

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Departamento de Física da Matéria Condensada

TESE DE DOUTORADO

ANÁLISE E GERAÇÃO DE EMARANHAMENTO EM SISTEMAS DE VARIÁVEIS DISCRETA E CONTÍNUA VIA ÁTOMOS

Ricardo José Missori

Prof^a. Dr^a. Kyoko Furuya (orientadora) – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira (coorientador) – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Luis Eduardo Evangelista de Araújo – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Kaled Dechoum – IF/UFF

Prof. Dr. Marcelo Martinelli – IF/USP

Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzun (suplente) – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Gilberto Aparecido Prativiera (suplente) – IF/UNIFEG

Tese apresentada ao Instituto de Física
"Gleb Wataghin" para a obtenção do
Título de Doutor em Ciências.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado defendida pelo aluno Ricardo José Missori e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 26 de junho de 2009



Prof^a. Dr^a. Kyoko Furuya

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M691a	<p>Missori, Ricardo José Análise e geração de emaranhamento em sistemas de variáveis discreta e contínua via átomos / Ricardo José Missori. -- Campinas, SP : [s.n.], 2009.</p> <p>Orientadores: Kyoko Furuya e Marcos César de Oliveira. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".</p> <p>1. Ótica quântica. 2. Emaranhamento quântico. 3. Estados não-Gaussianos. I. Furuya, Kyoko. II. Oliveira, Marcos César de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">(vsv/ifgw)</p>
-------	---

- **Título em inglês:** Analysis and generation of entanglement in systems of continuous and discrete variables via atoms
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Quantum optics
 2. Quantum entanglement
 3. Non-Gaussian states
- **Área de concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em ciências
- **Banca examinadora:**

Prof^a Kyoko Furuya
Prof. Antonio Vidiella Barranco
Prof. Luis Eduardo Evangelista de Araújo
Prof. Kaled Dechoum
Prof. Marcelo Martinelli
- **Data da defesa:** 26-06-2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **RICARDO JOSÉ MISSORI - RA 004413**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN” DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 26/06/2009.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dra. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP
(Orientadora do Candidato)

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Kaled Dechoum - Instituto de Física/UFF

Prof. Dr. Luís Eduardo Evangelista de Araújo - DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Martinelli - Instituto de Física/ USP

“Agora está tão longe

Vê, a linha do horizonte me distrai:

Dos nossos planos é que tenho mais saudade,

Quando olhávamos juntos na mesma direção

Aonde está você agora

Além de aqui dentro de mim?”

(Vento no Litoral - Legião Urbana)

Dedicada ao meu pai,

Anésio Missori (21/01/1947 - 10/10/2004),

o meu maior professor.

Agradecimentos

- Em primeiro lugar, agradeço à minha orientadora Kyoko, pela paciência e compreensão quase infinitas. Com tantos imprevistos que surgiram durante esses anos de trabalho juntos, ela se manteve firme na minha orientação, porém sem perder a doçura ao me ajudar a transpor e entender as dificuldades (inclusive as acadêmicas). Mais que orientadora, uma grande amiga!
- Agradeço também ao meu coorientador e amigo Marcos César. Dotado de grande paciência e enorme disposição e empolgação para ensinar, foi determinante para a minha formação. Valeu, Marcos!
- Agradeço ao meu amigo Fernando Semião, pela colaboração significativa durante meu doutorado. Suas idéias, sempre interessantes, contribuíram (e muito) para a obtenção de alguns dos resultados apresentados aqui.
- Agradeço aos demais professores membros da banca: Marcelo Martinelli (USP), Kaled Dechoum (UFF), Antonio Vidiella Barranco e Luis Eduardo E. de Araújo (ambos da Unicamp). Com certeza tornaram, com seus comentários e observações, essa tese muito mais didática e completa.
- Agradeço a alguns amigos que contribuíram muito, de várias e diferentes formas, para que eu finalizasse essa tese. Entre eles, gostaria de destacar alguns, que conviveram maior tempo ao meu lado, e que considero como irmãos: Fernando Semião (meu irmãozinho, grande físico, responsável por ótimas conversas sobre música, vida e o maior responsável pela entrada do *darma* em minha vida), Pablo P. Munhoz (amigo desde sempre, e sempre disposto a ajudar, seja qual for a situação, desde dificuldades em latex até perdas pessoais) e Sérgio Campos (amigo de turma da graduação, metrado e doutorado, quase uma vida de amizade, até hoje presente para tudo, mais que um irmão).
- Na Unicamp (IFGW) foram vários os amigos que deixaram alguma marca nessa minha passagem pelo doutorado. Agradeço a vários deles, e mesmo assim tenho certeza que esqueci alguns, e a esses peço desculpas! Vamos lá (ordem aleatória): Carlos Todero (Carlão), Augusto Soares, Tércio, Pepe Diaz, Ana Lúcia, Thalita, Dominique, Reginaldo, Álvaro, Fernando Sato, Fred, Max, Sebastian, Hugo, Bruno, Fabiano, Leandro, Borelli, Henrique, Marcelo, Emiliano, Marcos Vinícius, Gustavo Rigolin e Alex Bernardini.
- Agradeço também ao pessoal da cantina do IEL, que frequento desde o início do meu mestrado até

os dias de hoje, e que foi local de muitas discussões sobre tudo, inclusive física. São eles: Mundinho, Catulé, Mirian, Odete, Vande e Paula.

- Agradeço muito ao pessoal da CPG (Maria Ignez, Armando, Cássia, Esther, Gilvani e aos patrulheiros) e aos funcionários do DFMC (Carmen, Emília, Maria Helena e Siulan), por solucionar inúmeras dúvidas sobre relatórios, congressos e afins; ao pessoal da biblioteca do IFGW.

- Não poderia deixar de agradecer aos professores e alunos das duas instituições que me contrataram após o término da minha bolsa: Unip (Campinas e Jundiaí) e Uniachieta (Jundiaí).

- Agradeço a todos meus tios, tias, primos e familiares que sempre me apoiaram e incentivaram. Agradeço também todos meus amigos não-físicos: Adilson e família, Mogli e família, Vicente e família, Tatiane e família.

- Agradeço ao meu saudoso pai Anésio, minha querida mãe Suely e minha irmã Carolina, por me ajudarem nos momentos difíceis, tornando-os momentos mais felizes. Vocês sempre serão minha vida!

- Agradeço à minha segunda família: Seu Antonio, Dona Neuza e Liciane, pelos pensamentos positivos e torcida.

- Agradeço minha companheira para toda a vida, meu amor, minha bela e doce Letícia Lavorini. TAMESMLP!

- Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Ricardo José Missori

Universidade Estadual de Campinas

Junho de 2009

Resumo

Nesta tese, apresentamos dois resultados para a geração de emaranhamento, ambos envolvendo a interação entre átomos e radiação. Na primeira parte, propomos um esquema para geração de estados emaranhados envolvendo os estados eletrônicos de dois íons separados espacialmente, cada qual aprisionado em uma cavidade. Um átomo propagante, que cruza essas cavidades, é responsável pela geração de estados emaranhados do tipo Bell entre os dois íons. Mostramos que para tempos específicos de interação, a geração dos estados emaranhados é não-probabilística. Propostas de átomo e íons, candidatos a implementação do esquema experimental, também são apresentadas.

Já segunda parte deste trabalho, investigamos um modelo para a interação de dois campos quânticos ortogonalmente polarizados com uma nuvem de átomos de quatro níveis do tipo-X. Consideramos, para nosso esquema, situações físicas onde os átomos funcionam efetivamente como sendo de dois níveis. Assim, dentro de uma aproximação linearizada do campo, nosso Hamiltoniano efetivo bilinear, que representa a interação átomos-campo, passa a depender da diferença de população entre os dois níveis do *ensemble* de átomos. Após uma medida condicionada nos átomos, mostramos que os dois modos do campo ficam em estados emaranhados não-Gaussianos, diferentemente do que foi considerado em alguns trabalhos recentes na literatura que abordamos. Como a compressão abaixo do limite de ruído na polarização linear pode ser usada como indicadora de emaranhamento na polarização circular, nós podemos usar a variância das quadraturas, combinada com o critério de inseparabilidade para variáveis contínuas, para complementar o nosso estudo sobre o esquema experimental.

Abstract

In this thesis, we present two results of entanglement generation, both involving atom-radiation interaction. In the first part, we consider a scheme for generation of entangled states involving electronic states of two distant ions, each one placed in a cavity. A flying atom, that crosses these cavities, is responsible for the generation of entangled states of the Bell-type between the two ions. We show that for specific times of interaction, the entangled states are generated and in a non-probabilistic way. We also present a realistic proposal of candidates for atoms and ions for an experimental implementation of this scheme.

In the second part of this work, we investigate a model for the interaction of two orthogonally polarized quantum fields with a cloud of X-like four-level atoms. We consider, in our scheme, a physical situation where the atoms act effectively like two-level atoms. Thus, in a linearized approximation for the field, we derive a bilinear effective Hamiltonian representing the atom-field interaction, which depends on the difference of population between the ensemble of two-level atoms. After a conditional measurement in the atomic system, we show that the two field modes ends up in a non-Gaussian entangled states, differently from what has been considered in some recent works in the literature. Since the squeezing below the noise limit in the linear polarization can be used as an indicator of entanglement in the circular polarization, we can use the variances in the quadratures, combined with the inseparability criterion for continuum variables, to complement our study of the experimental scheme.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	x
1. Introdução	1
2. Fundamentos	3
2.1. Operador densidade, estados puros e mistos, traço, traço parcial, medidas projetivas e fase	3
2.2. Bits quânticos ou <i>qubits</i>	8
2.3. Emaranhamento entre dois subsistemas quânticos	8
2.4. Estados gaussianos e variáveis contínuas	12
2.5. Critérios de inseparabilidade	13
3. Emaranhando partículas distantes	15
3.1. Geração de estados emaranhados de átomos distantes por interferência usando emissão espontânea	15
3.2. Geração de estados emaranhados de átomos distantes por interferência de fótons polarizados	17
3.3. Geração de estados emaranhados de íons distantes usando um átomo propagante	19
3.3.1. O esquema e o modelo	20
3.3.2. Discussão sobre possíveis candidatos de íons e átomo	21
3.3.3. Obtenção do estado de Bell	22
3.3.4. Fidelidade de teletransporte e fração máxima de emaranhamento	23
4. Emaranhamento em variáveis contínuas de estados de polarização circular e linear e a não-Gaussianidade	26
4.1. Porque a auto-rotação gera compressão: explicação qualitativa	27
4.2. Modelo para interação de dois modos de polarização e N átomos de quatro níveis	28
4.3. Modelo efetivo no regime dispersivo: interação de dois modos de polarização e N átomos de dois níveis	30
4.4. Evolução não-Gaussiana: estados coerentes emaranhados e superposição de estados coerentes	33
5. Considerações finais e perspectivas futuras	43
A. Obtenção dos estados átomo-íons emaranhados considerando decoerência e dissipação (capítulo 3)	44
B. Obtenção do estado átomo-campo emaranhado (capítulo 4)	47
C. Variância das quadraturas	50
D. Função de Wigner	52
Referências	57

Lista de Figuras

- 1 Esquema do experimento de Cabrillo e colaboradores [11]. Átomos de três níveis A e B, separados espacialmente, e detetor \mathbb{D} . Na figura pequena temos um esquema mais detalhado dos níveis atômicos. 16
- 2 Esquema do experimento de Feng e colaboradores [12]. (a) Estrutura dos níveis atômicos. (b) Esquema experimental. Cavidades A e B, contendo os átomos 1 e 2 respectivamente. Os fótons saindo das cavidades são detetados por \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 , após passarem por placas de quarto de onda e divisores de feixes polarizados. 17
- 3 Figura esquemática da proposta para emaranhamento de partículas espacialmente distantes [30]: duas cavidades A e B, cada uma aprisionando um íon, além de um átomo propagante que cruza as cavidades, utilizado como agente emaranhador dos estados eletrônicos do íons. 20
- 4 Gráfico da fração máxima de emaranhamento F_{\max} , mostrada na equação (3.22). 24
- 5 A figura à esquerda (a) mostra o esquema do experimento utilizado por Josse e colaboradores [23] para geração de compressão e emaranhamento de quadratura e polarização nos modos de um laser incidente linearmente polarizado. A figura à direita (b) representa o modelo do átomo de 4 níveis tipo X utilizado. 28
- 6 Evolução temporal da variância das quadraturas para os modos polarizados circularmente, com $\beta = \alpha$, $\text{Re}[\alpha] = 0$ e $\text{Im}[\alpha] = 0.3$. (a) $(\Delta X_+)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_+)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$. (b) $(\Delta X_+)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_+)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. 37
- 7 Gráfico da evolução temporal do critério de inseparabilidade (polarização linear) para $\alpha = \beta$, fixando três diferentes linhas para $\text{Re}[\alpha] = 0$, $\text{Im}[\alpha] = 0.3$ (linha contínua), $\text{Im}[\alpha] = 0.7$ (linha tracejada), e $\text{Im}[\alpha] = 1.5$ (linha pontilhada). (a) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$ e (b) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. Todos os gráficos indicam ausência de emaranhamento, de acordo com o estado separável, mas não-Gaussiano, obtido para essa situação. 38
- 8 Evolução temporal da variância das quadraturas para os modos linearmente polarizados, com $\alpha = \beta$, $\text{Re}[\alpha] = 0$ e $\text{Im}[\alpha] = 0.3$. (a) $(\Delta X_y)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_y)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$. (b) $(\Delta X_y)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_y)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. O modo x está no estado de vácuo. 39
- 9 Gráfico do critério de inseparabilidade como função do tempo para os modos circularmente polarizados com $\alpha = \beta$, fixando três diferentes linhas para $\text{Re}[\alpha] = 0$, $\text{Im}[\alpha] = 0.3$ (linha contínua), $\text{Im}[\alpha] = 0.7$ (linha tracejada), e $\text{Im}[\alpha] = 1.5$ (linha pontilhada). (a) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$. Pontos da curva abaixo de 1 indicam emaranhamento dos modos circularmente polarizados. (b) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. O critério é afetado pela não-Hermiticidade do Hamiltoniano, mas para tempos curtos, ainda vemos emaranhamento (figura pequena). 40

-
- 10 Gráfico da evolução temporal da entropia linear para o modo circularmente polarizado + com $\alpha = \beta$ fixando três diferentes linhas para $\text{Re}[\alpha] = 0$, $\text{Im}[\alpha] = 0.3$ (linha sólida), $\text{Im}[\alpha] = 0.7$ (linha tracejada), e $\text{Im}[\alpha] = 1.5$ (linha pontilhada). (a) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$ Indica emaranhamento e desemaranhamento periódico para os dois modos ortogonais. (b) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$ A periodicidade do emaranhamento-desemaranhamento é afetada pela não-Hermiticidade do Hamiltoniano. O sistema tende a ficar fortemente emaranhado para tempos longos. 41
- 11 Gráfico 3D da fidelidade entre o estado gerado (Eq.4.53) e o estado de vácuo comprimido (Eq.D.1) como função de α e ξ . A condição de acoplamento adotada para essa figura é $\lambda_1/|\lambda_2| \approx 0$. 42
- 12 Gráfico da função de Wigner para (a-c) o estado de vácuo comprimido, onde adotamos o parâmetro de compressão $\xi = 0,2$ e (b-d) a superposição de estados coerentes par com $\alpha = 0,2\sqrt{2}$. Esses são parâmetros que tornam alta a fidelidade entre esses estados. 55
- 13 Gráfico da função de Wigner para (a-c) o estado de vácuo comprimido, onde adotamos o parâmetro de compressão $\xi = 0,5$ e (b-d) a superposição de estados coerentes par com $\alpha = 0,7$. Esses são parâmetros que tornam baixa a fidelidade entre esses estados. 56

1. INTRODUÇÃO

Alguns aspectos da mecânica quântica que já foram considerados problemáticos, como a inseparabilidade quântica e a “ação fantasmagórica a distância” [1], hoje em dia deixaram de ser vistos como problemas, para serem considerados ingredientes essenciais, que permitem entender melhor a mecânica quântica. Da última década do século passado para cá, um enorme progresso tem acontecido nos novos campos de pesquisa de informação e computação quânticas, onde o conceito de emaranhamento [2, 3] desempenha um papel muito importante. Ele é o recurso essencial que permite realizar comunicação quântica [4], computação quântica [5] e teleportação quântica [6].

Um dos problemas da comunicação quântica é estabelecer emaranhamento multipartite entre partículas pertencentes a utilitários distantes numa rede de comunicação. Um dos primeiros mecanismos propostos foi através de múltiplas trocas (*swappings*) de emaranhamento [7]. Outro procedimento seria o uso de um elemento propagante, que interage com as partículas distantes, permitindo realizar o emaranhamento. Um dos grandes problemas a serem resolvidos para se construir um computador quântico é o problema da escalabilidade. A idéia de combinar *qubits* estacionários e *qubits* propagantes numa cadeia quântica para transmissão de informação quântica tem sido explorada pela comunidade de informação quântica [8] para obter tecnologia escalável, viabilizando a construção de computadores quânticos. Uma solução proposta para obter uma forma escalável é realizar a computação quântica de forma distribuída [9], sem interação direta entre os *qubits* espacialmente separados. Numa rede construída com esse intuito, os nodos seriam formados por *qubits* estacionários e a informação seria levado pelos *qubits* propagantes. Usualmente, os *qubits* propagantes são fótons e os estacionários matéria (átomos, íons). A implementação prática destas redes propostas, que visam a geração de emaranhamento entre dois *qubits* de matéria espacialmente separados e que não interagem diretamente, utilizando um outro sistema que é detetado, foram realizadas por alguns autores [10–12]. A maioria desses esquemas fazem uso ou de átomos ou de íons com três níveis tipo Λ ou quatro níveis, aprisionados em cavidades distantes, onde o emaranhamento entre eles é estabelecido via efeitos induzidos por interferência. O esquema de Bose e colaboradores [10] foi utilizado por Barrett e Kok [9] para propor uma computação quântica escalável distribuída com operações de emaranhamento não-determinístico, e Lim e colaboradores [8] propuseram um esquema de operação de porta lógica do tipo “repete-até-dar-certo”, que permitiria eventualmente realizá-lo deterministicamente.

Por outro lado, um dos campos em que experimentos relevantes tem sido realizados é aquele em que se utiliza íons aprisionados [13]. Devido à preservação da coerência por um tempo relativamente longo comparado a outros sistemas, o sistema com estados eletrônicos de íons fazendo o papel de *qubits* foi um dos sistemas aventados para implementação de computador quântico por Cirac e Zoller [14]. Também foi apontado que o processo de detecção através da fluorescência induzida por laser é extremamente eficiente. Estes aspectos permitiram a obtenção experimental de estados emaranhados de vários íons [15, 16]. Um outro aspecto vantajoso dos íons apontado também na referência [14] é a possibilidade de implementação de operações através do uso de lasers, de modo que os íons não necessariamente precisam estar a distâncias microscópicas.

Iniciamos esta tese no capítulo 2, apresentando os fundamentos que consideramos essenciais para a leitura do restante da tese. Entre eles estão a notação de operador densidade, o conceito de emaranha-

mento, algumas medidas de interesse e o critério de inseparabilidade de Duan de estados quânticos. A primeira contribuição original desta tese, apresentada no capítulo 3, é a proposta de um esquema de geração de estados maximamente emaranhados utilizando como *qubits* os estados eletrônicos de dois íons distantes. Por sua vez, utilizamos como elemento propagante um átomo de dois níveis. Mostramos que, mesmo considerando perdas pelo átomo propagante durante o voo entre as cavidades distantes onde estariam os íons, a fidelidade do estado final em relação ao estado de Bell desejado é muito boa.

A segunda contribuição original desta tese tem relevância na área de informação quântica, onde são utilizadas redes quânticas, constituídas por elementos quânticos, cujos observáveis possuem espectro contínuo. Tais são, por exemplo, os feixes intensos de luz. Por exemplo, no experimento de Furusawa e colaboradores [17], se realizou pela primeira vez a teleportação quântica incondicional de estados de sistemas de variáveis contínuas (VC) utilizando campos ópticos. Tais implementações são de grande interesse tecnológico por várias razões, das quais mencionamos duas: primeiro as componentes ópticas são muito poderosas e adequadas para integração na tecnologia de comunicação atual. Segundo, pode-se utilizar os mesmos métodos de VC propostos por Braunstein e Kimble neste protocolo de teletransporte [18] usando óptica linear para outros protocolos computacionais como correção de erros e codificação super-densa de informação óptica.

No contexto de emaranhamento de sistemas de VC, associadas a espaços de Hilbert de dimensão infinita, possíveis aplicações em tarefas na comunicação e informação quânticas tem recebido atenção crescente [19]. Em especial houve uma focalização grande numa família de estados conhecidos como estados Gaussianos, pela grande relevância prática em aplicações de óptica quântica e informação quântica. Inclusive as discussões de critérios de separabilidade e propriedades de emaranhamento foram inicialmente feitos para o caso biparte e para essa classe de estados [20, 21] no contexto de VC, e somente muito recentemente o emaranhamento em estados não-Gaussianos tem começado a chamar atenção. Num experimento recente foi demonstrado que um estado comprimido de dois modos pode ser de-Gaussianificado por subtração coerente de um único fóton [22], e que as propriedades não-locais e graus de emaranhamento de tal estado seriam aumentados.

No capítulo 4 apresentamos uma análise inspirada pelo experimento realizado por Josse e colaboradores [23, 24] usando a interação entre um feixe de luz coerente, intenso, linearmente polarizado e uma nuvem de átomos frios colocados numa cavidade óptica de alta *finesse*. Mostramos que a interação átomo-campo produz dois modos comprimidos com polarizações ortogonais, cujo emaranhamento queremos quantificar. No artigo experimental [24] os autores argumentam que os feixes resultantes estariam num estado Gaussiano e realizam a análise de inseparabilidade baseado neste fato. Nosso estudo mostra que neste experimento podem estar sendo gerados estados não-Gaussianos e sugerimos considerar o caráter não-Gaussiano dos feixes resultantes. Refazemos a análise de inseparabilidade dos estados resultantes do experimento, levando-se em conta o caráter não-Gaussiano.

Finalmente, no capítulo 5 apresentamos algumas conclusões e considerações finais, e nos apêndices mostramos detalhes dos cálculos realizados para a obtenção dos estados gerados após a interação do átomo propagante com os íons aprisionados considerando decoerência e dissipação (referente ao capítulo 3), além dos cálculos dos estados gerados após a interação dos feixes polarizados com a nuvem de átomos, das variâncias das quadraturas e das funções de Wigner entre o estado de vácuo comprimido e a superposição de estados coerentes, sendo esses últimos cálculos do apêndice referentes ao capítulo 4.

2. FUNDAMENTOS

Em se tratando de uma tese que estuda efeitos puramente quânticos, sentimos a necessidade de introduzir alguns conceitos que tornam a leitura dessa tese mais completa e autônoma. Assumiremos também uma notação padrão em livros textos [25], que pode ser observada na tabela abaixo.

notação	descrição
z^*	conjugado complexo de um número z
$ \psi\rangle$	vetor ket
$\langle\psi $	vetor bra
$\langle\psi \phi\rangle$	produto interno entre os vetores $ \psi\rangle$ e $ \phi\rangle$
$ \psi\rangle \otimes \phi\rangle$	produto tensorial entre os vetores $ \psi\rangle$ e $ \phi\rangle$
$ \psi\rangle \phi\rangle$ ou $ \psi, \phi\rangle$	abreviação de $ \psi\rangle \otimes \phi\rangle$

Tabela I – Notação de mecânica quântica utilizada na tese.

2.1. Operador densidade, estados puros e mistos, traço, traço parcial, medidas projetivas e fase

A qualquer sistema físico isolado existe associado um espaço vetorial Γ complexo com produto interno (Espaço de Hilbert), conhecido como espaço de estados do sistema. O estado do sistema em um dado instante t é completamente descrito pelo seu vetor de estado, um vetor unitário no espaço de estados, representado, em termos dos vetores de uma base $\{|u_k\rangle\}$ de Γ , como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t)|u_k\rangle, \quad (2.1)$$

onde $|c_k(t)|^2$ é a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|u_k\rangle$, satisfazendo a relação $\sum_k |c_k(t)|^2 = 1$.

Por exemplo: para um sistema isolado qualquer, se pudermos determinar o estado do sistema através da medida de um conjunto completo de observáveis, que comutam entre si, então podemos dizer

que toda a informação possível sobre esse sistema é conhecida. Estados perfeitamente conhecidos são chamados de *estados puros*.

Uma outra formulação da mecânica quântica usual é a que utiliza o *operador densidade* ou *matriz densidade* [25]. Essa formulação é muito útil para descrever sistemas quânticos cujo estado não é completamente conhecido. Esse tipo de sistema pode estar num *estado de mistura estatística*, ou seja, numa mistura estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle$, com respectivas probabilidades p_1, p_2, \dots, p_k , onde é impossível descrever o “vetor de estado médio” por uma superposição dos estados $|\psi_k\rangle$, tal que $\sum_k p_k = 1$ ($p_k \geq 0$). Vamos agora verificar a descrição e as propriedades do operador densidade para estados puros e estados de mistura. Notamos que para um observável \mathbf{A} , o valor médio do mesmo para um sistema no estado $|\psi(t)\rangle$ é dado por

$$\langle \mathbf{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \mathbf{A} | \psi(t) \rangle. \quad (2.2)$$

Introduzindo a completeza de uma base ortonormal $\{|u_n\rangle\}$, podemos expressar o valor médio do operador \mathbf{A} como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \rangle(t) &= \sum_{n,m} \langle \psi(t) | u_n \rangle \langle u_n | \mathbf{A} | u_m \rangle \langle u_m | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle u_n | \mathbf{A} | u_m \rangle \langle u_m | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u_n \rangle \\ &= \sum_{n,m} \mathbf{A}_{n,m} \rho_{mn}(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\rho_{mn}(t)$ são os elementos de matriz de um operador $\rho(t)$ dado por

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (2.4)$$

O operador densidade é representado na base $\{|u_n\rangle\}$ pela chamada *matriz densidade*, cujos elementos são

$$\rho_{mn}(t) = \langle u_m | \rho(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_m(t). \quad (2.5)$$

Definido o operador densidade, podemos extrair algumas propriedades gerais, que se pode deduzir de forma simples para o caso puro:

- Normalização ^a

$$\text{Tr}[\rho(t)] = 1. \quad (2.6)$$

- Valor médio

O valor médio de uma observável \mathbf{A} num tempo t qualquer é dado por

^a A função *traço* é definida como a soma dos elementos da diagonal de um operador, ou seja, $\text{Tr}[\mathbf{A}] = \sum_i \mathbf{A}_{ii}$.

$$\langle \mathbf{A} \rangle(t) = \text{Tr}[\rho(t)\mathbf{A}]. \quad (2.7)$$

- Evolução temporal

A evolução temporal do operador densidade pode ser deduzida através da equação de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{H}(t), \rho(t)]. \quad (2.8)$$

- Hermiticidade

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t). \quad (2.9)$$

Propriedades específicas do operador densidade de estados puros

Estados puros são bem descritos tanto por vetores de estado como por operadores densidade. Na representação de operador densidade, além das propriedades descritas anteriormente, os estados puros possuem as seguintes propriedades particulares, que podem ser obtidas através da sua definição 2.4:

- $\rho^2(t) = \rho(t)$.
- $\text{Tr}[\rho^2(t)] = 1$.

propriedades do operador densidade para estados de mistura

Como dito anteriormente, se o estado do sistema não pode ser determinado exatamente, dizemos que este se encontra num estado de mistura estatística. Desta forma, uma mistura de estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ possui probabilidades de ocorrência p_1, p_2, \dots , respectivamente. Estas probabilidades são de natureza clássica e satisfazem as seguintes relações:

$$0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_k p_k = 1. \quad (2.10)$$

Cada um destes estados que compõem a mistura é um estado puro. E o operador densidade que descreve um destes estados é dado por

$$\rho_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \quad (2.11)$$

Desta forma, o operador densidade geral que descreve a mistura pode ser escrito como uma superposição de operadores densidade puros:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k. \quad (2.12)$$

Notamos que o valor médio de um observável neste caso é escrito como

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A} \rangle(t) &= \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{A}] = \text{Tr}\left[\sum_k p_k \boldsymbol{\rho}_k \mathbf{A}\right] = \sum_k p_k \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}_k \mathbf{A}] \\ &= \langle \langle \mathbf{A} \rangle_k(t) \rangle_{\text{ensemble}},\end{aligned}\tag{2.13}$$

isto é, o valor médio envolve além da média quântica para cada estado puro $|\psi_k\rangle$, a média estatística destes valores médios pesados pelas probabilidades p_k .

Além das propriedades gerais para operadores densidade, para o caso da mistura temos:

- $\boldsymbol{\rho}^2(t) \neq \boldsymbol{\rho}(t)$.
- $\text{Tr}[\boldsymbol{\rho}^2(t)] \leq 1$.

Populações e coerências

Os termos *populações* e *coerências* são utilizados no decorrer da tese, e podem ser facilmente compreendidos com o auxílio do operador densidade. Como vimos na equação (2.5), os elementos de matriz do operador densidade, no caso puro, podem ser escritos como

$$\rho_{mn}(t) = \langle \mathbf{u}_m | \boldsymbol{\rho}(t) | \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{c}_n^*(t) \mathbf{c}_m(t).\tag{2.14}$$

Os termos diagonais ρ_{nn} são iguais a $|\mathbf{c}_n(t)|^2$, que dão as probabilidades dos estados $|\mathbf{u}_n\rangle$. No caso geral, temos

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k (\rho_k)_{nn} = \sum_k p_k \langle \mathbf{u}_n | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \mathbf{u}_n \rangle = \sum_k p_k |\mathbf{c}_n^{(k)}|^2.\tag{2.15}$$

Estes termos diagonais representam a média estatística das probabilidades quânticas de encontrar o sistema no estado $|\mathbf{u}_n\rangle$, sendo por isso chamada de *população* do estado $|\mathbf{u}_n\rangle$.

Da mesma forma, os termos não diagonais são dados por

$$\rho_{nm} = \sum_k p_k \mathbf{c}_n^{(k)} \mathbf{c}_m^{(k)*},\tag{2.16}$$

expressando a média estatística dos efeitos de interferência entre os estados $|\mathbf{u}_n\rangle$ e $|\mathbf{u}_m\rangle$, que surgem quando o estado $|\psi_k\rangle$ é uma superposição coerente linear destes estados. Estes termos são conhecidos como *coerências*.

Traço parcial

Vamos considerar inicialmente dois subsistemas 1 e 2 de um sistema 1 + 2, com espaços de estados Γ_1 , Γ_2 e $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$, respectivamente. Além disso, adotamos as bases de Γ_1 como sendo $\{|\mathbf{u}_n\rangle\}$ e de Γ_2 como sendo $\{|\mathbf{v}_p\rangle\}$, com os kets $|\mathbf{u}_n\rangle \otimes |\mathbf{v}_p\rangle$ formando uma base para Γ . A idéia é obter, a partir de $\boldsymbol{\rho}$, um operador $\boldsymbol{\rho}_1$ que atua apenas em Γ_1 e um operador $\boldsymbol{\rho}_2$ que atua apenas em Γ_2 , para com isso sermos capazes de analisar cada subsistema separadamente. A operação que permite isso é chamada de *traço parcial*. Podemos definir os elementos de matriz do operador $\boldsymbol{\rho}_1$ como

$$(\rho_1)_{nn'} = \sum_p (\langle u_n, v_p |) \rho (|u_{n'}, v_p \rangle). \quad (2.17)$$

Por definição, o operador ρ_1 é obtido a partir do traço parcial sobre as variáveis de índice 2 no operador ρ , ou seja

$$\rho_1 = \text{Tr}_2[\rho]. \quad (2.18)$$

Da mesma maneira, se definimos os elementos de matriz do operador ρ_2

$$(\rho_2)_{pp'} = \sum_n (\langle u_n, v_p |) \rho (|u_n, v_{p'} \rangle), \quad (2.19)$$

sendo o operador ρ_2 é obtido a partir do traço parcial sobre as variáveis de índice 1 no operador ρ

$$\rho_2 = \text{Tr}_1[\rho]. \quad (2.20)$$

Medidas projetivas

Uma medida projetiva é descrita por um observável \mathbf{M} , um operador no espaço de estados do sistema em estudo. O observável tem uma decomposição espectral

$$\mathbf{M} = \sum_m m \mathbf{P}_m \quad (2.21)$$

em que \mathbf{P}_m é o projetor sobre o auto-subespaço de \mathbf{M} com autovalor m . Os possíveis resultados da medida correspondem aos autovalores m do observável. Medindo-se \mathbf{M} no estado $|\psi\rangle$, a probabilidade de se obter o resultado m é dada por

$$p(m) = \langle \psi | \mathbf{P}_m | \psi \rangle. \quad (2.22)$$

Obtido o resultado m , o estado do sistema logo após a medida será

$$|\phi\rangle = \frac{\mathbf{P}_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \quad (2.23)$$

Fase

O termo *fase* na mecânica quântica possui alguns significados diferentes, dependendo do contexto onde é empregado. Primeiro, imagine o vetor de estado $e^{i\phi}|\psi\rangle$, onde ϕ é um número real. Podemos dizer que o vetor $e^{i\phi}|\psi\rangle$ é igual ao vetor $|\psi\rangle$ a menos de um fator de *fase global* $e^{i\phi}$. Além disso, para um

operador \mathbf{M}_m associado a alguma medida temos que

$$\langle \psi | \mathbf{M}_m^\dagger \mathbf{M}_m | \psi \rangle = \langle \psi | e^{-i\phi} \mathbf{M}_m^\dagger \mathbf{M}_m e^{i\phi} | \psi \rangle, \quad (2.24)$$

o que faz com que os estados sejam idênticos do ponto de vista da observação.

Também temos a chamada *fase relativa*, que é a diferença de fase entre, por exemplo, os estados

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{e} \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (2.25)$$

Nesse caso, a amplitude de $|1\rangle$ difere em sinal para os dois estados. Portanto, dizemos que os dois estados diferem por uma *fase relativa*. É importante salientar que, diferentemente da diferença de *fase* global entre dois estados, a diferença de *fase relativa* dá origem a resultados fisicamente diferentes em suas estatísticas.

2.2. Bits quânticos ou qubits

O *bit* (*Binary digiT*) é a menor unidade de medida de transmissão de dados usada na computação e teoria de informação [5]. O *bit* pode assumir dois valores mutuamente exclusivos (0 ou 1). Fisicamente esses valores representam, por exemplo, a passagem ou não de corrente em algum circuito elétrico.

Os *qubits* (ou bits quânticos) são os análogos quânticos dos *bits*, e podem ser associados a possíveis estados físicos, porém obedecendo o princípio de superposição da mecânica quântica para estados,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.26)$$

onde as amplitudes probabilísticas α e β são números geralmente complexos.

Exemplificando, um *qubit* pode estar no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad (2.27)$$

que, quando for medido resultará no estado $|0\rangle$ 50% das vezes e no estado $|1\rangle$ os 50% restantes.

Podemos ter sistemas com mais de um *qubit*. O vetor de estado (puro) que representa, por exemplo, dois *qubits*, pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle. \quad (2.28)$$

2.3. Emaranhamento entre dois subsistemas quânticos

O conceito de emaranhamento como conhecemos hoje surgiu do desconforto de Einstein com relação a mecânica quântica. Ele acreditava que “a física deve representar uma realidade no tempo e no espaço, livre de ações fantasmagóricas à distância”. Nessa frase, dita a Max Born, Einstein se referia à estranheza que lhe causava duas partículas, após interagirem, continuarem “ligadas” [1]. Quando o artigo EPR (Einstein, Podolsky e Rosen)[1] chegou a Niels Bohr (a quem várias vezes foi designado o papel de defensor da mecânica quântica), este justificou que, após interagirem, as partículas fazem parte de um

sistema total, desenvolvendo correlações de natureza quântica entre elas. Embora haja muita discussão subsequente seguindo uma via filosófica sobre emaranhamento, aqui abordaremos o assunto de uma maneira mais operacional. Partiremos de sua definição usual, e analisaremos no capítulos 3 e 4, seu surgimento em sistemas atômicos.

Atualmente, é comum se definir emaranhamento como sendo a correlação quântica que ocorre entre subsistemas (Γ_1 e Γ_2) que compõem um sistema (Γ). Se $|u_1\rangle$ e $|v_2\rangle$ são estados de Γ_1 e Γ_2 , respectivamente, o estado

$$|\psi_{12}\rangle = |u_1\rangle \otimes |v_2\rangle \quad (2.29)$$

descreve um estado de Γ no qual os subsistemas tem um estado bem definido. Assim, dados os observáveis \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_2 , pertencentes a Γ_1 e Γ_2 , seus valores esperados são dados por

$$\langle \mathbf{A}_1 \rangle \langle \mathbf{B}_2 \rangle = \langle \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_2 \rangle. \quad (2.30)$$

Fisicamente, a probabilidade de obtenção de um resultado específico λ_i para a medida de um observável \mathbf{O} é dado por $p(\lambda_i) = \langle \Pi_i(\mathbf{O}) \rangle$, onde $\Pi_i(\mathbf{O})$ é o projetor sobre o autosubespaço de \mathbf{O} associado ao autovalor λ_i . Assim, a equação (2.30) pode ser entendida como

$$p(a_i)p(b_j) = p(a_i, b_j). \quad (2.31)$$

Portanto, se medirmos \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_2 simultaneamente, o valor encontrado para \mathbf{A}_1 é estatisticamente independente do encontrado para \mathbf{B}_2 , ou seja, não há correlações entre os subsistemas.

Porém, os estados de Γ em geral tem uma forma mais complicada do que a analisada na equação (2.29), como:

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{ij} c_{ij} |u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2. \quad (2.32)$$

Realizando a mesma análise do caso anterior, obtemos

$$\langle \mathbf{A}_1 \rangle \langle \mathbf{B}_2 \rangle \neq \langle \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_2 \rangle, \quad (2.33)$$

levando a

$$p(a_i)p(b_j) \neq p(a_i, b_j). \quad (2.34)$$

Neste caso, as propriedades de cada subsistema deixam de ser independentes. Este fenômeno é conhecido como emaranhamento, e será nosso objeto de estudo nas próximas páginas.

Estados Maximamente Emaranhados

Quando limitamos nossa análise de estados a dois *qubits*, um grupo de estados importantes devem ser considerados: os *estados de Bell* ou *pares EPR* [1]. Eles são descritos por

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle_{AB} &= N_1(|\psi_1\rangle_A|\psi_2\rangle_B + |\psi_2\rangle_A|\psi_1\rangle_B), \\
|\Psi_2\rangle_{AB} &= N_2(|\psi_1\rangle_A|\psi_2\rangle_B - |\psi_2\rangle_A|\psi_1\rangle_B), \\
|\Psi_3\rangle_{AB} &= N_3(|\psi_1\rangle_A|\psi_1\rangle_B + |\psi_2\rangle_A|\psi_2\rangle_B), \\
|\Psi_4\rangle_{AB} &= N_4(|\psi_1\rangle_A|\psi_1\rangle_B - |\psi_2\rangle_A|\psi_2\rangle_B),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

onde N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são constantes de normalização, e os índices A e B se referem a dois subsistemas. Comumente encontramos estes estados na literatura como

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), \tag{2.36}$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \tag{2.37}$$

$$\tag{2.38}$$

Um caso particular dos estados de Bell (onde consideramos os estados $|\psi_{1(2)}\rangle$ como estados coerentes $|\alpha(-\alpha)\rangle$) são os *estados coerentes emaranhados* [26]

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle_{AB} &= N_1(|\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B + |-\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B), \\
|\Psi_2\rangle_{AB} &= N_2(|\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B - |-\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B), \\
|\Psi_3\rangle_{AB} &= N_3(|\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B + |-\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B), \\
|\Psi_4\rangle_{AB} &= N_4(|\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B - |-\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Esse tipo de estado é muito importante, devido a máxima correlação quântica (emaranhamento) possível entre seus subsistemas, tendo muitas aplicações em teleportação, computação e informação quântica. Nos dois capítulos de resultados dessa tese, mostraremos propostas de geração de estados do tipo Bell.

Estados mistos emaranhados

Um estado de mistura ρ_{AB} é separável se e somente se ele pode ser representado como uma combinação convexa do produto dos estados locais como dado na equação

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^K p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B. \tag{2.40}$$

Para situações diferentes dessa, o estado é dito inseparável ou emaranhado.

Medidas de emaranhamento

São muitas as medidas de emaranhamento propostas na literatura [1]. Dentre elas podemos citar as medidas de emaranhamento geométricas, tais como traço, entropia relativa, máxima fração de singleto ou fração máxima emaranhada. Dentre as medidas válidas somente para estados puros, podemos citar a entropia de von Neumann. Existem também extensões de medidas para estados mistos, como a concorrência (que tem validade restrita) e o emaranhamento de formação. Aqui iremos apresentar

apenas algumas destas medidas.

Entropia de von Neumann - S_{vN}

Essa medida [29] é muito utilizada para sistemas bipartites^b puros. Sendo ρ o operador densidade e ρ_1 e ρ_2 os operadores densidade para cada subsistema, a entropia de von Neumann parcial é dada por

$$S_{vN}^1 = -\text{Tr}[\rho_1 \log \rho_1] = -\text{Tr}[\rho_2 \log \rho_2] = S_{vN}^2. \quad (2.41)$$

A entropia de von Neumann vale zero quando o estado não está emaranhado, e tem aumento de valor quanto mais o estado estiver emaranhado.

Entropia Linear - S_l

A entropia linear [29] é dada por

$$S_l = \frac{D}{D-1} (1 - \text{Tr}[\rho_1^2]) = \frac{D}{D-1} (1 - \text{Tr}[\rho_2^2]), \quad (2.42)$$

onde D é a dimensão do espaço de Hilbert do subsistema. Ele reproduz praticamente os mesmos resultados da entropia de von Neumann, mas com facilidades nos cálculos.

Emaranhamento de formação

O emaranhamento de formação [29] é definido, através da entropia de von Neumann S_{vN} , como

$$E_F(|\psi\rangle\langle\psi|) = S_{vN}(\text{Tr}_A[|\psi\rangle\langle\psi|]) \quad (2.43)$$

para estados puros, e para estados de mistura a expressão é dada por

$$E_F(\rho) = \min \sum_i p_i E_F(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|), \quad (2.44)$$

onde a minimização deve ser feita sobre todas as possíveis decomposições

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2.45)$$

de ρ em termos dos estados puros $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, com distribuição de probabilidade p_1, p_2, \dots .

Concorrência

A concorrência [29] é definida como se segue: seja ρ um estado de um sistema 2×2 , e sejam μ_1, \dots, μ_4 a

^b Sistemas bipartites: Sistemas compostos por dois subsistemas. Por exemplo, duas partículas.

lista ordenada de autovalores de $(\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho})^{1/2}$, onde $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)^c$. Então,

$$E_C(\rho) = \max\{0, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4\}. \quad (2.46)$$

De acordo com a fórmula de Wootters [29], a concorrência se relaciona com o emaranhamento de formação, para pares de *qubits*, como

$$E_F(\rho) = -\nu_1 \log_2 \nu_1 - \nu_2 \log_2 \nu_2, \quad \text{onde} \quad \nu_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - E_C(\rho)^2})/2. \quad (2.47)$$

Para situações em que não temos pares de *qubits*, não há expressão analítica definida.

Máxima fração de singleto

Essa medida de emaranhamento, também conhecida como *fração máxima de emaranhamento* [29], é definida como

$$F_{\max} = \max_{|\psi\rangle} \langle \psi | \rho | \psi \rangle, \quad (2.48)$$

onde $\max_{|\psi\rangle}$ corresponde a maximização que é realizada sobre todos os estados maximamente emaranhados $|\psi\rangle = \mathbf{U}_A \otimes \mathbf{U}_B |\Psi^+\rangle$, sendo

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle \langle i| \quad (2.49)$$

o estado maximamente emaranhado do espaço de Hilbert d -dimensional e \mathbf{U}_A e \mathbf{U}_B transformações unitárias.

2.4. Estados gaussianos e variáveis contínuas

Estados gaussianos de dois modos

Vamos considerar um sistema de variáveis contínuas de dois modos, descrito pelo espaço de Hilbert $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$. Um conjunto de estados Gaussianos é, por definição, um conjunto de estados com funções características e distribuições de *quasi*-probabilidade gaussianas. Portanto, o estado Gaussiano é completamente caracterizado pelos seus primeiros e segundos momentos estatísticos que são dados, respectivamente, pelos vetor de valores médios $\bar{X} \equiv (\langle \hat{x}_1 \rangle, \langle \hat{p}_1 \rangle, \langle \hat{x}_2 \rangle, \langle \hat{p}_2 \rangle)$, e pela matriz de covariância \mathbf{V}

$$\mathbf{V}_{ij} = \frac{1}{2} \langle \hat{x}_i \hat{x}_j + \hat{x}_j \hat{x}_i \rangle - \langle \hat{x}_i \rangle \langle \hat{x}_j \rangle. \quad (2.50)$$

Uma explicação mais detalhada da matriz de covariância e da função de Wigner para estados

^c Matriz de Pauli σ_y , do conjunto de matrizes: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Gaussianos pode ser obtida em [28].

Variáveis contínuas

Hoje em dia, muitos trabalhos de sub-áreas da mecânica quântica, tais como computação quântica, informação quântica, óptica quântica, entre outras, tem seu foco em sistemas de variáveis contínuas. Fisicamente falando, variáveis contínuas são observáveis com espectro contínuo, como por exemplo as quadraturas \mathbf{x} e \mathbf{p} do campo eletromagnético monocromático, que pode ser descrito como

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{x} \cos(\omega t) + \mathbf{p} \sin(\omega t) \quad (2.51)$$

onde ω é a frequência angular, e os operadores de quadratura são definidos em termos dos operadores de aniquilação e criação de fótons \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger como

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger) \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = -i(\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger). \quad (2.52)$$

Muitas são as vantagens das variáveis contínuas em relação às variáveis discretas: facilidade de preparação dos estados do campo, além de precisão na detecção através de detecção homódina. Essa última fornece acesso completo às variáveis canônicas do campo.

Estudos envolvendo variáveis contínuas historicamente trataram, em sua maior parte, de estados Gaussianos, tais como estados coerentes e estados comprimidos. Contudo, o formalismo de variáveis contínuas é igualmente apropriado para o estudo de estados não-Gaussianos, como superposições de estados coerentes.

No capítulo 4 mostraremos uma análise de emaranhamento de variáveis contínuas, baseado em experimentos recentes na área de variáveis contínuas ópticas, onde os estados analisados são considerados pelos autores como Gaussianos.

2.5. Critérios de inseparabilidade

Muitos critérios de inseparabilidade [29] são utilizados hoje em dia com o intuito de mostrar se os estados são separáveis (ou não-emaranhados). Utilizaremos nessa tese apenas o critério de inseparabilidade para variáveis contínuas de Duan [20, 21]. Para entender melhor este critério, vamos considerar dois modos ortogonalmente polarizados do campo eletromagnético (\mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2), que satisfazem as regras usuais para operadores bosônicos, ou seja, $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \delta_{1,2}$.

Os operadores de quadratura para esses modos são dados por

$$\mathbf{X}_{1(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{1(2)} + \mathbf{a}_{1(2)}^\dagger) \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_{1(2)} = \frac{1}{2i}(\mathbf{a}_{1(2)}^\dagger - \mathbf{a}_{1(2)}), \quad (2.53)$$

e a variância das quadraturas é definida como

$$(\Delta \mathbf{X}_{1(2)})^2 = \langle \mathbf{X}_{1(2)}^2 \rangle - \langle \mathbf{X}_{1(2)} \rangle^2 \quad \text{e} \quad (\Delta \mathbf{Y}_{1(2)})^2 = \langle \mathbf{Y}_{1(2)}^2 \rangle - \langle \mathbf{Y}_{1(2)} \rangle^2. \quad (2.54)$$

Desta maneira, o critério de inseparabilidade para variáveis contínuas de Duan é escrito em termos dos operadores de variância

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}[\Delta^2(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) + \Delta^2(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)] < 1. \quad (2.55)$$

Para estados Gaussianos, $I_{1,2} < 1$ é condição necessária e suficiente para emaranhamento. No caso em que os estados são não-Gaussianos, embora $I_{1,2} < 1$ indique com certeza emaranhamento, quando $I_{1,2} \geq 1$ nada pode ser dito sobre a presença ou não de emaranhamento.

A prova do critério de Duan pode ser obtida como segue [38]: vamos assumir que o estado ρ_{12} é separável e pode ser escrito como

$$\rho_{12} = \sum_i \eta_i \rho_{i,1} \otimes \rho_{i,2}. \quad (2.56)$$

Então nós podemos calcular a variância total dos operadores $\mathbf{u} \equiv \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ e $\mathbf{v} \equiv \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2$ para este estado (índice ρ),

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \mathbf{v})^2 \rangle_\rho &= \sum_i \eta_i (\langle \mathbf{u}^2 \rangle_i + \langle \mathbf{v}^2 \rangle_i) - \langle \mathbf{u} \rangle_\rho^2 - \langle \mathbf{v} \rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i \eta_i (\langle \mathbf{X}_1^2 \rangle_i + \langle \mathbf{X}_2^2 \rangle_i - 2\langle \mathbf{X}_1 \rangle_i \langle \mathbf{X}_2 \rangle_i + \langle \mathbf{Y}_1^2 \rangle_i + \langle \mathbf{Y}_2^2 \rangle_i - 2\langle \mathbf{Y}_1 \rangle_i \langle \mathbf{Y}_2 \rangle_i) - \langle \mathbf{u} \rangle_\rho^2 - \langle \mathbf{v} \rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i \eta_i (\langle (\Delta \mathbf{X}_1)_2 \rangle_i + \langle (\Delta \mathbf{X}_2)_2 \rangle_i + \langle (\Delta \mathbf{Y}_1)_2 \rangle_i + \langle (\Delta \mathbf{Y}_2)_2 \rangle_i \\ &\quad + \sum_i \eta_i \langle \mathbf{u} \rangle_i^2 - \left(\sum_i \eta_i \langle \mathbf{u} \rangle_i \right)^2 + \sum_i \eta_i \langle \mathbf{v} \rangle_i^2 - \left(\sum_i \eta_i \langle \mathbf{v} \rangle_i \right)^2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde $\langle \dots \rangle_i$ significa a média sobre o estado produto $\rho_{i,1} \otimes \rho_{i,2}$. Usando a inequação de Cauchy-Schwarz $\sum_i \eta_i \langle \mathbf{u} \rangle_i^2 \geq (\sum_i \eta_i \langle \mathbf{u} \rangle_i)^2$, podemos ver que a última linha da equação (2.57) é limitada por zero. Considerando a relação de incerteza $\langle (\Delta \mathbf{X}_j)^2 \rangle_1 + \langle (\Delta \mathbf{Y}_j)^2 \rangle_1 \geq |[\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j]| = 1/2$ ($j = 1, 2, \forall i$), nós encontramos que a variância é limitada por 1. Então, a inequação

$$\langle [\Delta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)]^2 \rangle + \langle [\Delta(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)]^2 \rangle \geq 1 \quad (2.58)$$

é condição necessária para qualquer estado separável. Qualquer violação disso prova a inseparabilidade do estado em questão.

3. EMARANHANDO PARTÍCULAS DISTANTES

Neste capítulo apresentamos três métodos de geração de estados tipo Bell entre partículas distantes. Nas seções (3.1) e (3.2) apresentamos brevemente os dois processos utilizados por Cabrillo e colaboradores [11] e Feng e colaboradores [12] para criação de estados emaranhados entre átomos distantes via interferência. A seção (3.3) é reservada para apresentarmos a nossa proposta de um método inédito de geração incondicional de estados emaranhados do tipo Bell entre os níveis eletrônicos de dois íons espacialmente distantes, utilizando um átomo de dois níveis propagante [30].

3.1. Geração de estados emaranhados de átomos distantes por interferência usando emissão espontânea

Nesse esquema o estado emaranhado não é produzido por uma interação efetiva entre os átomos, mas sim por efeito de interferência e projeção do estado acompanhando o processo de medida. O estado emaranhado desejado é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_A|1\rangle_B + e^{i\phi}|1\rangle_A|0\rangle_B), \quad (3.1)$$

onde ϕ é uma fase fixa.

variáveis	descrição
$ 0\rangle, 1\rangle$ e $ 2\rangle$	estados fundamentais ($ 0\rangle$ e $ 1\rangle$) e excitado ($ 2\rangle$) do átomo de três níveis
Γ_0 e Γ_1	taxas de decaimento $ 2\rangle \rightarrow 0\rangle$ e $ 2\rangle \rightarrow 1\rangle$, respectivamente
$2d$	distância entre os átomos A e B
D	distância entre o detetor e o segmento que conecta os átomos A e B
$L_x L_y$	área do fotodetetor

Tabela II – Algumas variáveis relacionadas ao experimento de Cabrillo e colaboradores [11].

Os átomos usados nesse caso são átomos de três níveis com configuração Lambda (ver figura 1), separados por uma distância $2d$. Os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são estados fundamentais, e $|2\rangle$ é estado excitado da

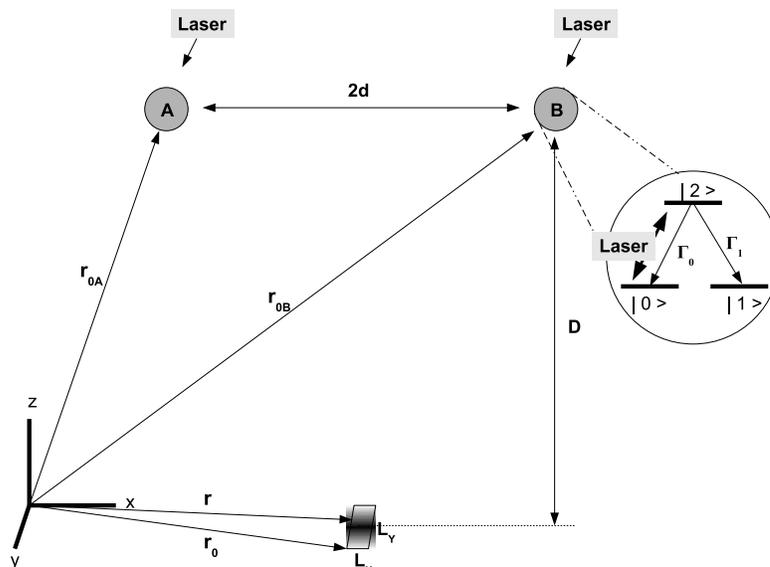


Figura 1 – Esquema do experimento de Cabrillo e colaboradores [11]. Átomos de três níveis A e B, separados espacialmente, e detector D. Na figura pequena temos um esquema mais detalhado dos níveis atômicos.

configuração. Ambos os átomos são preparados inicialmente no estado $|0\rangle$. A excitação é obtida usando um pulso de laser que excita, com pequena probabilidade, um dos dois átomos ao estado $|2\rangle$. Se após a excitação um fóton emitido espontaneamente for detectado, um estado emaranhado de dois átomos é produzido. Um fotodetector é colocado a uma distância D do segmento que conecta os átomos A e B. O detector é sensível apenas a fótons com comprimento de onda λ_1 , correspondendo à transição $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$, que é caracterizada pela emissão espontânea com taxa de decaimento igual a Γ_1 . Na maioria das vezes nenhum fóton é detectado após um tempo de espera $t \gg \Gamma_1^{-1}$. Se não ocorre detecção, o experimento é reiniciado, quantas vezes for necessário, até a detecção do fóton com comprimento de onda λ_1 . Quando a detecção ocorre, o estado de ambos os átomos é descrito pelo operador densidade $\rho_{A,B}$. A intenção é obter um estado o mais próximo possível do estado maximamente emaranhado descrito na equação (3.1), onde ϕ é uma fase que não muda em cada realização do experimento. Dessa maneira é possível obter a fidelidade entre esses estados, ou seja

$$F = \langle \psi | \rho_{A,B} | \psi \rangle. \quad (3.2)$$

A idéia é obter, através do pulso de laser, a superposição coerente de estados $|0\rangle_A |2\rangle_B$ e $|2\rangle_A |0\rangle_B$, além dos estados $|0\rangle_A |0\rangle_B$ e $|2\rangle_A |2\rangle_B$. Como a transição $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ implica na detecção de um fóton, o termo $|0\rangle_A |0\rangle_B$ pode ser projetado para fora do estado atômico, por ser incompatível com o evento. Além disso, o pulso de laser tem que ser tal que a probabilidade de excitar ambos os átomos para o estado $|2\rangle$ ($|2\rangle_A |2\rangle_B$) seja muito menor que a probabilidade de excitar a superposição coerente. O fato do detector não distinguir qual dos átomos emitiu o fóton, transforma a superposição $|0\rangle_A |2\rangle_B$ e $|2\rangle_A |0\rangle_B$ numa superposição de estados $|0\rangle_A |1\rangle_B$ e $|1\rangle_A |0\rangle_B$, próxima de um estado emaranhado.

Para a obtenção do estado pretendido, algumas condições devem ser satisfeitas. Pode acontecer de ambos os átomos emitirem um fóton, mas um deles não ser detectado por ser emitido em uma direção diferente da do detector (reduzindo dessa maneira a fidelidade). Assim, é usado um pulso de laser curto ou fraco o suficiente. Nesse caso, a probabilidade de excitar dois átomos (ϵ^2) é da ordem do quadrado da probabilidade de excitar apenas um átomo (2ϵ). Além disso, o detector deve ser suficientemente pequeno ($L_x \ll \lambda_1 D/d$). Por fim, como o recuo do átomo na emissão ou absorção de fótons pode destruir a

superposição, é necessário trabalhar no regime de Lamb-Dicke^d e a temperaturas baixas.

Os autores modelam o detetor e os átomos através de equações mestras, e analisam a fidelidade dos estados obtidos com o estado maximamente emaranhado procurado. Resultados positivos são obtidos nesse esquema, mesmo com muitas condições restritivas dos parâmetros experimentais. Detalhes da modelagem e uma análise mais minuciosa dos resultados podem ser encontradas em [11].

3.2. Geração de estados emaranhados de átomos distantes por interferência de fótons polarizados

Esse método de geração de emaranhamento entre partículas distantes é baseado no modelo descrito na seção anterior. Dois átomos 1 e 2 de três níveis (configuração Lambda) idênticos, estão aprisionados em duas cavidades, A e B, respectivamente. Cada átomo possui um estado excitado ($|e\rangle$) e dois estados fundamentais degenerados ($|g_L\rangle$ e $|g_R\rangle$). As transições $|e\rangle \rightarrow |g_L\rangle$ e $|e\rangle \rightarrow |g_R\rangle$ são fortemente acopladas aos modos da cavidade polarizados circularmente à direita e à esquerda, respectivamente.

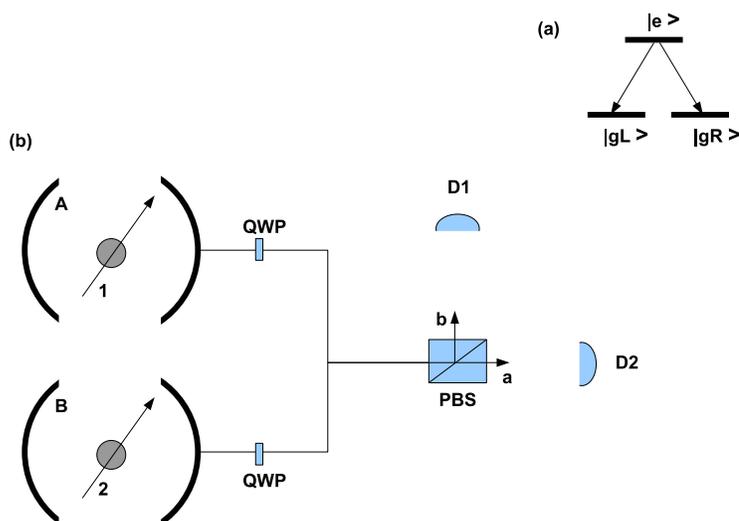


Figura 2 – Esquema do experimento de Feng e colaboradores [12]. (a) Estrutura dos níveis atômicos. (b) Esquema experimental. Cavidades A e B, contendo os átomos 1 e 2 respectivamente. Os fótons saindo das cavidades são detetados por D_1 e D_2 , após passarem por placas de quarto de onda e divisores de feixes polarizados.

Os dois átomos são inicialmente preparados no estado excitado $|e\rangle$, através de um pulso de laser π ^e circularmente polarizado. Depois de excitados, os dois átomos tem duas transições possíveis: $|e\rangle \rightarrow |g_R\rangle$

^d Regime de Lamb-Dicke: íon confinado numa região (a_0) muito menor que o comprimento de onda do campo da cavidade (λ_0). Em outras palavras, o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta \ll 1$, onde $\eta = 2\pi a_0 / \lambda_0$.

^e Pulso π : campo clássico com tempo de duração $\Omega t = \pi$ (Ω = frequência de Rabi). Se, por exemplo, aplicarmos um pulso π em um átomo com momento de dipolo apontando na direção z , ele terá seu momento de dipolo completamente invertido. Um pulso $\pi/2$ age de maneira similar, porém preparando o estado atômico (de um átomo de dois níveis) numa superposição igualmente pesada dos estados excitado e fundamental.

ou $|e\rangle \rightarrow |g_L\rangle$, que correspondem à emissão de fótons polarizados. Se os dois detetores \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 , sensíveis a feixes com polarizações distintas, clicarem simultaneamente após um determinado tempo, concluímos que dois fótons com diferentes polarizações foram detetados, nos levando a dois átomos com diferentes estados fundamentais: um no estado $|g_L\rangle$ e outro no estado $|g_R\rangle$. Como não conseguimos determinar qual átomo está em determinado estado, é obtida a superposição dos estados $|g_L\rangle_1|g_R\rangle_2$ e $|g_R\rangle_1|g_L\rangle_2$, que é um estado emaranhado dos dois átomos. No caso dos detetores não clicarem simultaneamente, o processo é repetido até a obtenção do resultado esperado.

variáveis	descrição
L e R	índices referentes a modos polarizados circularmente à esquerda (left) e à direita (right)
$ g_L\rangle, g_R\rangle$ e $ e\rangle$	estados fundamentais degenerados ($ g_L\rangle$ e $ g_R\rangle$) e excitado ($ e\rangle$) do átomo de três níveis
\mathbf{a}_k e \mathbf{a}_k^\dagger	operadores de criação e aniquilação de fótons dos modos k
λ_k	constante de acoplamento entre o modo k e o átomo
\mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2	detetores

Tabela III – Algumas variáveis relativas ao experimento de Feng e colaboradores [12].

O Hamiltoniano de interação átomo-campo que descreve o sistema descrito é dado por

$$\mathbf{H}_I = \hbar \sum_{k=L,R} \lambda_k (\mathbf{a}_k |e\rangle \langle g_k| + \mathbf{a}_k^\dagger |g_k\rangle \langle e|), \quad (3.3)$$

onde os índices L e R são referentes à polarização circular à esquerda e à direita, respectivamente. Os operadores \mathbf{a}_k e \mathbf{a}_k^\dagger são os operadores de aniquilação e criação de fótons do modo k, e λ_k é a constante de acoplamento entre o modo k e o átomo. Essa constante de acoplamento é considerada real, e diferente para o acoplamento entre cada átomo e o modo da cavidade ($\lambda_L \neq \lambda_R$). Se o átomo é preparado inicialmente no estado excitado $|e\rangle$, e os modos da cavidade no estado de vácuo $|0_L, 0_R\rangle$, o estado evoluído após a interação átomo-campo é dada por

$$|\Psi(t)\rangle = \cos \Omega t |e\rangle |0_L, 0_R\rangle - i \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t (\lambda_L |g_L\rangle |1_L, 0_R\rangle + \lambda_R |g_R\rangle |0_L, 1_R\rangle), \quad (3.4)$$

onde $\Omega = \sqrt{\lambda_L^2 + \lambda_R^2}$.

Para a obtenção do estado emaranhado entre os dois átomos, os átomos 1 (cavidade A) e 2 (cavidade B), tem seus estados excitados por pulsos de laser simultaneamente. O estado que descreve os dois subsistemas existentes (cavidade A + átomo 1 e cavidade B + átomo 2) é descrito por $|\Psi(t)\rangle_A |\Psi(t)\rangle_B$. Os fótons que saem das cavidades, após passar por uma placa de um quarto de onda (QWP), deixam de ter polarizações circulares, ficando linearmente polarizados (com direções perpendiculares). Assim, obtemos

$$|1_L, 0_R\rangle \rightarrow |V\rangle \quad \text{e} \quad |0_L, 1_R\rangle \rightarrow |H\rangle, \quad (3.5)$$

onde os estados $|V\rangle$ e $|H\rangle$ se referem a fótons polarizados verticalmente e horizontalmente. Os modos no

vácuo são desconsiderados por não ativarem os detetores. Então, após a passagem pela QWP, o estado que descreve os dois subsistemas envolve apenas os termos

$$|\Psi(t)\rangle_A |\Psi(t)\rangle_B \propto (\lambda_L |g_L\rangle_1 |V\rangle_A + \lambda_R |g_R\rangle_1 |H\rangle_A) \otimes (\lambda_L |g_L\rangle_2 |V\rangle_B + \lambda_R |g_R\rangle_2 |H\rangle_B). \quad (3.6)$$

Divisores de feixes polarizados são colocados entre os QWP e os detetores. Os fótons horizontalmente polarizados são transmitidos, e os verticalmente polarizados são refletidos, nos levando a

$$(\lambda_L |g_L\rangle_1 |V\rangle_{A,a} + \lambda_R |g_R\rangle_1 |H\rangle_{A,b}) \otimes (\lambda_L |g_L\rangle_2 |V\rangle_{B,a} + \lambda_R |g_R\rangle_2 |H\rangle_{B,b}), \quad (3.7)$$

onde os índices i, j ($i = A, B$; $j = a, b$) denotam a transformação do modo de entrada i para o modo de saída j . O efeito de interferência do divisor de feixes torna impossível distinguir de qual cavidade saiu o fóton. Portanto, suprimindo os modos de entrada (A,B), obtemos

$$\begin{aligned} & (\lambda_L |g_L\rangle_1 |V\rangle_a + \lambda_R |g_R\rangle_1 |H\rangle_b) \otimes (\lambda_L |g_L\rangle_2 |V\rangle_a + \lambda_R |g_R\rangle_2 |H\rangle_b) = \\ & \lambda_L^2 |g_L\rangle_1 |g_L\rangle_2 |V\rangle_a |V\rangle_a + \lambda_R^2 |g_R\rangle_1 |g_R\rangle_2 |H\rangle_b |H\rangle_b + \lambda_L \lambda_R (|g_L\rangle_1 |g_R\rangle_2 + |g_R\rangle_1 |g_L\rangle_2) |V\rangle_a |H\rangle_b. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se os detetores \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 clicarem simultaneamente, teremos o estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_L\rangle_1 |g_R\rangle_2 + |g_R\rangle_1 |g_L\rangle_2), \quad (3.9)$$

que é o estado pretendido. Comparando esse esquema com o anterior, nota-se que a obtenção do estado do tipo Bell não possui tantas restrições experimentais (dimensão do detector, recuo do átomo na emissão ou absorção de fótons, entre outras). Como nossa análise é apenas qualitativa, uma descrição mais completa da modelagem matemática e dos resultados pode ser obtida em [12].

3.3. Geração de estados emaranhados de íons distantes usando um átomo propagante

Nesta seção nós apresentamos um esquema para geração de estados maximamente emaranhados envolvendo os estados eletrônicos de dois íons distantes, cada um aprisionado em uma cavidade [30]. Isso é possível através do uso de um átomo propagante (átomo que cruza as cavidades), responsável pelo emaranhamento. Para certos tempos específicos de interação, o esquema proposto gera, não probabilisticamente, um estado do tipo Bell (capítulo 2.2.3). No final do protocolo, o átomo está completamente desemaranhado do resto do sistema, deixando a parte eletrônica dos íons em um estado tipo Bell. Além disso, o esquema não é sensível ao campo na cavidade e a perdas relativas à cavidade. Analisamos também dissipação e amortecimento atuando no átomo entre as cavidades, e discutimos a aplicação desses resultados para teletransporte.

A motivação nesta seção é obter um novo método, não condicional, para geração de estados maximamente emaranhados do tipo Bell

$$|\Psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, g_2\rangle + |g_1, e_2\rangle), \quad (3.10)$$

entre dois íons (que denotamos por 1 e 2) separados espacialmente, onde $|e_i\rangle$ e $|g_i\rangle$ são os dois estados eletrônicos excitado e fundamental do íon i .

3.3.1. O esquema e o modelo

O sistema sob consideração consiste de duas cavidades distantes A e B, cada uma contendo um íon aprisionado, 1 e 2, além de um átomo de dois níveis (átomo propagante) cruzando as cavidades, como mostrado esquematicamente na figura (3).

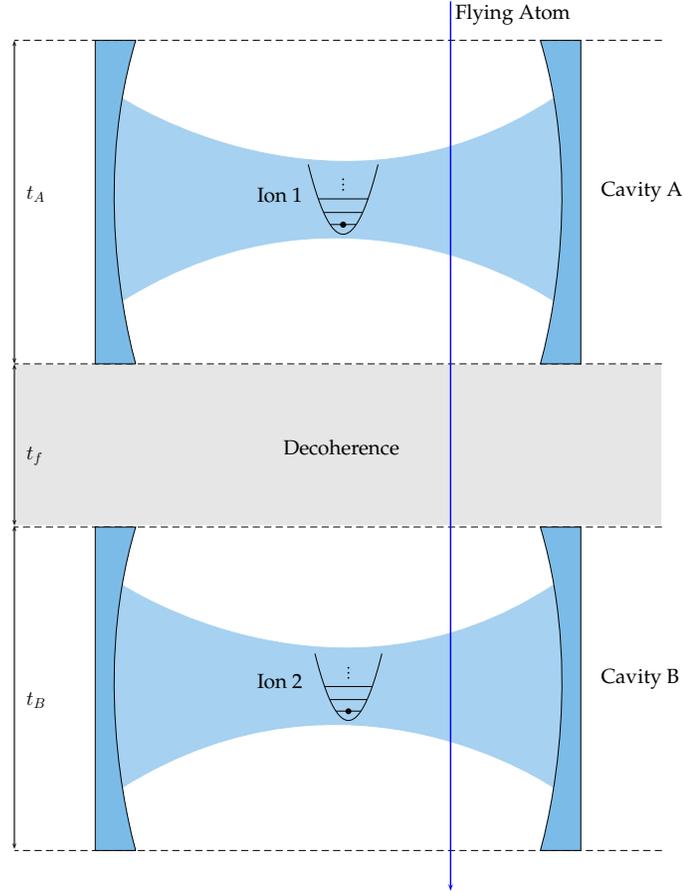


Figura 3 – Figura esquemática da proposta para emaranhamento de partículas espacialmente distantes [30]: duas cavidades A e B, cada uma aprisionando um íon, além de um átomo propagante que cruza as cavidades, utilizado como agente emaranhador dos estados eletrônicos do íons.

O Hamiltoniano que descreve a interação de um íon aprisionado, do átomo propagante e do campo em uma das cavidades é dado por [31]

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{int}}, \quad (3.11)$$

com

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\nu\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \hbar\omega\mathbf{b}^\dagger\mathbf{b} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{1(2)}\sigma_z^{1(2)} + \frac{1}{2}\hbar\omega_p\sigma_z^p, \quad (3.12)$$

e

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \hbar g_{pA(B)}(\sigma_+^p\mathbf{b} + \sigma_-^p\mathbf{b}^\dagger) + \hbar g_{1(2)}\cos[\eta(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a})](\sigma_+^{1(2)}\mathbf{b} + \sigma_-^{1(2)}\mathbf{b}^\dagger), \quad (3.13)$$

onde, em todas as variáveis, os índices 1, 2 e p se referem aos íons 1 e 2, e ao átomo propagante respectivamente, assim como A e B estão associados às respectivas cavidades. Os operadores σ 's são os

operadores atômicos de Pauli ^f, $g_{1(p_A)}$ é a constante de acoplamento entre o íon 1 (átomo propagante) e o modo do campo na cavidade A e $g_{2(p_B)}$ é a constante de acoplamento entre o íon 2 (átomo propagante) e o modo do campo na cavidade B e $\omega_{1(2)[p]}$ é a frequência de transição atômica do íon 1(2) [átomo propagante]. $\mathbf{b}^\dagger(\mathbf{b})$ é o operador de criação (aniquilação) dos modos da cavidade (frequência ω), $\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{a})$ é o operador bosônico de criação (aniquilação) do modo vibracional do íon (frequência ν), e $\eta = 2\pi\alpha_0/\lambda_0$ é o parâmetro de Lamb-Dicke, sendo α_0 a flutuação *rms*^g da posição do íon correspondente ao menor auto-estado da armadilha e λ_0 é o comprimento de onda do campo na cavidade.

Nós agora vamos usar o Hamiltoniano efetivo no caso em que os íons aprisionados e o átomo são mantidos fora da ressonância com o campo ($\Delta = \omega - \omega_{1(2)[p]} \gg g_{1(2)[p_{A(B)}})$. Nesse caso não há troca de energia entre o campo na cavidade e os *qubits* de matéria. Se também escolhermos as frequências do sistema de tal modo que nenhuma banda lateral estará excitada [32], isto é, $\Delta \ll \nu$, e mantendo a ressonância ente os íons e o átomo ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_p$), é possível obter o seguinte Hamiltoniano na representação de interação

$$\mathbf{H}_{\text{int}}^{1(2)} = \lambda_{1(2)}(\sigma_+^p \sigma_-^{1(2)} + \sigma_-^p \sigma_+^{1(2)}), \quad (3.14)$$

onde $\lambda_{1(2)} = g_{1(2)}g_{p_{A(B)}}/\Delta$ é a constante de acoplamento efetiva da cavidade A(B).

3.3.2. Discussão sobre possíveis candidatos de íons e átomo

Agora vamos considerar o exemplo específico de átomos e íons que levam às condições de ressonância assumidas na derivação do Hamiltoniano (3.14). Primeiro, para impedir que os *qubits* sofram decoerência durante o processo, transições de tempos longos são necessárias tanto para o átomo propagante quanto para os íons. Para os íons, isso pode ser obtido pelo uso de íons com um estado fundamental que apresenta estrutura hiperfina. Nesse caso, a aplicação de campos magnéticos pode separar os níveis hiperfinos em poucas dezenas de gigahertz. Por outro lado, transições de tempos longos de átomos neutros podem ser escolhidas como sendo estados de Rydberg circulares, também separados por poucas dezenas de gigahertz. Átomos propagantes de Rb preparados em estados de Rydberg circulares e interagindo com fótons de microondas tem sido usados em vários experimentos [33]. Assim, é claro que para manipular os estados dos átomos e íons, radiação de microondas é a escolha natural. Esse fato parece destruir o esquema, pois o parâmetro de Lamb-Dicke para os íons será muito pequeno no caso de armadilhas usuais. No entanto, experimentos recentes tem feito uso de armadilhas de íons modificadas em que um parâmetro de Lamb-Dicke efetivo pode ser suficientemente grande para nossos interesses. Atualmente, para íons de Yb^+ , todas as operações quânticas envolvendo movimento e graus de liberdade internos, realizados geralmente com campos ópticos, podem ser implementados utilizando radiação de microondas.

Nós propomos o uso de íons de Yb^+ e átomos propagantes de Rb, preparados em estados de Rydberg circulares, na implementação das idéias sugeridas. Alguns experimentos de óptica quântica da literatura com íons $^{171}\text{Yb}^+$ tem usado o dubleto $S_{1/2}$ do estado fundamental hiperfino $\{|g\rangle \equiv |S_{1/2}, F=0\rangle, |e\rangle \equiv |S_{1/2}, F=0, m_F=0\rangle\}$ como *qubit*, e essa será nossa escolha. Devido à aplicação de campos magnéticos estáticos, a transição do *qubit* usada em [34] é de 12,6 GHz. Outros estados hiperfinos podem ser usados [35]. A transição do *qubit* em estados de Rydberg circulares de Rb é encontrada como sendo 51.1 GHz. Nós cremos que o acréscimo moderado no comprimento de onda do campo eletromagnético atuando sobre Yb^+ pode levar à ressonância ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_f$), como assumimos na derivação de (3.14). Vale ainda mencionar que armadilhas de Paul em miniatura, consistindo de um eletrodo em forma de anel com

^f Os operadores de Pauli : $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$.

^g Do inglês *root mean square (desvio quadrático médio)*

diâmetro de 2 mm e eletrodos de tampa espaçados de $\sqrt{2}$ mm, tem sido usados para a realização de experimentos envolvendo átomos de Yb^+ [34]. Isso facilita a inserção de armadilhas em cavidades de microondas, onde os espelhos são espaçados de 27 mm em experimentos de óptica quântica envolvendo átomos propagantes de Rb.

3.3.3. Obtenção do estado de Bell

Os detalhes de cálculos desta seção podem ser vistos no apêndice A. O Hamiltoniano (3.14) é essencialmente o mesmo usado por Zheng e colaboradores [41], mas com a vantagem de que o *qubit* estacionário está aprisionado em uma cavidade, o que facilita muito a sua manipulação. Note que para a obtenção do Hamiltoniano (3.14), ambos os íons foram resfriados para seu estado fundamental. Se não fosse assim, o movimento poderia se acoplar aos graus de liberdade eletrônicos. Além disso, como o Hamiltoniano (3.14) não depende do campo da cavidade, a frequência de Rabi é simplesmente $\lambda_{1(2)}$ em A(B). Isso torna nosso esquema não sensível ao estado do campo na cavidade e ao decaimento da cavidade [41, 42], nos permitindo trabalhar até com um campo térmico com poucos fótons. Agora, considere que ambos os íons estão inicialmente no estado eletrônico fundamental, e o átomo propagante está inicialmente excitado, isto é, $|\psi(0)\rangle = |e_p, g_1, g_2\rangle$. De acordo com a equação (3.14), se o tempo gasto pelo átomo propagante para cruzar a cavidade A for^h $\lambda_1 t_A = \pi/4$, o estado do nosso sistema será

$$|\psi(t_A)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_p, g_1\rangle - i|g_p, e_1\rangle) \otimes |g_2\rangle. \quad (3.15)$$

Em seguida, permitimos que o átomo voe de uma cavidade a outra, e supomos que faça isso num tempo de voo t_f . No caso ideal (sem decoerência), a evolução dos três subsistemas, durante o intervalo de tempo t_f , é local e unitária não ocasionando mudanças no emaranhamento entre eles. No entanto, se incluirmos perdas ou defasamento, o emaranhamento entre eles será alterado devido ao acoplamento com o meio. Analisaremos isso mais adiante. Agora, o átomo propagante alcança a cavidade B, e depois do tempo $\lambda_2 t_B = \pi/2$ necessário para cruzá-laⁱ, o estado global do sistema será

$$|\psi\rangle = |g_p\rangle \otimes |\Psi_{1,2}\rangle, \quad (3.16)$$

onde $|\Psi_{1,2}\rangle$ é o estado do tipo Bell descrito na equação (3.10). Nós podemos ver em (3.16) no final do protocolo, o estado do átomo propagante é fatorado do resto do sistema, que toma a forma de um estado maximamente emaranhado $|\Psi_{1,2}\rangle$. Desta maneira, o esquema proposto aqui não é probabilístico, pois não depende de nenhum processo de medida, o que o torna um protocolo de geração incondicional. É importante observar que o protocolo exige tempos de interação diferentes para as duas cavidades e, desde que supomos que a velocidade do átomo propagante não varie, apenas as constantes de acoplamento λ_1 e λ_2 precisam ser ajustadas. Considerando o mesmo tipo de íon e a mesma frequência do campo na cavidade (ω_p) em ambas as cavidades, o único parâmetro livre para controle dos tempos de interação é o volume da cavidade, que aparece na definição de $g_{pA(B)}$ e $g_{1(2)}$.

Em experimentos reais, o átomo voando entre as cavidades pode colidir com outros átomos ou moléculas, resultando em defasamento. Além disso, dependendo que quão perto uma cavidade está da outra, o átomo propagante pode decair espontaneamente, devido ao acoplamento com os modos do campo eletromagnético no espaço livre. Uma vez que o decaimento da cavidade não afeta destrutivamente nosso

^h A escolha desse tempo é que leva ao estado representado pela equação 3.15.

ⁱ Novamente, o tempo é determinante para a obtenção do estado desacoplado átomo propagante-íons.

esquema, como explicado anteriormente, amortecimento de fase e amplitude parece ser a fonte mais importante de perda de coerência quântica no nosso caso. Agora, vamos modelar esses mecanismos de ruído pelo método da equação mestra. A equação mestra na representação de interação que descreve a emissão espontânea e o amortecimento de fase do átomo propagante cruzando as cavidades A e B é dada por [43]

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} [2\sigma_-^p \rho(t) \sigma_+^p - \sigma_+^p \sigma_-^p \rho(t) - \rho(t) \sigma_+^p \sigma_-^p] + \frac{\gamma_p}{2} [\sigma_z^p \rho(t) \sigma_z^p - \rho(t)], \quad (3.17)$$

onde $\gamma(\gamma_p)$ é a taxa de decaimento (defasamento) atômico. Resolvemos essa equação com a condição inicial $\rho(0) = |\psi(t_A)\rangle\langle\psi(t_A)|$, onde $|\psi(t_A)\rangle$ é o estado global depois do átomo propagante passar pela cavidade A. A solução da equação mestra para essas condições é

$$\begin{aligned} \rho(t_f) = & \frac{1}{2} [|g_p, e_1\rangle\langle g_p, e_1| - ie^{-(\gamma+\gamma_p)t_f} |g_p, e_1\rangle\langle e_p, g_1| \\ & + ie^{-(\gamma+\gamma_p)t_f} |e_p, g_1\rangle\langle g_p, e_1| + (1 - e^{-\gamma t_f}) |g_p, g_1\rangle\langle g_p, g_1|] \otimes |g_2\rangle\langle g_2|, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde t_f é o tempo de voo. Agora, o átomo propagante atinge a cavidade B, e lá ele segue uma evolução unitária de acordo com (3.14). Considerando o estado inicial do sistema como (3.18) e o caso ideal onde o átomo depende apenas de $\lambda_{2t_B} = \pi/2$, obteremos, após a operação traço parcial nas variáveis do átomo

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} = & \frac{1}{2} [|e_1, g_2\rangle\langle e_1, g_2| + e^{-(\gamma+\gamma_p)t_f} |e_1, g_2\rangle\langle g_1, e_2| + e^{-(\gamma+\gamma_p)t_f} |g_1, e_2\rangle\langle e_1, g_2| \\ & + e^{-\gamma t_f} |g_1, e_2\rangle\langle g_1, e_2| + (1 - e^{-\gamma t_f}) |g_1, g_2\rangle\langle g_1, g_2|]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O estado (3.18) envolvendo os íons separados espacialmente é resultado do nosso protocolo de geração para quando o átomo propagante, utilizado como agente emaranhador, é afetado pelo amortecimento de fase e amplitude. A primeira observação a ser feita é que o estado (3.19) não é tão emaranhado quanto um estado do tipo Bell, gerado no caso ideal. De fato, o emaranhamento em (3.19) decresce exponencialmente com o tempo de voo, medido pela concorrência [44], que para (3.19) é dada por $C(t_f) = e^{-(\gamma+\gamma_p)t_f}$.

3.3.4. Fidelidade de teletransporte e fração máxima de emaranhamento

Se Alice e Bob compartilham um estado de mistura de dois *qubits* como (3.19), eles podem tentar teletransportar um estado desconhecido de um terceiro *qubit* usando operações locais e comunicação clássica (LOCC - Local Operations and Classical Communication). Já foi demonstrado [45] que o aumento da fidelidade de teletransporte f_{\max} , obtida usando LOCC, está conectada a uma quantidade chamada de **fração máxima de emaranhamento** (F_{\max}), que é definida como

$$F_{\max} = \max_{|\Psi\rangle} \langle \Psi | \rho_{1,2} | \Psi \rangle. \quad (3.20)$$

A maximização aqui é tomada sobre todos os estados maximamente emaranhados $|\Psi\rangle$, isto é, todos os estados que podem ser obtidos de um singlete usando transformações locais unitárias. A relação entre ambas as quantidades é [45]

$$f_{\max} = (2F_{\max} + 1)/3. \quad (3.21)$$

A fração máxima de emaranhamento pode ser escrita através de $\rho_{1,2}$ numa base apropriada e encontrando os auto-valores de sua parte real como sugerido em [45–47]. Seguindo esses passos, não é difícil observar que para o canal ruidoso $\rho_{1,2}$ dado por (3.19), a fração máxima de emaranhamento toma a forma

$$F_{\max} = \frac{1}{4}(1 + e^{-\gamma t_f} + 2e^{-(\gamma+\gamma_p)t_f}). \quad (3.22)$$

Um canal clássico pode dar, no máximo, fidelidade igual a $2/3$, que é obtida quando Alice executa uma medida simples de um *qubit* desconhecido, e conta a Bob o resultado [48]. Já um canal quântico possibilita teletransporte perfeito, com fidelidade $f_{\max} \geq 2/3$. Para alguns casos especiais, conseguimos encontrar limites específicos para os tempos de voo do átomo. Quando temos puro amortecimento de amplitude, $t_f \leq \ln(3)\gamma^{-1}$. Para taxas iguais de defasamento e amortecimento ($\gamma_p = \gamma$), $t_f \leq \ln(2)\gamma^{-1}$. Diferentes escolhas de γ e γ_p levam a outros valores máximos de t_f em (3.22). Para átomos de Rydberg com número quântico principal $n \approx 50$ temos $\gamma \approx 2 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ [41], o que nos leva a um tempo de voo $t_f^{\max} = 5 \text{ ms}$ para o caso de puro amortecimento de fase. Considerando a velocidade típica do átomo propagante de Rydberg como sendo $v \approx 3 \times 10^2 \text{ m/s}$ [33, 41], a distância máxima entre as cavidades e a distância entre o par de íons emaranhados fica em torno de $1,5 \text{ m}$. Note que esse valor não é, necessariamente, fácil de ser obtido na prática. Esse é um cálculo teórico, que não leva em consideração outros fatores que influenciam a distância alcançada. A figura 4 mostra a fidelidade máxima de emaranhamento.

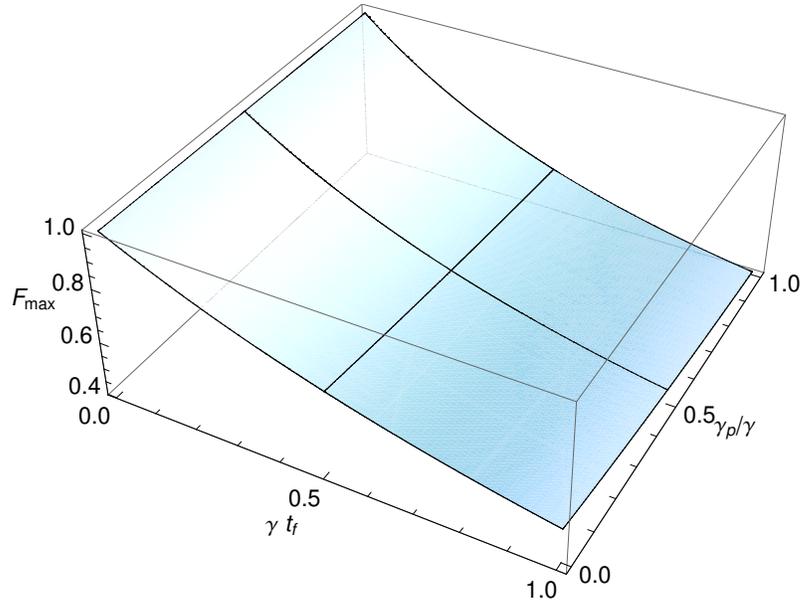


Figura 4 – Gráfico da fração máxima de emaranhamento F_{\max} , mostrada na equação (3.22).

Agora iremos discutir os pontos fracos e fortes da nossa proposta. A proposta supõe que temos habilidade de produzir e mover átomos com velocidades muito bem controladas. Numa situação real, em que esse controle não é tão preciso, nosso esquema se tornaria não determinístico. O estado da arte na manipulação de átomos de Rydberg propagantes obteve velocidade em torno de $\pm 0.4 \text{ m/s}$ [36]. Esse valor é suficiente para nossa proposta ser determinística (com pequena probabilidade de erro). O controle da velocidade do átomo propagante é possível através do uso de técnicas de bombeamento óptico [36]. Além disso, é importante termos certeza que apenas um átomo está atravessando a cavidade a cada realização do esquema. Sabe-se que processos de excitação de estados circulares preparam um átomo por pulso com probabilidade maior que 90% [37], o que a princípio soluciona esse problema.

Embora nosso esquema seja determinístico (teoricamente), na prática ele se torna probabilístico, pois depende de variáveis experimentais. Contudo, é importante salientar que não há nenhum impedimento

na implementação experimental da proposta. Além disso, não é a intenção da proposta ser um esquema útil para computação a longas distâncias. Esse tipo de computação é mais factível através da utilização de canais fotônicos. A nossa proposta visa novos métodos de geração de estados emaranhados envolvendo íons separados espacialmente (útil para experimentos fundamentais de teletransporte quântico). Uma outra limitação que surge na utilização de átomos propagantes é a necessidade de câmaras de vácuo relativamente grandes. No entanto, para distâncias consideradas muito pequenas (poucos milímetros), apenas uma câmara de vácuo usual é suficiente para a implementação do esquema.

Em resumo, nós propomos [30] um novo método para geração de estados emaranhados envolvendo partículas distantes. Até onde sabemos, essa é a primeira proposta baseada na interação de átomos propagantes com íons aprisionados. Mesmo a cavidade sendo usada para induzir uma interação indireta entre eles, o esquema é robusto a perdas da cavidade e insensível ao campo na cavidade. Nesse caso, o esquema resulta numa geração incondicional de perfeitos estados tipo Bell. Consideramos aqui a situação onde o átomo decai espontaneamente e a perda de fase é incluída. Para essa configuração, discutimos os limites de aplicabilidade do estado gerado para a realização do teletransporte quântico e os aspectos de implementação experimental.

4. EMARANHAMENTO EM VARIÁVEIS CONTÍNUAS DE ESTADOS DE POLARIZAÇÃO CIRCULAR E LINEAR E A NÃO-GAUSSIANIDADE

Um aspecto importante para comunicação quântica do ponto de vista experimental é a simplicidade do sistema de detecção no caso de estados de polarização não-clássicos. O primeiro experimento nesse contexto de emaranhamento de variáveis contínuas (VC), como foi a proposta original de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [1], foi feito por Ou e colaboradores [49], e posteriormente numerosos outros experimentos foram realizados empregando observáveis quânticos de espectros contínuos, como amplitude e fase de quadraturas do campo eletromagnético.

No caso de campos de luz intensos, o seu estado de polarização pode ser descrito por VC [50], de forma que muitos experimentos buscaram o emaranhamento na polarização. Para gerar luz comprimida na polarização, inicialmente foram realizados experimentos utilizando campos contínuos e processos paramétricos [51].

Um outro processo, que não depende de produção de pares, é o de propagação de luz em meios atômicos que geram interação tipo Kerr. Num meio Kerr realístico seria difícil obter compressão eficiente devido à absorção e espalhamento de luz, mas foi possível obter um vácuo eletromagnético comprimido: (i) numa fibra óptica onde uma luz elipticamente polarizada sofreria auto-rotação (*self-rotation* (SR)) [52, 53] e (ii) em vapores atômicos onde se pode ter um aumento ressonante da SR, criando um meio de grande SR e baixa absorção [54]. Mais recentemente, utilizando *meios auto-rotativos atômicos ultra-frios* em cavidades óptica de alta finesse, foi possível produzir compressão no vácuo e na polarização ortogonal: i) com um feixe circularmente polarizado [55]; ii) com um feixe linearmente polarizado [23].

Neste último caso onde a polarização do feixe incidente é linear, a interação com os átomos requer um modelo mais refinado do que dois níveis para os átomos, e Josse e colaboradores [23] desenvolveram um modelo teórico gerado por um *ensemble* de átomos de quatro níveis (tipo-X), e mostraram que a SR é responsável pela troca de polarização (*polarization switching* (PS)) de linear para circular. A SR está associada aos termos de ruído atômico na equação de Schrödinger-Langevin que impossibilitam a compressão no vácuo. Em seguida, o mesmo grupo mostrou que a interação não-linear entre o campo de luz e os átomos produz dois modos comprimidos com polarizações ortogonais, os quais são usados para gerar um par de feixes não separáveis [24]. Num trabalho recente [56] é discutido como construir experimentalmente uma fonte de emaranhamento de VC de forma eficiente.

Nós focalizamos a atenção sobre o trabalho Josse e colaboradores [24] onde o emaranhamento foi demonstrado utilizando o critério de inseparabilidade para dois modos de Duan e Simon [20, 21]. Para quantificar e caracterizar emaranhamento de polarização, existem várias formas operacionais: as formas mais comuns de critérios utilizadas (inclusive no experimento [24]) para demonstrar experimentalmente o emaranhamento de VC são: o chamado *critério EPR* [57] e os *critérios de inseparabilidade* obtidos originalmente para caracterizar o emaranhamento de quadraturas do campo, proposto por Duan e colaboradores [20, 21], para dois modos ^j, e posteriormente para multimodos [60]. Tais critérios são conjuntos de desi-

^j Exitem as versões nas variáveis de polarização – os chamados parâmetros de Stokes (Korolkova) [50]– mais diretamente ligados às medidas experimentais, sendo que nessa forma existem [58] critérios de não-separabilidade na forma produto que são mais gerais do que o de Duan e Simon [20, 21]. Vide uma discussão interessante entre os critérios de inseparabilidade

gualdades contendo variáveis conjugadas (por exemplo, amplitude e fase das quadraturas) do campo de todos os modos, que se violadas são suficientes para detetar emaranhamento de VC.

Vale notar que tais critérios de inseparabilidade são estritamente *necessários* para emaranhamento apenas no caso de estados Gaussianos, porém uma condição *suficiente* para quaisquer outro estado de VC. Entretanto, não é absolutamente claro que os estados bipartites de campo gerados no experimento de Josse e colaboradores sejam Gaussianos ou não. Na realidade, a interação entre os campos ortogonalmente polarizados intermediados por uma nuvem de átomos frios é altamente provável de ser *não-linear* nos operadores de criação e aniquilação dos modos de campo. É bem sabido que somente Hamiltonianos que são no máximo bilineares nos operadores canonicamente conjugados podem levar a evoluções Gaussianas [61].

O objetivo deste capítulo é investigar um modelo para interação de dois campos quânticos ortogonalmente polarizados mediados por um *ensemble* de átomos de quatro níveis do tipo-X, apresentado na referência [23], através da obtenção de um Hamiltoniano efetivo para os campos. Veremos que, mesmo dentro de uma aproximação linearizada do campo nas equações de Heisenberg-Langevin, o Hamiltoniano efetivo bilinear nos campos é multiplicado pela diferença de população de um *ensemble* de átomos efetivamente de dois níveis. Essa dependência nos átomos faz com que, após uma medida condicionada nos átomos, os dois modos do campo ortogonalmente polarizados fiquem em estados emaranhados não-Gaussianos.

Na seção (4.4.1) explicamos qualitativamente como a SR pode gerar compressão; na seção (4.4.2) reproduzimos o modelo de Josse e colaboradores [23] para interação entre dois modos de campo ortogonalmente polarizados e um *ensemble* de N átomos de quatro níveis na configuração-X. Também mostramos como aparece o Hamiltoniano efetivo em um regime dispersivo, onde efetivamente apenas dois níveis são importantes. Na seção (4.4.3) estudamos a evolução temporal para os modos ortogonais dos campos inicialmente em estados coerentes e o *ensemble* de átomos em estados de superposição de dois tipos, tanto para o caso de polarização circular como linear, e a geração de estados não-Gaussianos. Na seção (4.4.4) calculamos, no caso de polarização circular, as evoluções temporais das variâncias dos operadores de quadraturas e, através de combinações apropriadas delas, inferimos o emaranhamento nos modos de polarização linear usando o critério de inseparabilidade [20, 21].

4.1. Porque a auto-rotação gera compressão: explicação qualitativa

É fato comprovado que, conforme discutido acima, quando uma luz polarizada linearmente se propaga através de um meio no qual luz elipticamente polarizada sofreria SR, pode haver compressão no vácuo na polarização ortogonal. Matsko e colaboradores [62] demonstraram uma relação simples entre SR e o grau de compressão do vácuo analisando a compressão de vácuo de luz ressonante num sistema atômico de baixo momento angular, e calcularam para Rb atômico a possibilidade de compressão apreciável.

Aqui apresentamos apenas uma explicação qualitativa clássica do porque a SR gera compressão. Suponha que incidimos ao longo da direção- \hat{z} uma onda linearmente polarizada (LP) forte na direção- \hat{y} que atinge um meio onde a luz LP sofre SR, e também uma onda LP fraca na direção- \hat{x} . Assim, no meio onde a luz elipticamente polarizada sofre rotação, o eixo principal da polarização sofre rotação durante a propagação. Após caminhar uma distância z dentro desse meio, se observarmos a LP na direção- \hat{x} , uma porção do campo forte passa a ser projetada nessa direção. Dependendo da *fase relativa* entre as duas ondas incidentes, a componente do campo polarizada na direção- \hat{x} pode ser amplificada ou atenuada comparada ao *input* (ganho ou perda sensível à fase). No caso de atenuação, temos um mecanismo de *feedback* que reduz o campo na direção- \hat{x} , onde no caso do experimento, o campo de *input* seria só a

nas quadraturas e nas variáveis de Stokes em [59].

flutuação do vácuo.

4.2. Modelo para interação de dois modos de polarização e N átomos de quatro níveis

Nesta seção apresentaremos o modelo utilizado em uma série de artigos de Josse e colaboradores [23, 24], utilizado para discutir os dados experimentais de compressão e emaranhamento de polarização e quadratura em feixes linearmente polarizados após interação com átomos. O sistema estudado é comum em todos esses artigos: uma nuvem de átomos de césio (átomos frios de 4 níveis do tipo X) é colocada em uma cavidade óptica. Um campo linearmente polarizado é bombeado na cavidade, interagindo com essa nuvem atômica, e o campo após a interação é analisado.

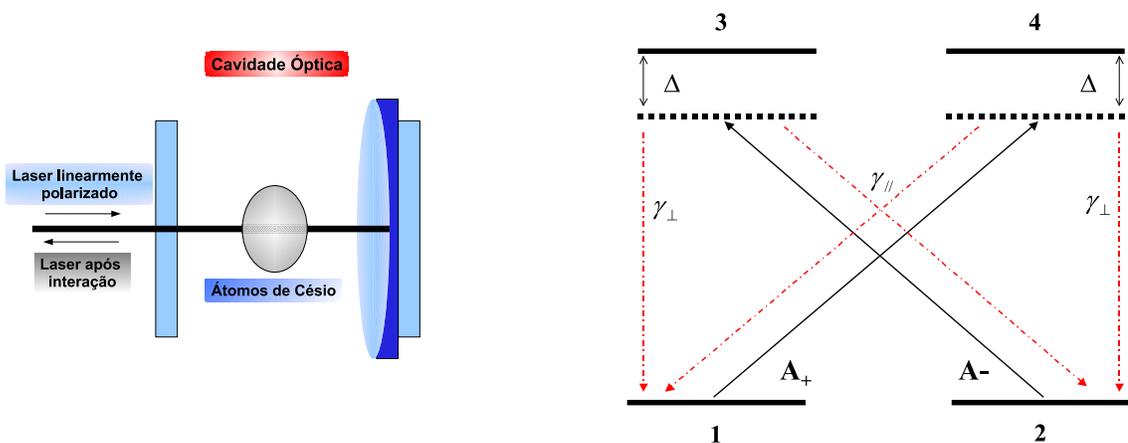


Figura 5 – A figura à esquerda (a) mostra o esquema do experimento utilizado por Josse e colaboradores [23] para geração de compressão e emaranhamento de quadratura e polarização nos modos de um laser incidente linearmente polarizado. A figura à direita (b) representa o modelo do átomo de 4 níveis tipo X utilizado.

O estudo da interação de feixes linearmente polarizados com sistemas atômicos em cavidades ópticas é abundante [23]. Em experimentos que envolvem esse tipo de interação, são observadas alterações na polarização dos feixes, sugerindo compressão nas quadraturas dos modos [23, 24]. Essa compressão é indiretamente verificada por Josse e colaboradores nos artigos anteriormente citados, e utilizada como condição básica para a quantificação de emaranhamento.

variáveis (figura 3)	descrição
$\omega_{\text{at}} = \omega_{13} = \omega_{24}$	frequências de transição atômica
ω	frequência do campo
$\Delta = \omega_{\text{at}} - \omega$	dessintonia
$\gamma = \gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp}$	taxa de decaimento
$a_k(a_k^\dagger)$	operadores de criação (aniquilação) de fótons
índice $k = +, -, x, y$	índice de polarização dos modos
índice $+(-)$	modo circularmente polarizado à direita (esquerda)
índice $x(y)$	modo linearmente polarizado à direita (esquerda)

Basicamente, conforme mostra a figura (3a), um feixe linearmente polarizado ^k incide em uma nuvem de átomos de césio, e o feixe que sai da cavidade após a interação é analisado. Os átomos de 4 níveis, do tipo X, são esquematizados na figura (3b). As frequências de transições atômicas são dadas por $\omega_{\text{at}} (= \omega_{13} = \omega_{24})$ e ω é a frequência do campo. A dessintonia é denotada por $\Delta (= \omega_{\text{at}} - \omega)$ e γ é a taxa de decaimento ($\gamma = \gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp}$). $a_{+(-)} [a_{+(-)}^\dagger]$ são os operadores de aniquilação (criação) de fótons para feixes polarizados circularmente à direita (esquerda) que, em termos das componentes lineares, podem ser escritos como:

$$a_+ = \frac{a_x - ia_y}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad a_- = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}. \quad (4.1)$$

O conjunto de N átomos é descrito pelo uso de operadores atômicos coletivos

$$\sigma_{14} = \sum_{i=1}^N e^{i\omega t} |1\rangle_i \langle 4|_i. \quad (4.2)$$

Desta maneira, o Hamiltoniano átomo-campo que descreve a interação pode ser descrito por

$$H_{\text{int}} = \hbar g [a_+ \sigma_{41} + a_+^\dagger \sigma_{14} + a_- \sigma_{32} + a_-^\dagger \sigma_{23}]. \quad (4.3)$$

Já a evolução atômica é governada pelo conjunto de equações de Heisenberg-Langevin

$$\dot{\sigma}_{14} = -(\gamma + i\Delta)\sigma_{14} - ig a_+(\sigma_{11} - \sigma_{44}) + F_{14}, \quad (4.4)$$

$$\dot{\sigma}_{23} = -(\gamma + i\Delta)\sigma_{23} - ig a_-(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + F_{23}, \quad (4.5)$$

$$\dot{\sigma}_{11} = 2\gamma_{\perp}\sigma_{33} + 2\gamma_{\parallel}\sigma_{44} - ig(a_+^\dagger\sigma_{14} - a_+\sigma_{41}) + F_{11}, \quad (4.6)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = 2\gamma_{\parallel}\sigma_{33} + 2\gamma_{\perp}\sigma_{44} - ig(a_-^\dagger\sigma_{23} - a_-\sigma_{32}) + F_{22}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\sigma}_{33} = -2\gamma\sigma_{33} + ig(a_-^\dagger\sigma_{23} - a_-\sigma_{32}) + F_{33}, \quad (4.8)$$

$$\dot{\sigma}_{44} = -2\gamma\sigma_{44} + ig(a_+^\dagger\sigma_{14} - a_+\sigma_{41}) + F_{44}, \quad (4.9)$$

onde F_{ij} são operadores de Langevin. A partir do Hamiltoniano de interação 4.3 e da solução das equa-

^k No experimento, um dos modos ortogonais está preparado no estado de vácuo (que sofrerá compressão após a interação com a nuvem atômica), e o outro em um estado coerente.

ções de Heisenberg-Langevin acima, os autores verificam a troca de polarização e compressão de quadratura dos feixes, e utilizam esses resultados para analisar o emaranhamento de quadratura e polarização dos modos. Porém, consideram que os modos após a interação são descritos por estados Gaussianos. Isso os leva a quantificar o emaranhamento utilizando o critério de inseparabilidade de Duan [20], a variância das quadraturas e emaranhamento de formação (EOF). Nos resultados da tese (mais especificamente, desse capítulo) mostraremos que a interação estudada não é necessariamente linear e, por consequência, a evolução é não-Gaussiana. Com essa informação, conseguiremos estudar o emaranhamento das quadraturas dos modos corretamente.

4.3. Modelo efetivo no regime dispersivo: interação de dois modos de polarização e N átomos de dois níveis

O primeiro passo para analisar o emaranhamento das quadraturas dos modos será derivar um Hamiltoniano efetivo que leve em conta a interação entre os dois modos do campo polarizados ortogonalmente. Para isso, fazemos as seguintes suposições:

(i) Desconsideramos as flutuações na derivação das soluções estacionárias do conjunto de equações de Heisenberg-Langevin. Na prática isso significa que tomamos como zero os operadores de Langevin ($F_{ij} = 0$).

(ii) Simplificamos nosso sistema de átomos de quatro níveis para um sistema efetivo de átomos de dois níveis, considerando que Δ é muito grande ($\Delta \gg \gamma \gg g$), de maneira que os níveis 3 e 4 não estão significativamente populados ($\sigma_{33} = \sigma_{44} = 0$). Assim, tomando as equações (4.4) e (4.5) no regime estacionário ($\dot{\sigma}_{14} = \dot{\sigma}_{23} = 0$), teremos, numa aproximação de mais baixa ordem (que aqui será representada através do índice 0):

$$\sigma_{14}^{(0)} = \frac{-iga_+(t)\sigma_{11}(t)}{(\gamma + i\Delta)} \quad \text{e} \quad \sigma_{23}^{(0)} = \frac{-iga_-(t)\sigma_{22}(t)}{(\gamma + i\Delta)}. \quad (4.10)$$

A substituição das equações acima nas equações para as populações (4.6 - 4.9), nos permite reescrever os termos de interação na forma simetrizada

$$\dot{\sigma}_{44} = \frac{2\gamma g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \sigma_{11} - 2\gamma \left[1 + \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \right] \sigma_{44}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\sigma}_{33} = \frac{2\gamma g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \sigma_{22} - 2\gamma \left[1 + \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \right] \sigma_{33}, \quad (4.12)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = 2\gamma_\perp \sigma_{44} - \frac{2\gamma g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \sigma_{22} + 2\gamma \left[\frac{\gamma_\parallel}{\gamma_\perp} + \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \right] \sigma_{33}, \quad (4.13)$$

$$\dot{\sigma}_{11} = 2\gamma_\perp \sigma_{33} - \frac{2\gamma g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \sigma_{11} + 2\gamma \left[\frac{\gamma_\parallel}{\gamma_\perp} + \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \right] \sigma_{44}. \quad (4.14)$$

No regime estacionário ($\dot{\sigma}_{33} = \dot{\sigma}_{44} = 0$), onde consideramos os estados 3 e 4 estando praticamente não populados, encontramos

$$\sigma_{33} = \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \left[1 + \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \right]^{-1} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \sigma_{22}, \quad (4.15)$$

$$\sigma_{44} = \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \left[1 + \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \right]^{-1} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \sigma_{11}. \quad (4.16)$$

Em nossas suposições iniciais, assumimos que $\Delta \gg \gamma \gg g$. Assim, teremos então $\frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \ll 1$, e de agora em diante manteremos em (4.15) e (4.16) os termos de primeira ordem nessa quantidade. Isso nos leva às equações

$$\sigma_{33} \approx \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_-^\dagger a_- + 1/2) \sigma_{22}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_{44} \approx \frac{g^2}{(\gamma^2 + \Delta^2)} (a_+^\dagger a_+ + 1/2) \sigma_{11}. \quad (4.18)$$

Essas soluções estacionárias para as populações dos níveis 3 e 4 podem ser incluídas nos termos correspondentes para a aproximação de primeira ordem das coerências entre os estados 1,4 e 2,3 como segue

$$\sigma_{14}^{(1)} = \frac{-ig a_+(t) (\sigma_{11} - \sigma_{44})}{(\gamma + i\Delta)}, \quad (4.19)$$

e

$$\sigma_{23}^{(1)} = \frac{-ig a_-(t) (\sigma_{22} - \sigma_{33})}{(\gamma + i\Delta)}. \quad (4.20)$$

Agora, de posse das soluções estacionárias acima, podemos considerar as equações de Heisenberg para os operadores do campo (que possibilitarão a obtenção do Hamiltoniano efetivo procurado)

$$\dot{a}_+ = -i\omega a_+ - ig \sigma_{14}, \quad (4.21)$$

$$\dot{a}_- = -i\omega a_- - ig \sigma_{23}, \quad (4.22)$$

onde $\sigma_{14(23)} = e^{i\omega t} \sigma_{14(23)}$. Substituindo as soluções estacionárias (4.19) e (4.20) nas equações de Heisenberg acima, nós obtemos

$$\dot{a}_+ = - \left\{ i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \left[1 - \frac{g^2 a_+ a_+^\dagger}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \right] \right\} a_+ - \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \left[1 - \frac{g^2 a_+ a_+^\dagger}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \right] a_+ \sigma_z, \quad (4.23)$$

$$\dot{a}_- = - \left\{ i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \left[1 - \frac{g^2 a_- a_-^\dagger}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \right] \right\} a_- + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \left[1 - \frac{g^2 a_- a_-^\dagger}{(\gamma^2 + \Delta^2)} \right] a_- \sigma_z, \quad (4.24)$$

onde definimos $\sigma_z \equiv \sigma_{11} - \sigma_{22}$, e assumimos que $\sigma_{11} + \sigma_{22} \approx 1$. É possível notar a presença de termos não-lineares proporcionais a $a_+ a_+^\dagger a_+$ e a $a_- a_-^\dagger a_-$. Esses termos levam os modos do campo a terem uma evolução não-Gaussiana, isto é, se inicialmente os estados dos modos do campo forem Gaussianos, a evolução os levará a estados não-Gaussianos. O mesmo acontece para termos de ordem superior, o que implica que, invariavelmente, a evolução será não-Gaussiana. É obvio que quando estes termos e os de ordem superior são levados em consideração, a evolução será não-Gaussiana. Nosso interesse é demonstrar que a evolução será não-Gaussiana e, conseqüentemente, o estado do campo também será não-Gaussiano. A partir daqui consideramos situações próximas à evolução Gaussiana. Note que esses termos não-lineares são, no mínimo, proporcionais a g^4 , que segundo supomos, é muito pequeno comparado aos termos lineares em g^2 , que sozinhos podem ou não levar a uma evolução Gaussiana, dependendo do estado atômico inicial. Mantendo somente os termos até g^2 , as equações (4.23) e (4.24) podem ser reescritas como

$$\dot{a}_+ \approx - \left[i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \right] a_+ - \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} a_+ \sigma_z, \quad (4.25)$$

$$\dot{a}_- \approx - \left[i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \right] a_- + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} a_- \sigma_z, \quad (4.26)$$

que, em termos dos operadores linearmente polarizados, são dados por

$$\dot{a}_x \approx - \left[i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \right] a_x + \frac{ig^2}{2(\gamma + i\Delta)} a_y \sigma_z, \quad (4.27)$$

$$\dot{a}_y \approx - \left[i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \right] a_y - \frac{ig^2}{2(\gamma + i\Delta)} a_x \sigma_z. \quad (4.28)$$

Assumindo que

$$\mathbf{a}_i \equiv e^{(i\omega + \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)})t} \mathbf{a}_i \quad (i = x, y), \quad (4.29)$$

nós podemos reescrever essas equações como

$$\dot{\mathbf{a}}_x = \frac{ig^2}{2(\gamma + i\Delta)} \mathbf{a}_y \sigma_z \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{a}}_y = -\frac{ig^2}{2(\gamma + i\Delta)} \mathbf{a}_x \sigma_z. \quad (4.30)$$

De posse das soluções das equações acima, e lembrando das equações de Heisenberg

$$\dot{\mathbf{a}}_x = \frac{-i}{\hbar} [\mathbf{a}_x, H] \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{a}}_y = \frac{-i}{\hbar} [\mathbf{a}_y, H], \quad (4.31)$$

podemos encontrar o Hamiltoniano de interação que satisfaz essas equações. No caso da evolução dos modos linearmente polarizados, temos

$$H_{\text{eff}}^{(1)} = \lambda (\mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y) \sigma_z, \quad (4.32)$$

que é o acoplamento bilinear entre os modos linearmente polarizados x e y . Se tivéssemos considerado os termos não-lineares ($\mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y$), isso nos levaria a um Hamiltoniano que geraria um estado não-Gaussiano[76]. Na equação acima definimos uma constante de acoplamento efetivo (λ) dada por

$$\lambda = \frac{g^2}{2(\gamma + i\Delta)} \equiv \lambda_1 + i \lambda_2, \quad (4.33)$$

onde

$$\lambda_1 \equiv \frac{g^2 \gamma}{2(\gamma^2 + \Delta^2)} \quad \text{e} \quad \lambda_2 \equiv -\frac{g^2 \Delta}{2(\gamma^2 + \Delta^2)}. \quad (4.34)$$

O Hamiltoniano de interação apropriado correspondente à evolução dos modos circularmente polarizados para as equações (4.25,4.26) é

$$H_{\text{eff}}^{(c)} = -i\lambda (\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_-) \sigma_z, \quad (4.35)$$

Podemos observar na equação (4.33) que λ é um número complexo, e portanto, ambos os Hamiltonianos efetivos são não-Hermitianos. Essa não-Hermiticidade decorre da emissão espontânea dos

estados 3 e 4, e do fato que eliminamos estes estados nas nossas aproximações, levando a um processo não-unitário. Iremos agora analisar as situações em que λ é puramente real ou imaginário, qual das situações está de acordo com nossas considerações iniciais, e os Hamiltonianos efetivos correspondentes a essas considerações.

(i) $|\lambda_2| \gg |\lambda_1|$. Nesse caso, nós temos os seguintes Hamiltonianos efetivos:

$$H_{\text{eff}}^{(c)} = \lambda_2(\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_-) \sigma_z \quad (4.36)$$

e

$$H_{\text{eff}}^{(l)} = i\lambda_2(\mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y) \sigma_z. \quad (4.37)$$

Como podemos observar, no caso da polarização circular nosso sistema é descrito por um Hamiltoniano não-Hermitiano, ao contrário do caso da polarização linear, onde o Hamiltoniano é Hermitiano.

(ii) $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$. Nesse caso, os Hamiltonianos efetivos obtidos são dados por:

$$H_{\text{eff}}^{(c)} = i\lambda_1(\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_-) \sigma_z \quad (4.38)$$

e

$$H_{\text{eff}}^{(l)} = \lambda_1(\mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y) \sigma_z. \quad (4.39)$$

Podemos notar aqui uma situação inversa ao do caso analisado anteriormente, ou seja, na polarização linear nossa sistema é descrito por um Hamiltoniano não-Hermitiano, enquanto que na polarização circular o Hamiltoniano é Hermitiano. Nossas escolhas utilizadas nas aproximações prévias ($\Delta \gg \gamma \gg g$) estão de acordo com valores experimentais atuais ($\gamma \approx 2.6 - 16$ MHz, $\Delta \approx 130 - 327$ MHz, e g aproximadamente 2 Hz). Para manter essas relações entre os parâmetros (Δ , γ , g), a relação apropriada entre as partes real e imaginária de λ nos Hamiltonianos efetivos é $|\lambda_2| \gg |\lambda_1|$. Então, os Hamiltonianos efetivos que iremos considerar em nossa análise durante a tese são dados pelas equações (4.36) e (4.37).

4.4. Evolução não-Gaussiana: estados coerentes emaranhados e superposição de estados coerentes

Vamos tomar primeiro os Hamiltonianos (4.36) e (4.37), onde consideramos o limite $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$. De imediato vemos que esses Hamiltonianos geram estados não-Gaussianos somente em situações favoráveis a um desbalanço nas populações do conjunto atômico. Levando em consideração as possíveis transições entre os dois estados fundamentais coletivos atômicos, iremos considerar uma das duas possibilidades abaixo:

(a) O conjunto de átomos estando numa superposição coerente macroscópica de estados 1 e 2

$$|\chi_a^\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|1\rangle_{\text{at}} \pm |2\rangle_{\text{at}}) \quad \text{onde} \quad |1(2)\rangle_{\text{at}} \equiv |1..1(22..2)\rangle. \quad (4.40)$$

(b) Cada átomo do conjunto estando numa superposição de estados coerentes 1 e 2

$$|\chi'_a\rangle = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_i + |2\rangle_i). \quad (4.41)$$

Ensembles de átomos preparados em superposições de estados coerentes interagindo com luz são importantes para várias aplicações em óptica quântica e comunicação quântica [63–68, 77], e constituem uma importante fonte de geração de emaranhamento para o tipo de estado do campos dos modos analisados aqui. Embora a situação (a) (equação (4.40)) não seja fácil de se realizar experimentalmente, ela serve para ilustrar a natureza não-Gaussiana do estado do campo final. Já a segunda situação ((b) - equação (4.41)) é factível experimentalmente pela aplicação de um campo clássico não-ressonante (pulso π) na nuvem atômica, inicialmente preparada em um dos estados fundamentais, antes da interação com o campo quântico. Também existem novas técnicas para a obtenção da superposição coerente, como [78]. O estado do campo resultante nesse caso é uma generalização do caso anterior, também não-Gaussiano.

(i) Polarização circular

Nós consideramos ambos os modos circularmente polarizados preparados em estados coerentes ($|\alpha\rangle_+$ e $|\beta\rangle_-$), onde os subscritos + ou – designam as duas polarizações circulares ortogonais. Primeiro assumimos o estado do *ensemble* atômico como em (a) (equação (4.40)). Após alguns cálculos, o estado átomo-campo evoluído temporalmente é dado por (detalhes no apêndice A.1)

$$|\psi(t)\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha e^{\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{-\lambda t}\rangle_- |1\rangle_{at} \pm |\alpha e^{-\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{\lambda t}\rangle_- |2\rangle_{at}] \quad (4.42)$$

que é obviamente um estado emaranhado. Observe que a operação bilinear não permite que os dois modos emaranhem se os átomos estiverem nos estados $|1\rangle_{at}$, $|2\rangle_{at}$ ou uma mistura deles. A superposição atômica é essencial para a geração de emaranhamento.

Condicionando a medida do sistema atômico no mesmo estado inicial em que ela foi preparada (superposição (a) - equação (4.40)), nós encontramos

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle_{\pm}^c &= \frac{\langle \chi_a^{\pm} | \psi(t) \rangle}{\sqrt{\text{Tr}_{+,-} \{ |\chi_a^{\pm} | \psi(t) \rangle \langle \chi_a^{\pm} | \psi(t) \rangle \}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [|\alpha e^{\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{-\lambda t}\rangle_- \pm |\alpha e^{-\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{\lambda t}\rangle_-], \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde

$$N_{\pm} = 2 \left\{ 1 \pm e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cosh 2\lambda_1 t} e^{(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cos 2\lambda_2 t} \cos[(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \sin 2\lambda_2 t] \right\} \quad (4.44)$$

Iremos olhar esse estado em um tempo específico $|\lambda_2|t = \pi/2$. Nesse caso, o estado toma a forma

$$|\varphi(\pi/2|\lambda_2)\rangle_{\pm}^c = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [e^{\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}} (i\alpha)\rangle_+ |e^{-\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}} (-i\beta)\rangle_- \pm |e^{-\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}} (-i\alpha)\rangle_+ |e^{\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}} (i\beta)\rangle_-]. \quad (4.45)$$

Fazendo o limite $\lambda_1/|\lambda_2| \rightarrow 0$ na equação (4.45), obtemos

$$|\varphi(\pi/2|\lambda_2)\rangle_{\pm}^c = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [|(i\alpha)\rangle_+ |(-i\beta)\rangle_- \pm |(-i\alpha)\rangle_+ |(i\beta)\rangle_-], \quad (4.46)$$

que é um estado emaranhado, mas não-Gaussiano.

Para mostrar que esse é um estado emaranhado não-Gaussiano presente em muitas configurações experimentais, vamos considerar o estado mais simples ((b) - equação (4.41)). Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, mas para o estado inicial atômico (b) (equação (4.41)), obtemos, depois da medida condicionada do estado atômico no mesmo estado da preparação inicial, o seguinte estado

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)\rangle^c &= \frac{\langle \chi'_a | \psi(t) \rangle}{\sqrt{\text{Tr}_{+,-}\{|\langle \chi'_a | \psi(t) \rangle|^2\}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N'(t)}} \left[\sum_{j=0}^N C_j^N |\alpha e^{\frac{N-2j}{N}\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{-\frac{N-2j}{N}\lambda t}\rangle_- \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde $C_j^N = \frac{N!}{j!(N-j)!}$ é o coeficiente binomial, e $N'(t)$ o fator de normalização correspondente. Esse é o estado de superposição emaranhado de dois modos não-Gaussiano com $N + 1$ termos na superposição. Apesar de ser mais fácil de ser obtido experimentalmente, esse estado tem uma estrutura mais complexa do que a do caso anterior (equação (4.43)). Para efeito de ilustração, queremos manter o estado não-Gaussiano mais simples, e para isso, a partir de agora, consideraremos somente os resultados da superposição coerente do caso (a) (equação (4.40)), que fornece resultados similares ao caso (b) (equação (4.41)), mais acessível experimentalmente.

(ii) Polarização linear

Sob as mesmas condições iniciais (ambos os modos polarizados circularmente, preparados em estados coerentes, e os átomos no estado (a) (equação (4.40))), consideramos os efeitos do operador evolução temporal

$$U^{(l)}(t) = \exp \left[-i\lambda(\mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y) \sigma_z t \right] \quad (4.48)$$

para a polarização linear. Essa é uma operação similar a de um divisor de feixes com condicionamento de fase do estado atômico. É bem conhecido [79–81] que uma operação de divisor de feixe bilinear não emaranha estados clássicos. Como consequência, se os estados dos modos x e y forem preparados em estados coerentes, eles evoluem como estados coerentes não emaranhados, a menos que o sistema atômico seja preparado em uma superposição de dois estados fundamentais 1 e 2. As duas polarizações estudadas aqui se relacionam através da equação (4.1). Aplicando essa relação, é fácil relacionar seus respectivos estados

$$|\alpha\rangle_+ |\beta\rangle_- \rightarrow |\alpha'\rangle_y |\beta'\rangle_x, \quad (4.49)$$

onde $\alpha' \equiv i(\alpha - \beta)/\sqrt{2}$ e $\beta' \equiv (\alpha + \beta)/\sqrt{2}$. Sobre a evolução (4.48), os estados acima assumem a forma (detalhes no apêndice A.2)

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle_{\pm}^l &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^{(l)}(t) D_y(\alpha') D_x(\beta') |0\rangle_y |0\rangle_x (|1\rangle_{at} \pm |2\rangle_{at}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} D_y(\cosh(\lambda t)\alpha' - i \sinh(\lambda t)\beta') D_x(\cosh(\lambda t)\beta' + i \sinh(\lambda t)\alpha') |0\rangle_y |0\rangle_x |1\rangle_{at} \\
&\quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} D_y(\cosh(\lambda t)\alpha' + i \sinh(\lambda t)\beta') D_x(\cosh(\lambda t)\beta' - i \sinh(\lambda t)\alpha') |0\rangle_y |0\rangle_x |2\rangle_{at} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} |\cosh(\lambda t)\alpha' - i \sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' + i \sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x |1\rangle_{at} \\
&\quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |\cosh(\lambda t)\alpha' + i \sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' - i \sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x |2\rangle_{at}, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

onde $D_i(\alpha)$ é o operador deslocamento de Glauber com α se referindo a polarização $i = x, y$. Condicionando a detecção atômica no mesmo estado de superposição (a) (equação (4.40)) preparado inicialmente, nós temos

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)\rangle_{\pm}^l &= \frac{\langle \chi_a^{\pm} | \psi(t) \rangle}{\sqrt{\text{Tr}_{+,-}\{|\chi_a^{\pm} | \psi(t) \rangle^2\}}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [|\cosh(\lambda t)\alpha' - i \sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' + i \sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x \\
&\quad \pm |\cosh(\lambda t)\alpha' + i \sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' - i \sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x].
\end{aligned}$$

Tomando novamente a escolha de $|\lambda_2|t = \pi/2$, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
|\varphi(\pi/2|\lambda_2)\rangle_{\pm}^l &= \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} \left| i \sinh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\alpha' + \cosh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\beta' \right\rangle_y \otimes \left| i \sinh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\beta' - \cosh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\alpha' \right\rangle_x \\
&\quad \pm \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} \left| i \sinh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\alpha' - \cosh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\beta' \right\rangle_y \otimes \left| i \sinh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\beta' + \cosh\left(\frac{\pi\lambda_1}{2\lambda_2}\right)\alpha' \right\rangle_x, \tag{4.51}
\end{aligned}$$

que para $\lambda_1/|\lambda_2| \rightarrow 0$ se torna

$$|\varphi(\pi/2|\lambda_2)\rangle_{\pm}^l = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} \left[\left| \frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}} \right\rangle_y \left| -i \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}} \right\rangle_x \pm \left| -\frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}} \right\rangle_y \left| i \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}} \right\rangle_x \right]. \tag{4.52}$$

Para termos as mesmas condições do experimento, tomamos o modo polarizado na direção x no estado de vácuo, tal que $\alpha - \beta = 0$, obtendo assim

$$|\varphi(\pi/2|\lambda_2)\rangle_{\pm}^l = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} \left(\left| \sqrt{2}\alpha \right\rangle_y \pm \left| -\sqrt{2}\alpha \right\rangle_y \right) |0\rangle_x. \tag{4.53}$$

Esse estado representa uma superposição de estados coerentes para o modo polarizado na direção y , chamado de estado coerente par ou ímpar [82–84] para a escolha $+$ ou $-$ do estado atômico. Esse é um tipo de estado com muitas aplicações em informação e computação quântica [85]. Agora, na polarização circular (equação (4.46)), o estado é

$$|\varphi(\pi/2|\lambda_2)\rangle_{\pm}^c \approx \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [|(i\alpha)\rangle_+ |(-i\alpha)\rangle_- \pm |(-i\alpha)\rangle_+ |(i\alpha)\rangle_-], \tag{4.54}$$

e diferentemente do caso da polarização linear (superposição em um modo e vácuo no modo ortogonal), os dois modos circularmente polarizados ortogonais estão emaranhados. Esse é um caso particular dos

estados de Bell, também chamados de estados coerentes emaranhados, discutidos com detalhes em [26] e empregados em [76].

Para finalizar essa discussão, observamos que através dos nossos cálculos, desprezamos efeitos dissipativos sobre os dois modos do campo. É claro que esses efeitos estarão presentes na nossa dinâmica, levando o sistema a um estado de mistura, reduzindo dessa maneira o emaranhamento. Contudo, a inclusão de efeitos dissipativos não irão alterar a natureza não-Gaussiana dos modos do campo. Portanto, não iremos incluir efeitos de dissipação em nossa análise.

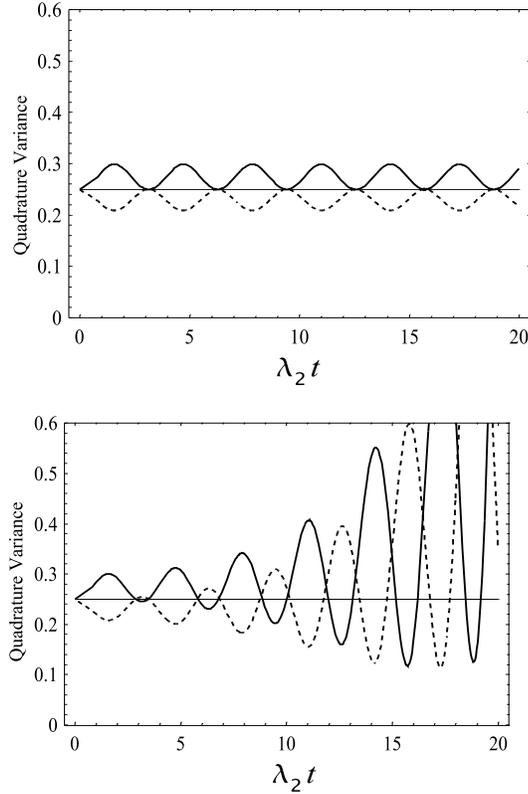


Figura 6 – Evolução temporal da variância das quadraturas para os modos polarizados circularmente, com $\beta = \alpha$, $\text{Re}[\alpha] = 0$ e $\text{Im}[\alpha] = 0.3$. (a) $(\Delta X_+)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_+)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$. (b) $(\Delta X_+)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_+)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$.

Variância das quadraturas e critério de emaranhamento

Emaranhamento na polarização circular pode ser aferido através de assinaturas não-clássicas na polarização linear (ver, por exemplo [81, 86]). Isso é comumente realizado pela análise de compressão na variância das quadraturas, como visto em [24]. Assim, utilizaremos a definição usual dos operadores de quadratura

$$\mathbf{X}_l = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_l^\dagger) \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_l = \frac{1}{2i}(\mathbf{a}_l^\dagger - \mathbf{a}_l), \quad (4.55)$$

onde $l = +, -, x$, ou y para cada um dos modos circulares ou lineares. A variância das quadraturas é dada por

$$(\Delta \mathbf{X}_l)^2 = \langle \mathbf{X}_l^2 \rangle - \langle \mathbf{X}_l \rangle^2 \quad \text{e} \quad (\Delta \mathbf{Y}_l)^2 = \langle \mathbf{Y}_l^2 \rangle - \langle \mathbf{Y}_l \rangle^2. \quad (4.56)$$

Essas duas quadraturas, em uma das polarizações, podem ser combinadas para indicar se existe emaranhamento na outra polarização através do critério de inseparabilidade para VC [20, 21]. Em termos dos operadores de variância isso é dado por

$$I_{a,b} = \frac{1}{2} [\Delta^2(\mathbf{X}_a + \mathbf{X}_b) + \Delta^2(\mathbf{Y}_a - \mathbf{Y}_b)] < 1. \quad (4.57)$$

Para estados Gaussianos, $I_{a,b} < 1$ é condição necessária e suficiente para emaranhamento. No nosso caso, onde os estados são não-Gaussianos, embora $I_{a,b} < 1$ indique com certeza emaranhamento, quando $I_{a,b} \geq 1$ nada pode ser dito sobre a presença ou não de emaranhamento. Nessa seção analisaremos a utilização da variância das quadraturas e do critério de inseparabilidade como indicador de emaranhamento para os estados não-Gaussianos obtidos. Esses resultados podem ser comparados com os da figura 2 da referência [24], atribuído a estados Gaussianos.

(i) Variância das quadraturas para os modos circularmente polarizados

As variâncias das quadraturas calculadas a partir do estado da equação (4.43), e com parâmetros fixados a partir da situação experimental [23] no caso do modo polarizado na direção x e no vácuo ($\alpha = \beta$) são mostrados na figura 6.

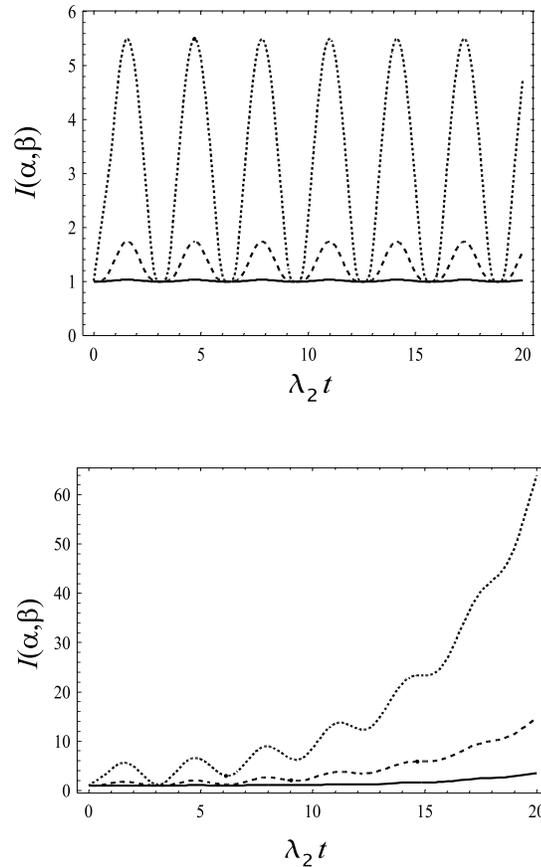


Figura 7 – Gráfico da evolução temporal do critério de inseparabilidade (polarização linear) para $\alpha = \beta$, fixando três diferentes linhas para $\text{Re}[\alpha] = 0$, $\text{Im}[\alpha] = 0.3$ (linha contínua), $\text{Im}[\alpha] = 0.7$ (linha tracejada), e $\text{Im}[\alpha] = 1.5$ (linha pontilhada). (a) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$ e (b) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. Todos os gráficos indicam ausência de emaranhamento, de acordo com o estado separável, mas não-Gaussiano, obtido para essa situação.

Na figura 6(a) vemos um comportamento oscilatório (periódico) para ambas as variâncias das quadraturas do modo circularmente polarizado $+$. Observe que a variância da quadratura Y_+ é periodicamente comprimida oscilando abaixo da linha de referência com valor $1/4$, enquanto a variância para X_+ oscila sempre acima dessa linha. Na figura 6(b), a única alteração com o caso anterior é no valor da razão entre os λ 's ($\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$). Nesse caso, a variância da quadratura X_+ é comprimida também no tempo. O comportamento é similar ao caso (a), mas para longos tempos a amplitude de oscilação aumenta razoavelmente, devido a natureza não-Hermitiana do Hamiltoniano. As variâncias das quadraturas X_- e Y_- mostram o mesmo comportamento que o caso abordado.

Para os modos linearmente polarizados, o critério de inseparabilidade pode ser escrito como

$$I_{x,y}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [\Delta^2(\mathbf{X}_x + \mathbf{X}_y)(\alpha, \beta) + \Delta^2(\mathbf{Y}_x - \mathbf{Y}_y)(\alpha, \beta)] < 1, \quad (4.58)$$

e, para a situação $\alpha = \beta$, a desigualdade indica corretamente a ausência de emaranhamento, desde que o modo x esteja no estado de vácuo. As figuras para essa situação são mostradas na figura 7. A figura 7(a) é para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$, enquanto a figura 7(b) é para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. Para todas as situações, a desigualdade é violada, indicando assim ausência de emaranhamento.

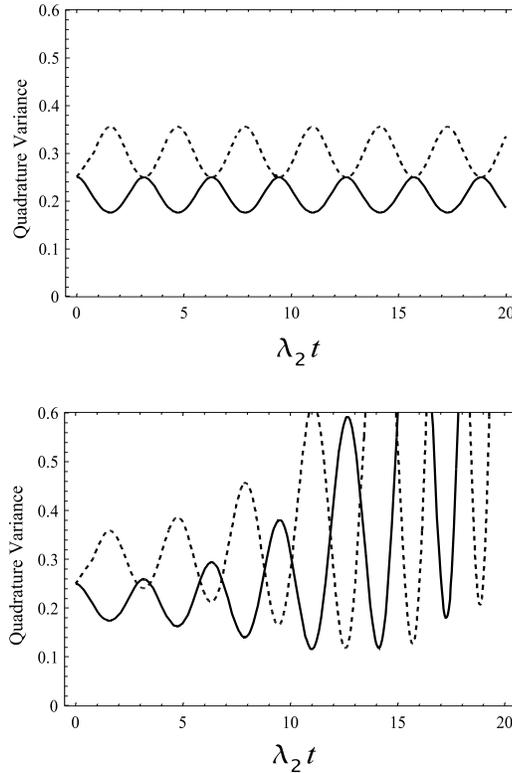


Figura 8 – Evolução temporal da variância das quadraturas para os modos linearmente polarizados, com $\alpha = \beta$, $\text{Re}[\alpha] = 0$ e $\text{Im}[\alpha] = 0.3$. (a) $(\Delta X_y)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_y)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$. (b) $(\Delta X_y)^2$ (linha contínua) e $(\Delta Y_y)^2$ (linha tracejada) para $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. O modo x está no estado de vácuo.

(ii) Variância das quadraturas para os modos polarizados linearmente

Para os modos polarizados linearmente, vamos considerar as variâncias a partir de do estado da equação (4.43) com $\alpha = \beta$ e $\lambda_1/|\lambda_2| \rightarrow 0$. Podemos notar nas linhas da figura 8: (a) para esse caso

tomamos $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$, e só a variância da quadratura X_y é comprimida (sempre abaixo da linha de referência), enquanto o modo x está no vácuo. Em (b) temos $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$ e compressão na variância da quadratura Y_y , novamente não constante no tempo, devido a não-Hermiticidade do Hamiltoniano.

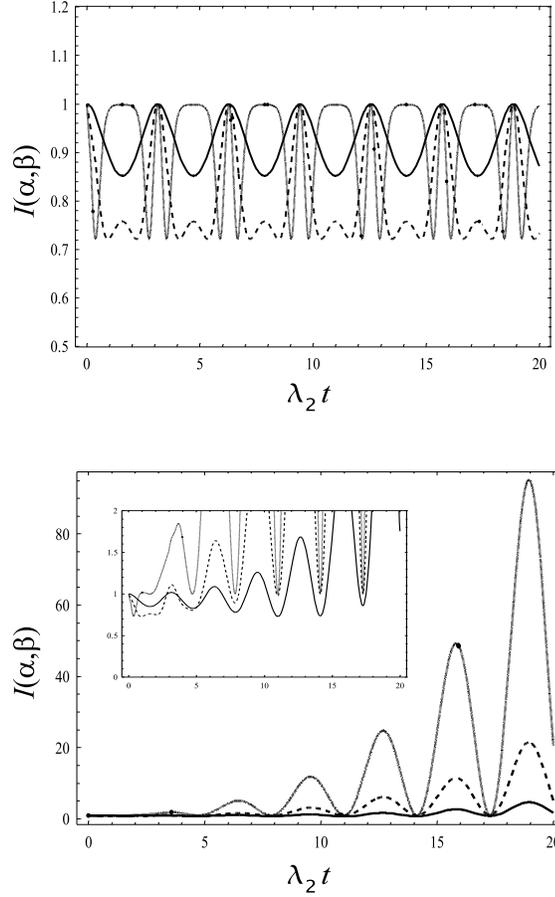


Figura 9 – Gráfico do critério de inseparabilidade como função do tempo para os modos circularmente polarizados com $\alpha = \beta$, fixando três diferentes linhas para $\text{Re}[\alpha] = 0$, $\text{Im}[\alpha] = 0.3$ (linha contínua), $\text{Im}[\alpha] = 0.7$ (linha tracejada), e $\text{Im}[\alpha] = 1.5$ (linha pontilhada). (a) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$. Pontos da curva abaixo de 1 indicam emaranhamento dos modos circularmente polarizados. (b) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$. O critério é afetado pela não-Hermiticidade do Hamiltoniano, mas para tempos curtos, ainda vemos emaranhamento (figura pequena).

Desde que o modo polarizado x esteja sempre no estado de vácuo, a variância de suas quadraturas não muda com o tempo. Assim, o fato de que uma das variâncias de um dos modos está comprimida abaixo do limite do ruído é um bom indicador que pode ocorrer emaranhamento para a polarização circular. De fato, analisarmos o critério de inseparabilidade para a polarização circular

$$I_{+,-}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[\Delta^2(X_+ + X_-)(\alpha, \beta) + \Delta^2(Y_+ - Y_-)(\alpha, \beta)], \quad (4.59)$$

onde as variâncias são obtidas usando as expressões prévias para essa polarização, nós observamos claramente emaranhamento, como podemos ver na figura 9. Nós observamos no entanto, que existem situações (escolhas de parâmetros) onde o critério não indica emaranhamento, enquanto o estado está claramente emaranhado. Esse fato não é uma surpresa, já que o estado é não-Gaussiano e a violação do critério não é um ingrediente necessário para a existência de emaranhamento. Para comparação, plotamos na figura 10 a entropia linear reduzida de um modo $S(\alpha, \beta) = 1 - \text{Tr}\{\rho_+^2\}$ (evolução temporal), que nesse

caso, desde que o sistema completo seja puro, indica emaranhamento entre os modos. É claro observar que o critério está corretamente indicando emaranhamento para as mesmas situações consideradas na figura 6.

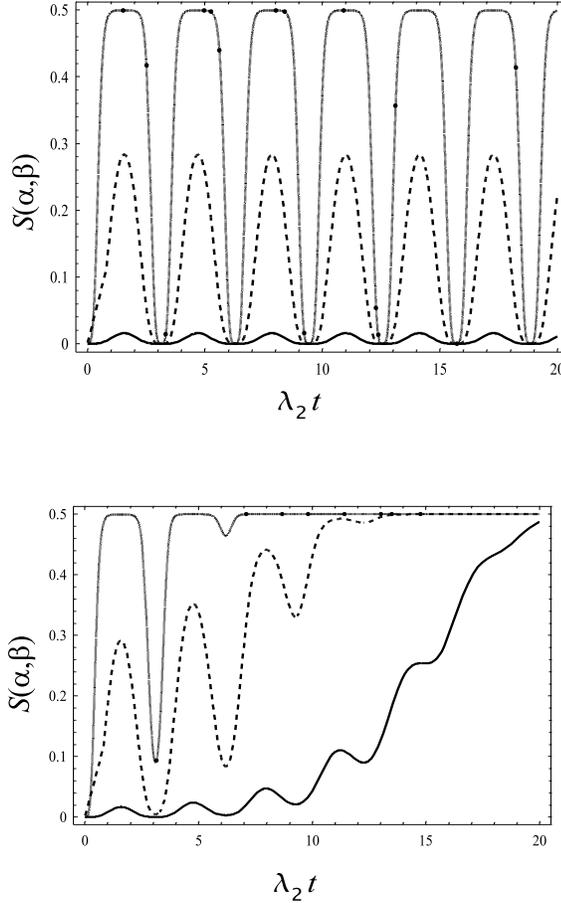


Figura 10 – Gráfico da evolução temporal da entropia linear para o modo circularmente polarizado + com $\alpha = \beta$ fixando três diferentes linhas para $\text{Re}[\alpha] = 0$, $\text{Im}[\alpha] = 0.3$ (linha sólida), $\text{Im}[\alpha] = 0.7$ (linha tracejada), e $\text{Im}[\alpha] = 1.5$ (linha pontilhada). (a) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0$ Indica emaranhamento e desemaranhamento periódico para os dois modos ortogonais. (b) $\lambda_1/|\lambda_2| = 0.1$ A periodicidade do emaranhamento-desemaranhamento é afetada pela não-Hermiticidade do Hamiltoniano. O sistema tende a ficar fortemente emaranhado para tempos longos.

É interessante notar que as linhas da figura 8 e 9 que indicam máximo emaranhamento são obtidas do estado(4.54) para a polarização circular, que correspondem a uma superposição de estados coerentes com pequena amplitude(4.53) para a polarização linear. Como já discutimos, este estado apresenta compressão em uma das variâncias da quadratura. Agora, queremos saber o quão próximo este estado é do estado de vácuo comprimido, comumente atribuído em situações experimentais como o estado gerado. Seguindo a discussão de [72], a fidelidade $F(|\xi\rangle, \rho_{\text{cat}}) = \sqrt{\langle \xi | \rho_{\text{cat}} | \xi \rangle}$, entre o estado de superposição na polarização y e o vácuo comprimido

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left[-\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh(|\xi|) \right]^n \right] |2n\rangle, \quad (4.60)$$

pode ser muito próximo de 1, como mostra a figura 11. Isso, de alguma maneira, indica similaridades entre esses estados. As funções de Wigner para estes estados é mostrada no apêndice D, e pode ajudar a

distinguí-los melhor. Para pequenos valores de α (que representam os estados gerados no experimento

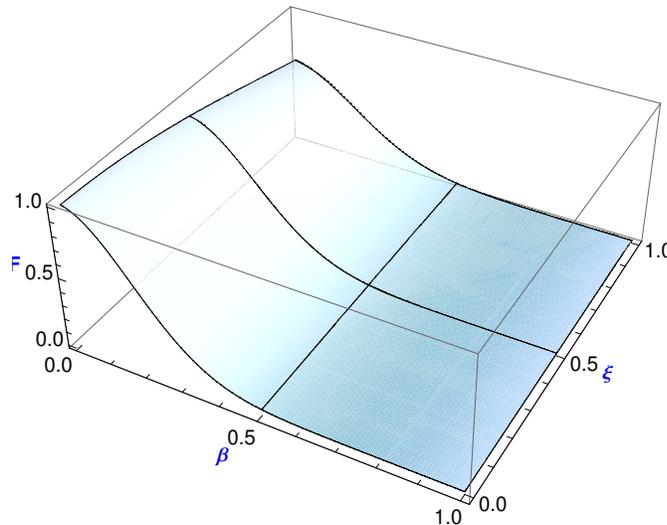


Figura 11 – Gráfico 3D da fidelidade entre o estado gerado (Eq.4.53) e o estado de vácuo comprimido (Eq.D.1) como função de α e ξ . A condição de acoplamento adotada para essa figura é $\lambda_1/|\lambda_2| \approx 0$.

mencionado), a fidelidade com o estado de vácuo comprimido com pequeno parâmetro de compressão é bastante alta. No entanto, é importante verificar que o estado de superposição não é Gaussiano, enquanto o estado de vácuo comprimido é Gaussiano. O fato de ser ou não-Gaussiano é importante para o uso do critério de emaranhamento utilizado por Josse e colaboradores [23]. Além disso, a expressão para o emaranhamento de formação [27] para estados Gaussianos simétricos, utilizado para quantificar emaranhamento em [23], é somente um limite baixo para o emaranhamento entre os dois modos.

Conclusões

Neste capítulo investigamos o modelo de Josse e colaboradores [23] para a interação entre dois campos quânticos e um conjunto de átomos de quatro níveis do tipo X, e derivamos um Hamiltoniano efetivo que descreve a interação dos modos do campo. Demostramos que as equações de Heisenberg para os operadores dos modos dos campos são não-lineares, levando a uma evolução não-Gaussiana. Essa evolução não-linear nos leva a estados emaranhados não-Gaussianos ou superposições não-Gaussianas de estados coerentes, dependendo da polarização (linear ou circular) dos modos e do estado inicial do sistema atômico. Mesmo quando a evolução é muito próxima de uma evolução Gaussiana, isto é, bilinear nos dois modos do campo, o estado de superposição atômico leva a uma evolução não-Gaussiana. Se controlarmos a polarização dos modos de entrada, somos capazes de gerar superposições de estados coerentes na saída. Através de uma preparação apropriada de um dos modos do feixe linearmente polarizado entrando na cavidade no estado de vácuo, obtemos o modo ortogonalmente polarizado do feixe saindo da cavidade em uma superposição de estados coerentes. Embora este estado seja não-Gaussiano, ele possui similaridades com o estado de vácuo comprimido de um modo. Quando visto da polarização, esta superposição resulta em estados coerentes emaranhados entre os modos nessa polarização. Comparamos aqui, qualitativamente, nossos resultados com os experimentais obtidos por Josse e colaboradores [23] para um sistema similar, onde eles atribuem uma natureza Gaussiana para os estados gerados. Contudo, a presença de uma superposição quando analisamos uma polarização, e o emaranhamento encontrado na outra polarização, podem explicar os efeitos não-clássicos observados no experimentos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Um dos principais resultados desse trabalho está descrito no capítulo 3. Nele apresentamos alguns esquemas conhecidos na literatura para gerar estados maximamente emaranhados do tipo Bell entre partículas distantes produzidos por interferência: uma deles usando emissão espontânea (seção 3.3.1), e o outro por fótons polarizados (seção 3.3.2). Em seguida apresentamos uma nova proposta para geração incondicional de estados do tipo Bell entre os níveis eletrônicos de íons separados espacialmente, por intermédio de um átomo propagante. Essa novo esquema inova por se basear na interação de íons aprisionados com um átomo propagante. A geração dos estados emaranhados de interesse é determinístico, dependendo apenas de variáveis experimentais, como o controle do tempo de voo do átomo, e as dimensões das câmaras de vácuo necessárias para conter os aparatos exigidos no experimento.

Outro resultado interessante apresentado na tese é sobre o emaranhamento em variáveis contínuas (VC) de estados de polarização circular e linear, descrito em detalhes no capítulo 4. Mostramos resultados conhecidos de Josse e colaboradores [23], onde os autores estudam a interação de feixes linearmente polarizados com uma nuvem de átomos (de 4 níveis, do tipo X) de césio. Após a interação, os autores assumem que o estado do feixe tem natureza Gaussiana, fato esse relevante para a análise do emaranhamento gerado. Em nossos resultados, consideramos situações em que os átomos podem ser considerados efetivamente como de apenas dois níveis. Dentro dessas aproximações, o Hamiltoniano que desceve a interação átomo-campo se torna bilinear nos operadores do campo, além de depender da diferença de população entre os dois níveis atômicos efetivos. Isso permite afirmarmos que, para determinadas condições, o estado do feixe de laser que interage com a nuvem de átomos tem natureza não-Gaussiana. A partir desses resultados, estudamos o emaranhamento através da variância das quadraturas, combinadas com o critério de inseparabilidade para VC, e também da entropia linear.

Ambos os trabalhos podem ser explorados mais a fundo, gerando perspectivas futuras de trabalhos. No caso do modelo de geração de estados de Bell entre os estados eletrônicos de íons aprisionados em cavidades por meio de um átomo propagante, existe a possibilidade de torná-lo mais geral, sem a necessidade de ressonância entre as frequências de átomos e íons. Já no caso do segundo resultado, onde analisamos a interação de um feixe linearmente polarizado com uma nuvem de átomos, o tipo de estado gerado após a interação é similar ao obtido em sistemas de circuitos quânticos, entre outros. Isso torna possível a utilização do nosso procedimento matemático em sistemas distintos. Além disso, uma análise quantitativa mais completa do emaranhamento pode ser realizada, através da utilização de critérios de inseparabilidade para estados não-Gaussianos [38]. A possibilidade de considerarmos os operadores de Langevin diferentes de zero, e aproximações de ordem superiores na dedução do Hamiltoniano efetivo de interação também pode ser objeto de futuros estudos.

A. OBTENÇÃO DOS ESTADOS ÁTOMO-ÍONS EMARANHADOS CONSIDERANDO DECOERÊNCIA E DISSIPAÇÃO (CAPÍTULO 3)

Neste apêndice mostraremos, com um pouco mais de detalhes, os cálculos realizados em 3.3.3, onde consideramos decoerência e dissipação do átomo propagante entre as cavidades A e B.

- Cavidade A (C_A)

O Hamiltoniano de interação átomo-íon em C_A é dado por

$$\mathbf{H}_{\text{int}}^1 = \lambda_1(\sigma_+^p \sigma_-^1 + \sigma_-^p \sigma_+^1). \quad (\text{A.1})$$

Em $t = 0$, o sistema está preparado no estado $|\psi(0)\rangle = |e_p, g_1\rangle$. O estado mais geral que descreve o sistema é escrito como

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|e_p, e_1\rangle + b(t)|e_p, g_1\rangle + c(t)|g_p, e_1\rangle + d(t)|g_p, g_1\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Resolvendo a equação de Schrödinger na representação de interação

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}_{\text{int}}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (\text{A.3})$$

temos

$$\mathbf{H}_{\text{int}}(t) |\psi(t)\rangle = \lambda c(t) e^{i\delta t} |e_p, g_1\rangle + \lambda b(t) e^{-i\delta t} |g_p, e_1\rangle, \quad (\text{A.4})$$

que fornece as equações de movimento

$$\dot{a}(t) = 0, \quad i\dot{b}(t) = \lambda c(t) e^{i\delta t}, \quad i\dot{c}(t) = \lambda b(t) e^{-i\delta t}, \quad \dot{d}(t) = 0, \quad (\text{A.5})$$

com as seguintes condições iniciais: $a(0) = 0, b(0) = 1, c(0) = 0$ e $d(0) = 0$. As soluções das equações (A.5), para $t = t_a$ e δ qualquer, são

$$\begin{aligned}
a(t_a) &= d(t_a) = 0, \\
b(t_a) &= e^{i\delta t_a/2} \cos[(\sqrt{4\lambda^2 + \delta^2})t_a/2] - i\delta \frac{\sin[(\sqrt{4\lambda^2 + \delta^2})t_a/2]}{\sqrt{4\lambda^2 + \delta^2}}, \\
c(t_a) &= -2i\lambda e^{-i\delta t_a} \frac{\sin[(\sqrt{4\lambda^2 + \delta^2})t_a/2]}{\sqrt{4\lambda^2 + \delta^2}},
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Na tese trabalhamos com o caso específico em que $\delta = 0$ e $t_a = \pi/4\lambda$, nos levando a

$$a(t_a) = d(t_a) = 0, \quad b(t_a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad c(t_a) = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \tag{A.7}$$

que possibilitam a obtenção do estado do sistema após o átomo cruzar a cavidade A (equação (3.15)).

- Entre as cavidades (resolução da equação mestra)

A equação mestra que descreve a decoerência e a dissipação sofrida pelo átomo quando está entre as cavidades é dada por

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} [2\sigma_-^p \rho(t) \sigma_+^p - \sigma_+^p \sigma_-^p \rho(t) - \rho(t) \sigma_+^p \sigma_-^p] + \frac{\gamma_p}{2} [\sigma_z^p \rho(t) \sigma_z^p - \rho(t)], \tag{A.8}$$

onde o operador densidade é escrito, em um tempo específico t_b , como

$$\begin{aligned}
\rho(t_b) &= \rho_{11}(t_b)|e_p, e_1\rangle\langle e_p, e_1| + \rho_{12}(t_b)|e_p, g_1\rangle\langle e_p, e_1| + \rho_{13}(t_b)|g_p, e_1\rangle\langle e_p, e_1| + \rho_{14}(t_b)|g_p, g_1\rangle\langle e_p, e_1| \\
&+ \rho_{21}(t_b)|e_p, e_1\rangle\langle e_p, g_1| + \rho_{22}(t_b)|e_p, g_1\rangle\langle e_p, g_1| + \rho_{23}(t_b)|g_p, e_1\rangle\langle e_p, g_1| + \rho_{24}(t_b)|g_p, g_1\rangle\langle e_p, g_1| \\
&+ \rho_{31}(t_b)|e_p, e_1\rangle\langle g_p, e_1| + \rho_{32}(t_b)|e_p, g_1\rangle\langle g_p, e_1| + \rho_{33}(t_b)|g_p, e_1\rangle\langle g_p, e_1| + \rho_{34}(t_b)|g_p, g_1\rangle\langle g_p, e_1| \\
&+ \rho_{41}(t_b)|e_p, e_1\rangle\langle g_p, g_1| + \rho_{42}(t_b)|e_p, g_1\rangle\langle g_p, g_1| + \rho_{43}(t_b)|g_p, e_1\rangle\langle g_p, g_1| + \rho_{44}(t_b)|g_p, g_1\rangle\langle g_p, g_1|.
\end{aligned}$$

Substituindo o operador densidade acima na equação (A.8), obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11}(t_b) &= -\gamma\rho_{11}(t_b), & \dot{\rho}_{12}(t_b) &= -\gamma\rho_{12}(t_b), \\
\dot{\rho}_{13}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{13}(t_b), & \dot{\rho}_{14}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{14}(t_b), \\
\dot{\rho}_{21}(t_b) &= -\gamma\rho_{21}(t_b), & \dot{\rho}_{22}(t_b) &= -\gamma\rho_{22}(t_b), \\
\dot{\rho}_{23}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{23}(t_b), & \dot{\rho}_{24}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{24}(t_b), \\
\dot{\rho}_{31}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{31}(t_b), & \dot{\rho}_{32}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{32}(t_b), \\
\dot{\rho}_{33}(t_b) &= -\gamma\rho_{33}(t_b), & \dot{\rho}_{34}(t_b) &= -\gamma\rho_{34}(t_b), \\
\dot{\rho}_{41}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{41}(t_b), & \dot{\rho}_{42}(t_b) &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_p\right)\rho_{42}(t_b), \\
\dot{\rho}_{43}(t_b) &= -\gamma\rho_{43}(t_b), & \dot{\rho}_{44}(t_b) &= -\gamma\rho_{44}(t_b),
\end{aligned} \tag{A.9}$$

que tem como condições iniciais

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(0) &= 0, & \rho_{12}(0) &= 0, & \rho_{13}(0) &= 0, & \rho_{14}(0) &= 0, \\
\rho_{21}(0) &= 0, & \rho_{22}(0) &= b(t_a)b^*(t_a), & \rho_{23}(0) &= c(t_a)b^*(t_a), & \rho_{24}(0) &= 0, \\
\rho_{31}(0) &= 0, & \rho_{32}(0) &= b(t_a)c^*(t_a), & \rho_{33}(0) &= c(t_a)c^*(t_a), & \rho_{34}(0) &= 0, \\
\rho_{41}(0) &= 0, & \rho_{42}(0) &= 0, & \rho_{43}(0) &= 0, & \rho_{44}(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

O conjunto de equações diferenciais, com as condições iniciais acima, tem como soluções (para $t = t_b$)

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t_b) &= 0, & \rho_{12}(t_b) &= 0, \\
\rho_{13}(t_b) &= 0, & \rho_{14}(t_b) &= 0, \\
\rho_{21}(t_b) &= 0, & \rho_{22}(t_b) &= b(t_a)b^*(t_a)e^{-\gamma t_b}, \\
\rho_{23}(t_b) &= c(t_a)b^*(t_a)e^{-\frac{1}{2}(\gamma+2\gamma_p)t_b}, & \rho_{24}(t_b) &= 0, \\
\rho_{31}(t_b) &= 0, & \rho_{32}(t_b) &= b(t_a)c^*(t_a)e^{-\frac{1}{2}(\gamma+2\gamma_p)t_b}, \\
\rho_{33}(t_b) &= c(t_a)c^*(t_a)e^{-\gamma t_b}, & \rho_{34}(t_b) &= 0, \\
\rho_{41}(t_b) &= 0, & \rho_{42}(t_b) &= 0, \\
\rho_{43}(t_b) &= 0, & \rho_{44}(t_b) &= b(t_a)b^*(t_a)e^{-\frac{1}{2}(\gamma+2\gamma_p)t_b}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Essas soluções permitem obter a equação (3.18).

- Cavidade B (C_B)

Para o átomo entrando na segunda cavidade, teremos a base completa ordenada da seguinte maneira: $\{|e_p, e_1, e_2\rangle, |e_p, e_1, g_2\rangle, |e_p, g_1, e_2\rangle, |e_p, g_1, g_2\rangle, |g_p, e_1, e_2\rangle, |g_p, e_1, g_2\rangle, |g_p, g_1, e_2\rangle, |g_p, g_1, g_2\rangle\}$.

Com seus respectivos coeficientes, obtemos um operador densidade com 64 elementos de matriz ρ_{ij} , com $i, j = 1, 8$. O Hamiltoniano de interação em C_B é dado por

$$\mathbf{H}_{\text{int}}^2 = \lambda_1(\sigma_+^p \sigma_-^2 + \sigma_-^p \sigma_+^2). \tag{A.12}$$

Desta maneira, é necessário montar um sistema de equações diferenciais à partir de

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -i[\mathbf{H}_{\text{int}}^2, \rho(t)]. \tag{A.13}$$

Seguindo passos análogos aos realizados para o átomo cruzando a cavidade A, com $t_b = \pi/2\lambda$, obtemos o estado final do sistema

$$\begin{aligned}
\rho_{1,2} &= \frac{1}{2} [|e_1, g_2\rangle \langle e_1, g_2| + e^{-(\gamma+\gamma_p)t_f} |e_1, g_2\rangle \langle g_1, e_2| + e^{-(\gamma+\gamma_p)t_f} |g_1, e_2\rangle \langle e_1, g_2| \\
&\quad + e^{-\gamma t_f} |g_1, e_2\rangle \langle g_1, e_2| + (1 - e^{-\gamma t_f}) |g_1, g_2\rangle \langle g_1, g_2|]
\end{aligned} \tag{A.14}$$

B. OBTENÇÃO DO ESTADO ÁTOMO-CAMPO EMARANHADO (CAPÍTULO 4)

Nesse primeiro item do apêndice iremos mostrar, mais detalhadamente, como obtivemos os estados átomo-campo evoluídos no capítulo 4 para ambas as polarizações analisadas, além de justificar a necessidade da preparação atômica (dos átomos de dois níveis) em uma superposição.

Polarização Circular

Na polarização circular, obtivemos o Hamiltoniano efetivo de interação

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}^{(c)} = i\lambda(\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_-) \sigma_z, \quad (\text{B.1})$$

que tem como operador evolução temporal

$$\mathbf{U}^{(c)}(t) = \exp \left[\lambda(\mathbf{a}_+^\dagger \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger \mathbf{a}_-) \sigma_z t \right], \quad (\text{B.2})$$

Considerando ambos os modos inicialmente nos estados coerentes ($|\alpha\rangle_+$ e $|\beta\rangle_-$), vamos analisar qual estado será gerado, dependendo da preparação dos átomos. As seguintes preparações para o estado atômico foram estudadas:

- $|\chi\rangle = |1\rangle_{\text{at}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \mathbf{U}^{(c)}(t) |\alpha\rangle_+ |\beta\rangle_- |1\rangle_{\text{at}} \\ &= |\alpha e^{\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{-\lambda t}\rangle_- |1\rangle_{\text{at}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

- $|\chi\rangle = |2\rangle_{\text{at}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \mathbf{U}^{(c)}(t) |\alpha\rangle_+ |\beta\rangle_- |2\rangle_{\text{at}} \\ &= |\alpha e^{-\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{\lambda t}\rangle_- |2\rangle_{\text{at}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

- $|\chi_\pm\rangle_{\text{at}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{\text{at}} \pm |2\rangle_{\text{at}})$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \mathbf{U}^{(c)}(t) |\alpha\rangle_+ |\beta\rangle_- \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_{\text{at}} \pm |2\rangle_{\text{at}}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha e^{\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{-\lambda t}\rangle_- |1\rangle_{\text{at}} \pm |\alpha e^{-\lambda t}\rangle_+ |\beta e^{\lambda t}\rangle_- |2\rangle_{\text{at}}]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Podemos notar que, das três preparações analisadas, única que gera um estado emaranhado entre os modos é a superposição acima [equação(B.5)] .

Polarização Linear

Já no caso da polarização linear, o Hamiltoniano efetivo que obtivemos é dado por

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}^{(l)} = \lambda(\mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y) \sigma_z, \quad (\text{B.6})$$

e o operador evolução temporal é

$$\mathbf{U}^{(l)}(t) = \exp \left[-i\lambda(\mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y) \sigma_z t \right]. \quad (\text{B.7})$$

Neste ponto, para realizar a atuação do operador evolução temporal nos estados iniciais, vamos lançar mão de um resultado conhecido [79] sobre o operador de divisor de feixe, que é definido como

$$\mathbf{B} = \exp \left[\frac{\theta}{2} (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} e^{i\phi} - \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger e^{-i\phi}) \right], \quad (\text{B.8})$$

com

$$\mathbf{T} = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = \sin \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{B.9})$$

Quando dois estados coerentes incidem num divisor de feixe, temos

$$\mathbf{B} \mathbf{D}_a(\alpha) \mathbf{D}_b(\beta) |0\rangle_a |0\rangle_b = \mathbf{D}_a(\mathbf{T}\alpha + \mathbf{R} e^{i\phi} \beta) \mathbf{D}_b(\mathbf{T}\beta - \mathbf{R} e^{-i\phi} \alpha) |0\rangle_a |0\rangle_b, \quad (\text{B.10})$$

onde $\mathbf{D}_i(\gamma)$ é o operador deslocamento de Glauber. Comparando o operador evolução temporal com o operador de divisor de feixe, notamos que

$$\phi = 0, \quad \frac{\theta}{2} = -i\lambda t, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_y, \quad \mathbf{b} = \mathbf{a}_x, \quad (\text{B.11})$$

além de

$$\mathbf{T} = \cosh(\lambda t) \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = -i \sinh(\lambda t). \quad (\text{B.12})$$

Assim, a aplicação do operador de divisor de feixe em dois estados coerentes, com a nossa escolha de parâmetros [equações (B.11) e (B.12)], é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{B} |\alpha\rangle_y |\beta\rangle_x &= \mathbf{B} \mathbf{D}_y(\alpha) \mathbf{D}_x(\beta) |0\rangle_y |0\rangle_x \\ &= \mathbf{D}_y(\cosh(\lambda t)\alpha - i \sinh(\lambda t)\beta) \mathbf{D}_x(\cosh(\lambda t)\beta + i \sinh(\lambda t)\alpha) |0\rangle_y |0\rangle_x \\ &= |\cosh(\lambda t)\alpha - i \sinh(\lambda t)\beta\rangle_y |\cosh(\lambda t)\beta + i \sinh(\lambda t)\alpha\rangle_x. \end{aligned}$$

Não podemos nos esquecer que, em nosso sistema, ainda temos um operador σ_z na evolução. Então, analogamente a outra polarização, consideramos ambos os modos inicialmente nos estados coerentes $(|\alpha'\rangle_y$ e $|\beta'\rangle_x)$, relacionada com a outra polarização por

$$|\alpha\rangle_+|\beta\rangle_- \rightarrow |\alpha'\rangle_y|\beta'\rangle_x, \quad (\text{B.13})$$

onde $\alpha' \equiv i(\alpha - \beta)/\sqrt{2}$ e $\beta' \equiv (\alpha + \beta)/\sqrt{2}$. Analisando as mesmas preparações do átomo analisadas anteriormente, ou seja:

- $|\chi\rangle = |1\rangle_{\text{at}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle^1 &= \mathbf{U}^{(1)}(t)\mathbf{D}_y(\alpha')\mathbf{D}_x(\beta')|0\rangle_y|0\rangle_x|1\rangle_{\text{at}} \\ &= \mathbf{D}_y(\cosh(\lambda t)\alpha' - i\sinh(\lambda t)\beta')\mathbf{D}_x(\cosh(\lambda t)\beta' + i\sinh(\lambda t)\alpha')|0\rangle_y|0\rangle_x|1\rangle_{\text{at}} \\ &= |\cosh(\lambda t)\alpha' - i\sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' + i\sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x |1\rangle_{\text{at}} \end{aligned}$$

- $|\chi\rangle = |2\rangle_{\text{at}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle^1 &= \mathbf{U}^{(1)}(t)\mathbf{D}_y(\alpha')\mathbf{D}_x(\beta')|0\rangle_y|0\rangle_x|2\rangle_{\text{at}} \\ &= \mathbf{D}_y(\cosh(\lambda t)\alpha' + i\sinh(\lambda t)\beta')\mathbf{D}_x(\cosh(\lambda t)\beta' - i\sinh(\lambda t)\alpha')|0\rangle_y|0\rangle_x|2\rangle_{\text{at}} \\ &= |\cosh(\lambda t)\alpha' + i\sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' - i\sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x |2\rangle_{\text{at}} \end{aligned}$$

- $|\chi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle_{\text{at}} \pm |2\rangle_{\text{at}}]$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle^1_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{U}^{(1)}(t)\mathbf{D}_y(\alpha')\mathbf{D}_x(\beta')|0\rangle_y|0\rangle_x(|1\rangle_{\text{at}} \pm |2\rangle_{\text{at}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{D}_y(\cosh(\lambda t)\alpha' - i\sinh(\lambda t)\beta')\mathbf{D}_x(\cosh(\lambda t)\beta' + i\sinh(\lambda t)\alpha')|0\rangle_y|0\rangle_x|1\rangle_{\text{at}} \\ &\quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{D}_y(\cosh(\lambda t)\alpha' + i\sinh(\lambda t)\beta')\mathbf{D}_x(\cosh(\lambda t)\beta' - i\sinh(\lambda t)\alpha')|0\rangle_y|0\rangle_x|2\rangle_{\text{at}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\cosh(\lambda t)\alpha' - i\sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' + i\sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x |1\rangle_{\text{at}} \\ &\quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|\cosh(\lambda t)\alpha' + i\sinh(\lambda t)\beta'\rangle_y \otimes |\cosh(\lambda t)\beta' - i\sinh(\lambda t)\alpha'\rangle_x |2\rangle_{\text{at}}, \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Os estados representados pelas equações B.5 e B.14, após a realização de medida condicional do estado atômico na mesma configuração de preparo, vistos em um tempo específico e obedecendo as aproximações consideradas na obtenção do Hamiltoniano efetivo, foram utilizados na seção 4.4.3 para a verificação da natureza, Gaussiana ou não, dos estados emaranhados gerados entre os modos ortogonalmente polarizados.

C. VARIÂNCIA DAS QUADRATURAS

Aqui iremos mostrar detalhes intermediários realizados no cálculo das variâncias das quadraturas para os modos circularmente polarizados (capítulo 4). Como a demonstração dos cálculos para o caso da polarização linear é análogo, só iremos indicar o procedimento a ser tomado. Para a obtenção dessas variâncias, alguns valores médios são necessários. O estado utilizado para isso é dado por

$$|\varphi(t)\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [|\alpha e^{\lambda t}\rangle_{+} |\beta e^{-\lambda t}\rangle_{-} \pm |\alpha e^{-\lambda t}\rangle_{+} |\beta e^{\lambda t}\rangle_{-}], \quad (\text{C.1})$$

com o fator de normalização N_{\pm} , definido na equação(4.44).

Para calcular os valores médios dos operadores de criação e aniquilação de fótons utilizando o estado acima, definimos as seguintes variáveis

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \zeta\lambda_2 + i\lambda_2, \quad (\text{C.2})$$

além de

$$\begin{aligned} \alpha_{+} &= \alpha e^{\lambda t} = \alpha e^{(\zeta+i)\lambda_2 t} & \text{e} & \quad \alpha_{-} = \alpha e^{-\lambda t} = \alpha e^{-(\zeta+i)\lambda_2 t}, \\ \beta_{+} &= \beta e^{\lambda t} = \beta e^{(\zeta+i)\lambda_2 t} & \text{e} & \quad \beta_{-} = \beta e^{-\lambda t} = \beta e^{-(\zeta+i)\lambda_2 t}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e a constante de normalização

$$\begin{aligned} N_1 &= \langle \alpha_{+} | \alpha_{-} \rangle \langle \beta_{-} | \beta_{+} \rangle \\ &= \exp \left[|\alpha|^2 e^{-2i\lambda_2 t} + |\beta|^2 e^{2i\lambda_2 t} - (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cosh 2\zeta\lambda_2 t \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Os valores médios que precisamos para o cálculo da variância são

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_{-} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} [\beta_{-}(1 + N_1^*) + \beta_{+}(1 + N_1)], \\ \langle \mathbf{a}_{+} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} [\alpha_{+}(1 + N_1^*) + \alpha_{-}(1 + N_1)], \\ \langle \mathbf{a}_{-} \mathbf{a}_{-} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} \left[\beta_{-}^2 (1 + N_1^*) + \beta_{+}^2 (1 + N_1) \right], \\ \langle \mathbf{a}_{+} \mathbf{a}_{+} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} \left[\alpha_{+}^2 (1 + N_1^*) + \alpha_{-}^2 (1 + N_1) \right], \\ \langle \mathbf{a}_{-}^{\dagger} \mathbf{a}_{-} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} \left[|\beta_{-}|^2 + \beta_{-}^* \beta_{+} N_1 + \beta_{+}^* \beta_{-} N_1^* + |\beta_{+}|^2 \right], \\ \langle \mathbf{a}_{+}^{\dagger} \mathbf{a}_{+} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} \left[|\alpha_{+}|^2 + \alpha_{+}^* \alpha_{-} N_1 + \alpha_{-}^* \alpha_{+} N_1^* + |\alpha_{-}|^2 \right], \\ \langle \mathbf{a}_{\pm} \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \rangle &= \frac{1}{N_{\pm}} \left[1 + \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{a}_{\pm} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Então, de posse desses valores médios, podemos calcular as variâncias das quadraturas através das expressões

$$(\Delta X_{\pm})^2 = \frac{1}{4} \left[\langle \mathbf{a}_{\pm} \mathbf{a}_{\pm} \rangle + 2 \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{a}_{\pm} \rangle + 1 + \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \rangle \right] - \frac{1}{4} \left[\langle \mathbf{a}_{\pm} \rangle + \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \rangle \right]^2. \quad (\text{C.6})$$

$$(\Delta Y_{\pm})^2 = -\frac{1}{4} \left[\langle \mathbf{a}_{\pm} \mathbf{a}_{\pm} \rangle - 2 \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{a}_{\pm} \rangle - 1 + \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \rangle \right] + \frac{1}{4} \left[\langle \mathbf{a}_{\pm} \rangle - \langle \mathbf{a}_{\pm}^{\dagger} \rangle \right]^2. \quad (\text{C.7})$$

As expressões utilizadas para nossas simulações são obtidas através da simples substituição dos valores médios dos operadores (equações C.5) nas equações das variâncias. Já para o obtermos a variância para os modos linearmente polarizados, devemos proceder de maneira análoga, porém lembrando que $|\alpha\rangle_+ |\beta\rangle_- \rightarrow |\alpha'\rangle_y |\beta'\rangle_x$, onde $\alpha' \equiv i(\alpha - \beta)/\sqrt{2}$ e $\beta' \equiv (\alpha + \beta)/\sqrt{2}$, além de

$$\mathbf{a}_+ = \frac{\mathbf{a}_x - i\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_- = \frac{\mathbf{a}_x + i\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}, \quad (\text{C.8})$$

não nos esquecendo da definição padrão dos operadores de quadratura

$$\mathbf{X}_l = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_l^{\dagger}) \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_l = \frac{1}{2i}(\mathbf{a}_l^{\dagger} - \mathbf{a}_l). \quad (\text{C.9})$$

D. FUNÇÃO DE WIGNER

Neste apêndice mostramos como calcular a função de Wigner do estado de superposição como o encontrado em nosso esquema (Eq.4.53) e comparamos esses resultados com a função de Wigner do estado de vácuo comprimido do capítulo 4.

A função de Wigner para o estado de vácuo comprimido

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left[-\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh(|\xi|) \right]^n \right] |2n\rangle, \quad (\text{D.1})$$

é dada por [40]

$$W(\xi) = \frac{2}{\pi} \exp[-2(e^{2\xi} + e^{-2\xi})]. \quad (\text{D.2})$$

Já a função de Wigner do estado

$$|\varphi(\pi/2|\lambda_2|\rangle\rangle_{\pm}^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} \left(|\sqrt{2}\alpha\rangle_y \pm |-\sqrt{2}\alpha\rangle_y \right) |0\rangle_x, \quad (\text{D.3})$$

que é uma superposição de estados coerentes conhecida como estados coerentes pares e estados coerentes ímpares, introduzida por Dodonov e colaboradores [82, 83] como

$$|\alpha\rangle_{\pm} = N_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle). \quad (\text{D.4})$$

Para o caso de $|\alpha| \gg 1$, temos superposições quânticas macroscópicas, conhecidas como *estados de gato de Schrödinger*, apresentados por Vidiella-Barranco [84].

Para simplificar nossos cálculos, vamos mostrar como obtemos a função de Wigner para o estado de superposição coerente par, sendo análoga a obtenção para o caso “ímpar”. Esse tipo de estado, na representação de operador densidade, é dado por

$$\rho_e = N_e (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)(\langle\alpha| + \langle-\alpha|). \quad (\text{D.5})$$

onde $N_e = 1/[2(1 + \exp(-2|\alpha|^2))]$ é a constante de normalização.

A função característica relativa a este estado, que utilizaremos para o cálculo da função de Wigner, é dada por

$$\chi(\mu) = \text{Tr}[\rho(t)e^{\mu\alpha^\dagger - \mu^*\alpha}]N, \quad (\text{D.6})$$

que pode ser reescrita como (onde N é a constante de normalização)

$$\begin{aligned} \chi(\mu) &= N (\langle(\alpha)| + \langle(-\alpha)|) \mathbf{D}(\mu) (|(\alpha)\rangle + |(-\alpha)\rangle) \\ &= N \langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(\alpha)\rangle + \langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(-\alpha)\rangle + \langle(-\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(\alpha)\rangle + \langle(-\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(-\alpha)\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Com o auxílio das relações

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\alpha + \beta)e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)} \quad (\text{D.8})$$

e

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 + \frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right], \quad (\text{D.9})$$

vamos resolver cada um dos quatro termos da equação (D.7) separadamente.

- $\langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(\alpha)\rangle$

$$\begin{aligned} \langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(\alpha)\rangle &= \langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)\mathbf{D}(\alpha)|0\rangle \\ &= \exp(i\text{Im}(\mu\alpha^*))\langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu + \alpha)|0\rangle \\ &= \exp(i\text{Im}(\mu\alpha^*))\langle(\alpha)|(\mu + \alpha)\rangle \\ &= \exp(i\text{Im}(\mu\alpha^*)) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha + \mu|^2}{2} + \alpha^*(\alpha + \mu)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-|\mu|^2}{2} - 2i\text{Im}(\alpha\mu^*)\right). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Analogamente, temos

- $\langle(-\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(\alpha)\rangle$

$$\begin{aligned} \langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|(\alpha)\rangle &= \exp(i\text{Im}(\mu\alpha^*)) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha + \mu|^2}{2} - \alpha^*(\alpha + \mu)\right) \\ &= \exp\left(-2|\alpha|^2 - \frac{-|\mu|^2}{2} - 2\text{Re}(\alpha\mu^*)\right). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

- $\langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|-\alpha\rangle$

$$\begin{aligned} \langle(\alpha)|\mathbf{D}(\mu)|-\alpha\rangle &= \exp(-i\text{Im}(\mu\alpha^*)) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\mu - \alpha|^2}{2} + \alpha^*(\mu - \alpha)\right) \\ &= \exp\left(-2|\alpha|^2 - \frac{-|\mu|^2}{2} + 2\text{Re}(\alpha\mu^*)\right). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

- $\langle (-\alpha) | \mathbf{D}(\mu) | -\alpha \rangle$

$$\begin{aligned} \langle (-\alpha) | \mathbf{D}(\mu) | -\alpha \rangle &= \exp(-i\text{Im}(\mu\alpha^*)) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\mu - \alpha|^2}{2} - \alpha^*(\mu - \alpha)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-|\mu|^2}{2} + 2i\text{Im}(\alpha\mu^*)\right). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Portanto, a função característica dada pela equação (D.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \chi(\mu) &= N e^{-\frac{|\mu|^2}{2}} \left[e^{2i\text{Im}(\alpha\mu^*)} + e^{-2i\text{Im}(\alpha\mu^*)} + e^{-2|\alpha|^2} \left(e^{2\text{Re}(\alpha\mu^*)} + e^{-2\text{Re}(\alpha\mu^*)} \right) \right] \\ &= N e^{-\frac{|\mu|^2}{2}} \left[2 \cos(2\text{Im}(\alpha\mu^*)) + 2e^{-2|\alpha|^2} \cosh(2\text{Re}(\alpha\mu^*)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

De posse da função característica, pode calcular a função de Wigner através de

$$W(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \chi(u, v) e^{2i(uy - vx)}, \quad (\text{D.15})$$

com $\alpha = \bar{x} + i\bar{y}$ e $\mu = u + iv$, que nos leva a

$$W(x, y) = W_1(x, y) + W_2(x, y), \quad (\text{D.16})$$

onde

$$W_1(x, y) = \frac{N}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv e^{-\frac{(u^2 + v^2)}{2}} \left(e^{2i(\bar{y}u - \bar{x}v)} + e^{-2i(\bar{y}u - \bar{x}v)} \right) e^{2i(uy - vx)}. \quad (\text{D.17})$$

e

$$W_2(x, y) = \frac{N}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv e^{-\frac{(u^2 + v^2)}{2}} e^{-2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \left(e^{2(\bar{x}u + \bar{y}v)} + e^{-2(\bar{x}u + \bar{y}v)} \right) e^{2i(uy - vx)}. \quad (\text{D.18})$$

Utilizando a expressão tabelada [39], com $p = q = r$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(ax^2 + 2bx)} = \frac{\pi}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{a}}, \quad (\text{D.19})$$

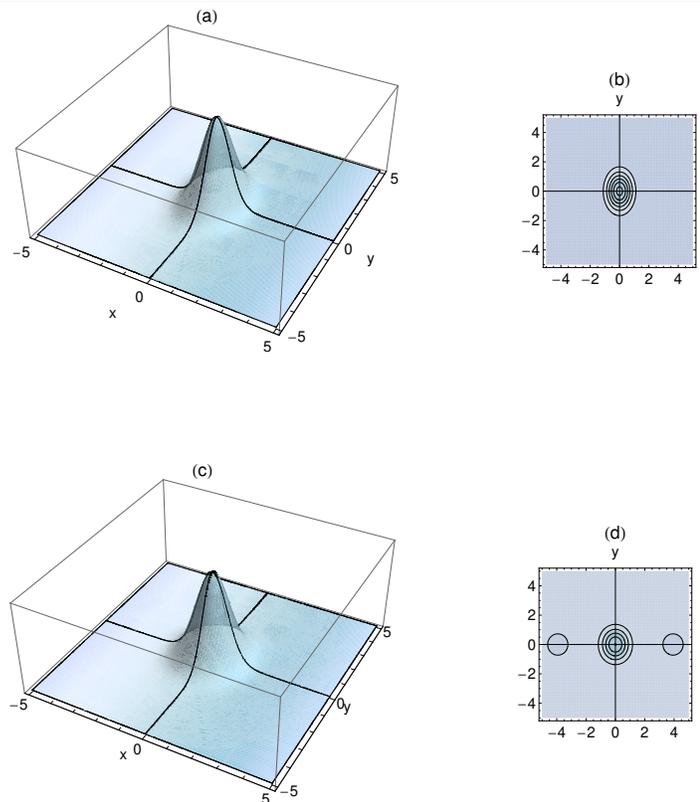


Figura 12 – Gráfico da função de Wigner para (a-c) o estado de vácuo comprimido, onde adotamos o parâmetro de compressão $\xi = 0,2$ e (b-d) a superposição de estados coerentes par com $\alpha = 0,2\sqrt{2}$. Esses são parâmetros que tornam alta a fidelidade entre esses estados.

podemos resolver as integrais que aparecem em $W_1(x, y)$ e $W_2(x, y)$ (após rearranjar os termos de maneira adequada), que assumem a forma

$$W_1(x, y) = \frac{2N}{\pi} \left(e^{-2(y+\bar{y})^2} e^{-2(x+\bar{x})^2} + e^{-2(y-\bar{y})^2} e^{-2(x-\bar{x})^2} \right), \quad (\text{D.20})$$

e

$$W_2(x, y) = \frac{2N}{\pi} e^{-2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \left(e^{2(\bar{x}+iy)^2} e^{2(\bar{y}-ix)^2} + e^{2(\bar{x}-iy)^2} e^{2(\bar{y}+ix)^2} \right). \quad (\text{D.21})$$

Sem muita dificuldade é possível mostrar que a soma das equações (D.20) e (D.21) nos leva a função de Wigner para o estado procurado, ou seja

$$W(x, y) = \frac{2e^{-2(x^2+y^2)}}{\pi(1 + e^{-2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}} \left(e^{-2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \cosh [4(y\bar{y} + x\bar{x})] + \cos [4(\bar{x}y - x\bar{y})] \right). \quad (\text{D.22})$$

A comparação entre o estado geral utilizado para o cálculo da função de Wigner acima e a superposição que obtivemos no capítulo anterior é imediata.

A figura 12 mostra as funções de Wigner para o (a-c) estado de vácuo comprimido ($\xi = 0,2$) e (b-d) para a superposição coerente ($\alpha = 0,2\sqrt{2}$). O parâmetros usados para essas figuras levam a alta fidelidade entre os estados. Podemos observar que, de fato, os gráficos possuem similaridades. Em outras palavras, estados com alta fidelidade possuem funções de Wigner muito similares.

Na figura 13 a função de Wigner para o (a-c) de vácuo comprimido e para a (b-d) superposição utiliza parâmetros que levam a uma baixa fidelidade entre esses estados. Usamos o parâmetro de compressão

$\xi = 0,5$ e $\alpha = 0,7$. Aqui a diferença entre esses estados fica mais aparente. Em outras palavras, estados com baixa fidelidade possuem funções de Wigner menos similares ou diferentes.

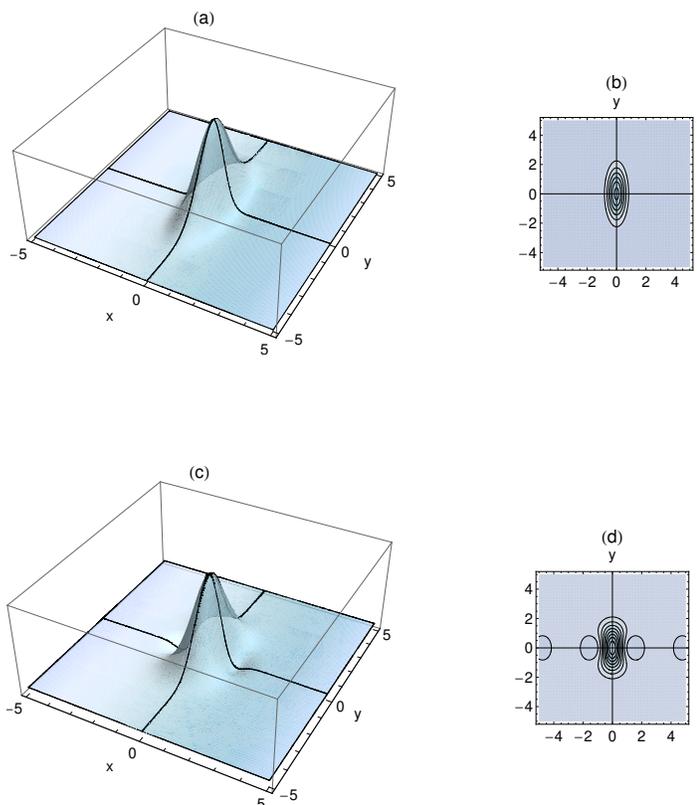


Figura 13 – Gráfico da função de Wigner para (a-c) o estado de vácuo comprimido, onde adotamos o parâmetro de compressão $\xi = 0,5$ e (b-d) a superposição de estados coerentes par com $\alpha = 0,7$. Esses são parâmetros que tornam baixa a fidelidade entre esses estados.

É importante salientar que, apesar da semelhança das funções de Wigner dos referidos estados para alguns parâmetros, eles são de naturezas diferentes. A diferença de maior interesse para nossos resultados é sobre a Gaussianidade desses estados. Lembrando que o estado de vácuo comprimido é Gaussiano, enquanto que a superposição par de estados coerentes é não-Gaussiana.

Devemos também lembrar que, ao comparar os estados de gato par e vácuo comprimido, temos também a similaridade entre as distribuições de número de fótons entre os esses dois estados. A função que Wigner que estamos usando para mostrar a similaridade ente os dois estados indica justamente as diferenças, ou seja, o caráter não-Gaussiano do gato e Gaussiano do vácuo comprimido.

Referências

- [1] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY e N. ROSEN, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [2] I. BENGTTSSON e K. ZYCZKOWSKI, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, New York, 1a. ed. (2006).
- [3] R. HORODECKI, P. HORODECKI, M. HORODECKI e K. HORODECKI, *Quantum entanglement*, quant-ph/0702225 (2007).
- [4] C.H. BENNETT, *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
- [5] M.A. NIELSEN e I.L. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000).
- [6] C.H. BENNETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES e W.K. WOOTERS, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [7] S. BOSE, V. VEDRAL e P.L. KNIGHT, *Multiparticle generalization of entanglement swapping*, Phys. Rev. A **57** (2), 822-829 (1998).
- [8] Y.L. LIM, A. BEIGE e L.C. KWEK, *Repeat-Until-Success Linear Optics Distributed Quantum Computing*, Phys. Rev. Lett. **95**, 030505 (2005);
- Y.L. LIM, S.D. BARRETT, A. BEIGE, P. KOK e L.C. KWEK, *Repeat-until-success quantum computing using stationary and flying qubits*, Phys. Rev. A **73** 012304 (2006).
- [9] S.D. BARRETT e P. KOK, *Efficient high-fidelity quantum computation using matter qubits and linear optics*, Phys. Rev. A **71**, 060310(R) (2005).
- [10] S. BOSE, P.L. KNIGHT, M.B. PLENIO e V. VEDRAL, *Proposal for Teleportation of an Atomic State via Cavity Decay*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5158 (1999).
- [11] C. CABRILLO, J.I. CIRAC, P. GARCÍA-FERNÁNDEZ e P. ZOLLER, *Creation of entangled states of distant atoms by interference*, Phys. Rev. A **59**, 1025 (1999).
- [12] X.-L. FENG, Z.-M. ZHANG, X.-D. LI, S.-Q. GONG e Z.-Z. XU, *Entangling Distant Atoms by Interference of Polarized Photons*, Phys. Rev. Lett. **90**, 217902 (2003).
- [13] D. LIEBFRIED, R. BLATT, C. MONROE e D. WINELAND, *Quantum dynamics of single trapped ions*, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [14] J.I. CIRAC e P. ZOLLER, *Quantum Computations with Cold Trapped Ions*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).

- [15] F. SCHMIDT-KALER, H. HÄFFNER, M. RIEBE, S. GULDE, G.P.T. LANCASTER, T. DEUSCHLE, C. BECHER, C.F. ROOS, J. ESCHNER e R. BLATT, *Realization of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate*, *Nature* **422**, 408-411 (2003).
- [16] H. HÄFFNER, W. HÄNSEL, C.F. ROOS, J. BENHELM, D. CHEK-AL-KAR, M. CHWALLA, T. KÖRBER, U.D. RAPOL, M. RIEBE, P.O. SCHMIDT, C. BECHER, O. GÜHNE, W. DÜR e R. BLATT, *Scalable multiparticle entanglement of trapped ions*, *Nature* **438**, 643 (2005).
- [17] A. FURUSAWA, J.L. SORENSEN, S.L. BRAUNSTEIN, C.A. FUCHS, H.J. KIMBLE e E.S. POLZIK, *Unconditional Quantum Teleportation*, *Science* **282**, 706 (1998).
- [18] S.L. BRAUNSTEIN e H.J. KIMBLE, *Teleportation of Continuous Quantum Variables*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [19] G. ADESSO e F. ILLUMINATI, *Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives*, *Phys. A: Math. Theor.* **40**, 7821-7880 (2007).
- [20] L.-M. DUAN, G. GIEDKE, J.I. CIRAC e P. ZOLLER, *Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
- [21] R. SIMON, *Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
- [22] A. OURJOUNTSEV, A. DANTAN, R. TUALE-BROURI e P. GRANGIER, *Increasing Entanglement between Gaussian States by Coherent Photon Subtraction*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030502 (2007).
- [23] V. JOSSE, A. DANTAN, L. VERNAC, A. BRAMATI, M. PINARD e E. GIACOBINO, *Polarization squeezing in cold atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 103601 (2003); *Polarization squeezing in a four-level system*, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, S513 (2003).
- [24] V. JOSSE, A. DANTAN, A. BRAMATI, M. PINARD e E. GIACOBINO, *Continuous variable entanglement using cold atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123601 (2004); *Entanglement and squeezing in a two-mode system: theory and experiment*, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, S532 (2004).
- [25] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU e F. LAOÍE, *Quantum Mechanics*, (Wiley and Sons, New York and Hermann, Paris), 2a ed. (1977).
- [26] B.C. SANDERS, *Entangled coherent states*, *Phys. Rev. A* **45**, 6811 (1992).
- [27] G. GIEDKE, M.M. WOLF, O. KRÜGER, R.F. WERNER e J.I. CIRAC, *Entanglement of Formation for Symmetric Gaussian States*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 107901 (2003).
- [28] A. SERAFINI, F. ILLUMINATI e S. de SIENA, *Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **37**, L21-L28 (2004).
- [29] J. EISERT, *Entanglement in quantum information theory*, PhD Thesis (2001).
- [30] F.L. SEMIÃO, R.J. MISSORI e K. FURUYA, *Unconditional Bell-type state generation for spatially separate trapped ions*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40**, (09) S221-S228 (2007).
- [31] F.L. SEMIÃO, A. VIDIELLA-BARRANCO e J.A. ROVERSI, *Entanglement between motional states of a trapped ion and light*, *Phys. Rev. A* **64**, 24305 (2001).
- [32] F.L. SEMIÃO e A. VIDIELLA-BARRANCO, *Effective cross-Kerr nonlinearity and robust phase gates with trapped ions*, *Phys. Rev. A* **72**, 064305 (2005).
- [33] M. BRUNE, F. SCHMIDT-KALER, A. MAALI, J. DREYER, E. HAGLEY, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE,

- Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996);
- E. HAGLEY, X. MAITRE, G. NOGUES, C. WUNDERLICH, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1 (1997);
- G. NOGUES, A. RAUSCHENBEUTEL, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Seeing a single photon without destroying it*, Nature (London) **400**, 239 (1999);
- A. RAUSCHENBEUTEL, G. NOGUES, S. OSNAGHI, P. BERTET, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Coherent Operation of a Tunable Quantum Phase Gate in Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5166 (1999);
- S. OSNAGHI, P. BERTET, A. AUFFEVES, P. MAIOLI, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Coherent Control of an Atomic Collision in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037902 (2001);
- P. BERTET, A. AUFFEVES, P. MAIOLI, S. OSNAGHI, T. MEUNIER, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Direct Measurement of the Wigner Function of a One-Photon Fock State in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **89**, 200402 (2002);
- P. BERTET, S. OSNAGHI, P. MILMAN, A. AUFFEVES, P. MAIOLI, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Generating and Probing a Two-Photon Fock State with a Single Atom in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **88**, 143601 (2002);
- A. AUFFEVES, P. MAIOLI, T. MEUNIER, S. GLEYZES, G. NOGUES, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Entanglement of a Mesoscopic Field with an Atom Induced by Photon Graininess in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **91**, 230405 (2003);
- T. MEUNIER, S. GLEYZES, P. MAIOLI, A. AUFFEVES, G. NOGUES, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Rabi Oscillations Revival Induced by Time Reversal: A Test of Mesoscopic Quantum Coherence*, Phys. Rev. Lett. **94**, 010401 (2005);
- [34] F. MINTERT e C. WUNDERLICH, *Ion-Trap Quantum Logic Using Long-Wavelength Radiation*, Phys. Rev. Lett. **87**, 257904 (2001);
- C. WUNDERLICH, C. BALZER, T. HANNRMANN, F. MINTERT, W. NEUHAUSER, D. REISS e P.E. TOSCHEK, *Spin Resonance with Trapped Ions*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **36**, 1063 (2003).
- [35] D.Mc HUGH e T. TWAMLEY, *Quantum computer using a trapped-ion spin molecule and microwave radiation*, Phys. Rev. A **71**, 012315 (2005).
- [36] E. HAGLEY, X. MAITRE, G. NOGUES, C. WUNDERLICH, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms*, 1997 Phys. Rev. Lett. **79** 1.
- [37] J.M. RAYMOND, M. BRUNE e S. HAROCHE, *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [38] G. LEUCHS e D. BRUß, *Lectures on Quantum Information*, Wiley-VCH (2007).
- [39] I. SGRADSHTEYN e I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*, Boston, Amsterdam, Elsevier (2008).
- [40] U. LEONHARDT, P. L. KNIGHT e A. MILLER, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press (2005).
- [41] S.-B. ZHENG e G.-C. GUO, *Efficient Scheme for Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2392 (2000);

- S. OSNAGHI, P. BERTET, A. AUFFEVEES, P. MAIOLI, M. BRUNE, J.M. RAIMOND e S. HAROCHE, *Coherent Control of an Atomic Collision in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037902 (2001).
- [42] A. SØRENSEN e K. MØLMER, *Quantum Computation with Ions in Thermal Motion*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1971 (1999).
- [43] H. CARMICHAEL, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag (1993).
- [44] W.K. WOOTERS, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [45] M. HORODECKI, P. HORODECKI e R. HORODECKI, *General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation*, Phys. Rev. A **60**, 1888 (1999).
- [46] C.H. BENNETT, D.P. DIVINCENZON, J.A. SMOLIN e W.K. WOOTTERS, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996);
- [47] J. GRONDALSKI, D.M. ETLINGER e D.F.V. JAMES, *The fully entangled fraction as an inclusive measure of entanglement applications*, Phys. Lett. A **300**, 573 (2002).
- [48] S. POPESCU, *Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality?*, Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994);
- S. MASSAR e S. POPESCU, *Optimal Extraction of Information from Finite Quantum Ensembles*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1259 (1995);
- J. PRESKILL, *Lecture Notes* disponível em <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229/>.
- [49] Z.Y. OU, S.F. PEREIRA, H.J. KIMBLE e K.C. PENG, *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables*, Phys. Rev. Lett. **68**, (1992) 3663.
- [50] N. KOROLKOVA, G. LEUCHS, R. LOUDON, T.C. RALPH e C. SILBERHORN, *Polarization squeezing and continuous-variable polarization entanglement*, Phys Rev A **65**, 052306 (2002).
- [51] P. GRANGIER, R.E. SLUSHER, B. YURKE e A. LaPORTA, *Squeezed-light-enhanced polarization interferometer*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987);
- J. HALD, J.L. SORENSEN, C. SCHORI e E.S. POLZIK, *Spin Squeezed Atoms: A Macroscopic Entangled Ensemble Created by Light*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1319 (1999);
- J HALD, J.L. SORENSEN, C. SCHORI e E.S. POLZIK, *Entanglement transfer from light to atoms*, J. Mod. Opt. **47**, 2599 (2000);
- W.P. BOWEN, R. SCHNABEL, H.-A. BACHOR e P.K. LAM, *Polarization Squeezing of Continuous Variable Stokes Parameters*, Phys. Rev. Lett. **88**, 093601 (2002);
- N.V. KOROLKOVA e G. LEUCHS, *Coherence and Statistics of Photons and Atoms*, editado por J. PERINA (Wiley, New York, 2001).
- [52] M. MARGALIT, C. YU, E. IPPEN e H. HAUS, *Cross phase modulation squeezing in optical fibers*, Opt. Express **2**, 72 (1998).
- [53] C. SILBERHORN, P.K. LAM, O. WEISS, F. KÖNIG, N. KOROLKOVA e G. LEUCHS, *Generation of Continuous Variable Einstein-Podolsky-Rosen Entanglement via the Kerr Nonlinearity in an Optical Fiber*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4267 (2001).
- [54] S.E. HARRIS, *Electromagnetically Induced Transparency*, Phys. Today **50**(7), 36 (1997).

- [55] A. LAMBRECHT, T. COUDREAU, A.M. STEINBERG e E. GIACOBINO, *Squeezing with cold atoms*, Europhys. Lett. **36**, 93 (1996).
- [56] R. DONG, J. HEERSINK, J.-I. YOSHIKAWA, O. GLÖCKL, U.L. ANDERSEN e G. LEUCHS, *An efficient source of continuous variable polarization entanglement*, New J. Phys. **9**, 410 (2007).
- [57] M.D. REID e P.D. DRUMMOND, *Quantum Correlations of Phase in Nondegenerate Parametric Oscillation*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2731 (1988);
M.D. REID, *Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification*, Phys. Rev. A **40**, 913 (1989).
- [58] S.M. TAN, *Confirming entanglement in continuous variable quantum teleportation*, Phys. Rev. A **60**, 2752 (1999);
V. GIOVANNETTI, S. MANCHINI, D. VITALI e P. TOMBESI, *Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems*, Phys. Rev. A **67**, 022320 (2003);
W. P. BOWEN, P.K. LAMP e T.C. RALPH, *Biased EPR entanglement and its application to teleportation*, J.Mod. Opt. **50**, 801 (2003).
- [59] N. KOROLKOVA e R. LOUDON, *Nonseparability and squeezing of continuous polarization variables*, Phys. Rev. A **71**, 032343 (2005).
- [60] P. VAN LOOCK e A. FURUSAWA, *Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement*, Phys. Rev. A **71**, 052315 (2003).
- [61] B.G. ENGLERT e K. WÓDKIEWICZ, *Tutorial Notes on One-Party and Two-Party Gaussian States*, Int. J. Quant. Inf. **1**, 153 (2003).
- [62] A.B. MATSKO, I. NOVIKOVA e G.R. WELCH, *Vacuum squeezing in atomic media via self-rotation*, Phys. Rev. A **66**, 043815 (2002).
- [63] A. KUZMICH, N.P. BIGELOW e L. MANDEL, *Atomic quantum non-demolition measurements and squeezing*, Europhys. Lett. A **42**, 481 (1998).
- [64] M.D. LUKIN, S.F. YELIN e M. FLEISCHHAUER, *Entanglement of Atomic Ensembles by Trapping Correlated Photon States*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4232 (2000).
- [65] L.M. DUAN, J.I. CIRAC, P. ZOLLER e E.S. POLZIK, *Quantum Communication between Atomic Ensembles Using Coherent Light*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5643 (2000).
- [66] L.M. DUAN, M.D. LUKIN, J.I. CIRAC e P. ZOLLER, *Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics*, Nature **414**, 413 (2001).
- [67] J. HALD, J.L. SORENSEN, C. SCHORI e E.S. POLZIK, *Spin Squeezed Atoms: A Macroscopic Entangled Ensemble Created by Light*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1319 (1999).
- [68] C. LIU, Z. DUTTON, C.H. BEHROOZI e L.V. HAU, *Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses*, Nature **409**, 490 (2001).
- [69] B.G. ENGLERT e K. WÓDKIEWICZ, Int. J. Quant. Inf. **1**, 153 (2003).
- [70] A. LEZAMA, P. VALENTE, H. FAILACHE, M. MARTINELLI e P. NUSSENZVEIG, *Numerical investigation of the quantum fluctuations of optical fields transmitted through an atomic medium*, Phys. Rev. A **77**, 013806 (2008).

- [71] A.B. MATSKO, I. NOVIKOVA, G.R. WELCH, D. BUDKER, D.F. KIMBALL e S.M. ROCHESTER, *Vacuum squeezing in atomic media via self-rotation*, Phys. Rev. A **66**, 043815 (2002).
- [72] A. OURJOUNTSEV, R. TUALLE-BROURI, J. LAURAT e P. GRANGIER, *Generating Optical Schrödinger Kittens for Quantum Information Processing*, Science **312**, 83 (2006).
- [73] J.S. NEEGAAR-NIELSEN, B.M. NIELSEN, C. HETTICH, K. MØLMER e E.S. POLZIK, *Generation of a Superposition of Odd Photon Number States for Quantum Information Networks*, Phys. Rev. Lett. **97**, 083604 (2006).
- [74] Q.A. TURCHETTE, C.J. HOOD, W. LANGE, H. MABUCHI e H.J. KIMBLE, *Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4710 (1995).
- [75] G.S. AGARWAL, P. LOUGOVSKI, H. WALTER, *Multiparticle entanglement and the Schrödinger cat state using ground-state coherences*, J. Mod. Opt. **52**, 1397 (2005).
- [76] M.C. de OLIVEIRA e G.J. MILBURN, *Discrete teleportation protocol of continuum spectra field states*, Phys. Rev. A **65**, 032304 (2002).
- [77] A. KUZMICH, K. MØLMER e E.S. POLZIK, *Spin Squeezing in an Ensemble of Atoms Illuminated with Squeezed Light*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4782 (1998).
- [78] F. VEWINGER, M. HEINZ, R.G. FERNANDEZ, N.V. VITANOV e K. BERGMANN, *Creation and Measurement of a Coherent Superposition of Quantum States*, Phys. Rev. Lett. **91**, 213001 (2003).
- [79] M.S. KIM, W. SON, V. BUZEK e P.L. KNIGHT, *Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement*, Phys. Rev. A **65**, 032323 (2002).
- [80] W. XIANG-BIN, *Theorem for the beam-splitter entangler*, Phys. Rev. A **66**, 024303 (2002).
- [81] M.C. de OLIVEIRA e W.J. MUNRO, *Nonclassicality and information exchange in deterministic entanglement formation*, Phys. Lett. A **320**, 352 (2004).
- [82] V.V. DODONOV, I.A. MALKIN e V.I. MAN'KO, *Coherent states and Green functions of relativistic quadratic systems*, Physica **72**, 597 (1974).
- [83] V. V. DODONOV, I. A. MALKIN e V.I. MAN'KO, *Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator*, Physica **72**, 597-615 (1974).
- [84] A. VIDIELLA-BARRANCO, *Quantum Superpositions of Coherent States of Light*, Tese de Doutorado, University of London (1992).
- [85] M.C. de OLIVEIRA e W.J. MUNRO, *Quantum computation with mesoscopic superposition states*, Phys. Rev. A **61**, 042309 (2000).
- [86] M.C. de OLIVEIRA, *Characterization and quantification of symmetric Gaussian-state entanglement through a local classicality criterion*, Phys. Rev. A **72**, 012317 (2005).