshall e Santos, entre outros, de que trataremos agora.

Um dos pontos centrais da crítica que fazem aos experimentos tipo cascata já realizados é justamente relativo à hipótese de "no-enhancement" de CH, que consideram como sendo uma restrição bastante artificial sobre as teorias de variáveis escondidas, e que é explícita ou implicitamente assumida nos experimentos já realizados. Propõem, então um modelo teórico bastante plausível em que tal hipótese é violada, cujas previsões são muito próximas às da mecânica quântica e dentro dos limites de erros experimentais dos resultados obtidos experimentalmente (Marshall et al, 1983a). Devido à baixa taxa de eficiência dos detectores, tal modelo pode servir como contra-exemplo, e mostrar que as experiências realizadas não são conclusivas contra realismo e localidade, pelo menos para teorias com "enhancement". E mais, se se considera que a desigualdade seja realmente conclusiva, é inevitável que se assuma tal caráter para se ter teorias de variáveis escondidas concordando com a mecânica quântica (Marshall e Santos, 1985). Além desse, um segundo aspecto vem sendo salientado (Santos, 1984), devido à existência de uma grande taxa de coincidências acidentais no registro dos dados. A correção destas coincidências é essencial para a obtenção de uma discordância com a desigualdade de Bell, mas os métodos para tal envolvem a assumpção de hipóteses não testadas.

Um outro ponto que, segundo Marshall et al (1983b), não é levado em conta nas análises dos testes experimentais com cascata de fótons, é a possibilidade de ocorrência de efeitos coletivos nas excitações e de-excitações atômicas na fonte: por exemplo, o espalhamento

ressonante do segundo fóton da cascata devido à absorção e reemissão por átomos no nível mais baixo da cascata. Deste modo, segundo as avaliações feitas, boa parte das emissões não são oriundas de decaimentos atômicos independentes, como se supõe que sejam quando se deriva a desigualdade. Em sua análise dos efeitos de tais fenômenos, a nível de confrontação dos resultados experimentais com as limitações da desigualdade, Marshall et al obtém que o experimento em que eles são menores é justamente o de Holt-Pipkin. Além disso, para todos os outros experimentos as influências são suficientemente fortes para tornarem questionáveis os resultados obtidos, no que tange à sua conclusibilidade. Foi esse aspecto que Perrie et al (1985) se propuseram a testar, mas o experimento parece não ter tido uma grande repercussão contra tal ponto de vista. Do mesmo modo, Aspect e Grangier (1985) publicaram alguns dados experimentais visando contestar o ponto de vista acima. No entanto, Scaleria (1983) formulou um modelo de teoria realista local em que efeitos desse tipo são assumidos, e que viola a desigualdade de Bell, para experimentos tipo cascata.

Existem várias outras críticas, tanto no que se refere às experiências já realizadas, quanto à própria desigualdade de Bell. Angelidis (1983) critica o caráter universal da desigualdade "experimentável" de CH, argumentando que tal universalidade (a abrangência, pela desigualdade, de todas as teorias realistas locais) é incompatível com a lei de conservação do momento angular. Para Angelidis, a desigualdade não poderia ser utilizada para refutar a localidade, nem mesmo no 3º experimento de Aspect. Santos (1984), argumentando que o fato de serem os experimentos macroscópicos, e a derivação da desigualdade de Bell relativa a sistemas microscópicos, sempre implica na necessidade de hipóteses adicionais para que se possa testá-la, em especial a hipótese ergódica. Santos propõe, então, a derivação de uma desigualdade baseada numa definição macroscópica de realismo e localidade, mas chega à conclusão de que, a não ser para certos casos especiais, tal desigualdade não é incompatível com a mecânica quântica. Um caso deste tipo poderia estar ligado ao resultado obtido por Caser (1984), segundo o qual nenhum modelo realista local com simetria completa entre as probabilidades P_1 e P_2 (associadas à detecção após a passagem pelos polarizadores) pode reproduzir exatamente as previsões da mecânica quântica.

Vários pesquisadores tem considerado e investigado, também, a possibilidade de interações não-locais (informações viajando com velocidades supra-luminais de um a outro dos sistemas correlacionados) na tentativa de ter uma teoria realista equivalente à mecânica quântica. Não entraremos em detalhes sobre tais trabalhos, pois fugiria aos nossos objetivos, mas, para citar alguns: Vigier (1979), Stapp (1985), Pearle (1986), D'Espagnat (1984), entre outros.

Finalmente, podemos mencionar os trabalhos recentes de De Muynck, em que critica tanto a desigualdade de Bell como sendo conclusiva com relação à localidade, quanto a própria argumentação de que a mecânica quântica é uma teoria não-local. De Muynck (1986a) mostra que é possível derivar a desigualdade sem que se assuma, implícita ou explicitamente, uma hipótese de localidade. Daí conclui que a desigualdade é completamente irrelevante para a questão da localidade ou não-localidade nas teorias de variáveis escondidas, de modo que qualquer

teoria, local ou não, que satisfaça os axiomas de Kolmogorov da teoria de probabilidades, obedece à desigualdade de Bell. Num contexto mais amplo, De Muynck (1986b) considera que a argumentação que leva à concepção da mecânica quântica como uma teoria não-local não é satisfatória. Os três principais fatores que levam a uma tal conclusão são o argumento de EPR, o potencial não-local de Bohm (que inspirou o trabalho de Bell, 1964) e a desigualdade de Bell. Como vimos acima, a desigualdade é descartada como evidência do caráter não-local da teoria. Quanto ao argumento de EPR, a principal crítica de De Muynck se fundamenta no fato de que a inferência de não-localidade provém de uma argumentação que se baseia no mesmo tipo de realismo envolvido no postulado de projeção. Assim sendo, a rejeição do postulado (que é tomada como necessária pelos proponentes de teorias realistas locais; ver cap. III) implica na não validade do argumento. Por sua vez, o potencial quântico de Bohm (1952), pela análise de De Muynck, não implica necessariamente numa característica não-local da mecânica quântica, que poderia ser "reconciliada com uma teoria local de campo" (De Muynck, 1986b, p.997).

Todos os pontos de vista expostos estão inseridos dentro do grande debate que se verifica atualmente em torno de realismo e localidade na mecânica quântica, não havendo opiniões definitivas acerca de nenhum deles. Os pontos aqui expostos nem de longe esgotam todas as correntes dentro do debate, mas seria impossível, num trabalho deste nível, uma abordagem mais ampla do assunto. Como se pode observar, a ênfase foi toda direcionada para a controvérsia envolvendo a localidade, enquanto que pouco se falou acerca de realismo. Em geral, realismo é considerado um ponto básico para a física, sendo uma das motivações para se formularem teorias de variáveis escondidas. Mais adiante, trataremos das discussões em torno deste conceito.

IV.6.2 - Comentários acerca do real significado da controvérsia:

Durante todo este capítulo, enfatizou-se que as discussões levantadas pelo paradoxo de EPR e pela desigualdade de Bell envolvem postulados considerados básicos para o que temos chamado de física clássica: realismo, localidade, determinismo e, poderíamos incluir sem redundância, objetivismo. Indiretamente, o próprio conceito de causalidade é envolvido, como veremos mais adiante.

Conforme já salientamos anteriormente, a formulação original do paradoxo de EPR estava intrinsecamente ligada à questão da completeza ou não da descrição fornecida pelo formalismo quântico, de um determinado fenômeno. Objetivava prover um contra-exemplo para a afirmação de completeza defendida por Bohr e seguidores, cujo efeito mais imediato foi justamente o não-determinismo intrínseco que passou a caracterizar a teoria. A conexão do problema da completeza da descrição quântica com a questão da não-localidade dela decorrente foi devida a Einstein (1948) e, desde então, este tem sido o ponto central da discussão (pelo menos entre os físicos).

Quando falamos em localidade, podemos nos referir a dois critérios distintos para a sua caracterização. Primeiramente, podemos dizer que a localidade pressupõe a impossibilidade de transmissão instantânea de informações (ou influências) de um ponto a outro do espaço. Ou então podemos dizer, com base na teoria da relatividade especial de Einstein, que tais informações não podem ser transmitidas com velocidades superiores à da luz, o que podemos denominar de **localidade ou separabilidade de Einstein**. As demonstrações da desigualdade de Bell, em geral, tem por hipótese base a definição mais ampla de localidade. E, dos experimentos realizados, apenas o 3º de Aspect et al (1982b) foi intencionalmente preparado para testar a possibilidade de emissão de informações com velocidades supraluminais. Todos os outros experimentos foram limitados neste sentido, pois o fato dos analisadores estarem com orientações fixas, e as medidas serem tomadas numa série em tempo, deixou sempre a possibilidade de que os sistemas pudessem ser informados sobre os estados dos aparelhos, por processos subluminais. No 3º experimento de Aspect, tenta-se testar a separabilidade de Einstein, e os resultados, apesar das ressalvas já apresentadas (sec. IV.5.5), indicam que ela é violada. Para aqueles que consideram conclusiva a desigualdade de Bell e aceitam os resultados de Aspect, restam então duas possibilidades: ou assume-se a possibilidade de que informações possam ser transmitidas instantaneamente (não-localidade no sentido amplo), ou que, se não são instantâneas, o são com uma velocidade maior do que c (não-localidade no sentido restrito).

Aceitar a não-localidade implica numa mudança muito profunda, se nos lembrarmos que a localidade é uma característica de toda a física clássica. Certamente, com relação às duas alternativas, se mantivermos a esperança de que a natureza seja fundamentalmente determinista, resta descobrir o processo físico responsável pela transmissão das informações, o qual, peculiarmente, parece não depender da distância entre os analisadores. Pelo menos é o que se depreende dos experimentos de Wilson et al (1976) e de Aspect (1982a). Vários autores, como Costa de Beauregard (1976), Stapp (1977a, 1979) e Rietdijk (1978) propuseram idéias relativas a estes processos físicos, considerando a possibilidade de uma retroação no tempo. Do mesmo modo, muitos (Stapp, 1977b; Cufaro-Petroni e Viglier, 1979; Herbert, 1982) formularam argumentos em suporte da existência de velocidades supraluminais, e da possibilidade de se ter um "telefone" instantâneo. Quanto a este último aspecto, tem-se demonstrações de sua impossibilidade (Ghirardi et al, 1980, 1983), mas não há uma aceitação geral das mesmas. Uma apresentação resumida destes pontos de vista alternativos é feita por Spasskii e Moskovskii (1984). Um ponto muito interessante ligado a tais pontos de vista não-locais está ligado à recente teoria dos táquions, em especial devido à estreita relação que se verifica entre consequências desta teoria e alguns aspectos da teoria da dupla solução de De Broglie (Recami, 1986).

Quando apresentamos a situação paradoxal que estudamos, e fazemos referências às diversas características básicas das teorias clássicas, temos que ter por aceito que, subjacente a conceitos como localidade, determinismo e causalidade, está a certeza de que existe uma realidade física, a qual ansiamos por compreender e descrever (realismo). A idéia de que é possível prover uma descrição completa de uma realidade objetiva assumida existente tem tido um papel muito im-

portante nas discussões que se verificam em torno dos fundamentos da mecânica quântica. Entretanto, a controvérsia em torno de realismo, ligada à desigualdade de Bell, é muito mais filosófica do que propriamente física, pois todos são, a seu modo, realistas. Mas a adoção de um ou outro ponto de vista tem reflexos essenciais sobre a descrição física dessa realidade. O realismo certamente é um elemento metafísico essencial para a física, é o alicerce que indica que tipo de teoria podemos elaborar para descrever os fenômenos físicos.

Novamente, em Einstein e Bohr temos duas posições diametralmente opostas acerca de realismo, e que nortearam a elaboração das duas principais interpretações da teoria quântica: a estatística e a de Copenhagen. A concepção da existência de uma realidade objetiva à qual estaria relacionado o estado quântico, é a base do argumento de EPR e de todas as teorias de variáveis escondidas (é a esta concepção que, neste trabalho, temos chamado de realismo). A concepção de Bohr acerca do realismo é um ponto de vista positivista (Stapp, 1972), segundo o qual o estado quântico descreve uma realidade observada em interação com um aparato instrumental bem definido. A aceitação do ponto de vista de Bohr não apresenta problemas com a não-localidade, mas tem um caráter subjetivo que sempre foi combatido pela física clássica. A concepção "clássica" de realismo, no entanto, leva ao problema de não-localidade associado à mecânica quântica, quando se procura uma teoria determinista equivalente a ela. O trabalho de Bell mostra que toda a discussão anterior sobre a questão de localidade surge se assumimos este realismo. Muito embora considerado irrelevante pelos filósofos positivistas, o realismo é a mais fundamental das premissas assumidas na derivação da desigualdade de Bell. No entanto, como uma menção à posição dos positivistas, vale lembrar que Mach foi levado, por suas concepções instrumentalistas, a combater a teoria atômica (Popper, 1972, p.128).

Sendo o indutivismo um elo essencial de ligação entre essa realidade física e o conhecimento humano, o conceito de localidade parece ser o crucial. Ou seja, uma teoria realista de variáveis escondidas deve ser fundamentalmente não-local para poder fornecer previsões compatíveis com as da mecânica quântica, se se confirmar experimentalmente uma violação da desigualdade de Bell, nos moldes como ela foi derivada. Finalizando, temos então que a necessidade de complementação da mecânica quântica, como o imaginava Einstein, para assegurar-lhe um caráter determinista, implica no sacrifício da localidade, com influências no próprio conceito de causalidade.

V - O PARADOXO ONDA - PARTÍCULA

V.1 - Introdução

V.2 - O experimento da dupla fenda

V.3 - Experimentos realizados envolvendo o Paradoxo Onda-Partícula

V.4 - A interpretação de Copenhagen e o Paradoxo Onda-Partícula

V.5 - A teoria da Dupla Solução de De Broglie e outras interpretações

Desde a antiguidade o homem tenta compreender e determinar a verdadeira natureza da luz. Várias hipóteses foram levantadas desde então, como, por exemplo, a de Aristóteles, que interpretava o fenômeno luminoso em termos das noções metafísicas de "potência" e "ato". No entanto, pode-se dizer que, nos últimos séculos, a história da ótica seja, em grande parte, a história da contenda entre dois pontos de vista diferentes: a teoria corpuscular e a teoria ondulatória da luz. Essas teorias surgiram da tentativa de associar à luz as características de algum fenômeno físico já conhecido, ou verificável no mundo macroscópico em que se desenvolve a nossa intuição.

A idéia da luz como onda, assim como o som, foi formulada por Huygens em seu "Traité de la Lumiere", em 1678, muito embora já fosse considerada anteriormente por Hooke (1665). Trabalhos posteriores de Young (interferência das ondas luminosas), Malus (polarização), Arago e Fresnel, já no século XIX, ajudaram a reforçar esta hipótese. A teoria eletromagnética, sistematizada por Maxwell (1865), e os experimentos realizados por Hertz, praticamente corroboraram a idéia. No entanto, a concepção puramente ondulatória da radiação deparou com sérias dificuldades, no início deste século, com os estudos experimentais de Lenard (1902) e Landenburg (1903) sobre o efeito fotoelétrico.

No início deste século, a teoria corpuscular estava praticamente posta de lado. A concepção da luz como matéria teve a sua primeira sistematização no trabalho de Descartes, e parece ter tido a preferência de Newton; mas por ser ineficaz para explicar uma série de fenômenos explicáveis com a teoria ondulatória (principalmente os fenômenos de difração e interferência), foi preterida àquela. O ressurgimento da teoria corpuscular está intimamente ligado ao nascimento da teoria quântica. Em 1905, Einstein mostrou que se poderia explicar o efeito fotoelétrico se se assumisse que a luz fosse composta por entidades com propriedades corpusculares: os **fótons** ou **quanta**. Este efeito, assim como o espalhamento Compton, perfeitamente explicáveis pela teoria corpuscular, não puderam ser explicados com um tratamento puramente ondulatório.

Temos, então, duas teorias distintas, aparentemente inconciliáveis, descrevendo uma mesma manifestação física. No entanto, nenhuma das duas dá, por si só, uma descrição satisfatória do comportamento da luz em todas as situações experimentais. Em contrapartida ao fato dos efeitos Compton e fotoelétrico não serem explicáveis ondulatoriamente, a teoria corpuscular não explica a difração e a interferência da luz. As informações que possuímos acerca do comportamento da luz nos mostram que ambas as características parecem coexistir, sendo que uma ou outra predomina, na dependência das condições em que o fenômeno ótico ocorra. As próprias relações de Planck - Einstein, que dão a energia E e momentum p dos fótons, mostram essa característica dual ondulatório-corpuscular, da luz:

$$E = h\nu$$

(5.1)

$$p = \hbar k$$

(5.2)

onde ν e k são parâmetros ondulatórios, e h a constante de Planck.

Essa "dualidade" foi estendida a todo objeto do mundo macro e do mundo micro, quando De Broglie formulou a hipótese de que "partículas materiais, assim como os fótons (luz), podem ter um aspecto ondulatório", extendendo e mesmo generalizando a abrangência das relações de Planck - Einstein. Com esta hipótese, De Broglie derivou as regras de quantização das órbitas eletrônicas do átomo de hidrogênio, até então empíricas, enunciadas primeiramente por Bohr e Sommerfeld. As experiências de difração de elétrons de Davisson e Germer (1927) confirmaram a hipótese, mostrando a existência de um caráter ondulatório mesmo para as até então consideradas partículas puramente materiais, de modo que o caráter dual parece ser uma propriedade fundamental da natureza. Para Feynman (1965), este comportamento estranho dos elementos do mundo microscópico contém, na realidade, o único mistério da teoria quântica.

Dentro do âmbito dos fundamentos da mecânica quântica, os pontos de vista assumidos com relação ao serem ondas e/ou partículas os elementos do mundo microscópico são, em princípio, quatro. Pontos de vista puramente ondulatórios, como o que formulou Schroedinger e que já foi abandonado, no contexto do qual "elaborou em poucos meses praticamente tudo do que é agora conhecido por mecânica ondulatória não-relativística" (Jammer, 1966, p.255). Do mesmo modo existem pontos de vista em que se tenta explicar os fenômenos (inclusive difração e interferência) apenas em termos corpusculares, como o defendido por Landé e que também é hoje praticamente abandonado. A menção dessas duas posições já abandonadas tem apenas caráter histórico, já que envolve nomes proeminentes da física deste século. Pontos de vista puramente ondulatórios ou corpusculares podem ser chamados de pontos de vista "clássicos" e se relacionam respectivamente com uma descrição eletromagnética ou mecânica do mundo. Os proponentes de teorias realistas locais, em sua maioria, tentam adequar a mecânica quântica a um desses dois pontos de vista.

Com o aparecimento da teoria quântica e, posteriormente, da mecânica quântica propriamente dita, duas novas concepções do mundo micro vieram à tona. A primeira, devida a Bohr e, como já vimos anteriormente, formulada em seu princípio de complementaridade (sec. III.2.4), assevera que os caracteres ondulatório e corpuscular são mutuamente exclusivos e complementares, de modo que nunca se manifestam simultaneamente. O que determina qual deles se manifestará é a situação experimental à qual o microsistema é submetido. A segunda concepção, sob todos os aspectos também revolucionária, e devida a De Broglie, assevera que os caracteres de onda e de partícula coexistem simultaneamente em todo elemento dotado de realidade. Deste modo, toda a matéria é, ao mesmo tempo, onda e partícula.

Neste capítulo, abordaremos então as discussões em torno desse caráter dual dos elementos do mundo microscópico, dentro dos fundamentos da mecânica quântica. Primeiramente, faremos uma exposição dos experimento de interferência por uma dupla fenda, utilizado por Young para mostrar o caráter ondulatório da luz, e que utilizaremos como um modelo na análise da manifestação ondulatória dos elementos do mundo microscópico. Por meio dele mostraremos como aparece a interferência na descrição quântica de um sistema de "partículas" (V.2). Em (V.3), apresentaremos uma análise de alguns experimentos já realizados envolvendo esse aspecto dual da natureza quântica, experimentos estes que vêm despertando bastante interesse, em especial após a criação dos interferômetros de nêutrons. Retomaremos, em seguida, a posição de Bohr (o princípio de complementaridade) para o caso específico do problema da dualidade (V.4). E, finalmente (V.5), faremos uma rápida apresentação do ponto de vista de De Broglie, que é tido como sendo a mais consistente alternativa ao princípio de complementaridade; além de mencionarmos alguns dos outros pontos de vista já formulados.

Para termos uma visão mais clara da dualidade onda-partícula, e como os dois caracteres se manifestam, vamos analisar o experimento de dupla fenda, que foi utilizado por T. Young em sua célebre demonstração experimental da interferência ótica, em 1804.

Seja o esquema experimental mostrado na figura 5.1. Temos uma fonte de luz monocromática coerente emitindo na direção de uma placa opaca, na qual estão dispostas duas fendas estreitas F_1 e F_2 . Estas fendas são paralelas e distanciadas entre si em d . Após a placa temos uma tela de observação, onde teremos o padrão de interferência para as duas fendas abertas. Sejam D a distância da placa à tela, e x a coordenada de um ponto sobre ela.

Se fechamos qualquer uma das fendas, por exemplo F_1 [F_2], o que obteremos na tela é um padrão de difração com uma distribuição de intensidade $I_1(x)$ [$I_2(x)$], mostrado na figura 5.1a. A linha pontilhada mostra qual seria a distribuição para as duas fendas abertas ($F_1 + F_2$), caso esta fosse dada pela adição pura e simples das intensidades individuais devidas a cada uma das fendas. No entanto, quando se realiza o experimento com as duas fendas abertas, como é mostrado na figura 5.1b, o que se obtém é uma distribuição inteiramente diferente. Para determinados pontos da tela a intensidade luminosa com uma única fenda aberta é maior que a que se verifica com ambas abertas. Por exemplo: se no ponto x' colocamos um detector, teremos que, quando apenas uma das fendas (F_1) estiver aberta, a intensidade luminosa detectada será maior do que quando as duas fendas forem abertas simultaneamente. Tal fenômeno é perfeitamente compreensível se adotamos uma interpretação ondulatória para a luz. Vejamos como tratar a questão, qualitativamente, utilizando as considerações da teoria eletromagnética.

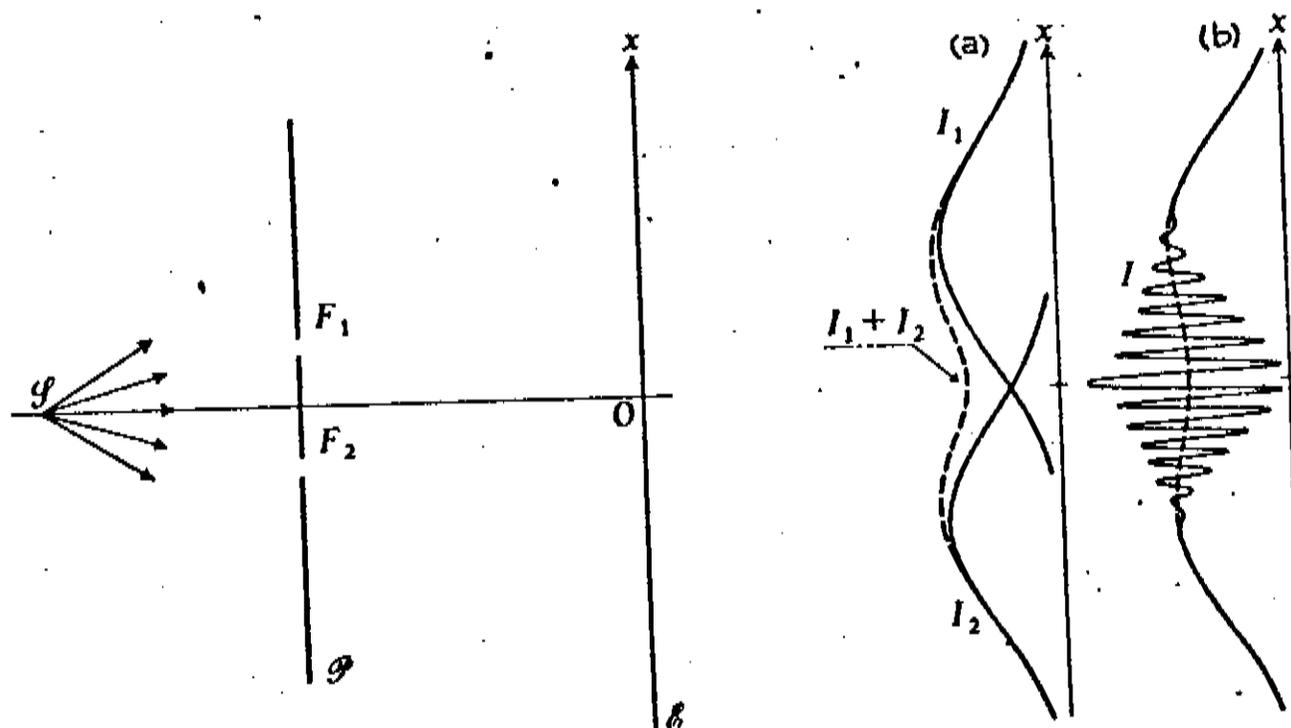


Fig. 5.1 - Diagrama do experimento de interferência por dupla fenda de Young. (Cohen-Tannoudji et al, 1977)

Se com somente a fenda F1 aberta o campo elétrico produzido num dado ponto x da tela é $E_1(x)$; temos a intensidade luminosa naquele ponto dada por

$$I_1(x) \propto E_1^2(x) \quad , \quad E_1(x) = A \cos \theta_1 \quad (5.3)$$

Consideração semelhante é válida para o caso de F2 aberta. Quando as duas fendas estão abertas, o campo elétrico em x é

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x) \quad (5.4)$$

e a intensidade luminosa é agora dada por

$$\begin{aligned} I(x) \propto E^2(x) &= [E_1(x) + E_2(x)]^2 \\ &= I_1 + I_2 + (I_1 I_2)^{1/2} \cos \theta_{12} \end{aligned} \quad (5.5)$$

que difere de $I_1(x) + I_2(x)$ pelo termo de interferência devido à diferença de fase existente entre os campos $E_1(x)$ e $E_2(x)$ em x .

Assim sendo, a teoria eletromagnética dá uma explicação para o aparecimento da interferência com as duas fendas abertas, e pode-se determinar com ela o posicionamento e a largura das franjas sobre a tela. No entanto, se se observa o padrão de interferência formado sobre a tela, nota-se que ele não é contínuo, mas sim formado por um número muito grande de pontos luminosos, o que nos leva a crer que a cada um desses pontos deva corresponder um fóton.

Vários experimentos, aos quais nos referiremos no capítulo seguinte, realizados com feixes de luz (e também com elétrons e neutrons), de muito baixa intensidade, de modo que se tivesse apenas um fóton de cada vez no aparelho, mostraram que os fótons são detectados pontualmente (de uma maneira aparentemente aleatória), o que contraria uma explicação puramente ondulatória para o fenômeno. Se colocamos sobre a tela uma chapa fotográfica e a expomos por um tempo suficientemente longo, observaremos que à medida que os fótons vão sendo detectados um padrão de interferência vai sendo formado (figura 5.2). Como nesses experimentos a situação experimental exclui qualquer interação entre os fótons, uma descrição puramente corpuscular não é viável, ou pelo menos muito difícil de ser imaginada. Como a partícula saberia, ao passar por uma fenda, se a outra está fechada ou aberta, já que o seu comportamento parece estar tão ligado a isto? Um experimento interessante, elaborado com fins didáticos, em que se utiliza um aparelho de televisão para mostrar o aparecimento do padrão pela detecção individual numa interferência de elétrons, foi realizado com sucesso por Merli et al (1976).

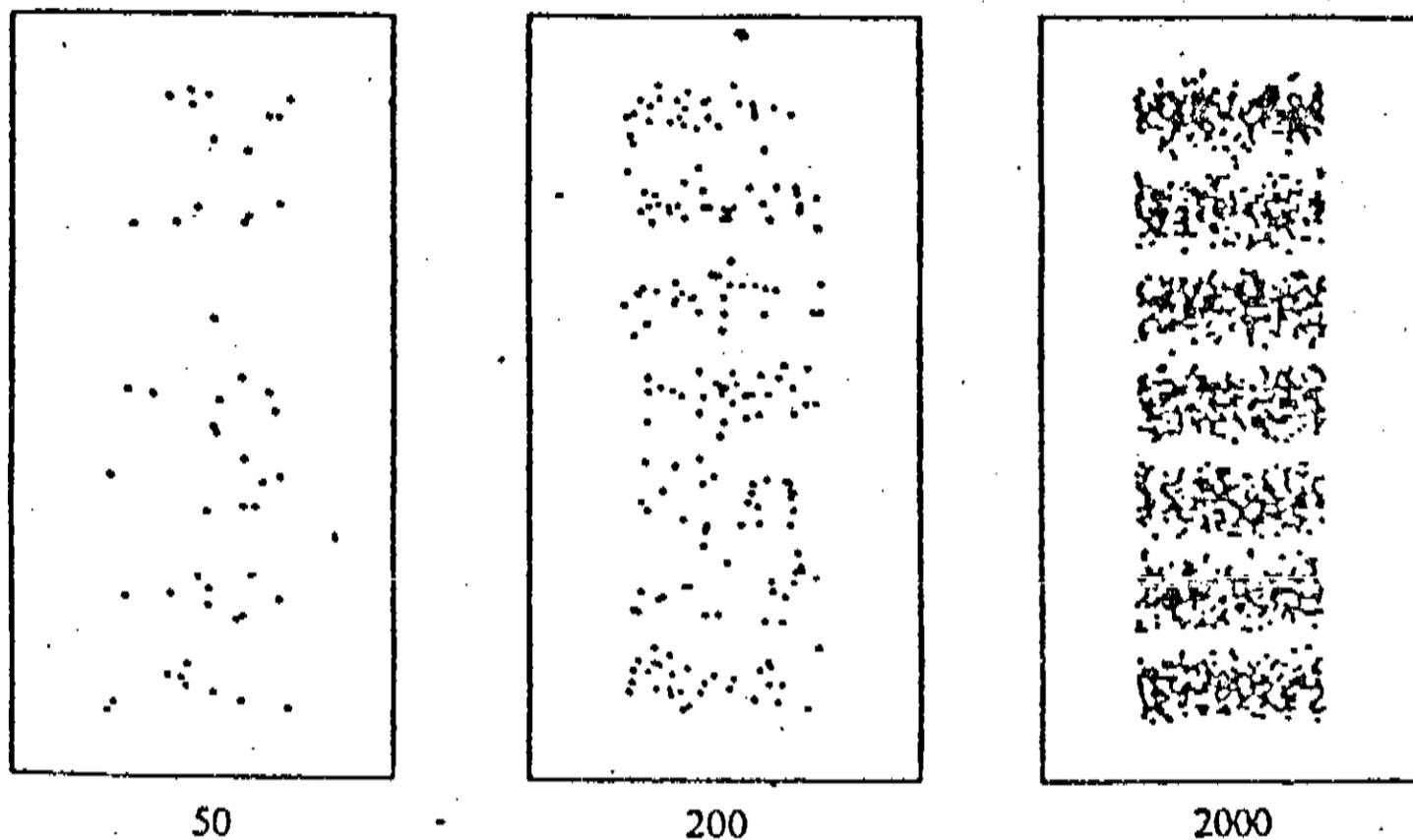


Fig. 5.2 - Formação do padrão de interferência, como simulada por computador, para um experimento de dupla fenda. Os números abaixo de cada quadro indicam o número de detecções na tela. (Rae, 1986)

Temos, então, um paradoxo: por que é que, mesmo passando apenas um fóton de cada vez no aparelho, de modo a podermos considerá-los separadamente passando por uma das fendas, o fato da outra estar aberta ou fechada é tão importante? Se a luz é unicamente onda, dizemos que ela passa pelas duas fendas simultaneamente e interfere, mas não podemos explicar a detecção pontual. Se é constituída por fótons, ou seja, puramente corpuscular, podemos explicar a detecção pontual, mas não a interferência.

Quando fazemos um tratamento quântico do experimento, temos associado a cada partícula um vetor estado $|\Psi\rangle$. Podemos dizer que a placa com as fendas prepara as partículas que incidem sobre ela de modo a termos dois estados possíveis: $|\Psi_1\rangle$ se a partícula passou por F1, e $|\Psi_2\rangle$ se a partícula passou por F2. A probabilidade de termos uma partícula chegando em x é dada (omitindo as constantes de normalização) por

$$P(x) = |\langle x | \Psi \rangle|^2 \quad (5.6)$$

em que o estado $|\Psi\rangle$ é um estado relacionado com o processo de preparação das partículas. A expressão, como estampada acima, representa a probabilidade de termos uma partícula chegando em x quando as duas fendas estão abertas.

Para o caso de termos uma das fendas fechadas, a expressão é

equivalente. Apenas que o estado $|\psi\rangle$ agora se relaciona à fenda que está aberta, o que de certo modo corresponde a uma reparação do estado inicial.

Como $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$, temos

$$P(x) = |\langle x|\psi_1\rangle + \langle x|\psi_2\rangle|^2$$

que é diferente da soma das probabilidades para cada uma das fendas fechadas:

$$|\langle x|\psi_1\rangle + \langle x|\psi_2\rangle|^2 \neq |\langle x|\psi_1\rangle|^2 + |\langle x|\psi_2\rangle|^2 \quad (5.7)$$

Já que

$$|\langle x|\psi_1\rangle + \langle x|\psi_2\rangle|^2 = |\langle x|\psi_1\rangle|^2 + |\langle x|\psi_2\rangle|^2 + 2\text{Re}(\langle x|\psi_1\rangle\langle x|\psi_2\rangle^*) \quad (5.8)$$

Temos, então, o termo de interferência

$$2\text{Re}(\langle x|\psi_1\rangle\langle x|\psi_2\rangle^*)$$

que faz a diferença entre as duas expressões, e que é um termo que depende das fases dos dois estados na base $\{|x\rangle\}$, é uma consequência do princípio de superposição (sec. III.4.1), decorrente da linearidade e homogeneidade da equação de Schroedinger e concorda com o termo de interferência obtido no tratamento eletromagnético do experimento, cujos resultados também são sempre verificados na prática.

O que diferencia, em essência, as duas expressões obtidas é que, quando apenas uma das fendas está aberta, sabemos com certeza a trajetória da partícula. Quando as duas fendas estão abertas, nada podemos dizer acerca dessas trajetórias.

Seguindo os textos convencionais de mecânica quântica, além do que já dissemos nas considerações sobre a luz, conclui-se que o simples fato de sabermos por que fenda passou a partícula nos destrói o termo de interferência e, conseqüentemente, não mais teremos o padrão antes obtido. Assim, estendendo o paradoxo, é impossível termos interferência e sabermos a trajetória das partículas ao mesmo tempo. Tal conclusão é válida para qualquer elemento do mundo microscópico para o qual a relação de De Broglie associe um comprimento de onda tal, que o caráter ondulatório possa se manifestar.

Além desta maneira mais usual de tratar a questão, usando a dupla fenda, o paradoxo pode ser também visualizado quando utilizamos o não menos clássico interferômetro de Michelson. Uma fonte de luz monocromática emite na direção de um espelho semi-transparente **E**, que desvia o feixe para dois braços distintos, em direção a dois refletores **A** e **B**. Vemos o aparelho na figura 5.3a e, da maneira como está montado, observaremos um padrão de interferência na tela de observação **T**, desde que a diferença de caminho entre os dois braços seja conveniente. No entanto, nenhuma informação se tem acerca da trajetória dos fótons.

Embora um tratamento ondulatorio do problema explique a interferência, existe o fato de que, se substituirmos os espelhos refletores por detectores (figura 5.3b), cada fóton será detectado ou em **A** ou em **B**, e não parte em um, parte em outro (Adam et al, 1955; Grangier et al, 1986 - que será comentado no próximo capítulo). Neste caso, sabemos a trajetória, mas perdemos o padrão de interferência.

A seguir, vamos tratar de alguns experimentos que foram realizados, o que nos ajudará a visualizar o alcance do paradoxo.

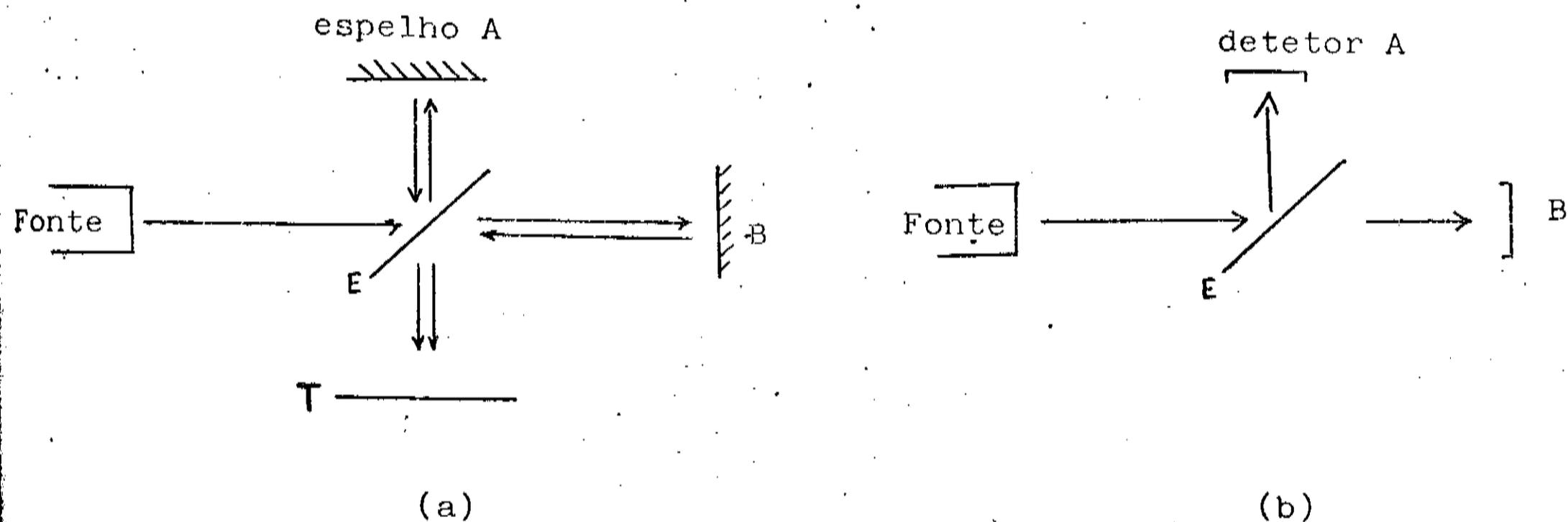


Fig. 5.3 - Dois arranjos experimentais em que características diferentes da luz se manifestam. Em (a), se não temos como saber a trajetória dos fótons, manifesta-se o caráter ondulatorio. Em (b), manifesta-se o caráter corpuscular da luz, uma vez que cada fóton será detectado ou em **A** ou em **B**.

III.3 - EXPERIMENTOS REALIZADOS ENVOLVENDO O PARADOXO ONDA - PARTÍCULA

Muitos experimentos já foram realizados, relacionados com o paradoxo onda-partícula. Esses experimentos visaram testar hipóteses surgidas como consequência de um determinado ponto de vista acerca do problema. Procuraremos, aqui, dar um resumo dos principais tipos de experimentos. Uma boa apresentação, com discussões teóricas acerca delas, é dada por Sillito (1971).

(1) Como citamos no capítulo anterior, a experiência mostra que, mesmo para feixes de luz (e outras partículas) de intensidade muito baixa, temos um padrão de interferência. Numa abordagem da luz como um fenômeno puramente ondulatório, a teoria prevê que o padrão permanece visível mesmo para intensidades baixas, o que é verificado pela experiência. Para a teoria corpuscular, à medida que os fótons vão ficando mais isolados e deixando de interagir entre si, ele não deveria mais aparecer.

Quando se diz que a luz é de baixa intensidade, de modo a prevalecer o seu caráter corpuscular, tem-se subentendido um critério que permita que tal consideração seja feita. Para exemplificar, utilizaremos o interferômetro de Michelson, onde são possíveis dois critérios (Jánossy e Naray, 1957):

(1.1) em função do comprimento de coerência Δ do feixe, sendo a intensidade N baixa quando as bandas não se sobrepõem num grau considerável:

$$N \ll N_0 = \frac{c}{\Delta}$$

onde $N = \frac{I}{h\nu}$, sendo que $\left\{ \begin{array}{l} N - \text{número de fótons / seg.} \\ I - \text{fluxo de energia / seg.} \\ h\nu - \text{energia do quantum.} \end{array} \right.$

(1.2) requerendo que haja apenas um fóton por vez, em média, dentro do aparelho:

$$N \ll N'_0 \quad \text{sendo agora} \quad N'_0 = \frac{c}{l'}$$

extensão do caminho percorrido pelo fóton, dentro do aparelho.

Vários experimentos foram realizados, utilizando arranjos experimentais muito diferentes entre si. O primeiro experimento, utilizando um feixe de luz atenuado por filtros, foi realizado por Taylor, já em 1909. Damos abaixo uma tabela com alguns dos experimentos realizados.

Dentre estes experimentos, e também os não relacionados na tabela dada, somente o de Dontsov e Baz (1967) encontrou que a visibilidade do padrão de interferência cai consideravelmente quando um feixe fraco de fótons estatisticamente independentes passa pelo interferômetro. Este resultado estimulou a realização de novos experimentos, uma vez que não se conseguiu explicá-lo satisfatoriamente. Reynolds et al (1969) e Bozec et al (1969) refizeram, com algumas variações, o experimento, mas não encontraram o mesmo resultado. Além disso, verifica-se que o padrão não muda com a intensidade, ou seja: "...o padrão que obtemos deixando passar, individualmente, um grande número de fótons pelo aparelho é o mesmo que obtemos com estes fótons passando em grande número, simultaneamente, por ele." (Rae, 1986).

Experiment	Year	Apparatus	Detector	Source atoms per cm ³	Photons sec in the interference region	Does result favor quantum mechanics?
Taylor	1909	needle diffraction	film		$\sim 10^6$	Yes
Dempster and Batho	1927	(a) echelon grating	film		10^2	Yes
		(b) Fabry Perot	film	~ 10	10^5	Yes
Janossy and Naray	1957	Michelson interferometer	photomultiplier		10^5	Yes
Griffiths	1963	double slit	image intensifier		2×10^3	Yes
Scarl et al.	1968	double slit	photomultiplier		2×10^4	Yes
Dontsov and Baz	1967	Fabry Perot	image intensifier	~ 100	$\sim 10^3$	No
Reynolds et al.	1969	Fabry Perot	image intensifier	~ 150	10^2	Yes
Bozec et al.	1969	Fabry Perot	film	10^6	$\sim 10^2$	Yes

Tabela - Resultados de alguns dos experimentos já realizados para estudar o caráter ondulatório-corpúscular da luz. (Pipkin, 1978)

Mais recentemente, experimentos realizados com neutrons, utilizando um interferômetro de cristal de Silício, têm confirmado essa afirmação. Com um número extremamente baixo de neutrons pode-se vislumbrar o padrão de interferência, sendo possível perceber a chegada (aleatória) de cada neutron individualmente, nos detectores, como se fosse um corpúsculo. Sendo os neutrons produzidos aleatoriamente num reator, pode-se considerar que não haja nenhuma correlação entre eles, já que se observa, experimentalmente, que o intervalo entre duas detecções é muito grande, da ordem de segundos. Citando Rauch (1985): "Para a maioria dos experimentos pode-se dizer que, quando um neutron é detectado, o seguinte, em média, ainda não 'nasceu', estando ainda no núcleo de um átomo de urânio". Uma vez que entrar em detalhes acerca destes experimentos dispenderia muito tempo e esforço, convém apenas citar algumas referências interessantes onde o assunto é tratado: Rauch (1981), Greenberger (1983), Rauch (1984) e Rauch (1985). Deve ser salientado que esses experimentos são mais convenientes que os realizados com fótons devido a três fatores principais: a separação temporal entre a passagem de um e outro nêutron, o que seguramente nos garante apenas um nêutron de cada vez, em média, no aparelho; a alta eficiência dos contadores disponíveis (acima de 85%); e o baixo ruído de fundo, que é elevado e de difícil controle nos experimentos com fótons. No apêndice 2, apresentamos um desses experimentos (Summhammer et al, 1983), relacionado com a existência de estados superpostos e, conseqüentemente, com a questão que ora apresentamos.

(ii) Um experimento muito interessante foi realizado por Magyar e Mandel (1963), que obtiveram um padrão de interferência superpondo dois feixes de luz, produzidos por dois lasers independentes (figura 5.4). A questão era saber se a interferência ocorria entre um fóton de um feixe com um fóton de outro. Posteriormente, Pflüeger e Mandel (1967, 1968) e Radloff (1968, 1971) realizaram experimentos do mesmo tipo, só que com feixes de baixa intensidade (atenuados), de modo a se ter, com alta probabilidade, um fóton emitido apenas após um anterior ter sido detectado. Como os fótons são emitidos aleatoriamente pelos dois lasers, não se pode dizer de qual deles sai cada fóton detectado. Observa-se experimentalmente que é impossível determinar a fonte de cada fóton sem que se perca o padrão de interferência, o que está dentro das previsões da mecânica quântica. De um certo modo, estes experimentos reforçam (mas não confirmam) a afirmação de Dirac (1958) de que "...cada fóton interfere apenas consigo mesmo. Interferência entre fótons diferentes nunca ocorrem.", o que contrasta com uma concepção puramente corpuscular do fóton.

(iii) Dentre os experimentos realizados, os mais sofisticados e, coincidentemente, os mais recentes, foram os dois efetuados por Grangier et al (1986). Vejamos o primeiro experimento, cujo arranjo está esquematizado na figura 5.5a. Utiliza-se uma fonte em que átomos de cálcio radioativo, adequadamente excitados, decaem para os seus estados originais emitindo um par de fótons correlacionados, ν_1 e ν_2 , em direções opostas, dentro de um intervalo de tempo muito curto (meia-

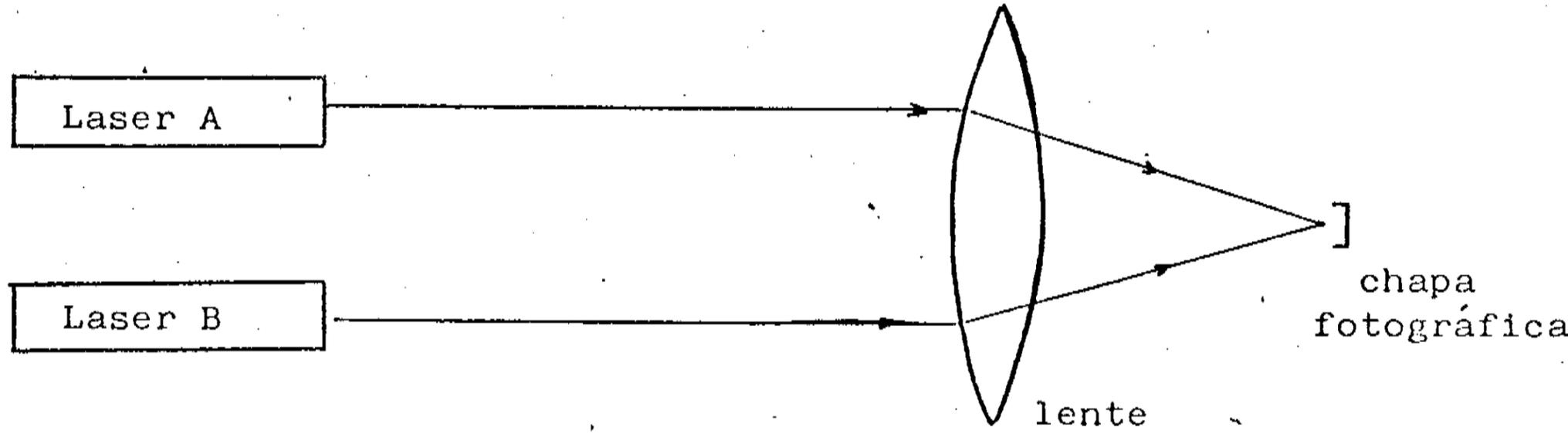


Fig. 5.4 - Esquema do experimento de Magyar e Mandel (1963), em que obtiveram um padrão de interferência utilizando fontes distintas de luz.

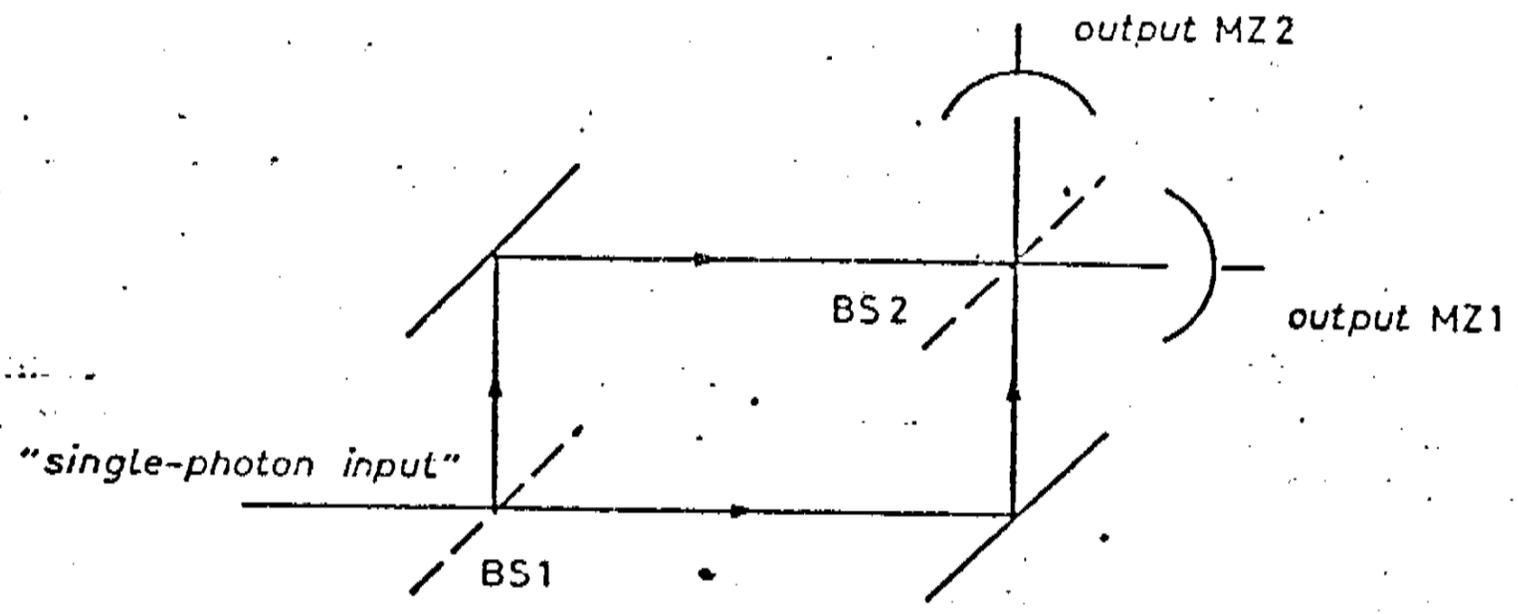
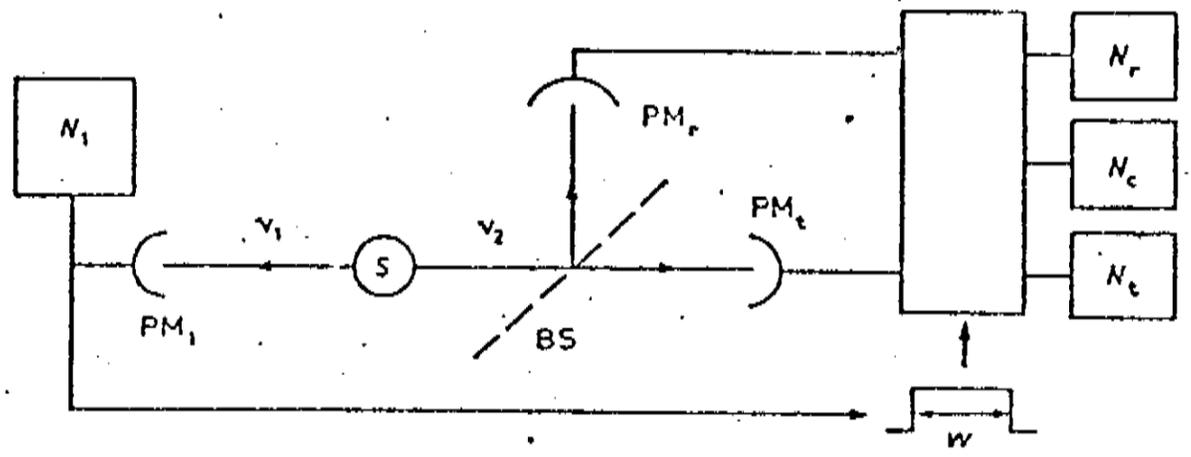


Fig. 5.5 - Esquemas dos dois experimentos efetuados por Grangier et al em 1986. (Grangier et al, 1986)

vida do estado intermediário $\tau_s = 4,7 \text{ ns}$). O experimento funciona da seguinte maneira: toda vez que ν_1 é detectado no fotomultiplicador **PH1**, ativa um mecanismo w que possibilita aos fotomultiplicadores **PNr** e **Pnt** detectarem ν_2 , durante um intervalo $\omega = 2\tau_s$, logo após a detecção de ν_1 . Deste modo, a probabilidade de se detectar um ν_2 proveniente do mesmo átomo que emitiu ν_1 é muito maior do que um emitido por um outro átomo na fonte. **BS** é um divisor de feixe, de modo que o fóton seja, de acordo com as previsões da mecânica quântica, detectado ou em **PNr** ou em **Pnt**, mas nunca em ambos. Pelo contrário, num tratamento clássico de ondas, espera-se que haja detecções coincidentes naqueles detectores, uma vez que parte da onda é transmitida, e parte é refletida. A taxa de detecção de ν_1 , com a consequente ativação de w , é dada por N_1 ; N_r e N_t dão as taxas para detecção simples de ν_2 em **PNr** e **Pnt**, respectivamente; e N_c a taxa de detecção coincidente nos dois fotomultiplicadores, sempre no intervalo ω . Após determinarem as expressões teóricas para estes valores, levando em conta as eficiências de detecção, a taxa de excitação da fonte e os ruídos de fundo, Grangier et al encontraram uma taxa de coincidência cinco vezes menor que o limite clássico mínimo, o que é um forte argumento a favor da hipótese de que o fóton passa por um ou outro caminho, e não por ambos. Poderíamos dizer que os fótons não são divididos pelo divisor de feixe.

No segundo experimento, figura 5.5b, monta-se um interferômetro de Mach-Zehnder a partir de **BS** e realiza-se um experimento de interferência com um fóton de cada vez, uma vez que ν_1 indica a presença de um fóton no interferômetro. Deste modo, um mecanismo semelhante ao do primeiro experimento aciona durante um intervalo ω os detectores **HZ1** e **HZ2**. Sem entrar em maiores detalhes, o resultado foi a observação de uma visibilidade de franja $V > 98\%$. Ou seja, para uma mesma fonte e um mesmo dispositivo do primeiro experimento, obteve-se uma interferência onde poderíamos afirmar que "o campo eletromagnético é coerentemente dividido pelo divisor de feixe". Esses dois experimentos ilustram bem o paradoxo onda-partícula.

A posição de Bohr-Heisenberg acerca do problema da dupla fenda se fundamenta no conhecido "princípio de complementaridade", que começou a ser formulado por Bohr a partir de 1926 (uma abordagem histórica das discussões entre Bohr e Einstein acerca do paradoxo é dada em Brown, 1981).

Em seu comentário sobre o princípio, Bohr (1949) assinala que o objetivo da "complementaridade" foi abranger os traços de individualidade dos fenômenos quânticos e esclarecer os aspectos peculiares relativos à observação destes fenômenos. Deste modo, Bohr considera essencial que se reconheça o fato de que, muito embora os fenômenos quânticos estejam fora das possibilidades de uma explicação clássica, as considerações acerca de qualquer evidência devem ser expressas em termos clássicos. Ou seja, a nossa única maneira de termos acesso a eles é descrevê-los em termos clássicos (Selleri, 1986). Tal consideração é plenamente válida se levarmos em conta que, não obstante as discussões filosóficas a respeito, uma característica indispensável de um experimento seja a sua reproduzibilidade, e que, para isto, é necessário que se o expresse numa linguagem adequada. Ou seja, o experimento deve possuir um caráter objetivo independente do experimentador, e ser refactível.

Deste modo, Bohr achava impossível que se pudesse, numa determinada situação experimental, fazer uma distinção entre o comportamento dos objetos atômicos (objetos do mundo micro) e a interação destes com o aparato experimental (objetos do mundo macro), que define as condições sob as quais um dado fenômeno aparece. Quer dizer, o único traço que temos de um objeto do mundo micro é a variação que ele causa no aparelho que o detecta, e não podemos distinguir entre os dois. Ou seja, não é possível "filtrar", do resultado que obtivemos, a contribuição devida unicamente ao objeto medido, sem a interferência do aparelho. Segundo Bohr, o limite de tal "filtragem" é determinado pela existência do quantum de ação h finito (sec. III.2.4). Tem-se, assim, que a manifestação de um dado fenômeno deve ser considerada em conjunto com o arranjo experimental. Portanto, quando temos diferentes situações experimentais, as evidências obtidas não podem ser consideradas dentro de um único quadro, "mas devem ser consideradas como 'complementares', no sentido de que só a totalidade dos fenômenos exaure as informações possíveis acerca dos objetos. Citando a opinião de Prigogine (1980) sobre o princípio: "O mundo é mais rico do que é possível expressá-lo em qualquer linguagem simples."

Ao comentar o experimento de dupla-fenda, Bohr (1949) salienta o caráter complementar existente entre os comportamentos ondulatório e corpuscular da 'matéria'. Como o caráter ondulatório dá o padrão de interferência mas elimina o conceito de trajetória, e o caráter corpuscular requisita uma trajetória para o objeto, mas não admite o padrão de interferência, a complementaridade entre onda e partícula se manifesta experimentalmente como uma complementaridade entre padrão de

interferência e trajetória. É impossível, para Bohr, termos um experimento em que ao mesmo tempo saibamos a trajetória de cada partícula e obtenhamos o padrão de interferência, e vice-versa. O princípio de incerteza limita o acesso que se pode ter ao conhecimento simultâneo de ambos (este ponto será bem tratado no capítulo VI). Qualquer experimento que se imagine para tentar obtê-los não poderá ter sucesso além dos limites estabelecidos por aquele princípio. Uma boa análise da situação, sob o ponto de vista que ora abordamos, é feita por Feynman (1965). Faremos uma breve abordagem da utilização do princípio de incerteza na demonstração dessa derivação na secção VI.4.1.

Como já salientamos anteriormente, o ponto de vista de Bohr, ou interpretação de Copenhagen, é o adotado na grande maioria dos livros textos, muito embora seja uma interpretação muito criticada desde o seu aparecimento. Sob vários aspectos, a posição de Copenhagen é muito próxima da defendida por alguns filósofos céticos na antiguidade, com relação à teoria do conhecimento, já que tem como base o probabilismo (interpretação de Born da função de onda), assumindo uma impossibilidade inerente de se chegar a um conhecimento completo dos fenômenos. A maior crítica que se faz a esta interpretação se deve à negação que ela faz ao determinismo, ao assumir que os objetos do mundo micro não possuem propriedades intrínsecas em si, mas apenas reagem diferenciadamente a determinadas situações experimentais. Eles não são nem ondas nem partículas, apenas se comportam como tal de acordo com o que queiramos determinar.

Infelizmente, não obstante a eficácia do princípio de complementaridade, a posição de Copenhagen refuta duas concepções clássicas até certo ponto intuitivas acerca do que sejam os elementos do mundo micro, mas não propõe nenhum modelo que os substitua. Os conceitos de ondas e partículas têm apenas validade pragmática: são conceitos que facilitam a descrição de um determinado fenômeno, e nada mais. Por meio deles podemos ter um "entendimento" do que seja o fenômeno que estudamos, em termos de nossos conceitos macroscópicos.

Certamente, o princípio de complementaridade é o aspecto mais "revolucionário" da interpretação de Copenhagen. Não há nenhum indício de que não possa ser válido, se tomado do ponto de vista heurístico. Podemos apenas dizer que o princípio estabelece não o que é, mas sim o que não é um elemento do mundo microscópico, e que assumindo tal posição conseguimos solucionar uma série de problemas que não eram explicáveis classicamente.

Existem vários pontos de vista alternativos ao de Bohr, que visam compreender o paradoxo onda-partícula assumindo a existência de apenas um caráter para os elementos do mundo micro: ou corpuscular, ou ondulatório. No entanto, não nos ocuparemos deles em detalhe. Faremos apenas uma breve menção a esses pontos de vista após apresentarmos o de De Broglie, que é o mais aceito atualmente entre os defensores de interpretações realistas.

A interpretação de De Broglie acerca do paradoxo onda-partícula foi sistematizada por ele no que denominou "teoria da dupla solução", que veio sendo cinzelada desde que concebeu as suas primeiras idéias básicas da mecânica ondulatória, em 1923 - 24. De Broglie expõe a teoria, em suas versões mais recentes, em dois artigos que servirão de base para os comentários que faremos a respeito dela, publicados em 1970 e 1971 (ver as referências).

Já na época de sua famosa tese de doutorado (1923), De Broglie buscava elaborar uma imagem da realidade física em que os aspectos corpuscular e ondulatório coexistissem harmonicamente. A primeira exposição da teoria da dupla solução foi publicada em 1927 mas, devido ao sucesso da interpretação de Copenhagen, foi abandonada por um longo tempo. No entanto, no dizer de De Broglie: "...não coloquei em dúvida, em momento algum, o caráter de realidade física de ondas e partículas" (1971b).

Entrar em detalhes acerca da teoria da dupla solução vai além da proposta deste trabalho, o que nos limita a apenas comentar alguns de seus aspectos mais importantes. Este ponto de vista tem como base a hipótese de que os caracteres ondulatório e corpuscular coexistem como propriedades de um sistema microscópico. O ponto de partida foi a análise da frequência de uma onda plana monocromática em referenciais com movimento relativo entre si, verificando que a frequência se transforma como uma energia, o que levou à extensão das relações de Planck-Einstein para todo objeto 'material'. Posteriormente, De Broglie generalizou a análise para ondas não planas-monocromáticas. Além disso, fez uma distinção entre a onda fictícia normalizada introduzida por Schroedinger, e à qual Born associou um significado meramente estatístico, e uma onda física real que estaria associada a cada objeto, e cuja existência é assumida com base na análise mencionada.

De Broglie (1967, 1973) indica três hipóteses principais sobre as quais sua teoria se assenta:

(1) Admite-se, como já foi comentado, a realidade física de ondas e partículas. A onda ψ associada a todo objeto é um processo físico real que evolui temporalmente no espaço segundo uma equação de propagação (Schroedinger, Klein-Gordon, Dirac). A partícula seria uma pe-

quena região incorporada à onda, onde se verifica uma alta concentração de energia, sendo bem localizada e representável, em primeira aproximação, como uma espécie de singularidade móvel. Por sua vez, para De Broglie, a onda quântica Ψ não é uma onda real. Tal onda, fictícia, satisfazendo à equação de Schroedinger, e que dá a probabilidade de encontrar essa partícula numa dada região do espaço-tempo (Born), estaria relacionada com a onda real por

$$\Psi = C \nu$$

onde C é um fator de normalização. Ψ tem o caráter de uma representação subjetiva de probabilidade, obtida a partir da onda objetiva. Seria a onda real ν que guiará a partícula e dará a sua localização sobre ela. O nome "teoria da dupla solução" deriva dessa hipótese de que ν e Ψ sejam duas soluções da mesma equação de ondas.

(2) Se a partícula se move sem ser perturbada, seu movimento é definido pela "lei de condução": se a solução complexa da equação de onda que representa ν é dada por

$$\nu = a(x, y, z, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \varphi(x, y, z, t)\right)$$

sendo a e φ funções reais, segue que o movimento da partícula nesta onda é descrito por:

$$E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad e \quad p = - \text{grad } \varphi$$

Para o caso de uma onda plana monocromática, recobramos as relações de Planck-Einstein. De Broglie dá um outro enunciado para esta lei: "A partícula se desloca sobre sua onda de tal modo que sua vibração interna, admitida como decorrência da análise da frequência comentada acima, deve permanecer em fase com a onda que a porta" (1970). Para o caso em que estão presentes perturbações, é necessária uma hipótese suplementar, que é dada a seguir.

(3) Além destas duas hipóteses básicas, De Broglie estabeleceu uma "termodinâmica oculta de partículas", literalmente 'thermodynamique cachée des particules' (De Broglie, 1971a, 1971b), a fim de prover uma demonstração rigorosa da significação de $|\Psi|^2$ como oferecendo uma probabilidade da presença da partícula em um ponto (x, y, z) num instante t . Para tal, é necessário assumir como hipótese suplementar a existência de um "meio subquântico" com o qual o corpúsculo se encontra em constante contato energético, numa interação permanente que o dota de um movimento tipo-browniano sobre as trajetórias definidas pela lei de condução que citamos acima.

Estas são as idéias básicas da teoria de De Broglie. Um aspecto muito importante da teoria é que ela assume a existência de um potencial quântico dependente das variações de amplitude da onda ψ . Tal potencial participa de uma redefinição da massa da "partícula" a ela associada, e influencia no comportamento dessa partícula (ver a fig. 5.6), além de aparecer também na famosa teorias de variáveis escondidas de Bohm (1952). Um outro aspecto interessante na descrição de De Broglie do movimento da partícula é refletido pela expressão

$$v \cdot V = c^2$$

onde V é a velocidade de fase da onda real, v a velocidade da partícula a ela associada, e c a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo. Quando a partícula viaja a velocidades subluminais, a velocidade de fase da onda real é maior do que c ! Enfim, a teoria de De Broglie é bastante interessante, sendo uma teoria determinista e causal.

Na análise do experimento de dupla fenda (ou outro em que se manifesta o paradoxo) temos que para a teoria da dupla solução, em que a trajetória da partícula é guiada pela onda real a ela associada, o que se verifica é a interferência da onda, que atravessa simultaneamente as duas fendas e define a trajetória da partícula de acordo com as equações acima citadas. Esta interpretação de De Broglie é a que explica, de modo mais satisfatório, o problema do paradoxo onda-partícula, sendo a interpretação mais aceita por aqueles que trabalham com fundamentos da mecânica quântica. O maior problema que ela enfrenta é o fato de não se ter observado, até agora, a onda real cuja existência é assumida pela teoria. Segundo Selleri (1982), de Broglie acredita que, devido ao fato de quase todo o momento e energia estarem associados à partícula, e de apenas uma parcela muito ínfima estar difusa pela onda, esta é de muito difícil detecção, o que justificaria ainda não ter sido observada. Além disso, para De Broglie (1977), com tal idéia poder-se-ia também explicar o desvio para o vermelho cosmológico, sem se invocar o efeito Doppler.

Além da de De Broglie, existem outros pontos de vista em que se tenta um melhor entendimento do paradoxo. O modelo assumido por De Broglie, para os elementos do mundo microscópico, se enquadra no que se costuma chamar "modelo de partículas extendidas", sendo a onda real associada à partícula uma "onda de matéria", uma verdadeira onda física. Existem outras propostas de modelos de partículas extendidas, das quais não trataremos aqui (por exemplo, Raju, 1981; Stenholm, 1985). Como na "teoria da dupla solução" de De Broglie, esses modelos tentam conciliar num só elemento físico, as características diversas que apresentam.

Por sua vez, a interpretação devida a Landé tenta descrever o fenômeno de interferência por dupla fenda em termos puramente corpusculares, através da interação destes com o aparelho. A inspiração para tal interpretação foi a abordagem, por Duane (1923), da difração como um fenômeno corpuscular. Uma descrição do problema de dupla fenda sob

este ponto de vista pode ser encontrada em Landé (1965). Não nos aprofundaremos nesta interpretação, uma vez que experimentos mais recentes a colocam em sérias dificuldades (Buonomano, 1978). Uma outra interpretação de caráter corpuscular, ainda não testada, devida a Buonomano (1980, 1985, 1986), considera que as partículas interagem entre si indiretamente, através do meio que se supõe dotado com características de memória, e que permeia o aparelho. Deste modo, a passagem de uma partícula pelo aparelho deixaria uma impressão no meio, de modo que a passagem de um número muito grande de partículas por esse meio ocasionaria o aparecimento de efeitos cooperativos, que influenciariam na trajetória dessas partículas. Assim, pode-se dizer, cada partícula que passa por uma das fendas "sabe" se a outra está aberta ou não. A principal motivação de se assumir tal ponto de vista se deve ao fato de que, nos experimentos realizados, a quantidade de detecções necessárias para a obtenção do padrão de interferência é muito grande, o que, levando-se em conta a eficiência dos detectores, implica em um número ainda maior de partículas envolvidas no experimento. Esse ponto de vista é parte da interpretação não ergódica que já mencionamos em III.3 e em IV.6. É proposto um experimento para testá-la (Buonomano, 1987b), em vias de realização, de modo que é um ponto de vista alternativo ainda possível.

Uma outra tentativa interessante, mas com o inconveniente de não ser testável, pois prevê sempre os mesmos resultados que a mecânica quântica, é a de Bohm (1952), que foi baseada em parte no trabalho de De Broglie e que é também um ponto de vista corpuscular. Introduzindo um potencial quântico como o de De Broglie, Bohm obtém uma teoria de variáveis escondidas totalmente compatível com a mecânica quântica e, ao mesmo tempo, realista (muito embora aparentemente não-local). A figura 5.6 mostra as trajetórias das partículas para o experimento de dupla-fenda, em função deste potencial, indicando o aparecimento do padrão de interferência (Phillipidis et al., 1979), que é idêntico ao previsto pela mecânica quântica.

Outros pontos de vista já formulados, mas que não obtiveram êxito, entre outros, foram o de Schroedinger (1926) já mencionado anteriormente (ver III.2.2), e que tentava reduzir todos os fenômenos a fenômenos ondulatórios; e o ponto de vista hidrodinâmico de Madelung (1926), que faz uma analogia entre as autofunções da equação ondulatória de Schroedinger, e a equação do fluxo estacionário de um fluido. Uma abordagem detalhada dessas interpretações é feita por Jammer (1974).

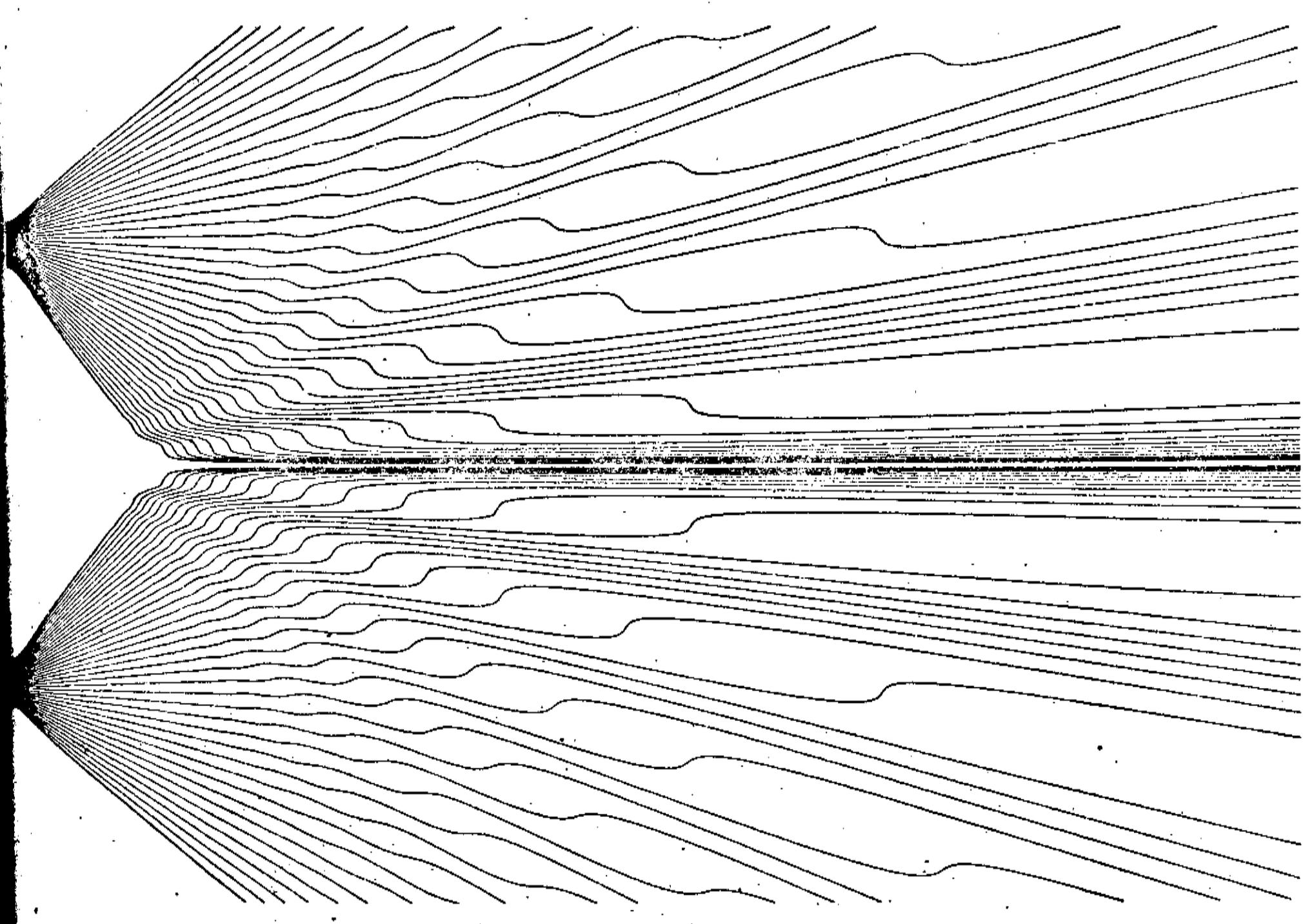


Fig. 5.6 - Trajetórias das partículas em um experimento de dupla fenda, conforme obtidas utilizando-se o potencial quântico de De Broglie-Bohm, mostrando franjas de interferência idênticas às previstas pela mecânica quântica. (Phillipidis et al, 1979)

VI - O PRINCÍPIO DE INCERTEZA

VI.1 - Introdução

VI.2 - Derivações das Relações de Incerteza

VI.3 - Várias interpretações das Relações de Incerteza

VI.4 - A importância do Princípio de Incerteza para a Interpretação de Copenhagen

Neste capítulo trataremos do princípio de incerteza, que foi primeiramente formulado por Heisenberg (1927), e é um dos pontos básicos da interpretação de Copenhagen da mecânica quântica. Antes de tudo, é conveniente, se não primordial, fazer uma distinção entre o princípio de incerteza e as relações de incerteza, que são desigualdades matemáticas derivadas a partir do formalismo. As relações de incerteza não tem sido questionadas, assim como não o é o formalismo básico da teoria. Elas podem ser derivadas de várias maneiras, não só a partir do formalismo, mas também diretamente a partir da teoria das probabilidades e de outras formulações, algumas das quais veremos na secção seguinte. O que se questiona é o que se costuma chamar princípio de incerteza, segundo o qual o significado das relações matemáticas é uma limitação intrínseca na medição simultânea de dois observáveis que não comutam, quando efetuada sobre um mesmo e único sistema. Esta ligação da incerteza como uma relação referente a um único sistema não provém do formalismo, sendo um postulado "ad hoc" com consequências filosóficas muito importantes, ainda que contraditórias com relação à visão intuitiva clássica do mundo.

Faremos, então, uma distinção entre o princípio de incerteza e as relações de incerteza, já que o primeiro só é aplicável para Copenhagen. Para as interpretações estatísticas o que se tem são relações de dispersão estatística, relacionando os desvios-padrões característicos das distribuições de probabilidades dos dois observáveis. Veremos a seguir que tal ponto de vista parece ser mais afeito ao que se pode extrair do formalismo, acerca das relações.

Inicialmente, temos que recordar que na mecânica quântica, todas as previsões experimentais envolvendo um único sistema são de carácter probabilístico. Dado um sistema num certo estado $|\psi\rangle$ e um determinado operador A que representa um observável que se queira medir nesse sistema, o formalismo só nos indica as probabilidades de se obter cada um dos resultados possíveis. Para se fazer uma verificação dessas previsões estatísticas, é necessário, então, que se efetue um número relevantemente grande (a situação ideal seria um número infinito) de medições do mesmo observável, sob condições idênticas (todos os sistemas igualmente preparados em um mesmo estado $|\psi\rangle$), e tratar estatisticamente os resultados obtidos. Desse modo, para todos os resultados é possível determinar um valor médio (esperança estatística), que é o termo de comparação com as previsões da mecânica quântica e indica a ordem de grandeza dos valores do observável para os sistemas no estado $|\psi\rangle$, e um desvio-padrão (ou uma variância estatística) que de certo modo dá uma medida do espalhamento dos resultados em torno desse valor médio. No formalismo, o valor médio $\langle A \rangle$ do observável A é definido como sendo a média dos resultados obtidos quando se efetua um número infinitamente grande de medições sobre sistemas preparados num mesmo estado $|\psi\rangle$, e é dado pela expressão

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle.$$

Do mesmo modo, em analogia com a teoria das probabilidades (ver nota 6.2), temos no formalismo a definição do desvio-padrão ΔA da distribuição definida pela função densidade de probabilidade $\rho(x,t) = |\langle a | \Psi \rangle|^2$:

$$\Delta A = [\langle \Psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \Psi \rangle]^{1/2}$$

Como veremos na secção VI.2, as relações de incerteza podem ser escritas na forma geral

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |$$

onde B é um outro operador, representando no formalismo um observável \mathcal{B} . Se seguirmos a motivação para a definição do desvio-padrão dentro do formalismo, temos que as relações indicam um produto de desvios-padrões, e representam experimentalmente o seguinte procedimento: toma-se um ensemble de sistemas identicamente preparados num mesmo estado $|\Psi\rangle$ e mede-se em metade deles o observável A e na outra metade, o observável B ; ter-se-á assim duas distribuições estatísticas cujos desvios-padrões ΔA e ΔB sempre terão um produto limitado inferiormente, na dependência de comutarem ou não. É isso o que se pode extrair do formalismo, não havendo qualquer indício de que tal análise possa ser restringida a medições simultâneas sobre um único sistema, como ocorre na interpretação ortodoxa. Como analogia, não há sentido em se falar em desvio-padrão para uma só medição.

A análise que apresentamos sobre as relações de incerteza no formalismo é importante por mostrar que, a nível experimental a mecânica quântica é uma teoria estatística, em que é sempre necessário um grande número de medições, sobre um ensemble de sistemas identicamente preparados, para que se possa ter uma verificação de suas previsões. Popper (1967) e Blokhintsev (1977), entre outros, consideram que a mecânica quântica seja, por isso, uma generalização da mecânica estatística clássica. Essa característica da teoria deve ser sempre lembrada quando se analisa a interpretação de Copenhagen.

Antes de tratarmos das interpretações de Bohr e Heisenberg, e as estatísticas, que serão apresentadas na secção VI.3, faremos uma abordagem das derivações das relações de incerteza (sec. VI.2). Veremos que as relações podem ser derivadas tanto dentro do contexto do formalismo quanto fora dele, sendo expressões matemáticas aparentemente indiscutíveis no que tange à sua existência. Na secção VI.4 faremos um comentário sobre a importância do princípio de incerteza para a interpretação de Copenhagen, uma vez que é vital para a não refutação do princípio de complementaridade. Faremos também um breve comentário acerca de algumas consequências filosóficas do princípio.

Uma observação a ser feita é que trataremos aqui apenas das relações de incerteza que envolvem operadores bem definidos no formalismo quântico. A relação, conhecida como 4ª relação de incerteza de

$$\Delta E \Delta t \gg \hbar/2$$

não será abordada, uma vez que, além do problema de interpretação da relação propriamente dita, envolve o problema extra da não existência de um operador bem definido, no formalismo, para a variável tempo. Existem várias tentativas de definir um operador T para o tempo, sendo este um ponto de controvérsia não de interpretação, mas sim do estabelecimento do formalismo. Se levarmos em conta a opinião de Margenau e Park (1973), segundo a qual a introdução de um operador representando posição é uma consequência lógica de postulados filosóficos relacionados com a natureza do espaço, é de se estranhar a não existência de um operador tempo, o que mostra uma assimetria entre as variáveis que descrevem o espaço-tempo relativístico. Não entraremos, portanto, nos problemas relativos a essa relação, o que pode ser encontrado em Vorontsov (1981). Existem outras relações "problemáticas", mas que não nos interessam a nível dos fundamentos da mecânica quântica.

Como já se salientou na introdução deste capítulo, uma distinção deve ser estabelecida entre as relações de incerteza e o princípio de incerteza. O princípio de incerteza, como o denominamos, é a interpretação agregada e mesmo por vezes apresentada indistintamente das próprias relações, e que assim é tomado, em boa parte dos livros textos, como uma das características mais marcantes do mundo quântico. As relações são uma consequência do formalismo da mecânica quântica, o que não ocorre com o princípio de incerteza, que é uma interpretação 'ad hoc' do formalismo, segundo o ponto de vista da escola de Copenhagen. Nesta secção, trataremos das derivações das relações, explicitando algumas e apenas mencionando outras.

Um aspecto interessante com relação às derivações das relações de incerteza é a profusão dessas derivações, elaboradas das mais diversas maneiras, com maior ou menor generalidade, mas chegando sempre às mesmas relações, como para o caso de posição e momento:

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \hbar/2, \quad i: x, y \text{ ou } z. \quad (6.1)$$

VI.2.1 - Derivação das relações a partir do formalismo:

Não nos ocuparemos da derivação original de Heisenberg (1927), efetuada para o caso específico de posição e momento, mas faremos uma derivação mais geral, baseada na não comutatividade de dois operadores quaisquer do formalismo de Hilbert da mecânica quântica. Em um artigo publicado em 1929, Condon levanta algumas restrições quanto à possível extensão da validade das relações para quaisquer duas quantidades cujos operadores não comutam. No entanto, no mesmo ano, Robertson (1929) efetua a primeira derivação inteiramente geral, baseada na consideração da não comutatividade de dois operadores hermitianos quaisquer, salientando que a forma das relações de incerteza, ou a restrição que ela impõe para um determinado par de operadores, depende da forma do seu comutador.

A derivação de Robertson foi importante historicamente, uma vez que foi posteriormente adotada por muitos livros textos. No entanto, para efeito da exposição que faremos aqui da derivação, e posteriores generalizações das expressões obtidas, apresentaremos uma derivação baseada na efetuada por Born (1935).

Primeiramente, temos que o valor médio $\langle A \rangle$ de um operador A , para um sistema cujo estado seja descrito por uma função estado $|\Psi\rangle$ é, pelo formalismo da teoria, definido por

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

(6.2)

e é real sempre que o operador A for hermitiano. Daí temos que o valor médio do produto AA^\dagger , dado por

$$\langle AA^\dagger \rangle = \langle \psi | AA^\dagger | \psi \rangle = |A^\dagger | \psi \rangle|^2 \geq 0 \quad (6.3)$$

é sempre maior ou igual a zero, nunca sendo negativo.

Sejam A e B dois observáveis reais quaisquer, os quais são descritos pelos operadores hermitianos A e B , respectivamente. Assumamos a seguinte condição de linearidade:

$$\langle aH + bN \rangle = a \langle H \rangle + b \langle N \rangle$$

onde a e b são constantes reais, e H e N dois operadores hermitianos quaisquer, para os quais a condição sempre é válida. Definamos o seguinte operador:

$$D = H + iN, \quad \text{sendo} \quad D^\dagger = H - iN \quad (6.4)$$

que obedece à expressão (6.3): $\langle DD^\dagger \rangle \geq 0$ (6.5)

Sendo $H = A$ e $N = \lambda B$, onde λ é um número real, temos que

$$\langle DD^\dagger \rangle = \langle (A + i\lambda B)(A - i\lambda B) \rangle \geq 0$$

ou

$$\langle A^2 \rangle - i\lambda \langle AB - BA \rangle + \lambda^2 \langle B^2 \rangle \geq 0 \quad (6.6)$$

O mínimo da expressão acima é obtido derivando-se em relação a λ . o lado esquerdo da desigualdade, o que nos dá

$$-i \langle AB - BA \rangle + 2\lambda \langle B^2 \rangle = 0$$

qual seja, o valor mínimo da expressão é obtido quando λ assume o valor

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\langle AB - BA \rangle}{\langle B^2 \rangle}$$

Deste modo, substituindo λ em (6.6), temos que o valor mínimo assumido pelo termo à esquerda é

$$\langle A^2 \rangle - 1 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\langle AB - BA \rangle}{\langle B \rangle} \langle AB - BA \rangle \right\} - \frac{1}{4} \frac{(\langle AB - BA \rangle)^2}{\langle B \rangle} \langle B^2 \rangle \geq 0$$

$$\langle A^2 \rangle + \frac{1}{4} \frac{(\langle AB - BA \rangle)^2}{\langle B^2 \rangle} \geq 0$$

ou seja

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq - \left(\frac{\langle AB - BA \rangle}{2} \right)^2 \quad (6.7)$$

Se tomarmos $\Delta A = A - \langle A \rangle$ e $\Delta B = B - \langle B \rangle$ e substituirmos A e B em (6.7), levando em conta que

$$\Delta A \Delta B - \Delta B \Delta A = AB - BA$$

temos

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq - \frac{1}{4} (\langle AB - BA \rangle)^2$$

Definindo a "incerteza" nos valores de A e B como sendo os desvios-padrões dos observáveis correspondentes, isto é, como a raiz quadrada das variâncias estatísticas dos dois observáveis, que são definidos por

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle (\Delta A)^2 \rangle \\ (\Delta B)^2 &= \langle \psi | (B - \langle B \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle (\Delta B)^2 \rangle \end{aligned} \quad (6.8)$$

chegamos à expressão

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq - \frac{1}{4} (\langle AB - BA \rangle)^2$$

Se levarmos em conta que o valor médio do comutador de A e B é um imaginário puro (Born, 1935, p.400), o que também segue de (6.6), temos finalmente a expressão geral das relações de incerteza:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle | \quad (6.9)$$

Podemos, agora, obter as relações originais (6.1) para posição e momento, sabendo que o comutador é dado por $[x, p_x] = -i\hbar$, ou seja, $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$.

Deste modo, fica claro que as relações de incerteza nem sempre assumem a forma clássica, de forma que a desigualdade mais restritiva que se obtém para um determinado par de operadores dependerá de seu comutador (nota 6.1). Além disso, nesta derivação, não chegamos a fazer qualquer restrição quanto à comutatividade dos operadores, de modo que, quando os operadores são comutativos, o produto das incertezas é nulo.

Além da derivação apresentada acima, existem várias outras, a partir do formalismo, utilizando diferentes artifícios matemáticos, mas sempre chegando a uma expressão semelhante à que obtivemos (nota 6.2).

A expressão que obtivemos (6.9) não é a mais geral que se pode derivar. Um aperfeiçoamento muito importante da relação em questão foi efetuada por Schroedinger, ainda em 1930. Dentro do contexto da derivação que descrevemos acima, Schroedinger parte da assumpção mais geral de que

$$H = A + \alpha B \quad \text{e} \quad H = \lambda B,$$

de modo que

$$D = A + \alpha B + i\lambda B \quad \text{e} \quad D = A + \alpha B - i\lambda B.$$

Por um procedimento semelhante ao que utilizamos, chega-se à expressão

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left\{ \frac{\langle AB + BA \rangle}{2} - \langle A \rangle \langle B \rangle \right\}^2 + \frac{1}{4} \langle [A, B] \rangle^2$$

onde o primeiro termo do lado direito da desigualdade, em analogia com a teoria das probabilidades, pode ser definido como sendo (Feller, 1976, p.196) o quadrado da covariância dos observáveis associados aos operadores A e B (nota 6.3):

$$\text{Cov} (A, B) = \frac{1}{2} \langle AB + BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (6.10)$$

Portanto:
$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \text{Cov} (A, B) + \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle \quad (6.11)$$

sendo que $\text{Cov} (A, B) = 0$ sempre que A e B forem independentes entre si. Esta expressão é mais restritiva que a anterior, uma vez que, em geral, a covariância não se anula (nota 6.4). Segundo Golin (1985), a razão desta relação não ser bem conhecida se deve ao fato de se

utilizar as relações de incerteza na interpretação de observáveis que não comutam, assumindo-se que eles não possam ser medidos com precisão arbitrária. E sob este ponto de vista, as relações usuais são suficientes. Tanto Margenau e Hill (1961) quanto Golin (1985) apresentam exemplos em que a relação (6.9) não é suficiente.

Foram derivadas expressões ainda mais gerais que a de Schrodinger (Gamba, 1950), mas que não tiveram tanta repercussão quanto as duas aqui tratadas. Portanto, não nos ocuparemos delas. Uma abordagem ampla das derivações a partir do formalismo, assim como de outros aspectos ligados às relações de incerteza pode ser encontrado em Carruthers e Nieto (1968).

VI.2.2 - Derivações das relações fora do contexto do formalismo:

Existem algumas derivações das relações de incerteza derivadas dentro do contexto de uma determinada interpretação e que, portanto, se utilizam de uma nomenclatura ou mesmo de conceitos completamente estranhos ao formalismo estabelecido da mecânica quântica. O que nos leva a mencioná-las é justamente o fato de se poder chegar às relações de incerteza por caminhos bastante diversos, independente de se assumir uma ou outra interpretação. De uma certa maneira isso reforça a crença na realidade das relações, de que elas realmente descrevam algum aspecto da realidade física, muito embora não se saiba o quê, precisamente. A parte as discussões em torno do significado das relações de incerteza, ou mesmo da maior ou menor validade desta ou daquela interpretação, mencionaremos aqui, sem entrarmos em particularidades, uma dessas derivações, efetuada dentro do contexto da interpretação estocástica (Nelson, 1966).

Existem várias derivações das relações de incerteza utilizando os conceitos e a formulação da interpretação estocástica (de la Peña-Auerbach, 1972; de Falco et al, 1982; Golin, 1985), todas elas específicas para o caso de posição e momento. A representação matemática da mecânica quântica provida por esta interpretação se baseia em um processo de difusão $\xi(t)$ associado ao sistema quântico e, a partir dos aspectos cinemáticos dessa difusão, pode-se chegar às relações para posição e momento. Golin derivou, a partir desta formulação, as relações na forma derivada por Schrodinger

$$\Delta x \Delta p_x \geq \text{Cov}(x, p_x) + \hbar/2$$

mas assinala que o fato subjacente básico a estas relações é a não diferenciabilidade das trajetórias possíveis do sistema.

Uma outra derivação sob vários aspectos fora do convencional é devida originalmente a Deutsch (1983). Segundo Deutsch, exceto para o caso de observáveis canonicamente conjugados, as relações de incerteza (6.9) não expressam o princípio de incerteza, da maneira como o esquematizamos abaixo:

[incerteza no resultado de uma
medição simultânea de **A** e **B**]



[limite mínimo
irredutível]

e que se enquadra perfeitamente dentro do ponto de vista ortodoxo. Procurando por uma expressão algébrica que satisfaça a este princípio, e que obedeça a uma forma

$$\mathcal{U}(A, B, |\psi\rangle) \geq \mathcal{M}(A, B)$$

onde \mathcal{U} representa a incerteza, dependente dos observáveis e do estado do sistema, e \mathcal{M} o limite inferior procurado. Como medida da incerteza no resultado de uma medição ou preparação de um único observável discreto, utiliza-se não a variância, mas a "entropia de informação" (Khinchin, 1957), que representa a falta de informação em $|\psi\rangle$, acerca de medições posteriores que se possa fazer do observável:

$$S_A(|\psi\rangle) = - \sum_a | \langle a | \psi \rangle |^2 \ln | \langle a | \psi \rangle |^2$$

onde **a** são os autoestados do operador **A**. A partir dessas e outras considerações menos importantes aqui, chega-se a uma expressão bastante diferente para as relações de incerteza:

$$S_A(|\psi\rangle) + S_B(|\psi\rangle) \geq 2 \ln \frac{2}{1 + \sup (| \langle a | b \rangle |)}$$

Esta expressão foi posteriormente generalizada por Partovi (1983) e Srinivas (1985). Srinivas mostrou que para o caso de observáveis canonicamente conjugados, pode-se chegar a uma expressão entrópica formalmente similar à relação (6.9), onde um produto de entropias relativas a cada um dos observáveis é limitado inferiormente por um valor finito proporcional a **h**.

Finalizando, resta salientar que as relações de incerteza, na sua forma convencional, são também deriváveis a partir de considerações puramente probabilísticas, tratando os observáveis como variáveis aleatórias quaisquer (Herdan, 1952). Se tomamos duas variáveis aleatórias **X** e **Y**, relacionadas a um determinado sistema, temos definidas, pela teoria das probabilidades, uma série de grandezas que caracterizam estatisticamente essas variáveis. Definimos assim uma probabilidade, construímos uma função distribuição de probabilidades, a partir da qual definimos o valor médio de cada variável, e sua variância e desvio-padrão (Feller, 1976, cap.9). Se as duas variáveis dizem respeito a um mesmo sistema, define-se então o coeficiente de correlação de **X** e **Y** como sendo a covariância (nota 6.3) normalizada destas variáveis:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (6.14)$$

e que é nulo sempre que as duas variáveis são independentes (não correlacionadas), e sendo σ_x (e, analogamente, σ_y) o desvio-padrão da variável X , e que é definido por

$$\sigma_x = [\text{Var}(X)]^{1/2} = (E[(X - E(X))^2])^{1/2} \quad (6.15)$$

$E(X)$, por sua vez, é a esperança ou valor médio de X . Pode-se mostrar que

$$|\rho(X, Y)| \leq 1 \quad (6.16)$$

para quaisquer X e Y (nota 6.5), de modo que

$$|\rho(X, Y)| = \left| \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_x \sigma_y} \right| \leq 1 \quad (6.17)$$

ou seja,

$$\sigma_x \sigma_y \geq |E(XY) - E(X)E(Y)| \quad (6.18)$$

que é uma expressão formalmente semelhante à expressão (6.9) obtida por meio do formalismo da teoria quântica. Aqui, o produto dos desvios-padrões possuem um limite inferior que é dado pela covariância das duas variáveis aleatórias, e a condição para que este limite seja não-nulo é que as variáveis sejam correlacionadas. É certo que não poderíamos obter uma expressão idêntica a (6.9), uma vez que o comutador de duas variáveis aleatórias não está definido dentro do corpo da teoria das probabilidades.

O motivo pelo qual mencionamos estas várias derivações é o de ressaltar que a idéia de incerteza irredutível está bem presente no tratamento matemático da física quântica, o que não ocorria com a física clássica, sendo este um aspecto muito importante na distinção de ambas.

Uma vez abordadas as derivações das relações, vamos passar a tratar das suas interpretações. Muito embora as relações apareçam em determinadas formalizações e derivações numa forma diferente da convencional, as interpretações que apresentaremos se referem em especial às relações como formuladas em (6.9). O que realmente interessa em termos dos fundamentos da mecânica quântica é, se tais relações são realmente válidas, que tipo de restrição ou limitação epistemológica ela nos impõe. Primeiramente, exporemos os pontos de vista dentro da interpretação de Copenhague, em que se assume a incerteza como um princípio básico (princípio de incerteza) e, em seguida, as interpretações mais importantes formuladas em oposição àquela, em especial a de Margenau.

VI.3.1 - O ponto de vista ortodoxo:

A primeira interpretação das relações de incerteza foi apresentada por Heisenberg, em 1927, por ocasião da primeira publicação das relações. O ponto de partida de Heisenberg foi a consideração de que "todos os conceitos que são utilizados na física clássica para descrever os sistemas mecânicos podem, por analogia, ser definidos exatamente também para processos atômicos" (Jammer, 1974), de modo que para se definir um conceito seria necessário que se elaborasse um procedimento que pudesse medir a grandeza concernente a ele. Deste modo, para Heisenberg, uma vez que neste sentido quantidades canonicamente conjugadas, como posição e momento, podem ser definidos isoladamente, a incerteza deveria estar relacionada com a mensurabilidade dessas grandezas, para o caso de uma medição simultânea das mesmas. Assim, como salienta Heisenberg (1930), as relações se refeririam ao grau de indeterminação relativo ao conhecimento possível dos valores simultâneos dessas quantidades.

Para o caso de posição e momento, poderíamos enunciar a seguinte interpretação: não podemos medir posição e momento simultaneamente, num mesmo sistema, sem erros cujos produtos sejam no mínimo $\hbar/2$. Assim, quanto maior a precisão com que medimos a posição do sistema, maior a indeterminação em torno de seu momento, quando os medimos simultaneamente, e vice versa. De um modo mais geral, pode-se enunciar o ponto de vista de Heisenberg dizendo que: **dados dois observáveis A e B cujos operadores não comutam, não é possível que os meçamos simultaneamente, em um mesmo sistema, com precisão arbitrária.**

Essa interpretação é a mais comumente encontrada nos livros textos, assim como a sua justificativa. Heisenberg argumenta que a limitação nas precisões dos dois observáveis ocorrem porque o processo de medição de um deles provoca uma perturbação imprevisível e incontrollável no outro observável, e vice versa. E essa perturbação é assumida como sendo sempre suficientemente forte, de tal modo que as rela-

ções de incerteza sejam sempre verdadeiras. Para exemplificar esse processo de perturbação, Heisenberg (1930) elaborou um famoso experimento imaginário, considerando a determinação da posição de um elétron por meio de um microscópio.

Seja um microscópio esquematizado conforme mostra a figura 6.1, onde é representado por uma lente (objetiva) **AB**. Vamos supor que o elétron esteja no ponto **P** quando observado, de modo que o cone da luz espalhada por ele e que penetra pela objetiva do microscópio, propiciando a observação e conseqüente medição da posição, tenha uma abertura angular ϵ . Consideremos também que o feixe de luz utilizado esteja se propagando segundo a direção **x**, e seja monocromático com comprimento de onda λ .

O limite de precisão da posição do elétron é dado pelo poder de resolução do microscópio, que tomamos da ótica como sendo

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\text{sen } \epsilon} \quad (6.12)$$

já que a imagem de cada ponto do objeto é uma mancha de difração de dimensão finita. Assim, o feixe de luz incide sobre o elétron e a medição será concretizada se pelo menos um fóton for espalhado pelo elétron, penetrar pela objetiva e atingir o observador. E essa medição terá uma margem de erro dada por Δx .

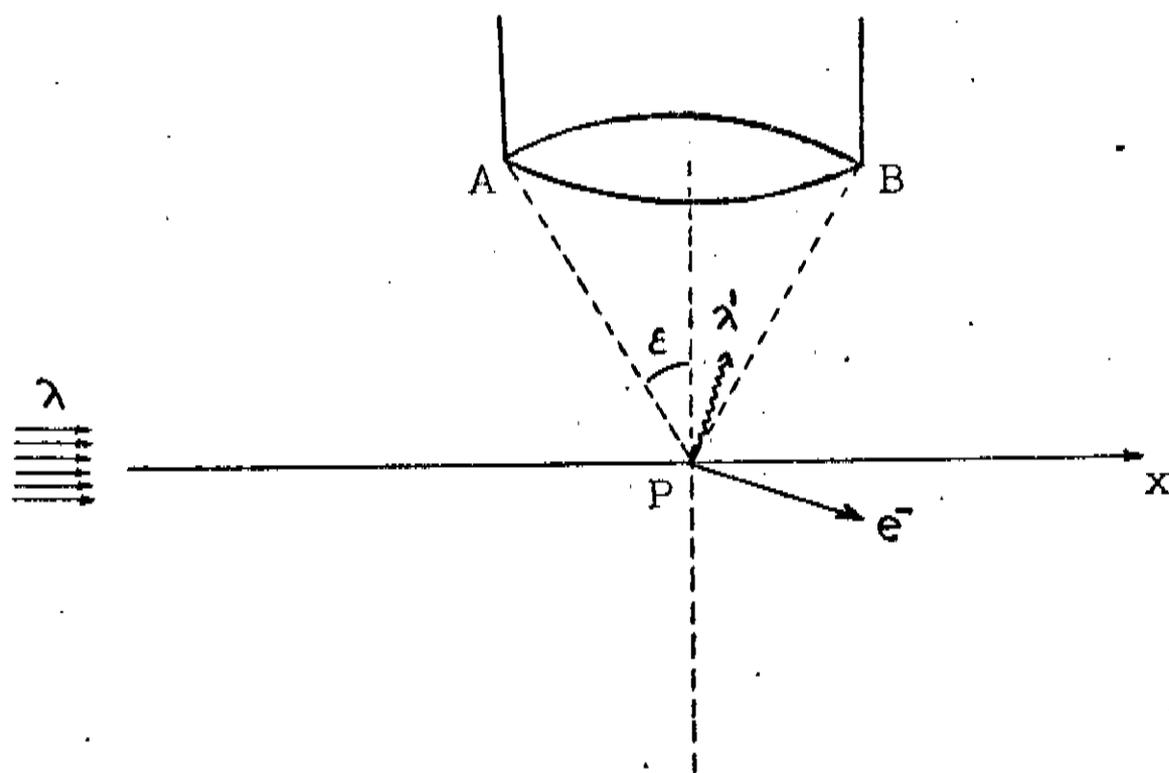


Fig. 6.1 - Esquema do famoso experimento imaginário elaborado por Heisenberg para justificar as relações de incerteza. AB é a objetiva do microscópio, λ' é o fóton espalhado que penetra pela objetiva.

No entanto, para que tal espalhamento ocorra, é necessário que o comprimento de onda λ que caracteriza o feixe seja pelo menos da mesma ordem de grandeza que o elétron, ou seja, a luz utilizada deve ser de frequência muito alta, na faixa da radiação γ . Uma vez que o espalhamento da luz é um processo quantizado (ou, poderíamos dizer, um fenômeno quântico), cada fóton atinge o elétron e transfere a ele um momento cuja intensidade é da ordem de h/λ (efeito Compton). Se considerarmos a situação em que a perturbação seja mínima, em que apenas um fóton atinge o elétron, saberemos que o momento total transferido é h/λ , mas a direção de propagação do elétron só fica definida dentro de um ângulo ϵ . Assim, há uma incerteza no momento transferido ao elétron, na direção x , que é dado por

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \sin \epsilon \quad (6.13)$$

e quanto mais precisa for a medição da posição (ϵ cada vez menor), mais importante se torna este termo, de modo que sempre se tem

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (6.14)$$

Não entraremos em detalhes quanto às discussões que envolvem este experimento imaginário e vários outros também propostos com a mesma finalidade, que são muitas (Brown e Redhead, 1981). Na seção VI.4, faremos um breve comentário sobre este experimento. Popper, um dos que mais criticam o ponto de vista ortodoxo, considera que o experimento extrapola as atribuições de um experimento imaginário, que para ele não deve jamais ter caráter apologético (Popper, 1972). Com esse experimento, Heisenberg procurou mostrar a irredutibilidade das incertezas. Mesmo que soubéssemos de antemão o momento do elétron, o ato de observação, a perturbação causada pelo fóton de alta energia necessário, apagaria parte desse conhecimento. Segundo Heisenberg (1930, p.20), "todo experimento destrói parte do conhecimento do sistema que se obtivera anteriormente". Assim, as relações de incerteza não se referem ao passado. Não podemos fazer uso dos resultados obtidos para determinar com precisão os valores antes da medição, pois para Heisenberg eles teriam apenas caráter especulativo, já que não seriam verificáveis.

Então, pelo ponto de vista de Heisenberg, as relações de incerteza implicam numa restrição epistemológica. "O erro experimental não representa - pelo menos dentro de certos limites - uma propriedade do elétron (sic), mas sim o conhecimento deficiente que temos acerca dele" (Heisenberg, 1958, p.20). Para Bohr, pelo contrário, a restrição seria ontológica. O princípio deveria ser compreendido dentro do contexto da dualidade onda - partícula. Do mesmo modo que estes aspectos só se manifestam de acordo com o aparato experimental utilizado na medição, posição e momento de uma partícula só estariam perfeitamente definidos simultaneamente caso houvesse um aparato experimental que o permitisse, o que até hoje não parece possível. Segundo Jammer (1974),

a posição de Bohr pode ser sustentada pelo argumento de que, para se derivar as relações de incerteza a partir de experimentos imaginários, como no caso do microscópio de raios γ , tem-se necessariamente que recorrer às relações de Einstein - De Broglie.

O ponto de vista de Bohr pode ser exposto da seguinte maneira: as incertezas na medição simultânea da posição e do momento existem porque posição e momento nem mesmo existem com valores simultâneos e perfeitamente bem definidos (Bohm, 1951, p.100). É interessante notar que para Bohm a motivação para enunciar de tal maneira o princípio de incerteza parte unicamente da formulação ondulatória da mecânica quântica, e da identificação quase literal da partícula com o pacote de ondas. Segundo Heisenberg (1967, p.98) para Bohr "uma completa explicação física deveria absolutamente preceder a formulação matemática", o que difere em muito da posição do próprio Heisenberg, para quem o formalismo matemático era prioritário com relação a toda consideração relativa à realidade objetiva.

De qualquer modo, os dois enunciados que mencionamos para o princípio de incerteza são duas posições distintas dentro do ponto de vista ortodoxo, e mesmo as suas implicações filosóficas são diferentes. Abordaremos alguns destes aspectos filosóficos na secção VI.4.

VI.3.2 - Interpretação estatística das relações de incerteza:

Naturalmente, uma diferença capital entre os pontos de vista ortodoxo e estatístico acerca das relações de incerteza é previsível, pela concepção completamente oposta que ambos assumem do estado quântico. Enquanto para os proponentes de Copenhague a limitação imposta pelas relações concernem a um único sistema, para a interpretação estatística as relações de incerteza também possuem conotação estatística, estando relacionadas a um ensemble de sistemas.

Se remontarmos ao capítulo II deste trabalho, temos que pelo formalismo da mecânica quântica, a única maneira de compararmos os resultados experimentais com uma previsão da teoria é por meio do valor médio do observável que se mede:

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

Fora isso, a teoria só fornece previsões probabilísticas acerca dos resultados possíveis. O valor médio de um observável é determinado experimentalmente efetuando-se a medição deste observável em um número muito grande de sistemas similarmente preparados ou, se se assume uma hipótese ergódica, efetuando várias vezes a medição sobre um mesmo sistema, o qual é ressubmetido ao processo de preparação antes de cada medição. Os valores obtidos estarão distribuídos pelos vários resultados possíveis para o operador e o estado em questão, obedecendo a uma distribuição de probabilidade determinada por $|\Psi\rangle$. A distribuição estatística dos resultados permite que se determine o seu desvio padrão ΔA . Desse modo, para a interpretação estatística, a relação (6.9), sendo a consideração acima análoga para um operador B,

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

(6.9)

expressa não uma impossibilidade de medição simultânea, ou mesmo de definição, dos dois observáveis relativos a um único sistema, mas que o produto dos desvios-padrões das distribuições estatísticas de A e de B não pode ser menor que o limite inferior imposto pela relação. Não há nenhuma restrição quanto a se considerar que, num determinado instante, uma partícula possua posição e momento bem definidos, mesmo que aparentemente seja impossível, na prática, medi-los. E mais, a relação não diz respeito a erros de medição, pois os desvios-padrões, como toda quantidade estatística, não tem significado se atribuídos a uma única observação (Margenau, 1963a). Não há nenhum impedimento quanto ao fato de que a medição de um observável possa causar uma perturbação no outro, como o quiz Heisenberg. Apenas as relações de incerteza não dizem respeito a este aspecto, por ser irrelevante no contexto estatístico.

Podemos dizer que, experimentalmente, a relação é tomada da seguinte maneira: aos observáveis A e B correspondem uma distribuição estatística dos resultados obtidos de medições realizadas sobre um grande número de sistemas (ensemble); essas medições são efetuadas de modo que, em cada um desses sistemas só se meça ou A ou B , de modo a eliminar a hipótese de perturbação; para os sistemas em que se mediu A , ter-se-á um desvio padrão ΔA , e correspondentemente para B ; o produto destes desvios - padrões é que sofre a restrição das relações de incerteza.

Um aspecto importante, do ponto de vista estatístico, é que, para que se possa determinar esses desvios-padrões, as medições indivi-

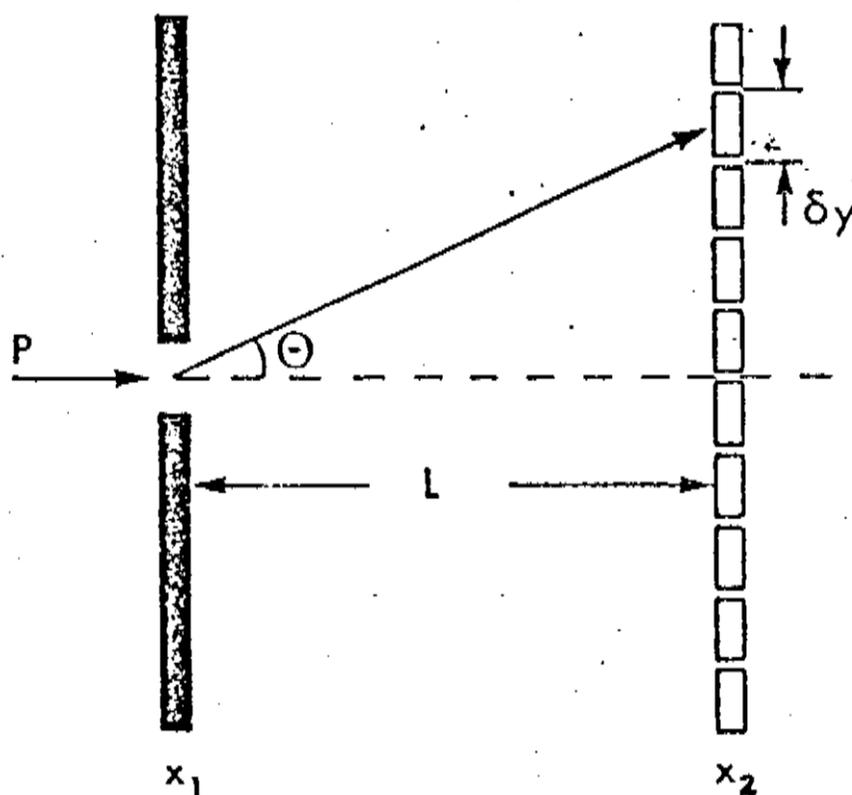


Fig. 6.2 - Arranjo experimental que ilustra a possibilidade de se medir simultaneamente a posição e o momento de uma partícula, de modo que o produto dos erros nas duas medições possa ser arbitrariamente pequeno. (Ballentine, 1970)

duais devem ter uma precisão tal, que os erros experimentais sejam bem menores que os desvios que queremos calcular. Podemos mostrar que as relações de incerteza não são obedecidas por esse erros experimentais. Tomemos como exemplo o experimento de difração por uma fenda, onde temos uma placa rígida x_1 , dotada de uma fenda, e um anteparo x_2 que detecta as partículas que o atingem (fig 6.2). Vamos supor que uma partícula com momento inicial p conhecido se dirija perpendicularmente à placa x_1 , passe pela fenda, sofra os efeitos de difração e seja detectada num ponto y do anteparo, com um erro experimental dado por δy . Por meio desta medição da coordenada y , temos também a componente correspondente do momento, $p_y = p \sin \theta$, com um erro dado por δp_y , o que é um método comumente utilizado para a medição de momento. Claramente vemos que, quanto maior for a distância L entre x_1 e x_2 , menor é o erro δp_y , que pode, em princípio, ser feito indefinidamente pequeno. Deste modo pode-se dizer que é possível termos $\delta y \delta p_y \ll \hbar$.

Esta interpretação estatística se fundamenta na reinterpretção do estado $|\Psi\rangle$ que descreve o sistema quântico. No entanto, segundo Gibbins (1981), o tratamento do problema por meio da lógica quântica requer que, mesmo se se considera que $|\Psi\rangle$ seja relativo a um único sistema, as relações de incerteza têm que ser interpretadas estatisticamente. O ponto de vista que expressamos tem como principais proponentes Margenau (1963b) e Prugovecki (1967), que interpretam as relações como referentes a uma limitação na preparação do estado do ensemble de sistema. Esta limitação justificaria o aparecimento das relações e da interpretação como a enunciamos há pouco.

Temos, aqui, que salientar a diferença estabelecida por este ponto de vista entre uma medição e uma preparação de estado. Segundo Margenau (1963b), "uma preparação de estado é qualquer operação física que assegure que, se um sistema for submetido a ela, ele passará a estar em um determinado estado quântico ($|\Psi\rangle$, ou uma mistura de $|\Psi\rangle$'s). Por sua vez, a medição é uma operação que produz um número (dentro de uma margem de erro experimental) que se refere ao estado imediatamente anterior à operação." A preparação de estado diz respeito a qualquer procedimento (ou conjunto de procedimentos) que produz um ensemble de sistemas estatisticamente reproduzível. Em geral um procedimento tal que, após a ele submetido, um sistema passa a ter o valor de algum observável que corresponda a um dos autovalores desse observável. Para Margenau, medir uma determinada quantidade física em um sistema é fazê-lo interagir com um aparelho adequado, por meio do qual obtemos um resultado que indica o valor dessa quantidade no instante imediatamente anterior à medição. Como salienta Ballentine (1970), as diferenças essenciais entre os dois conceitos é que a preparação de estados se refere ao futuro (ao que ocorre após o procedimento), enquanto que a medição se refere ao passado (ao estado antes da detecção); e enquanto a medição implica numa detecção do sistema, com uma conseqüente aniquilação do conhecimento de seu estado posterior, a preparação implica numa situação condicionada ao fato de o sistema "passar" ou não pelo aparato utilizado.

Para exemplificarmos como se manifesta essa diferença, vamos retornar à figura 3.1, que utilizamos quando tratamos da superposição

de estados. Temos um feixe de partículas preparadas no estado $|\Psi\rangle$ que, após passarem por um aparelho de Stern-Gerlach são detectadas em um anteparo, em uma das duas posições possíveis. Quando tratamos deste experimento, consideramos a produção do estado $|\Psi\rangle$ como sendo uma preparação de estado e a etapa que mencionamos acima como sendo o processo de medição. Pela distinção feita por Margenau, temos que neste processo, a passagem das partículas pelo aparelho de Stern-Gerlach é uma preparação de estado (uma re-preparação). Após passar pelo aparelho, cada partícula que o fizer estará com certeza em um dos dois autoestados de spin possíveis. Por este processo, não chegamos a ter conhecimento dos estados das partículas, o que só se concretizará com a detecção das mesmas no anteparo. A essa detecção podemos chamar de medição, no sentido de Margenau. Como se pode observar, a medição indica qual o estado do sistema no instante imediatamente anterior à detecção (portanto, refere-se ao passado), enquanto que a preparação indica que, após a provável passagem pelo aparelho, a partícula estará em um dos autoestados correspondentes à orientação escolhida.

Do mesmo modo, podemos dizer que no experimento imaginário de Heisenberg que descrevemos, a incidência de um fóton sobre o elétron nada mais é do que uma preparação de estado. Vamos supor que o momento do elétron tenha sido previamente determinado. Devido ao ângulo que representa a abertura finita do microscópio, não podemos determinar exatamente qual o momento transferido para o elétron pelo fóton, havendo um erro dado por (6.13) na determinação que fazemos. Portanto, o que podemos dizer é que, quando os fótons espalhados penetram no microscópio, o momento do elétron está dentro de uma faixa de valores definida por ϵ . Assim, a incidência do fóton sobre o elétron é uma preparação de estado de momento, ao invés de uma medição de momento. Nesse experimento, a única variável que medimos é a posição do elétron. Aqui podemos visualizar bem o significado do ponto de vista de Margenau, da incerteza relativa ao processo de preparação de estados. Se se repete muitas vezes o processo de preparação como o consideramos acima, teremos uma dispersão Δp no momento final das partículas, devida à imprecisão que salientamos. Certamente, a argumentação que apresentamos acima tem sentido se e assume a interpretação estatística do estado $|\Psi\rangle$, que é uma posição realista e objetivista.

Considerar a incerteza como devida à preparação de estados é asseverar que não podemos preparar um estado (isto é, um ensemble de sistemas) em que os desvios-padrões dos observáveis sejam menores do que é especificado pelas relações de incerteza. Um ponto de vista muito semelhante a este que mencionamos é defendido por Popper, para quem as relações de incerteza são, na verdade, relações de dispersão estatística. Segundo Popper, a mecânica quântica deve ser entendida como uma teoria probabilística, uma vez que os tipos de problemas que se supõe que a teoria resolva são problemas de caráter essencialmente estatístico. Daí o caráter estatístico das relações de incerteza, uma vez que não podemos preparar experimentos em que se reduza a dispersão estatística dos resultados a menos de um certo limite (Popper, 1967).

Ainda dentro do contexto das interpretações estatísticas, temos um outro ponto de vista cuja conveniência em mencionarmos está justamente no fato de estar ligada à teoria da dupla solução, de De Broglie. A teoria de De Broglie é uma teoria realista dentro do grupo

que convencionalmente chamamos de interpretação estatística, que consegue explicar, uma vez assumida, o paradoxo onda-partícula. O ponto de vista de De Broglie tenta dar uma interpretação das relações de incerteza dentro da teoria da dupla solução, que admite a coexistência de ondas e partículas. Vamos nos limitar à consideração das relações de posição e momento, uma vez que a extensão ao caso mais geral é obtida através do mesmo raciocínio.

Segundo De Broglie (1969), se se assume que a onda associada a uma partícula possui realidade física, então as variáveis x, y, z e t que aparecem na sua equação de propagação são as variáveis usuais de espaço e de tempo, e não possuem qualquer caráter aleatório. Se se admite também que a partícula está sempre localizada sobre a sua onda, a partícula tem, a cada instante, uma posição dada pelas coordenadas X, Y, Z , que tem caráter aleatório, o que implica num conhecimento impreciso da posição. Este caráter aleatório aparece devido à interferência da onda de condução (real) com o meio de propagação.

Para De Broglie (1964, p.58), na relação (6.14):

$$\Delta x \Delta p_x \approx h$$

Δx e Δp_x só são reais em estados diferentes da partícula. A grosso modo podemos resumir o argumento de De Broglie dizendo que a incerteza Δx realmente existe no estado inicial antes da medição do momento, enquanto que Δp_x é uma incerteza predita teoricamente, mas que só se torna real após a interação de medição. Eles não se referem a um mesmo estado. Assim, reformula a relação como

$$[\delta X]_i \cdot [\delta p_x]_f \approx h$$

onde $[\delta X]_i$ é o valor da incerteza da coordenada X da partícula antes da medição e $[\delta p_x]_f$ é a incerteza no valor da componente do momento após a interação com o aparelho que efetua a medição, sem que se conheça o resultado. Podendo a incerteza em X ser considerada como sendo igual ao comprimento Δx do 'trem' de onda inicial, ou seja,

$$\delta x = \Delta x$$

onde se ressalta a diferença de significado entre ambos. Desse modo, De Broglie conclui que o caráter das relações é puramente estatístico: "É muito mais natural considerá-las como simples incertezas devidas à nossa falta de conhecimento acerca dos verdadeiros valores de x e p . Deste modo, retornamos à tradicional idéia de probabilidade, que é introduzida devido à nossa ignorância de alguma coisa que existe objetivamente." (De Broglie, 1964, p.58).

VI.4 - A IMPORTANCIA DO PRINCÍPIO DE INCERTEZA PARA A INTERPRETAÇÃO DE COPENHAGEN

Uma vez apresentadas a derivação e as interpretações das relações de incerteza, faremos alguns comentários acerca dos vários pontos de vista, tanto no aspecto físico quanto no filosófico. Primeiramente, trataremos da importância do princípio de incerteza dentro da interpretação de Copenhagen, em especial, sua relação com os experimentos em que se evidencia o paradoxo onda-partícula.

VI.4.1 - O princípio de incerteza e o paradoxo onda-partícula:

Quando tratamos do paradoxo onda-partícula (cap. V), salientamos o fato de que a posição de Copenhagen acerca do problema se baseia no "princípio de complementaridade" formulado por Bohr. Por este princípio, em qualquer experimento que se conceba, é sempre possível mostrar que o caráter ondulatório e o corpuscular nunca se manifestam simultaneamente, de modo que a detecção de um aspecto característico de um sempre implica na impossibilidade da observação de um aspecto característico do outro. A justificativa dessa incompatibilidade experimental tem por base, sem excessão, o princípio de incerteza. É por meio do princípio de incerteza, quer no sentido de Bohr, quer no sentido de Heisenberg, ou em ambos, que a interpretação ortodoxa sustenta a validade experimental do princípio de complementaridade. Podemos ter uma boa representação da situação por meio do experimento de difração por duas fendas proposto por Einstein durante o 5º Congresso Solvay, em 1927. Este experimento imaginário está esquematizado abai-

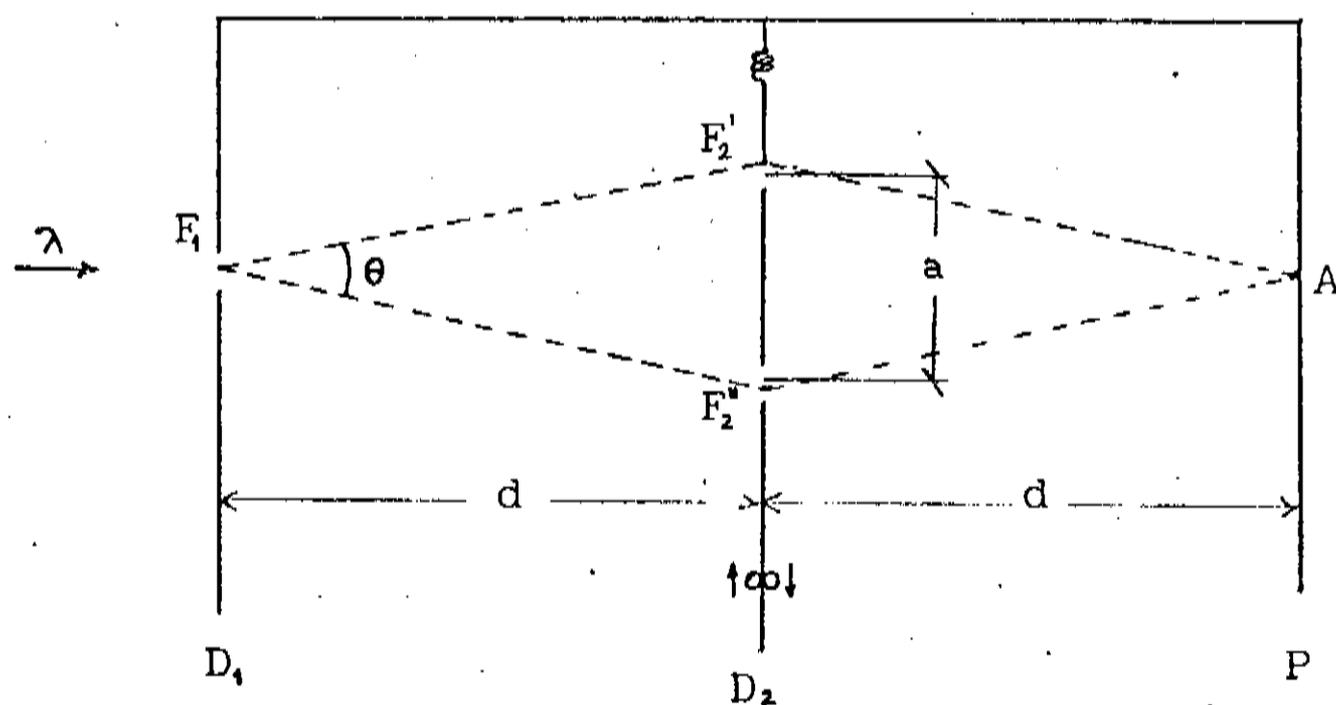


Fig. 6.3 - Esquema do experimento imaginário proposto por Einstein a Bohr, durante o 5º congresso Solvay, em 1927.

xo na figura 6.3. Tem-se duas placas fixas e paralelas, D1 e P, sendo que a primeira é dotada de uma única fenda F1 e a segunda, algum tipo de anteparo capaz de detectar a chegada de partículas individuais (chapa fotográfica). Equidistante, entre estas duas placas, tem-se uma terceira placa D2, dotada de duas fendas F2' e F2'' paralelas, separadas entre si por uma distância a , à qual é permitido, por estar suspensa por uma mola, efetuar movimentos na vertical. Supõe-se, também, que a distância a entre as duas fendas seja muito menor que a distância d que separa esta placa móvel das outras duas.

Primeiramente, se a placa D2 é fixa, então o que se observa é a detecção individual de cada 'partícula' num determinado ponto da placa P e que, à medida que o número de partículas detectadas aumenta, o conjunto das detecções individuais forma um padrão de interferência. Neste experimento, fora a detecção pontual, nenhum outro aspecto corpuscular é verificável; em especial, não temos como saber a trajetória da partícula, por qual das fendas ela passou. Verifica-se apenas o aspecto ondulatório, isto é, o aparecimento das franjas de interferência.

Tomaremos agora a proposta de Einstein, onde a placa D2 é deixada suspensa e móvel de modo a podermos, por meio de seu movimento de recuo, determinar por qual das fendas passa cada partícula e, ainda assim, termos o padrão de interferência. Assim, se a placa se desloca para baixo (para cima), implica que a partícula passou pela fenda F2'' (F2'), o deslocamento da placa sendo considerado mínimo. Por este meio, teríamos então aspectos ondulatórios e corpusculares coexistindo, o que implicaria numa refutação do princípio de complementaridade.

No entanto, Bohr refutou a argumentação de Einstein tratando a placa D2 como um objeto quântico (o que é paradoxal, se nos lembramos de sua posição quando tratamos do problema de medição, na sec. III.4.2), e portanto sujeita às relações de incerteza (Brown, 1981). Segundo Bohr, a diferença na transferência de momento nos dois casos possíveis (passagem por F2' ou F2'') seria $\Delta p = p \theta = h\theta/\lambda$, e qualquer tentativa de se medir o momento transferido à placa, com uma precisão suficiente para medir Δp , envolveria obrigatoriamente uma medida da posição da placa D2. Tal medida de posição, pelas relações de incerteza, teria uma incerteza mínima de pelo menos $\Delta x = h/\Delta p$, ou seja,

$$\Delta x = \lambda/\theta$$

que é justamente a distância entre duas franjas sucessivas de interferência, no anteparo P (Jenkins e White, 1957, p.237). Assim, uma medida do momento com precisão suficiente para determinar por qual das fendas passa cada partícula implica, pelo princípio de incerteza, numa imprecisão da posição de D2 suficiente para que não se verifique o padrão de interferência.

Deste modo, utilizando-se o princípio de incerteza, é sempre possível mostrar a validade do princípio de complementaridade. Existem vários outros exemplos de experimentos em que se tenta refutar a com-

plementaridade, mas quase sempre se esbarra no princípio de incerteza. Wootters e Zurek (1979) analisam variações do experimento de dupla fenda, como para o caso em que uma fenda é muito maior que a outra, sendo muito mais provável a sua passagem por uma das fendas do que pela outra. Segundo a sua análise desta situação, mesmo quando temos uma probabilidade de que **99%** dos fótons passem pela fenda maior, o caráter ondulatório é ainda suficientemente forte para gerar um padrão de interferência de boa visibilidade. Mas, ainda assim, embora saibamos que **99%** dos fótons passam por uma só fenda, esbarramos no princípio de incerteza, uma vez que para cada fóton detectado no anteparo não podemos dizer por qual fenda ele passou, e nem mesmo se eles realmente passaram por apenas uma delas (Brown, 1981).

Uma perspectiva talvez mais promissora no sentido de se tentar refutar a complementaridade, sem esbarrar no princípio de incerteza, seriam as experiências de interferência tipo "delay choice" (escolha demorada), proposta por Wheeler (1978), onde a escolha em se medir a trajetória dos fótons ou obter o padrão de interferência é feita após o fóton estar dentro do interferômetro. No entanto, se nos lembrarmos da idéia de Bohr da totalidade do fenômeno quântico, de que não tem sentido em se falar de aspectos de um sistema sem que antes se escolha o que medir, certamente os experimentos mencionados, e que foram realizados, não têm um aspecto crucial. Como vimos quando estudamos o paradoxo de EPR (cap. IV), é o aparelho quem define que comportamento terá o sistema. Não há sentido, para Bohr, em se falar no que ocorre entre a preparação do estado e a detecção.

Deste modo, podemos observar que o princípio de incerteza é fundamental para a interpretação de Copenhagen, a fim de assegurar a validade do princípio de complementaridade, que é, certamente, o ponto crucial da interpretação. E, como já ressaltamos anteriormente, o paradoxo onda-partícula é o principal "mistério" acerca do mundo microscópico.

IV.4.2 - Implicações filosóficas do princípio de incerteza:

O princípio de incerteza como o enunciámos, quer como uma limitação epistemológica (Heisenberg), quer como uma limitação ontológica (Bohr) acerca da realidade física como classicamente concebida, é responsável por profundas modificações em aspectos até então considerados como características essenciais do mundo físico. Quando abordamos o paradoxo de EPR e a desigualdade de Bell, salientamos que traços característicos da mecânica quântica, como interpretada por Copenhagen, eram, principalmente, as violações de realismo e da localidade embutidas em sua descrição do experimento de EPR - Bohm, e que podemos considerar como sendo uma característica intrínseca da interpretação. Certamente, a não-localidade não é uma consequência pura e simples do princípio de incerteza e tem uma conotação mais experimental (prática) do que filosófica. Mas é um conceito essencial para a física clássica, uma vez que forma a base de suas teorias. Como já mencionamos antes, não se concebe em física clássica a existência de processos instantâneos, incluindo aqui a transmissão instantânea de informação entre um ponto e outro do espaço, separados arbitrariamente entre si.

Já com relação à descrição não-realista que é consequente da interpretação de Copenhague, o papel do princípio de incerteza é fundamental. Realismo é uma concepção filosófica que poderíamos enunciar, a grosso modo, como sendo uma "crença" na existência de "alguma coisa", que independe tanto do nosso conhecimento quanto de que o queiramos medir, mas que no entanto influencia nos resultados de quaisquer medições que queiramos efetuar (d'Espagnat, 1984). A essa "alguma coisa" chamamos realidade, cuja cognoscibilidade não precisa ser necessariamente assumida. Aqui, é conveniente lembrar que, como formulado por Heisenberg, o princípio de incerteza não traz explicitamente estampado esse caráter não-realista. Esse aspecto é intrínseco na relação de Bohr que, sob todos os aspectos, é muito mais radical do que a de Heisenberg. Dizer que não é possível medir simultaneamente num mesmo sistema dois observáveis que não comutam não necessariamente implica no fato de que esses observáveis não representem qualidades distintas coexistindo simultaneamente no sistema. Do mesmo modo que afirmar que essa impossibilidade se deva a uma perturbação mútua entre as duas medições não tem qualquer laivo de não-realismo. Esta é uma posição que serviria até mesmo para justificar a probabilidade quântica como sendo uma probabilidade de ignorância, mas irredutível para o caso de medidas simultâneas. Muito embora Heisenberg considere, certamente influenciado por Bohr, que fora o ato de observação e obtenção de um resultado, tudo o mais seja mera especulação envolvendo concepções subjetivas acerca do mundo, a sua formulação do princípio de incerteza não encerra o sentido 'revolucionário' embutida na de Bohr. É muito difícil saber qual dos dois enunciados é mais seguido mas, com toda certeza, o enunciado de Bohr é mais coerente com o tipo de argumentação que se faz dentro da interpretação de Copenhague acerca de problemas fundamentais da mecânica quântica. Esse enunciado traz implícito o não-realismo, já que o fato de não se poder definir simultaneamente dois observáveis, por sua vez, vem da concepção de que as propriedades só existem em função de um aparelho de medida. É, justamente, a mesma concepção por trás do princípio de complementaridade, e que torna a interpretação muito flexível na explicação dos experimentos que se tenta propor para refutá-la. Desse modo, temos que uma concepção realista do mundo tem que ser abandonada se se acata o princípio de incerteza, principalmente como enunciado por Bohr.

O princípio de incerteza encerra, também, a negação de um outro aspecto básico do mundo e dos fenômenos físicos como entendidos classicamente: a causalidade. Durante os primeiros anos da década de 1920, e mesmo antes, as discussões em torno do princípio de causalidade foram muito intensas, envolvendo a grande maioria dos físicos mais representativos da época. Forman (1971) faz uma abordagem dessas discussões, que certamente foram muito importantes na formação do "estado de espírito" que levaria à ruptura representada pela interpretação de Copenhague. No entanto, é difícil abordar, sem entrar em detalhes, o cerne da controvérsia. O próprio conceito de causalidade, como relata Forman, é difícil de ser enunciado, por não haver uma concepção sua unanimemente aceita. Vamos nos fixar numa concepção de causalidade ligada à idéia de 'causa e efeito', tomando apenas dois pontos de vista, já que não nos aprofundaremos na questão. Heisenberg (1927), quando apresentou o princípio de incerteza, assinalou que "desde que todos os experimentos obedecem às leis quânticas e, conseqüentemente, às rela-

ções de incerteza, a incorreção da lei de causalidade é uma consequência definitivamente verificada da própria mecânica quântica" (cit. Jammer, 1974, p.75), enunciando a idéia de causalidade como sendo a de que o exato conhecimento do presente permite que se calcule o que ocorrerá no futuro. Já para Schillick (1931), o princípio de causalidade não implica diretamente na regularidade do universo, mas representa uma exigência ou necessidade de se procurar esta regularidade, de descrever os fenômenos mediante leis. Nesse sentido, o princípio seria inútil e sem qualquer finalidade, uma vez que o princípio de Heisenberg o torna impossível de ser obedecido.

Várias outras opiniões foram emitidas acerca da relação entre o princípio de incerteza e a causalidade, mas o fato de se considerar a incerteza como devida a uma perturbação entre as medições não implica, em princípio, numa refutação da causalidade, mesmo se pensada em termos de causa e efeito. A não ser que se considere válidas, a nível de fundamentação da teoria, refutações de ordem teleológica de um princípio tão importante como o da causalidade. Mais uma vez, a posição de Bohr se mostra mais radical, uma vez que, não atribuindo propriedades intrínsecas aos sistemas microscópicos, só permite referências significativas a efeitos e não a causas.

* * * * *

Como pudemos verificar, as interpretações das relações de incerteza se adaptam perfeitamente bem dentro de cada ponto de vista. No entanto, o próprio formalismo, quando trata da medição de um observável, sempre faz previsões em termos de valores médios, de modo que interpretações como as de Bohr e Heisenberg são extrapolações que não são deriváveis do formalismo. A interpretação estatística formula um ponto de vista muito mais próximo do formalismo, que não traz também qualquer problema com relação a realismo e causalidade. No entanto, temos que ressaltar sempre este aspecto, a interpretação de Copenhague não tem problemas com o paradoxo onda-partícula. Assim, o critério de verdade que definirá o que realmente significam as relações de incerteza, é a solução do paradoxo onda-partícula.

VII - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos, assim, os principais aspectos relativos à pesquisa que se tem feito acerca dos fundamentos da mecânica quântica ou, de uma maneira mais geral, da natureza da própria realidade descrita por esta teoria. Muito embora não existam conclusões definitivas em torno de qualquer dos pontos debatidos, pôde-se notar que, passo a passo, as tentativas de se agregar ao formalismo quântico uma interpretação alternativa à de Copenhagen se vêem cada vez mais restringidas, limitadas pela não verificação experimental de algumas de suas prerrogativas. Em especial após os últimos experimentos relacionados com a desigualdade de Bell.

Fazendo uma análise final, procurando apenas enfatizar a importância de se discutir os fundamentos como forma de chegarmos ao conhecimento da realidade física, temos alguns aspectos a considerar. Primeiramente, o mais importante deles, se relaciona à solução do problema que denominados por dualidade onda-partícula. Independentemente de se adotar uma posição a favor ou contrária à complementaridade de Bohr, o conhecimento do que realmente são esse fenômenos que ora se manifestam como localizados, corpusculares, e ora como sendo estendidos, ondulatórios, é essencial para que se possa compreender a própria estrutura do universo. Se são manifestações complementares relativas a um mesmo fenômeno, resta ainda saber que fenômeno é este.

Quando assumimos uma postura realista, como a definimos classicamente, procuramos uma estrutura física com propriedades bem definidas, objetivas, que se comporte dualisticamente em função da situação experimental a que é submetida. No entanto, não existe, classicamente, nenhuma evidência conclusiva que nos leve a refutar a hipótese de que as propriedades que observamos sejam apenas decorrentes da interação dessa estrutura física com o aparato experimental que utilizamos. Certamente uma tal concepção de realidade não elimina a possibilidade de existirem propriedades intrínsecas para tal estrutura, ainda que menos explícitas que as classicamente assumidas, que permitam a sua interação com os aparelhos de medição. Uma tal realidade não é contraditória com o princípio de complementaridade, que seria então mais bem compreendido na maneira como enunciado por Fock (1962) - ver sec. III.2.4. Sob este aspecto, a mecânica quântica pode ser tomada como sendo uma teoria realista, muito embora isto não seja assumido pelos proponentes de Copenhagen.

O que o trabalho de Bell fez evidenciar é que, se assumimos uma concepção realista, só são possíveis teorias deterministas equivalentes à mecânica quântica que sejam não-locais. Pelo menos é o que parecem indicar os resultados dos experimentos já realizados. Muito embora existam muitas discussões em torno da conclusibilidade de tais experimentos, temos que considerar que, em física, até não serem refutadas, são as evidências experimentais quem condicionam os critérios de aceitação de um determinado ponto de vista. E, até aqui, a realidade quântica tem se mostrado ser não-local. Isto, sem se levar em conta o fato de que as teorias de variáveis escondidas já formuladas e que

tem previsões totalmente compatíveis com as da mecânica quântica, como as de Bohm e de Bohm-Bub, são teorias não-locais.

Um segundo ponto que gostaríamos de considerar, se liga ao fato de que existem várias tentativas de se tentar compreender a mecânica quântica à luz das teorias físicas mais modernas. Em um artigo deveras interessante, Ne'eman (1985) salienta que as características não-locais da mecânica quântica, como manifestadas em situações do tipo EPR, apresentam similaridades com as características gerais das modernas "teorias de calibre" (**gauge theories**): a eletrodinâmica quântica, a teoria das interações fracas de Weinberg-Salam, a cromodinâmica quântica, e também a teoria da relatividade geral. Em um outro trabalho, Cramer (1980) propõe uma explicação do paradoxo de EPR utilizando uma forma generalizada da teoria dos absorvedores de Wheeler-Feynman, discutindo, em especial, a questão da causalidade. Ou seja, existem tentativas de enquadrar os aspectos controversos da mecânica quântica dentro do contexto de teorias mais recentes. Mesmo em tentativas dentro da interpretação estatística, como a de Buonomano (1980, 1985), busca-se enquadrar o fenômeno quântico dentro de um contexto macroscópico de efeitos cooperativos, tentando explicar o caráter probabilístico da teoria de um ponto de vista de teorias como a mecânica estatística de não-equilíbrio. De qualquer modo, grande parte destas teorias modernas se relacionam com a mecânica quântica, de forma que a sua eficácia poderia ser uma evidência a mais a favor da concepção de mundo não-local a que nos leva a mecânica quântica.

Finalmente, deve-se considerar que a desigualdade de Bell e os resultados experimentais indicam que, se for possível assumir a existência de teorias de variáveis escondidas compatíveis com a mecânica quântica e que sejam deterministas, elas devem ser ou não-realistas, ou não-locais, ou ambos. Como vimos anteriormente, é mais razoável assumirmos a não-localidade, já que não há nenhuma razão física evidente que a impeça de ser assumida.

No entanto, podemos ainda considerar a existência de uma realidade objetiva que possa ser descrita deterministicamente por meio de leis causais. Mas, para tal, é necessário redefinirmos causalidade de modo a torná-la compatível com a não-localidade, assim como adotarmos uma concepção da realidade cujas propriedades aparentes dependam, em parte, do aparelho que as fazem se manifestar.

Desse modo, o que as evidências experimentais parecem nos mostrar é que nem a "realidade quântica" é tão exótica como a faz parecer a interpretação de Copenhagen, nem tão compartimentalizada como o era o realismo clássico. De qualquer maneira, conhecer esta realidade é essencial para a física, e não deve ser posta de lado como sendo apenas uma questão metafísica. É nesse aspecto que as discussões em torno dos fundamentos da mecânica quântica são importantes, e podem nos levar a respostas inesperadas acerca da realidade do mundo em que vivemos.

APÊNDICES

AP.1 - O formalismo quântico da medição

AP.2 - Experimentos que sustentam a concepção do estado quântico como superposição

AP.3 - Derivação da função de correlação da Mecânica Quântica

AP.4 - Comentários sobre a prova de Von Neumann da impossibilidade de termos teorias de variáveis escondidas

AP.5 - Outras derivações da desigualdade de Bell

A primeira formalização do processo de medição na mecânica quântica foi efetuada por von Neumann (1932), e serviu de base para todas as teorias de medição subsequentes. O desenvolvimento que apresentaremos aqui é, em essência, o de von Neumann, e para tal nos basearemos em Ballentine (1970).

É razoável dizer que, em essência, uma medição consiste em fazer interagir um objeto (do qual queremos determinar alguma quantidade física) e um aparelho, de tal modo que haja uma correspondência entre o estado inicial do objeto e o estado final do aparelho (que é dado, por exemplo, por um número num mostrador). Pensada deste modo, a medição pode ser descrita matematicamente de uma maneira simples.

Segundo Ballentine (1970), podemos descrever a medição do seguinte modo. Seja R o observável que descreve uma quantidade física R que se deseja medir no objeto, o qual denotaremos por I . Uma vez que vamos medir R , o formalismo da mecânica quântica limita os resultados obtíveis aos autovalores r do operador R , que são dados pela equação

$$R |I, r\rangle = r |I, r\rangle \quad (A1.1)$$

onde $(|I, r\rangle)$ é a base de autovetores do operador em questão. Vamos supor, ainda, que o estado inicial do objeto, $|\Psi\rangle$, não seja um autoestado de R , mas sim, uma superposição linear de seus autoestados:

$$|\Psi\rangle = \sum_r |I, r\rangle \langle r | \Psi \rangle \quad (A1.2)$$

Quanto ao aparelho, que denotaremos por II , temos os seus estados dados por $|\text{III}, \alpha\rangle$, de tal modo que α esteja diretamente relacionado com a leitura que fazemos no aparelho (e.g., a posição de um ponteiro). Assim sendo, convençionamos que o estado inicial seja dado por $|\text{III}, 0\rangle$, de tal modo que o valor final de α , α_r , que meçamos, esteja em correspondência biunívoca com o valor inicial de r correspondente a um dos autovalores de R .

Temos, então, dois sistemas (objeto e aparelho) que podem, em seu estado inicial, ser representados pelo estado

$$|I, \Psi\rangle |\text{III}, 0\rangle \quad (A1.3)$$

do sistema conjunto. Quando escrevemos o sistema conjunto sob a forma de um produto tensorial, levamos em conta que os operadores que representam as variáveis dinâmicas do objeto comutam com os operadores que representam as variáveis dinâmicas do aparelho (Messiah, 1964, p.253). Portanto, quando escrevemos o estado conjunto nesta forma de produto

cartesiano (temos a base de autovetores para o espaço de Hilbert do sistema conjunto), temos implícito que em tal estado o sistema e o aparelho estão não-correlacionados, ou seja, estão numa condição em que podem agir como se fossem isolados, independentes e distinguíveis (deWitt, 1970).

Para que o aparelho forneça alguma informação acerca do objeto, é necessário fazê-los interagir, acoplá-los por um certo período de tempo, sendo o resultado final deste acoplamento descrito pelo operador evolução, unitário, U , que podemos definir como

$$U(t) = \exp(-iHt/\hbar) \quad (A1.4)$$

para o caso de H , o hamiltoniano do sistema composto e que contém o acoplamento, não depender do tempo. Deste modo, a 'equação de movimento' do sistema é dada por

$$U |II, \psi\rangle |III, 0\rangle = \sum_r \langle r | \psi \rangle |II, r\rangle |III, \alpha_r\rangle \quad (A1.5)$$

desde que o observável R não seja mudado pela interação. A expressão seria mais geral se considerássemos que a medição interfere no observável, como o considerou Landau (Landau e Peierls, 1931):

$$U |II, \psi\rangle |III, 0\rangle = \sum_r \langle r | \psi \rangle |II, \phi_r\rangle |III, \alpha_r\rangle \quad (A1.6)$$

sendo então o estado final do sistema dado por $|II, \phi_r\rangle$.

De um modo geral, os proponentes do ponto de vista ortodoxo não consideram esta generalização de Landau, assumindo que, após a medição, o estado do sistema deve corresponder a um dos autoestados de R . Araki e Yanase (1960) mostraram (muito embora, segundo Jammer, não livres de objeções) que a correção de Landau pode ser desprezível, de modo que (A1.5) pode ser aproximada com uma precisão tanto maior quanto maior for o aparelho frente ao objeto. Vamos reescrever (A1.5) uma vez que, como se pode observar, a ação do operador evolução sobre o estado inicial do sistema conjunto leva a uma superposição de estados:

$$\begin{aligned} U |II, \psi\rangle |III, 0\rangle &= \sum_r \langle r | \psi \rangle |II, r\rangle |III, \alpha_r\rangle \\ &= |II + III, f\rangle \end{aligned} \quad (A1.7)$$

ou seja, (A1.7) representa o estado final do sistema acoplado, que é uma superposição coerente de estados correspondentes a diferentes valores de α . O estado mostra uma situação bastante paradoxal, uma vez que o que se verifica experimentalmente é o aparelho de medição dar, em seu mostrador, um único resultado bem especificado. Para contornar

este problema, von Neumann e, posteriormente, os defensores do ponto de vista ortodoxo, assumiu a dualidade no comportamento do sistema: o estado do sistema composto evolui temporalmente segundo leis causais, exceto no caso de uma medição, quando ocorre a redução do estado superposto. Não se consegue chegar, matematicamente, ao estado medido

$$II, r' \rangle III, \alpha_r \rangle, \quad (A1.8)$$

onde α_r é a leitura no mostrador do aparelho, a partir da equação de Schroedinger (ou do operador evolução). Deste modo, introduziu-se a "redução do pacote de ondas" como um postulado especial da mecânica quântica, o postulado de projeção: "Se a medição da quantidade física R sobre o sistema no estado $II, \Psi \rangle$ dá um resultado r , o estado do sistema imediatamente após a medição é a projeção normalizada de $II, \Psi \rangle$ sobre o auto-subespaço associado a r " (Cohen-Tannoudji et al, 1977, p.221).

Quando se fala em interpretações dentro do contexto ortodoxo, deve-se ter em mente que é este segundo ponto que se tenta esclarecer. Ou seja, justificar a introdução do postulado de projeção, assumindo também que o vetor estado descreva um sistema individual. A primeira justificativa proposta foi a do próprio von Neumann, o introdutor do postulado. Jammer (1974) faz um resumo do ponto de vista de von Neumann, ressaltando a posição do mesmo frente aos aspectos mais controversos que surgem durante a formulação de sua própria teoria de medição. De um certo modo, a descrição do processo feita neste capítulo segue essa formulação. Afora as considerações acerca da já discutida dualidade na evolução do estado, é importante notar que no tratamento de von Neumann, o aparelho de medição é tido como um sistema quântico. Para ele, a transição de (A1.7) para (A1.8), que deveria ser descontínua, não causal e instantânea, seria um elemento irredutível da teoria, não podendo ser descrita por meio de uma mudança contínua, e acreditava que, imediatamente após a medição do observável, o sistema assumiria um autoestado correspondente ao valor medido. Foi Margenau (1958) quem denominou esta hipótese de postulado de projeção.

Para evitar a contradição direta entre o resultado assumido pelo postulado e o resultado obtido pela análise do processo de medição, da interação entre sistema e aparelho (que leva ao estado descrito pela eq. A1.7), von Neumann introduz um segundo observador (III) que, no ato de observar (medir) o sistema $I + II$, reduz-lhe o estado de

$$II + II, f \rangle = \sum_r \langle r | \Psi \rangle II, r \rangle III, \alpha_r \rangle, \quad \text{para } II, r' \rangle III, \alpha_r \rangle;$$

e mostra que não faz diferença se o aparelho é visto como parte do sistema observado ou parte do observador (Ballentine, 1970). No entanto, uma análise da situação mostra que, mesmo com esse segundo observador não se contorna o problema, uma vez que se pode descrever agora $I + II$ como o objeto de medição, e III como o aparelho, e se obter uma expressão semelhante a (A1.7). Pela teoria de von Neumann, seria então

necessário um novo observador para observar III que, no dizer de deWitt (1970), se encontraria incapacitado de se decidir por qual valor encontrar para o observável medido. Uma vez que o processo se estende "ad infinitum", tem-se o que se costuma chamar 'catástrofe da regressão infinita' de von Neumann.

Von Neumann acreditava ser impossível formular uma teoria da medição quântica consistente e completa, sem referência à consciência humana (Jammer, 1974). Pontos de vista formulados nestes termos foram, posteriormente, desenvolvidos por London e Bauer (1939) e por Wigner (1962, 1963), introduzindo o observador como parte fundamental do processo de medição. Para Wigner, a entrada do sinal da medição na consciência do observador seria o responsável pela ruptura da cadeia de regressão.

Uma outra justificativa, de caráter empírico, defendida por Dirac (1958), para a introdução do postulado de projeção, assevera que se se efetuasse uma segunda medição do mesmo observável imediatamente após a primeira medição, obter-se-ia sempre o mesmo resultado. No entanto, Margenau (1958, 1963a, b) tece críticas a esta justificativa, atentando para a necessidade de se distinguir entre uma preparação de estado e uma medição, principalmente pelo fato de uma medição ter implícita em si uma detecção do objeto por algum tipo de aparelho, que sempre termina por destruir o seu estado anterior. Portanto, tal justificativa implica num processo que, em princípio, é impossível de se ter factível. No capítulo relativo ao 'princípio de incerteza' se analisará com mais profundidade essa diferença.

Deve-se ter em mente que não delimitamos sob a égide de 'Interpretação de Copenhagen' um ponto de vista único. Temos vários pontos de vista, sob vários aspectos diferentes, dentro de Copenhagen. Diferentemente de von Neumann, tanto Bohr quanto Heisenberg tinham visões bem distintas acerca da questão.

Um ponto característico do desenvolvimento de von Neumann é o tratamento que faz da teoria quântica, como uma teoria mecânica apropriada aos sistemas mecânicos do domínio microscópico, com um significado ontológico análogo ao da mecânica clássica (Bub, 1971). Von Neumann procura prover um argumento por meio do qual o efeito de medição seja englobado pelas transformações temporais unitárias da teoria quântica (operador evolução). Já para Bohr, a teoria quântica é uma descrição de um tipo fundamentalmente diferente da descrição clássica, o que resulta numa necessidade lógica de se fazer uma aguda distinção entre o objeto a ser medido (quântico) e o instrumento de medição (clássico), que não pode ser tratada formalmente. Esta distinção define, em termos clássicos, as condições sob as quais os fenômenos se verificam (Bohr, 1949). Ao mesmo tempo, para Bohr, o formalismo da mecânica quântica tem que ser aplicado ao sistema conjunto aparelho + objeto, para que se tenha uma descrição quântica dos fenômenos. Em outras palavras, também a nível macroscópico tem-se um reflexo do princípio de complementaridade, no pensamento de Bohr. Por sua vez, a posição de Heisenberg (1958) é a de que o estado quântico de um sistema não expressa propriedades, mas sim o conhecimento que temos destas propriedades. Deste modo, a redução do pacote de ondas é um fenômeno que ocorre a nível subjetivo, e que representa apenas uma mudança de

conhecimento acerca das propriedades do sistema.

Dentro do que podemos chamar de interpretação de Copenhagen, temos ainda vários trabalhos onde outros pontos-de-vista são expostos: Jordan (1949), Jauch (1964), Daneri et al (1962,1966), entre outros. Em especial a proposta de Daneri, Loinger e Prosperi (DLP) que teve em Rosenfeld um ferrenho defensor.

DLP propõem uma teoria que é apresentada como uma solução do problema de medição, no sentido em que este foi formalizado por von Neumann. A teoria tem em conta o caráter macroscópico do aparelho de medição, e a consequência de que somente 'observáveis macroscópicos' podem ser observados na prática. Deste modo, DLP sugerem que, a nível macroscópico, uma mistura de estados é praticamente equivalente a uma superposição de estados puros, sempre que os instrumentos são complexos o suficiente de modo a obedecerem as condições ergódicas associadas à irreversibilidade do processo de medição (d'Espagnat, 1976). Segundo Rosenfeld (1965, p:225) "temos que visualizar a medição como uma interação entre o sistema atômico observado e o dispositivo de registro, que tem por fim a formação de algum registro permanente (resultado), univocamente relacionado com uma quantidade definida que caracteriza o estado do sistema (autovalor)". Tal registro não resulta diretamente da reação objeto vs. aparelho, mas sim de todo um processo de desequilíbrio macroscópico do aparelho, iniciado pela ação microscópica do objeto. Após um tempo de relaxação, o aparelho atinge uma condição de equilíbrio estável em que o registro então aparece. Assim, o processo de redução do pacote de ondas se dá no aparelho, após a interação com o objeto, durante o processo de "amplificação" da informação dele captada. Também há de se sublinhar o fato de não haver a necessidade de se recorrer à consciência humana para explicar o fenômeno.

Muitas foram as ressalvas feitas à proposta de DLP, que vão desde críticas à limitação da hipótese ergódica assumida, até ao fato de DLP não terem abordado a questão acerca do que representa um estado vetor. Jauch (1968), por exemplo, levantou uma objeção baseada no fato de que quando o registro é fotográfico, o processo de amplificação só se encerra após a revelação do filme, o que pode ocorrer meses após a realização do experimento, o que certamente aparenta ser estranho.

Para finalizar, faremos um breve comentário acerca da mais insólita das interpretações já formuladas acerca do problema de medição. É a interpretação de Everett, Wheeler e Graham (EWG), cuja primeira versão apareceu em 1957 (Everett, 1957; Wheeler, 1957; Graham, 1970), também conhecida por "Many - Worlds Interpretation". O ponto de partida de EWG são dois postulados básicos: o primeiro é que o mundo real, ou qualquer parte dele que queiramos por conveniência chamar de mundo, pode ser fielmente representado pelo formalismo de Hilbert da mecânica quântica (vetor, operadores e relações de comutação), e por um conjunto de equações dinâmicas derivadas de um princípio variacional; o segundo, é que o mundo deve ser suficientemente complicado para ser decomponível em sistemas e aparelhos. Deste modo, provam um meta-teorema segundo o qual o formalismo matemático da teoria é capaz de produzir a sua própria interpretação. Esta representação fiel do mundo fornecida pelo estado vetor implica que o estado (A1.7) representa um aspecto do mundo físico que só se verifica num processo tipo medição:

a divisão do universo em universos simultâneos, em cada um dos quais a medição resulta em um resultado diferente. Todos esses universos são igualmente reais, obedecendo às mesmas leis físicas, mas cada um ignorante acerca do outro (deWitt, 1970). Com estes elementos, EWG trata de vários aspectos característicos da formulação quântica, como o aparecimento da probabilidade no formalismo e a redução do pacote de ondas. Não temos condições de entrar em detalhes sobre o ponto de vista. A menção, aqui, se deve ao fato de que a interpretação leva a previsões experimentais exatamente iguais às da visão ortodoxa de Copenhaga, mas é, no entanto, um ponto de vista realista, local, causal, e que foi formulado com o fim de evitar qualquer violação dos princípios da relatividade geral. Segundo deWitt (1970), uma grande contribuição da interpretação é o fato de ter mostrado que o formalismo pode gerar a sua própria interpretação, o que reforça a concepção clássica de uma correspondência direta entre formalismo e realidade.

APÊNDICE 2: EXPERIMENTOS QUE SUSTENTAM A CONCEPÇÃO DO ESTADO QUÂNTICO COMO SUPERPOSIÇÃO

Já foram efetuados alguns experimentos visando mostrar a incompatibilidade entre a descrição provida por um estado superposto e a que advem de uma consideração do estado quântico como sendo uma mistura de estados. Conforme o que se expôs no cap. III, tais experimentos são muito importantes, não como provas propriamente ditas, mas como fortes evidências a favor da concepção do estado quântico como sendo uma superposição de estados. Em vista da enorme dificuldade de análise que envolvem, dois de tais experimentos são aqui mencionados, mais como experimentos interessantes do que propriamente conclusivos:

Experimento de Sillito e Wykes (1972): Baseados em uma sugestão de Jánossy e Nagy (1956), Sillito e Wykes efetuaram um experimento de interferência ótica que pode ser esquematizado conforme mostra a figura Ap2.1. Uma fonte de luz coerente é feita incidir sobre uma placa com duas fendas paralelas, e por trás desta é colocado um anteparo onde estão dispostos, em pontos estrategicamente escolhidos, dispositivos muito sensíveis de detecção de luz. À frente das fendas posta-se um obturador que abre e fecha cada uma delas alternadamente, de modo que a todo instante apenas uma esteja aberta. A frequência de funcionamento do obturador deve ser tal que o tempo entre duas aberturas sucessivas de uma fenda, τ_0 , seja menor que o tempo de coerência da luz (Mandel, 1959). Quanto menor τ_0 , maior o número de franjas de interferência observadas. Além disso, o experimento foi realizado utilizando luz de baixa intensidade, de modo que se tivesse apenas um fóton de cada vez envolvido no processo (cap. IV).

O experimento foi montado dessa maneira pois, se soubermos exatamente os instantes em que tal ou qual fenda está aberta podemos, em alguns pontos do anteparo, saber com certeza por qual fenda passou o fóton. Desse modo, no ponto O, equidistante das duas fendas, sabemos que o fóton passou pela fenda que estava aberta no instante l/c anterior à detecção. O que se observou experimentalmente é que neste ponto não apareceram franjas de interferência. Do mesmo modo, para todo ponto em que:

- (a) $PF_1 - PF_2 = (2n+1)c\tau_0$, as fendas parecerão simultaneamente abertas ou fechadas;
- (b) $PF_1 - PF_2 = 2nc\tau_0$, uma fenda parece aberta de cada vez, nunca as duas juntas.

No caso (a), não é possível distinguir a trajetória e, desde que $(2n+1)\tau_0$ seja menor que o tempo de coerência da luz, as franjas de interferência são visíveis, o que não acontece para os pontos que obedecem (b). Deste modo, fica claro que descrever o estado $|\Psi\rangle$ como sendo uma mistura ou uma superposição linear leva a consequências muito diferentes a nível experimental. E mais, a experiência tem mostrado que a superposição, por mais contra-intuitiva que possa ser, é um fenômeno de fato. Contra esta situação, Schroedinger enunciou o seu famoso paradoxo, apresentado em (III.4.2).

Fig. Ap2.1 - Esquema de um experimento do tipo do efetuado por Sillito e Wykes (1972). B e B' são as posições alternativas do obturador, que oscila entre as duas posições com período ζ_0 .

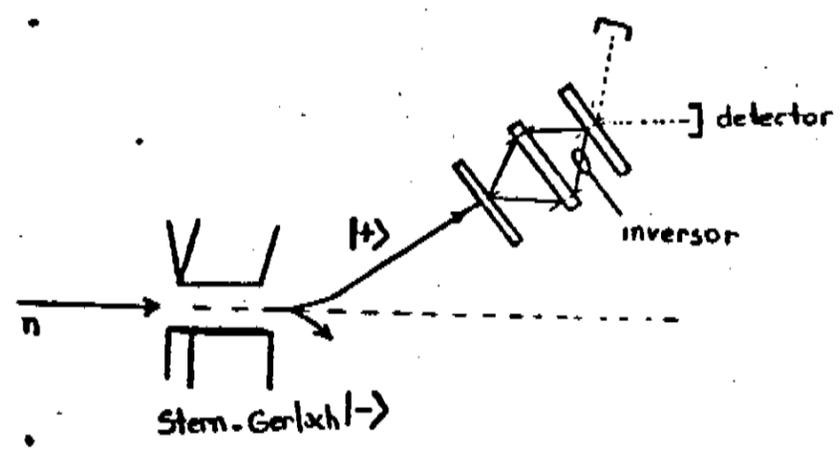
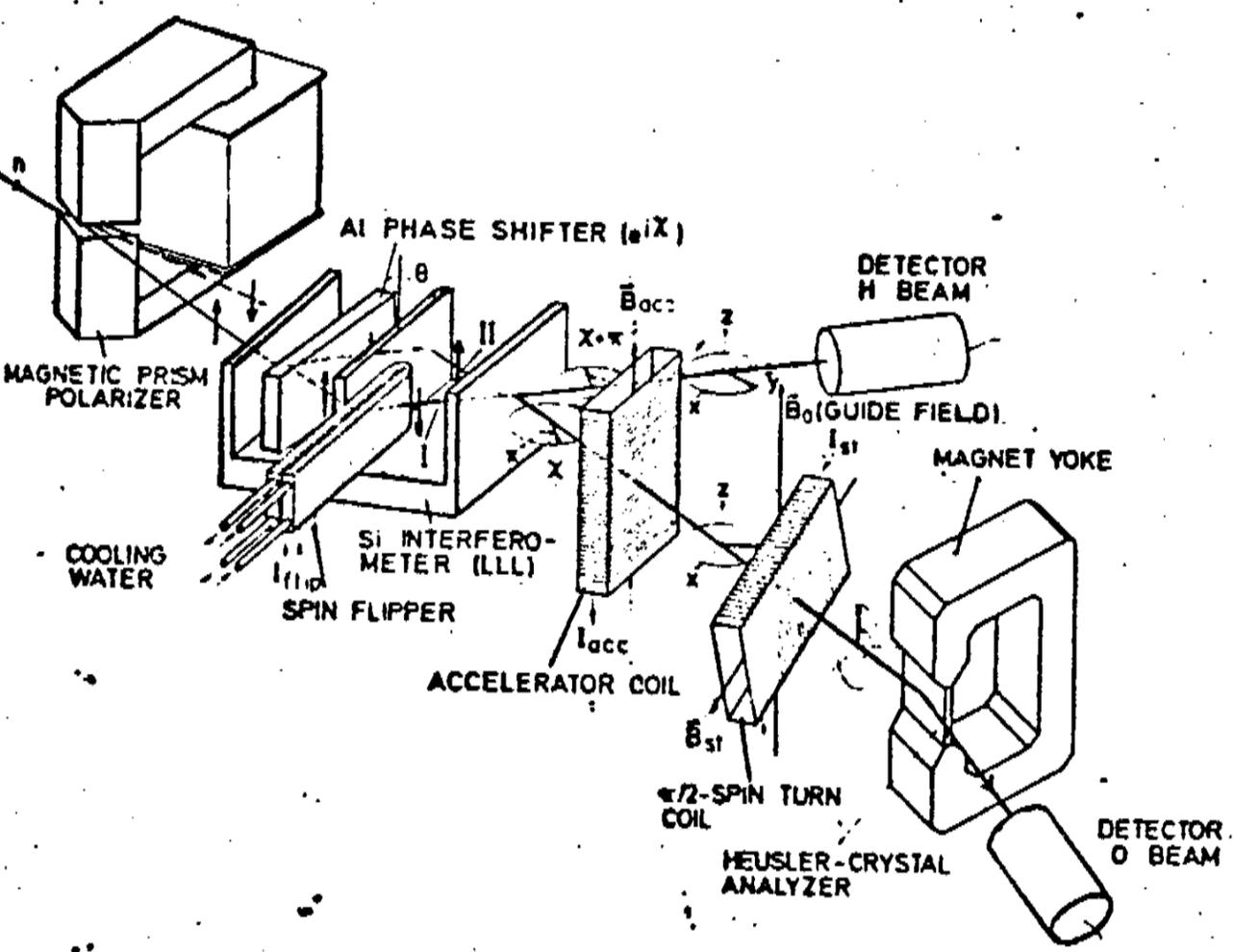
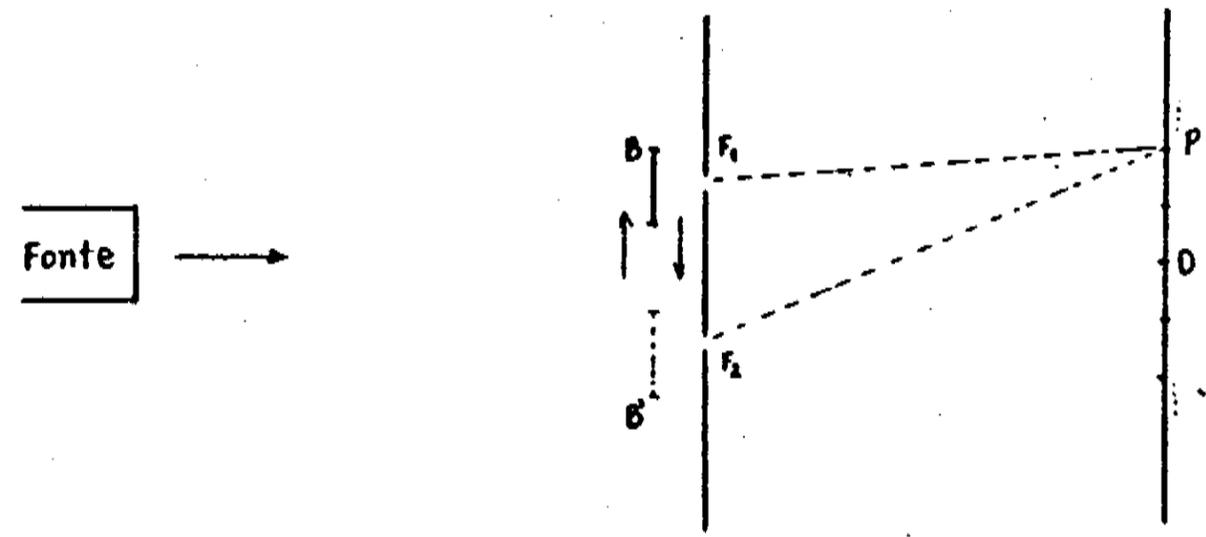


Fig. Ap2.2 - Esquema e arranjo experimental do experimento de Summhammer et al (1983).

Experimento de Summhammer et al (1983): Este experimento, testando o tratamento que efetuamos na secção III.4.1 com o spin do elétron (fig. 3.1), foi realizado não com elétrons, mas utilizando interferometria de neutrons, o que aumenta a precisão do experimento. Em linhas gerais, podemos resumir o experimento da seguinte maneira, tomando como base o desenvolvimento que fizemos (ver fig. Ap2.2). Um feixe de neutrons com spin no estado $|+\rangle_z$ (previamente selecionados) é dividido em dois outros feixes que são separados no espaço. Sendo a distância entre os feixes macroscópica, inverte-se a orientação do spin dos neutrons de um deles (para $|-\rangle_z$), sem que se interfira no outro feixe. Em seguida os feixes são reunidos para interferirem (pela própria conformação do interferômetro). O procedimento descrito até agora responde, na fig. 3.1, pelo processo de preparação do estado. Realizado o experimento, o que se obteve foi que, bloqueando qualquer um dos feixes e medindo-se a orientação do spin na direção S_x , encontrou-se um resultado compatível com a probabilidade de 50% de se ter $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ como autovalor medido. Quer dizer, sabendo a trajetória, os resultados foram compatíveis com as previsões, quando $|\psi\rangle$ é tratado como uma mistura de estados. No entanto, quando os dois feixes foram deixados livres, encontrou-se que o feixe resultante estava 100% polarizado na direção $|+\rangle_x$. O feixe resultante deve ser, então, descrito por uma superposição dos dois autoestados de S_z .

APÊNDICE 3 - COMENTÁRIOS SOBRE A PROVA DE von NEUMANN DA IMPOSSIBILIDADE DE TERMOS TEORIAS DE VARIÁVEIS ESCONDIDAS:

Faremos, neste apêndice, uma breve menção ao trabalho de von Neumann, que foi uma tentativa de se provar matematicamente a impossibilidade de se poder completar o formalismo da mecânica quântica por meio da inclusão de variáveis escondidas (nota 4.2), com o fim de eliminar o seu caráter estatístico intrínseco. Não temos condições de reproduzir em detalhes tal demonstração (a prova de von Neumann ocupa aproximadamente 20 páginas de seu famoso livro!). Apenas tentaremos mostrar, bastante toscamente, o cerne da demonstração. Uma análise mais detalhada deste trabalho, e de trabalhos posteriores de Gleason (1957), Jauch e Piron (1963) e Kochen e Specker (1967), pode ser encontrada em Bell (1966), Chibeni (1984) e em Belinfante (1973).

AP3.1 - A prova de von Neumann:

Apresentações bem mais sucintas da demonstração de von Neumann, e que expõem mais claramente a motivação do trabalho, são providas por Ballentine (1970), Bohm e Bub (1966) e por Albertson (1961), nas quais nos basearemos neste comentário. Podemos, em linhas gerais, esquematizar a prova como segue.

Primeiramente, consideremos uma classe de observáveis \mathcal{V} , aos quais temos associados operadores hermitianos no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Além disso temos que, para von Neumann, o valor médio de um observável, dado por

$$\langle R \rangle = \langle \Psi | R | \Psi \rangle$$

é um traço característico da mecânica quântica. R é o operador do espaço de Hilbert correspondente ao observável medido \mathcal{R} , sendo a média tomada em uma série de medições sobre um ensemble de sistemas identicamente preparados no estado $|\Psi\rangle$. Especifica-se um estado do sistema ao qual corresponde \mathcal{V} definindo-se o valor esperado $\langle R \rangle$ para todo observável \mathcal{R} de \mathcal{V} . Passemos agora às hipóteses iniciais assumidas por von Neumann, que são as seguintes:

(1) A correspondência entre cada observável e um operador no espaço de Hilbert é biunívoca.

(2) Se a um observável \mathcal{R} corresponde o operador R , então ao observável $f(\mathcal{R})$ corresponde o operador $f(R)$.

(3) Se aos observáveis $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T} \dots$ correspondem operadores $R, S, T \dots$, então ao observável $\mathcal{R} + \mathcal{S} + \mathcal{T} + \dots$ corresponde o operador $R + S + T \dots$.

(4) Se o observável \mathcal{R} é uma quantidade sabidamente não negativa, então $\langle \mathcal{R} \rangle \geq 0$.

(5) Se $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T} \dots$ são observáveis arbitrários e $a, b, c \dots$ números reais, então

$$\langle a\mathcal{R} + b\mathcal{S} + c\mathcal{T} + \dots \rangle = a\langle \mathcal{R} \rangle + b\langle \mathcal{S} \rangle + c\langle \mathcal{T} \rangle + \dots$$

sempre que as médias puderem ser calculadas.

Além dessas hipóteses, von Neumann utiliza as seguintes definições:

i) Temos um ensemble de dispersão nula se $\langle \mathcal{R}^2 \rangle = \langle \mathcal{R} \rangle^2$ para todo observável \mathcal{R} de \mathcal{V} , de modo que

$$\Delta \mathcal{R} = [\langle \mathcal{R}^2 \rangle - \langle \mathcal{R} \rangle^2]^{1/2}$$

é definida como sendo a dispersão do observável \mathcal{R} .

ii) Um ensemble é homogêneo ou puro se seu operador estatístico é tal que, ao ser dividido em

$$\rho = \omega + \nu$$

onde ω e ν são operadores hermitianos temos, necessariamente, que $\omega = c'\rho$ e $\nu = c''\rho$, sendo $c' + c'' = 1$ e $c', c'' > 0$. Ou seja, o ensemble não pode ser dividido em subensembles com propriedades estatísticas diferentes.

Com bases nestas hipóteses e definições, von Neumann mostra que sempre existe uma matriz hermitiana ρ_{nm} , tal que para qualquer observável

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \sum_{n,m} \rho_{nm} R_{mn} = \text{Tr} (\rho \mathcal{R}) \quad (\text{AP3.1})$$

Deste modo, mostra que o operador estatístico ρ que representa o estado de um sistema não precisa ser introduzido como postulado, mas é uma consequência direta das assumpções matematicamente válidas feitas acima.

A partir dessa formulação do valor médio de um observável \mathcal{R} , e das próprias características das variáveis escondidas como elas são definidas, é que von Neumann efetua a sua famosa prova de exclusão. Por definição, podemos dizer que as variáveis escondidas seriam variáveis, desconhecidas até então que, quando consideradas juntamente com os valores de um conjunto completo de observáveis comutáveis (CCOC), propiciariam uma determinação completa do resultado de qualquer medição efetuada sobre o sistema. A motivação para se supor a existência

de tais variáveis é que, com a sua existência, a distribuição estatística associada ao estado quântico não seria mais uma característica intrínseca da descrição quântica de um sistema, mas sim representaria um ensemble de sistemas (cap. III) com diferentes valores de variáveis escondidas. Ou seja, as variáveis escondidas completariam a descrição quântica de um sistema físico.

Se todas estas variáveis escondidas fossem conhecidas e fixadas, teríamos então um ensemble de dispersão nula e, desse modo, deveria haver uma matriz densidade ρ para a qual todos os observáveis pertinentes ao sistema físico que se quer descrever estariam perfeitamente determinados. Note-se que, sendo (R, S, T, \dots) o conjunto de todos os observáveis relativos ao sistema físico, não há nenhuma necessidade de que estes observáveis comutem entre si, de modo que podemos ter aí alguns CCOC, mas certamente teremos observáveis que não comutam com alguns ou mesmo nenhum dos outros. Von Neumann mostrou, então, a inexistência de qualquer matriz fisicamente significativa que cumprisse tal papel e, conseqüentemente, a inexistência de ensembles com dispersão nula.

Uma apresentação simples da inconsistência de se assumir a existência de ensembles de dispersão nula pode ser vista no seguinte exemplo. Se temos um tal ensemble então, para qualquer observável

$$\langle R^2 \rangle = \langle R \rangle^2 \quad (\text{def. 1})$$

Tomando o caso particular em que $R = |\phi\rangle\langle\phi|$, o operador projeção sobre o estado $|\phi\rangle$ normalizado ($\langle\phi|\phi\rangle = 1$), temos

$$\langle R \rangle = \text{Tr}(\rho R) = \sum_{n,m} \rho_{nm} R_{mn} \quad , \quad \text{sendo} \quad \begin{aligned} \rho_{nm} &= \langle m|\rho|n\rangle \\ R_{mn} &= \langle n|R|m\rangle \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle R \rangle = \sum_{n,m} \langle\phi|m\rangle \langle m|\rho|n\rangle \langle n|\phi\rangle = \langle\phi|\rho|\phi\rangle \quad (\text{AP3.2})$$

Por sua vez,

$$\langle R^2 \rangle = \text{Tr}(\rho R^2) = \text{Tr}(\rho R) \quad , \quad \text{já que } R^2 = R.$$

Assim sendo, para um ensemble de dispersão nula

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \langle\phi|\rho|\phi\rangle^2 \quad (\text{AP3.3})$$

para todo $|\phi\rangle$ normalizado. Para termos tal relação satisfeita, $\langle\phi|\rho|\phi\rangle$ deve ser necessariamente igual ou a 0 ou a 1, de modo que, para ensembles de dispersão nula,

$$\rho = 0$$

ou

$$\rho = 1.$$

O caso $\rho = 0$ deve ser posto de lado uma vez que levaria à situação não significativa em que $\langle R \rangle = 0$, para todo observável R .

Resta então o caso em que $\rho = 1$ que, como se verá, só é compatível com a existência de ensembles de dispersão nula quando a dimensão do espaço vetorial correspondente aos estados $|\phi\rangle$ assumíveis pelo sistema for unitária. Qualquer matriz unitária $\rho = 1$ descrevendo sistemas reais tem

$$\langle \rho = 1 \rangle = \text{Tr} (1) = \infty$$

uma vez que o espaço vetorial em questão normalmente é de dimensão infinita. Assim sendo, quando calculamos a dispersão de R , obtemos que

$$\langle (R - \langle R \rangle)^2 \rangle = \langle R^2 \rangle - 2\langle R \rangle^2 + \langle R^2 \rangle \langle 1 \rangle$$

não é igual a zero.

Portanto, assumindo-se as hipóteses iniciais consideradas por von Neumann, não é possível a existência de ensembles com dispersão nula e, conseqüentemente, a existência de variáveis escondidas que completem a descrição quântica. Assim sendo, considerando as hipóteses iniciais assumidas como sendo parte da teoria, von Neumann concluiu que "o presente sistema da mecânica quântica teria que ser objetivamente falso a fim de que uma outra descrição dos processos elementares ...pudesse existir" (von Neumann, 1955, p.325).

Este resultado de von Neumann, de 1932, teve profundas influências sobre as discussões em torno das variáveis escondidas, que só voltaram a ser consideradas após o trabalho de Bohm (1952). No entanto, apenas na década de 1960 é que se mostrou que a prova, embora matematicamente perfeita, apresenta incompatibilidades com a situação física experimental.

Segundo Bell (1966), a prova de von Neumann não é suficientemente geral uma vez que assume que a hipótese 5 seja válida para observáveis arbitrários, o que não é fisicamente verdadeiro. Muito embora pareça ser uma propriedade razoável, ela não é válida para operadores que não comutam entre si. Como exemplo, tomemos o caso do spin, cujas componentes nas três direções de um sistema cartesiano ortogonal de referência (S_x , S_y , S_z) não comutam entre si. Quando desejamos medir qualquer uma dessas componentes do spin devemos ter o aparelho de Stern-Gerlach orientado na direção correspondente, de modo que, para medirmos, por exemplo, ($S_x + S_y$) necessitamos de uma outra orientação para o aparelho. Neste caso, um autovalor de ($S_x + S_y$) obtida numa medição deste observável não é igual à soma de um autovalor de S_x e de um autovalor de S_y . Deste modo, temos que o valor médio

$$\langle (S_x + S_y) \rangle = \langle S_x \rangle + \langle S_y \rangle$$

é uma propriedade inteiramente peculiar da mecânica quântica, e que não pode ser assumida "a priori". Segundo Bell, não há nenhuma razão para se esperar que seja válida para o caso de estados com dispersão nula.

Atualmente, a prova de von Neumann tem apenas importância histórica, pela enorme barreira que impôs às pesquisas em torno das teorias de variáveis escondidas. Basta dizer que o próprio De Broglie abandonou suas pesquisas após o aparecimento deste trabalho, retomando-as apenas após o reacendimento da questão por Bohm, em 1952.

AP3.2 - Outras tentativas:

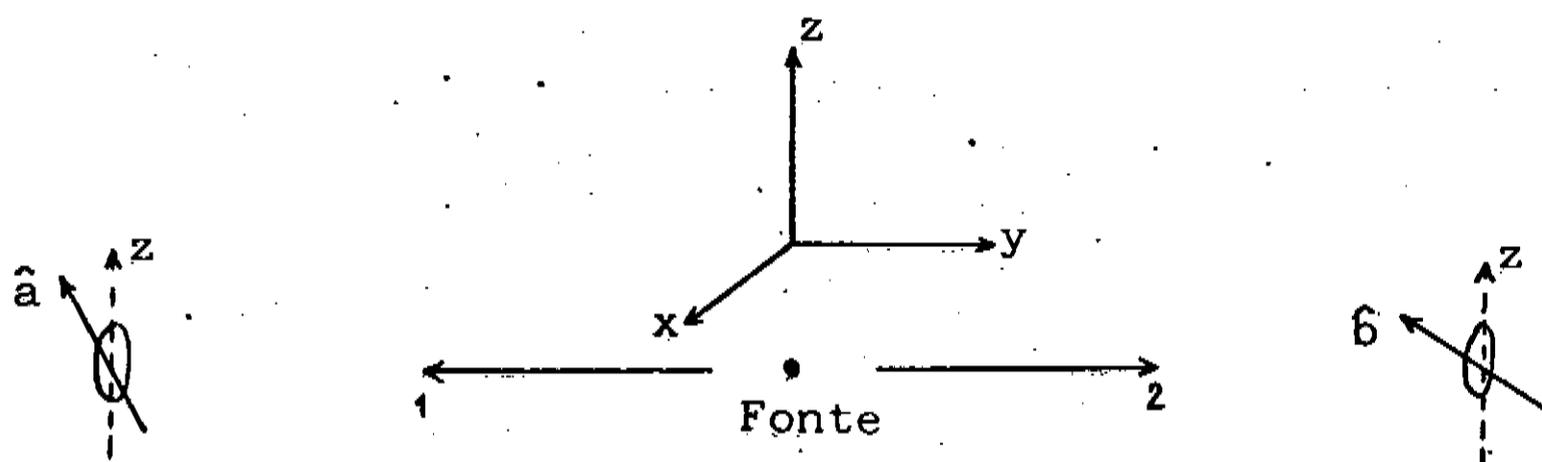
Além do trabalho de von Neumann, Gleason (1957), Jauch e Piron (1963) e Kochen e Specker (1967) tentaram elaborar "provas" mostrando a impossibilidade das teorias de variáveis escondidas. Existe muita discussão em torno da relevância ou não destes trabalhos, e vários pesquisadores acreditam na conclusibilidade, em especial, das restrições impostas por Gleason e Kochen - Specker. Não temos condições de reproduzir aqui estes trabalhos, mas Bell (1966) faz uma análise bastante clara dos dois primeiros, procurando mostrar justamente as suas falhas. Uma abordagem bem mais detalhada de todos eles é feita por Belinfante (1973).

APÊNDICE 4: DERIVAÇÃO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA

No experimento imaginário de Bohm, utilizado por Bell na derivação de sua desigualdade, tratamos de um caso idealizado. Deste modo, consideraremos uma situação quântica também idealizada, a título de exemplo da discordância assinalada anteriormente para as previsões dos dois tipos de teorias: realistas - locais e mecânica quântica.

Primeiramente, estabeleceremos uma notação em que o operador vetorial de Pauli do spin, para as partículas 1 e 2, sejam σ e ζ respectivamente. Assim, as respectivas projeções destes spins nas direções \hat{a} e \hat{b} são dadas por $\sigma \cdot \hat{a}$ e $\zeta \cdot \hat{b}$, que representam os operadores de spin nas direções \hat{a} e \hat{b} , respectivamente.

Seguindo a descrição do experimento de EPR - Bohm, temos que o par de partículas emitido pela fonte está no estado de spin singleto. Vamos adotar o sistema de coordenadas da figura abaixo.



Assim, o estado singleto é dado por

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2) \quad (A4.1)$$

onde $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são os autoestados do operador σ_z (os índices 1 e 2 são referentes às partículas), que dá a componente do spin na direção z. Estes autoestados são dados, na forma matricial, por

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A4.2})$$

e o operador, por

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A4.3})$$

que é a matriz de Pauli a ele correspondente.

Na mecânica quântica, a função de correlação que é o que queremos determinar, é dada por

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \sigma \cdot \mathbf{a} \cdot \tau \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \Psi | \sigma \cdot \mathbf{a} \tau \cdot \mathbf{b} | \Psi \rangle \quad (\text{A4.4})$$

que é o valor esperado para o produto dos operadores $\sigma \cdot \mathbf{a}$ e $\tau \cdot \mathbf{b}$, com o sistema no estado $|\Psi\rangle$. Matricialmente, este produto de operadores é dado pelo produto tensorial das matrizes correspondentes a cada um deles:

$$\sigma \cdot \mathbf{a} \otimes \tau \cdot \mathbf{b}$$

que indica que cada matriz atua sobre a partícula correspondente. O valor médio é obtido, então, multiplicando-se a matriz da direita pelo vetor estado, e a da esquerda, pelo conjugado hermitiano do vetor estado. Ou seja, devemos substituir em (A4.4) o estado singlete, que é dado por (A4.1), e o seu conjugado hermitiano. Assim, obtemos:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\langle + | \sigma \cdot \mathbf{a} | + \rangle \langle - | \tau \cdot \mathbf{b} | - \rangle + \langle - | \sigma \cdot \mathbf{a} | - \rangle \langle + | \tau \cdot \mathbf{b} | + \rangle - \langle - | \sigma \cdot \mathbf{a} | + \rangle \langle + | \tau \cdot \mathbf{b} | - \rangle - \langle + | \sigma \cdot \mathbf{a} | - \rangle \langle - | \tau \cdot \mathbf{b} | + \rangle) \quad (\text{A4.5})$$

Os produtos $\sigma \cdot \mathbf{a}$ e $\tau \cdot \mathbf{b}$ dão as projeções do spin nas direções \mathbf{a} e \mathbf{b} respectivamente, e são dados por

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \mathbf{a} &= \sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z \\ \tau \cdot \mathbf{b} &= \tau_x b_x + \tau_y b_y + \tau_z b_z \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

onde $\sigma_x \equiv \tau_x$, $\sigma_y \equiv \tau_y$, $\sigma_z \equiv \tau_z$ são as matrizes de Pauli para cada uma das direções:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\sigma \cdot \hat{a} = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma \cdot \hat{b} = \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & -b_z \end{pmatrix} \quad (\text{A4.7})$$

Podemos, agora, determinar cada um dos termos de (A4.4):

$$\langle + | \sigma \cdot \hat{a} | + \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_z$$

$$\langle - | \sigma \cdot \hat{b} | - \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & -b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_z$$

e assim por diante. Determinando os outros termos, obtemos que

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2} (-2a_z b_z - (2a_x b_x + 2a_y b_y))$$

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = -a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

Sendo \hat{a} e \hat{b} unitários, chegamos finalmente a

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = -\cos(\hat{a}, \hat{b})$$

que é a expressão que estamos procurando calcular.

O objetivo deste apêndice é expor algumas outras derivações da desigualdade de Bell, efetuadas a partir de considerações diferentes das assumidas por Bell e CH, que apresentamos no capítulo IV. Na ocasião, mencionamos algumas derivações, entre as muitas existentes, algumas das quais gostaríamos de destacar, por serem muito interessantes.

(1) Derivação de Eberhard (1977):

Eberhard mostrou que se pode derivar a desigualdade de Bell (4.12) sem que se use os conceitos de variáveis escondidas e determinismo. Essa demonstração certamente evidencia um conflito muito mais profundo entre as previsões da mecânica quântica e o princípio de localidade, que é a única assumpção tipicamente clássica que Eberhard faz. Vamos utilizar o experimento de correlação discutido em (IV.4), e partir de considerações puramente estatísticas. Estatisticamente, um experimento consiste no registro de N eventos, cada um deles envolvendo medições, nos dois aparelhos, das polarizações nas direções \hat{a} e \hat{b} relativas a um mesmo par de partículas. Assim, no aparelho I, os resultados A_1, A_2, \dots, A_N podem ser iguais a $\pm\hbar/2$, o mesmo ocorrendo para os resultados no aparelho II: B_1, B_2, \dots, B_N .

Definimos a correlação entre as duas grandezas A e B como sendo a média estatística

$$P(A, B) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \cdot B_i \quad (A5.1)$$

ou seja, é igual à fração dos eventos em que A_i e B_i possuem o mesmo sinal, menos a fração em que eles têm sinais opostos.

Vamos considerar que se efetuem as medições utilizando outras orientações nos aparelhos I e II, como nos casos anteriormente derivados, de modo que expressões similares a (A5.1) possam ser definidas para os conjuntos de medições (A, B') , (A', B) e (A', B') .

Pela condição de localidade assumida por Eberhard, para uma orientação \hat{a} qualquer do aparelho I, por exemplo, o resultado da medição no aparelho II será B_i sempre que a orientação for \hat{b} , e B_i' sempre que a orientação for \hat{b}' ; e vice-versa. Essa condição é importante (Selleri e Tarozzi, 1981) porque assegura que, para as quatro orientações dadas, as quatro expressões de correlação tipo (A5.1) que mencionamos acima são as únicas que podem ser definidas.

A derivação da desigualdade é direta. Se definimos

$$D \equiv P(A, B) - P(A, B') + P(A', B) + P(A', B'), \quad (A5.2)$$

temos imediatamente que

$$D \leq |P(A,B) - P(A,B')| + |P(A',B) + P(A',B')|. \quad (A5.3)$$

Substituindo as expressões tipo (A5.1), e simplificando:

$$D \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [|A_i \cdot B_i - A_i \cdot B_i'| + |A_i' \cdot B_i + A_i' \cdot B_i'|]$$

$$D \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [|A_i| \cdot |B_i - B_i'| + |A_i'| \cdot |B_i + B_i'|]$$

Como $|A_i| = |A_i'| = 1$, chegamos finalmente a

$$D \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [|B_i - B_i'| + |B_i + B_i'|] = 2. \quad (A5.4)$$

Assim, de (A5.3) e (A5.4), temos

$$|P(A,B) - P(A,B')| + |P(A',B) + P(A',B')| \leq 2$$

Ou seja, chegamos à expressão da desigualdade dada por (4.12).

Essa derivação de Eberhard é uma generalização da derivação de Stapp (1971, 1977). Existem críticas quanto ao fato da condição de localidade conter, implícitos, elementos determinísticos, e que foram prontamente respondidas por Stapp (1978). Argumenta-se que o postulado da "definibilidade contrafactual" em que se baseia a condição de localidade de Stapp e Eberhard só é compreensível a partir de um ponto de vista determinístico e, conseqüentemente, realista. Tal postulado consiste em considerar como significativas e verdadeiras certas afirmações acerca do que ocorreria em certas condições, em casos em que estas condições não são obtíveis (d'Espagnat, 1984). No caso da condição de localidade, por exemplo, o postulado é assumido quando se diz que, efetuando-se a medição da quantidade física A , no aparelho I, estando o aparelho II na orientação \hat{b} , o resultado obtido, para a mesma desintegração do sistema conjunto seria o mesmo, mesmo que a orientação de II fosse \hat{b}' .

Para Stapp, a condição de localidade requer apenas que se possa falar de mundos possíveis, assim como podemos falar de mundos reais, como comumente se faz nas argumentações científicas. Existe,

portanto, muita discussão em torno do fato dessas derivações realmente não incluírem a questão do "realismo", mas não existem opiniões definitivas a respeito.

(2) Derivação de Bell (1976, 1977):

Uma outra derivação interessante foi efetuada por Bell, com a finalidade de refutar o que ele denominou "princípio de realidade local", formulado a partir de considerações relativísticas: se se tem um evento local **A** numa determinada região limitada **I** do espaço-tempo, os únicos eventos que podem influenciá-lo são os que se situam no cone de luz retroativo às experiências de **I**.

Seja **A** e **B** dois eventos que ocorrem em duas regiões espacialmente separadas **I** e **II**. Vamos supor que **A** e **B** estejam completamente determinados pelas variáveis físicas $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$, que fornecem uma especificação completa de todos os eventos e processos ocorridos nos cones de luz retroativos às experiências de **I** e **II**. Pela teoria da relatividade especial, cada evento só pode ser influenciado por aqueles que estão dentro do seu cone de luz, ou seja, o evento **A** só pode ser influenciado por eventos ocorridos nas regiões **L** e **N** do seu cone de luz, enquanto que o evento **B**, por aqueles ocorridos em **N** e **M**. A região **N** representa a intersecção dos cones de luz de **I** e **II**, e indica uma experiência anterior comuns a ambos os sistemas (variáveis comuns a ambos).

Vamos agora definir as variáveis físicas que analisamos acima. De acordo com Bell, as variáveis λ, μ e ν são variáveis reais que podem descrever o aparato experimental, a região do espaço atravessada pelo sistema a que elas correspondem, ou ainda o próprio sistema (isso dentro de cada região a que cada variável corresponde, respectivamente); as variáveis a e b são parâmetros experimentais fixos para cada medição, que caracterizam a situação do aparelho que mede cada observável. (no caso do experimento de EPR - Bohm, as orientações dos dois aparelhos); finalmente, c especifica, por exemplo, as características da fonte. Além disso, λ, μ e ν obedecem cada uma delas a uma determinada distribuição de probabilidades, quando tomadas sobre um ensemble de situações idênticas. Desse modo, temos as seguintes caracterizações para as regiões **L**, **M** e **N**, que são as três regiões assinaladas no diagrama (A5.1):

$$L(a, \lambda) \quad ; \quad M(b, \mu) \quad ; \quad N(c, \nu)$$

Pelo princípio de realidade local, temos então que

$$A(a, b, c, \lambda, \mu, \nu, B) = A(a, c, \lambda, \nu)$$

$$B(a, b, c, \lambda, \mu, \nu, A) = B(b, c, \mu, \nu)$$

onde as variáveis relativas a cada evento são as que o especificam

completamente.

De uma maneira bastante geral, podemos definir o valor médio $H(a,b)$ (c pode ser considerado fixo para o experimento, e omitido) do produto $A.B$ como sendo

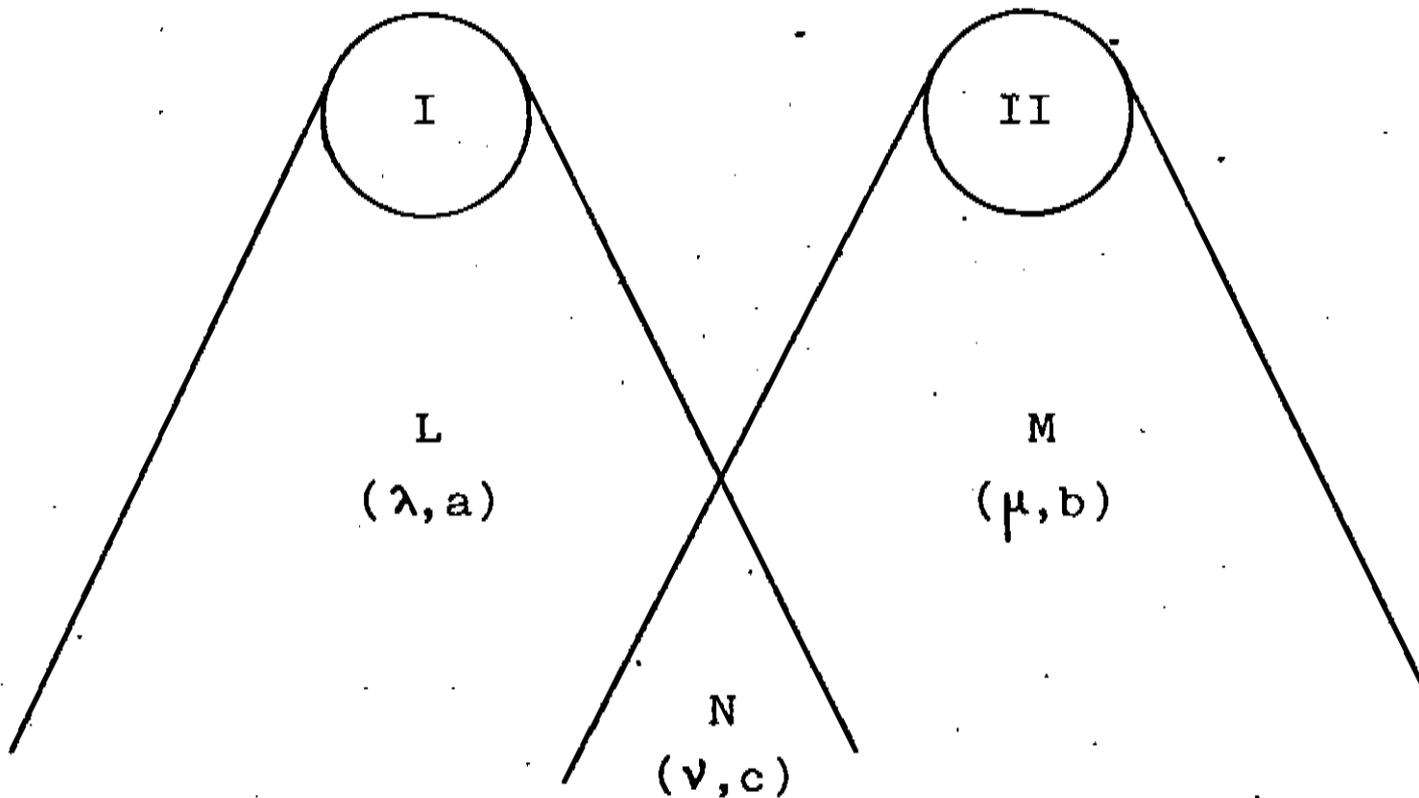
$$H(a,b) = \iiint \sum_{A,B} A.B \Theta_A(a,c,\lambda,\gamma) \Theta_B(b,c,\mu,\gamma) \rho_{abc}(\lambda,\mu,\gamma) d\lambda d\mu d\gamma \quad (A5.5)$$

onde a somatória é sobre os valores possíveis de A e B , e Θ_A e Θ_B as probabilidades de sua ocorrência. Nos restringiremos ao caso em que temos a situação representada pelo experimento de EPR - Bohm, em que A e B assumem apenas dois valores possíveis e equiprováveis. Para este caso, a expressão (A5.5) se reduz a

$$H(a,b) = \iiint A.B \rho_{abc}(\lambda,\mu,\gamma) d\lambda d\mu d\gamma \quad (A5.6)$$

que nada mais é do que uma função de correlação como a definida na derivação de Bell (1971).

A função densidade de probabilidade $\rho_{abc}(\lambda,\mu,\gamma)$ pode ser fatorizada como



$$\rho_{abc}(\lambda, \mu, \nu) = \rho_I(a, \lambda, \nu) \rho_{II}(b, \mu, \nu) \rho_0(\nu) \quad (A5.7)$$

onde novamente omitimos c por ser um parâmetro fixo para todas as rodadas de medição. Tal fatorização é possível de ser assumida pelas próprias características do ensemble de situações dadas pelo diagrama (A5.1) (Selleri e Tarozzi, 1981). Assim,

$$P(a, b) = \iiint A(a, \lambda, \nu) B(b, \mu, \nu) \rho_I(a, \lambda, \nu) \rho_{II}(b, \mu, \nu) \rho_0(\nu) d\lambda d\mu d\nu \quad (A5.8)$$

ou

$$P(a, b) = \int d\nu \rho_0(\nu) \bar{A}(a, \nu) \bar{B}(b, \nu) \quad (A5.9)$$

onde

$$\bar{A}(a, \nu) = \int d\lambda A(a, \lambda, \nu) \rho_I(a, \lambda, \nu) \quad \text{e} \quad |\bar{A}| \leq 1$$

e analogamente para B .

A partir dessa função de correlação, pode-se à desigualdade como o fizemos anteriormente. O que se ressalta aqui é que esta expressão foi deduzida a partir de um modelo determinista geral, assumindo apenas a existência de variáveis que decrevessem completamente a situação. A expressão (A5.9) que obtivemos é assumida, na derivação de Bell (1971), como um ponto de partida, o que não se verifica nesta derivação. Infelizmente não temos condições de abordar as objeções que foram formuladas com relação a esta derivação.

(3) A prova de Herbert (1975) do Teorema de Bell:

Uma exposição interessante dos aspectos paradoxais da violação da desigualdade de Bell foi dada por Herbert. Seja o estado singlete que temos considerado, tal que

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = -1 \quad \text{se} \quad \hat{a} = \hat{b}.$$

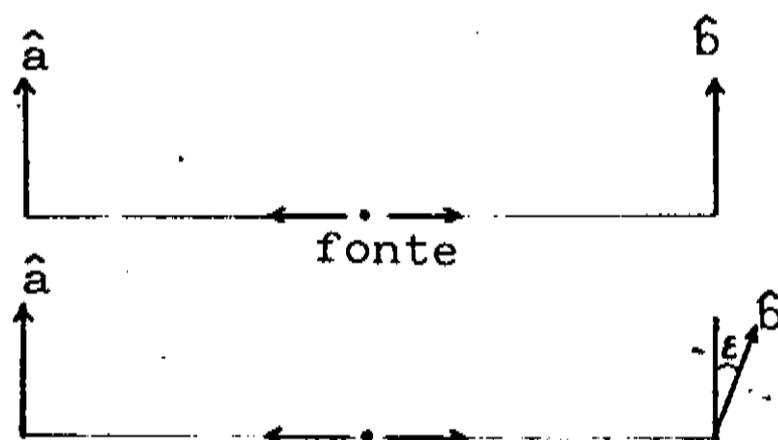
e as seguintes situações experimentais, com as respectivas funções de correlação:

1) os parâmetros \hat{a} e \hat{b} são paralelos

$$P(0) = -1 \quad (\hat{a} = \hat{b})$$

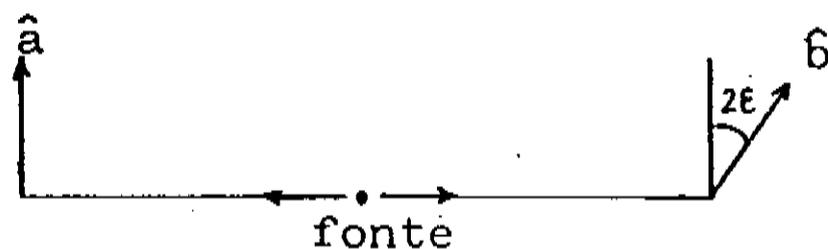
2) \hat{b} está desalinhado de um ângulo ϵ

$$P(\epsilon) = -1 + \Delta(\epsilon)$$



3) \hat{b} está desalinhado de um ângulo 2ε

$$P(2\varepsilon) = -1 + \Delta(2\varepsilon)$$



onde $\Delta(\varepsilon)$ é o desvio do valor de $P(0)$ em função do desalinhamento ε .

Seguiremos a argumentação como apresentada por Selleri (1986), por ser mais simples que a original. Se temos um observador $O1$ em 1, e um observador $O2$ em 2, podemos dizer que para o caso (1), numa sequência de medições simultâneas, o que observarão será algo do tipo:

$$O1 : +1, -1, +1, +1, -1, \dots$$

$$O2 : -1, +1, -1, -1, +1, \dots$$

Supomos agora que um terceiro observador $O3$, equidistante de 1 e 2, que consideraremos muito distantes entre si, observe as medições nos dois aparelhos. Para os três casos, o observador $O1$ observa três sequências $S1, S2, S3$ de resultados relativos ao aparelho que ele observa, para medir as correlações correspondentes. Já o observador $O2$ obtêm, simultaneamente com $O1$, outras três sequências $S1', S2', S3'$, correspondentes às três orientações de b . O que se têm, comparando duas sequências relativas à mesma função de correlação é que os valores de $S1$ e $S1'$ são sempre opostos entre si. Quanto a $S2$ e $S2'$, o mesmo se verifica, a menos de uma pequena parcela em que se obtêm medidas idênticas, o que implica num desvio $\Delta(\varepsilon)$ com relação a $P(0)$.

O observador $O3$ recebe as informações das sequências e orientações em 1 e 2 de modo que, com esses dados, ele percebe que $\Delta(\varepsilon)$ se origina justamente pela rotação ε sofrida por \hat{b} . Quando $O3$ observa as sequências $S3'$ e $S3$, ele espera encontrar

$$\Delta(2\varepsilon) \leq 2 \Delta(\varepsilon) \quad (A5.10)$$

pois 2ε pode ser tomada como a soma de duas rotações ε , a desigualdade aparecendo porque a segunda rotação pode atuar sobre a fração já compreendida por $\Delta(\varepsilon)$. Segundo Herbert, este é um caso especial da desigualdade de Bell. A incompatibilidade com a mecânica quântica surge porque a previsão quântica para o desvio esperado é dada por

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon) &= \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \\ \Delta(2\varepsilon) &= 4\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (A5.11)$$

derivada a partir da lei de Malus, e que nitidamente viola a desigualdade (A5.10). Daí, ou se conclui que a mecânica quântica não é válida nesse caso, ou que o que o observador $O3$ observa é um fenômeno não-local.

Os três exemplos de derivações que apresentamos acima dão uma pálida idéia da quantidade de trabalhos em que se tenta uma derivação mais geral da desigualdade de Bell. A título de exemplo de outras formas sob as quais a desigualdade aparece temos, tomando como fonte Selleri e Tarozzi (1981),

Pearle (1970):
$$\sum_{i=1}^n [P(a_i, b_i) + P(a_{i+1}, b_i)] \leq 2n - 2 + P(a_1, b_n)$$

d'Espagnat (1978):
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} P(a_i, b_j) \leq \frac{1}{2} (n - 1)$$

Herbert e Karush (1978):
$$-n \leq nP(\theta) - P(n\theta) - n + P(0) \leq 0$$

(θ é o ângulo entre \hat{a} e \hat{b})

Finalmente, gostaríamos apenas de mencionar que Ivanovic (1978) mostrou que, seguindo a derivação de Bell (1971) e considerando-se $A(\hat{a}, \lambda)$ e $B(\hat{b}, \lambda)$ como sendo complexos, obtém-se que o limite superior assumido pela desigualdade se eleva para $2(2)^{1/2}$, que é idêntico ao valor máximo obtido no tratamento quântico.

NOTAS

Capítulo I:

[1.1] Se assumimos que as probabilidades envolvidas na mecânica quântica são probabilidades de ignorância, e que as relações de incerteza são necessariamente inconsistentes com a suposição de que uma partícula tenha num, dado instante, posição e momento bem definidos, é natural que procuremos uma distribuição de probabilidades que descreva conjuntamente as duas grandezas (veremos, na nota 6.3, que a existência de tal distribuição de probabilidades conjunta é necessária para a definição da covariância das duas variáveis). Assim sendo, temos que encontrar uma função $P(r, p, \psi)$, tal que

$$\int P(r, p, \psi) dp = P(r, \psi) = |\langle r | \psi \rangle|^2$$

$$\int P(r, p, \psi) dr = P(p, \psi) = |\langle p | \psi \rangle|^2$$

Existem muitas dificuldades para se definir para se definir tal função e, aparentemente, não se tem nenhum indício de sua existência, não obstante as várias tentativas neste sentido. Referências sobre o assunto: Moyal (1949), Cohen (1966), Prugovecky (1967).

Capítulo III:

[3.1] O aspecto que salientamos como comum não pode, em princípio, ser tomado como uma característica exclusiva da interpretação de Copenhagen, mas assim o consideraremos, uma vez que esta é a única interpretação relevante que mantém esse aspecto. Schroedinger, um dos principais críticos do ponto de vista de Bohr, na sua tentativa de explicar os processos físicos como sendo puramente ondulatórios no sentido clássico, também assumia esta hipótese. Muito influenciada pelas idéias de De Broglie, a interpretação ondulatória de Schroedinger tomava como modelo a teoria ondulatória clássica e atribuía realidade apenas aos fenômenos puramente ondulatórios, aos quais reduzia a luz e a matéria. O caráter realista e causal dessa interpretação fez com que fosse reconhecida de imediato por aqueles que buscavam estas qualidades na teoria quântica, como Einstein e Planck. No entanto, alguns aspectos, como o fato da formulação da teoria se dar no espaço de configurações, que é um espaço abstrato, e também pelo fato de não conse-

guir explicar fenômenos simples, impôs sérias dificuldades a Schroedinger para defendê-la dos ataques sofridos, e acabou por ser abandonada.

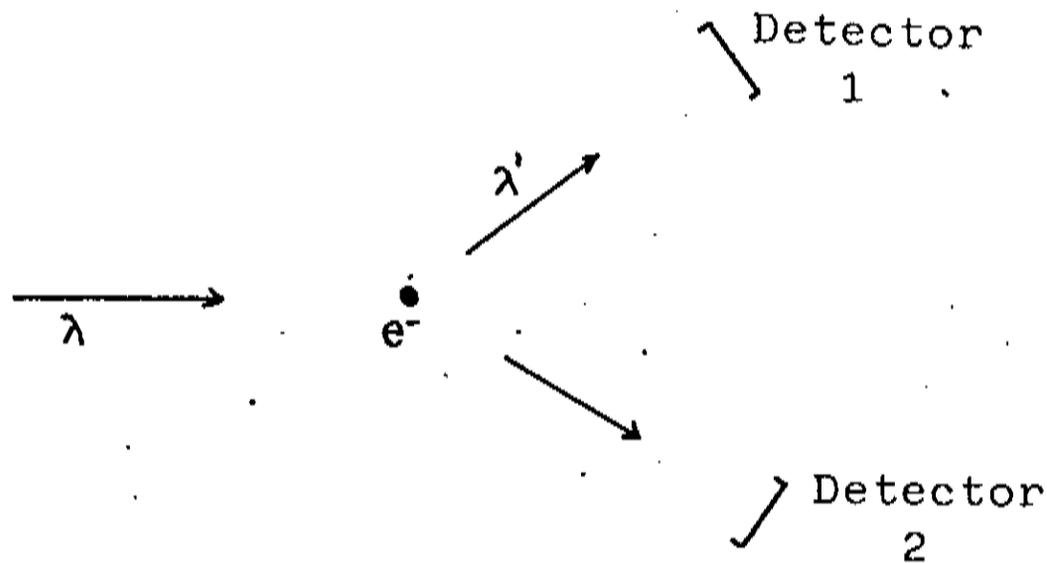
[3.2] O formalismo matricial de Heisenberg apareceu inicialmente em 1925 (Van de Waerden, 1967) e o formalismo ondulatório de Schroedinger, em 1926. Enquanto Heisenberg fez uso do espaço das sequências \mathbb{C}^{∞} (o conjunto de todas as sequências infinitas de números complexos, tal que a soma dos quadrados de seus valores absolutos seja finita), Schroedinger utilizou-se do espaço das funções complexas quadrado-integráveis (no sentido de Lebesgue) L^2 . O próprio Schroedinger (1926b) mostrou a equivalência matemática das duas formulações, equivalência esta que ficou mais clara quando von Neumann (1932) mostrou que a mecânica quântica poderia ser formalizada como um cálculo de operadores hermitianos no espaço de Hilbert.

[3.3] A dualidade no comportamento da radiação eletromagnética, ora se comportando como um fenômeno puramente ondulatório (interferência), ora como um fenômeno corpuscular (efeitos fotoelétrico e Compton), deu origem a uma controvérsia que se estende até hoje (ver cap. V). Quando Compton enunciou a descoberta do efeito que leva o seu nome e, em sua explicação do mesmo supôs que os quanta de luz incidente e espalhado tinham direções de propagação bem definidas, a concepção ondulatória, na opinião de Sommerfeld e vários outros, foi muito abalada. Para não abandonar a sua concepção na 'verdade' da concepção ondulatória, Bohr optou por abandonar os princípios de conservação de energia e de momento (Whittaker, 1953).

Baseados neste ponto de vista, Bohr, Kramers e Slater (BKS) elaboraram uma teoria em que se tentava interpretar o mecanismo da interação entre matéria e radiação. Não temos condições de entrar em detalhes acerca da teoria, mas vamos ressaltar alguns de seus pontos mais importantes. Primeiramente, o aspecto mais relevante é a assumpção de que, nos processos atômicos, energia e momento só são estatisticamente conservados. Assim, se um átomo está emitindo ou absorvendo radiação, isto não implica que ele esteja perdendo ou recebendo energia. Para tal, BKS introduzem uma **radiação virtual**, que não transmite energia ou momento, e que se propaga ondulatoriamente. Os átomos estão continuamente emitindo radiação virtual, e a absorvem, **por meio de osciladores virtuais** que, ao absorverem a radiação, dotam o átomo de uma probabilidade de transitar a um estado de energia mais alta. As transições são o único fenômeno real associado à radiação virtual. Além disso, o fato de um átomo experimentar uma transição não implica que outros o façam, nem tem qualquer efeito sobre a radiação virtual. Ou seja, a conservação de energia e momento não se verificam para interações individuais átomo vs. radiação. Certamente, a abordagem que fizemos é muito grosseira, mas ela é suficiente para o momento.

A teoria de BKS foi refutada experimentalmente logo após a sua publicação, por dois experimentos relacionados com o efeito Compton. Pela teoria, a incidência de luz sobre um elétron não implicaria no recuo imediato do elétron, ocorrendo o fenômeno apenas ocasionalmente, dependendo dos osciladores virtuais. Pelo contrário, pela teo-

ria de Compton, o quantum de luz incidente seria absorvido e imediatamente reemitido com outra direção e frequência, e se observaria um recuo no elétron em função da diferença da energia e momento do fóton reemitido. O primeiro experimento, o de Bothe - Geiger, pode ser esquematizado como abaixo:



No experimento, os detectores estão sincronizados para captarem simultaneamente o fóton emitido (**det.1**) e o elétron que recua (**det.2**). As coincidências na detecção foram tão frequentes que a probabilidade de que o fato se verificasse, pela teoria de BKS seria de aproximadamente $\frac{1}{400.000}$. O outro experimento, de Compton e

Simon, utilizando uma câmara de nuvens, também mostrou a não validade da teoria (para maiores detalhes: Whittaker, 1953; Jammer, 1966).

[3.4] O que Popper (1967) chama de grande "confusão" quântica, se assim o podemos traduzir, é o fato de se tomar uma função de distribuição, que é uma função de medida estatística que caracteriza uma determinada 'população' de eventos (espaço amostral) e tratá-la como sendo uma propriedade dos elementos individuais dessa população. Popper, como esclarecimento, cita o seguinte exemplo. Tomamos um dado feito de material homogêneo, de modo que qualquer um dos lados tem uma mesma possibilidade de cair voltado para cima, quando de um lançamento do mesmo. A probabilidade de que se obtenha qualquer um dos lados ou,

de uma maneira mais geral, um evento a , é definida - Popper acata a fundamentação de von Mises - como sendo o limite da frequência relativa n_a/n da ocorrência de a ,

$$P(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_a}{n}$$

onde n é o número de vezes que se repete a operação de lançamento e n_a o número de vezes que se observa a . A partir dessas probabilidades constrói-se a função distribuição que, então, caracteriza o "ensemble" dos lançamentos do dado. O que Popper salienta é que a função de distribuição não diz respeito a propriedades físicas do dado. Muito embora o dado seja homogêneo e possua seis lados, a probabilidade de obter um dado evento (o lado 5, por exemplo) não depende do material de que é composto o dado, nem se o dado tem todos os outros lados marcados com um mesmo número, e assim por diante. Ou seja, a função distribuição não descreve o dado, mas apenas reflete estatisticamente uma situação experimental ao qual ele é submetido.

Com relação à mecânica quântica, temos que para Copenhague a função estado se relaciona a um único sistema, sendo a descrição mais completa acerca deste sistema. Ao mesmo tempo, é uma função distribuição de probabilidades e, para Popper (assim como para a interpretação estatística) descreveria um ensemble de sistemas, e não um sistema individual. Pensar na função estado como descrevendo um único sistema é uma situação equivalente à que descrevemos para o dado. Segundo Popper, não se pode dizer que ela descreve propriedades do sistema.

[3.5] Um aspecto importante com relação a esta diferenciação entre mundo macro e mundo micro é que a física não faz nenhuma distinção formal entre ambos. De um certo modo, quando efetuamos um determinado experimento em que supomos estar medindo alguma propriedade de um elemento do mundo micro, temos que todos os aparelhos que utilizamos são compostos, sem exceção, por átomos e moléculas. Ou seja, se o formalismo da mecânica quântica é auto-consistente, ele deveria ser aplicável também aos objetos macroscópicos, e deveríamos ter, a nível macroscópico, manifestações de estados superpostos.

Leggett (1984) propõe um experimento em que seria possível observar superposições macroscópicas, se realmente forem possíveis. O experimento não foi realizado e não há ainda confirmação de sua viabilidade, por isto não entraremos em detalhes. Importantes seriam os resultados de um experimento com esse objetivo. Se supomos que ele seja realizado, os resultados possíveis (a observação ou não da superposição macroscópica) levariam a consequências diferentes:

a) no caso de resultado positivo, certamente teríamos um atestado da extensibilidade da mecânica quântica para o domínio macro, mas não seriam invalidados os argumentos de que para os aparelhos reais uma superposição de estados é idêntica a uma mistura estatística, no que tange às previsões de ambas. No entanto, o paradoxo do gato passa a

ter uma significação muito mais profunda, pois o estado macroscópico dos objetos perderia muito de sua realidade, na maneira como a concebemos;

b) caso o resultado fosse negativo, e o experimento plenamente confiável, então as leis da mecânica quântica não poderiam ser extrapoladas para o nível macro. As implicações de tal resultado para a ciência, se se assume o ponto de vista ortodoxo (descrição mais completa possível de um sistema), seriam intensas, uma vez que o grau de complexidade passaria a ser uma variável relevante, e a hipótese reducionista que permeia as teorias científicas ficaria seriamente abalada. Por esta hipótese assume-se que as propriedades macroscópicas de um sistema são determinadas pelas propriedades dos elementos mais elementares que o compõem. Quanto ao grau de complexidade, teríamos que supor que exerceria influências sobre a linearidade das equações da mecânica quântica.

Capítulo IV:

[4.1] Um sistema composto por duas partículas de spin 1/2 é descrito (a parte do spin de sua função estado) por um dos autoestados comuns a S^2 e S_z , onde S é o operador de spin total ($S_1 + S_2$), e S_z o operador que dá a componente na direção z do spin total do sistema ($S_{1z} + S_{2z}$). Um conjunto completo de observáveis comutáveis para este caso é formado pelos operadores

$$S_1^2, S_2^2, S^2, S_z$$

e, se $|S, N\rangle$ é a base de autovetores comuns a eles, temos as seguintes equações de autovalores (Cohen-Tannoudji, 1977, cap. X):

$$S_1^2 |S, N\rangle = S_2^2 |S, N\rangle = (3/4)\hbar^2 |S, N\rangle$$

$$S^2 |S, N\rangle = S(S+1)\hbar^2 |S, N\rangle$$

$$S_z |S, N\rangle = N\hbar |S, N\rangle$$

Pode-se determinar, a partir daí, que os autoestados correspondem aos dois valores possíveis do autovalor S : $S=0$, não degenerado; e $S=1$, triplamente degenerado, de modo que os autoestados são:

(a) Estado_singlete:

$$|\Psi_s\rangle = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

que é um estado invariante rotacionalmente e não fatorizável, para o qual medições de S_{1z} e S_{2z} sempre dão resultados opostos, enquanto que uma medição de S^2 sempre dará zero.

(b) Estados_tripletos:

$$|1,-1\rangle = |-\rangle|-\rangle$$

$$|\Psi_t\rangle = |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$$

$$|1,1\rangle = |+\rangle|+\rangle$$

onde o estado $|\Psi_t\rangle$, de modo semelhante a $|\Psi_s\rangle$, prevê resultados opostos para medições de S_{1z} e S_{2z} e também não é fatorizável, mas não é rotacionalmente invariante e prevê, para uma medição de S^2 o resultado $2\hbar^2$.

Se tomarmos a soma e a diferença de $|\Psi_s\rangle$ e $|\Psi_t\rangle$, temos:

$$|+\rangle|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_t\rangle + |\Psi_s\rangle)$$

$$|-\rangle|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_t\rangle - |\Psi_s\rangle)$$

de modo que ao medirmos S^2 em qualquer das duas expressões, temos a probabilidade 1/2 de obtermos tanto 0 quanto $2\hbar^2$. Fica evidente, aqui, que tanto $|\Psi_s\rangle$ quanto $|\Psi_t\rangle$ não podem ser considerados como estados que descrevem ensembles de sistemas compostos, em que parte deles estão no estado $|+\rangle|-\rangle$, e o restante no estado $|-\rangle|+\rangle$.

[4.2] Teorias de variáveis escondidas são teorias propostas, ou que se imagina proponíveis, com o fim de suplementar a descrição incompleta que o tratamento quântico fornece de um sistema físico, de modo a especificar-lhe completamente o estado. Em geral, essas teorias assumem uma posição determinista, e são todas elas realistas. Existem várias de tais teorias já propostas, das quais talvez a mais famosa seja a de Bohm (1952), proposta numa época em que ainda se aceitava que o teorema de von Neumann fosse uma prova conclusiva contra a possibilidade de serem possíveis tais teorias. Uma outra teoria de variáveis escondidas, no sentido em que as definimos acima, é a que foi proposta por De Broglie (1926) e que vem sendo aperfeiçoada desde então (abordaremos, em parte, a teoria de De Broglie, no capítulo V). Outras teorias desse tipo propostas: a teoria hidrodinâmica de Madelung (1926), Bohm-Vigier (1954), Bohm-Bub (1966) e, mais recentemente, a interpretação não-ergódica de Buonomano (cap. V), entre outras.

Especificamente com relação à desigualdade de Bell, existem também várias teorias realistas-locais de variáveis escondidas formuladas no sentido de mostrar teorias que dão as mesmas previsões experimentais que a mecânica quântica para os experimentos já realizados, ou ainda que violam a própria desigualdade. Um exemplo bem recente do primeiro caso é a proposta de Home e Marshall (1985), ou ainda a de Marshall et al (1983a), em que se tenta mostrar que experimentos do tipo cascata de fótons não são conclusivos a favor da mecânica quântica. Entre os modelos de sistemas clássicos que violam a desigualdade de Bell, temos os de Notarrigo (1984) e Scalera (1984).

[4.3] Um paradoxo interessante acerca do problema de localização de uma partícula foi formulado por De Broglie (1959). Seja uma caixa B com paredes perfeitamente refletoras, que pode ser posteriormente dividida e separada em duas outras caixas B1 e B2, por algum artifício que mantenha as suas características iniciais.

Vamos supor que no interior da caixa exista uma partícula, cuja função de onda $\phi(x, y, z, t)$ está definida em todo o volume V de B. Deste modo, $|\phi(x, y, z, t)|^2$ dá a probabilidade de se encontrar a partícula no ponto (x, y, z) no interior da caixa, no instante t.

Se dividimos a caixa em duas partes B1 e B2 e as separamos, levando-as bem distantes uma da outra (por exemplo, B1 para Paris e B2 para Tóquio), temos uma nova descrição quântica, agora pelas duas funções de ondas correspondentes a cada parte: $\phi_1(x, y, z, t)$ definida sobre o volume V1 da caixa B1, e $\phi_2(x, y, z, t)$ definida sobre o volume V2 da caixa B2. As únicas informações que temos, agora, são as probabilidades de encontrar a partícula em cada uma das caixas:

$$P_1 = \int_{V_1} dV |\phi_1(x, y, z, t)|^2 = |C_1|^2, \quad i=1,2.$$

$$\text{sendo } |C_1|^2 + |C_2|^2 = P_1 + P_2 = 1$$

$$\text{e } \phi = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2,$$

que é o estado quântico do sistema total $B1 + B2$.

Pelas leis da mecânica quântica, se realizamos uma medição em uma das caixas (digamos, $B1$), temos de antemão que a probabilidade de encontrarmos nela a partícula é $P1$, e a de não encontrarmos, $P2$. Se, por exemplo, efetuarmos a medição sobre a caixa $B1$ e encontrarmos nela a partícula, imediatamente sabemos que a partícula não se encontra na outra caixa, ou seja, se a partícula for encontrada em Paris, de imediato concluímos que ela com certeza não estará em Tóquio, e vice-versa. Na exposição que segue tomaremos, a título de exemplo, a medição como sendo efetuada na caixa $B1$, e que a partícula seja lá encontrada. Pela descrição quântica, se a medição é efetuada num instante t_0 e a partícula é encontrada em $B1$, então as probabilidades anteriores relativas às duas caixas, para $t > t_0$, passam a ser $P1 = 1$ e $P2 = 0$ (o que implica, imediatamente, em $\phi_2(x,y,z,t) = 0$, para $t > t_0$), respectivamente. Ou seja, uma medição efetuada em Paris afeta imediatamente a função de onda que descreve o sistema em Tóquio.

Uma análise clássica da situação nos leva a considerar que, mesmo antes da medição, a partícula já deveria estar em $B1$, e não em $B2$, não podendo estar nas duas ao mesmo tempo. Pela concepção realista clássica não se pode admitir que, no ato de medição de $B1$ em Paris, a metade da partícula em Tóquio seja colapsada e reapareça em $B1$. Se assumimos essa posição realista, poderíamos interpretar ϕ_1 e ϕ_2 como representando apenas o conhecimento que temos, para $t > t_0$, da posição da partícula. Deste modo, chega-se à conclusão de que a descrição fornecida pela mecânica quântica é incompleta, e que poderiam existir variáveis que especificassem completamente a situação. Entretanto, isto nos levaria novamente a um conflito com a descrição fornecida pelo estado quântico do sistema total $B1 + B2$, que é uma superposição de estados (sec. III.4.1).

Por outro lado, se se assume que a mecânica quântica é uma teoria completa, temos que considerar a situação um tanto paradoxal de a partícula estar simultaneamente nas duas caixas, e aceitar o colapso de uma parte da partícula em uma das caixas, quando se efetua uma medição.

Concluimos, então, que o fato de considerarmos a existência real da partícula no espaço-tempo nos leva a um paradoxo. Além disso, o paradoxo não aparece se se fala apenas de medidas já efetuadas. Deste modo, somos impelidos a assumir a posição positivista de que não há sentido em se falar da localização da partícula, sem que antes se a observe. Só assumindo tal posição é que podemos considerar a descrição quântica como sendo completa.

[4.4] A previsão quântica é calculada como sendo (Freedman, 1972):

$$[p_{12}(\phi)] = \frac{1}{4} \eta_1 \eta_2 f_1 g [\epsilon'_+ \epsilon'_+ + \epsilon'_- \epsilon'_- F(\theta) \cos n\phi]$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \eta_1 f_1 \epsilon_+^1$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \eta_2 f_2 \epsilon_+^2$$

onde: η_1 - eficiência quântica do detector;

$$\epsilon_{\pm}^i = \epsilon_M^i \pm \epsilon_m^i$$

ϵ_M^i - eficiência do polarizador i para luz polarizada paralela ao eixo do polarizador;

ϵ_m^i - eficiência do polarizador i para luz polarizada perpendicular ao eixo do polarizador;

$f_1 = f_2 = f(\theta)$ - probabilidade de que o fóton emitido entre no aparelho 1 ou 2, onde θ é o meio ângulo subtendido pela abertura do detector.

$g = g(\theta)$ - probabilidade condicional de que se um fóton entra em 1, o outro entra em 2.

$F = F(\theta)$ - dá o efeito de despolarização devido à não colinearidade dos dois fótons.

[4.5] Existem várias propostas de experimentos utilizando pares de partículas de massa de repouso não-nula. Mencionaremos duas delas, devidas a Lo e Shimony (1981) e a Skalsey (1986). Lo e Shimony propuseram um experimento utilizando como par correlacionado, um par de átomos de sódio no estado singlete, produzidos usando o efeito Raman induzido para excitar as moléculas de Na_2 . Além disso, rederivam uma nova expressão para a desigualdade, assim como propõem um arranjo experimental para testá-la. Segundo Lo e Shimony, a principal motivação para tal experimento se liga à baixa eficiência dos detectores para fótons. A título de exemplo, no segundo experimento de Aspect et al (1982a), as eficiências dos detectores foram da ordem de 10^{-3} , ou seja, um fóton em cada mil é detectado. Para o caso aqui proposto, a eficiência dos detectores seria maior que 0.9, o que evitaria a necessidade de se assumir certas hipóteses adicionais assumidas nos experimentos anteriores.

Mais recentemente, Skalsey (1986) propôs um novo experimento, desta vez utilizando um par de elétrons correlacionados. O par é obtido a partir da emissão β de um núcleo instável (Skalsey propõe ^{203}Hg), que decai para um núcleo instável (^{203}Tl) de meia vida muito curta (aprox. 0.3ns), que por sua vez decai para um estado estável emitindo um fóton γ . No entanto, um processo concorrente dessa emissão é a conversão interna dos elétrons atômicos (ver Pessoa et al, 1979, p.190) de modo que, ao invés de emitir o fóton, é emitido um elétron atômico. Skalsey mostra que tal par β - e pode ser utilizado num experimento que teste a desigualdade de Bell, e apresenta um arranjo experimental para tal, utilizando como analisador das polarizações de spin o espalhamento Mott.

Capítulo VI:

[6.1] Robertson considera o caso tratado por Condon (1929). Para o caso do momento angular, temos as seguintes definições no formalismo quântico:

$$L_x = y p_z - z p_y \quad ; \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad ; \quad L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

(Cohen-Tannoudji et al, 1977, cap.VI)

Seja o estado particular dado por

$$\Psi = f(r) \exp(i m \phi) P_l^m(\cos \theta)$$

onde o polo das coordenadas esféricas está orientado na direção z. Temos, então, para este caso, que L_z e L^2 estão perfeitamente bem definidos, sendo dados por

$$L^2 = l(l+1) \hbar^2 \quad e \quad L_z = m\hbar, \text{ ou seja } (\Delta L_z) = 0$$

enquanto que os valores médios de L_x e L_y são dados por

$$(\Delta L_x)^2 = (\Delta L_y)^2 = \frac{1}{2} [l(l+1) - m^2] \hbar^2 \quad (A)$$

Portanto, temos que a relação de incerteza para este caso é dada por

$$(\Delta L_x) (\Delta L_y) \geq \frac{1}{2} | \langle [L_x, L_y] \rangle | = \frac{1}{2} | \langle i\hbar L_z \rangle |$$

Como $\langle L_z \rangle = m\hbar$, e substituindo (A):

$$\frac{1}{2} \hbar^2 [l(l+1) - m^2] \geq \frac{1}{2} m\hbar^2$$

$$l(l+1) \geq m(m+1)$$

que é a desigualdade obtida; e que é a mais restritiva para o caso do momento angular e o sistema no estado Ψ .

[6.2] Muito embora haja uma ampla aceitação das relações, temos que salientar que apareceram também objeções quanto ao seu rigor, e à sua conseqüente generalidade (Ter Haar e Nicol, 1955). Segundo alguns autores, quando o sistema é preparado em determinados estados a relação de incerteza não é válida (Davidson, 1965). No entanto, atualmente, mesmo a nível das interpretações do formalismo quântico, a tendência é a de se assumir a validade das mesmas, procurando enquadrá-las dentro do contexto da interpretação.

[6.3] Temos que observar, aqui, que covariância, assim como variância e valor médio (esperança) são grandezas definidas na teoria de probabilidades, quando do tratamento de variáveis aleatórias. São valores numéricos que indicam, em função das suas definições, características associadas à função distribuição de probabilidades que caracterizam essas variáveis. São, portanto, grandezas definidas fora do contexto da álgebra abstrata dos espaços de Hilbert.

Quando apresentamos o formalismo da mecânica quântica salientamos o fato de que ele é baseado nessa álgebra, com a adição de alguns postulados básicos de caráter não abstrato, cuja finalidade é justamente agregar, à matemática do formalismo, aspectos quantitativos do mundo físico. Como toda teoria física, a verificabilidade experimental é essencial como um atestado de sua adequabilidade ou não. Desse modo, como se postula que a função que descreve o estado de um sistema (ou ensemble de sistemas, como no ponto de vista estatístico) seja uma amplitude de probabilidade, por meio da qual só podemos obter as frequências relativas de cada um dos resultados possíveis de uma medição, define-se grandezas equivalentes às estatísticas, com a finalidade de verificação experimental das previsões da teoria. Assim:

Teor. Probab.	<--->	Laboratório	<--->	Mec. Quântica
$E(x) = \sum x_k f(x_k)$				$\langle X \rangle = \langle \Psi X \Psi \rangle = \int \Psi^* X \Psi d\tau$
$\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$				$(\Delta X)^2 = \langle \Psi (X - \langle X \rangle)^2 \Psi \rangle$
$\sigma(x) = +[\text{Var}(x)]^{1/2}$				$\Delta X = [(\Delta X)^2]^{1/2}$

sendo tais grandezas definidas utilizando-se as regras de quantização usuais (Cohen-Tannoudji, 1977, p.222). Podemos, assim, definir a covariância de dois observáveis:

$$\text{Cov}(a,b) \hat{=} E(ab) - E(a) E(b) \quad \text{--->} \quad \text{Cov}(A,B) \hat{=} \frac{E(AB + BA) - E(A) E(B)}{2}$$

Tal definição é aceitável e pode ser encontrada em vários textos. No entanto, convém lembrar que, por definição

$$E(a,b) = \sum f(a,b) a b$$

onde $f(a,b)$ é uma distribuição de probabilidades conjunta.

[6.4] Para exemplificar o quanto a expressão de Schroedinger é mais geral, utilizaremos a derivação de Merzbacher (1961). Partindo das definições (6.8), temos que

$$\begin{aligned} (\Delta A) &= \int \Psi^* (A - \langle A \rangle)^2 \Psi \, d\zeta \\ (\Delta A) &= \int | (A - \langle A \rangle) \Psi |^2 \, d\zeta \end{aligned}$$

já que A é hermitiano, com expressão similar para B . Utilizando a desigualdade de Schwarz

$$\left(\int |f|^2 \, d\zeta \right) \left(\int |g|^2 \, d\zeta \right) \geq \left| \int f^* g \, d\zeta \right|^2$$

que é válida para quaisquer funções f e g , obtemos:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left| \int \Psi^* (A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) \Psi \, d\zeta \right|^2$$

Utilizando agora a identidade, facilmente demonstrável,

$$(A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) = \frac{1}{2} [(A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) + (B - \langle B \rangle) (A - \langle A \rangle)] + \frac{1}{2} [A, B]$$

temos que

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \langle F \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle [A, B] \rangle^2$$

onde

$$\langle F \rangle = \left\langle \frac{1}{2} (AB + BA) - \langle A \rangle \langle B \rangle \right\rangle$$

nada mais é que a $\text{Cov}(A, B)$. Deste modo, para obtermos a relação de Heisenberg, temos que considerar $\text{Cov}(A, B) = 0$, que é o que faz Merzbacher, com uma evidente perda de generalidade.

[6.5] Se X^* e Y^* são duas variáveis aleatórias normalizadas, então

$$\begin{aligned} \text{Var}(X^* \pm Y^*) &= E([(X^* - \mu_x) \pm (Y^* - \mu_y)]^2) \\ &= E([(X^* - \mu_x)^2 \pm 2(X^* - \mu_x)(Y^* - \mu_y) + (Y^* - \mu_y)^2]) \\ &= E((X^* - \mu_x)^2) \pm E(2(X^* - \mu_x)(Y^* - \mu_y)) + E((Y^* - \mu_y)^2) \\ &= \text{Var}(X^*) \pm 2\text{Cov}(X^*, Y^*) + \text{Var}(Y^*) \end{aligned}$$

IP
mo X^* , a variável normalizada correspondente a X , é definida co-

$$X^* = \frac{(X - \mu_x)}{\sigma_x}$$

de modo que $E(X^*) = 0$ e $Cov(X^*) = 1$ (Feller, 1976, p.196).

Fazendo a analogia para Y^* , tem-se então que

$$Var(X^* \pm Y^*) = 2(1 \pm \rho(X, Y))$$

Como a variância não pode ser negativa, tem-se que

$$2(1 \pm \rho(X, Y)) \geq 0$$

$$\rho(X, Y) \geq -1$$

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

REFERENCIAS

- Adam, A; Jánossy, L; Varga, P (1955) Acta Phys. Hung. 4, 301.
 Albertson, J (1961) Am. J. Phys. 29, 478.
 Angelidis, T D (1983) Phys. Rev. Lett. 51(20), 1819.
 Araki, H; Yanase, M M (1960) Phys. Rev. 120, 622.
 Aspect, A (1975) Phys. Lett. 54A(2), 117.
 Aspect, A (1976) Phys. Rev. D 14(8), 1944.
 Aspect, A; Grangier, P (1985) Lett. Nuovo Cim. 43 (8), 345.
 Aspect, A; Grangier, P; Roger, G (1981) Phys. Rev. Lett. 47(7), 460.
 Aspect, A; Grangier, P; Roger, G (1982a) Phys. Rev. Lett. 49(2), 91.
 Aspect, A; Dalibard, J; Roger, G (1982b) Phys. Rev. Lett. 49(25), 1804.
 Ballentine, L E (1970) Rev. Mod. Phys. 42(4), 358.
 Belinfante, F J (1973) A Survey of Hidden-Variables Theories (Pergamon, Oxford).
 Bell, J S (1965) Physics 1(3), 195.
 Bell, J S (1966) Rev. Mod. Phys. 38(3), 447.
 Bell, J S (1971) In B. D'Espagnat, ed.
 Bell, J S (1976) Epistemological Lett. 9, 11.
 Bell, J S (1977) Epistemological Lett. 15, 79.
 Bell, J S (1981) J. de Physique 42, C2 - 41.
 Bertollini, G; Diana, E; Scotti, A (1981) Il Nuovo Cim. 63B(2), 651.
 Blokhintsev, D I (1977) Sov. Phys. Usp. 20(8), 683.
 Bohm, D (1951) Quantum Theory (Prentice Hall, NJ).
 Bohm, D (1952) Phys. Rev. 85(2), 166; 85(2), 180.
 Bohm, D (1985) in G. Tarozzi, ed.
 Bohm, D; Aharanov, Y (1957) Phys. Rev. 108(4), 1070.
 Bohm, D; Bub, J (1966) Rev. Mod. Phys. 38, 453.
 Bohm, D; Vigier, J P (1954) Phys. Rev. 96, 208.
 Bohr, N (1935) Phys. Rev. 48, 696.
 Bohr, N (1949) in P. Schillp, ed.
 Bohr, N; Kramers, H A; Slater, J C (1924) Phil. Mag. 47, 785.
 Born, M (1926) Zeitsch. Phys. 37, 863; 38, 803.
 Born, M (1935) Atomic Physics (Blackie & Sons, Lond.).
 Rothe, W; Geiger, H (1925) Zeitsch. Phys. 32, 639.
 Bozec, P; Cagnet, M; Roger, G (1969) Compt. Rendus Ac. Sci. 269, 883.
 Brody, T A (1983) Rev. Mex. Fis. 29(4), 461.
 Brody, T A (1985) in G. Tarozzi, ed.
 Brown, H R (1981) Cad. Hist. Fil. Ciência 2, 51.
 Brown, H R (1983) Ciência Hoje 2 (7), 24.
 Brown, H R; Redhead, M (1981) Found. Phys. 11 (1/2), 1.
 Bruno, M; D'Agostino, M; Maroni, C (1977) Il Nuovo Cim. 40B(1), 143.
 Bub, J (1971) in B. D'Espagnat, ed.
 Buonomano, V (1978) Ann. Inst. Henry Poincaré A. 29(4), 379.
 Buonomano, V (1980) Il Nuovo Cim. 45B, 77.
 Buonomano, V (1985) in G. Tarozzi, ed.
 Buonomano, V (1986) in "Proc. Intern. Conf. on Quantum Violations", ed. W M Honig et al (Plenum), a ser publicado.
 Buonomano, V (1987a) a ser publicado por F. Selleri, ed.
 Buonomano, V (1987b) Rel. Tec. IMECC, 05/87.
 Carruthers, P; Nieto, M M (1968) Rev. Mod. Phys. 40(2), 411.
 Caser, S (1984) Phys. Lett. 102a(4), 152.

- Chibeni, S S (1984) Problemas com Realismo em Mecânica Quântica; Tese de Mestrado, IFGW-UNICAMP.
- Clauser, J F (1976) Phys. Rev. Lett. 36(21), 1223.
- Clauser, J F; Horne, M A (1974) Phys. Rev. D 10(2), 526.
- Clauser, J F; Horne, M A; Shimony, A; Holt, R A (1969) Phys. Rev. Lett. 23(15), 880.
- Clauser, J F; Shimony, A (1978) Rep. Prog. Phys. 41(12), 1881.
- Cohen, L (1966) J. Math. Phys. 7, 781.
- Cohen-Tannoudji, C; Diu, B; Laloe, F (1977) Quantum Mechanics (Wiley).
- Compton, A H; Simon, A W (1925) Phys. Rev. 25, 306.
- Condon, E U (1929) Science 69, 574.
- Costa de Beauregard, D (1976) Found. Phys. 6, 539.
- Cramer, J G (1980) Phys. Rev. D, 22(2), 362.
- Cufaro-Petroni, N; Viglier, J P (1979) Let. Nuovo Cim. 25, 151; 26, 149.
- Daneri, A; Loinger, A; Prosperi, G M (1962) Nucl. Phys. 33, 297.
- Daneri, A; Loinger, A; Prosperi, G M (1966) Il Nuovo Cim. 44B, 119.
- Davidson, E R (1965) J. Chem. Phys. 42, 1461.
- Davissson, C; Germer, L H (1927) Phys. Rev. 30, 705.
- De Broglie, L (1926) C R Acad. Sci. 183, 447.
- De Broglie, L (1927) J. de Physique série VI, 8(5), 15.
- De Broglie, L (1959) J. de Physique 20, 963.
- De Broglie, L (1964) The Current Interpretation of Quantum Mechanics (Elsevier)
- De Broglie, L (1967) J. de Physique 28, 481.
- De Broglie, L (1969) C R Acad. Sci. 268B, 277.
- De Broglie, L (1970) Found. Phys. 1(1), 5.
- De Broglie, L (1971a) in "Perspectives in Quantum Theories" ed. W. Yourgrau, A. van der Merwe (MIT Press), 5.
- De Broglie, L (1971b) in B. D'Espagnat, ed., 346.
- De Broglie, L (1973) Ann. Inst. Henry Poincaré 18(2), 89.
- De Broglie, L (1974) C R Acad. Sci. 278B, 721.
- De Broglie, L (1977) Ann. Fond. L. de Broglie 2, 1.
- Dempster, A J; Batho, H F (1927) Phys. Rev. 30, 644.
- De Muynck, W M (1986a) Phys. Lett. 114A(2), 65.
- De Muynck, W M (1986b) Found. Phys. 16 (10), 1003.
- D'Espagnat, B ed. (1971) Found. of Quantum Mechanics - Proc. Int. School of Phys. Enrico Fermi, c.IL (Academic, NY).
- D'Espagnat, B (1976) Conceptual Foundations of Quantum Mechanics (Benjamin, Reading, Mass.).
- D'Espagnat, B (1978) Phys. Rev. D 18, 349.
- D'Espagnat, B (1979) Scient. Am. 241(5), 158.
- D'Espagnat, B (1984) Phys. Rep. 110(4), 201.
- Deutsch, D (1983) Phys. Rev. Lett. 50(9), 631.
- DeWitt, B (1970) Phys. Today (sept), 30.
- DeWitt, B (1971) in B. D'Espagnat, ed., 211.
- Dirac, P M A (1958) The Principles of Quantum Mechanics (Clarendon, Oxford) 4a ed.
- Dontzov, Y P; Baz, A I (1967) Sov. Phys. JETP 25, 1.
- Eberhard, P H (1977) Il Nuovo Cim. 38B(1), 75.
- Einstein, A (1936) J. Franklin Inst. 221, 349.
- Einstein, A (1948) Dialectica 2, 320.
- Einstein, A (1949) in P. A. Schilpp, ed., 665.
- Einstein, A; Podolski, B; Rosen, N (1935) Phys. Rev. 47, 777.
- Everett III, H (1957) Rev. Mod. Phys. 29, 454.

- Falco, D de; Martino, S de; Siena, S de (1982) Phys. Rev. Lett. 49(3), 181.
- Faraci, G; Gutkowski, D ; Notarrigo, S ; Pennisi, A R (1974) Lett. Nuovo Cim. 9(15), 607.
- Feller, W (1976) An Introduction to Probability Theory and its Applications - trad. bras. Edgard Blucher, SP.
- Feyerabend, P (1958) The Aristotelian Soc. Suppl. 32, 75.
- Feynman, R P; Leighton, R B; Sands, M (1965) The Feynman Lectures on Physics, v.3 (Addison-Wesley)
- Fine, A (1970) Phys. Rev. D 2, 2783.
- Fine, A (1973) in "Logic, Methodology and Philosophy of Science IV", ed. P. Suppes et al (North-Holland)
- Fock, V A (1962) Sov. Phys. JETP 15, 784.
- Fock, V A (1968) ICTP - Trieste, SMR5/8 (não publ.).
- Forman, P (1971) in "Historical Studies in the Physical Sciences" ed. R. McCormach, vol III (U. Pennsylvania Press), 9.
- Fox, R (1971) Lett. Nuovo Cim, 2(11), 565.
- Freedman, S J (1972) PhD-Thesis - Lawrence Berkeley Lab. Rep. LBL391.
- Freedman, S J; Clauser, J F (1972) Phys. Rev. Lett. 228(14), 938.
- Freedman, S J; Holt, R A; Papaliolios, C (1976) in "Quantum Mechanics, Determinism, Causality and Particles" ed. M. Flato et al.
- Fry, E S; Thompson, R C (1976) Phys. Rev. Lett. 37(8), 465.
- Furry, W H (1936) Phys. Rev. 49, 393.
- Gamba, A (1950) Nature, 166, 655.
- Ghirardi, G C; Rimini, A; Weber, T (1980) Lett. Nuovo Cim. 22(10), 293.
- Ghirardi, G C; Weber, T (1983) Il Nuovo Cim. 28(1), 9.
- Gibbins, P (1981) Phil. Sci. 48, 122.
- Gleason, A M (1957) J. Math. and Mech. 6, 885.
- Golin, S (1985) J. Math. Phys. 26(11), 2781.
- Graham, R N (1970) PhD Thesis - Un. North Carolina.
- Grangier, P; Roger, G; Aspect, A (1986) Europhys. Lett. 1(4), 173.
- Greenberger, D M (1983) Rev. Mod. Phys. 55(4), 875.
- Grib, A A (1984) Sov. Phys. Usp. 12, 284.
- Griffiths, H N (1963) Senior Thesis (Princeton)
- Heisenberg, W (1927) Zeitsch. fur Physik 43, 142.
- Heisenberg, W (1930) The Physical Principles of the Quantum Theory (Un. Chicago Press).
- Heisenberg, W (1958) Physics and Philosophy - trad. bras. (UnB, 1981).
- Heisenberg, W (1967) in "Niels Bohr", S. Rozental, ed.
- Herbert, N (1975) Am. J. Phys. 43, 315.
- Herbert, N (1982) Found. Phys. 12, 1171.
- Herbert, N; Karush, J (1978) Found. Phys. 8, 313
- Herdan, G (1952) Die Naturwissenschaften 31, 350.
- Holt, R A; Pipkin, F M (1973) Preprint Harvard Un. (não public.)
- Home, D ; Marshall, T W (1985) Phys. Lett. 113A(4), 183.
- Ivanovic, I D (1978) Lett. Nuovo Cim. 22(1), 14.
- James, W (1909) The Meaning of Truth.
- Jammer, M (1966) The Conceptual Development of Quantum Mechanics (Mc Graw-Hill, NY)
- Jammer, M (1974) The Philosophy of Quantum Mechanics (Wiley, NY)
- Jammer, M (1980) La Recherche 111(11), 510.
- Jánossy, L; Nagy, K (1956) Annln der Physik 17, 115.
- Jánossy, L; Naray, Z (1957) Acta Phys. Hung. 4, 301.
- Jauch, J M (1964) Helv. Phys. Acta 37, 293.s15
- Jauch, J M (1968) Foundations of Quantum Mechanics (Benjamin, Read.)

- Jauch, J M; Piron, C (1963) *Helvet. Phys. Acta* 36, 837.
- Jauch, J M; Wigner, E P; Yanase, M M (1967) *Il Nuovo Cim.* 48B(1), 144.
- Jenkins, F A; White, H E (1957) *Fundamentals of Optics* (McGraw-Hill).
- Jordan, P (1936) *Anschauliche Quantenmechanik* (Springer, Berlin).
- Jordan, P (1949) *Phil. Sci.* 16(4), 269.
- Kasday, L R (1971) in B. D'Espagnat, ed.
- Kasday, L R; Ullman; J D; Wu, C S (1975) *Il Nuovo Cim.* 25B (2), 632.
- Khinchin, A I (1957) *Mathematical Foundations of Information Theory* (Dover).
- Kochen, S; Specker, E P (1967) *J. Math. Mech.* 17, 59.
- Kocher, C A; Commins, E D (1967) *Phys. Rev. Lett.* 18(15), 575.
- Lamehi-Rachti, M; Mittig, W (1976) *Phys. Rev. D* 14(10), 2543..
- Landau, L; Peierls, R (1931) *Zeitsch. Phys.* 69, 56.
- Landé, A (1965) *New Foundations of Quantum Theory* (Cambridge U P).
- Landé, A (1973) *Quantum Mechanics in a New Key* (Exposition, NY).
- Leggett, A V (1984) *Contemp. Phys.* 25(60), 583.
- Lo, T K; Shimony, A (1981) *Phys. Rev. A* 23(6), 3003.
- Lochak, G (1976) *Found. Phys.* 6, 173.
- London, F; Bauer, E (1939) *La Theorie de l'Observation en Mécanique Quantique* (Hermann, Paris)
- Ludwig, G (1971) in B. d'Espagnat, ed.
- Madelung, E (1926) *Zeitsch. der Phys.* 40, 322.
- Magyar, G; Mandel, L (1963) *Nature* 198, 255.
- Mandel, L (1959) *Proc. Phys. Soc. Lond.* 74, 233.
- Margenau, H (1958) *Phil. Sci.* 25(1), 23.
- Margenau, H (1963a) *Annals of Phys.* 23, 469.
- Margenau, H (1963b) *Phil. Sci.* 30(1), 1.
- Margenau, H; Hill, R N (1961) *Prog. Theor. Phys.* 26, 722.
- Margenau, H; Park, J L (1973) *Found. Phys.* 3(1), 19.
- Marshall, T W; Santos, E (1985) *Phys. Lett.* 107A(4), 164.
- Marshall, T W; Santos, E; Selleri, F (1983a) *Phys. Lett.* 92A(1), 5.
- Marshall, T W; Santos, E; Selleri, F (1983b) *Lett. Nuovo Cim.* 38, 417.
- Merli, P G; Missirolo, G F; Pozzi, G (1976) *Am. J. Phys.* 44(3), 306.
- Merzbacher, E (1961) *Quantum Mechanics* (Wiley, NY).
- Messiah, A (1964) *Quantum Mechanics* (North-Holland, Amst.)
- Moldauer, P A (1972) *Phys. Rev. D* 5, 1028.
- Moyal, J E (1949) *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 45, 99.
- Ne'eman, Y (1985) *Proc. Symp. on the Foundations of Modern Physics*, P. Lahti e P. Mittelstaedt, eds., p.481.
- Nelson, E (1966) *Phys. Rev.* 150, 1079.
- Nesenheimer, K (1979) *Thesis, Un. Freiburg* (não public.)
- Notarrigo, S (1984) *Il Nuovo Cim.* 83B (2), 173.
- Park, J (1968) *Am. J. Phys.* 36, 211.
- Partovi, M H (1983) *Phys. Rev. Lett.* 50(24), 1883.
- Paty, M (1977) in J. Leite Lopes, ed.
- Paul, H (1980) *Fortschritte der Physik* 28, 633.
- Pearle, P (1967) *Am. J. Phys.* 35, 742.
- Pearle, P (1970) *Phys. Rev.* 2, 1418.
- Pearle, P (1986) *Phys. Rev. D* 33(8), 2240.
- Peña-Auerbach, L de la; Cetto, A M (1972) *Phys. Lett.* 39A(1), 65.
- Perrie, W; Duncan, A J; Beyer, H J; Kleinpoppen, H (1985) *Phys. Rev. Lett.* 54(16), 1790.
- Pessoa, E F; Coutinho, F A B; Sala, O (1979) *Introdução à Física Nuclear* (EDUSP, SP).
- Pfleegor, R L; Mandel, L (1967) *Phys. Lett.* 24A, 766.

- Pfleegor, R L; Mandel, L (1968) *J. Opt. Soc. Am.* 58, 946.
- Philippidis, C; Dewdney, C; Hiley, B (1979) *Il Nuovo Cim.* 52B, 15.
- Popper, K R (1959) *The logic of Scientific Discovery*, 6a imp. - trad. bras. Cultrix, SP, 1974.
- Popper, K R (1967) in "Quantum Theory and Reality", ed. M. Runge, (Springer, NY), 7.
- Popper, K R (1972) *Conjectures and Refutations*, 4a ed. (trad. bras. UnB).
- Popper, K R (1985) in G. Tarozzi, ed.
- Prigogine, I (1980) *From Being to Becoming*.
- Prugovecki, E (1967) *Can. J. Phys.* 45, 2173.
- Radloff, W (1968) *Phys. Lett.* 27A, 366.
- Radloff, W (1971) *Annalen der Phys.* 26, 178.
- Rae, A (1986) *Quantum Physics: Illusion or Reality?* (Cambridge U.P.).
- Raju, C K (1981) *Int. J. Theor. Phys.* 20(9), 681.
- Rapisarda, V A (1982) *Lett. Nuovo Cim.* 33(14), 437.
- Rauch, H (1982) *Hadronic J.* 5; 729.
- Rauch, H (1984) *J. Physique C*3, tomo 45, 197.
- Rauch, H (1985) in "Open Questions in Quantum Physics" eds. G. Tarozzi e A. Van der Merwe (D. Reidel), 345.
- Recami, E (1986) *Riv. Nuovo Cim.* 9(6), 1.
- Reynolds, G T; Sparrallian, K; Scarl, D B (1969) *Il Nuovo Cim.* 61B, 355
- Richtmyer, R D (1978) *Principles of Advanced Mathematical Physics* (Springer, NY).
- Riedtdijk, C W (1978) *Found. Phys.* 8(7,8), 615.
- Robertson, H P (1929) *Phys. Rev.* 34, 163.
- Rosenfeld, L (1965) *Prog. Theor. Phys. Supp.* p.222.
- Santos, E (1984) *Phys. Lett.* 101A(8), 378.
- Scalera, G C (1983) *Lett. Nuovo Cim.* 38, 16.
- Scheibe, E (1968) *Philosophia Naturalis* 19, 249.
- Schilpp, P A ed. (1949) *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* (Libr. of Liv. Phil., NY).
- Schlick, M (1931) *Die Naturwissenschaften* 19, 145 (trad. bras. in "Os Pensadores", Abril, 1980).
- Schlick, M (1949) *Philosophy of Nature* (Philosop. Libr., Inc).
- Schroedinger, E (1926a) *Ann. der Physik* 79, 361.
- Schroedinger, E (1926b) *Ann. der Physik* 79, 734.
- Schroedinger, E (1930) *Berliner Berichte*, 296.
- Schroedinger, E (1935) *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 31, 555.
- Selleri, F (1978) *Found. Phys.* 8; 103.
- Selleri, F (1982) *Found. Phys.* 12(11), 1087.
- Selleri, F (1986) *El debate de la Teoría Cuántica* (Alianza, Madrid).
- Selleri, F; Tarozzi, G (1981) *Riv. Nuovo Cim.* 4 (2).
- Shimony, A (1963) *Am. J. Phys.* 31, 755.
- Shimony, A; Horne, M A; Clauser, J F (1976) *Epistem. Lett.* 13, 1.
- Sillitto, R M (1971/2) *Proc. Royal Soc. Edimb. (A)* 70, 267.
- Sillitto, R M; Wykes, C (1972) *Phys. Lett.* 39A, 333.
- Skalsey, M (1986) *Phys. Rev. D* 33(8), 2233.
- Spasskii, B I; Moskovskii, A V (1984) *Sov. Phys. Usp.* 27(4), 273.
- Srinivas, M D (1985) *Pramāna* 25(4), 369.
- Stapp, H P (1971) *Phys. Rev. D* 3, 1303.
- Stapp, H P (1972) *Am. J. Phys.* 40, 1098.
- Stapp, H P (1977a) *Found. Phys.* 7(5,6), 313.
- Stapp, H P (1977b) *Il Nuovo Cim.* 40B, 191.
- Stapp, H P (1979) *Found. Phys.* 9(1,2), 1.

- Stapp, H P (1985) *Am. J. Phys.* 53(4), 306.
- Stenholm, S (1985) *Comment. Physico-Mathematicae* Z1, 1.
- Summhammer, J; Badurek, G; Rauch, H; Kischko, U; Zeilinger, A (1983) *Phys. Rev. A* 27(5), 2523.
- Tarozzi, G (1985) *Proc. Intern. Conf. on Microphysical Reality and Quantum Formalism, Urbino, Italia (A ser publicadò)*.
- Taylor, G I (1909) *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 15, 114.
- Ter Haar, D; Nicol, W M (1955) *Nature* 175, 1046.
- Van de Waerden, B L (1967) *Sources of Quantum Mechanics (North-Holland, Amsterdam)*.
- Viglier, J P (1979) *Lett. Nuovo Cim.* 24, 258.
- Viglier, J P (1985) in G. Tarozzi, ed.
- von Neumann, J (1932) *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (trad. am. Princeton U.P., 1955)*
- Vorontsov, Y I (1981) *Sov. Phys. Usp.* 24(2), 150.
- Young, T (1804) *Phil. Trans.*, 1.
- Wheeler, J A (1957) *Rev. Mod. Phys.* 29, 463.
- Wheeler, J A (1978) in "Mathematical Foundations of Quantum Theory", ed. A. Marlow (AP), 9.
- Whittaker, E T (1953) *A History of the Theories of Aether and Electricity, vol. II (Humanities Press, NY, 1973)*
- Wigner, E P (1962) in "The Scientist Speculates" ed. I. J. Good (Basic Books, NY), 284.
- Wigner, E P (1963) *Am. J. Phys.* 31, 6.
- Wigner, E P (1970) *Am. J. Phys.* 38, 1005.
- Wilson, A R; Lowe, J; Butt, D K (1976) *J. of Physics G*, 2, 613.
- Wootters, W K; Zurek, W H (1979) *Phys. Rev. D* 19, 473.
- Wu, C S; Shaknov, I (1950) *Phys. Rev.* 77, 136.
- Zeh, H D (1970) *Found. Phys.* 1, 69.