

ÁLGBRAS DE CLIFFORD,
TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ E O
MOVIMENTO DE PARTÍCULAS CARREGADAS

Candidato: José Ricardo de Rezende Zeni⁴.
Orientador: Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Tese submetida ao Instituto de Física Gleb Wataghin da
Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos ne-
cessários para a obtenção do título de Doutor em Física.

JANEIRO - 1992

*Este exemplar corresponde a
redação final da tese
defendida pelo aluno e aprovada
pela comissão julgadora.
Campinas, 28/01/1992
W. Rodrigues*

“Geometria sem álgebra é como ser mudo,
álgebra sem geometria é como ser cego.”

David Hestenes

“Quanto mais claro for um texto, mais impreciso será,
por outro lado, se estiver muito preciso, menos inteligível será”

Weisskopf

AGRADECIMENTOS

O autor é grato aos professores do grupo de Física-Matemática, sediado no IMECC-UNICAMP, pelo ambiente propício à realização desta tese, e em particular, aos professores Dra. Vera Figueiredo, por uma série de seminários sobre Álgebras de Clifford, e ao prof. Dr. Erasmo Recami por apontar várias referências importantes e outros subsídios igualmente importantes.

O autor é grato também ao Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. por sua orientação e disponibilidade, a quem se deve grande parte do êxito desta tese.

O autor deseja agradecer também todos aqueles que contribuíram, de uma forma ou de outra, para que esta tese se tornasse viável, em especial, a minha mulher Grácia Navarro pela sua companhia durante estes anos.

Esta tese foi parcialmente financiada pela CAPES/IFGW e FAPESP.

DEDICATÓRIA

Esta tese é dedicada aos meus pais, Sr. Deolindo Zeni e Sra. Edyr Rezende Zeni, dos quais herdei a disposição e o entusiasmo para o trabalho.

RESUMO

O resultado principal apresentado nesta monografia é a expressão em forma finita da série para a exponencial dos geradores infinitesimais (elementos da álgebra de Lie) do grupo de Lorentz. Assim, a exponencial de um gerador é expressa em termos das primeiras potências do gerador multiplicadas por funções elementares, trigonométricas e hiperbólicas, de duas variáveis reais relacionadas aos parâmetros contidos no gerador.

Além de ser um resultado poderoso no estudo da cinemática relativista de problemas relacionados ao grupo de Lorentz, a forma finita da exponencial fornece a solução para as equações de movimento de uma partícula carregada na presença de campos constantes, a partícula estando submetida a força de Lorentz. Tal resultado é possível porque o campo eletromagnético é representado pelo mesmo objeto matemático que os geradores do grupo de Lorentz, e assim podemos efetuar a exponencial do campo eletromagnético e verificar que tal exponencial quando convenientemente parametrizada fornece a solução para as equações de movimento.

Acreditamos que o novo método para a solução para as equações de movimento de uma partícula carregada possa ser generalizado para inferir soluções das equações com campos variáveis, conforme discutido nas conclusões desta monografia.

ABSTRACT

The main result presented in this thesis is a finite form (the MASTER equation) for the series of exponentials of infinitesimal generators of the Lorentz group. Explicitly, the exponential of a generator appears written by means of the first powers of the generators, in the $SL(2, C)$ and $SO(1, 3)$ representations of the Lorentz group, multiplied by elementary functions of two real variables, these latter related to the generators.

The master equation also permits us to sum the famous Campbell-Baker-Hausdorff series for the Lorentz group.

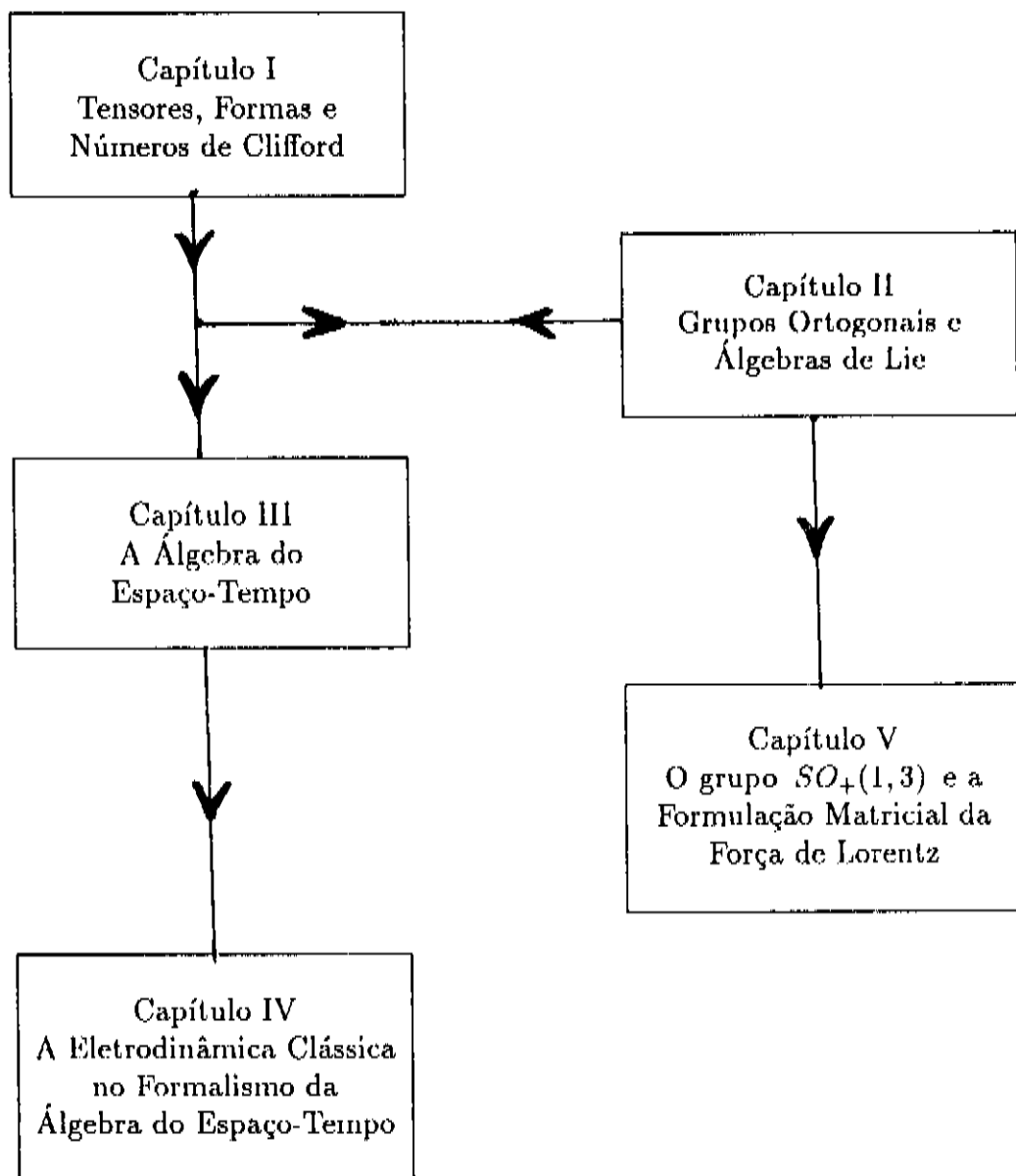
This result is a powerful tool for relativistic kinematics and dynamics, since the finite form of exponential solves the motion equation of a charged particle under the action of a constant (in spacetime) electromagnetic field (the Lorentz force). That result is possible because the electromagnetic field is expressed by the same mathematical object that the generators of the Lorentz group.

We believe that this method to solve the motion's equation of a charged particle can be generalized to include variable electromagnetic fields as we discuss in our conclusions.

FLUXOGRAMA

Relação lógica entre os capítulos.

A tese pode ser lida segundo dois caminhos alternativos: a formulação das álgebras de Clifford para o que é devotado os capítulos I, III e IV e parte do capítulo II, e a formulação matricial, contida no capítulo V e parte do capítulo II.



ÍNDICE

AGRADECIMENTOS

NOTAÇÃO

01 - INTRODUÇÃO

08 - CAPÍTULO I: TENSORES, FORMAS E NÚMEROS DE CLIFFORD

• Espaço Linear das Álgebras $T(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ e $C(\mathbb{R}^n)$. Subespaços. Produto Exterior. Produto de Clifford entre Vetores. Álgebras Graduadas: $T(\mathbb{R}^n)$ e $\Lambda(\mathbb{R}^n)$. A Fórmula Fundamental para o Produto de Clifford. Subálgebra Par. Dualidade de Hodge. Morfismos (ou Involuções). Simetria e Graduação no Produto de Clifford. Pseudoescalares de $C(\mathbb{R}^n)$.

20 - CAPÍTULO II: GRUPOS ORTOGONAIS E ÁLGEBRAS DE LIE

• Transformações Ortogonais sobre $\mathbb{R}^{p,q}$. Simetrias. Um Teorema Fundamental. Transformações Infinitesimais. O Produto de Lie (Comutador). Formulação Matricial dos Grupos Ortogonais. A Componente Conexa. Matrizes Antissimétricas. Formalismo das Álgebras de Clifford. A Ação Adjunta. Reflexões e Simetrias. O Grupo de Clifford. Grupos Pin , $Spin$ e $Spin_+$. Transformações Infinitesimais e Bivetores. Covariância nas Álgebras de Clifford.

34 - CAPÍTULO III: A ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO

• As 'Matrizes' de Dirac como Representantes de uma Base Ortonormal do Espaço-tempo. Multivetores e Base da Álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$. Dualidade de Hodge e Pseudoescalares. Produto de Vários Vetores. Bivetores e as Relações de Comutação da Álgebra de Lie do Grupo de Lorentz. A Primeira Equação MASTER: a Exponencial de Bivetores. A Prova de que o Grupo de Lorentz (Próprio e Ortócrono) pode ser Parametrizado através da Álgebra de Lie a Ele Associada. A Transformação de Vetores. Boosts e Rotações. A Decomposição de uma Transformação como o Produto de um Boost por uma Rotação. A Decomposição de Boosts ou Rotações em Produtos de Simetria. A Subálgebra Par $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$.

52 - CAPÍTULO IV: A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA NO FORMALISMO DA ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO

• Campos e Aplicações: $\mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow C(\mathbb{R}^{1,3})$. Operadores Diferenciais. Invariantes do Campo. A Equação de Maxwell. Conservação da Carga. Ondas Planas. Potenciais. Energia-Momento-Tensão. A Força de Lorentz. A Solução das Equações de Movimento de uma Partícula Carregada e a Interpretação através das Transformações de Lorentz. A Aproximação Não Relativista.

65 - CAPÍTULO V: O GRUPO $SO_+(1,3)$ E A FORMULAÇÃO MATRICIAL DA FORÇA DE LORENTZ

• A Representação Matricial da Força de Lorentz. Matrizes Antissimétricas em Relação a Métrica g . Primeiras Potências da Matriz e a Matriz Dual. A Relação de Recorrência entre as Potências. A Série das Funções Elementares. A Segunda Equação MASTER: a Exponencial das Matrizes g -Antissimétricas. A Solução para a Equação de Movimento de uma Partícula Carregada.

APÊNDICES

75 - (A) Cálculo do Vetor Transformado, eq.(3.32).

80 - (B) A Álgebra de Pauli.

85 - (C) A Representação Matricial das Álgebras de Clifford.

88 - (D) O Homeomorfismo entre os Grupos $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO_+(1,3)$.

91 - (E) A Equação Secular.

93 - (F) O Grupo de Lorentz Completo.

96 - Conjecturas sobre Campos Variáveis.

99 - Conclusões.

101 - Referências.

NOTAÇÃO

As equações estão numeradas por capítulo. Quando nos referimos a uma equação do capítulo em que estamos, usamos apenas o número da equação, e quando a equação é de outro capítulo, indicamos primeiro o capítulo e depois, separado por um ponto o número da equação. Assim, eq.(1.5) refere-se a eq.(5) do capítulo 1.

Reservamos o $\cdot$ para indicar o produto interno (dot) de vetores euclidianos, (ou componentes espaciais de vetores relativistas, elementos do $\mathbb{R}^{1,3}$, o espaço vetorial de Minkowski) veja eq.(3.9). Por outro lado, o produto interior (a forma bilinear derivada da métrica) entre dois vetores é indicado por $\circ$ ou alternativamente $v \circ u = g(v, u)$ (veja eq.(1.24.a)). O produto interior, é estendido para k -vetores, eq.(1.24).

O módulo $||$ é usado em dois sentidos: tanto para indicar a norma de números complexos, quanto para indicar a norma de vetores euclidianos. Em ambos os casos se refere a números reais positivos.

A cruz $\times$ é usada para indicar o produto vetorial usual entre vetores euclidianos expandidos na base da álgebra em questão, por exemplo, na álgebra do espaço-tempo expandindo em termos das componentes espaciais da base do $\mathbb{R}^{1,3}$, indicados por γ_j .

O produto de Clifford na álgebra do espaço-tempo entre vetores euclidianos, (vetores relativistas cuja componente temporal é nula) pode ser escrito em termos do produto interno e vetorial, veja eq.(3.9).

O produto de Clifford não é sinalizado, estando subentendido quando houver justaposição dos elementos da álgebra, por exemplo na álgebra do espaço-tempo o produto entre vetores relativistas u e v é dado por:

$$vu = (u^0 \vec{v} - v^0 \vec{u})\gamma_0 + u^0 v^0 + \vec{v} \vec{u}$$

sendo que $\vec{v} \vec{u}$ é dado na eq.(3.9).

O quadrado de um vetor relativista é indicado alternativamente por:

$$v^2 = v \circ v = g(v, v) = (v^0)^2 - |\vec{v}|^2$$

INTRODUÇÃO

Esta introdução visa uma breve, mas direta, abordagem dos resultados expostos nesta tese. Esperamos que esta introdução permita ao leitor vislumbrar as passagens cruciais destes resultados, assim como situar esses resultados em relação ao material apresentado nos livros textos. A abordagem direta dos resultados permite ao leitor ter em mente quais os objetivos que pretendemos nesta tese, as dificuldades para se chegar até eles e como foi possível resolver estas dificuldades.

Acreditamos que a visão acima justifica que, nesta introdução, utilizemos de modo familiar conceitos, e mesmo símbolos matemáticos, sem mastigarmos suas definições. O estafante trabalho de expor claramente os conceitos e definições aqui utilizados é realizado ao longo das dezenas de páginas desta tese, nos parágrafos que se seguem a introdução.

Esta tese é uma continuação da pesquisa desenvolvida na tese de mestrado do candidato, na qual se realizou um estudo abrangente das álgebras de Clifford (tomando por aplicação a Eletrodinâmica Clássica), tendo fornecido ao candidato uma fluência de expressão e cálculo nestas álgebras que tornaram viáveis os resultados aqui apresentados.

Ressalta-se que o ferramental matemático por nós adotado na pesquisa, (as álgebras de Clifford discutidas de maneira geral no capítulo I) é muito conveniente para o estudo dos grupos ortogonais (discutidos no capítulo II) e espinores, veja apêndice C. Por outro lado, uma particular álgebra de Clifford, naturalmente denominada álgebra do espaço-tempo, tem um papel em relação ao espaço-tempo de Minkowski (base da relatividade especial) semelhante ao da álgebra vetorial em relação ao espaço euclidiano, no sentido de que não somente é um sistema algébrico por si só notável, mas sobretudo é passível de uma interpretação geométrica. É bem conhecido em Mecânica Quântica Relativista que as matrizes de Dirac se transformam como vetores do espaço-tempo. Entretanto esse fato não tem sido tão explorado geometricamente como acreditamos que deva ser, i.e., encontrar um formalismo onde as matrizes de Dirac sejam as representantes de um conjunto (tétrada) de vetores ortonormais para o espaço-tempo de Minkowski. Este fato é realizado no formalismo da álgebra de Clifford gerada pelo espaço-tempo de Minkowski, como discutido no

capítulo III.

O resultado principal apresentado nesta monografia é a expressão em forma finita da série para a exponencial dos geradores infinitesimais (elementos da álgebra de Lie) do grupo de Lorentz em diversas representações. Assim, a exponencial de um gerador é expressa em termos das primeiras potências do gerador multiplicadas por funções elementares (trigonométricas e hiperbólicas) de duas variáveis reais, estas por sua vez relacionadas aos seis parâmetros contidos no gerador em questão. [Zeni e Rodrigues, 1990.a e 1991] Este resultado permite uma melhor compreensão das relações entre as formas finitas e infinitesimais das transformações de Lorentz, além de ser um resultado poderoso no estudo da cinemática relativista e de problemas relacionados ao grupo de Lorentz.

É de se destacar que nosso interesse na exponencial de geradores do grupo de Lorentz não se restringia apenas a cinemática relativista, vislumbrávamos uma aplicação direta deste resultado na dinâmica relativista: a exponencial fornece a solução para as equações de movimento de uma partícula carregada na presença de campos eletromagnéticos constantes (Força de Lorentz), pois o campo é representado pelo mesmo objeto matemático que os geradores, independente da estrutura matemática adotada. Assim, podemos fechar a série da exponencial do campo eletromagnético e verificar que a mesma fornece um novo método de solução que também pode ser usado para inferir soluções das referidas equações em campos variáveis sob algumas condições.

Observamos que o novo método para a solução da equação de movimento de uma partícula carregada sob a ação da Força de Lorentz apresentado nesta tese é possível, porque a dinâmica relativista está restrita pelo vínculo de que as quadri-velocidades tem norma 1, e a força de Lorentz é linear na quadri-velocidade, sendo possível interpretar a solução da força de Lorentz como um grupo de transformação atuando sobre as quadri-velocidades. Este resultado é análogo ao movimento circular na mecânica newtoniana, onde o módulo da velocidade é constante. Assim, há um grupo de transformações, no caso o grupo das rotações relacionado a dinâmica do movimento (se a força for linear na velocidade).

Nesta tese utilizamos três estruturas matemáticas:

- (i) a álgebra de Clifford do espaço-tempo (ou álgebra de Dirac-Hestenes), ou álgebra de Minkowski, definida no capítulo III;

- (ii) a subálgebra par da álgebra do espaço-tempo, também discutida no capítulo III, identificada com a álgebra de Clifford do espaço euclidiano (ou álgebra de Pauli, veja Apêndice B e sua representação matricial 2×2 complexa, discutida dentro desta última visão no apêndice C);
- (iii) o cálculo tensorial relativista usual (e a representação matricial 4×4 real associada a vetores e tensores antisimétricos de 2ª ordem), discutida no capítulo V.

A apresentação de três linguagens distintas se justifica porque a pesquisa original foi feita através da álgebra de Clifford do espaço-tempo, sendo que as álgebras de Clifford fornecem um caminho não só alternativo mas sobretudo viável para o tratamento genérico dos grupos ortogonais e da álgebra de Lie associada, assim como discutido no capítulo II. Destaca-se que a álgebra de Clifford naturalmente adaptada ao estudo do grupo de Lorentz é a álgebra do espaço-tempo, discutida no capítulo III [Zeni e Rodrigues, 1991].

Por outro lado, a discussão do grupo de Lorentz através da álgebra de Pauli, associado na representação matricial 2×2 complexa com o grupo $SL(2, \mathcal{C})$, segue em estreita analogia com a discussão bem conhecida do grupo das rotações espaciais, associado ao grupo $SU(2)$, dando uma aparência familiar ao nosso resultado (veja Apêndice B) [Zeni e Rodrigues, 1990.b].

Por fim, a apresentação da forma fechada para a série da exponencial através da álgebra tensorial do espaço-tempo é no sentido de tornar nosso resultado acessível a um maior número de pesquisadores, visto ser esta a linguagem mais adotada nos livros textos [Zeni e Rodrigues, 1990.a].

Vale a pena ressaltar que embora a relação entre o grupo $SL(2, \mathcal{C})$ e o grupo de Lorentz seja bem conhecida na literatura, a formulação da teoria clássica do eletromagnetismo através da álgebra do espaço-tempo é pouco conhecida (assim como a formulação na álgebra de Pauli), pois a maior parte dos livros textos utiliza apenas o cálculo vetorial tridimensional e a álgebra tensorial do espaço-tempo. Assim, no capítulo IV apresentamos a formulação da Eletrodinâmica Clássica através da álgebra do espaço-tempo, como um prelúdio a discussão da Força de Lorentz.

A expressão da forma finita da exponencial depende da representação adotada para o grupo de Lorentz, isto porque a forma finita é obtida através de uma relação

de recorrência para as potências de um gerador genérico indicado por F , que permita fechar a série para a exponencial do gerador, definida formalmente como

$$\exp(F) \equiv e^F = 1 + F + \frac{F^2}{2!} + \frac{F^3}{3!} + \cdots + \frac{F^n}{n!} + \cdots \quad (2.5)$$

Os geradores infinitesimais de um grupo contínuo são os elementos da álgebra de Lie associada ao grupo. Pensando na representação matricial do grupo, e portanto da álgebra de Lie, o produto que é invariante da representação nas álgebras de Lie é o comutador do produto matricial. As potências F^n dos geradores entendidas como o produto matricial, não são independentes da representação. O mesmo acontece se tivermos uma realização abstrata do grupo através das álgebras de Clifford, onde o produto de Lie é definido como o comutador do produto de Clifford.

Na álgebra do espaço-tempo, discutida no capítulo III, ou na álgebra de Pauli, apêndice B, o grupo de Lorentz é indicado por $Spin_+(1, 3) \sim SL(2, \mathcal{C})$, e a relação de recorrência inicia-se na segunda potência do gerador (eq.(3.21)) de modo que obtemos [Zeni e Rodrigues, 1990.b]

$$e^F = 1 \, ch \, z + \hat{F} \, sh \, z \quad (3.23)$$

onde $z^2 = F^2$ é uma variável complexa e $\hat{F}$ é um gerador de quadrado um ($F = z\hat{F}$, 1 será sempre a identidade da álgebra em questão).

Na representação matricial 4×4 real, do grupo de Lorentz discutida no capítulo V, indicada por $SO_+(1, 3)$, a relação de recorrência inicia-se na terceira potência, eq.(5.11) e encontramos que [Zeni e Rodrigues, 1990.a]

$$e^F = g_1 \, 1 + f_1 \, F + f_2 \, F^2 + g_2 \mathcal{G} \quad (5.20)$$

onde as $f_i = f_i(z)$ e as $g_i = g_i(z)$ são funções reais, e $\mathcal{G}$ é um gerador “dual” de F (veja eq.(5.7)).

A relação de recorrência para as potências dos geradores depende essencialmente da dimensão da representação (falaremos exclusivamente das representações de dimensão finita). As representações serão indicadas por $D^{j,j'}$, onde os índices são semi-inteiros. A dimensão da representação é dada por $(2j+1) \times (2j'+1)$. Conjeturamos que na representação $D^{j,j'}$ a relação de recorrência para as potências do

gerador inicia-se na potência $2(j + j') + 1$. [Landau e Lifshitz 1966, pg. 235] *
 Note que $SO_+(1, 3) \simeq D^{1/2, 1/2}$; enquanto que $SL(2, \mathcal{C}) \simeq D^{1/2, 0} \simeq D^{0, 1/2}$.

A aplicação da exponencial dos geradores do grupo de Lorentz na solução da Força de Lorentz é possível porque o campo eletromagnético é descrito pelo mesmo objeto matemático (independente da representação matricial ou realização algébrica) que os geradores, [Salingaros, 1984] e assim podemos efetuar a exponencial do campo nos moldes expostos acima. Por outro lado, introduzindo um parâmetro real, indicado por τ , pode-se verificar diretamente da expansão em série (ou também da forma finita para a série da exponencial em cada representação, veja eq.(4.47)) que a exponencial satisfaz a seguinte regra de derivação (supomos que F independe de τ):

$$\frac{d}{d\tau} e^{\tau F} = F e^{\tau F} \quad (4.48)$$

A equação acima independe da representação. [Miller, pg.158-9]

A regra de derivação mostrada acima garante que a solução da força de Lorentz é dada por uma transformação de Lorentz, na forma exponencial, do vetor velocidade relativista, indicado por $U(\tau)$, onde τ é agora reconhecido como sendo o tempo próprio da partícula carregada. Na representação matricial (equivalente ao cálculo tensorial relativista) discutida no capítulo V, onde a quadrivelocidade indicada por U , é uma matriz coluna 4×1 e o campo eletromagnético F é uma matriz 4×4 real, a equação de movimento de uma partícula carregada (a menos de constantes físicas) é dada por:

$$\frac{dU}{d\tau} = FU \quad \text{ou por componentes} \quad \frac{dU^\alpha}{d\tau} = F^\alpha_\beta U^\beta. \quad (5.3)$$

Assim, é claro da regra de derivação mostrada anteriormente que para campos

* Landau conta a potência F^0 como sendo a primeira, portanto conclue que há $2j+1$ potências independentes em D^j . Assim a relação de recorrência deveria começar na potência $2(j+1)$, e não em $2j+1$ como estamos considerando.

constantes o vetor velocidade é dado por:

$$U(\tau) = e^{F\tau} U(0) \quad (5.23)$$

onde $U(0) = U(\tau = 0)$ é a velocidade relativista inicial.

Por outro lado, na álgebra do espaço-tempo discutida no capítulo III e IV, a equação do movimento de uma partícula carregada é dada por:

$$\frac{dU}{d\tau} = FU - UF \quad (4.44)$$

cujas solução é,

$$U(\tau) = e^{F\tau} U(0) e^{-\tau F} \quad (4.45)$$

conforme se mostra usando a regra de derivação, eq.(4.48).

A solução, em ambas álgebras equivale a uma transformação de Lorentz cujo gerador é o campo. Observamos que [Hestenes, 1974] obteve uma solução da Força de Lorentz equivalente a eq.(4.45) (veja também eq.(3.32)).

A forma finita da exponencial é a realização de um fato que já se sabia ser possível. Físicos e matemáticos vêm usando a forma exponencial no estudo de grupos contínuos há muito tempo (desde o século passado), fato ilustrado pela bem conhecida exponencial para o grupo das rotações espaciais, $SO(3)$, ou do seu grupo de recobrimento universal, $SU(2)$, que está relacionado aos quaternions.

Entretanto, para estudo de grupos de transformação em espaços de dimensões maiores e métricas distintas da euclidiana a exponencial tem sido usada apenas através da sua expansão em série, trabalhando-se os primeiros termos da série, em particular para caracterizar os geradores do grupo, suas relações de comutação e outras propriedades.

Assim, nosso projeto se apoiava inicialmente em teoremas existenciais, isto é, na literatura encontramos afirmação dizendo que a exponencial existe, mas não há uma exposição de como construí-la em geral, e em particular para o grupo de Lorentz.

Nosso trabalho foi conseguir um método construtivo para se obter a exponencial em forma finita para os geradores do grupo de Lorentz. [Zeni e Rodrigues, 1990.a-b,

Além disso, os teoremas assegurando a existência da exponencial requerem um aparato matemático refinado e extenso para serem demonstrados envolvendo entre outros: [Miller, pg. 152-171]

- exponencial de matrizes: teorema de existência, norma de matrizes, critérios de convergência, etc...

- variedades diferenciáveis: espaço dos parâmetros (álgebra de Lie), análise em variedades, etc...

Por outro lado, durante nossa pesquisa encontramos uma prova simples de que toda transformação do grupo $Spin_+(1,3) \sim SL(2,\mathcal{C})$ pode ser obtida através da exponencial dos geradores do grupo, eq.(3.27). Não encontramos uma prova análoga para o $SO_+(1,3)$, mas nos apoiamos no homeomorfismo existente entre $SL(2,\mathcal{C})$ e $SO_+(1,3)$ [Miller, pg. 290-1; Barut, p. 24-5] (veja também apêndice D).

CAPÍTULO I

TENSORES, FORMAS, NÚMEROS DE CLIFFORD

As álgebras tensorial, exterior (ou Grassman) e Clifford são obtidas a partir de um espaço vetorial, indicado por $\mathbb{R}^n$, sobre o corpo dos números reais, indicados por $\mathbb{R}$. Usamos a seguinte notação:

álgebra	tensorial	exterior	Clifford
notação	$T(\mathbb{R}^n)$	$\Lambda(\mathbb{R}^n)$	$C(\mathbb{R}^n)$

Observamos que no caso das álgebras de Clifford é necessário que esteja definido um produto escalar em $\mathbb{R}^n$, ou seja uma métrica (veja eq.(6) mais a frente) [Riesz, pg. 5-8 e Porteous, pg. 240-1], * $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e rigorosamente devíamos escrever $C(\mathbb{R}^n, g)$, mas em certos estudos a métrica não interfere.

Os produtos tensorial, indicado por $\otimes$, exterior, indicado por $\wedge$, e Clifford (não sinalizado) são distributivos em relação a soma, e associativos, mas não comutativo.

Os tensores, formas e números de Clifford (ou multivetores) são obtidos através dos respectivos produtos dos vetores de $\mathbb{R}^n$, ou seja, através do produto de vetores do $\mathbb{R}^n$ geramos outros espaços que são linearmente independentes (L.I.) dos vetores do $\mathbb{R}^n$. Expressamos este fato dizendo que o espaço linear das álgebras tem a seguinte decomposição em soma direta de subespaços: [Lichnerowicz, pg. 43, Flanders, pg. 5, Hestenes e Sobczyk pg. 3-4, Riesz, pg. 1-12]

* Se está definido um produto escalar em um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então está naturalmente definido um dual canônico deste espaço, indicado por $^*\mathbb{R}^n$ [Halmos, pg. 130-1]. O dual de um vetor é dito uma forma (ou 1-forma) e é cômodo representá-lo por $g(\vec{v}, \cdot)$. As 1-formas atuam sobre os vetores produzindo escalares como é natural na notação acima. Há um isomorfismo (de espaço linear) entre $\mathbb{R}^n$ e $^*\mathbb{R}^n$. Baseado neste isomorfismo podemos pensar que vetores e 1-formas são objetos matemáticos equivalentes, que é a visão adotada nesta tese (a situação é análoga a dos *bra* e *kets* em Mecânica Quântica. [Dirac, pg. 18-22] e a dos índices contravariantes e covariantes no cálculo tensorial).

$$T(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_0^\infty T^k(\mathbb{R}^n), \quad \Lambda(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_0^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \quad C(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_0^n C^k(\mathbb{R}^n). \quad (1.1)$$

Os elementos dos subespaços T^k (Λ^k ou C^k) são ditos tensores de ordem (“rank”) k (k -formas ou k -vetores). Os k -vetores (elementos de $C^k(\mathbb{R}^n)$) são identificados com as k -formas ($\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$) [Salingaros e Wene] e também com os tensores antissimétricos de ordem k (indicados por $[T]^k(\mathbb{R}^n)$, onde $[T]$ indica tensores antissimétricos [Riesz, pg. 55, Lima 1965, pg. 83 e 101]).

A idéia de se construir outros espaços, como $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, a partir dos vetores de $\mathbb{R}^n$ tem um fundamento geométrico, que é a de associar aos elementos de espaços L.I. objetos geométricos de natureza distinta [Hestenes, 1966, pg. 1; Hestenes e Sobczyk, pg. 1-2]. Assim, os pontos são associados à escalares, segmentos de reta orientado à vetores, planos (ou melhor, paralelogramos) orientados, bivectores (ou 2-formas), etc. ... volumes orientados correspondem os n -vetores. Além disso, algebricamente aumentamos em muito o número de objetos à nossa disposição.

Lembramos que a álgebra tensorial $T(\mathbb{R}^n)$ é vista como a álgebra universal associada ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ [Lichnerowicz, pg. 46; Lima 1965, pg. 51-6], a partir da qual outras álgebras podem ser deduzidas. (Podemos pensar que o produto tensorial responde a seguinte pergunta: a partir de dois espaços vetoriais, qual o maior (em dimensão) espaço que podemos obter?).

O produto exterior e o produto de Clifford podem ser definidos a partir do produto tensorial, como é bem conhecido [Riesz, pg. 54]. Aqui adotaremos um procedimento axiomático e definiremos os produtos diretamente em $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ e $C(\mathbb{R}^n)$ como segue.

PRODUTO EXTERIOR: A propriedade fundamental do produto exterior é que ele é antissimétrico em relação a troca de quaisquer dois fatores: No caso do produto

entre dois vetores temos: *

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (1.2)$$

do que segue que se $\vec{a}$ é L.D. de $\vec{b}$ i.e., $\vec{a} = \alpha \vec{b}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto é nulo.

Para se obter uma base para o espaço-linear de $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ partimos de uma base de $\mathbb{R}^n = \{e_i\}$, e supomos que

$$\begin{aligned} e_i \wedge e_j & \text{ L.I. } e_m \wedge e_n \\ e_i \wedge e_j \wedge e_k & \text{ L.I. } e_m \wedge e_n \wedge e_r \text{ etc...} \end{aligned} \quad (1.3)$$

se os termos contém ao menos um vetor diferente. Esta suposição é a razão do nome produto exterior.

Assim, uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$ com $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Portanto, segue que

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (1.4)$$

$$\dim \Lambda(\mathbb{R}^n) = \sum_{k=0}^n \dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = 2^n. \quad (1.5)$$

PRODUTO DE CLIFFORD: O produto de Clifford de um vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ por ele mesmo (dito o quadrado do vetor) é definido como: [Hestenes e Sobczyk, pg. 4; Riesz pg. 5-8]

$$\vec{a}^2 = g(\vec{a}, \vec{a}) \quad (1.6)$$

onde g é a métrica. Se há p vetores na base do $\mathbb{R}^n$ cuja norma é $+1$, e q vetores com norma -1 , dizemos que a métrica tem assinatura (p, q) e indicamos o espaço gerador por $\mathbb{R}^{p,q}$. De acordo com o teorema de Sylvester (invariância das formas quadráticas) o número $p - q$ independe de como escolhemos a base. Além disso, as únicas bases ortogonais que podemos formar excluem vetores tipo-luz (vetores de

* Limite na soma direta, eq.(1) para $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ provém do fato que o produto exterior de vetores linearmente dependentes (L.D.) é nulo, [Lima 1965, pg. 87 e 106; Flanders, pg. 6] enquanto que o produto de Clifford de vetores L.D. pode ser reduzido (a soma de ...) ao produto de um número menor de vetores que sejam L.I. [Zeni, 1987, pg. 12-17].

norma nula $g(a, a) = 0$) [Riesz, pg. 23-26; Barut, pg. 11; Rodrigues e Faria-Rosa].

A álgebra de Clifford gerada por $\mathbb{R}^{p,q}$ será aqui indicada por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$, quando necessário distinguir a métrica em $\mathbb{R}^n$ ($p + q = n$).

A partir da definição, obtemos que a parte simétrica do produto de Clifford de dois vetores é dado por:

$$1/2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) = g(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.7)$$

e caso os vetores sejam ortogonais, i.e., $g(a, b) = 0$, obtemos

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \implies \vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}. \quad (1.8)$$

O produto de um número k de vetores ortogonais, dito uma k -lâmina, segundo [Hestenes e Sobczyk, pg 4; Zeni 1987, pg. 6], tem um papel fundamental nas álgebras de Clifford: eles são elementos do espaço $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. Uma base para a álgebra de Clifford é obtida a partir do produto dos vetores de uma base de $\mathbb{R}^n$, e se a base de $\mathbb{R}^n$ for ortogonal, a base da álgebra de Clifford tem propriedades de comutação bem definidas, análoga as propriedades da álgebra exterior, eq.(3). Assim, as álgebras de Clifford (universais)* tem a mesma dimensão das álgebras exteriores (veja eq.(5)), assim como os subespaços $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ tem a mesma dimensão de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, eq.(4).

Observamos que o produto de Clifford, pode também ser introduzido como um novo produto existente no espaço linear da álgebra exterior [Caianiello, pg. 8-10, Salingaros e Wene].

GRADUAÇÃO: as álgebras $T(\mathbb{R}^n)$ e $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ são graduadas, i.e., seus produtos satisfazem [Lima 1965, pg 79 e 120; Flanders, pg. 8; Riesz, pg. 27],

$$T^k \otimes T^j = T^{k+j} \quad ; \quad \Lambda^k \wedge \Lambda^j = \Lambda^{k+j}. \quad (1.9)$$

Por outro lado, as álgebras de Clifford não são graduadas, mas satisfazem a seguinte regra fundamental para o produto [Riesz, pg. 59; Zeni, 1987.a, pg. 20; Hestenes e Sobczyk, pg. 10]

$$\mathcal{C}^k \mathcal{C}^j = \bigoplus_{i=0}^{\min(k,j)} \mathcal{C}^{|k-j|+2i}. \quad (1.10)$$

* pois existem álgebras de Clifford não universais com $\dim \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n) = 2^{n-1}$ [Porteous, pg. 243-5]

Assim, se $j + k \leq n$, a soma vai até o subespaço de graduação igual a $j + k$, $\mathcal{C}^{j+k}(\mathbb{R}^n)$. Se $j + k > n$, a primeira impressão é que a soma deveria ir até o subespaço $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^n)$, ou $\mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, é possível mostrar que a soma acaba antes. Considerando que $j + k = n + r$, a soma vai até o subespaço de graduação $n - r$ (a demonstração deste fato é análoga a da eq.(14) a seguir).

Definindo os subespaços de graduação par, $\mathcal{C}^+$ (ímpar, $\mathcal{C}^-$) como sendo aquele cujos elementos são as 0-formas, 2-formas, ..., $2n$ -formas (1-forma, 3-forma, ...) ou seja

$$\mathcal{C}^+ = \oplus_{\text{par}} \mathcal{C}^k \quad ; \quad \mathcal{C}^- = \oplus_{\text{ímpar}} \mathcal{C}^k \quad (1.11)$$

é imediato a partir da regra fundamental do produto de Clifford (eq.(10)) verificar que $\mathcal{C}^+$ forma uma subálgebra da álgebra de Clifford $\mathcal{C}$, ou seja, o produto de Clifford de elementos de $\mathcal{C}^+$ pertence a $\mathcal{C}^+$. Simbolicamente temos:

$$\mathcal{C}^+ \mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^+ . \quad (1.12)$$

Por outro lado, o subespaço de graduação ímpar, $\mathcal{C}^-$, não fecha uma subálgebra de $\mathcal{C}$, pois [Hestenes, 1966, pg. 16; Riesz, pg. 13]

$$\mathcal{C}^- \mathcal{C}^- = \mathcal{C}^+ . \quad (1.13.a)$$

$$\mathcal{C}^+ \mathcal{C}^- = \mathcal{C}^- \mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^- . \quad (1.13.b)$$

A subálgebra par $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{p,q})$ tem dimensão igual a 2^{n-1} ($p + q = n$) e podemos estabelecer um isomorfismo entre $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{p,q})$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q-1})$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{q,p-1})$ [Figueiredo, 1987]. No caso da álgebra do espaço-tempo, $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3}) \sim \mathcal{C}(\mathbb{R}^{3,0})$, que é a álgebra de Pauli, discutida no Apêndice B.

DUALIDADE DE HODGE: vemos da eq.(4) que os subespaços $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ tem a mesma dimensão. Portanto, é possível estabelecer uma correspondência (bijetiva) entre seus elementos. Essa correspondência é conhecida como o dual de Hodge [Lima 1973, pg. 128-131; Flanders, pg.15-16]. Assim, por exemplo, os elementos de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^n)$ são ditos pseudoescalares (duais de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}$), os

elementos de $C^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ são ditos pseudovetores (duais de $C^1(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n$), etc ... A definição exata do dual de Hodge é delicada, mas a menos de um sinal ele tem uma representação extremamente simples nas álgebras de Clifford, pois vale o seguinte teorema [Zeni, 1987, pg. 40-41; Salingaros e Dresden]

$$C^k(\mathbb{R}^n) C^n(\mathbb{R}^n) = C^{n-k}(\mathbb{R}^n) \quad (1.14)$$

ou seja, o produto com pseudoescalares representa, de certa forma, a dualidade de Hodge. Comparando este resultado com a eq.(10) podemos ter noção de sua importância.

O teorema acima, eq.(14), pode ser demonstrado usando uma base $\{e_i\}$ ortogonal para $\mathbb{R}^n$. A unidade pseudoescalar em $C(\mathbb{R}^n)$ é definida como:

$$i = e_1 e_2 \cdots e_n \quad (1.15)$$

Geometricamente a unidade pseudoescalar representa o elemento de volume orientado em $\mathbb{R}^n$.

Uma base para o subespaço $C^k(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Multiplicando um elemento da base de $C^k(\mathbb{R}^n)$ pela unidade pseudoescalar i , e usando as propriedades de que vetores ortogonais anticomutam eq.(8), e o quadrado de vetores é um escalar, eq.(6), encontramos que este produto é dado por

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} i = \pm (e_{i_1})^2 (e_{i_2})^2 \cdots (e_{i_k})^2 e_{j_{k+1}} e_{j_{k+2}} \cdots e_{j_n} \quad (1.16)$$

É claro que $e_{j_{k+1}} e_{j_{k+2}} \cdots e_{j_n}$ é um elemento da base de $C^{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

MORFISMOS: as operações que vamos definir agora podem ser definidas em qualquer álgebra $T(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ ou $C(\mathbb{R}^n)$, mas são especialmente úteis em $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ e $C(\mathbb{R}^n)$. Essas operações não dependem da métrica adotada em $\mathbb{R}^n$. As operações são definidas sobre os vetores $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ e extendidas para a álgebra dizendo como elas agem sobre o produto (se mantém o produto são automorfismos, se inverte a ordem dos fatores são ditas antiautomorfismos) [Porteous, pg. 252; Riesz, pg. 13].

As operações, indicadas genericamente por $*$, são lineares e involutivas, i.e., se A e B são elementos da álgebra vale:

$$(A + B)^* = A^* + B^* ; \quad (A^*)^* = A. \quad (1.17)$$

Automorfismo Principal ou (involução principal): indicado por $\square$

$$e_i^\square = -e_i ; \quad (e_i e_j)^\square = e_i^\square e_j^\square. \quad (1.18)$$

Antiautomorfismo Principal: indicado por $*$, [Hestenes e Sobczyk, pg. 5]

$$e_i^* = e_i ; \quad (e_i e_j)^* = e_j^* e_i^* \quad (1.19)$$

Composição das operações definidas acima, um antiautomorfismo, indicado por $\sim$

$$\tilde{e}_i = e_i^{\square*} = e_i^{*\square} = -e_i ; \quad \widetilde{e_i e_j} = \tilde{e}_j \tilde{e}_i. \quad (1.20)$$

As operações acima são muito úteis nas álgebras $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ porque permite distinguir elementos de diferentes graduações (a razão disso é a antissimetria do produto exterior. Note que também nas álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ o produto de vetores ortogonais é antissimétrico).

Isso é mais facilmente visualizado através do seguinte quadro, onde os índices indicam graduação, eq.(1),

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda^0 + \Lambda^1 + \Lambda^2 + \Lambda^3 + \Lambda^4 + \dots \\ \Lambda^\square &= \Lambda^0 - \Lambda^1 + \Lambda^2 - \Lambda^3 + \Lambda^4 - \dots \\ \Lambda^* &= \Lambda^0 + \Lambda^1 - \Lambda^2 - \Lambda^3 + \Lambda^4 + \dots \\ \tilde{\Lambda} &= \Lambda^0 - \Lambda^1 - \Lambda^2 + \Lambda^3 + \Lambda^4 - \dots \end{aligned} \quad (1.21)$$

Observamos que as operações tem periodicidade 4 na graduação.

Observe também que as operações não alteram os escalares (isto é consistente com o fato de que escalares podem ser obtido do produto de Clifford de vetores, veja eq.(6)).

Sob certas condições, i.e. conhecendo o comportamento do multivetor (ou forma) sob a ação da operação (mais especificamente, se $A^* = \pm A$), podemos determinar quais as possíveis graduações do multivetor. Por exemplo, para $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

$$(i) \text{ se } A^{\square} = A \implies A \in \mathcal{C}^+$$

$$(ii) \text{ se } A^* = A \implies A \in \oplus(\mathcal{C}^{4m} \oplus \mathcal{C}^{4m+1}) \quad (22)$$

$$(iii) \text{ se } \tilde{A} = A \implies A \in \oplus(\mathcal{C}^{4m} \oplus \mathcal{C}^{4m+3})$$

Lembramos que as operações independem da métrica.

Mais a respeito do produto de Clifford: A fórmula fundamental para o produto de Clifford (eq.(10) para o produto entre um k -vetor e um j -vetor) pode ser provada por indução finita sobre a graduação do objeto [Zeni, 1987, pg. 12-21]. Para termos uma idéia da prova, que independe da escolha da base para $\mathbb{R}^n$, citamos um trecho de [Zeni, 1987, pg. 11] sobre o procedimento a ser adotado na demonstração. "... por causa da associatividade do produto geométrico, o conhecimento do produto geométrico entre duas lâminas de quaisquer graduação pode ser inferido do conhecimento do produto geométrico entre uma lâmina e um vetor. Para completar a cadeia de raciocínios, também por causa da associatividade do produto geométrico, o produto geométrico entre uma lâmina e um vetor pode ser inferido do conhecimento do produto geométrico entre dois vetores quaisquer, e portanto, podemos adotar um método construtivo para o estudo do produto geométrico, que se baseia num grau crescente de dificuldade no estudo do mesmo; iniciamos estudando o produto geométrico entre dois vetores, depois partimos para o estudo do produto entre um vetor e uma lâmina, e como último passo estudamos o produto entre duas lâminas de quaisquer graduação. O produto geométrico entre dois números de Clifford quaisquer, é em última instância, uma soma sobre o produto geométrico entre lâminas através das quais representamos os multivetores componentes dos números." Por lâminas, entende-se o objeto formado pelo produto de Clifford (ou produto geométrico) de vetores ortogonais (veja comentário após eq.(8)).

Em relação a eq.(10) temos a comentar que os multivetores de menor e maior graduação são associados aos produtos interior e exterior dos fatores, indicados por

$\circ$ e $\wedge$, respectivamente e reescrevendo a eq.(10) como

$$A_k B_m = \sum_{j=0}^{\min(k,m)} C_{|k-m|+2j} \quad (1.23)$$

onde os índices indicam a graduação dos multivetores, $A_k \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, etc... temos por definição que os produtos interior, $\circ$ e exterior $\wedge$, são dados por: [Hestenes e Sobczyk, pg. 6 e pg. 2; Riesz, pg. 61]

$$A_k \circ B_m = C_{|k-m|} \quad (1.24.a)$$

$$A_k \wedge B_m = C_{k+m} \quad (1.24.b)$$

considerando $k + m \leq n$.

O produto exterior já foi comentado. Por outro lado, o produto interior também é utilizado na álgebra exterior (ou de Grassman) como uma ferramenta adicional ([Lima, 1965, pg. 125-128; Lima, 1973, pg. 139]).

Deve-se destacar que o produto de Clifford envolve outros termos além dos produtos interior e exterior (veja a confusão em [Ktorides]). Somente no caso em que um dos fatores é um vetor, digamos $\vec{v}$, obtemos que [Hestenes e Sobczyk, pg. 8]

$$\vec{v} A_k = \vec{v} \circ A_k + \vec{v} \wedge A_k \quad (1.25)$$

Assim, podemos dizer que o *miolo* da série na eq.(23) (i.e. os multivetores resultantes de graduação intermediária entre $|m-k|$ e $m+k$) é o fato novo e característico do produto de Clifford. Por exemplo, no produto de dois bivectores, indicados por A e B , da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ com $n \geq 4$ encontramos que:

$$AB = C_0 + C_2 + C_4 \quad (1.26)$$

onde $A \circ B = C_0$, $A \wedge B = C_4$, e além desses termos o produto de Clifford AB acrescenta um bivector, C_2 .

Há um outro fato que merece destaque na eq.(23): Os multivetores resultantes do produto de um k -vetor e um m -vetor tem simetria em relação a comutação dos

fatores, de acordo com a graduação destes fatores e da graduação do multivetor resultante, isto é, comutando os fatores na eq.(23) obtemos

$$B_m A_k = \sum_{j=0}^{\min(k,m)} (-1)^\delta C_{|k-m|+2j} \quad (1.27)$$

onde $\delta = \{k(k-1) + m(m-1) + s(s-1)\}/2$ onde $s = |k-m| + 2j$ (veja [Zeni, 1987, pg. 31; Hestenes e Sobczyk, pg. 6]).

Este resultado é de extrema utilidade, por exemplo, no caso do produto de dois bivectores, eq.(26) indicados por A e B , encontramos que [Hestenes e Sobczyk, pg. 15]

$$1/2(AB + BA) = C_0 + C_4 \quad (1.28.a)$$

$$1/2(AB - BA) = C_2 \quad (1.28.b)$$

onde os C_s são s -vetores resultantes do produto AB , eq.(26).

O resultado acima nos mostra que o comutador de bivectores fecha uma álgebra (ou seja, resulta em outro bivector). Este resultado é fundamental para o estudo dos grupos ortogonais, $O(p, q)$ pois os bivectores de $C(\mathbb{R}^{p,q})$ são os elementos da álgebra de Lie associada ao grupo, indicada por $o(p, q)$ [Hestenes e Sobczyk, pg. 297] (veja também eq.(2.37)).

No caso em que um dos fatores é um vetor, obtemos das eq.(27) e eq.(24) [Hestenes, 1966, pg. 11-2]

$$\vec{v} \circ A_k = 1/2(\vec{v} A_k + (-1)^{k+1} A_k \vec{v}) \quad (1.29.a)$$

$$\vec{v} \wedge A_k = 1/2(\vec{v} A_k - (-1)^k A_k \vec{v}) \quad (1.29.b)$$

PRODUTO COM PSEUDOESCALARES: Já vimos que o produto com pseudoescalar, tem propriedades interessantes, eq.(14). Estamos interessados nesta seção nas propriedades de comutação dos pseudoescalares. [Zeni, 1987, pg. 42; Riesz, pg. 14]

(i) Qualquer que seja a álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ o produto de elementos da subálgebra par com pseudoescalares comuta

$$\mathbf{i}C^+ = C^+\mathbf{i} \quad (1.30)$$

(ii) Para álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1})$ gerados por espaço de dimensão ímpar (como o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$) os pseudoescalares comutam, com qualquer elemento da álgebra

$$\mathbf{i}\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1}) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1})\mathbf{i}. \quad (1.31.a)$$

Se o espaço gerador tem dimensão par (como o espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3}$) então os pseudoescalares anticomutam com elementos do subespaço ímpar, isto é:

$$\mathbf{i}\mathcal{C}^-(\mathbb{R}^{2n}) = -\mathcal{C}^-(\mathbb{R}^{2n})\mathbf{i} \quad (1.31.b)$$

As propriedades (i) e (ii) seguem da análise do produto de um vetor da base $\{e_i\}$ do $\mathbb{R}^n$ pela unidade pseudoescalar de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ definida na eq.(15). Por exemplo,

$$e_j\mathbf{i} = (-1)^{n-1}\mathbf{i}e_j \quad (1.32)$$

Assim, se n é ímpar, $\mathbf{i}$ comuta com os vetores e portanto com qualquer elemento de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1})$. Por outro lado, se n é par, $\mathbf{i}$ anticomuta com vetores, e portanto anticomuta com qualquer produto de um número ímpar de vetores (ou seja, anticomuta com qualquer elemento $\mathcal{C}^-$).

Além disso o quadrado da unidade pseudoescalar é igual a ± 1 , (supondo que a base do $\mathbb{R}^n$ é normalizada) dependendo da dimensão e da métrica adotada. [Zeni 1987, pg. 42]. O quadrado da unidade pseudoescalar na álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$, é dado por

$$\mathbf{i}^2 = (-1)^{\left(\frac{n(n-1)}{2} + q\right)}. \quad (1.33)$$

Então, por exemplo,

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^3) : \mathbf{i}^2 = -1, \quad \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3}) \text{ ou } \mathcal{C}(\mathbb{R}^{3,1}) : \gamma_5^2 = -1 \quad (1.34)$$

onde γ_5 é usado para indicar a unidade pseudoescalar nas álgebras do espaço-tempo.

Vale ressaltar que se $i^2 = -1$, então os escalares e pseudoescalares formam uma subálgebra de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ isomorfa a a álgebra dos números complexos. Além disso, em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1})$, apesar de estarmos considerando a álgebra sob o corpo dos reais, é claro da eq.(31.a) que há uma estrutura algébrica similar a dos números complexos que permite simplificar os cálculos sem perder a noção geométrica (veja Apêndice B e também [Hestenes, 1967 e 1971]).

CAPÍTULO II

GRUPOS ORTOGONAIS E SUAS ÁLGEBRAS DE LIE

Este capítulo apresenta alguns dos principais aspectos dos grupos ortogonais e das álgebras de Lie associada. A discussão é inicialmente apresentada sem se referir a uma álgebra particular, para depois ser discutida a formulação matricial e a formulação em termos das álgebras de Clifford.

Vale ressaltar o seguinte fato: as transformações ortogonais em $\mathbb{R}^n$ formam um grupo a $n(n-1)/2$ parâmetros. Na formulação matricial elas são associadas a matrizes $n \times n$, que satisfazem eq.(2.13), cada componente da matriz é uma função dos parâmetros, e portanto, estamos trabalhando com n^2 funções dos parâmetros o que pode dificultar a parametrização das matrizes. Por outro lado, nas álgebras de Clifford, as transformações são representadas por números de Clifford que pertencem a subálgebra par (ou ao subespaço de graduação ímpar (veja eq.(23)), que tem dimensão igual a 2^{n-1} (veja eq.(1.11) e eq.(1.5)), ou seja, nas álgebras de Clifford temos de determinar 2^{n-1} funções dos parâmetros, que no caso do grupo de Lorentz resulta em um número bem menor que na representação matricial. Assim, a determinação das transformações ortogonais através das álgebras de Clifford é uma tarefa mais simples do que na representação matricial (mas note que o vetor transformado é obtido diretamente da formulação matricial, enquanto que nas álgebras de Clifford é necessário um certo trabalho para se obter o vetor transformado, [Zeni e Rodrigues, 1991], veja eq.(3.32)).

Usualmente na discussão matricial dos grupos ortogonais as simetrias não tem um papel fundamental, sendo muitas vezes excluídas da discussão. Entretanto, para a discussão das transformações ortogonais através das álgebras de Clifford, as simetrias desempenham um papel fundamental na determinação dos possíveis números de Clifford associados a uma transformação ortogonal (veja eq.(22)).

Antes da exposição mais detalhada dos grupos ortogonais e das álgebras de Lie associadas é significativo ter em mente o seguinte [Miller, pg. 162]: “grosseiramente falando, um grupo de Lie é um grupo infinito (ou contínuo) cujos elementos po-

dem ser parametrizados analiticamente. Então, qualquer elemento, digamos g , do grupo pode ser indicado $g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ em termos dos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Os parâmetros do produto gg' são funções analíticas dos parâmetros de g e g' . Deste modo o grupo tem (localmente) associado um espaço vetorial: o espaço dos parâmetros (o grupo em si não é um espaço vetorial).

Sobre o espaço dos parâmetros é que se constrói as álgebras de Lie [Miller, pg. 166] associadas ao grupo. De certo modo as álgebras de Lie contém toda a informação essencial a determinação do grupo (ao menos da componente conexa à identidade, veja discussão após eq.(16)), desde que elas permitem, através do conhecimento do produto de Lie, determinar o produto (composição) de dois elementos do grupo [Miller, pg. 167].

GRUPO ORTOGONAL: Considere que no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ está definida uma métrica* indicada por g , não necessariamente positiva definida (veja pg. 8).

Os vetores de espaços lorentzianos $v \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ são divididos em três classes de acordo com a métrica $g(v, v)$ ser positiva, negativa, ou nula, i.e. são ditos vetores tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz, respectivamente.

Estamos interessados nas transformações lineares e invertíveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que preservam a métrica. Essas transformações definem o grupo ortogonal, indicado por $O(n)$ e escrevemos

$$O(n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se $A \in O(n)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $Au \in \mathbb{R}^n$ e vale

$$g(Au, Au) = g(u, u) \quad (2.1.a)$$

ou em termos da forma bilinear associada a métrica, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$g(Au, Av) = g(u, v) \quad (2.1.b)$$

Desta última equação vemos que se u e v são ortogonais, então Au e Av também são vetores ortogonais, ou seja, as transformações que preservam a métrica, levam vetores ortogonais em novos vetores ortogonais (daí o nome, transformações

* ou norma ou forma quadrática, que tem associada um produto interno, ou forma bilinear simétrica ([Riesz, pg. 7])

ortogonais).

SIMETRIAS: as transformações elementares do grupo ortogonal são as simetrias. Uma simetria é definida em relação a um vetor, indicado por v (que não seja tipoluz, i.e. $g(v, v) \neq 0$), de modo que inverta a componente dos vetores de $\mathbb{R}^n$ paralela a esse vetor (ou de outro modo, a simetria inverte a componente ortogonal ao hiperplano ortogonal a v [Barut, pg. 14-15]). Assim a simetria em relação ao vetor v é indicada por S_v e se $u \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$S_v u = u - 2 \frac{g(u, v)}{g(v, v)} v \quad (2.2)$$

É imediato verificar que $S_v \in O(n)$, i.e.

$$g(S_v u, S_v u) = g(u, u). \quad (2.3)$$

O resultado fundamental sobre os grupos ortogonais, principalmente na abordagem da álgebra de Clifford (veja eq.(22)) é o seguinte

Teorema: Toda transformação ortogonal de $O(n)$ pode ser expressa como um produto de no máximo n simetrias.

Exemplos do teorema acima serão dados no capítulo III (veja eq.(3.50) e eq.(3.53)) e também Apêndice F (veja eq.(F.3)).

O Teorema acima permite distinguir um subgrupo do grupo ortogonal: o grupo das transformações próprias, indicado por $SO(n)$. A característica deste subgrupo é que toda transformação de $SO(n)$ é o produto de um número par de simetrias. A ‘paridade’ na decomposição de uma transformação ortogonal em produtos de simetria é independente da decomposição. Observe que as transformações que invertem os vetores de base são simetrias em relação a estes vetores (por exemplo, inversão temporal e inversão espacial, no espaço-tempo).

A prova deste teorema é baseada na seguinte idéia [Santaló, pg. 91; Riesz pg. 72-77] (veja também [Barut, pg. 15-16] para uma prova mais elegante): Considere que $A \in O(n)$ transforma a base $\{e_i\}$ em $\{e_i^* = Ae_i\}$. Vamos definir uma sequência de simetrias que leva $\{e_i\}$ em $\{e_i^*\}$ do seguinte modo.

Seja a simetria S_1 definida pelo vetor $e_1^* - e_1$ (supondo $e_1^* \neq e_1$). Da eq.(2) é

imediatamente verificar que $S_1 e_1 = e_1^*$. O processo continua transformando toda a base $\{e_i\} \rightarrow \{e'_i = S_1 e_i\}$, e considerando a simetria S_2 definida pelo vetor $e_2^* - e'_2$.^{*} Assim temos da eq.(2) $S_2 e'_2 = e_2^*$. É claro que desse modo, após um número máximo de n simetrias,^{**} i.e.,

$$\{e_i\} \xrightarrow{S_1} \{e'_i\} \xrightarrow{S_2} \{e''_i\} \xrightarrow{S_3} \dots \xrightarrow{S_n} \{e_i^*\} \quad (2.4)$$

teremos transformado a base $\{e_i\}$ na base $\{e_i^* = A e_i\}$.

Observamos que as simetrias 'seguintes' preservam os vetores 'já arranjados', i.e.,

$$S_m e_k^* = e_k^* \quad \text{se} \quad m > k$$

por exemplo $S_2 e_1^* = S_2(S_1 e_1) = S_1 e_1$.

Este fato é claro se notarmos (veja eq.(2)) que os vetores ortogonais ao vetor que define uma simetria são invariantes sob a ação desta simetria (no exemplo acima, $e_1^* = S_1 e_1$ é ortogonal a e_2^* e também a $e'_2 = S_1 e_2$ e portanto ao vetor $e_2^* - e'_2$ que define S_2).

TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS: Consideremos o "Ansatz" de que toda transformação ortogonal, $A \in SO_+(n)$, pode ser obtida por exponenciação de um objeto, indicado por F , onde a exponencial é definida formalmente por sua expansão em série:

$$A = e^F = 1 + F + \frac{F^2}{2!} + \dots + \dots \quad (2.5)$$

F é dito o gerador (infinitesimal) da transformação.

A exponencial dos geradores exibida acima, eq.(5), representando uma transformação do grupo ortogonal é uma parametrização (o mapa exponencial) do grupo através da álgebra de Lie associada. Na realidade, o mapa exponencial recobre apenas a componente do grupo conexa a identidade, (aquelas transformações que podem ser obtidas da identidade de modo contínuo [Miller, pg. 175-6]).

Para métricas euclidianas (positiva definida) o subgrupo $SO(n)$ é justo a componente conexa. Para métricas indefinidas (como a de Lorentz), há necessidade de se

^{*} a argumentação é mais complexa se o vetor $e_2^* - e'_2$ é tipo-luz. (veja [Barut, pg. 16]).

^{**} pode ser que sejam necessários menos que n simetrias por exemplo, se há um subespaço de $\mathbb{R}^n$ invariante por A .

restringir mais, sendo que a componente conexa à identidade é formada pelas transformações próprias e ortócronas, indicadas por $SO_+(n)$, onde as transformações ortócronas preservam a direção temporal dos vetores tipo-tempo [Barut, pg. 13] (vetores cuja métrica é positiva), permitindo assim definir o conceito de causalidade no espaço-tempo [Landau e Lifshitz, 1975, pg. 14-5].

Dividindo F por um número natural $n \gg 1$, obtemos uma transformação infinitesimal [Riesz, pg. 128]

$$A_n = e^{F/n} = 1 + \frac{F}{n} + O^2(F/n) \quad (2.6)$$

onde $O^2(F/n)$ são termos da ordem de $1/n^2$ (ou inferiores) que estamos desprezando.

A transformação finita A pode ser obtida de A_n por sucessivas aplicações desta última, isto é:

$$A = A_n^n = \left(1 + \frac{F}{n}\right)^n \quad (2.7)$$

e tomando o limite $n \rightarrow \infty$ encontramos uma definição alternativa para a exponencial.

Interessa caracterizar melhor o gerador F . Desprezando na eq.(5) termos da ordem de F^2 e as potências superiores, e desde que $A \in O(n)$ preserva a métrica, eq.(1.a), segue que

$$g(u, Fu) = 0 \quad (2.8)$$

e escrevendo $u = v + w$, encontramos que

$$g(v, Fw) = -g(Fv, w). \quad (2.9)$$

Assim, os geradores do grupo ortogonal $O(n)$ são antissimétricos (skew-symmetric) em relação a métrica g . Os geradores são elementos da álgebra de Lie associada ao grupo $O(n)$. Nesta álgebra, além da soma, encontra-se definido um produto, denominado o produto de Lie, ou comutador, indicado por $[F, E]$, onde F e E são dois geradores, e $[F, E]$ é definido como

$$[F, E] = FE - EF. \quad (2.10)$$

É imediato verificar a partir da eq.(9) que $H = [F, E]$ também satisfaz a eq.(8), i.e.

$$g(u, Hu) = g(u, FEu) - g(u, EFu) = -g(Fu, Eu) + g(Eu, Fu) \equiv 0. \quad (2.11)$$

De outro modo, dizemos que o comutador, $[F, E]$, dos geradores fecha uma álgebra (a álgebra de Lie) intimamente relacionada ao grupo [Miller, pg. 166-8].

Em relação as transformações finitas eq.(5), o comutador dos geradores aparece quando: (i) consideramos termos de segunda ordem na expansão da exponencial; (ii) consideramos duas transformações, digamos A e B , e o seguinte produto $ABA^{-1}B^{-1} = C$, naturalmente denominado o comutador [Miller, pg. 167]. Se A e B são geradas por F , E , então C é gerada por $H = [F, E]$, pelo menos até segunda ordem em F e E (i.e., desprezando termos da forma $F^n G^m$ com $n+m \geq 3$).

Note que se $A = e^F$, então $A^{-1} = e^{-F}$, desde que $e^{A+B} = e^A e^B$, se A e B comutam.

FORMULAÇÃO MATRICIAL DOS GRUPOS $O(n)$: Representando vetores do $\mathbb{R}^n$ por matrizes colunas $n \times 1$, as transformações ortogonais são representadas por matrizes $n \times n$ (com componentes reais).

Dada uma base ortogonal $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ com um número p de vetores de 'quadrado' ($e_i^2 = g(e_i, e_i)$) positivo (+1) e q vetores de 'quadrado' negativo (-1),* $p + q = n$, a métrica g é assim representada por uma matriz $n \times n$ cujos elementos fora da diagonal são nulos e os p primeiros elementos da diagonal são +1 e os q restantes -1, sendo a métrica indicada por $g = \underbrace{\text{diag}(+, +, \dots, +)}_{p \text{ vezes}}, \underbrace{(-, -, \dots, -)}_{q \text{ vezes}}$.

Para explicitar a métrica associada a $\mathbb{R}^n$, é conveniente escrever $\mathbb{R}^{p,q}$.

De acordo com a exposição anterior, os p primeiros elementos da matriz coluna representando um vetor de $\mathbb{R}^{p,q}$ são as componentes do vetor segundo os elementos da base $\{e_i\}$ que tem 'quadrado' positivo (a base é ordenada tal que $g(e_j, e_j) = +1$, se $j = 1, \dots, p$; $g(e_k, e_k) = -1$ se $k = p+1, p+2, \dots, n$).

A norma de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$g(v, v) \equiv v^t g v \quad (2.12)$$

* e portanto, qualquer base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ terá o mesmo número p de vetores de 'quadrado' positivo, e q vetores de 'quadrado' negativo. (teorema de invariância da forma quadrática) [Barut, pg. 11; Rodrigues e Faria-Rosa]

onde vamos usar o mesmo símbolo para o vetor e a matriz coluna associada (esse vai ser o procedimento ao longo desta tese). O índice t indica a transposta matricial.

Uma transformação $A \in O(p, q)$ deve preservar a norma e portanto satisfaz a seguinte condição (cf. eq.(1))

$$A^t g A = g. \quad (2.13)$$

Considerando as linhas (ou colunas) da matriz A como um vetor de $\mathbb{R}^{p,q}$, a eq.(13) acima diz que esses vetores são ortonormais. Isso nos permite encontrar o número de parâmetros do grupo ortogonal $O(n)$.

Se temos n vetores ortonormais então há $\frac{n(n-1)}{2}$ equações de ortogonalidade e n equações de normalização, e portanto

$$n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2.14)$$

parâmetros independentes (há um método alternativo, mais genérico, para se obter o número de parâmetros de um grupo a partir dos geradores, veja eq.(17) e também [Miller, p. 172]).

Voltando a eq.(13) vemos que as matrizes ortogonais satisfazem

$$\det A = \pm 1. \quad (2.15)$$

As matrizes com $\det A = +1$ formam o subgrupo próprio $SO(n)$.

Em espaços com métrica lorentzianas, onde apenas um dos vetores da base $\{e_i\}$; * indicado por e_0 , tem norma positiva (ou negativa) demonstra-se que [Barut, p. 11]

$$|A_{00}| \geq 1. \quad (2.16)$$

As transformações com $A_{00} \geq 1$ são ditas ortócronas e formam um subgrupo de $O(1, n-1)$ indicado por $O_+(1, n-1)$. **

* As matrizes das transformações $O(1, n-1)$ são indicadas por

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & \cdots & A_{0i} & \cdots \\ \vdots & & [A_{ij}] & \\ A_{i0} & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

** em vários livros de relatividade restrita, o grupo de Lorentz é indicado por $\mathcal{L}$ (equivalente ao grupo $O(1, 3)$ ou $O(3, 1)$) enquanto que o subgrupo das transformações próprias é indicado por $\mathcal{L}_+$, e o subgrupo das transformações ortócronas $\mathcal{L}^+$ [Miller, pg. 288; Barut, pg. 22-3 e pg. 12-3]

MATRIZES ANTISSIMÉTRICAS – Afirmamos na seção anterior que a componente conexa à identidade, $SO(n)$ nas métricas euclidianas e $SO_+(1, n-1)$ nas lorentzianas podem ser parametrizadas pelos elementos da álgebra de Lie associada através do mapa exponencial. Estamos interessados na caracterização dos geradores na representação matricial. Inicialmente observamos que é possível mostrar [Miller, pg. 156] que se uma matriz é dada pela exponencial de outra matriz, i.e. $A = e^F$ então $\det A = e^{\text{Tr} F}$, e desde que se $A \in SO(p, q)$, $\det A = +1$, ***, as matrizes representando os geradores devem ter traço nulo.

Da eq.(13) e eq.(6) é possível mostrar que os geradores devem satisfazer [Jackson, p. 415; Miller, pg. 172; Zeni e Rodrigues, 1990.b]:

$$(Fg)^t = -Fg \quad (2.17)$$

ou seja, são matrizes, que multiplicadas pela métrica, são antissimétricas (cf. eq.(9)). Observe que a dimensão das matrizes antissimétricas $n \times n$ é igual ao número de parâmetros do grupo $O(n)$, eq.(14).

É imediato verificar na representação matricial que o comutador de dois geradores é ainda um gerador, ou seja, se F e E satisfazem eq.(17), então $H = [F, E] = FE - EF$ também satisfaz eq.(17), pois temos que (cf. eq. (11)).

$$(Hg)^t = gE^t F^t - gF^t E^t = -EgF^t + FgE^t = EFg - FEg = -Hg. \quad (2.18)$$

Assim, as matrizes antissimétricas em relação a métrica g (matrizes satisfazendo eq.(17)) fecham uma álgebra em relação ao comutador do produto matricial, identificada com a álgebra de Lie associada ao grupo $O(n)$ da métrica g .

FORMULAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS ATRAVÉS DAS ÁLGBRAS DE CLIFFORD: Vamos discutir no que se segue como formular as transformações ortogonais através das álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. A discussão a seguir é independente da métrica adotada, não necessitando usar a notação $\mathbb{R}^{p,q}$ ou $O(p, q)$.

Desde que desejamos que as transformações sejam invertíveis, vamos usar os números de Clifford que possuem inverso (não é um fato óbvio pois as álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ não são, em geral, álgebras de divisão).

*** $e^{\text{Tr} F} > 0 \Rightarrow$ argumento para não recobrir $O(n)$

A lei de transformação dos vetores $x \in \mathbb{R}^n$ que vamos adotar tem a forma de uma transformação de semelhança ([Figueiredo et al] denominam ação adjunta) e é dada por

$$x' = A x A^{-1} \quad (2.19)$$

É claro, da forma da transformação acima e da definição do produto de Clifford, eq.(1.6), que o 'quadrado' do vetor x é preservado pela transformação, i.e.,

$$x'^2 = x^2. \quad (2.20)$$

Entretanto, não é a princípio garantido que x' seja um vetor do $\mathbb{R}^n$. A exigência de que x' seja um vetor do $\mathbb{R}^n$ impõem restrições sobre os possíveis números de Clifford invertíveis que podem ser usados na eq.(19). Essas restrições serão discutidas a seguir (veja eq.(22)). Por enquanto, os números de Clifford que preservam $\mathbb{R}^n$ sob a ação dada pela eq.(19) formam um grupo, denominado o grupo de Clifford, indicado por $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ (ou $\Gamma(p, q)$ quando desejarmos explicitar a métrica).

É claro, pelo dito acima que para os elementos do grupo de Clifford a eq.(19) representa uma transformação ortogonal em $\mathbb{R}^n$. Também, é claro da eq.(19) que essas transformações são injetoras (um a um) e sobrejetoras ([Porteous, p. 255]).

Agora, vamos usar o teorema de que toda transformação ortogonal é o produto de simetrias (veja eq.(4)) para estudar as condições satisfeitas pelos elementos do grupo de Clifford $\Gamma(\mathbb{R}^n)$.

Inicialmente, observamos que se $A = a \in \mathbb{R}^n$, onde $a^2 = g(a, a) \neq 0$, (veja eq.(1.6)), então o vetor transformado (eq.(19)) é dado por:

$$x' = (ax + xa - xa)a^{-1} = 2g(x, a)a^{-1} - x \quad (2.21)$$

onde $a^{-1} = a/a^2$.

A equação acima é muito parecida com a equação que descreve uma simetria eq.(2), (em relação ao vetor a) e é denominada uma reflexão em relação ao vetor a . A reflexão troca o sinal das componentes ortogonais ao vetor que define a reflexão. Assim, a reflexão por um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é igual ao produto de $(n - 1)$ simetrias em relação aos $n - 1$ vetores ortogonais ao vetor $\vec{v}$ e que junto com este formam uma base ortogonal de $\{\mathbb{R}^n\}$.

Em espaços de dimensão ímpar, $\mathbb{R}^{2n+1}$, esta diferença é fundamental pois é claro

que nesse caso uma reflexão é igual ao produto de um número par de simetrias * (ou de outro modo, uma simetria nunca pode ser expressa em termos de reflexões). Por outro lado, em espaços de dimensão par não há problemas, i.e., reflexões são geometricamente equivalentes a simetrias (por exemplo, no $\mathbb{R}^4$, uma simetria seria o produto de três reflexões, e vice-versa).

Portanto, para espaços de dimensão par, como no caso do espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3}$, o teorema de que toda transformação ortogonal pode ser decomposta no produto de simetrias é válido se considerarmos simetrias ou reflexões. Tal fato implica que os elementos do grupo de Clifford são o produto de vetores a_i , i.e.,

$$A \in \Gamma(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A = a_1 a_2 \dots a_k, \quad k \leq n \quad (2.22)$$

tais que $a_i^2 \neq 0$.

Assim, é imediato verificar que se A satisfaz a eq.(22) então segue que:

$$A \in \mathcal{C}^+(\mathbb{R}^n) \quad \text{ou} \quad A \in \mathcal{C}^-(\mathbb{R}^n) \quad (2.23)$$

desde que o produto de um número par (ímpar) de vetores pertence a $\mathcal{C}^+(\mathcal{C}^-)$.

Por outro lado, também se deduz da eq.(22) que:

$$A^* = cA^{-1}, \quad \text{onde } c \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.24)$$

onde * indica o principal antiautomorfismo da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (veja eq.(1.19)) e se A é dado pela eq.(22), A^* é dado por

$$A^* = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1. \quad (2.25)$$

É claro, da eq.(25) que se $A \in \mathcal{C}^+ \iff A^* \in \mathcal{C}^+$ ($A \in \mathcal{C}^- \implies A^* \in \mathcal{C}^-$).

As eq.(23) e eq.(24) são condições necessárias, mas não suficiente para que A seja um elemento do grupo de Clifford. O resultado fundamental [Porteous, pg. 264-5] é que para $\dim \mathbb{R}^n \leq 5$, as eq.(23) e eq.(24) são condições suficiente para determinar os elementos do grupo de Clifford. Vamos fazer a demonstração para $\dim \mathbb{R}^n \leq 4$, pois estamos nessa monografia especialmente interessados nas álgebras do espaço-tempo ($\mathbb{R}^{1,3}$ ou $\mathbb{R}^{3,1}$).

* por exemplo, no $\mathbb{R}^3$, uma reflexão em relação a um vetor, é equivalente a uma rotação ao redor desse vetor por π radianos.

Considerando que A age sobre vetores $x \in \mathbb{R}^4$ de acordo com a eq.(19), vamos demonstrar que (considerando que $A^* = A^{-1}$)

$$Ax A^{-1} = Ax A^* \in \mathbb{R}^4. \quad (2.26)$$

Ressaltamos novamente que a métrica não interfere na nossa discussão, i.e., podemos tomar $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{p,q}$ com $p + q = 4$.

Inicialmente, considerando a eq.(26), vemos que qualquer das alternativas para A na eq.(23) conduz ao resultado que $Ax A^*$ é um elemento de subespaço ímpar $\mathcal{C}^-(\mathbb{R}^4)$ (veja eq.(1.13)), isto é se

$$x' = Ax A^* \Rightarrow x' = x'_1 + x'_3 \in \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^3 \quad (2.27)$$

onde os índices indicam a graduação.

Agora, da definição do antiautomorfismo principal, eq.(1.19), se $x \in \mathbb{R}^n$, então $x^* = x$ e segue que

$$x' = Ax A^* \Rightarrow x'^* = x'. \quad (2.28)$$

Por outro lado, da eq.(1.21) segue que se

$$x' = x'_1 + x'_3 \Rightarrow x^* = +x'_1 - x'_3 \quad (2.29)$$

portanto, das eq.(28) e eq.(29) concluímos que $x'_3 \equiv 0$ se $x' = Ax A^{-1} = Ax A^*$, como queríamos demonstrar.

Para $x \in \mathbb{R}^5$, teríamos que considerar na eq.(27) que x' poderia ter um multivetor componente de graduação 5, que não seria eliminado pela nossa argumentação, eq.(28) e eq.(29), pois se $x_5 \in \mathcal{C}^5$, $x_5^* = x_5$. (veja eq.(1.21)) Assim, teríamos mais um passo na demonstração [Porteous, pg. 265], baseado, entre outros fatos, que $\mathcal{C}^5(\mathbb{R}^5)$ é o espaço dos pseudoescalares de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^5)$ que gozam de propriedades bem particulares (veja eq.(1.16) e eq.(1.32)). Para $\dim \mathbb{R}^n > 5$ a possível componente de x' em $\mathcal{C}^5$ não seria necessariamente um pseudoescalar, o que impede a generalização do resultado.

Grupos PIN , $SPIN$ e outras discussões encontradas na literatura: da eq.(24) mostramos que AA^* é um número real não nulo. Os elementos do grupo de

Clifford que satisfazem $AA^* = \pm 1$ formam um grupo, denominado grupo PIN (o motivo para o nome ficará claro no que se segue), i.e.,

$$Pin(p, q) = \{A \in \Gamma(p, q) / AA^* = \pm 1\}. \quad (2.30)$$

Por sua vez, os elementos do grupo $Pin(p, q)$ que pertencem a subálgebra par $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{p,q})$ formam um subgrupo (veja eq.(23)), denominado grupo $Spin(p, q)$,

$$Spin(p, q) = Pin(p, q) \cap \mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{p,q}). \quad (2.31)$$

Por fim, os elementos de $Spin(p, q)$ que satisfazem $AA^* = +1$ formam o grupo $Spin_+(p, q)$, que é a componente conexa a identidade do grupo de Clifford [Porteous, pg. 268], exceto para $p + q \leq 2$ [Lounesto].

Quando $p + q = n$ é par temos os seguintes isomorfismos através da ação adjunta, eq.(19)

$$Pin(p, q)/\mathbb{Z}_2 \longrightarrow O(p, q)$$

$$Spin(p, q)/\mathbb{Z}_2 \longrightarrow SO(p, q) \quad (2.32)$$

$$Spin_+(p, q)/\mathbb{Z}_2 \longrightarrow SO_+(p, q)$$

onde o quociente por $\mathbb{Z}_2$ no membro esquerdo indica que devemos identificar os elementos $\pm A$ do grupo em questão. As duas últimas relações são válidas para $p + q$ qualquer.

Para espaços de dimensão ímpar é conveniente introduzir a seguinte lei de transformação (usada em [Porteous, pg. 254]):

$$x' = A^\square x A^{-1} \quad (2.33)$$

denominada ação adjunta “modificada” (‘twisted’ segundo [Figueiredo et al]).

Assim, quando $A = a \in \mathbb{R}^n$ obtemos uma simetria da eq.(33),

$$x' = x - 2g(a, x)a^{-1}. \quad (2.34)$$

Neste caso pode-se definir de maneira análoga a discussão anterior eq.(30) e eq.(31) os grupos de Clifford modificado, grupo Pin modificado, grupo $Spin$ modificado (indicados por, $\Gamma^\square, Pin^\square, Spin^\square$ em [Figueiredo et al]). Tanto para n

par, quanto n ímpar, temos os seguintes isomorfismos

$$\begin{aligned} Pin^\square(p, q)/\mathbb{Z}_2 &\longrightarrow O(q, p) \\ Spin^\square(p, q)/\mathbb{Z}_2 &\longrightarrow SO(q, p) \\ Spin_+^\square(p, q)/\mathbb{Z}_2 &\longrightarrow SO_+(q, p) \end{aligned} \quad (2.35)$$

A diferença em relação ao resultado anterior, eq.(32), é que a métrica é invertida na correspondência acima.

Na parte par da álgebra, a ação adjunta é igual a ação adjunta modificada, i.e., se $A \in C^+(\mathbb{R}^{p,q})$ (veja eq.(1.22)).

$$A^\square x A^{-1} = A x A^{-1} \quad (2.36)$$

e portanto $Spin(p, q) \equiv Spin^\square(p, q)$, desde que os grupos $Spin(p, q)$ (e $Spin^\square(p, q)$) estão restritos a parte par da álgebra (veja eq.(31)).

TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS E BIVETORES – Vamos agora discutir a álgebra de Lie associada aos grupos $Spin_+(p, q)$ (a componente conexa do grupo de Clifford). Considerando a eq.(5), e desde que $A \in C^+(\mathbb{R}^n)$, é imediato concluir que os geradores $F \in C^+(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $A = e^F$, segue que $A^{-1} = e^{-F}$, e para A satisfazendo eq.(24), i.e., $A^* = A^{-1}$, concluimos que

$$F^* = -F \quad (2.37)$$

pois é imediato verificar da expressão em série, eq.(5), que $A^* = e^{F^*}$.

Para álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ onde $n \leq 5$, a condição acima e o fato que $F \in C^+(\mathbb{R}^n)$ assegura que $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, F é um bivector (veja eq.(1.21)).*

Observamos que o subespaço dos bivectores, $C^2(\mathbb{R}^n)$, tem a mesma dimensão que o número de parâmetros das transformações ortogonais (cf. eq.(14) e eq.(1.4)).

Ressaltamos que também as transformações infinitesimais devem preservar a graduação dos multivetores, i.e., se U_k é um k -vetor, então

$$U' = A U_k A^{-1} = U_k + [F, U_k] \quad (2.38)$$

* este fato pode ser mostrado alternativamente através do isomorfismo entre k -vetores e tensores antissimétricos de ordem k , pois sabemos que os geradores na formulação tensorial são tensores antissimétricos de 2ª ordem (veja também [Hestenes e Sobczyk, pg. 297]).

onde $\Lambda = 1 + F$ e $[F, U_k] = FU_k - U_k F$.

O objeto transformado U' também é um k -vetor, desde que o comutador com bivectores preserva a graduação (veja eq.(1.28) e também [Hestenes e Sobczyk, pg. 15-16; Riesz, pg. 175]).

COVARIÂNCIA DOS NÚMEROS DE CLIFFORD – Da eq.(19) e do fato que todo número de Clifford pode ser expresso como a soma de produtos de vetores, é claro que qualquer número de Clifford tem a mesma lei de transformação que os vetores. Por exemplo, os bivectores, elementos de $C^2(\mathbb{R}^n)$, podem ser expressos como

$$F = F^{ij} e_i e_j \quad , \quad i < j \quad (2.39)$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^n$, $\{e_i e_j\}$ sendo uma base para $C^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto

$$\text{se } e_i \longrightarrow A e_i A^{-1} \implies e_i e_j \longrightarrow A e_i e_j A^{-1} . \quad (2.40)$$

Este fato é fundamental para as teorias relativistas. Observamos que na formulação tensorial, tensores (ou as componentes dos tensores) de diferentes ordens transformam de modo distinto, e portanto em uma equação covariante sob o grupo $O(n)$ todos os termos devem ser tensores de mesma ordem. Por exemplo, no caso das equações de Maxwell, na formulação tensorial temos duas equações, uma de terceira ordem (equações homogêneas)

$$\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\mu\alpha} = 0$$

e uma de primeira ordem (equação com as fontes)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu .$$

Assim, no cálculo tensorial por componentes não podemos unir as duas equações acima em uma única equação covariante. Entretanto tal fato é possível com o uso das álgebras de Clifford. [Hestenes, 1966, p. 29; Greider, 1984] (veja também eq.(4.8)).

CAPÍTULO III

A ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO

Neste capítulo discutimos a álgebra de Clifford gerada por vetores do espaço vetorial de Minkowski, $\mathbb{R}^{1,3}$, denominada álgebra de Minkowski [Zeni e Rodrigues, 1991; Hestenes, 1985.a] ou álgebra de 'Dirac' [Hestenes, 1966, pg. 24], pois as relações de comutação satisfeita pelos vetores do espaço-tempo são as mesmas das matrizes de Dirac [Feynman, pg. 41-42].*

Observamos que em relatividade restrita tem se usado indistintamente as métricas $g = \text{diag}(+, -, -, -)$, ou seja, o espaço vetorial $\mathbb{R}^{1,3}$, e $g = \text{diag}(-, +, +, +)$, o espaço vetorial $\mathbb{R}^{3,1}$. Em várias aplicações, como na formulação da Eletrodinâmica Clássica e na formulação do grupo de Lorentz** os principais resultados são independentes da métrica adotada. Entretanto, é necessário observar que as álgebras de Clifford geradas por $\mathbb{R}^{1,3}$, dita álgebra de Minkowski, e $\mathbb{R}^{3,1}$, dita álgebra de Majorana não são isomorfas, ou seja, não há uma correspondência um a um entre os elementos de $C(\mathbb{R}^{1,3})$ e $C(\mathbb{R}^{3,1})$ que preserve o produto (veja definição do produto de Clifford, eq.(1.6), e lembramos o teorema de invariância da forma quadrática).***

De qualquer modo, nas aplicações que estamos interessados nesta monografia, i.e., grupo de Lorentz e Eletrodinâmica Clássica, a escolha da métrica, ou do espaço vetorial $\mathbb{R}^{1,3}$ ou $\mathbb{R}^{3,1}$, não atrapalha nossos resultados. Tal fato é mais ressaltado ainda pelo resultado de que ambas as álgebras de Clifford, $C(\mathbb{R}^{1,3})$ e $C(\mathbb{R}^{3,1})$, tem a mesma subálgebra par, identificada com a álgebra de Clifford gerada pelos vetores

* Entretanto, seria conveniente neste último caso denominá-la álgebra de Dirac-Hestenes, pois a construção da álgebra aqui realizada é sobre o corpo dos reais, enquanto que na álgebra de Dirac usada na Mecânica Quântica, a álgebra é realizada sobre os complexos.

** note que $SO(p, q) \sim SO(q, p)$ [Figueiredo et al; Porteous, pg. 257]

*** Este último fato tem uma importância crucial na formulação da teoria do elétron de Dirac (e consequentemente, da Eletrodinâmica Quântica) não só relativo a interpretação geométrica da teoria de Dirac, [Rodrigues e Oliveira, Hestenes 1990] mas também em aspectos quantitativos (muitos cálculos, por exemplo seções de choque, usando representações de Majorana e Dirac são distintos).

do espaço euclidiano (também conhecida como a álgebra de Pauli, apêndice B).

A ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ – uma base ortonormal para o espaço vetorial de Minkowski será indicada por $\{\gamma_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, i.e., os γ_μ satisfazem:

$$g(\gamma_0, \gamma_0) = 1 \quad , \quad g(\gamma_j, \gamma_j) = -1, \quad j = 1, 2, 3$$

$$g(\gamma_\mu, \gamma_\nu) = 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu.$$

As relações acima podem ser resumidas através das componentes da métrica $g_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$, $g_{00} = +1$ e $g_{jj} = -1$

$$g(\gamma_\mu, \gamma_\nu) = g_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Introduzindo o produto de Clifford (veja eq.(1.6) e eq.(1.8)) entre os vetores γ_μ , temos a seguinte definição para o produto de Clifford na álgebra do espaço-tempo

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

que segundo a interpretação geométrica aqui adotada traduz as relações de ortonormalidade entre os vetores γ_μ (cf. o tratamento puramente algébrico em Mecânica Quântica Relativista [Lifshitz et al, pg. 93-100; Bjorken e Drell, pg. 6-8 e 17]).

A álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ pode ser decomposta nos seguintes subespaços:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3}) = \mathcal{C}^0 \oplus \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2 \oplus \mathcal{C}^3 \oplus \mathcal{C}^4 \quad (3.4)$$

i.e., todo elemento de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ pode ser escrito como a soma de uma parte escalar, vetor, bivector, trivector e quadrivector,* sendo que devido a dualidade de Hodge, eq.(1.14), entre os espaços $\mathcal{C}^3$ e $\mathcal{C}^1$, assim como entre $\mathcal{C}^0$ e $\mathcal{C}^4$, trivetores em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ são também denominados pseudovetores, enquanto que quadrivetores são alternativamente denominados pseudoescalares.

Uma base para a álgebra do espaço-tempo é obtida através do produto de Clifford dos diferentes vetores γ_μ (acrescida da unidade escalar), e é dada por

$$\{1, \gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_{\mu\nu\lambda}, \gamma_5\} \quad (3.5)$$

* cf. a denominação das formas bilineares da teoria de Dirac, [Lifshitz et al, pg. 124; Bjorken e Drell, pg. 25-6].

onde $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu$ ($\mu < \nu$), $\gamma_{\mu\nu\lambda} = \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda$ ($\mu < \nu < \lambda$) e $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ é a unidade pseudoescalar da álgebra do espaço-tempo.

DUALIDADE E PSEUDOESCALARES – Há um modo mais simples de se representar a base da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ que faz uso do fato de que os pseudoescalares estão associados a dualidade de Hodge (veja eq.(1.16)), isto é, multiplicando um vetor do $\mathbb{R}^{1,3}$ por γ_5 obtemos um trivetor de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$, por exemplo,

$$\gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (3.6)$$

Assim, a base de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ pode ser expressa como mostrado abaixo

$$\{1, \gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5\}. \quad (3.7)$$

Tal fato simplifica em muito os cálculos, pois o produto com a unidade pseudoescalar goza de várias propriedades.

Observamos que em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ a unidade pseudoescalar, γ_5 , anticomuta com vetores (cf. eq.(1.32)), i.e.,

$$\gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5 \quad (3.8)$$

mas comuta com qualquer elemento da subálgebra par (escalares, bivectores e pseudoescalares), $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$ (veja eq.(1.30)).

Além disso, é imediato verificar que a unidade pseudoescalar tem quadrado negativo (veja eq.(1.33)),

$$\gamma_5^2 = -1 \quad (3.9)$$

e portanto o subespaço dos escalares e pseudoescalares, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{1,3})$, é isomorfo a álgebra dos números complexos.

Vale ressaltar, que de acordo com a interpretação geométrica proposta para os elementos das álgebras de Clifford, γ_5 é identificado com a unidade (orientada) de volume no espaço-tempo [Hestenes, 1971, Hestenes, 1985.b].

É conveniente dividir as componentes dos vetores $v = v^\mu \gamma_\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$, em componente temporal, $v^0 \gamma_0$, e componentes espaciais dadas por $\vec{v} = v^i \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$). Essa divisão é estendida naturalmente aos multivetores, por exemplo, as componentes temporais de um bivector $F = F^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{1,3})$, $\mu < \nu$ são dadas por $F^{i0} \gamma_{i0}$, e as componentes espaciais por $F^{ij} \gamma_{ij}$, $i < j$.

O produto da álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$ entre dois vetores espaciais, digamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é relacionado aos produtos (da álgebra vetorial do $\mathbb{R}^3$) escalar (dot), indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, e vetorial (cross), indicado por $\vec{u} \times \vec{v}$, através da seguinte fórmula:

$$\vec{u} \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v} - \gamma_5 (\vec{u} \times \vec{v}) \gamma_0. \quad (3.10)$$

Estamos considerando o produto vetorial como um vetor do espaço-tempo cuja componente temporal é nula, i.e.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \varepsilon_{ijk} u^i v^j \gamma_k.$$

O produto escalar traz consigo a norma euclidiana $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, positiva definida.

Observamos que a dualidade de Hodge atua no espaço dos bivectores $C^2(\mathbb{R}^{1,3})$ como uma dualidade “própria”, isto é, transforma bivectores em bivectores. Note que o dual de Hodge das componentes temporais de um bivector resulta em componentes espaciais, e vice-versa (cf. [Jackson, pg. 425]). Tal fato é obtido diretamente do produto com pseudoescalar, (que representa a dualidade de Hodge), veja eq.(1.16), pois vale que

$$\gamma_5 \gamma_{i0} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_{jk} \quad (3.11)$$

onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita, completamente antissimétrico nos índices i, j, k .

Assim, um bivector $F \in C^2(\mathbb{R}^{1,3})$, pode ser representado alternativamente como se segue:

$$F = 1/2 F^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} = (E^i + \gamma_5 B^i) \gamma_{i0} = (\vec{E} + \gamma_5 \vec{B}) \gamma_0 \quad (3.12)$$

onde a soma sobre índices repetidos está subentendida, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, e definimos que

$$E^i = F^{i0} \quad ; \quad B^i = -\varepsilon_{ijk} F^{jk}. \quad (3.13)$$

A expressão acima para bivectores é muito conveniente. Dela se deduz imediatamente que F^2 é a soma de um escalar e um pseudoescalar (veja eq.(1.28)), i.e.,

$$F^2 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 + 2\gamma_5 \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (3.14)$$

onde no cálculo acima usamos o fato de que γ_5 anticomuta com vetores e $\gamma_5^2 = -1$, γ_0 anticomuta com vetores espaciais e $\gamma_0^2 = +1$, e também a eq.(9) para o produto entre vetores espaciais.

Portanto, o quadrado de um bivector, $F \in C^2(\mathbb{R}^{1,3})$, pode ser identificado com

um número complexo (cf. eq.(8)).

PRODUTO DE VÁRIOS VETORES γ_μ 's - Estudando o produto entre os γ_μ 's basicamente conseguimos uma prova para o teorema fundamental, eq.(1.10), sobre o produto de Clifford, que no caso das álgebras do espaço-tempo pode ser resumido no seguinte quadro para o produto entre os subespaços de diferentes graduações *

	$\mathcal{C}^1$	$\mathcal{C}^2$	$\mathcal{C}^3$	$\mathcal{C}^4$
$\mathcal{C}^1$	$\mathcal{C}^0 \oplus \mathcal{C}^2$	$\mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^3$	$\mathcal{C}^2 \oplus \mathcal{C}^4$	$\mathcal{C}^3$
$\mathcal{C}^2$		$\mathcal{C}^0 \oplus \mathcal{C}^2 \oplus \mathcal{C}^4$	$\mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^3$	$\mathcal{C}^2$
$\mathcal{C}^3$			$\mathcal{C}^0 \oplus \mathcal{C}^2$	$\mathcal{C}^1$

A última coluna, produto com pseudoescalar, mostra que os pseudoescalares estão relacionados a dualidade de Hodge.

Além do quadro acima observamos que o produto de um número par de vetores pertence a subálgebra par, $\mathcal{C}^+$, e o produto de um número ímpar de vetores pertence ao subespaço de graduação ímpar. **

Vamos agora a discussão do produto de vários γ_μ 's. Inicialmente, definimos que $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu$ se $\mu \neq \nu$ e $\gamma_{\mu\nu} = 0$ se $\mu = \nu$. Assim, a eq.(2) pode ser rearranjada para valer

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

Portanto, o produto de dois vetores resulta na soma de um escalar e um bivector.

Considerando o produto de três vetores $\gamma_\mu, \gamma_\nu, \gamma_\alpha$, e usando a fórmula acima podemos escrever

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha = (g_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) \gamma_\alpha. \quad (15.a)$$

* a complexificação da álgebra não altera o quadro de multiplicação, que também independe da métrica.

** portanto, o produto de um número ímpar de vetores não tem parte escalar. Na representação matricial das matrizes de Dirac γ_μ esse fato é reconhecido como: o traço do produto de um número ímpar de matrizes γ_μ é nulo [Cainiello; Chisholm; Lifschitz et al, pg. 103]

Agora, $\gamma_{\mu\nu}\gamma_\alpha = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha$ com a restrição $\mu \neq \nu$. Por outro lado,

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha = \gamma_\mu(g_{\nu\alpha} + \gamma_{\nu\alpha}). \quad (15.b)$$

Também, $\gamma_\mu\gamma_{\nu\alpha} = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha = -\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu$ com a restrição $\alpha \neq \nu$, e desde que

$$-\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu = -(g_{\mu\alpha} + \gamma_{\mu\alpha})\gamma_\nu \quad (15.c)$$

obtemos das equações acima, que o produto $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha$ é dado por

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha = g_{\mu\nu}\gamma_\alpha - g_{\mu\alpha}\gamma_\nu + g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + \gamma_{\mu\nu\alpha}. \quad (3.16)$$

É claro que os três primeiros termos do membro da direita são vetores enquanto que $\gamma_{\mu\nu\alpha} = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha$ para $\mu \neq \nu \neq \alpha \neq \mu$, é um trivetor.

Analisamos agora o produto de quatro vetores $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta$. Usando a associatividade do produto, a eq.(14) e a eq.(16), encontramos que:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = \begin{cases} g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ g_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}\gamma_{\mu\beta} \\ + \gamma_{\mu\nu\alpha}\gamma_\beta \end{cases} \quad (3.17)$$

Escrevendo $\gamma_{\mu\nu\alpha}\gamma_\beta = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta$, onde $\mu \neq \nu \neq \alpha \neq \mu$, e por uma análise análoga a que precedeu a eq.(16), encontramos que:

$$\gamma_{\mu\nu\alpha}\gamma_\beta = g_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu} - g_{\nu\beta}\gamma_{\mu\alpha} + g_{\mu\beta}\gamma_{\nu\alpha} + \gamma_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

Assim, é claro que o produto $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta$ é a soma de um escalar (primeira linha da eq.(17)), um bivector (segunda linha da eq.(17) e os três primeiros termos do membro direito da eq.(18)), e um pseudoescalar, o último termo da eq.(18).

Observe que se os quatro vetores, $\gamma_\mu, \gamma_\nu, \gamma_\alpha$ e γ_β são distintos, e somente neste caso, o produto tem apenas a parte pseudoescalar (note que $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = \pm\gamma_5$, neste caso).

O produto de cinco ou mais vetores γ_μ 's pode ser reduzido ao produto de quatro ou menos vetores, desde que considerando cinco vetores γ_μ 's ao menos um deles aparece repetido, usando as propriedades de anticomutação dos γ_μ 's, eq.(2), podemos agrupar os mesmos γ_μ 's de modo a escrever seu produto em forma de potências

(note que $\gamma_\mu^2 = \pm 1$).

RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO ENTRE BIVETORES – Vimos no capítulo II, eq.(2.37) que bivectores são os elementos da álgebra de Lie associada ao grupo ortogonal em questão. Também vimos no capítulo I, eq.(1.28b), que o comutador de dois bivectores é um bivector. As relações de comutação que caracterizam a álgebra de Lie associada ao grupo de Lorentz usualmente apresentadas nos livros textos podem ser obtidas na álgebra do espaço-tempo considerando os seguintes geradores padrão indicados por $J_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$):

$$J_{\mu\nu} = 1/2 \gamma_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Assim, da eq.(17) e eq.(18) segue que: [Salingaros, 1984]

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}. \quad (3.20)$$

Uma outra forma para as relações de comutação dos geradores do grupo de Lorentz é obtida definindo os geradores de boost, indicados por K_i , e geradores de rotação, indicados por L_i , do seguinte modo* (cf. [Zeni e Rodrigues, 1991])

$$K_i = J_{i0} \quad ; \quad L_i = \varepsilon_{ijk} J_{jk} \quad (19')$$

Assim, obtemos as seguintes relações de comutação [Jackson, pg. 417]

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \varepsilon_{ijk} L_k \\ [K_i, L_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -\varepsilon_{ijk} L_k \end{aligned} \quad (20')$$

Da primeira destas equações segue que os geradores de rotação espacial, L_i , formam uma subálgebra da álgebra de Lie do grupo de Lorentz.

Um gerador genérico é uma combinação linear dos geradores padrões, eq.(19), por exemplo $F = F^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$.

* note que da eq.(10) segue que $L_i = -1/2 \gamma_5 \gamma_{i0}$ e por outro lado $K_i = 1/2 \gamma_5 \gamma_{jk} \varepsilon_{ijk}$.

A EQUAÇÃO MASTER - Para obtermos a forma fechada da série para a exponencial de bivectores, eq.(2.37), em $C(\mathbb{R}^{1,3})$ vamos usar o fato de que o quadrado de um bivector é, em $C(\mathbb{R}^{1,3})$ a soma de um escalar com um pseudoescalar, eq.(12).*

Assim, desde que o subespaço $C^0(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus C^4(\mathbb{R}^{1,3})$ é isomorfo ao corpo dos complexos, a série de potências pares é equivalente a uma série nos complexos que define a função cosseno hiperbólico, i.e., escrevendo $F^2 = z^2$, temos que

$$\cosh z = 1 + \frac{F^2}{2!} + \frac{F^4}{4!} + \dots \quad (3.21)$$

Por outro lado, a série de potências ímpares também pode ser escrita como uma série de números complexos, multiplicada por um bivector que define a função seno hiperbólico, escrevendo $F = z\hat{F}$, onde $\hat{F}^2 = 1$, segue que:

$$\hat{F} \sinh z = \hat{F} \left(z + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = F + \frac{F^3}{3!} + \frac{F^5}{5!} + \dots \quad (3.22)$$

Note que isso é sempre possível se $F^2 \neq 0$, sendo que $\hat{F} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} F$, onde $\bar{z}$ indica o conjugado complexo de z ($z = x + \gamma_5 y$, $\bar{z} = x - \gamma_5 y$).**

Assim, um elemento do grupo $Spin_+(1,3) \sim SL(2, \mathcal{C})$, que é dado pela exponencial de um bivector, pode ser escrita na seguinte forma fechada:***

$$A = e^F = 1 + F + \frac{F^2}{2!} + \dots = \cosh z + \hat{F} \sinh z. \quad (3.23)$$

No capítulo II afirmamos que a exponencial dos geradores se tratava de um “Ansatz”, uma hipótese. A discussão acima mostra um procedimento construtivo para se obter a exponencial dos geradores do grupo de Lorentz em forma fechada (ou finita).

Na realidade podemos ir mais além. Vamos demonstrar agora que todo elemento do grupo $Spin_+(1,3)$ (veja eq.(2.31) e comentários subsequentes), pode ser parametrizado na forma da exponencial de um gerador como dado na eq.(23). Para tanto,

* em outras palavras, o produto de Clifford de uma 2-forma por si mesma é a soma de uma 0-forma (um escalar) com uma 4-forma (um pseudoescalar em $\Lambda(\mathbb{R}^4)$).

** Note que $\gamma_5 \rightarrow -\gamma_5$ não é um automorfismo (nem antiautomorfismo) principal da álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$, veja eq.(1.21).

*** O resultado final é que as potências pares de um bivector da álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$ são todas um número complexo, enquanto que as potências ímpares são bivectores.

lembramos que se $A \in Spin_+(1,3)$ então A pertence a subálgebra par e satisfaz $AA^* = 1$. Para $A \in C^+(\mathbb{R}^{1,3})$ podemos escrever

$$A = w + H \quad (3.24)$$

onde $w = u + \gamma_5 v \in C^0(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus C^4(\mathbb{R}^{1,3})$ ($u, v \in \mathbb{R}$) e $H \in C^2(\mathbb{R}^{1,3})$ é um bivector [Hamilton] não considera a parte pseudoescalar, $C^4(\mathbb{R}^{1,3})$, das transformações de Lorentz, que é nula para boosts e rotações espaciais (veja eq.(37) e eq.(41) a seguir).

Agora, da eq.(1.21) vemos que

$$A^* = w - H \implies AA^* = w^2 - H^2 \quad (3.25)$$

Assim, se $AA^* = 1$ e desde que H^2 é um “número complexo”, eq.(13), podemos escrever

$$w^2 = ch^2 z, \quad H^2 = sh^2 z. \quad (3.26)$$

Para determinar w em função de z usamos a função raiz quadrada existente nos números complexos. Entretanto, para determinar o bivector H não podemos simplesmente tirar a raiz quadrada do número complexo H^2 . O processo a ser considerado é que todo bivector H , tal que $H^2 = sh^2 z$, pode ser escrito como*

$$H = \hat{F} sh z \quad (26')$$

onde $\hat{F}$ é um bivector de quadrado igual a um, i.e. $\hat{F}^2 = 1$. Este procedimento é equivalente a normalização de vctores euclidianos e é a chave para se resolver a parametrização da forma finita das transformações. Da discussão acima segue que toda $A \in Spin_+(1,3)$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$A = ch z + \hat{F} sh z \quad (3.27)$$

que de acordo com a eq.(23) representa a exponencial de um particular bivector $F = z\hat{F}$.

Observamos que o operador $A \in Spin_+(1,3) \sim SL(2, C)$ tem apenas seis parâmetros reais; o bivector unitário $\hat{F}$ contribue com apenas quatro parâmetros reais, os outros dois estão na variável complexa z .

* se $H^2 = 0$, então da eq.(25) $w = 1$, e assim a transformação $A = 1 + H$, eq.(24).

VECTOR TRANSFORMADO - Consideramos agora a expressão para o vetor transformado, eq.(2.19), onde $A = e^F$ é dado pela eq.(23), sendo $A^* = A^{-1} = e^{-F}$, i.e.,

$$U' = AUA^* = (ch z + \hat{F} sh z)U(ch z - \hat{F} sh z). \quad (3.28)$$

Agora, desde que γ_5 anticomuta com vetores, e $z = x + \gamma_5 y$, temos que $zU = U\bar{z}$, e portanto podemos escrever a eq.(28) como:

$$U' = U|ch z|^2 - \hat{F}U\hat{F}|sh z|^2 + \hat{F}U sh \bar{z} ch z - U\hat{F} sh z ch \bar{z}. \quad (3.29)$$

A contribuição para o vetor transformado dos dois últimos termos resulta na seguinte expressão (veja apêndice A para maiores detalhes):

$$1/2(\hat{F}U - U\hat{F}) sh 2x + 1/2\gamma_5(\hat{F}U + U\hat{F}) sen 2y. \quad (3.30)$$

A expressão final para o vetor transformado será dada em termos das variáveis mostradas abaixo

$$U = u_0\gamma_0 + \vec{u}; \quad F = (\vec{E} + \gamma_5\vec{B})\gamma_0; \quad z = x + \gamma_5 y. \quad (3.31)$$

Além disso, vamos usar na expressão abaixo os produtos interno (ou escalar), indicado por $\cdot$, e vetorial ('cross'), indicado por $\times$, da álgebra vetorial para os vetores relativistas que tem apenas componentes espaciais, como $\vec{u}, \vec{E}$ e $\vec{B}$, (veja eq.(9)).

A expressão final para o vetor transformado, eq.(28), para F qualquer (cf. [Zeni e Rodrigues, 1990.b] eq.(19)) é:

$$U' = \left\{ \begin{aligned} & U|ch z|^2 + \\ & \left| \frac{sh z}{z} \right|^2 \left\{ (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)(u_0\gamma_0 - \vec{u}) - 2\vec{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})\gamma_0 \right. \\ & \quad \left. + 2[u_0\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{B}] \right\} + \\ & \frac{sh 2x}{|z|^2} \left\{ u_0(x\vec{E} + y\vec{B}) + x\vec{u} \times \vec{B} - y\vec{u} \times \vec{E} + \right. \\ & \quad \left. + [x(\vec{u} \cdot \vec{E}) + y(\vec{u} \cdot \vec{B})]\gamma_0 \right\} + \\ & \frac{sen 2y}{|z|^2} \left\{ u_0(y\vec{E} - x\vec{B}) + x\vec{u} \times \vec{E} + y\vec{u} \times \vec{B} + \right. \\ & \quad \left. + [-x(\vec{u} \cdot \vec{B}) + y(\vec{u} \cdot \vec{E})]\gamma_0 \right\} \end{aligned} \right. \quad (3.32)$$

O vetor transformado pode ser escrito completamente em termos das variáveis reais x e y usando as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} |ch z|^2 &= 1/2(ch 2x + \cos 2y) \\ |sh z|^2 &= 1/2(ch 2x - \cos 2y) \end{aligned} \quad (3.33)$$

As variáveis x e y podem ser deduzidas da equação $z^2 = F^2$, veja eq.(13), e encontramos que [Zeni e Rodrigues, 1990.a e b, 1991]

$$\begin{aligned} x^2 &= 1/2 \left\{ \sqrt{(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2} + (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) \right\} \\ y^2 &= 1/2 \left\{ \sqrt{(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2} - (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

BOOSTS E ROTAÇÕES ESPACIAIS – em cinemática relativista é usual olhar os seis parâmetros do grupo de Lorentz como definindo as relações entre dois referenciais inerciais do seguinte modo: três parâmetros definem a orientação relativa dos eixos espaciais, e estão portanto, associados a uma rotação, e três parâmetros definem a velocidade relativa, sendo associados a boosts, ou transformações de velocidade. Os parâmetros que definem as transformações são intimamente relacionados aos geradores, mas no caso geral, estas relações são um tanto complexas [Zeni e Rodrigues, 1991]. As transformações primárias do grupo de Lorentz são boosts e rotações espaciais (ou por simplicidade, rotações), as quais passamos a discutir.

A característica fundamental destas transformações é que os parâmetros físicos da forma finita são relacionados de modo simples aos geradores destas transformações conforme discutido a seguir [Mac Farlane].

As rotações espaciais, indicadas por R , são caracterizadas por não alterarem a componente temporal, indicado por u_0 na eq.(32), do vetor transformado, i.e., se

$$U' = R U R^* \implies u'_0 = u_0. \quad (3.35)$$

Toda rotação espacial pode ser escrita como a exponencial de bivectores espaciais, i.e., os geradores das rotações espaciais são combinação linear apenas dos geradores

de rotações, estes definidos na eq.(19'), e assim temos que*

$$R = e^{\gamma_5 \vec{n} \gamma_0}$$

Considerando que $F = \gamma_5 \vec{n} \gamma_0 = z \hat{F}$, onde $z^2 = F^2$, $\hat{F}^2 = 1$, segue que

$$z = \gamma_5 |\vec{n}| \quad , \quad \hat{F} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \gamma_0 . \quad (3.36)$$

Assim, da eq.(27), deduzimos que uma rotação é dada por:

$$R = e^{\gamma_5 \hat{n} \gamma_0} = \cos \theta + \gamma_5 \hat{n} \gamma_0 \sin \theta \quad (3.37)$$

onde $\hat{n} = \vec{n}/|\vec{n}|$ e $\theta = |\vec{n}|$, são identificados com a direção do eixo de rotação e o semiângulo de rotação, respectivamente.

O vetor transformado, eq. (32), onde $x = 0$, $z = i\theta$, $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = \vec{n}$ por uma rotação é dado por: [Mathews]

$$U' = u_0 \gamma_0 + \vec{u}_{//} + \vec{u}_{\perp} \cos 2\theta + \vec{u} \times \hat{n} \sin 2\theta \quad (3.38)$$

onde $\vec{u}_{//}$ e $\vec{u}_{\perp}$ são as componentes, paralela e ortogonais do vetor $\vec{u}$ ao vetor $\hat{n}$, i.e.,

$$\vec{u}_{//} = (\vec{u} \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad , \quad \vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{//} \quad (3.39)$$

Assim, observamos também que, além da componente temporal, uma rotação não altera a componente espacial paralela à direção do eixo de rotação.

Os boosts, ou transformações de velocidades indicados por B , diferentemente das rotações espaciais, modificam a componente temporal dos vetores relativistas. A caracterização dos boosts é feita através dos geradores: todo boost pode ser escrito como a exponencial de um bivector temporal, i.e.,

$$B = e^{\vec{v} \gamma_0} .$$

Considerando que $F = \vec{v} \gamma_0 = z \hat{F}$, encontramos que

$$\hat{F} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \gamma_0 \quad ; \quad z = |\vec{v}| . \quad (3.40)$$

* note que bivectores espaciais são o dual de bivectores temporais, veja eq.(10).

Assim, da eq. (27) concluímos que um boost é dado por:

$$B = e^{\vec{v}\gamma_0} = ch\,\nu + \hat{v}\gamma_0 sh\,\nu \quad (3.41)$$

onde $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e $\nu = |\vec{v}|$, são identificados com a direção da velocidade relativa e a metade da rapidez, respectivamente. A rapidez é relacionada ao módulo da velocidade através da tangente hiperbólica:

$$tgh\,2\nu = |\vec{v}| = v \quad (42.a)$$

e o fator de Lorentz, indicado por γ , é dado por*

$$\gamma = ch\,2\nu = \sqrt{\frac{1}{1-v^2}}. \quad (42.b)$$

O vetor transformado por um boost, eq.(32), onde $y = 0$, $z = x = \nu$, $\vec{E} = \vec{v}$, $\vec{B} = 0$, e considerando as eq.(42), é dado por:

$$U' = \gamma(u_0 + \vec{u} \cdot \vec{v})\gamma_0 + \gamma(u_0\vec{v} + \vec{u}_{//}) + \vec{u}_{\perp} \quad (3.43)$$

onde $\vec{u}_{//}$ e $\vec{u}_{\perp}$ são as componentes paralela e ortogonais, respectivamente do vetor espacial $\vec{u}$ à velocidade relativa $\vec{v}$.

Assim, observamos que um boost não altera a componente espacial dos vetores relativistas perpendicular à velocidade relativa. Observamos que $\vec{v}$ não é a componente espacial de nenhum vetor relativista.

A relação entre os parâmetros e os geradores de uma transformação genérica, i.e., que não seja um boost ou uma rotação, não é direta, conforme citado no início desta seção. Entretanto, esta relação pode ser obtida através do resultado [Miller, pg. 295] de que toda transformação de Lorentz própria e ortócrona pode ser decomposta no produto de um boost por uma rotação, i.e., se $A \in Spin_+(1,3)$, então

$$A = BR \quad (3.44)$$

* o quadrado de um boost pode ser escrito em termos da velocidade relativa e do fator de Lorentz, i.e.,

$$B^2 = \gamma(1 + \vec{v}\gamma_0) = ch\,2\nu + \hat{v}\gamma_0 sh\,2\nu$$

Assim, para sabermos como os geradores de $A = e^F$ estão relacionados aos parâmetros físicos, seguindo a interpretação dada no início desta seção, basta resolver como os geradores de $B = e^{\vec{v}\gamma_0}$ e $R = e^{\gamma_5 \vec{n}\gamma_0}$ dependem dos geradores de A . Observamos que a solução deste problema está intimamente relacionado à questão envolvida na série B-C-II (Backer, Campbell-Hausdorff) [Miller, pg. 161]. A solução deste problema, utilizando a forma finita para a exponencial dos geradores, (o que torna supérflua a série B-C-H) foi discutida em [Zeni e Rodrigues, 1991].

Abaixo mostramos os resultados. O semiângulo de rotação $\theta = |\vec{n}|$ é dado em termos de $F = (\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\gamma_0 = z\hat{F}$, onde $z = x + \gamma_5 y$ (veja eq.(31) e eq.(34)) como

$$tg^2\theta = 1/2 tg^2y \left\{ \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{x^2 + y^2} + 1 \right\} + 1/2 tgh^2x \left\{ \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{x^2 + y^2} - 1 \right\}. \quad (3.45)$$

O eixo de rotação, definido pelo vetor $\hat{n}$ é dado por:

$$\hat{n} = \frac{1}{(x^2 + y^2) tg\theta} \left\{ (x\vec{E} + y\vec{B})tg\,hx + (x\vec{B} + y\vec{E})tg\,y \right\} \quad (3.46)$$

O fator de Lorentz (veja eq.(42.b)) relacionado ao boost B é dado por

$$\gamma = ch\,2\nu = |ch\,z|^2 + \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{x^2 + y^2} |sh\,z|^2 \quad (3.47)$$

e a velocidade relativa pode ser deduzida da seguinte relação

$$\gamma\vec{v} = \hat{v}\,sh\,2\nu = 2(\vec{E} \times \vec{B}) \left| \frac{sh\,z}{z} \right|^2 + \frac{(x\,sh\,2x + y\,\text{sen}\,2y)\vec{E}}{|z|^2} + (y\,sh\,2x - x\,\text{sen}\,2y) \frac{\vec{B}}{|z|^2}. \quad (3.48)$$

Lembrando da interpretação dos seis parâmetros do grupo de Lorentz dada no início desta seção, observamos que a decomposição de uma transformação genérica no produto de um boost por uma rotação, eq.(44) é única.

A eq.(44) pode ser interpretada do seguinte modo: primeiro ‘acertamos’ os eixos dos referenciais, relacionados pela transformação A , através da rotação R e depois efetuamos a transformação de velocidade (boost). Ressaltamos que o produto BR não é comutativo, e se escrevêssemos

$$A = R'B' \quad (3.49)$$

obteríamos outros resultados para os parâmetros $R(\vec{n}')$ e $B'(\vec{v}')$, do que aqueles dados nas eq.(45-8) [cf. Ungar, seção 6, identidade (xii), para o caso em que A é o produto dos boosts].

A DECOMPOSIÇÃO EM PRODUTOS DE SIMETRIAS – esta seção tem o objetivo de ilustrar o teorema enunciado no capítulo 2, de que toda transformação ortogonal pode ser decomposta no produto de simetrias, eq.(2.4). Mostramos abaixo como decompor um boost e uma rotação no produto de duas simetrias, lembrando que as simetrias são descritas por vetores (cf. eq.(2.2) e eq.(2.21)).

Uma rotação espacial, eq.(35) pode ser descrita pelo operador $\pm R$, * dado na eq. (37). Este operador pode ser escrito como o produto de dois vetores espaciais normalizados, digamos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, i.e.** [Riesz, pg. 82; Zeni, 1987, pg. 90]

$$-R = \vec{u} \vec{v} = -\cos \theta - \gamma_5 \vec{n} \gamma_0 \sin \theta \quad (3.50)$$

onde $\vec{u}^2 = \vec{v}^2 = -1$ (as componentes temporais são nulas), e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são tais que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual ao semiângulo de rotação, θ , i.e.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \theta \quad (3.51)$$

e a direção do eixo de rotação é ortogonal ao plano de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, i.e.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \hat{n} \sin \theta. \quad (3.52)$$

É claro, da discussão acima que a rotação se efetua no plano definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Um boost, eq.(43), é descrito pelo operador $\pm B$, dado na eq.(41). Este operador pode ser escrito como o produto de dois vetores tipo-tempo de mesma orientação temporal (i.e., $a^0 c^0 > 0$) normalizados, digamos $a = a^\alpha \gamma_\alpha$ e $c = c^\alpha \gamma_\alpha$, i.e.

$$B = ac = ch \nu + \hat{v} \gamma_0 sh \nu \quad (3.53)$$

* note que a ação adjunta, eq.(2.19) ou eq.(33) fornece o mesmo vetor transformado para $+R$ ou $-R$.

** o sinal negativo é necessário por causa da métrica adotada no espaço-tempo $\mathcal{R}^{1,3}$ (veja eq.(3.9)).

onde $a^2 = c^2 = 1$, e a e c são tais que o ângulo no espaço-tempo entre eles é igual a metade da rapidez, i.e. o produto interior entre a e c é dado por*

$$g(a, c) = a^0 c^0 - \vec{a} \cdot \vec{c} = ch \nu. \quad (3.54)$$

Além disso, consideramos que a direção da velocidade relativa é definida pela componente espacial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$, i.e.

$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{v}, \quad \vec{c} = |\vec{c}| \hat{v}. \quad (3.55)$$

Deste modo, o produto exterior entre a e c reduz-se a:**

$$a \wedge c = (c^0 |\vec{a}| - a^0 |\vec{c}|) \hat{v} \gamma_0 = \hat{v} \gamma_0 sh \nu. \quad (3.56)$$

Em relação ao número de parâmetros, observamos que os vetores relativistas a e c envolvem ao todo oito parâmetros, a^α e c^α , a condição de normalização reduz em dois este número; a exigência sobre o ângulo no espaço-tempo entre estes vetores reduz em um (uma equação escalar), e a relação entre as componentes espaciais reduz em mais dois. Portanto, nos restam três parâmetros, o número correto de parâmetros para um boost.

A decomposição de uma transformação própria e ortócrona, cuja forma mais geral é dada pela eq.(27), no produto de simetrias é algo mais trabalhoso de se realizar. Observamos que nesse caso seriam necessárias quatro simetrias ou quatro vetores, pois com menos que quatro vetores não podemos conseguir a parte pseudoescalar existente num elemento genérico do grupo $Spin_+(1, 3)$, eq.(24) (veja a discussão em [Krause] que afirmou que poderia decompor qualquer transformação de Lorentz, própria e ortócrona, como o produto de duas reflexões (simetrias) e a crítica de [Fradkin] baseada no fato de que somente a velocidade não caracteriza completamente um referencial inercial).

A PROJEÇÃO NA ÁLGEBRA DO ESPAÇO – no capítulo I dissemos que o subespaço formado pelos multivetores de graduação par fecha uma subálgebra da álgebra de Clifford $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, sendo indicado por $C^+(\mathbb{R}^n)$, veja eq.(1.11) e eq.(1.12).

* note que esta parametrização para $g(a, c)$ sempre pode ser feita se a e c são vetores tipo-tempo de mesma orientação temporal, o que implica que $g(a, c) \geq 1$.

** pode-se mostrar que as definições de $ch \nu$ e $sh \nu$ dadas na eq.(54) e eq.(56) são consistentes.

Também, no capítulo II vimos a importância das subálgebras par para a determinação do grupo *Spin*. Nesta seção estamos interessados na subálgebra par da álgebra do espaço-tempo, que é identificada como a álgebra de Clifford gerada pelos vetores euclidianos ou álgebra de Pauli, indicada por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, i.e.,

$$\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3}) \sim \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \quad (3.57)$$

onde $\sim$ indica que as álgebras são isomorfas, i.e., podemos estabelecer uma correspondência um-a-um entre seus elementos que preserva o produto.

Inicialmente, vamos analisar a subálgebra par $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$ dentro da metodologia e notação que estamos usando, para depois introduzir uma notação própria para a álgebra de Pauli (Apêndice B).

A subálgebra par $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$ é formada por escalares, bivectores e pseudoescalares, i.e.,

$$\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3}) = \mathcal{C}^0 \oplus \mathcal{C}^2 \oplus \mathcal{C}^4 \quad (3.58)$$

e uma base para $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$ é dada por:

$$\{1, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_5\} \quad , \quad \mu < \nu \quad (3.59)$$

Desde que γ_5 realiza a dualidade de Hodge, sendo que no espaço dos bivectores γ_5 transforma as componentes temporais em componentes espaciais, eq.(10), e vice-versa, podemos adotar como base para a subálgebra par $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$ o seguinte conjunto:

$$\{1, \gamma_{i0}, \gamma_5 \gamma_{i0}, \gamma_5\} \quad (3.60)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Esta será dita uma base sobre os reais para $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$.

Por outro lado, observamos que γ_5 comuta com qualquer elemento de $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$, eq.(7), e tem quadrado -1, eq.(8). Estes resultados permitem que γ_5 seja usado em $\mathcal{C}^+$ como a unidade imaginária dos complexos [Hestenes, 1967]. O fato de que os escalares e os pseudoescalares em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,3})$ são isomorfos aos números complexos já nos foi de grande utilidade na discussão do grupo *Spin*₊(1, 3), veja eq.(26), permitindo entre outros fatos tratar a série de potências de bivectores como séries sobre números complexos, eq.(21) e eq.(22). Assim podemos considerar γ_5 como a unidade imaginária na álgebra $\mathcal{C}^+(\mathbb{R}^{1,3})$. Tal fato nos permite considerar a subálgebra

par, $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$, sobre os complexos $\mathcal{C} = \{1, \gamma_5\}$. Assim, uma base para $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$ sobre os complexos $\mathcal{C} = \{1, \gamma_5\}$ é dada por:

$$\{1, \gamma_{i0}\}. \quad (3.61)$$

Para saber o produto de dois números quaisquer da álgebra $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$, observamos da discussão acima que necessitamos conhecer o produto entre os γ_{i0} 's, i.e.

$$\gamma_{i0}\gamma_{j0} = -g_{ij} - \gamma_{ij}. \quad (3.62)$$

Escrevendo $\delta_{ij} = -g_{ij}$ (delta de Kroenecker), e usando a eq.(10) para expressar γ_{ij} em termos de γ_{k0} , obtemos

$$\gamma_{i0}\gamma_{j0} = \delta_{ij} + \gamma_5\gamma_{k0}\varepsilon_{ijk}. \quad (3.63)$$

A equação acima é satisfeita pelas matrizes de Pauli, i.e., os γ_{i0} são identificados com as matrizes de Pauli (veja apêndice B).

Para completar a discussão, vejamos como se comportam os elementos de $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$ sobre os morfismos definidos no capítulo 1, eq.(1.21).

Desde que $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$ é a subálgebra par, o automorfismo principal não altera seus elementos. Sob a ação dos antiautomorfismo principal, $*$, e composição, $\sim$, apenas os bivectores trocam de sinal. Observamos que os pseudoescalares em $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$, se comportam como os escalares, e portanto não se alteram sob os morfismos da álgebra do espaço-tempo, veja eq.(1.21).

CAPÍTULO IV

A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA NO FORMALISMO DA ÁLGEBRA DO ESPAÇO-TEMPO

Neste capítulo apresentamos uma formulação covariante intrínseca para a Eletrodinâmica Clássica baseada na álgebra do espaço-tempo $C(\mathbb{R}^{1,3})$. A discussão deste capítulo segue [Hestenes, 1966 e Zeni, 1987]. Veja também [Imaeda, Greider].

O objetivo deste capítulo é a discussão da força de Lorentz, mostrando que a exponencial dos geradores do grupo de Lorentz, discutida no capítulo anterior, pode ser usada para resolver a equação relativista para o movimento de uma partícula carregada sob a ação da força de Lorentz através da exponenciação do campo eletromagnético, que na álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$ também é representado por um bivector.

Assim, a apresentação dos principais tópicos da Eletrodinâmica Clássica através da álgebra do espaço-tempo, serve para amparar a discussão da Força de Lorentz, enquadrando-a num contexto maior [Zeni e Rodrigues, 1987]. Ressaltamos que a força de Lorentz, além de ser o fator determinante da equação de movimento para uma partícula carregada sob a ação do campo eletromagnético, aparece na discussão da lei de conservação da energia-momento-tensão do campo eletromagnético, pois na presença de cargas-fontes, o balanceamento da equação de conservação requer que a variação (divergência) da energia-tensão-momento do campo seja igual ao negativo das cargas-fontes, que é dado justamente pela força de Lorentz.

Vale ressaltar dois aspectos positivos além do resultado comentado acima da formulação da eletrodinâmica clássica através da álgebra do espaço-tempo: as informações, i.e. as equações básicas, são condensadas em poucas frases, e os processos algébricos para deduzir outras relações são razoavelmente simples, baseados em uma primeira análise na graduação dos termos resultantes e na simetria do produto entre multivetores. Além destes fatos, a formulação através da álgebra do espaço-tempo permite uma passagem direta para o cálculo vetorial (veja eq.(3.9) e eq.(3.13) e [Zeni, 1987, pg.116-149] e também [Baylis] para uma discussão detalhada deste fato).

OPERADORES DIFERENCIAIS - para formular a Eletrodinâmica Clássica necessitamos introduzir operadores diferenciais que atuam sobre os multivetores de $C(\mathbb{R}^{1,3})$, estes últimos agora são pensados como campos ou aplicações que tem por domínio o espaço-tempo e tomam valores na álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$. Então, por exemplo o campo eletromagnético, representado por um bivector de $C(\mathbb{R}^{1,3})$, indicado por F , é uma função (aplicação) das variáveis $x = (\vec{x}, t)$ do espaço-tempo, na álgebra $C(\mathbb{R}^{1,3})$ i.e.,

$$F = F(x) : \mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3}) \sim C^2(\mathbb{R}^{1,3}). \quad (4.1)$$

Evitando uma discussão mais detalhada sobre variedades diferenciáveis* e operadores diferenciais sobre essas variedades, o objeto básico que queremos introduzir é um operador diferencial, indicado por ∂ , que satisfaz a regra de Leibniz, i.e., se f e g são duas funções escalares, então

$$\partial(fg) = f\partial g + g\partial f \quad (4.2)$$

e que algebricamente se comporta como um vetor da álgebra do espaço-tempo, $C(\mathbb{R}^{1,3})$, i.e., se f é uma função escalar, então ∂f é um vetor do $\mathbb{R}^{1,3}$, se U é um vetor do $\mathbb{R}^{1,3}$, então

$$\partial U = \partial \circ U + \partial \wedge U \quad (4.3)$$

é a soma de um escalar, $\partial \circ U$ denominado a divergência do vetor U , com um bivector, $\partial \wedge U$, denominado o rotacional do vetor. Essa nomenclatura pode ser estendida, pois de modo geral se $A_k \in C^k(\mathbb{R}^{1,3})$ é um k -vetor de $C(\mathbb{R}^{1,3})$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, então vale que (cf. eq.(1.25))

$$\partial A_k = \partial \circ A_k + \partial \wedge A_k. \quad (4.4)$$

O operador ∂ será aqui denominado o operador de Dirac, [Feynman, pg. 40] e ele é definido explicitamente em termos das derivadas em relação as coordenadas do espaço-tempo, indicadas por x^μ , como abaixo:

$$\partial = \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \gamma_\mu \partial^\mu. \quad (4.5)$$

* na realidade um espaço vetorial de Minkowski, $\mathbb{R}^{1,3}$, é construído sobre cada ponto da variedade espaço-tempo [Zeni, 1987, pg. 105-110].

Assim, a divergência e o rotacional de um vetor são dados por:

$$\partial \circ U = \partial_\mu U^\mu \quad ; \quad \partial \wedge U = (\partial^\mu U^\nu) \gamma_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

onde estamos usando, neste capítulo, a regra para balanceamento de índices, i.e.,

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu. \quad (4.7)$$

EQUAÇÃO DE MAXWELL – para formular as equações de Maxwell necessitamos de introduzir o vetor densidade de corrente, indicado por J , e que caracteriza as fontes do campo eletromagnético, indicado por F .

Na álgebra do espaço-tempo, as equações de Maxwell se resumem a somente uma equação mostrada abaixo [Hestenes, 1966 pg. 29; Riesz, pg. 138]

$$\partial F = J \quad (4.8)$$

Considerando que o operador diferencial ∂ se transforma sob a ação do grupo de Lorentz como um vetor, a equação acima é claramente invariante (cf. eq.(2.40)), pois temos que sob a ação de $A \in Spin_+(1, 3)$

$$\partial \longrightarrow A \partial A^{-1}, \quad F \longrightarrow A F A^{-1}, \quad J \longrightarrow A J A^{-1} \quad (4.9)$$

e consequentemente

$$\partial F \longrightarrow A \partial F A^{-1} \quad (4.10)$$

o que mostra que ambos os membros da eq.(8) se transformam do mesmo modo sob a ação (adjunta), eq.(2.19), de $A \in Spin_+(1, 3) \sim SL(2, C)$.

Ressaltamos que os invariantes do campo eletromagnético são dados por F^2 , eq.(3.13), desde que $F^2 \in C^0(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus C^4(\mathbb{R}^{1,3})$ comuta com qualquer transformação $A \in Spin_+(1, 3) \subset C^+(\mathbb{R}^{1,3})$.

A equação de Maxwell, eq.(8), pode ser separada em duas equações: uma para a divergência do campo eletromagnético e outra para o rotacional do campo (cf. eq.(4))

$$\partial \circ F = J \quad ; \quad \partial \wedge F = 0. \quad (4.11)$$

De outro modo, a equação para o rotacional do campo pode ser escrita em termos do dual (de Hodge) do bivector F , indicado por G , i.e.,* (veja eq.(1.14))

$$G = \gamma_5 F = (-\vec{B} + \gamma_5 \vec{E}) \gamma_0 \quad (4.12)$$

* nas nossas considerações o sinal $\pm G$, para a definição do dual é um fato menor, sem maiores consequências.

onde $F = (\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\gamma_0$ (veja eq.(3.13)).

Agora, multiplicando a eq.(8) por γ_5 , obtemos

$$\partial G = -\gamma_5 J \quad (4.13)$$

desde que γ_5 é constante ($\partial\gamma_5 = 0$) e anticomuta com vetores.

Assim, vemos que a equação homogênea, o rotacional do campo, é equivalente a equação para a divergência do dual, fato que simplifica em muito a expressão em termos de coordenadas ([Zeni, 1987, pg. 123] e [Jackson, pg. 425]).

A passagem da eq.(8) para a álgebra vetorial, envolvendo os vetores de campo elétrico, $\vec{E}$, e magnético, $\vec{B}$, e o gradiente espacial, indicado por $\vec{\nabla}$, é discutida em [Zeni, 1987, pg. 124].

Reproduzimos a seguir um trecho de [Zeni, 1987, pg. 122] que realça o poderio do formalismo aqui adotado: "Vale aqui fazer um comentário sobre a simplicidade fornecida pelo desenvolvimento algébrico ocorrido desde a formulação da eletrodinâmica por Maxwell; a formulação original de Maxwell, que empregava coordenadas, consistia num conjunto de oito equações escalares. Com a introdução do cálculo vetorial por Gibbs, as equações de Maxwell passaram a ser representadas por quatro equações: duas correspondentes ao rotacional e duas correspondentes ao divergente dos campos E e B . Na formulação tensorial, e também na formulação da álgebra exterior (ou formas diferenciais), as equações de Maxwell são representadas por duas equações: uma para a divergência do tensor de campo, e uma para a divergência do dual do tensor de campo. O formalismo da álgebra de Clifford permite condensarmos as equações de Maxwell em uma única equação."

A equação de Maxwell, eq.(8), é a lei básica da Eletrodinâmica Clássica da qual derivam várias outras relações, algumas das quais passamos a discutir.

CONSERVAÇÃO DA CARGA – A lei de conservação para o vetor corrente J é obtida considerando a equação de onda para o campo eletromagnético, i.e., aplicando o operador de Dirac, ∂ , à equação de Maxwell, obtemos

$$\partial^2 F = \partial J. \quad (4.14)$$

Agora, ∂^2 é um escalar, pois é o quadrado de um vetor (veja eq.(1.6)), reconhecido como o D'Alambertiano, o operador diferencial da equação de onda. Assim, o

membro da esquerda na equação acima é um bivector. Por outro lado, o membro da direita pode ser decomposto na soma de um escalar, a divergência do vetor J , com um bivector, o rotacional de J , e assim obtemos:

$$\partial^2 F = \partial \wedge J; \quad \text{enquanto que } \partial \circ J = 0. \quad (4.15)$$

A equação para a divergência do vetor corrente expressa a lei de conservação da carga elétrica [Jackson, pg. 423; Landau e Lifschitz, 1975, pg. 72].

ONDAS PLANAS – Vamos agora estudar um exemplo específico: o modelo de onda plana para campos livres.

A equação de Maxwell em regiões livres de fontes se reduz à:

$$\partial F = 0. \quad (4.16)$$

Uma solução particular desta equação é o modelo de onda plana para o campo dado por

$$F(x) = f e^{\gamma_5 k \circ x} \quad (4.17)$$

onde f é a amplitude do campo (um bivector constante), x é o vetor posição onde está sendo avaliado o campo, e k é um vetor constante característico do modelo de onda plana (está associado ao modo de propagação da onda), $k \circ x = g(k, x)$.

Substituindo a solução de onda plana, eq.(17), na equação para campo livre, eq.(16), obtemos

$$kF = 0 \quad \text{ou} \quad kf = 0. \quad (4.18)$$

Escrevendo $k = \omega \gamma_0 + \vec{k}$, $f = (\vec{E} + \gamma_5 \vec{B}) \gamma_0$, a equação acima nos diz que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são transversos à direção de propagação da onda, definida pelo vetor espacial $\vec{k}$, i.e.,

$$\vec{E} \cdot \vec{k} = \vec{B} \cdot \vec{k} = 0. \quad (4.19)$$

Multiplicando à eq.(18) por f à direita e supondo $k \neq 0$, encontramos que:

$$f^2 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 + 2\gamma_5 \vec{E} \cdot \vec{B} \equiv 0 \quad (4.20)$$

o que mostra que no modelo de onda plana para campos livres os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são ortogonais entre si e de mesmo módulo.

Também, multiplicando a eq.(18) por k à esquerda, e desde que f por hipótese é um bivector não nulo, obtemos que

$$k^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0 \quad (4.21)$$

o que mostra que k é um vetor tipo-luz.

Para finalizar, observamos que $\omega = +|\vec{k}|$ ($\omega = -|\vec{k}|$) corresponde à polarização circular esquerda (direita).

POTENCIAIS – é bem conhecido que a Eletrodinâmica Clássica pode ser descrita alternativamente por potenciais vetores, outro que o bivector de campo. Tal descrição é possível devido a equação homogênea, que assegura que o rotacional do campo é nulo. Assim, devido ao fato que o rotacional do rotacional é nulo, [Zeni, 1987, pg. 111], i.e.,

$$\partial \wedge \partial \wedge A = 0 \quad (4.22)$$

para qualquer $A \in C(\mathbb{R}^{1,3})$, * podemos escrever o bivector de campo F como o rotacional de um vetor, denominado o potencial, indicado por A , i.e.:

$$F = \partial \wedge A. \quad (4.23)$$

A introdução do potencial permite várias simplificações devido a liberdade na escolha do potencial. Observe que se mudarmos o potencial pelo gradiente de uma função escalar ψ , i.e.,

$$A \longrightarrow A' = A + \partial \psi \quad (4.24)$$

o campo eletromagnético permanece inalterado, desde que o rotacional do gradiente de uma função escalar é nulo [Zeni, 1987, pg. 110].

Esta liberdade na escolha do potencial permite que possamos escolher potenciais com algumas propriedades. Por exemplo, os potenciais que tem divergência nula são ditos potenciais do calibre de Lorentz.

Sempre podemos trabalhar com potenciais do calibre de Lorentz, desde que se A é um potencial que satisfaz a equação de Maxwell e não tem divergência nula, então a transformação dada pela eq.(24) onde

$$\partial^2 \psi = -\partial \circ A \quad (4.25)$$

* este fato é algo natural se considerarmos que na álgebra exterior o produto de vetores L.D. é nulo.

resulta num potencial A' do calibre de Lorentz, e desde que o campo eletromagnético é o mesmo, A' também é solução da mesma equação de Maxwell que A .

A equação de Maxwell para o potencial é dada por:

$$\partial(\partial \wedge A) = J \quad (4.26)$$

e escrevendo $\partial \wedge A = \partial A - \partial \circ A$, vemos que se A pertence ao calibre de Lorentz, então a equação de Maxwell resulta numa equação de onda para o potencial, i.e.

$$\text{se } \partial \circ A = 0 \implies \partial^2 A = J. \quad (4.27)$$

Para finalizar esta seção observamos que a equação para o rotacional do campo é automaticamente satisfeita quando consideramos que o campo deriva de um potencial.

ENERGIA-MOMENTO-TENSÃO DO CAMPO – nesta seção discutimos a lei de conservação, na forma diferencial, da energia-momento-tensão associada ao campo eletromagnético.

Veremos que a densidade de energia-momento-tensão do campo eletromagnético é descrito por um conjunto de quatro vetores,* indicados por $S^{(\mu)}$, cujas componentes apresentam certas simetrias, i.e., a componente ν do vetor $S^{(\mu)}$ é igual a componente μ do vetor $S^{(\nu)}$,

$$S^{(\mu)\nu} = S^{(\nu)\mu} \quad (4.28)$$

Os vetores $S^{(\mu)}$ são definidos abaixo:

$$S^{(\mu)} = -(1/2) F \gamma^\mu F. \quad (4.29)$$

Podemos verificar da definição acima que $S^{(\mu)}$ satisfaz

$$S^{(\mu)*} = S^{(\mu)} ; \quad S^{(\mu)\square} = -S^{(\mu)} \quad (4.30)$$

o que nos garante que $S^{(\mu)}$ é um vetor (veja eq.(1.21)).

A expressão explícita das componentes dos vetores $S^{(\mu)}$ pode ser calculada a partir da eq.(29) [Zeni, 1987, pg. 140] e resulta em:

$$S^{(\mu)\nu} = g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu} + (1/4) g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (4.31)$$

* observamos que na formulação tensorial, a energia-momento-tensão é descrita por um tensor simétrico de 2^ª ordem, e não pode ser descrito naturalmente na álgebra de Clifford, visto que os tensores naturalmente encontrados nesta última são antissimétricos.

Em particular, $S^{(0)}$ é o “vetor” de Pointyng [Jackson, pg. 468; Landau et Lifchitz, 1975, pg. 76; Baylis].

$$S^{(0)} = 1/2(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)\gamma_0 + \vec{E} \times \vec{B} \quad (4.32)$$

cuja componente temporal é a densidade de energia associada ao campo eletromagnético, e a componente espacial representa o fluxo de energia do campo.

A lei de conservação da energia-momento-tensão do campo eletromagnético é obtida considerando a equação de Maxwell, eq.(8), e a equação obtida desta aplicando-se o antiautomorfismo principal, *, i.e., [Hestenes. 1966, pg. 31-2]

$$(\partial F)^* = J^* \implies F^* \bar{\partial} = J^* \quad (4.33)$$

onde $\bar{\partial}$ indica que o operador de Dirac atua derivando o objeto à esquerda, mas os elementos algébricos permanecem à direita, i.e.,

$$F \bar{\partial} = (\partial_\lambda F^{\mu\nu}) \gamma_{\mu\nu} \gamma^\lambda. \quad (4.34)$$

Agora, multiplicando a eq.(8) por F^* à esquerda, e a eq.(33) por F à direita, e somando as equações assim obtidas, obtemos que

$$-F \partial F - F \bar{\partial} F = J F - F J \quad (4.35)$$

onde usamos o fato que $F^* = -F \epsilon J^* = J$ (veja eq.(1.21)).

Usando a regra de Leibniz para derivação, vemos que o membro da esquerda é justo

$$2\partial_\lambda S^{(\lambda)} = -\partial_\lambda (F \gamma^\lambda F). \quad (4.36)$$

Assim, temos que a soma (subentendida na equação acima) das derivadas, ∂_λ , dos vetores $S^{(\lambda)}$ correspondente vale:

$$\partial_\lambda S^{(\lambda)} = 1/2(J F - F J). \quad (4.37)$$

O membro da direita é justo o produto interno entre o vetor corrente J e o bivector de campo F , i.e.,

$$1/2(J F - F J) = J \circ F = J_\mu F^{\mu\nu} \gamma_\nu. \quad (4.38)$$

Este produto é justo o negativo da densidade de Força de Lorentz, definido como

$$Q = F \circ J = (F^\nu_\mu J^\mu) \gamma_\nu. \quad (4.39)$$

Assim, encontramos que a lei de conservação para a densidade de momento-energia-tensão do campo eletromagnético pode ser posto na forma

$$\partial_\lambda S^{(\lambda)} = -Q \quad (4.40.a)$$

ou por componentes

$$\partial_\lambda S^{(\lambda)\mu} = -Q^\mu = -F^\mu_\nu J^\nu. \quad (4.40.b)$$

É conveniente rearranjar o membro esquerdo de forma que ele possa ser escrito como a divergência do vetor $S^{(\mu)}$, i.e.,

$$\partial_\lambda S^{(\mu)\lambda} = -Q^\mu. \quad (4.41)$$

Isso pode ser feito devido a simetria entre as componentes dos vetores $S^{(\mu)}$ (eq.(29)) [Zeni, 1987, pg. 139].

MOVIMENTO DE PARTÍCULAS CARREGADAS – o vetor densidade de corrente no caso de uma única partícula carregada, pode ser escrito em termos do vetor velocidade da partícula indicado por U , como mostrado abaixo [Barut, pg. 139; Landau e Lifschitz, 1975, pg. 70]

$$J = q \frac{\delta(x - x_s)}{\gamma} U \quad (4.42)$$

onde q é a carga da partícula, $\delta(x - x_s)$ fornece a localização da partícula (é a delta de Dirac com dimensão igual ao inverso do volume), $U = \gamma(c\gamma_0 + \vec{v})$ é a velocidade relativista da partícula e $\gamma = \gamma(v)$ é o fator de Lorentz associado a velocidade espacial da partícula eq.(3.42.b)).

No caso de uma única partícula, é conveniente integrar a força de Lorentz, eq.(39), sobre todo o espaço-tempo. Considerando a eq.(42) para a densidade de corrente J , obtemos:

$$\int F \circ J d^4x = \frac{q}{\gamma} F \circ U = \frac{q}{2\gamma} (FU - UF) \quad (4.43)$$

onde o campo F deve agora ser avaliado na posição da partícula (lembramos da função $\delta(x - x_s)$ na eq.(42)).

O movimento de uma partícula carregada sob a ação de campos eletromagnéticos é descrito pela seguinte equação:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{q}{2mc} (FU - UF) \quad (4.44)$$

onde m é a massa da partícula, c a velocidade da luz e τ é o tempo medido no referencial da partícula denominado tempo próprio (unidades C.G.S.).

Passamos agora a discutir um dos fatos principais desta tese: um novo método de solução para a eq.(44) baseado na exponenciação do bivector representando o campo eletromagnético, exponencial que pode ser feita no mesmo molde da exponencial dos geradores do grupo de Lorentz, eq.(3.23), visto que os objetos matemáticos representando o campo eletromagnético e os geradores do grupo de Lorentz são idênticos (no caso da álgebra do espaço-tempo são bivectores), [Salingaros, 1984].

Assim, a solução da equação de movimento para uma partícula carregada sob a ação de campos eletromagnéticos constantes, eq.(44), é dada através da seguinte transformação:

$$U(\tau) = e^{\alpha\tau F} U(0) e^{-\alpha\tau F} \quad (4.45)$$

onde $U(0)$ é a velocidade inicial da partícula, $\alpha = q/2mc$, e a exponencial do campo eletromagnético é dada pela eq.(3.27), que repetimos abaixo

$$e^{\alpha F \tau} = ch(\alpha z \tau) + \hat{F} sh(\alpha z \tau). \quad (4.46)$$

onde $F = z\hat{F}$, $F^2 = z^2$, $\hat{F} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} F$, $z = x + \gamma_5 y$ é dado na eq.(3.34).

Para demonstrar que a eq.(45) é realmente a solução da eq.(44) para campos constantes, i.e., $\frac{dF}{d\tau} = 0$, observamos que as derivadas das funções hiperbólicas satisfazem: [Churcill, pg. 51]

$$\frac{d ch(\alpha z \tau)}{d\tau} = \alpha z sh(\alpha z \tau); \quad \frac{d sh(\alpha z \tau)}{d\tau} = \alpha z ch(\alpha z \tau). \quad (4.47)$$

Assim, segue que

$$\frac{d e^{\alpha F \tau}}{d\tau} = \alpha F e^{\alpha F \tau}. \quad (4.48)$$

Portanto, derivando a eq.(45) em relação a τ e usando a regra de Leibniz obtemos que:

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{de^{\alpha F\tau}}{d\tau} \right) U(0)e^{-\alpha F\tau} + e^{\alpha F\tau} U(0) \left(\frac{de^{-\alpha F\tau}}{d\tau} \right) \quad (4.49)$$

e usando a eq.(47) para a derivada da exponencial obtemos a eq.(44), i.e.,

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \alpha(FU - UF). \quad (4.50)$$

A solução para $U(\tau)$, eq.(45), pode ser explicitada em termos das componentes do campo $F = (\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\gamma_0$ e da velocidade $U = u_0\gamma_0 + \vec{u}$, assim como realizado na eq.(3.32), onde agora as substituições necessárias são a troca do argumento das funções trigonométricas e hiperbólicas, i.e., devemos substituir $z = x + iy$ por $\alpha z\tau = \alpha x\tau + i\alpha y\tau$, onde $\alpha = q/2mc$, de modo que a eq.(3.32) seja a solução para $U(\tau)$.

A analogia entre os geradores do grupo de Lorentz e o campo eletromagnético é muito significativa, e merece ser discutida um pouco mais. Observamos que o campo elétrico, i.e., a componente temporal do bivector de campo eletromagnético está associado aos geradores de boost, enquanto que por outro lado, o campo magnético, a componente espacial do bivector de campo eletromagnético, está associado aos geradores de rotação espacial (veja eq.(3.19')). Tais relações tem uma interpretação física direta, pois sabemos que uma partícula carregada sob a ação de um campo magnético constante efetua uma rotação no plano ortogonal ao campo magnético, enquanto que sob a ação de um campo elétrico constante a partícula sofre uma aceleração na direção do campo elétrico.

Podemos dizer que o campo eletromagnético está associado a uma transformação dinâmica, outra que as transformações cinemáticas inerentes ao grupo de Lorentz. Estas transformações dinâmicas são concebidas como uma sequência de transformações cinemáticas que levam a partícula (ou o referencial a ela associado)* de um ponto ao ponto infinitesimalmente próximo a este (pontos sobre a trajetória da partícula, dita linha do universo da partícula [Zeni e Rodrigues, 1991]).

No caso do campo constante, essas transformações cinemáticas são todas idênticas, i.e. independem do ponto onde a partícula está, e a transformação

* podemos associar a partícula em cada instante um referencial inercial instantâneo (irif) [Zeni e Rodrigues, 1991.]

dinâmica pode ser obtida através de um parâmetro relacionado ao comprimento de arco ao longo da trajetória da partícula. Este parâmetro pode ser o tempo próprio.

APROXIMAÇÃO NÃO RELATIVISTA - A equação da Força de Lorentz, eq.(44), pode ser dividida em componente temporal, que fornece a variação da carga da partícula sob a ação do campo eletromagnético, e componente espacial, que é a lei da força de Lorentz originalmente formulada. Para fazer tal composição necessitamos expressar a força de Lorentz, eq.(44), em componentes temporal e espacial, veja eq.(3.31), como mostrado abaixo* [Zeni 1987, pg. 137]

$$1/2(FU - UF) = \gamma \{ c\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{E})\gamma_0 \}. \quad (4.51)$$

Assim, a eq.(44) pode ser decomposta em duas equações, dadas por**

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{d\tau} = q\gamma \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (4.52.a)$$

$$\frac{d(\gamma m\vec{v})}{d\tau} = q\gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \quad (4.52.b)$$

Considerando o tempo no referencial do laboratório, indicado por t , podemos mostrar que [Jackson, pg. 400-1; Landau e Lifchitz, 1975, pg. 8]

$$\gamma d\tau = dt \quad (4.53)$$

e assim as equações acima podem ser escritas em termos do tempo no referencial de laboratório, [Jackson, pg. 441].

Também, da eq.(52) é fácil concluir as equações não relativistas, obtidas considerando que $v/c \ll 1$, i.e.,

$$\gamma \vec{v} \longrightarrow \vec{v} \quad ; \quad \gamma c^2 \longrightarrow c^2 + \frac{v^2}{2}. \quad (4.54)$$

desde que γ é dado pela eq.(3.42.b).

Assim, as equações não relativistas são dadas por:

$$\frac{dT}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \quad ; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \quad (4.55)$$

* O cálculo é análogo ao efetuado no Apêndice A, eq.(A.3) e subsequentes.

** para soluções particulares destas equações, veja [Landau e Lifschitz, 1975, pg. 52-59].

onde $T = \frac{mv^2}{2}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$, são a energia e momento, não relativísticos, da partícula.

CAPÍTULO V

A FORMULAÇÃO MATRICIAL DA FORÇA DE LORENTZ E O GRUPO $SO_+(1,3)$

No último capítulo mostramos que o movimento de uma partícula carregada sob a ação da Força de Lorentz, eq.(4.44), pode ser determinado por transformações de Lorentz cujos geradores estão diretamente relacionados ao campo eletromagnético, eq.(4.45).

A força de Lorentz, discutida no capítulo anterior através da álgebra do espaço-tempo, eq.(4.39) e eq.(4.43) (veja também a formulação vetorial, eq.(4.51) e eq.(4.52)), pode ser escrita na forma matricial considerando que as componentes do vetor relativista, $U = U^\alpha \gamma_\alpha$, formam uma matriz coluna 4×1 , i.e.,

$$U = [U]^\alpha = \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

e que as componentes do campo eletromagnético, $F = F^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha$, formam uma matriz antissimétrica quando multiplicada pela matriz métrica

$$g = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)^*$$

Explicitamente a matriz que estamos considerando para o campo eletromagnético, indicada por F ou $[F]^\alpha_\beta$, é mostrada abaixo

$$F = [F]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

* observe que usamos as componentes do tensor de campo na forma mista, um índice covariante e um índice contravariante. Lembramos também do balanceamento de índices $F^\alpha_\beta = g_{\mu\beta} F^{\alpha\mu}$.

Com as considerações acima, as equações de movimento para uma partícula carregada assumem a seguinte forma (cf. eq.(4.44) e eq.(4.52))

$$\frac{dU}{d\tau} = aFU \quad (5.3)$$

onde $a = \frac{q}{mc}$ é uma constante, q é a carga da partícula, m sua massa e c a velocidade da luz (unidades C.G.S.).

O método usual de solução da eq.(3) é discutido no apêndice E (Equação Secular).

O GRUPO $SO_+(1,3)$ · vimos no capítulo II que as transformações de Lorentz podem ser representadas por matrizes reais 4×4 satisfazendo a eq.(2.13) que define o grupo $O(1,3)$. Além dessa condição é possível mostrar que as matrizes 4×4 associadas a transformações de Lorentz satisfazem duas outras equações, eq.(2.15) e eq.(2.16). Ressaltamos no capítulo II que nosso interesse residia na componente conexa a identidade do grupo de Lorentz, que define o grupo $SO_+(1,3)$, i.e. as matrizes que satisfazem

$$A^t g A = g \quad ; \quad \det A = +1, \quad A_{00} \geq 1 \quad (5.4)$$

onde A_{00} indica o elemento da primeira coluna e primeira linha da matriz A .

O especial interesse nessas matrizes é que elas podem ser obtidas por exponenciação dos geradores do grupo de Lorentz, i.e. por exponenciação de elementos da álgebra de Lie associada ao grupo, sendo que os geradores são representados por matrizes reais 4×4 que são antissimétricas quando multiplicadas pela matriz métrica. (Veja eq.(2.17)), cuja expressão mais geral é dada pela eq.(2), ou seja, os geradores do grupo de Lorentz são representados pela mesma matriz que o campo eletromagnético!

De outro modo, a matriz do campo eletromagnético representa um gerador genérico do grupo de Lorentz, os geradores padrões são obtidos fazendo todos os $E_i = B_i = 0$, menos um deles [Jackson, pg. 415-417].

Assim, efetuar a exponencial dos geradores do grupo de Lorentz equivale a exponenciar o campo eletromagnético, e como já foi discutido na introdução desta monografia e no capítulo IV, a exponencial do campo eletromagnético fornece a solução da equação de movimento para uma partícula carregada, eq.(5.3), desde

que a exponencial da matriz de campo F , parametrizada pelo tempo próprio (e incluindo a constante a), i.e.

$$e^{aF\tau} = 1 + aFT + \frac{(aF\tau)^2}{2} + \dots \quad (5.5)$$

satisfaz a seguinte regra de derivação

$$\frac{de^{aF\tau}}{d\tau} = aF e^{aF\tau} \quad (5.6)$$

obtida diretamente da expansão em série.

Nosso trabalho neste capítulo se resume a efetuar a exponenciação da matriz dada pela eq.(2), i.e. escrever a série da exponencial numa forma finita. Para tanto é necessário obter uma relação de recorrência para as potências da matriz F .

Observamos que apesar de termos fechado a série para a exponencial dos geradores do grupo $Spin_+(1,3) \sim SL(2, \mathcal{C})$, que é o grupo de recobrimento universal (duplo) do grupo $SO_+(1,3)$, não é trivial obter a relação de recorrência para as potências dos geradores do grupo $SO_+(1,3)$ (cf. as leis de transformação eq.(2.1) e eq.(2.19)). Lembramos neste ponto o comentário feito na introdução de que o produto invariante da representação é o produto de Lie, que é o comutador do produto matricial (veja as relações de comutação características do grupo de Lorentz em qualquer representação, eq.(3.20)). Por outro lado, o produto envolvido na série exponencial, i.e. as potências F^n do gerador, é o produto matricial que depende da representação que estamos usando.

O fato de termos fechado a série para o grupo $Spin_+(1,3) \sim SL(2, \mathcal{C})$, nos fornece uma visão do resultado final para o grupo $SO_+(1,3)$ através do vetor transformado eq.(3.32), que mostra as componentes da matriz exponencial, e^F , onde reconhecemos que a variável complexa, $z = x + iy$ (eq.(3.34)) desempenha um papel fundamental. Entretanto, não é possível de uma primeira análise da eq.(3.32) nem mesmo expressar a exponencial de F em termos das primeiras potências de F .

A chave que nos permitiu encontrar uma relação de recorrência entre as potências da matriz F e consequentemente fechar a série da exponencial de F foi a introdução da matriz dual de F , indicada por G (dual de Hodge) [Jackson, pg. 425], e definida como sendo a matriz obtida da matriz F , eq.(2), trocando $E_i \longrightarrow B_i$ e

$B_i \longrightarrow -E_i$, i.e., (cf. eq.(4.12))

$$G = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

A matriz dual é necessária para expressar a terceira potência da matriz F , F^3 como discutido a seguir.

Ao invés de trabalharmos com a matriz F explicitamente é conveniente nos cálculos usar as componentes. Assim, a matriz F , eq.(2), pode ser resumida do seguinte modo

$$[F]^\alpha_\alpha = 0 \quad ; \quad [F]^\alpha_j = [F]^\alpha_0 = E^j \quad (5.8.a)$$

$$[F]^\alpha_j = -[F]^\alpha_i = \varepsilon_{ijk} B^k. \quad (5.8.b)$$

Em relação a simetria da matriz F , dizemos que F é diagonal nula, simétrica nas componentes temporais e antissimétricas no bloco espacial.

Calculando a segunda potência da matriz F , F^2 , encontramos que:

$$[F^2]^\alpha_\beta = [F]^\alpha_\mu [F]^\mu_\beta \quad (5.9.a)$$

$$[F^2]^\alpha_0 = |\vec{E}|^2 \quad (5.9.b)$$

$$[F^2]^\alpha_K = -[F^2]^\alpha_0 = -\varepsilon_{ijk} E_i B^j \quad (5.9.c)$$

$$[F^2]^\alpha_j = E_i E_j + B_i B_j - |\vec{B}|^2 \delta_{ij} \quad (5.9.d)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kroenecker.

Observamos que a matriz F^2 tem simetria oposta a de F : as componentes temporais $[F^2]^\alpha_K$ e $[F^2]^\alpha_0$ são antissimétricas, enquanto que as componentes espaciais $[F^2]^\alpha_j$ são simétricas. Além do mais F^2 apresenta elementos não nulos na diagonal.

Uma rápida análise mostra o seguinte resultado sobre a simetria das componentes das potências F^n : todas as potências ímpares (pares) de F tem a mesma simetria de F (F^2). Note que a matriz dual G tem a mesma simetria da matriz F , e que a matriz identidade 4×4 , indicada por $\mathbb{1}$, tem de certo modo a mesma simetria de F^2 .

Desde que F^3 tem a mesma simetria que F os elementos diagonais são nulos, i.e. $[F^3]^\alpha_\alpha = 0$. As componentes temporais são simétricas, $[F^3]^0_j = [F^3]^j_0$, enquanto que as componentes espaciais são antissimétricas, $[F^3]^i_j = -[F^3]^j_i$.

A terceira potência da matriz F pode ser calculada como o produto de F por F^2 , ou seja

$$[F^3]^\alpha_\beta = [F^2]^\alpha_\mu [F]^\mu_\beta \quad (5.10.a)$$

e assim, encontramos que:

$$[F^3]^0_j = (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)E_j + (\vec{E} \cdot \vec{B})B_j \quad (5.10.b)$$

$$[F^3]^i_j = \{(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)B_k - (\vec{E} \cdot \vec{B})E_k\}\epsilon_{ijk} \quad (5.10.c)$$

Agora, lembrando da definição da matriz F , eq.(2), e da matriz dual G , eq.(7) podemos expressar F^3 em termos destas últimas, como mostramos abaixo

$$F^3 = (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)F + (\vec{E} \cdot \vec{B})G. \quad (5.11)$$

Observamos que o produto de F pelo seu dual G resulta em um múltiplo da matriz identidade 4×4 [Van Wick] *

$$FG = GF = (\vec{E} \cdot \vec{B})\mathbb{1} \quad (5.12)$$

Da propriedade eq.(12) da matriz dual G é claro que qualquer potência da matriz F pode ser escrita em termos de $\mathbb{1}$, F , F^2 e G , ou seja a relação de recorrência começa em F^3 . Por exemplo, a quarta potência é obtida multiplicando a eq.(11) por F

$$F^4 = (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)F^2 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \mathbb{1} \quad (5.13)$$

* Além disso, G^2 está relacionado a F^2 do seguinte modo (cf. eq.(9))

$$G^2 = F^2 - (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)\mathbb{1}$$

e a quinta potência é dada por

$$F^5 = (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)F^3 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 F \quad (5.14)$$

e substituindo para F^3 a eq.(11) obtemos:

$$F^5 = \{(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)^2 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2\} F + (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)(\vec{E} \cdot \vec{B}) G. \quad (5.15)$$

Para obter uma fórmula de recorrência mais facilmente, é conveniente utilizar as variáveis $z = x + iy$, definidas na eq.(3.34) (veja também eq.(3.13)). Assim, é possível escrever

$$xy = \vec{E} \cdot \vec{B}, \quad x^2 - y^2 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2. \quad (5.16)$$

Agora, multiplicando cada potência de F por $|z|^2$ obtemos o seguinte quadro

$$\begin{aligned} |z|^2 F^3 &= (x^4 - y^4)F + (x^2 + y^2)xy G \\ |z|^2 F^4 &= (x^4 - y^4)F^2 + (x^2 + y^2)(xy)^2 \mathbb{I} \\ |z|^2 F^5 &= (x^6 + y^6)F + (x^4 + y^4)xy G \\ |z|^2 F^6 &= (x^6 + y^6)F^2 + (x^4 + y^4)(xy)^2 \mathbb{I} \end{aligned} \quad (5.17)$$

e assim por diante, obtendo a seguinte lei de recorrência (pode ser mostrada por indução finita considerando as eq.(11) e eq.(12), [Zeni e Rodrigues, 1991.a]).

Potências Pares $n \geq 2$

$$|z|^2 F^{2n} = [x^{2n} + (-1)^{n+1} y^{2n}] F^2 + [x^{2(n-1)} + (-1)^n y^{2(n-1)}] (xy)^2 \mathbb{I} \quad (5.18.a)$$

Potências Ímpares $n \geq 2$

$$|z|^2 F^{2n-1} = [x^{2n} + (-1)^{n+1} y^{2n}] F + [x^{2(n-1)} + (-1)^n y^{2(n-1)}] (xy) G. \quad (5.18.b)$$

Considerando, por exemplo, como válida a relação de recorrência para as potências ímpares, basta multiplicar por F para obter a relação de recorrência para as potências pares. O caminho inverso também é possível, mas exige algumas

passagens.

Considerando a série para a exponencial da matriz F eq.(5), observamos que temos quatro séries em x e y , cada uma sendo o coeficiente das matrizes $\mathbb{I}$, F , F^2 e G .

As séries (todos os coeficientes multiplicados por $|z|^2$) são as seguintes:

Série dos coeficientes da identidade $\mathbb{I}$

$$x^2 + y^2 + (xy)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[x^{2(n-1)} + (-1)^n y^{2(n-1)}]}{(2n)!} = x^2 \cos y + y^2 \operatorname{ch} x \quad (5.19.a)$$

Série dos coeficientes de F^2

$$\frac{(x^2 + y^2)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[x^{2n} + (-1)^{n+1} y^{2n}]}{(2n)!} = \operatorname{ch} x - \cos y \quad (5.19.b)$$

Série dos coeficientes de F

$$(x^2 + y^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[x^{2n} + (-1)^{n+1} y^{2n}]}{(2n-1)!} = x \operatorname{sh} x + y \operatorname{sen} y \quad (5.19.c)$$

Série dos coeficientes do dual G

$$(xy) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[x^{2(n-1)} + (-1)^n y^{2(n-1)}]}{(2n-1)!} = y \operatorname{sh} x - x \operatorname{sen} y. \quad (5.19.d)$$

Observamos que o termo $(x^2 + y^2)$ antes do somatório presentes na série da identidade $\mathbb{I}$, F e F^2 provém da primeira ocorrência destas matrizes na série da e^F multiplicada por $|z|^2 = x^2 + y^2$, antes de utilizarmos as relações de recorrência para as potências superiores, eq.(18). Note que a primeira ocorrência do dual é na expressão de F^3 .

Assim, a série para a exponencial da matriz F pode ser escrita na seguinte forma fechada, [Zeni e Rodrigues, 1990.a]:

$$e^F = \frac{x^2 \cos y + y^2 \operatorname{ch} x}{x^2 + y^2} \mathbb{I} + \frac{x \operatorname{sh} x + y \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} F +$$

$$+ \frac{ch x - \cos y}{x^2 + y^2} F^2 + \frac{y sh x - x \sin y}{x^2 + y^2} G. \quad (5.20)$$

A expressão explícita da matriz e^F , ou de suas componentes pode ser obtida considerando as expressões para as matrizes F , eq.(2), G , eq.(7) e F^2 , eq.(9).

BOOSTS E ROTAÇÕES – vamos considerar alguns casos particulares da eq.(20), que são as matrizes correspondentes a boosts e rotações (cf. eq.(3.37) e eq.(3.41)).

Boosts – são transformações cujo gerador é uma combinação linear exclusiva dos geradores de boost, obtido da eq.(2) fazendo-se todos os $B_i = 0$.

Escrevendo $z = \nu$ (real), $y = 0$, $F = \nu V$, onde V é uma matriz 4×4 cujas componentes $[V]_j^0$ são as componentes de um vetor unitário na direção da velocidade relativa. Assim, obtemos da eq.(20) que:

$$B = e^{\nu V} = \mathbb{1} + V sh \nu + (ch \nu - 1)V^2. \quad (5.21)$$

O parâmetro ν é a rapidez da transformação (veja eq.(3.42)).

O vetor transformado, $U' = BU$, pelo boost foi dado na eq.(3.43); basta trocar 2ν por ν .

Rotações – uma rotação é uma transformação cujo gerador é combinação linear dos geradores de rotação [Jackson, pg. 415], ou seja, o gerador é obtido da eq.(2) fazendo-se todos os $E_i = 0$. Escrevendo $z = i\theta (= iy)$, $x = 0$, $F = \theta N$, onde N é uma matriz 4×4 cujas componentes $[N]_j^i$ ($i \neq j$) são as componentes do vetor unitário que define o eixo da rotação.

Assim, da eq.(20) segue que:

$$R = e^{\theta N} = \mathbb{1} + N \sin \theta + (1 - \cos \theta)N^2 \quad (5.22)$$

onde θ é o ângulo da rotação.

O vetor transformado por uma rotação pode ser visto na eq.(3.38), trocando 2θ por θ .

A solução das equações, eq.(3), de Movimento de uma partícula carregada, conforme discutido nas eq.(5) e eq.(6), é dada pela exponencial do campo parametrizada

pelo tempo próprio, i.e.

$$U(\tau) = e^{aF\tau} U(0) \quad (5.23)$$

onde U_0 é a velocidade inicial, $a = \frac{q}{mc}$ e τ é o tempo próprio (veja eq.(3)).

Em relação a forma finita, eq.(20), para a exponencial, as únicas alterações necessárias são a mudança de argumentos das funções trigonométricas e hiperbólicas, i.e., $e^{aF\tau}$ é obtido da eq.(20) trocando-se

$$\begin{aligned} \cos y &\text{ por } \cos(ay\tau), \quad \sin y &\text{ por } \sin(ay\tau) \\ ch x &\text{ por } ch(ax\tau), \quad sh x &\text{ por } sh(ax\tau) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Observamos que os coeficientes das funções não são alterados.

A solução para o vetor velocidade relativista $U(\tau)$ é explicitada abaixo dividindo as componentes do vetor relativista em componente temporal, $U_0(\tau)$, e componentes espaciais, $\vec{U}(\tau)$, (cf. eq.(3.32)).

A componente temporal, $U_0(\tau)$ é dada por

$$U_0(\tau) = \begin{cases} \frac{\cos(ya\tau)}{x^2 + y^2} \left\{ [x^2 + y^2 - (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)]U_0/2 + (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{U} \right\} + \\ \frac{\text{sen}(ya\tau)}{x^2 + y^2} \{ (y\vec{E} - x\vec{B}) \cdot \vec{U} \} + \\ \frac{\text{sh}(xa\tau)}{x^2 + y^2} \{ (x\vec{E} + y\vec{B}) \cdot \vec{U} \} + \\ \frac{\text{ch}(xa\tau)}{x^2 + y^2} \left\{ (x^2 + y^2 + |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)U_0/2 - (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{U} \right\} \end{cases} \quad (5.25.a)$$

Componentes espaciais do vetor transformado

$$\vec{U}(\tau) = \begin{cases} \frac{\cos(ya\tau)}{x^2 + y^2} \left\{ (x^2 + y^2 + |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)U_0/2 - (\vec{E} \times \vec{B})U_0 \right. \\ \quad \left. - (\vec{E} \cdot \vec{U})\vec{E} - (\vec{B} \cdot \vec{U})\vec{B} \right\} + \\ \frac{\text{sen}(ya\tau)}{x^2 + y^2} \{ (y\vec{E} - x\vec{B})U_0 - (x\vec{E} + y\vec{B}) \times \vec{U} \} + \\ \frac{\text{sh}(xa\tau)}{x^2 + y^2} \{ (x\vec{E} + y\vec{B})U_0 + (y\vec{E} - x\vec{B}) \times \vec{U} \} + \\ \frac{\text{ch}(xa\tau)}{x^2 + y^2} \left\{ [x^2 + y^2 - (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)]\vec{U}_0/2 + (\vec{E} \times \vec{B})U_0 \right. \\ \quad \left. + (\vec{E} \cdot \vec{U})\vec{E} + (\vec{B} \cdot \vec{U})\vec{B} \right\} \end{cases} \quad (5.25.b)$$

APÊNDICE A

Alguns detalhes do cálculo para o vetor transformado que resultou na eq. (3.32), (cf. a discussão em [Zeni e Rodrigues, 1991], seção 6).

Partimos da eq. (3.29) e vamos calcular separadamente os seguintes termos

$$- \hat{F}U\hat{F} |shz|^2 \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{F}U sh \bar{z} ch z - U\hat{F} shz ch \bar{z} \quad (\text{A.2})$$

Inicialmente vamos mostrar o resultado citado no texto de que a eq.(A.2) resulta na eq.(3.30).

Vamos fazer o cálculo para o primeiro termo da eq.(A.2) que pode ser escrito como

$$\hat{F}U sh \bar{z} ch z = 1/2[(\hat{F}U - U\hat{F}) + (\hat{F}U + U\hat{F})] sh \bar{z} ch z \quad (\text{A.3})$$

Agora, as partes antissimétricas do produto entre um vetor, U , e um bivector, $\hat{F}$, são respectivamente um vetor e um trivector, (veja eq.(1.29). Assim, para obter um vetor da eq.(A.3) devemos multiplicar o vetor resultante do produto $\hat{F}U$ pela parte escalar da função $sh \bar{z} ch z$, o trivector pela parte pseudoescalar.*

Lembrando que [Churchill, pg. 51-2]**

$$sh \bar{z} ch z = 1/2(sh 2x - \gamma_5 \sen 2y) \quad (\text{A.4})$$

Portanto, das considerações acima, a contribuição da eq.(A.3) para o vetor transformado é

$$1/4(\hat{F}U - U\hat{F})sh 2x - 1/4(\hat{F}U + U\hat{F})\gamma_5 \sen 2y \quad (\text{A.5})$$

e notando que γ_5 anticomuta com vetores, U , e comuta com bivectores, $\hat{F}$, o sinal do segundo termo está de acordo com a eq.(3.30).

* não necessitamos calcular as componentes que não sejam vetores, pois elas se anulam quando consideramos todas as contribuições para o vetor transformado, eq.(3.28).

** lembramos que γ_5 é a unidade imaginária, veja eq.(3.8).

Cada um dos termos na eq.(A.2) tem exatamente a mesma contribuição para o vector transformado, conforme podemos verificar adotando um procedimento análogo para calcular o termo $-U\hat{F}shzch\bar{z}$.

Para o que se segue, é conveniente escrever a eq.(A.1) e eq.(3.30) (esta última é o dobro da eq.(A.5)) em termos de $F' = z\hat{F}$, outro que $\hat{F}' = \bar{z}F/|z|^2$. Assim, ficamos com as seguintes equações

$$-FUF\left|\frac{shz}{z}\right|^2 \quad (A.6)$$

$$1/2(\bar{z}FU - zUF)\frac{sh2x}{|z|^2} \quad (A.7a)$$

$$1/2\gamma_5(\bar{z}FU + zUF)\frac{sen2y}{|z|^2} \quad (A.7b)$$

A seguir calculamos os termos relevantes de cada equação, em termos das componentes de z, F e U dados na eq.(3.31). Começando pela eq.(A.7a) e eq.(A.7b) que diferem apenas por um sinal, obtemos

$$(\bar{z}FU \pm zUF) = \begin{cases} (x - \gamma_5 y)(\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\gamma_0(u_0\gamma_0 + \vec{u}) \\ \pm(x - \gamma_5 y)(u_0\gamma_0 + \vec{u})(\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\gamma_0 \end{cases} \quad (A.8)$$

É conveniente separar a contribuição deste termo em duas partes: a que contém $u_0\gamma_0$, dada por

$$u_0\{(x - \gamma_5 y)(\vec{E} + \gamma_5 \vec{B}) \pm (x + \gamma_5 y)(-\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\} \quad (A.9)$$

onde usamos o fato que $\gamma_0^2 = 1$, e γ_0 anticomuta com γ_5 e γ_i (e portanto com $\vec{E}$ e $\vec{B}$).

Assim, obtemos para o sinal — proveniente da eq.(A.7a),

$$2u_0(x\vec{E} + y\vec{B}) \quad (\text{A.10a})$$

enquanto que para o sinal +, proveniente da eq.(A.7b),

$$2u_0\gamma_5(-y\vec{E} + x\vec{B}) \quad (\text{A.10b})$$

A parte da eq.(A.8) que contem o vetor $\vec{u}$ pode ser posta na seguinte forma

$$x\{(-\vec{E}\vec{u} \pm \vec{u}\vec{E}) + \gamma_5(-\vec{B}\vec{u} \mp \vec{u}\vec{B})\}\gamma_0 \quad (\text{A.11})$$

$$+ y\gamma_5\{(-\vec{E}\vec{u} \pm \vec{u}\vec{E}) + \gamma_5(\vec{B}\vec{u} \mp \vec{u}\vec{B})\}\gamma_0$$

onde usamos o fato de que γ_0 e γ_5 anticomutam com o vetor $\vec{u}$.

Lembrando que o produto entre dois vetores que só tem componentes espaciais é dado pela eq.(3.9)

$$\vec{u}\vec{E} = -\vec{u} \cdot \vec{E} - \gamma_5(\vec{u} \times \vec{E})\gamma_0$$

obtemos para o sinal inferior da eq.(A.11) proveniente da eq.(A.7a)

$$2x\{(\vec{u} \cdot \vec{E})\gamma_0 + \vec{u} \times \vec{B}\} - 2y\{\vec{u} \times \vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{B})\gamma_0\} \quad (\text{A.12a})$$

Para o sinal superior da eq.(A.11), proveniente da eq.(A.7b), obtemos

$$2x\gamma_5\{-\vec{u} \times \vec{E} + (\vec{u} \cdot \vec{B})\gamma_0\} - 2y\gamma_5\{(\vec{u} \cdot \vec{E})\gamma_0 + \vec{u} \times \vec{B}\} \quad (\text{A.12b})$$

Considerando as eq.(10.a e b) e eq.(12.a e b) juntamente com as eq.(7.a e b) encontramos os termos em $\text{sh } 2x$ e $\text{sen } 2y$ na eq.(3.32).*

Vamos agora calcular o termo $-FUF$ da eq.(A.6)

$$-FUF = -(\vec{E} + \gamma_5\vec{B})\gamma_0(u_0\gamma_0 + \vec{u})(\vec{E} + \gamma_5\vec{B})\gamma_0. \quad (\text{A.13})$$

Novamente separando em duas partes a contribuição deste termo, obtemos para a parte que contém $u_0\gamma_0$

$$-u_0(\vec{E} + \gamma_5\vec{B})^2\gamma_0. \quad (\text{A.14})$$

* Note o fator γ_5 na eq.(A.7b), eq.(10.b) e eq.(12.b). Lembramos que $\gamma_5^2 = -1$.

Efetutando o produto, temos que:

$$u_0\{(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)\gamma_0 + 2\vec{E} \times \vec{B}\} \quad (\text{A.15})$$

onde $|\vec{E}|^2 \geq 0$ é a norma euclidiana de vetores espaciais.

A parte que contém o vetor $\vec{u}$ pode ser escrita como

$$(\vec{E} + \gamma_5 \vec{B})\vec{u}(-\vec{E} + \gamma_5 \vec{B}) \quad (\text{A.16})$$

onde eliminamos γ_0 , $\gamma_0^2 = +1$, através de suas propriedades de anticomutação com $\vec{u}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ e γ_5 .

Expandindo a eq.(A.16) obtemos

$$-(\vec{E}\vec{u}\vec{E} + \vec{B}\vec{u}\vec{B}) + \gamma_5(\vec{E}\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u}\vec{E}). \quad (\text{A.17})$$

Usando o fato de que a parte simétrica do produto entre dois fatores é o produto interno, podemos escrever:

$$\vec{E}\vec{u} = -2(\vec{u} \cdot \vec{E}) - \vec{u}\vec{E}$$

e assim obtemos para o primeiro termo entre parênteses na eq.(A.17)

$$2\{(\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{B}\} - \vec{u}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \quad (\text{A.18})$$

Vamos demonstrar a seguir que o segundo termo da eq.(A.17) resulta na seguinte expressão

$$-2\vec{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})\gamma_0. \quad (\text{A.19})$$

Inicialmente, notamos que

$$-\vec{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = +\vec{E} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{E} \times \vec{u}). \quad (\text{A.20})$$

O procedimento para a demonstração é expandir o produto interno e vetorial como as partes simétricas e antissimétricas do produto de Clifford de vetores espaciais, i.e.,

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = -1/2(\vec{u}\vec{E} + \vec{E}\vec{u})$$

$$\vec{u} \times \vec{E} = 1/2\gamma_5(\vec{u}\vec{E} - \vec{E}\vec{u})\gamma_0.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) &= 1/2 \{ \vec{E}(\vec{u} \times \vec{B}) + (\vec{u} \times \vec{B})\vec{E} \} = \\ &+ 1/4\gamma_5 \{ \vec{E}(\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u}) + (\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u})\vec{E} \} \gamma_0.\end{aligned}\tag{A. 21}$$

Analogamente, encontramos que

$$\vec{B} \cdot (\vec{E} \times \vec{u}) = 1/4\gamma_5 \{ \vec{B}(\vec{E}\vec{u} - \vec{u}\vec{E}) + (\vec{E}\vec{u} - \vec{u}\vec{E})\vec{B} \} \gamma_0.\tag{A.22}$$

Somando as eq.(A.21) e eq.(A.22), obtemos

$$\begin{aligned}-2\vec{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= 1/2\gamma_5 (\vec{E}\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u}\vec{E})\gamma_0 + \\ &+ 1/4\gamma_5 \{ (\vec{B}\vec{E} - \vec{E}\vec{B})\vec{u} + \vec{u}(\vec{B}\vec{E} - \vec{E}\vec{B}) \} \gamma_0.\end{aligned}\tag{A. 23}$$

Agora o último termo da equação acima é justo

$$-\vec{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{u} \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$$

conforme se verifica da eq.(A.21).

Portanto, a eq.(A.23) resulta em:

$$-\vec{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = 1/2\gamma_5 (\vec{E}\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u}\vec{E})\gamma_0 \quad \text{c.q.d.}$$

APÊNDICE B

A ÁLGEBRA DE PAULI

A álgebra de Pauli é a álgebra de Clifford geradas pelos vetores do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Escolhendo uma base ortonormal de vetores para o $\mathbb{R}^3$, indicada por $\{\sigma_i\}$, o produto de Pauli (ou produto de Clifford da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$) entre estes vetores é definido por (cf. eq.(1.7)):

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \quad (\text{B.1})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kroenecker, associado a métrica euclidiana, $g = \text{diag}(+1, +1, +1)$.

O espaço vetorial da álgebra de Pauli é isomorfo ao espaço vetorial da álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^3)$ e portanto tem dimensão, sobre os reais, igual a $2^3 = 8$ (veja eq.(1.5)). Cada número de Pauli pode ser escrito como:

$$P = x + a^i \sigma_i + a^{ij} \sigma_i \sigma_j + y \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (\text{B.2})$$

onde x, a^i, a^{ij} e y são números reais, a soma sobre índices repetidos está subentendida e os índices duplos estão restritos a $i < j$.

No apêndice C mostramos explicitamente que a álgebra de Pauli é isomorfa a álgebra das matrizes complexas 2×2 , indicadas por $\mathcal{C}(2)$, i.e. $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \sim \mathcal{C}(2)$. Para tanto erguemos uma representação matricial para a álgebra de Pauli. Intrinsecamente este isomorfismo pode ser visto notando que a unidade pseudoescalar da álgebra de Pauli, definida por $i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ (cf. eq.(1.15)), comuta com todos os vetores σ_i , e portanto com qualquer número de Pauli (cf. eq.(1.31.a)), i.e. $\forall P \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$

$$i P = P i. \quad (\text{B.3})$$

Também, da eq.(B.1) temos que (cf. eq.(1.33)):

$$i^2 = -1. \quad (\text{B.4})$$

Além disso, por causa da dualidade de Hodge, o produto de qualquer bivector de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, como o termo $a^{ij}\sigma_i\sigma_j$, na eq.(B.2), pode ser expresso como o produto da unidade pseudoescalar $\mathbf{i}$ por um vetor (cf. eq.(1.14)). Em particular, temos que:

$$\sigma_i\sigma_j = \mathbf{i}\sigma_k\varepsilon_{ijk} \quad (\text{B.5})$$

onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita, completamente antissimétrico nos índices i, j, k .

Assim, podemos pensar na álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ sobre os complexos, onde $\mathbf{i} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ é a unidade imaginária. Esta visão torna possível a seguinte simplificação: todo número de Pauli, $P \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, pode ser expresso como a soma de um número (escalar) complexo w , e um vetor complexo, $\vec{H}$, i.e.,

$$P = w + \vec{H} = (x + \mathbf{i}y) + (\vec{K} + \mathbf{i}\vec{\ell}) \quad (\text{B.6})$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $\vec{K}, \vec{\ell} \in \mathbb{R}^3$.

Outra forma de expressar um vetor complexo é através de suas componentes complexas:

$$\vec{H} = H^j\sigma_j = (K^j + \mathbf{i}\ell^j)\sigma_j. \quad (\text{B.7})$$

O produto de dois números de Pauli, $P = w + \vec{H}$ e $Q = z + \vec{F}$, é dado por:

$$PQ = (w + \vec{H})(z + \vec{F}) = wz + w\vec{F} + z\vec{H} + \vec{H}\vec{F}. \quad (\text{B.8})$$

Os três primeiros termos envolvem somente o produto de números complexos. O último termo envolve o produto de Pauli de dois vetores, um produto não comutativo, dado por:

$$\vec{H}\vec{F} = \vec{H} \cdot \vec{F} + \mathbf{i}\vec{H} \times \vec{F} \quad (\text{B.9})$$

onde os produtos interno, $\cdot$, e vetorial, $\times$, de vetores complexos são generalizações dos respectivos produtos entre vetores euclidianos, só que agora trabalhamos com componentes complexas, i.e.:

$$\vec{H} \cdot \vec{F} = H_i F_i ; \quad \vec{H} \times \vec{F} = \varepsilon_{ijk} H_i F_j \sigma_k. \quad (\text{B.10})$$

De outro modo, o produto interno (vetorial) é a parte simétrica (antissimétrica) do produto de Pauli de dois vetores.

Destacamos que a subálgebra par da álgebra de Pauli, veja eq.(1.11), é isomorfa a

álgebra dos quaternions. A subálgebra par, $C^+(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{H}$, é formada pelos números de Pauli que são a soma de um escalar real com um vetor imaginário (um bivector, veja eq.(B.5)).

Discutimos agora os morfismos existentes na álgebra de Pauli.

O principal automorfismo, $\square$, veja eq.(1.18) em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, é denominado alternativamente conjugação espacial. Se $P = w + \vec{H}$, segue que:

$$P^\square = \bar{w} - \vec{H} \quad (\text{B.11})$$

onde $-$ indica o conjugado complexo das componentes w e H_i , $i = 1, 2, 3$.*

O principal antiautomorfismo da álgebra de Pauli, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ será indicado por $\dagger$, distintamente da definição genérica para álgebras de Clifford, eq.(1.19). Isto se deve ao fato de que na representação matricial da álgebra de Pauli, o antiautomorfismo principal é identificado com o conjugado hermitiano. Se $P = w + \vec{H}$, segue que:

$$P^\dagger = \bar{w} + \vec{H}. \quad (\text{B.12})$$

Finalmente, a composição, indicada por $\sim$ (veja eq.(1.20)), é denominada adjunta na álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ e é dada por:

$$\tilde{P} = P^\square \dagger = w - \vec{H}. \quad (\text{B.13})$$

Notamos que a composição (ou adjunta) na álgebra de Pauli é equivalente ao antiautomorfismo principal da subálgebra par do espaço-tempo $C^+(\mathbb{R}^3)$ (veja comentário no último parágrafo do capítulo III).

Observe que se (cf. eq.(1.22))

- (i) $P^\square = P$, então $P \in \mathbb{H}$ é um quartenion.
- (ii) $\tilde{P} = -P$, então $P = \vec{P}$ é um vetor complexo.
- (iii) $P^\dagger = P$, então P é hermitiano.

* observamos que o conjugado complexo não é um morfismo da álgebra real $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, mas é conveniente trabalhar com ele. Consideramos que $\bar{\sigma}_i = \sigma_i$, distintamente da representação matricial, onde as componentes da matriz σ_2 são imaginárias, eq.(C.12). Note que $\sigma_i^\square = -\sigma_i$. Poderíamos alternativamente ter considerado $\sigma_i^\square = \bar{\sigma}_i = -\sigma_i$, e assim $(P^\square = \bar{w} + \vec{H})$ a conjugação complexa seria identificada com a conjugação espacial.

A adjunta, $\tilde{P}$, é muito importante desde que ela nos permite construir a inversa de um número de Pauli, quando existe a inversa. Observe que o produto $P\tilde{P}$ é um número complexo, dado por:

$$P\tilde{P} = \tilde{P}P = w^2 - \vec{H}^2, \quad (\text{B.14})$$

e $\vec{H}^2 = \vec{H} \cdot \vec{H} = H^i H^i$, é a soma do quadrado das componentes complexas do vetor $\vec{H}$. Assim, se $P\tilde{P} \neq 0$, podemos escrever

$$P^{-1} = \frac{\tilde{P}}{w^2 - \vec{H}^2}. \quad (\text{B.15})$$

É claro que a composição está relacionada a adjunta na representação matricial da álgebra de Pauli, desde que a adjunta de uma matriz é que determina a inversa. De outro modo, o produto de uma matriz pela sua adjunta é igual ao determinante da matriz, este sendo identificado com o produto $P\tilde{P}$. Portanto, os números de Pauli que satisfazem $P\tilde{P} = 1$ formam o grupo $SL(2, \mathbb{C}) \sim Spin_+(1, 3)$.

Vetores do espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3}$ podem ser representados por números de Pauli hermitianos, i.e., números cujas componentes são reais:

$$\mathbb{R}^{1,3} \ni u \longmapsto u_0 + \vec{u} = u_0 + u^i \sigma_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \quad (\text{B.16})$$

onde u_0, u_i são números reais.

A métrica de Lorentz, $g(u, u)$, é representada na álgebra de Pauli pelo produto $u\bar{u}$, ou $uu^\square$,

$$g(u, u) \longmapsto uu^\square = u\bar{u} = u_0^2 - \vec{u}^2 \quad (\text{B.17})$$

onde o quadrado de um vetor real é positivo definido, pois estamos trabalhando com a álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$.

Uma transformação própria e ortócrona de Lorentz é descrita na álgebra de Pauli pela ação hermitiana dos números de Pauli invertíveis, dada por

$$u \xrightarrow{\mathcal{L}} u' = MuM^\dagger \quad (\text{B.18})$$

onde $M \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, $M\bar{M} \neq 0$. É conveniente adotar que $M \in SL(2, \mathbb{C})$, ou seja, $M\bar{M} = 1$.

Observe que o objeto resultante da ação hermitiana, aplicada a um vetor do espaço-tempo, é hermitiano e portanto é realmente um vetor do espaço-tempo, i.e.

$$\text{se } u \in \mathbb{R}^{1,3} \implies u' = M u M^\dagger \in \mathbb{R}^{1,3}. \quad (\text{B.19})$$

Para verificar que a ação hermitiana é realmente uma transformação de Lorentz, observe que a métrica $u'^\square u' = u^\square u$ é preservada, pois segue que

$$u'^\square u' = M^\square u^\square \widetilde{M} M u M^\dagger = u^\square u M^\square M^\dagger = u^\square u \quad (\text{B.20})$$

desde que $M^\square M^\dagger = (M \widetilde{M})^\dagger = 1$, pois estamos considerando que $M \widetilde{M} = 1$, i.e., $M \in SL(2, \mathcal{C})$.

A discussão da parametrização dos elementos $M \in SL(2, \mathcal{C})$ segue em paralelo as discussões que precederam a eq.(3.27). Também, o vetor transformado pela eq.(B.18) é dado pela eq.(3.32) (veja [Zeni e Rodrigues, 1991]).

APÊNDICE C

A REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DA ÁLGEBRA DE PAULI

Para obter a representação matricial das álgebras de Clifford é conveniente introduzir o conceito de IDEAIS. Ideais (laterais) são subespaços da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ invariantes por multiplicação (à esquerda ou à direita) por qualquer elemento da álgebra, i.e. se I é um ideal à esquerda da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, então se

$$\psi \in I, A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \quad \text{implica que} \quad A\psi \in I. \quad (\text{C.1})$$

Os elementos dos ideais são ditos espinores, [Figueiredo et al].

Um exemplo de um ideal à esquerda na álgebra de Pauli é dado pelo subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ que tem por base $\{e, ie, \sigma_1 e, i\sigma_1 e\}$, onde o IDEMPOTENTE e é dado por:

$$e = 1/2(1 + \sigma_3). \quad (\text{C.2})$$

Observamos que o idempotente e é um elemento não invertível da álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ e que por este motivo tem propriedades muito particulares, como por exemplo

$$e^2 = e. \quad (\text{C.3})$$

Além disso, podem existir $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ tal que $a, b \neq 0$ satisfazendo a seguinte igualdade:

$$ae = be. \quad (\text{C.4})$$

Casos particulares da equação acima são por exemplo:

$$\sigma_3 e = e; \quad \sigma_2 e = i\sigma_1 e. \quad (\text{C.5})$$

Assim, o subespaço I de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ definido por:

$$I = \{\psi = (\psi_I + \psi_{II}\sigma_1)e\} \quad (\text{C.6})$$

onde $\psi_i = x_i + iy_i$, $i = I, II$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, é um ideal à esquerda da álgebra de Pauli, pois é imediato verificar que o produto pela esquerda de qualquer número de Pauli $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \ni A = w + \vec{H}$ pelo idempotente e pertence ao ideal I , pois, da eq.(C.5) segue que:

$$Ae = (w + H^i \sigma_i)e = (w + H_3)e + (H_1 + iH_2)\sigma_1 e. \quad (C.7)$$

Portanto, o produto pela esquerda de qualquer número de Pauli por um elemento do ideal I resulta em outro elemento do ideal (eq.(C.1)).

Considerando a propriedade acima dos ideais, uma representação matricial da álgebra de Pauli pode ser obtida através do seguinte raciocínio: a álgebra pode ser pensada como atuando sobre um ideal do mesmo modo que as transformações lineares atuam sobre um espaço vetorial, transformando os vetores entre si, [Rodrigues e Zeni].

Se nós considerarmos que as duas componentes dos elementos do ideal, $\psi = (\psi_I + \psi_{II}\sigma_1)e$, eq.(C.6), formam uma matriz coluna 2×1 , onde ψ_I corresponde ao elemento da primeira linha e ψ_{II} ao elemento da segunda linha, então analisando como os números de Pauli transformam o spinor ψ em outro spinor, podemos obter uma representação matricial para a base da álgebra de Pauli e portanto para toda a álgebra. Por exemplo, temos que:

$$\sigma_3 \psi = (\psi_I - \psi_{II}\sigma_1)e. \quad (C.8)$$

Portanto, podemos escrever que a matriz que representa σ_3 é dada por:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (C.9)$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \sigma_1 e &= (\psi_{II} + \psi_I \sigma_1)e \\ \sigma_2 e &= (-i\psi_{II} + i\psi_I \sigma_1)e \end{aligned} \quad (C.10)$$

e assim, obtemos a seguinte representação matricial; (cf. [Blokhintsev, pg. 236-9] para um tratamento alternativo)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (C.11)$$

Observe que estamos considerando as componentes complexas do spinor, i.e., a base do Ideal é $\{\mathbf{e}, \sigma_1 \mathbf{e}\}$ sobre os escalares $\{1, i\} = \mathcal{C}$. Obviamente, temos que:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Um número de Pauli qualquer dado pela eq.(B.6) pode ser escrito em termos da sua representação matricial

$$A = w 1 + H^i \sigma_i = \begin{pmatrix} w + H_3 & H_1 - iH_2 \\ H_1 + iH_2 & w - H_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Observe que da eq.(B.12) temos que

$$A^\dagger = \bar{w} + \bar{H}^i \sigma_i = \begin{pmatrix} \bar{w} + \bar{H}_3 & \bar{H}_1 - i\bar{H}_2 \\ \bar{H}_1 + i\bar{H}_2 & \bar{w} - \bar{H}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

é portanto o antiautomorfismo principal corresponde realmente a conjugação hermitiana.

Também, da definição intrínseca da adjunta, eq.(B.13) temos que

$$\tilde{A} = w - \vec{H} = \begin{pmatrix} w - H_3 & -(H_1 - iH_2) \\ -(H_1 + iH_2) & w + H_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

e da equação acima segue que o produto $A \tilde{A}$ é justo o determinante de A , i.e.

$$A \tilde{A} = w^2 - \vec{H}^2 = \begin{pmatrix} w^2 - H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 & 0 \\ 0 & w^2 - H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

Assim, se $\det A = A \tilde{A} \neq 0$, a inversa é dada por (cf. eq.(B.15))

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} \quad (\text{C.17})$$

APÊNDICE D

O HOMEOMORFISMO ENTRE $SL(2, \mathcal{C})$ e $SO_+(1, 3)$

Dissemos no capítulo II que a ação adjunta, eq.(2.19), dos elementos $A \in Spin_+(1, 3)$ sobre os vetores $u \in \mathbb{R}^{1,3}$, representa uma transformação de Lorentz própria e ortócrona.

Através das eq.(3.27), eq.(3.32) e eq.(5.20) é evidente que há uma correspondência entre os elementos $Spin_+(1, 3) \sim SL(2, \mathcal{C})$ e $SO_+(1, 3)$, estabelecida intrinsecamente pelos geradores. Entretanto, há outros caminhos [Barut, pg.25, MacFarlane] para se estabelecer a correspondência entre os grupos $SL(2, \mathcal{C})$ e $SO_+(1, 3)$ sem envolver a exponencial dos geradores. Seguimos o raciocínio exposto em [Santaló, pg.96-9].

Nos apêndices B e C foi discutido o isomorfismo entre a álgebra de Pauli e a álgebra das matrizes 2×2 complexas., com o consequente estabelecimento do isomorfismo entre $Spin_+(1, 3) \sim SL(2, \mathcal{C})$. Observamos que na álgebra de Pauli $\mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \sim \mathcal{C}(2)$, uma transformação de Lorentz é representada pela ação hermitiana, eq.(B.18), dos elementos de $A \in SL(2, \mathcal{C})$ sobre $u \in \mathbb{R}^{1,3}$.

A uma matriz 2×2 representando o vetor $u \in \mathbb{R}^{1,3}$, eq.(C.13)

$$u = \begin{pmatrix} u_0 + u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & u_0 - u_3 \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

associamos a seguinte matriz coluna 4×1

$$\mu = \begin{pmatrix} u_0 + u_3 \\ u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 \\ u_0 - u_3 \end{pmatrix}. \quad (D.2)$$

A matriz U dada na eq.(5.1) representando um vetor do espaço-tempo é obtida

da eq.(D.2) através da multiplicação pela seguinte matriz:

$$M = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (D.3)$$

i.e., se $U^t = (u_0 u_1 u_2 u_3)$, então:

$$U = M\mu. \quad (D.4)$$

Agora, uma transformação de Lorentz representada pela ação hermitiana de $A \in SL(2, \mathcal{C})$ sobre a matriz u , eq.(D.1),*

$$u' = A \dagger u A \quad (D.5)$$

induz uma transformação na matriz associada μ , eq.(D.2) dada por:

$$\mu' = (A \dagger \times A^t)\mu \quad (D.6)$$

[onde o produto direto é definido por [Wigner, pg. 17]**

$$A \dagger \times A^t = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} A^t & \bar{\gamma} A^t \\ \bar{\beta} A^t & \bar{\delta} A^t \end{pmatrix} \quad (D.7)$$

$$\text{onde } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (D.8)$$

Assim, segue da eq.(D.6) e eq.(D.4) que o vetor U , eq.(5.1), se transforma como:

$$U' = M(A \dagger \times A^t)M^{-1}\mu \quad (D.9)$$

ou seja, a matriz do grupo $SO_+(1, 3)$ correspondendo a transformação dada na eq.(D.5) é mostrada abaixo:

$$L = M(A \dagger \times A^t)M^{-1} \quad (D.10)$$

* note que o conjugado hermitiano na eq.(D.5) aparece à esquerda (cf. eq.(B.18))

** note que [Santaló, pg. 99] considera uma outra definição para o produto direto, que apesar de ser conceitualmente aceitável (o produto direto é uma representação do produto tensorial, e portanto qualquer quadro de multiplicação envolvendo o produto de elementos $[A]_{ij}$ e $[B]_{mn}$ é aceitável), não está de acordo com o uso feito do produto direto na eq.(13.15).

onde M é dado na eq.(D.3) (expressão explícita da eq.(D.10) é dada em [Penrose e Rindler, pg. 17]).

Observamos os seguintes fatos:

(i) do cálculo explícito das componentes da matriz L , eq.(D.10), segue que:

$$[L]_{00} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 \geq 0 \quad (\text{D.11})$$

onde α, β, γ e δ são os elementos da matriz A , eq.(D.8).

Portanto, L corresponde a uma transformação ortócrona, eq.(2.16).

$$(ii) \quad \det L = \det A^\dagger \times A^t = (\det A^\dagger)^2 (\det A^t)^2 = 1$$

$$\text{pois} \quad A \in SL(2, \mathcal{C}). \quad (\text{D.12})$$

portanto, L corresponde a uma transformação própria, eq.(2.).

(iii) o produto direto goza da seguinte propriedade

$$(A_1 A_2) \times (B_1 B_2) = (A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) \quad (\text{D.13})$$

e portanto, ao produto $A_1 A_2$ de matrizes $A_1, A_2 \in SL(2, \mathcal{C})$ corresponde o produto $L_1 L_2$ das matrizes L_1 e L_2 de $SO_+(1, 3)$ correspondentes a A_1 e A_2 pela eq.(D.10). Em particular, a matriz A^{-1} corresponde L^{-1} .

(iv) da eq.(D.10) é claro que as matrizes $\pm A \in SL(2, \mathcal{C})$ correspondem o mesmo $L \in SO_+(1, 3)$. Por este motivo $SL(2, \mathcal{C})$ é dito o recobrimento duplo de $SO_+(1, 3)$.

Por completeza, comentamos que não estabelecemos aqui o fato de que $SL(2, \mathcal{C})$ recobre todo o grupo $SO_+(1, 3)$, i.e. que dado um elemento de $SO_+(1, 3)$ existe um elemento de $SL(2, \mathcal{C})$ correspondente (através da ação adjunta) [Barut, pg. 42, Miller, pg. 291-2].

APÊNDICE E

A EQUAÇÃO SECULAR

A eq.(5.3) é um sistema linear de equações diferenciais ordinárias, estando as componentes da velocidade, U^α , e suas derivadas acopladas entre si através do campo eletromagnético.

No caso de campo variável, a solução não é direta e depende em muito do comportamento funcional do campo. Em geral, nas aplicações é considerado um campo constante de maior intensidade sobre o qual se aplica um campo variável, tratado como uma perturbação do campo constante [Vandervoot].

Quando o campo é constante, i.e. $\frac{dF}{d\tau} = 0$, então a solução da eq.(5.3) pode ser obtida através da equação secular, isto é, supõem-se que a solução para as componentes da velocidade sejam dadas por:

$$U^\alpha(\tau) = c^\alpha e^{\lambda\tau} \quad (\text{E.1})$$

onde os c^α e λ são constantes, λ fornece o comportamento característico da solução.

Substituindo na eq.(5.3) e eliminando $e^{\lambda\tau}$, fator comum, obtemos a equação secular

$$aF - \lambda \mathbb{I} = 0. \quad (\text{E.2})$$

A eq.(E.2) é solução da eq.(5.3) somente se o determinante da equação acima for nulo [Vandervoot], de onde se pode mostrar que

$$\lambda = \pm ax \quad \text{ou} \quad \lambda = \pm iay \quad (\text{E.3})$$

onde x e y são dados pela eq.(3.34). A exponencial de um argumento imaginário está relacionada as funções trigonométricas, enquanto que a exponencial de um argumento real está relacionada as funções hiperbólicas.

A solução obtida da equação secular pode então ser escrita como:

$$U^\alpha(\tau) = A^\alpha \cos(ay\tau) + B^\alpha \sin(ay\tau) + C^\alpha \operatorname{ch}(ax\tau) + D^\alpha \operatorname{sh}(ax\tau) \quad (\text{E.4})$$

onde os coeficientes $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$ e D^α são determinados a partir da condição inicial, $U(\tau = 0)$. É possível mostrar que eles satisfazem as seguintes condições [Vandervort]:

$$A^\mu D_\mu = 0 \quad ; \quad B^\mu C_\mu = 0. \quad (\text{E.5})$$

Em relação ao nosso tratamento, via exponencial da matriz do campo, vale observar que esses coeficientes já são determinados diretamente como função das componentes do campo e da velocidade inicial (veja eq.(3.32)). Assim, nossa solução para campos constantes é melhor para se analisar a influência exercida por cada campo, elétrico ou magnético, sobre o comportamento da velocidade.

Também, como discutido na conclusão, acreditamos que nosso método possa ser generalizado para campos variáveis, ainda que apresentando um resultado formal, mas que pode ser trabalhado computacionalmente por iteração da solução.

APÊNDICE F

O GRUPO DE LORENTZ COMPLETO

As transformações do grupo de Lorentz completo (representado pelos grupos $O(1,3)$ ou $Pin(1,3)$, veja eq.(2.32)), podem ser obtidas das transformações próprias e ortócronas (subgrupos $SO_+(1,3)$ ou $Spin_+(1,3) \sim SL(2, \mathbb{C})$, respectivamente) através do produto destas transformações pelas simetrias fundamentais existentes no grupo de Lorentz [Miller, pg. 288] a saber, inversão espacial, inversão temporal, e inversão no espaço-tempo, indicadas a seguir por P , T e PT respectivamente.

Vamos indicar abaixo o grupo (ou as transformações) de Lorentz completo por $\mathcal{L}$, [Recami, pg. 5], o subgrupo próprio por $\mathcal{L}_+$ (pode ser representado pelo grupo $SO(1,3)$ ou $Spin(1,3)$), e o subgrupo próprio e ortócrono por $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Necessitamos considerar ainda as transformações impróprias, indicadas por $\mathcal{L}_-$, descritas por (veja eq.(2.15) e eq.(2.31))

$$\{A \in Pin(1,3) \cap C^-(\mathbb{R}^{1,3})\} \quad \text{ou} \quad \{A \in O(1,3) \mid \det A = -1\} \quad (\text{F.1})$$

e as transformações antícronas, indicadas por $\mathcal{L}^\downarrow$, descritas por (veja eq.(2.16) e comentários subsequentes a eq.(2.31)).

$$\{A \in Pin(1,3) \mid AA^* = -1\} \quad \text{ou} \quad \{A \in O(1,3) \mid [A]_0^0 \leq 1\}. \quad (\text{F.2})$$

Observamos que as transformações impróprias, assim como as antícronas, não formam subgrupos do grupo de Lorentz completo: a composição de duas transformações impróprias (antícronas) é uma transformação própria (ortócrona). Entre as transformações impróprias encontram-se a inversão espacial e a inversão temporal, mas não a inversão espaço-temporal, razão de se exigir uma maior divisão do grupo de Lorentz para se obter a componente conexa a identidade. Entre as transformações antícronas encontram-se a inversão temporal e a inversão espaço-temporal.

Das definições acima segue que podemos dividir o grupo de Lorentz em quatro

componentes desconectadas entre si, a saber:

(i) $\mathcal{L}_+^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \cap \mathcal{L}_+$, as transformações próprias e ortócronas.

(ii) $\mathcal{L}_+^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \cap \mathcal{L}_+$, as transformações próprias e antícrônicas, cujo principal representante é a inversão espaço-temporal.

(iii) $\mathcal{L}_-^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \cap \mathcal{L}_-$, as transformações impróprias e ortócronas, cujo representante característico é a inversão espacial.

(iv) $\mathcal{L}_-^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \cap \mathcal{L}_-$, as transformações impróprias e antícrônicas, cujo representante característico é a inversão temporal.

O resultado comentado anteriormente, de que todas as transformações do grupo de Lorentz completo podem ser obtidas das transformações próprias e ortócronas combinadas com as inversões P, T e PT é simbolicamente dado abaixo: [Miller, pg. 288]

$$\mathcal{L}_+^\dagger = (PT) \otimes \mathcal{L}_+^\dagger \quad (\text{F.3a})$$

$$\mathcal{L}_-^\dagger = P \otimes \mathcal{L}_+^\dagger \quad (\text{F.3b})$$

$$\mathcal{L}_-^\dagger = T \otimes \mathcal{L}_+^\dagger \quad (\text{F.3c})$$

As inversões P, T e PT são representadas na álgebra do espaço-tempo, através da ação adjunta, pelos seguintes elementos $\gamma_0, \gamma_5 \gamma_0$ (ou $\gamma_0 \gamma_5$) e γ_5 , respectivamente. Observe que através da ação adjunta eq.(2.19) a ação de γ_0 sobre $u \in \mathbb{R}^{1,3}$ resulta em:

$$\gamma_0 u \gamma_0^{-1} = \gamma_0 (u_0 \gamma_0 + \vec{u}) \gamma_0 = u_0 \gamma_0 - \vec{u} \quad (\text{F.4})$$

desde que $\gamma_0^2 = 1$ e γ_0 anticomuta com vetores espaciais.

Portanto, γ_0 através da ação adjunta está relacionado a inversão espacial (é uma simetria nos vetores ortogonais a γ_0).

Também, através da ação adjunta de γ_5 sobre $u \in \mathbb{R}^{1,3}$ obtemos

$$\gamma_5 u \gamma_5^{-1} = -\gamma_5 u \gamma_5 = -u \quad (\text{F.5})$$

desde que $\gamma_5^2 = -1$ e γ_5 anticomuta com os vetores γ_μ (também $\gamma_5^{-1} = -\gamma_5$). Portanto γ_5 está relacionado a inversão espaço-temporal através da ação adjunta.

Por sua vez, a ação de $\gamma_0\gamma_5$ (ou $\gamma_5\gamma_0$) através da ação adjunta sobre $u \in \mathbb{R}^{1,3}$, resulta em (observe que $(\gamma_0\gamma_5)^{-1} = \gamma_0\gamma_5$)

$$\gamma_0\gamma_5 u \gamma_0\gamma_5 = \gamma_5^2 \gamma_0 u \gamma_0 = -u_0 \gamma_0 + \vec{u}. \quad (\text{F.6})$$

Portanto, $\gamma_0\gamma_5$ está relacionado a inversão espacial através da ação adjunta.

Caso estivéssemos trabalhando com a ação adjunta modificada, eq.(2.37), então γ_0 estaria relacionado a inversão temporal e $\gamma_0\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ estaria relacionado a inversão espacial, o que seria mais natural.

Observamos que γ_0 , e $\gamma_0\gamma_5$, relacionados a P e T pertencem ao subespaço de graduação ímpar, $C^-(\mathbb{R}^{1,3})$, e satisfazem (cf. eq.(F.1) e eq.(F.2)):

$$\gamma_0\gamma_0^* = 1 \quad ; \quad (\gamma_0\gamma_5)(\gamma_0\gamma_5)^* = -1. \quad (\text{F.7})$$

Observe também que P e T são transformações impróprias, eq.(F.1), mas só T é antícrona, eq.(F.2).

Por outro lado, γ_5 relacionado a PT , pertence a subálgebra par, $C^+(\mathbb{R}^{1,3})$ e satisfaz

$$\gamma_5\gamma_5^* = \gamma_5^2 = -1. \quad (\text{F.8})$$

Observe que PT é uma transformação própria, mas antícrona, eq.(F.2).

Para completar, na representação matricial 4×4 , P, T e PT são matrizes cujos elementos fora da diagonal são todos nulos, e os elementos da diagonal são dados por [Srivastava]:

$$[P]_0^0 = 1 \quad , \quad [P]_j^j = -1 \quad (\text{F.9a})$$

$$[T]_0^0 = -1 \quad , \quad [T]_j^j = 1 \quad (\text{F.9b})$$

$$[PT]_\mu^\mu = -1 \quad (\text{F.9c})$$

CONJECTURA SOBRE CAMPOS VARIÁVEIS

Acreditamos que o método de exponenciação do campo eletromagnético, para obter a solução das equações de movimento de uma partícula carregada, possa também ser utilizado no caso de campos variáveis, conforme discutimos a seguir. Nossa crença é amparada no fato de que encontramos na literatura vários artigos discutindo o tratamento simbólico (ou formal) da exponencial para solução de sistemas lineares de equações diferenciais [Magnus, Bose].

Para que possamos inferir resultados concretos sobre esta conjectura nos parece claro que o formalismo das álgebras de Clifford é o mais adequado. Entre outros fatores destacamos o seguinte motivo: quando trabalhamos com a álgebra do espaço-tempo conseguimos uma fatoração significativa, eq.(3.22) do campo eletromagnético como o produto de um número, z , por um bivetor unitário, $\hat{F}$.

É evidente que z está relacionado aos invariantes do campo eletromagnético (eq.(3.34)) e é claro da eq.(3.32) e eq.(5.25) sua importância para a dependência funcional na solução das equações de movimento para uma partícula carregada. Por outro lado, o bivetor unitário $\hat{F}$ de certo modo exprime a "direção" do campo.

Assim sendo, a discussão abaixo segue o formalismo da álgebra do espaço-tempo. A suposição básica sobre o campo eletromagnético é que suas componentes $F^{\mu\nu}(x)$ são funções bem comportadas das coordenadas do espaço-tempo.*

A conjectura que propomos é que sob certas condições satisfeitas pelo campo, a solução da equação de movimento para uma partícula carregada sob a ação de um campo eletromagnético variável no espaço-tempo é dada por uma equação análoga a eq.(4.45), i.e.,

$$U(\tau) = e^{I(\tau)}U(0)e^{-I(\tau)} \quad (1)$$

* um tratamento mais detalhado sobre as propriedades requeridas das funções e do domínio dessas pode ser vista em [Magnus].

onde o gerador $f(\tau)$ deve satisfazer*

$$\frac{de^{f(\tau)}}{d\tau} = F e^{f(\tau)} \quad (2)$$

onde F é o campo eletromagnético.

Baseado no trabalho de [Magnus], propomos a seguinte solução formal para o gerador $f(\tau)$ em função do campo F :

$$\begin{aligned} f(\tau) = & \int_0^\tau F(\sigma) d\sigma + 1/2 \int_0^\tau \left[F(\sigma_1), \int_0^{\sigma_1} F(\sigma) d\sigma \right] d\sigma_1 + \\ & + 1/4 \int_0^\tau \left[F(\sigma_2), \int_0^{\sigma_2} \left[F(\sigma_1), \int_0^{\sigma_1} F(\sigma) d\sigma \right] d\sigma_1 \right] d\sigma_2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, o gerador $f(\tau)$ aparece como uma série de comutadores da integral do campo F sobre a trajetória da partícula.

No caso em que a variação do campo está restrita na variável z , i.e.

$$F(\tau) = z(\tau) \hat{F} \quad (4)$$

onde o bivector unitário $\hat{F}$ é constante, a série para o gerador tem apenas o primeiro termo, i.e.

$$f(\tau) = \hat{F} \int_0^\tau z(\sigma) d\sigma \quad (5)$$

desde que as propriedades de comutação estão contidas em $\hat{F}$, e independem da integração, i.e., F comuta com sua integral, e portanto os comutadores são todos nulos.

* observe que $\frac{de^{f(\tau)}}{dt} \neq \frac{df}{d\tau} e^{f(\tau)}$, pois a álgebra é não comutativa. Mesmo no caso simples em que

$$f(\tau) = \int_0^\tau F(\sigma) d\sigma$$

a relação acima não é satisfeita.

Note que

$$\frac{df^2(\tau)}{d\tau} = Ff + fF \neq 2Ff$$

$$\frac{df^3}{d\tau} = Ff^2 + fFf + f^2F \neq 3Ff^2$$

pois a priori não sabemos se F comuta com sua integral, f (cf. [Salingaros, 1984] eq.(5.1)).

A solução dada pela eq.(5), assim como a solução proveniente da eq.(1) e eq.(3), tem o problema de ser formal: elas exibem a solução do movimento de uma partícula carregada através de integrais do campo sobre a trajetória; ou seja para determinar a trajetória necessitamos conhecer a trajetória. Acreditamos que esse problema possa ser superado, em termos, através de métodos iterativos, ou seja, teríamos uma solução aproximada.

CONCLUSÕES

Mostramos nesta tese como obter a exponencial dos geradores do grupo de Lorentz através da álgebra de Clifford do espaço-tempo, onde o grupo de Lorentz é representado por $Spin_+(1, 3) \sim SL(2, \mathcal{T})$, e da álgebra das matrizes reais 4×4 , associada ao grupo $SO_+(1, 3)$. Este resultado é uma prova construtiva de um teorema existencial concernente aos grupos de Lie: a parametrização do grupo (componente conexa à identidade) através da álgebra de Lie associada. A exponencial dos geradores, eq.(3.23) ou eq.(5.20), pode ser observada como uma generalização das bem conhecidas exponenciais descrevendo rotações (espaciais), eq.(3.37) e eq.(5.22), e boosts (transformações de velocidade), eq.(3.41) e eq.(5.21).

Mostramos também, eq.(3.27) que toda transformação do grupo de Lorentz pode ser escrita como a exponencial de um gerador do grupo.

Os resultados acima são significativos para o estudo do grupo de Lorentz, e consequentemente da cinemática relativista, permitindo uma melhor compreensão das relações entre as transformações finitas e infinitesimais (eq.(2.5)).

Além da importância para a Cinemática Relativista, a exponencial dos geradores do grupo de Lorentz fornece um novo método de solução para a equação de movimento de uma partícula carregada satisfazendo a força de Lorentz desde que o campo eletromagnético é descrito pelo mesmo objeto matemático que os geradores do grupo de Lorentz. Este resultado permite a visão ('insight') de que o campo eletromagnético está associado a uma transformação de Lorentz, atuando sobre o referencial instantâneo da partícula (irif, veja discussão após eq.(4.50)).

Entre as vantagens obtidas de imediato com a utilização do método aqui apresentado destacamos que os coeficientes das funções hiperbólicas e trigonométricas são dados explicitamente em termos dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, permitindo particularizar a solução para uma dada configuração dos campos, e também avaliar a influência dos campos na solução.

Ao introduzirmos novos métodos para a solução do movimento de partículas carregadas aumentamos as possibilidades de atacar esse problema.

Acreditamos que a generalização proposta para campos variáveis (conjecturas, eq.(1) e eq.(3)) possa oferecer um caminho alternativo e viável para a solução do movimento de partículas carregadas sob a ação de campos eletromagnéticos variáveis no espaço-tempo, um problema de grande interesse em várias áreas da física, em especial da Física de Plasmas [cf. Vandervoot].

Além do resultado apresentado nesta tese, acreditamos que a utilização sistemática das álgebras de Clifford na Física Teórica pode nos propor outros resulta-

dos significativos, principalmente no que se refere a teoria de Dirac e Eletrodinâmica Quântica, assim como se pode inferir da quantidade de trabalhos que surgiram nesta última década [Daviau, Hestenes, 1990, Basri e Barut; Rodrigues e Vaz, Keller].

REFERÊNCIAS

- BARUT, A.O.** (1964) - "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles", MacMillan.
- BASRI, S.A. e BARUT, A.O.** (1983) - Int. J. of Theor. Phys. **22**, 691.
- BAYLIS, W.E.** (1980) - Am. J. Phys. **48**, 918.
- BJORKEN, J.D. e DRELL, S.D.** (1964) - "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill.
- BLOKHINTSEV, D.I.** (1969) - "Principles of Quantum Mechanics", Allyn and Bacon.
- BOSE, A.** (1989) - J. Math. Phys. **30**, 2035.
- CAIANIELLO, E.R.** (1973) - "Combinatorics and Renormalization in Quantum Field Theory", W.A. Benjamin.
- CHISHOLM, J.S.R.** (1963) - Il Nuovo Cimento **30**, 426.
- CHISHOLM, J.S.R. e COMMON, A.K.** (editores, 1985) - "Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics", D. Reidel Publ. Co.
- CHURCHILL, R.V.** (1981) - "Variáveis Complexas e suas Aplicações", McGraw-Hill do Brasil.
- DAVIAU, C.** (1989) - Annales Fond. Louis de Broyle, **14**, 373.
- DIRAC, P.A.M.** (1976) - "The Principles of Quantum Mechanics", 4a. ed., Oxford, Clarendon Press.
- FEYNMAN, R.P.** (1962) - "Quantum Electrodynamics", W.A. Benjamin.
- FIGUEIREDO, V.L.** (1987) - Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, IMECC-UNICAMP.
- FIGUEIREDO, V.L.; OLIVEIRA, E.C. and RODRIGUES, W.A.** (1990a) - Alg. Groups and Geom., **7**, 153.
- FLANDERS, H.** (1963) - "Differential Forms", Academic Press.
- FRADKIN, D.M.** (1982) - J. Math. Phys. **23**, 2520.

- GREIDER, J.R.** - (1984) - *Found. Phys.*, **14**, 467.
- HALMOS, Paul. R.** (1974) - "Finite Dimensional Vector Spaces", Springer-Verlag.
- HAMILTON, J.D.** (1981) - *Can J. Phys.* **59**, 213.
- HESTENES, D.** (1966) - "Space-Time Algebra", Gordon & Breach.
 (1967) - *J. Math. Phys.* **8**, 768.
 (1971) - *Am. J. Phys.*, **39**, 1013.
 (1974) - *J. Math. Phys.*, **15**, 1778.
 (1975) - *J. Math. Phys.* **16**, 556.
 (1985.a) - em Chisholm e Common (editores) pg. 01.
 (1985.b) - em Chisholm e Common (editores) pg. 321
 (1990) - *Found. of Phys.* **20**, 1213.
- HESTENES, D. and SOBCZYCK, G.** (1984) - "Clifford Algebras to Geometric Calculus", D. Reidel Publ. Comp.
- IMAEDA, K.** (1976) - *Il Nuovo Cimento*, **32B**, 138.
- JACKSON, J.D.** (1983) - "Eletrodinâmica Clássica", Ed. Guanabara Dois.
- KELLER, J.** (1991) - *Int. J. of Theor. Phys.* **30**, 127.
- KRAUSE, J.** (1977) - *J. Math. Phys.* **18**, 889.
- KTORIDES, C. N.** (1975) - *J. Math. Phys.* **16**, 2123.
- LANDAU, L.D. and LIFCHITZ, E.M.**
 (1975) - "The Classical Theory of Fields", 4ed., Pergamon Press.
 (1966) - "Mécanique Quantique", MIR.
- LICHNEROWICZ, A.** (1958) - "Eléments de Calcul Tensoriel", Librairie Armand Colin.
- LIFCHITZ, E.; PITAIEVSKI, L. e BÉRESTETSKI, V.** (1973) - "Théorie Quantique Relativiste". Mir.
- LIMA, Elon L.** (1965) - "Cálculo Tensorial", IMPA/CNPq (Notas de Matemática no. 32).
- LIMA, Elon L.** (1973) - "Algebra Exterior", 9o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq.

- LOUNESTO, P., MIKKOLA, R. e VIERSOS, V.** (1987) - "CLICAL: User Manual", Helsinki Univ. of Technology.
- MACFARLANE, A.J.** (1962) - J. of Math. Phys. **3**, 1116.
- MAGNUS, W.** (1954) - Comm. Pure and Appl. Math. **7**, 649.
- MATHEWS, J.** (1976) - Am. J. Phys. **44**, 1210.
- MILLER, W. Jr.** (1972) - "Symmetry Groups and Their Applications", Academic Press.
- PENROSE, R. e RINDLER, W.** (1987) - "Spinors and Space-Time", vol. 1, Cambridge Univ. Press.
- PORTEOUS, J.R.** (1981) - "Topological Geometry", 2ed, Cambridge University Press.
- RECAMI, E.** (1984) - "Classical Tachyons and Possible Applications", Ist. Nazionale di Física Nucleare, Catania, Itália.
- RIESZ, M.** (1958) - "Clifford Numbers and Spinors", Lectures Notes 38, Institute for Fluid Mechanics and Applied Mathematics, University of Maryland.
- RODRIGUES, W.A. and ZENI, J.R.** (1991) "The Relation Between 2-Spinors and Rotations" - Preprint.
- RODRIGUES, W.A. and FARIA-ROSA, M.A.** (1989) - Found. of Phys. **19**, 705.
- RODRIGUES, W.A. and OLIVEIRA, E.C.** (1990) - Int. J. Theor. Phys. **29**, 435.
- RODRIGUES, W.A. e VAZ, J.** (1991) - preprint para publicação.
- SALINGAROS, N. e DRESDEN, M.** (1979) - Phys. Rev. Lett. **43**, 1.
- SALINGAROS, N.** (1984) - J. Math. Phys., **25**, 706.
- SALINGAROS, N. and WENE, G.P.** (1985) - Acta Aplic. Math., **4**, 271.
- SANTALÓ, L.A.** (1976) - "Geometria Espinorial", ed. Consejo Nacional Inv. Cient. y Tec., Inst. Argentino Mat., Argentina.
- SRIVASTAVA, P.P.** (1974) - Revista Brasileira de Física **4**, 507.

- UNGAR, A. A.** (1988) - Found. of Phys. Lett. **1**, 57.
- VANDERVOOT, P.O.** (1960) - Annals of Physics **10**, 401.
- VAN WICK, C.B.** (1986) - J. Math. Phys. **27**, 1306.
- WIGNER, E.** (1959) - "Group Theory", Academic Press.
- ZENI, J.R.R.** (1987) - Tese de Mestrado, Instituto de Física, IFGW/UNICAMP, Brasil.
- ZENI, J.R.R. and RODRIGUES, W.A.**
(1991) - "A Thoughtful Study of Lorentz Transformations by Clifford Algebras", to appear in Intern. Jour. Mod. Phys. (A)
(1990.a) - Hadronic J. **13**, 317.
(1990.b) - Revista Bras. Física **20**, 377.
(1987) - Anais da X Conf. Nac. Mat. Aplic. Comp., pg. 1088/98.