

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DO ESTADO SÓLIDO  
E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

# Aprisionamento Iônico em Anéis de Armazenamento de Elétrons

Pedro Fernandes Tavares •

Orientador : Prof. Dr. Antônio Rubens B. de Castro (UNICAMP)  
Co-orientador: Dr. Yves Baconnier (CERN)

Este exemplar corresponde à versão final da  
Tese de Doutorado defendida pelo Sr. Pedro  
Fernandes Tavares e aprovada pela Comissão  
Julgadora.

*A. Rubens B. de Castro*  
*13 Nov. 1993*

# Conteúdo

Resumo	3
Abstract	4
Introdução	7
<b>1 Teoria básica do aprisionamento iônico</b>	<b>10</b>
1.1 A neutralização $\eta$	10
1.2 Modelos do feixe de elétrons – ordens de grandeza	11
1.3 Ionização por impacto eletrônico	13
1.4 Dinâmica de íons aprisionados – feixes contínuos	14
1.4.1 Seções retas livres	14
1.4.2 Dipolos – Deriva $E \times B$	16
1.4.3 Outros elementos	19
1.5 Dinâmica em feixes agrupados – a massa crítica	19
1.6 Aquecimento pelo feixe de elétrons	21
1.7 Efeitos dos íons sobre o feixe de elétrons	22
1.7.1 Aumento da pressão	22
1.7.2 Deslocamento e dispersão da sintonia	23
1.8 Curas	27
<b>2 Detecção de íons via bremsstrahlung</b>	<b>28</b>
2.1 Introdução	28
2.2 Montagem experimental	30
2.3 Resultados experimentais	35
2.4 Cálculo da composição dos íons aprisionados e da contagem bremsstrahlung	40
2.4.1 Bremsstrahlung no gás residual e calibração em energia	40
2.4.2 Bremsstrahlung nos íons aprisionados	41
2.5 Ionização e dissociação molecular	43
2.6 Resultados e Discussão	45
<b>3 Acoplamento betatron provocado por íons</b>	<b>51</b>
3.1 Introdução	51
3.2 Média temporal do valor médio de uma variável dinâmica	52
3.3 Acoplamento betatron produzido por quadrupolos <i>skew</i>	53
3.3.1 O Hamiltoniano	53

3.3.2	Estrutura do espaço de fases . . . . .	56
3.3.3	Cálculo da emitância . . . . .	57
3.4	Acoplamento bétatron provocado por uma nuvem Gaussiana . . . . .	59
3.4.1	O Hamiltoniano . . . . .	59
3.4.2	Estrutura do espaço de fases . . . . .	61
3.4.3	Cálculo da emitância . . . . .	64
3.4.4	Resultados . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Distribuição transversal dos íons aprisionados</b>	<b>71</b>
4.1	Introdução . . . . .	71
4.2	O modelo unidimensional . . . . .	72
4.3	Uma solução aproximada . . . . .	73
4.4	Solução exata . . . . .	75
4.5	Resultados . . . . .	77
4.6	Modelo de equilíbrio térmico . . . . .	78
	<b>Conclusões</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Lista de Símbolos</b>	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>Ionização secundária</b>	<b>86</b>
<b>C</b>	<b>Transferência de energia em colisões atômicas</b>	<b>87</b>
<b>D</b>	<b>Reconstrução da órbita fechada</b>	<b>92</b>
D.1	O método . . . . .	92
D.2	Exemplo . . . . .	94
<b>E</b>	<b>Seção de choque para a produção de bremsstrahlung</b>	<b>95</b>
<b>F</b>	<b>Distribuição angular dos fótons bremsstrahlung</b>	<b>98</b>
<b>G</b>	<b>Hamiltoniano para movimento eletrônico em nuvem iônica Gaussiana</b>	<b>99</b>
<b>H</b>	<b>O detector de bremsstrahlung</b>	<b>101</b>
<b>I</b>	<b>Lista de Publicações</b>	<b>104</b>

# Resumo

A teoria da neutralização de feixes pulsados de elétrons por ionização do gás residual é revisada. A dinâmica dos íons aprisionados sob a ação do campo elétrico do feixe e do campo magnético homogêneo dos magnetos defletores é analisada, assim como o efeito de aquecimento dos íons por colisões Coulombianas com os elétrons do feixe. Finalmente, os efeitos da neutralização sobre o feixe de elétrons são estimados, com especial atenção ao deslocamento e dispersão da sintonia bétatron.

Uma série de experimentos, nos quais os fótons de bremsstrahlung produzidos em colisões dos elétrons circulantes com os núcleos de íons aprisionados no EPA (Electron Positron Accumulator do CERN) foram utilizados para detectar diretamente os íons, é relatada. Os resultados experimentais são compreendidos à luz de um modelo simples do processo de neutralização, cujos principais ingredientes são as seções de choque de ionização e dissociação molecular do monóxido de carbono e do hidrogênio molecular e dos íons deles derivados (uma compilação de seções de choque teóricas e experimentais disponíveis na literatura para os vários processos envolvidos é apresentada numa forma conveniente para aplicação nas energias de interesse em aceleradores circulares). O modelo prediz que, em situações de alta neutralização, uma fração apreciável da densidade iônica é composta por átomos de carbono várias vezes ionizados.

O acoplamento bétatron produzido pelo campo eletrostático de uma nuvem Gaussiana de íons aprisionados é calculado na proximidade da ressonância de acoplamento de quarta ordem  $2Q_x - 2Q_y = 0$ . O acoplamento obtido é consideravelmente menor que o observado experimentalmente. Hipóteses são levantadas para justificar esta discrepância e experimentos são sugeridos.

A distribuição transversal dos íons aprisionados no interior do feixe de elétrons é analisada no limite de neutralização nula (através da equação de Liouville) e no limite de distribuição térmica (em que a distribuição canônica – Maxwell-Boltzmann – é obtida de forma auto-consistente). Em ambos os casos, verifica-se, ao contrário de suposição comumente feita na literatura (de que a distribuição iônica é idêntica à distribuição eletrônica), que a nuvem iônica é constituída de um caroço central muito mais estreito que o feixe de elétrons. As conseqüências em termos do desvio e dispersão da sintonia do feixe de elétrons são discutidas.

# Abstract

The theory of the neutralisation of bunched electron beams by ionisation of the residual gas is reviewed. The dynamics of trapped ions under the action of the beam generated electric fields and the homogeneous magnetic field of bending magnets is discussed, as well as the heating of the ions by Coulomb collisions with the circulating electrons. Finally, the effects of the neutralisation on the electron beam are discussed, with emphasis on the betatron tune shifts and spreads.

A series of experiments, in which the bremsstrahlung photons produced in collisions of the circulating electrons with the nuclei of trapped ions in the CERN Electron Positron Accumulator (EPA) were used to detect directly the ions, is reported. The experimental results are understood in the light of a simple model of the neutralisation process, the main ingredients of which are the ionisation and molecular dissociation cross sections of carbon monoxide, molecular hydrogen and their ions (a compilation of available experimental and theoretical cross sections for the various processes involved is presented in a form convenient for application at the energies of interest in circular accelerators). The model predicts that, in high neutralisation situations, multiply ionised carbon atoms account for a significant fraction of the ion density.

The betatron coupling produced by the electric field of a Gaussian cloud of trapped ions is calculated in the vicinity of the fourth-order  $2Q_x - 2Q_y$  coupling resonance. The resulting coupling is much smaller than what is observed experimentally. Hypotheses are put forward to explain this discrepancy and experiments are suggested.

The transverse distribution of trapped ions is calculated in the limit of vanishing neutralisation (by means of the Liouville equation) and in the thermal equilibrium limit (by means of the canonical – Maxwell-Boltzmann – distribution, which is solved self-consistently). In both cases, the ion distribution is found to be composed of a central core much narrower than the beam, in contrast with the widely used assumption that the ion distribution is a replica of the beam distribution. The consequences in terms of the betatron tune shifts and spreads are discussed.

*The average PhD. thesis is nothing but a transference of bones from one graveyard to another.*

J. Frank Dobie.

*Vive le Cardinal Paff!*

# Introdução

Nos últimos vinte anos, verificou-se um enorme crescimento do número de fontes de luz síncrotron dedicadas em todo o mundo[WD80]. Nestas máquinas, um feixe de elétrons ou pósitrons de alta energia (de centenas de MeV a alguns GeV) percorre uma trajetória aproximadamente circular no interior de uma câmara metálica evacuada, sob a ação de campos magnéticos estáticos que guiam e focalizam o feixe. A radiação eletromagnética emitida pelo feixe (radiação *Síncrotron*[Ble88]) tem propriedades únicas (alta intensidade, polarização bem definida, estrutura temporal pulsada, pequenas dimensões da fonte e pequena divergência angular – ou alto brilho –, sintonizabilidade em larga faixa espectral e estabilidade) que a tornam um instrumento particularmente útil no estudo de propriedades fundamentais da matéria, assim como em aplicações industriais (e.g. microlitografia de raios x) e médicas (e.g. coronarioangiografia).

As chamadas fontes de luz síncrotron de terceira geração (otimizadas para produção de radiação eletromagnética por meio de *dispositivos de inserção* – wigglers e onduladores[BW83], em contraposição aos magnetos defletores), baseiam-se em anéis de armazenamento de elétrons ou pósitrons de baixíssima emitância[Wie86], alta corrente e com longas seções retas para acomodação dos dispositivos de inserção. A obtenção de tal performance representa um desafio técnico que exige a compreensão dos fenômenos físicos básicos que regem a dinâmica do feixe de partículas ultrarelativísticas, em particular o efeito de campos magnéticos estáticos não lineares[Rut85] (cálculo de abertura dinâmica), campos induzidos pelo próprio feixe[Duf85] (efeitos coletivos, instabilidades) e interações com moléculas do gás residual.

Dentre os efeitos danosos da interação das partículas do feixe com as moléculas do gás residual, destaca-se o *aprisionamento iônico* – os elétrons do feixe produzem pares elétron-íon em colisões com as moléculas do gás residual: os elétrons de baixa energia provenientes da ionização são repelidos em direção às paredes da câmara de vácuo, enquanto que os íons são aprisionados num poço de potencial atrativo, neutralizando parcial ou totalmente a carga elétrica do feixe. A densa nuvem carregada que se forma ao longo da trajetória do feixe interage de várias formas com os elétrons, provocando:

- deslocamento e dispersão das frequências de oscilação transversal dos elétrons (frequências *bétatron*) com excitação de ressonâncias que podem causar perda do feixe ou aumento da emitância vertical através de acoplamento dos movimentos horizontal e vertical[BGP<sup>+</sup>80]<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>A dispersão de frequências *bétatron* pode ter efeitos benéficos proporcionando amortecimento de Landau de instabilidades coerentes.

- aumento da emitância e redução do tempo de vida devido ao espalhamento Coulombiano nos núcleos dos íons aprisionados.
- instabilidades transversais em que oscilações do centro de massa do feixe crescem exponencialmente devido à interação com os íons.

Ainda que tais problemas possam ser evitados com o uso de pósitrons ao invés de elétrons<sup>2</sup>, o custo elevado de uma fonte de pósitrons torna economicamente inviável esta alternativa, em particular para aceleradores compactos industriais (e.g. máquinas para microlitografia). Nos projetos atuais, a solução encontrada é usar *eletrodos de limpeza*, i.e. peças metálicas inseridas na câmara de vácuo do acelerador e alimentadas com uma alta tensão ( $\sim 1 - 5$  kV) que extrai os íons do poço de potencial. Estes eletrodos, no entanto, podem suportar campos de alta frequência induzidos pelos pacotes de elétrons circulantes, que agem sobre o próprio feixe, causando instabilidades. Outros métodos de eliminação de íons (e.g. campos oscilantes[Orl89]) têm sido testados, mas nenhum deles é 100% eficaz.

Nesta tese descrevo investigações teóricas e experimentais sobre alguns dos aspectos da física de íons aprisionados em feixes pulsados de elétrons e seus efeitos sobre o feixe estocado. No Capítulo 1, apresento uma breve revisão da teoria do aprisionamento iônico, discutindo o processo de produção de íons por impacto eletrônico e a dinâmica dos íons aprisionados sob a ação do campo elétrico do feixe e dos campos magnéticos dos ímãs do anel. Analiso ainda o efeito de aquecimento dos íons aprisionados por meio de colisões Coulombianas com os elétrons circulantes e quantifico os principais efeitos dos íons aprisionados sobre os elétrons.

Uma série de experimentos em que íons aprisionados foram observados através da radiação  $\gamma$  (*bremstrahlung*) produzida em colisões com o feixe de elétrons é descrita no Capítulo 2. Nestes experimentos, as condições de neutralização em uma seção reta do EPA (Acumulador de Elétrons e Pósitrons – anel de amortecimento do Laboratório Europeu para Física de Partículas - CERN em Genebra, Suíça) foram controladas através de eletrodos polarizados, enquanto a contagem *bremstrahlung*, dimensões transversais, intensidade, estrutura temporal e espectro de frequências do feixe foram registrados em uma larga faixa de parâmetros de operação da máquina. As observações experimentais podem ser explicadas por um modelo que inclui efeitos de ionização múltipla e dissociação molecular, indicando a presença de átomos de carbono várias vezes ionizados em situações de alta neutralização. A excitação do feixe de elétrons com campos oscilantes permitiu ainda a observação *direta* do processo da remoção ressonante de íons aprisionados.

No Capítulo 3 analiso o aumento da emitância vertical comumente observado em feixes neutralizados. Calculo o acoplamento produzido por uma nuvem iônica Gaussiana através da excitação de uma ressonância de acoplamento não-linear e concluo que este efeito de alta ordem não é suficientemente intenso para explicar as observações experimentais. Isto sugere a existência de distribuições iônicas não simétricas (que produzem acoplamento de primeira ordem) ou ainda a possibilidade de ressonâncias excitadas por elementos magnéticos (quadrupolos *skew*), com os íons tendo apenas o papel de levar o feixe às condições de ressonância via deslocamento de suas frequências *bétatron*.

---

<sup>2</sup>Veremos adiante que os elétrons livres produzidos nas colisões ionizantes têm poucas chances de serem aprisionados por um feixe de carga positiva não contínuo (pulsado), devido à sua pequena massa. A neutralização de feixes contínuos de prótons por elétrons foi alvo de extensos estudos nos ISR (Intersecting Storage Rings) do CERN (veja p.ex. [OG74]).

A distribuição dos íons aprisionados no plano transversal à direção de propagação do feixe de elétrons é considerada no Capítulo 4. No limite de baixas neutralizações, resolvo a equação de Liouville unidimensional com um termo fonte que descreve a criação de novos íons e concluo que, contrariamente à uma suposição comumente feita na literatura (de que a distribuição transversal dos íons é idêntica à dos elétrons), a distribuição iônica é constituída de uma região central densa de dimensões muito mais reduzidos do que o feixe, e longas caudas. O cálculo é estendido para considerar casos de neutralização finita, usando um modelo de íons em equilíbrio térmico, válido no limite de tempo de termalização curto em comparação com o tempo de ionização e o efeito desta distribuição sobre o feixe de elétrons é calculado na forma de uma curva de deslocamento de frequência betatron em função da amplitude.

O trabalho descrito nesta tese teve como origem a preocupação com os efeitos do aprisionamento iônico no anel de armazenamento UVX-2, em construção em Campinas, SP pelo Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS). Aplicações da teoria da neutralização discutida aqui são mostradas em Memorandos de Projeto do LNLS e em artigo publicado em conferência (ver lista de publicações).

# Capítulo 1

## Teoria básica do aprisionamento iônico

Efeitos de neutralização de feixes de elétrons por ionização do gás residual têm sido estudados desde os anos 30, em conexão com descargas elétricas em tubos de alta tensão[Ben34] e transporte de feixes intensos em dispositivos geradores de microondas[HHS55]. Mais recentemente, a neutralização de feixes de íons e elétrons por interação com gases neutros[Hol86] ou plasmas pré-formados[SH90] foi intensamente estudada como forma de se transportar feixes intensos por longas distâncias com aplicações em experimentos de fusão nuclear.

As intensidades do feixe e densidades do gás residual consideradas nestes trabalhos são bem maiores que os valores encontrados em aceleradores circulares. De fato, efeitos de neutralização não representaram limitações importantes ao funcionamento dos primeiros aceleradores circulares porque os tempos de ionização típicos eram longos em comparação com o tempo de permanência do feixe no interior da máquina. É com o surgimento dos *anéis de armazenamento*, nos quais feixes podem circular durante muitas horas, que o aprisionamento de partículas neutralizantes em feixes de aceleradores tornou-se um problema relevante.

Bernardini[Ber58] e Fischer[Fis60] foram possivelmente os primeiros a considerar os efeitos de neutralização de um feixe de elétrons em um síncrotron, mas as primeiras investigações movidas por observações experimentais foram feitas no ACO (Anneaux de Collisions, em Orsay)[Jol63]. Gröbner[OG74], numa longa série de trabalhos experimentais, estudou a neutralização de feixes de prótons por elétrons nos ISR (Intersecting Storage Rings do CERN). O estudo do aprisionamento iônico em feixes pulsados, em sua forma atual, foi iniciado por Kohaupt[Koh71] e Baconnier e Brianti[BB80], com a introdução do conceito de *massa crítica*. Baconnier[Bac84] e mais recentemente Baconnier, Poncet e Tavares[BPT93] revisaram o tema em artigos da CAS (CERN Accelerator School). As seções seguintes são largamente baseadas nestes trabalhos.

### 1.1 A neutralização $\eta$

Os elétrons circulantes em um anel de armazenamento ionizam moléculas do gás residual produzindo íons positivos e elétrons livres. Os elétrons são repelidos para as paredes da câmara de vácuo e os íons são capturados pelo feixe. A densidade de íons aprisionados ao longo da trajetória do feixe cresce até que a taxa de produção de novos íons pelo feixe

seja contrabalançada pela taxa de escape destes íons. Os mecanismos de escape podem ser naturais (ganho de energia por colisões com o feixe, instabilidades do movimento em feixes pulsados) ou artificiais (captura por eletrodos de limpeza) e os detalhes da dinâmica dos íons sob a ação destes vários processos determinam uma densidade estacionária. A neutralização  $\eta$  é definida pela razão desta densidade estacionária de carga neutralizante para a densidade de carga do feixe:

$$\eta(x, y, s) = \frac{\rho_i(x, y, s)}{\rho_e(x, y, s)}. \quad (1.1)$$

A neutralização definida acima dá uma descrição completa da distribuição da carga neutralizante, sendo função da posição  $s$  ao longo da órbita assim como da posição  $(x, y)$  na seção reta do feixe. Em geral, no entanto, estamos interessados apenas em valores médios de  $\eta$  em determinadas regiões da máquina. Assim, na discussão dos efeitos dos íons aprisionados sobre a dinâmica global do feixe (deslocamento de frequências betatron, instabilidades) é conveniente usar uma neutralização média ao longo do anel:

$$\eta = \frac{N_i}{N_e}, \quad (1.2)$$

onde  $N_i$  é a carga neutralizante total medida em unidades da carga eletrônica e  $N_e$  é o número de elétrons armazenados. Se a captura de íons é puramente eletrostática (i.e., devida somente ao feixe e não a confinamento magnético, como pode acontecer em quadrupolos ou dispositivos de inserção), a neutralização máxima ocorre quando a carga neutralizante é igual à carga do feixe e este é dito *totalmente neutralizado*.

Freqüentemente, a neutralização não é homogênea ao longo da órbita e é útil definir um grau de neutralização *local*:

$$\eta(s) = \frac{\lambda_i(s)}{\lambda_e}, \quad (1.3)$$

onde  $\lambda_i(s)$  é a densidade linear de carga neutralizante e  $\lambda_e$  é a densidade linear de carga do feixe,

$$\lambda_e = \frac{I}{\beta c}, \quad (1.4)$$

onde  $I$  é a corrente média do feixe,  $\beta c \approx c$  é a velocidade dos elétrons e  $c$  é a velocidade da luz.

## 1.2 Modelos do feixe de elétrons – ordens de grandeza

O feixe de elétrons em um anel de armazenamento apresenta uma estrutura temporal pulsada, com os elétrons distribuídos em *pacotes* e uma distribuição de carga Gaussiana no plano transversal à órbita, com dimensões verticais (em geral) muito mais reduzidas que as horizontais [Cf. Fig.(1.1)]. Para analisar fenômenos que ocorrem em uma escala de tempo longa em comparação com o intervalo entre a passagem de dois pacotes consecutivos, é suficiente considerar a distribuição de carga eletrônica promediada no tempo

$$\rho_e(x, y, s) = \frac{\lambda_e}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right\}, \quad (1.5)$$

pacotes de elétrons

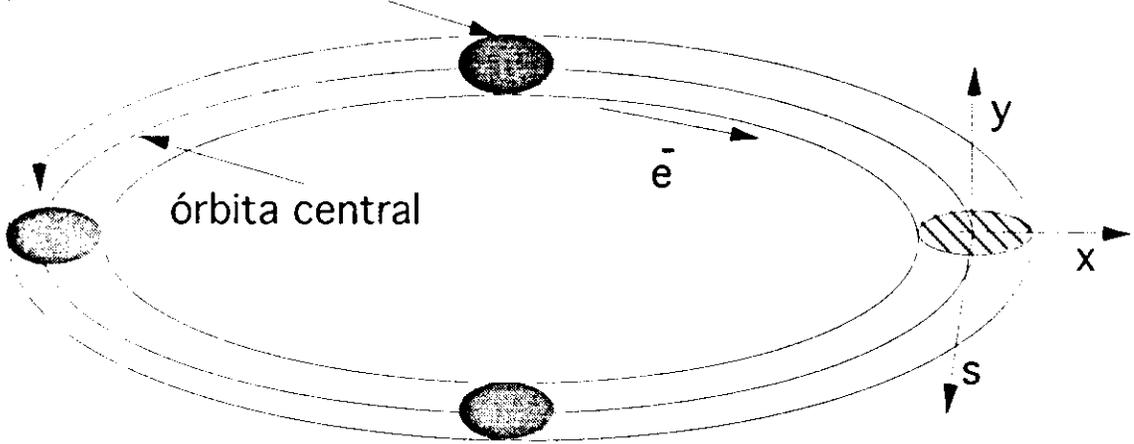


Figura 1.1: Sistema de coordenadas usado para descrever a distribuição de carga do feixe de elétrons. A *órbita central* é aquela traçada por um elétron de energia igual à energia nominal da máquina. Os elétrons executam oscilações horizontais ( $x$  – no plano da órbita) e verticais ( $y$  – perpendicular ao plano da órbita) em torno desta órbita.

Raio	$a$	0.5	mm
Corrente	$I$	50	mA
Energia	$E_0$	500	MeV
Densidade linear	$\frac{\lambda_e}{e_0}$	$1 \times 10^9$	elétrons/m
Densidade volumétrica	$\frac{\rho_e}{e_0}$	$1.25 \times 10^{15}$	elétrons/m <sup>3</sup>

Tabela 1.1: Parâmetros para modelo cilíndrico do feixe do EPA.

onde  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são as larguras quadráticas médias das distribuições horizontal e vertical (que podem depender de  $s$ ). Na verdade, é possível obter as ordens de grandeza de vários parâmetros importantes na determinação da neutralização usando modelos ainda mais simplificados para  $\rho_e$ . O modelo mais simples é um feixe contínuo cilíndrico de raio  $a$  com densidade de carga uniforme:

$$\rho_e(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda_e}{\pi a^2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > a^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Utilizarei também um feixe de densidade de carga homogênea no interior de uma elipse de semi-eixos  $\sqrt{2}\sigma_x$  e  $\sqrt{2}\sigma_y$ :

$$\rho_e(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda_e}{2\pi\sigma_x\sigma_y} & \text{se } \frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \leq 1 \\ 0 & \text{se } \frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} > 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

A Tab.(1.1) mostra valores numéricos típicos dos parâmetros do modelo cilíndrico do feixe do EPA.

### 1.3 Ionização por impacto electrônico

A seção de choque de ionização de um átomo ou molécula por impacto de uma partícula rápida[Bet30, Ino71] depende apenas da velocidade e do módulo da carga e não da massa da partícula incidente e é dada, para partículas incidentes relativísticas, por<sup>1</sup>:

$$\sigma^i = 4\pi \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \left\{ M_0^2 \left( \frac{1}{\beta^2} \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right] - 1 \right) + \frac{C_0}{\beta^2} \right\}, \quad (1.8)$$

onde os coeficientes  $M_0^2$  e  $C_0$  são propriedades do alvo,  $m_e$  é a massa do elétron e  $\hbar$  é a constante de Planck. A expressão acima (fórmula assintótica de Bethe), sendo decorrente da aproximação de Born, permite a extrapolação<sup>2</sup> de dados experimentais obtidos a energias relativamente baixas (alguns MeV) para as energias muito mais altas de interesse em anéis de armazenamento de elétrons (centenas de MeV).

A seção de choque de ionização *primária* de Bethe [Eq.(1.8)] não considera a ionização adicional produzida por elétrons secundários de baixa energia (raios  $\delta$ ). Uma comparação (Cf. Apêndice B) do livre caminho médio entre duas colisões ionizantes de um elétron de baixa energia com o comprimento da trajetória que ele deve percorrer até chegar à câmara de vácuo mostra que, para as pressões encontradas em anéis de armazenamento, a ionização secundária é de fato desprezível.

A taxa de ionização de moléculas de um dos componentes do gás residual é:

$$R_i = \frac{IL\rho_g\sigma^i}{e_0} = \frac{N_e}{\tau_i}, \quad (1.9)$$

onde  $L = 2\pi R$  é a circunferência da máquina,  $\rho_g$  a densidade do gás residual e  $N_e = \frac{IL}{e_0 c}$  o número de elétrons circulantes. O tempo de neutralização  $\tau_i = \frac{1}{\rho_g\sigma^i c}$  é o tempo necessário para que se produzam íons em quantidade suficiente para neutralizar completamente o feixe. Se há vários componentes no gás residual, podemos definir um tempo de neutralização  $\tau_i^n$  para cada um deles e um tempo de neutralização total

$$\frac{1}{\tau_i^t} = \sum_n \frac{1}{\tau_i^n}. \quad (1.10)$$

Note que  $\tau_i^t$  depende apenas da composição e densidade do gás residual e da energia dos elétrons, mas não depende da intensidade do feixe.

A Tab.(1.2) mostra os valores medidos por Rieke e Prepjchal[RP72] das constantes  $M_0^2$  e  $C_0$  para o hidrogênio molecular e o monóxido de carbono, assim como as taxas de ionização e tempos de neutralização. A composição e pressão do gás residual assumida aqui é típica da situação encontrada no EPA e em fontes de luz síncrotron.

A distribuição de energia dos elétrons secundários produzidos nas colisões ionizantes também pode ser calculada pela teoria de Bethe[MCKY72]<sup>3</sup>. Enquanto os elétrons podem

<sup>1</sup>Esta equação é válida para qualquer seção de choque inelástica *total*. i.e., qualquer processo em que somente o estado final do átomo alvo mas não o do projétil é especificado.

<sup>2</sup>A validade deste procedimento foi confirmada recentemente por medidas a altas energias[ISGI93].

<sup>3</sup>O caso particular de ionização de átomos de hélio por um feixe de prótons foi analisado por Tavares[Tav93].

	H <sub>2</sub>	CO	Total	
$M_0^2$	0.7	3.7	—	—
$C_0$	8.1	35.1	—	—
Pressão	0.7	0.3	1.0	ntorr
$\rho_g$	2.2	0.97	3.2	$10^{13}$ moléculas/m <sup>3</sup>
$\tau_i$	4.7	1.0	0.82	s
$R_i$	0.28	1.3	1.58	$10^{11}$ íons/s

Tabela 1.2: Tempos de neutralização e taxas de ionização no EPA (energia cinética dos elétrons  $E_0 = 500$  MeV). As taxas de ionização correspondem um feixe de 50 mA [Tab.(1.1)].

receber quantidades de energia significativas durante a colisão, os íons, de massa muito maior, recebem energias desprezíveis em comparação com as energias térmicas, características da distribuição de velocidades das moléculas do gás residual.

Outros processos atômicos causados por impacto eletrônico são importantes na determinação dos níveis de neutralização, como ionização múltipla e dissociação molecular. Tais processos podem também ser descritos pela Eq.(1.8) (Cf. Capítulo 2). Além disso, fotoionização do gás residual pela intensa radiação síncrotron emitida pelos elétrons aumenta a taxa de produção de íons nas regiões próximas aos ímãs dipolares (ou dispositivos de inserção). Cálculos[MTH88] mostram que a taxa adicional (localizada) é aproximadamente a metade da taxa de ionização devido à colisões, para uma larga faixa de energia do feixe de elétrons.

## 1.4 Dinâmica de íons aprisionados – feixes contínuos

Nas próximas seções, analiso o movimento de um íon sob a ação dos campos eletromagnéticos produzidos pelo feixe de elétrons e pelos ímãs do anel. Assumo aqui um feixe contínuo cilíndrico de raio  $a$ , com distribuição de carga dada pela Eq.(1.6) circulando em uma câmara de vácuo circular de raio  $b$  aterrada e concêntrica ao feixe.

### 1.4.1 Seções retas livres

Na ausência de campos externos, os íons movimentam-se no potencial eletrostático do feixe:

$$V(r) = V_0 \begin{cases} \frac{r^2}{2a^2} - \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{b}{a}\right) & r < a \\ -\ln\left(\frac{b}{r}\right) & a < r < b \end{cases}, \quad (1.11)$$

com

$$V_0 = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c}, \quad (1.12)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . O campo elétrico no interior do feixe é radial e varia linearmente com a distância ao centro e cai com  $1/r$  na região entre o feixe e a câmara:

$$\mathcal{E}(r) = \frac{V_0}{a^2} \begin{cases} r & r < a \\ \frac{a^2}{r} & a < r < b \end{cases}, \quad (1.13)$$

O potencial do centro da câmara em relação à câmara de vácuo (a *profundidade do poço*) :

$$V_d = V_0 \left\{ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right\}, \quad (1.14)$$

determina a energia necessária para que um íon possa escapar do poço de potencial. Para os parâmetros do EPA [Fig.(1.2)], esta energia é uma a duas ordens de grandeza superior às energias térmicas ( $\approx 1/40$  eV) e podemos supor que os íons nascem em repouso e são todos aprisionados. O movimento subsequente é uma oscilação harmônica simples com frequência angular:

$$\omega_0^2 = \frac{Qe_0V_0}{Am_p c^2} \left( \frac{c}{a} \right)^2 = \frac{e_0 I}{2\pi\epsilon_0 c Am_p a^2} Q, \quad (1.15)$$

onde  $m_p$  é a massa do próton,  $A$  é o número de massa do íon e  $Q$  seu estado de ionização. A profundidade do poço de potencial varia com as dimensões do feixe e da câmara de vácuo, sendo maior onde o feixe é pequeno e a câmara grande [Fig.(1.3)]. Variações longitudinais da geometria da câmara de vácuo e do feixe podem causar o surgimento de bolsões de captura de íons com profundidades de vários eV [Fig( 1.4)].

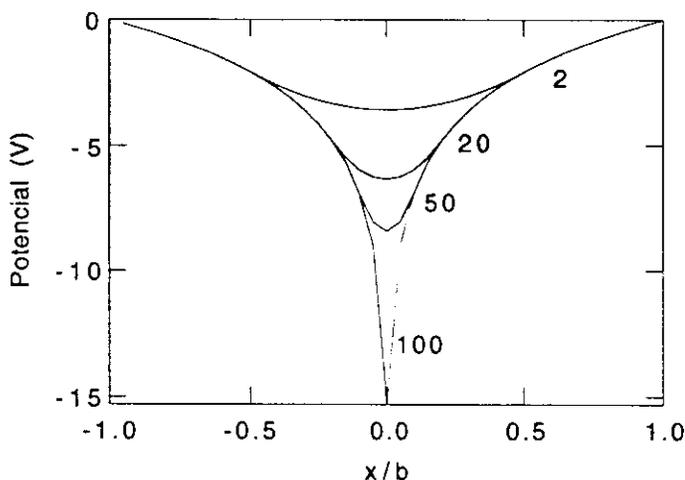


Figura 1.2: Poço de potencial para diferentes tamanhos do feixe. O número ao lado de cada curva é a razão  $b/a$ . A corrente é 50 mA.

Cálculos da distribuição de potencial e campo do feixe para geometrias mais realistas foram realizados por vários autores. De especial importância são os resultados para o campo elétrico de um feixe elíptico [Eq.(1.7)] em pontos no interior do feixe[Reg77]:

$$\mathcal{E}_{x,y} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{[x,y]}{\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (1.16)$$

e para o campo elétrico de um feixe Gaussiano[BE80] [Eq(1.5)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \mathcal{A} \operatorname{Im}(Z) \\ \mathcal{E}_y &= \mathcal{A} \operatorname{Re}(Z), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

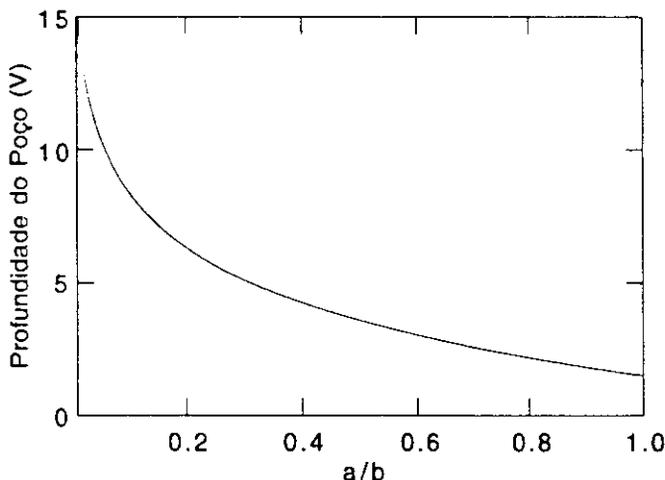


Figura 1.3: Profundidade do poço em função do raio do feixe. A corrente é 50 mA.

onde

$$\mathcal{A} = \frac{\lambda_e}{2\epsilon_0 \sqrt{2\pi(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}},$$

$$\mathcal{Z} = w \left[ \frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right] - \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right] w \left[ \frac{x \frac{\sigma_y}{\sigma_x} + iy \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right] \quad (1.19)$$

e  $w(z)$  é a função erro complexa[AS70] :

$$w(z) = e^{-z^2} \left\{ 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{\chi^2} d\chi \right\}. \quad (1.20)$$

## 1.4.2 Dipolos – Deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Na presença do campo magnético vertical homogêneo dos ímãs dipolares, os íons realizam movimento cicloidal (deriva em campos cruzados) semelhante àquele analisado por Jackson[Jac75]. A diferença aqui é que o campo elétrico não é homogêneo, mas varia linearmente de zero no centro do feixe até um valor máximo na borda do feixe. As equações de movimento para um íon no interior do feixe são<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\omega_0^2 x - \omega_c v_s \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_0^2 y \\ \frac{dv_s}{dt} &= \omega_c v_x, \end{aligned} \quad (1.21)$$

<sup>4</sup>Suponho que o raio de curvatura do dipolo é muito maior que o raio do feixe, de forma que o a direção s pode ser considerada fixa.

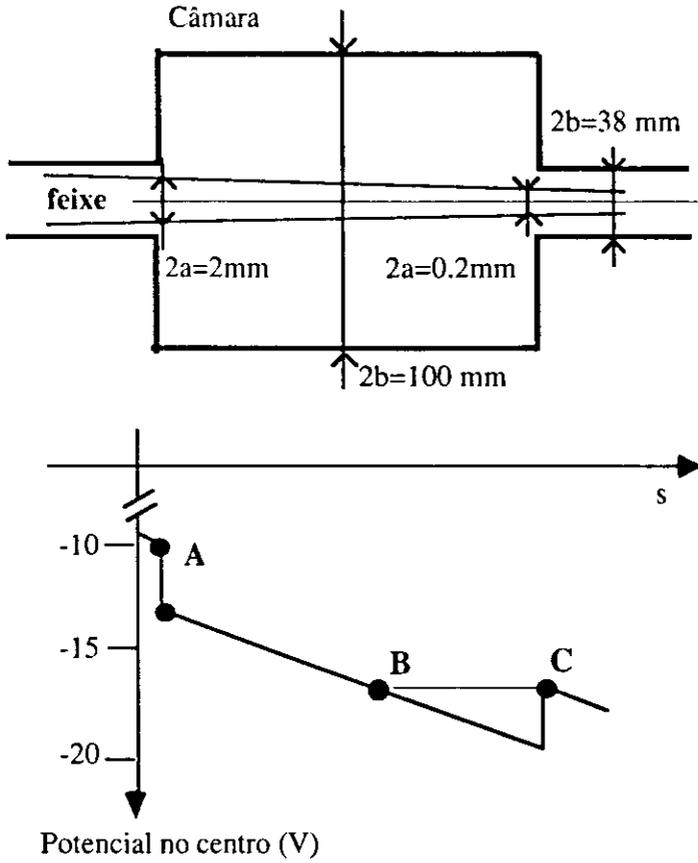


Figura 1.4: Variações da profundidade do poço de potencial devido às variações na geometria da câmara de vácuo e do feixe. Um bolsão de neutralização pode surgir entre os pontos B e C. A corrente é 50 mA.

onde  $\omega_c = \frac{Q\epsilon_0 B_0}{Am_p}$  é a frequência cíclotron. A solução é:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \frac{v_{x0}}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{\omega_0^2 x_0 + \omega_c v_{s0}}{\Omega^2} (\cos \Omega t - 1) \\
 v_x(t) &= v_{x0} \cos \Omega t - v_{s0} \frac{\omega_c}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{\omega_0^2}{\Omega} x_0 \sin \Omega t \\
 y(t) &= y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_{y0}}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\
 v_y(t) &= -y_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + v_{y0} \cos \omega_0 t \\
 s(t) &= s_0 + v_{s0} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} t + \frac{\omega_c^2}{\Omega^3} \sin \Omega t \right\} + x_0 \left\{ \frac{\omega_c \omega_0^2}{\Omega^3} \sin \Omega t - \frac{\omega_c \omega_0^2}{\Omega^2} t \right\} + v_{x0} \left\{ \frac{\omega_c}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) \right\} \\
 v_s(t) &= v_{s0} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_c^2}{\Omega^2} \cos \Omega t \right\} + v_{x0} \frac{\omega_c}{\Omega} \sin \Omega t + x_0 \frac{\omega_c \omega_0^2}{\Omega^2} (\cos \Omega t - 1),
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde  $\Omega^2 = \omega_c^2 + \omega_0^2$ . A velocidade de deriva ao longo de  $s$  é obtida promediando-se  $v_s$  sobre um período de oscilação:

$$\begin{aligned}
 v_d &= \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 v_{s0} - \frac{\omega_c \omega_0^2}{\Omega^2} x_0 = v_{s0} - \left( \frac{\omega_c}{\Omega} \right)^2 \{ v_{s0} - v_d^0 \} \\
 v_d^0 &= \frac{\mathcal{E}_0}{B_0},
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

	H <sub>2</sub> <sup>+</sup>	CO <sup>+</sup>	
$\omega_0$	23.5	6.28	MHz
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	0.27	1	$\mu$ s
$\omega_c$	56.2	4.0	MHz
$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$	0.11	1.56	$\mu$ s
$V_0$	2.88	2.88	V
$V_d$	14.7	14.7	V
$v_d^0$	4.9	4.9	km/s
$v_d$	3.5	1.4	km/s
$v_{th}$	0.5	1.9	km/s

Tabela 1.3: Parâmetros do movimento de íons H<sub>2</sub><sup>+</sup> e CO<sup>+</sup> no feixe do EPA [Tab.(1.1)]. O campo magnético é de 1.17 T e a velocidade de deriva é calculada para um íon criado em repouso na borda do feixe.  $v_{th}$  é a velocidade média (rms) de uma distribuição Maxwelliana à temperatura  $T = 300$  K. A profundidade do poço de potencial  $V_d$  é calculada para uma câmara de vácuo de raio  $b = 50$  mm.

onde  $\mathcal{E}_0$  é o campo elétrico horizontal em  $x_0$  e  $v_d^0(x_0)$  é a velocidade de deriva em um campo elétrico *homogêneo*. Excetuando-se os íons nascidos com  $x_0 \approx 0$ , as velocidades iniciais típicas ao longo do eixo  $s$  (velocidades térmicas) são muito menores que <sup>5</sup>  $v_d^0$ , i.e.,

$$v_d \approx \left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^2 v_d^0 = \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 \omega_c x_0. \quad (1.24)$$

Quando  $\omega_c \gg \omega_0$ ,  $v_d \approx v_d^0$ , os íons realizam movimento cicloidial de raio reduzido e experimentam um campo elétrico essencialmente constante. À medida que  $\omega_0$  aumenta, o raio das órbitas cicloidais também aumenta, o campo elétrico médio visto pelo íon diminui e a velocidade de deriva é reduzida em comparação com o valor em campo elétrico homogêneo<sup>6</sup>,  $v_d^0$ . Como  $v_d^0$  é por sua vez proporcional a  $\omega_0^2$ , a velocidade de deriva tende, para  $\omega_0^2$  grande, a um valor limite [Fig.(1.5 - b)]

$$v_d^{max} = x_0 \omega_c. \quad (1.26)$$

Valores numéricos dos parâmetros do movimento de íons H<sub>2</sub><sup>+</sup> e CO<sup>+</sup> no feixe do EPA são listados na Tab.(1.3) e um exemplo de trajetória é mostrado na Fig.(1.5 - a).

Para íons criados com  $x_0 \approx 0$ , e  $v_{s0} \approx 0$  não há deriva e o movimento é oscilatório no plano  $xs$ .

<sup>5</sup>Note que  $v_d$  tem o mesmo sinal de  $x_0$ , i.e, íons criados em lados opostos do eixo de simetria do feixe derivam em direção a extremidades opostas do ímã.

<sup>6</sup>Isto pode ser visto também da expressão para a amplitude de oscilações em  $x$  [Eq.(1.23)]:

$$x_{max} = \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 x_0. \quad (1.25)$$

onde assumi  $x_0 \omega_0^2 \gg \omega_c v_{s0}$  e  $x_0 \omega_0^2 \gg \Omega v_{x0}$ , i.e., que  $x_0$  é suficientemente grande para que a energia potencial seja grande em comparação com a energia cinética inicial.

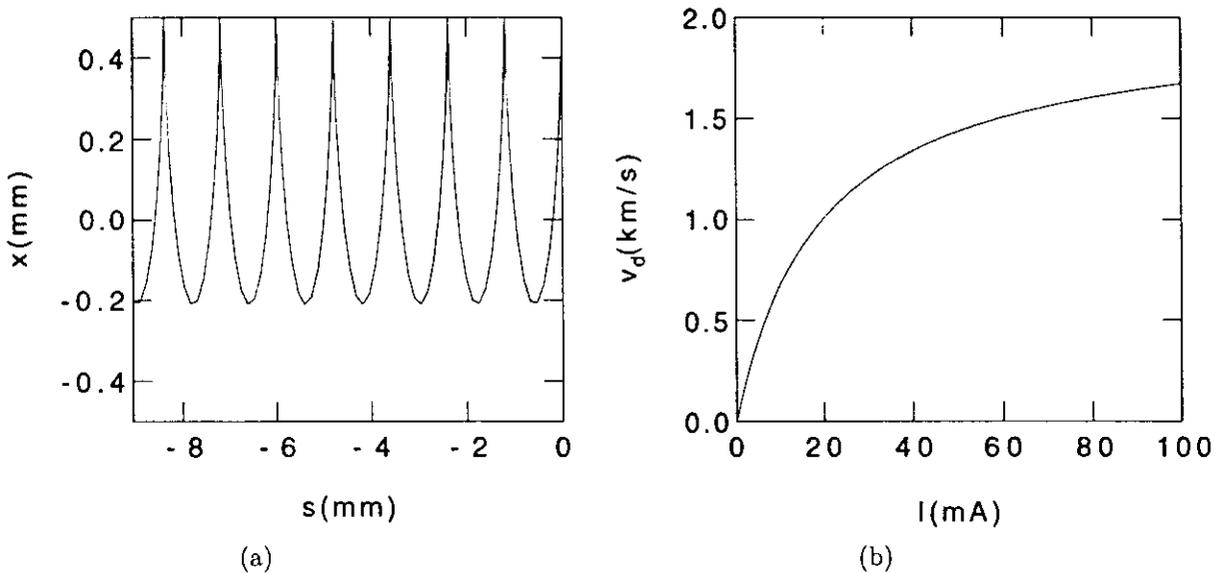


Figura 1.5: Dinâmica de um íon  $\text{CO}^+$  no feixe do EPA dentro dos magnetos dipolares ( $B_0 = 1.17 \text{ T}$ ): (a) Trajetória de um íon criado na borda do feixe ( $x_0 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $s_0 = 0$ ) e em repouso. A corrente é  $I = 50 \text{ mA}$ ; (b) Velocidade de deriva de um íon criado em repouso na borda do feixe em função da corrente.

### 1.4.3 Outros elementos

Jolivot[Jol63] e Baconier et al[BPT93] analisaram a dinâmica de íons aprisionados em campos magnéticos com gradientes transversais (quadrupolos) e longitudinais (campos de borda) e verificaram a possibilidade de deriva longitudinal (*gradient drift*) e confinamento por um efeito de *garrafa magnética*. Cálculos detalhados do movimento longitudinal dos íons, com simulações em computador foram feitos por Miyahara[MTH88] e Sagan[Sag91b]. O aprisionamento no campo de dispositivos de inserção foi estudado por Bochetta e Wrulich[BW88].

## 1.5 Dinâmica em feixes agrupados – a massa crítica

Considero agora a dinâmica de íons aprisionados em um feixe pulsado: a força restauradora que mantém os íons oscilando em torno do eixo de simetria do feixe de elétrons passa a ser dependente do tempo. Por simplicidade, suponho um feixe com pacotes retangulares de largura  $t_b = \sqrt{2}\sigma_s c$  e taxa de repetição  $\frac{n_b}{T_r}$  onde  $n_b$  é o número de pacotes e  $T_r$  o período de revolução. A corrente de pico é relacionada à corrente média pelo *fator de empacotamento*

$$\begin{aligned} B &= \frac{n_b t_b}{T_r} \\ \hat{I} &= \frac{I}{B}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

A seqüência de pacotes de elétrons separados por espaços livres é vista pelos íons (que se movem muito mais lentamente que os elétrons do feixe) como uma rede periódica de lentes focalizadoras e o formalismo matricial de Courant-Snyder[CS58] pode ser aplicado a esta malha

focalizadora (com o tempo como variável independente). Durante a passagem de um pacote, a equação de movimento para um íon no interior de um feixe elíptico [Cf. Eqs.(1.7) e (1.16)] é:

$$\frac{dv_z}{dt} = -\hat{\omega}_z^2 z, \quad (1.28)$$

onde  $z$  refere-se a  $x$  ou  $y$  e

$$\hat{\omega}_z^2 = \frac{\omega_z^2}{B} = \frac{e_0 Q \lambda_e}{A m_p 2 \pi \epsilon_0 B} \frac{1}{\sigma_z (\sigma_x + \sigma_y)}. \quad (1.29)$$

O efeito da passagem de um pacote pode ser descrito por uma matriz de transferência:

$$\begin{pmatrix} z_f \\ v_{zf} \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} z_0 \\ v_{z0} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

onde

$$M_B = \begin{pmatrix} \cos(\hat{\omega}_z t_b) & \frac{1}{\hat{\omega}_z} \sin(\hat{\omega}_z t_b) \\ -\hat{\omega}_z \sin(\hat{\omega}_z t_b) & \cos(\hat{\omega}_z t_b) \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

O espaço livre entre dois pacotes é descrito pela matriz

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

onde  $\Delta = \frac{T_r}{n_b} - t_b$  é o intervalo de tempo entre dois pacotes. A matriz de transferência para um período (um pacote + 1 espaço livre) é:

$$M_P = \begin{pmatrix} \cos(\hat{\omega}_z t_b) - \Delta \hat{\omega}_z \sin(\hat{\omega}_z t_b) & \frac{1}{\hat{\omega}_z} \sin(\hat{\omega}_z t_b) + \Delta \cos(\hat{\omega}_z t_b) \\ -\hat{\omega}_z \sin(\hat{\omega}_z t_b) & \cos(\hat{\omega}_z t_b) \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

A estabilidade do movimento é garantida pela condição:

$$|\text{Tr}(M_P)| < 2, \quad (1.34)$$

ou

$$-2 < 2 \cos(\hat{\omega}_z t_b) - \Delta \hat{\omega}_z \sin(\hat{\omega}_z t_b) < 2. \quad (1.35)$$

No limite de pacotes curtos,  $t_b \rightarrow 0$ , a condição acima pode ser escrita na forma:

$$0 < t_b \hat{\omega}_z^2 \frac{T_r}{n_b} < 4, \quad (1.36)$$

ou  $A/Q > A_c^z$ , onde a *massa crítica* (ou razão massa-carga crítica) é (em unidades de massa atômica por carga elementar)

$$A_c^z = \frac{e_0 \lambda_e T_r^2}{8 \pi \epsilon_0 m_p n_b^2 \hat{\omega}_z (\sigma_x + \sigma_y)} = \frac{r_p N_e L}{2 n_b^2 \sigma_z (\sigma_x + \sigma_y)}, \quad (1.37)$$

onde  $r_p$  é o raio clássico do próton. Somente íons com razão carga-massa superior à massa crítica executam oscilações estáveis<sup>7</sup>. Em anéis de armazenamento de elétrons, geralmente

<sup>7</sup>O mesmo argumento é válido para o aprisionamento de elétrons em feixes agrupados de pósitrons. Devido à sua pequena massa, os elétrons não causam problemas de neutralização em anéis de pósitrons.

temos  $\sigma_x \gg \sigma_y$  e a massa crítica vertical é maior que a horizontal e determina portanto a estabilidade.

O tratamento acima pode ser estendido para considerar o efeito de carga espacial dos próprios íons, introduzindo-se uma matriz de lente defocalizadora nos espaços entre pacotes [BW88]. Assumindo uma distribuição transversal dos íons idêntica à distribuição dos elétrons, a condição de estabilidade fica:

$$A > A_c(1 - \eta), \quad (1.38)$$

onde  $\eta$  é a neutralização média. A redução da massa crítica com o aumento da neutralização pode levar a um efeito de *escada iônica*: íons de alta massa são aprisionados e reduzem a massa crítica, tornando possível o aprisionamento de íons de massa menor [BB80].

Variações de intensidade de um pacote para outro ou espaços vazios no trem de pacotes (*gaps*) introduzem defeitos na estrutura focalizadora que alteram as condições de estabilidade, criando bandas de massas estáveis e instáveis. A introdução de *gaps* é prevista como medida de redução da neutralização em vários projetos [Sag91a], em particular em anéis de elétrons para fábricas de mésons, nos quais a utilização de eletrodos de limpeza é difícil.

## 1.6 Aquecimento pelo feixe de elétrons

Uma vez aprisionados, os íons neutralizantes são continuamente bombardeados pelo feixe de elétrons. As colisões de elétrons do feixe com os núcleos dos íons aprisionados transferem energia a eles, constituindo um mecanismo natural de escape do poço de potencial. Nesta seção, estimo as taxas de aquecimento e escape para o feixe do EPA. Ainda que a taxa de escape obtida seja pequena em comparação com a taxa de ionização, o aquecimento por colisões pode ser um efeito importante na determinação da concentração relativa de vários íons em situações de alta neutralização (e.g. em bolsões de neutralização).

Considero primeiramente a possibilidade de um íon receber, numa única colisão, energia suficiente para escapar do poço de potencial. A seção de choque para escape do poço é dada pela integral da seção de choque de transferência de energia [Cf. Apêndice C, Eq.(C.17)] desde a energia média para escape  $e_0V_{av}$  até a energia máxima transferível  $W_m$  [Eq.(C.12)]:

$$\sigma^{SGL} = (Zr_\epsilon)^2 \frac{m_\epsilon}{m_T} \frac{m_\epsilon c^2}{e_0V_{av}} \left\{ 1 - \frac{e_0V_{av}}{W_m} - \frac{e_0V_{av}}{W_m} \ln \frac{W_m}{e_0V_{av}} \right\} \quad (1.39)$$

onde a energia de escape média é<sup>8</sup>

$$e_0V_{av} = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \epsilon_0 V_0 \left( \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) - \frac{r^2}{2a^2} \right) = \frac{e_0V_d}{2} \quad (1.40)$$

e  $m_T$  é a massa do núcleo alvo e subentende-se uma soma sobre os vários núcleos de uma molécula. O tempo de escape correspondente é:

$$\tau_c^{SGL} = \frac{\pi a^2 e_0}{I \sigma^{SGL}} \quad (1.41)$$

<sup>8</sup>Utilizo aqui o modelo de feixe cilíndrico em câmara cilíndrica.

	H <sub>2</sub> <sup>+</sup>	CO <sup>+</sup>	
Colisão única	670	190	s
Colisões múltiplas	27	14	s

Tabela 1.4: Tempo de escape por colisões simples e múltiplas de íons de monóxido de carbono e hidrogênio molecular.

Colisões com parâmetro de impacto grande não são capazes de extrair diretamente os íons mas fazem com que seu vetor de momentum execute um *random walk* em duas dimensões no plano transversal à órbita (muito pouco momentum é transferido na direção de propagação do feixe). O quadrado do módulo do momento (i.e., a energia) aumenta linearmente com o tempo, numa taxa dada por:

$$R_h = \frac{I}{\pi a^2 e_0} \int_{E_{min}}^{e_0 V_{av}} \left( \frac{d\sigma}{dE'} \right)_h E' dE' \quad (1.42)$$

onde a energia mínima (ou parâmetro de impacto máximo) pode ser determinado pelas dimensões do feixe ou efeitos de blindagem [Cf. Apêndice C]. A seção de choque de transferência de energia  $\left( \frac{d\sigma}{dE'} \right)$  assume formas diferentes em diferentes regiões do parâmetro de impacto: para pequenos parâmetros de impacto a carga nuclear total não blindada é usada enquanto que para grandes parâmetros de impacto, apenas a carga residual (assumo  $Q = 1$ ) interage com a partícula incidente:

$$R_h = \frac{I}{\pi a^2 e_0} (2\pi r_e^2) \frac{m_e}{m_T} \frac{m_e c^2}{\beta^2} \left\{ Z^2 \ln \left( \frac{e_0 V_{av}}{E_{min}^{Sh}} \right) + \ln \left( \frac{E_{min}^{Sh}}{E_{min}^g} \right) \right\}, \quad (1.43)$$

onde  $E_{min}^g$  e  $E_{min}^{Sh}$  são as transferências de energia correspondentes aos parâmetros de impacto  $\varrho_{max}^g$  e  $\varrho_{max}^{ShQ}$  respectivamente (Cf. Apêndice C). O tempo de escape é

$$\tau_c^{mul} = \frac{e_0 V_{av}}{R_h}. \quad (1.44)$$

A Tab.(1.4) mostra que os tempos de escape são muito maiores que os tempo de neutralização, i.e., a transferência de energia do feixe aos íons aprisionados é um processo lento<sup>9</sup> e ineficiente. É preciso portanto usar métodos artificiais (eletrodos de limpeza) para evitar que a neutralização chegue a valores inaceitáveis.

## 1.7 Efeitos dos íons sobre o feixe de elétrons

### 1.7.1 Aumento da pressão.

A densidade volumétrica do feixe de elétrons é freqüentemente muito maior que a densidade de moléculas do gás residual (no caso do EPA – Tabs.(1.1) e (1.2) –  $\frac{I_e}{I_z} \approx 50$ ). Por isso, mesmo

<sup>9</sup>Além disso, não estou considerando aqui o efeito contrário (esfriamento dos íons) provocado por colisões com as moléculas do gás residual que compete com o aquecimento pelo feixe.

uma pequena neutralização pode significar um aumento considerável na pressão efetiva vista pelos elétrons. Isto afeta negativamente o desempenho da máquina, aumentando a emitância do feixe e diminuindo o tempo de vida. A pressão iônica equivalente é dada por:

$$P_i = \eta \rho_c k_B T \quad (1.45)$$

## 1.7.2 Deslocamento e dispersão da sintonia

Os elétrons em um anel de armazenamento realizam oscilações [*oscilações bétatron* Cf. Fig.(1.1)] horizontais ( $x$ ) e verticais ( $y$ ) em torno de uma órbita central cujas frequências são determinadas pelo arranjo periódico dos elementos magnéticos guidores (dipolos) e focalizadores (quadrupolos)[San71]. Em *aproximação macia*, o desvio de um elétron em relação à órbita central satisfaz uma equação de oscilador harmônico simples<sup>10</sup>:

$$\ddot{z} + \left(\frac{\omega_{\beta_z}}{c}\right)^2 z = 0, \quad (1.46)$$

onde os pontos denotam diferenciação com relação a  $s$  e a frequência bétatron relaciona-se com a *sintonia*  $Q_z$  por

$$\omega_{\beta_z} = Q_z \omega_r, \quad (1.47)$$

$\omega_r$  é a frequência angular de revolução e  $z$  refere-se a  $x$  ou  $y$ . Os valores das sintonias horizontal e vertical definem o *ponto de operação* da máquina. No projeto de um anel, a escolha do ponto de operação é feita de forma a evitar valores que obedeçam à condição[Gui78]:

$$mQ_x + nQ_y = p, \quad (1.48)$$

onde  $m$ ,  $n$  e  $p$  são inteiros. A razão é que nestas sintonias o feixe é vulnerável a ressonâncias produzidas por erros de construção inevitavelmente presentes em uma máquina real. Somente ressonâncias de baixa ordem (i.e., para as quais  $|m| + |n|$  é um número pequeno) são usualmente importantes. A Fig.(1.6) mostra o ponto de operação do EPA e as linhas de ressonância de até terceira ordem.

A presença de uma nuvem de íons ao longo da órbita introduz uma força focalizante adicional e altera as frequências bétatron deslocando o ponto de operação e podendo levar o feixe a uma condição de ressonância.

Calculo primeiramente o deslocamento de sintonia produzido por uma nuvem iônica elíptica homogênea com dimensões iguais às dimensões do feixe [Eq.(1.7)]. A força focalizante é:

$$F_z = e_0 E_z = \frac{e_0 \eta \lambda_e z}{2\pi \epsilon_0 \sigma_z (\sigma_x + \sigma_y)} \quad (1.49)$$

e a variação de sintonia correspondente é[San71]:

$$\Delta Q_z = \frac{1}{4\pi E_0} \int \frac{dF_z}{dz}(s) \beta_z(s) ds. \quad (1.50)$$

<sup>10</sup>As oscilações bétatron não são harmônicas devido à variação da força focalizadora ao longo da órbita. Aqui, apenas a força focalizadora média ao longo da órbita é considerada.

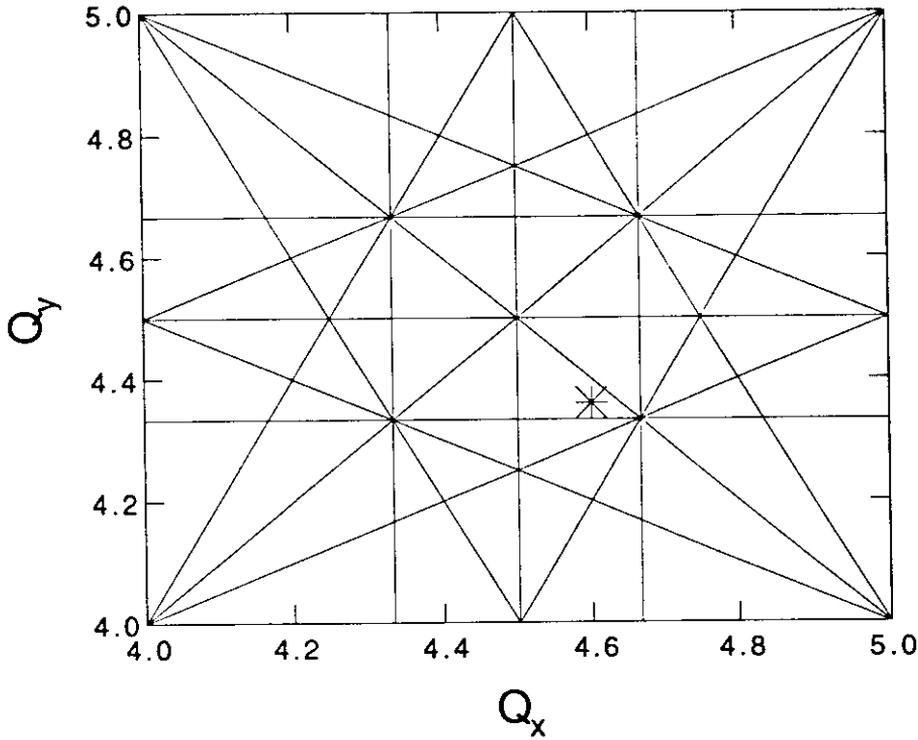


Figura 1.6: Diagrama de sintonia mostrando o ponto de operação do EPA (asterisco) e linhas de ressonância de até terceira ordem.

onde a integração é feita ao redor da máquina e  $\beta_z(s)$  é a *função bétatron*, uma propriedade da rede magnética cujo quadrado descreve o envelope do feixe. Das Eqs.(1.49) e (1.50) obtenho:

$$\Delta Q_z = \frac{r_e N_e \eta}{2\pi\gamma} \left\langle \frac{\beta_z(s)}{\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y)} \right\rangle_s, \quad (1.51)$$

onde  $\langle \rangle_s$  indica uma média ao redor da máquina. Em aproximação macia,  $\beta_z = R/Q_z$ , e a equação acima pode ser reescrita:

$$\Delta Q_z = \frac{r_e N_e \eta}{2\pi\gamma} \frac{R}{Q_z} \frac{1}{\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y)}. \quad (1.52)$$

Para feixes planos ( $\sigma_x \gg \sigma_y$ ), o deslocamento de sintonia é maior no plano vertical<sup>11</sup>. Para o EPA, com  $\sigma_x = 0.6$  mm,  $\sigma_y = 0.2$  mm,  $R = 18$  m,  $Q_y = 4.36$  e  $N_e = 1 \times 10^{11}$  elétrons, obtenho  $\Delta Q_y = 1.2\eta$  e concluo que a neutralização deve ser mantida abaixo de alguns poucos por cento para evitar o cruzamento de ressonâncias.

Se a distribuição de carga dos íons aprisionados não é homogênea, o desvio de sintonia experimentado por um elétron depende de sua amplitude de oscilação bétatron. Assim, a nuvem iônica introduz não só um desvio mas também uma *dispersão* de freqüências bétatron. Para estimar esta dispersão, considero um modelo uni-dimensional, válido para a distribuição

<sup>11</sup>Além disso, a Eq.(1.52) mostra que feixes de baixa energia são mais sensíveis aos efeitos da neutralização.

de carga vertical de feixes planos ( $\sigma_x \gg \sigma_y$ ). A força focalizante dos íons é:

$$F_y = \frac{e_0}{\epsilon_0} \int_0^y \rho_i(y') dy', \quad (1.53)$$

onde  $\rho_i(y)$  é a densidade volumétrica de carga iônica, que suponho só depender de  $y$ . O desvio de sintonia correspondente é proporcional ao gradiente de  $F_y$ :

$$\frac{dF_y}{dy}(y) = \frac{e_0 \rho_i(y)}{\epsilon_0}, \quad (1.54)$$

que é função de  $y$ . Para um elétron oscilando com amplitude  $y_0$ ,

$$y(\theta) = y_0 \cos(Q_y \theta), \quad (1.55)$$

onde substituí a variável independente  $s$  por  $\theta = s/R$ . O valor médio de  $dF_y/dy$  é então:

$$\left\langle \frac{dF_y}{dy} [y(\theta)] \right\rangle_\theta(y_0) = \frac{e_0}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_i[y(\theta)]}{2\pi/Q_y} = \frac{e_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \rho_i(y_0 \cos \phi) d\phi. \quad (1.56)$$

O deslocamento de sintonia para uma partícula de amplitude  $y_0$  é então (na aproximação macia):

$$\Delta Q_y(y_0) = \frac{R^2}{Q_y} \frac{e_0}{\pi \epsilon_0 \gamma m_e c^2} \int_0^{y_0} \frac{\rho_i(y) dy}{\sqrt{y_0^2 - y^2}} = \frac{R^2}{Q_y} \frac{4r_e}{\gamma e_0} \int_0^{y_0} \frac{\rho_i(y) dy}{\sqrt{y_0^2 - y^2}}. \quad (1.57)$$

No caso de uma distribuição de carga iônica Gaussiana

$$\rho_i(y) = \frac{\eta \lambda_e}{2\pi \sigma_x^i \sigma_y^i} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^i}\right), \quad (1.58)$$

obtenho

$$\Delta Q_y(y_0) = \frac{R^2 \eta \lambda_e r_e}{Q_y \pi \sigma_x^i \sigma_y^i e_0 \gamma} \int_0^2 \frac{e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma_y^i} \xi}}{\sqrt{\xi} \sqrt{2 - \xi}} d\xi, \quad (1.59)$$

onde  $\xi = 2 \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$  e finalmente (ref.[GR80], fórmula 3.4.2) [Cf. Fig.(1.7)]

$$\Delta Q_y(y_0) = \frac{R^2 \eta \lambda_e r_e}{Q_y \sigma_x^i \sigma_y^i e_0 \gamma} \exp\left(-\frac{y_0^2}{2\sigma_y^i}\right) I_0\left(\frac{y_0^2}{2\sigma_y^i}\right), \quad (1.60)$$

onde  $I_0$  é uma função de Bessel modificada. A curva de distribuição de sintonias é dada por:

$$\frac{dN}{d(\Delta Q_y)} = \frac{dN}{dy_0} \frac{1}{\left| \frac{d\Delta Q_y}{dy_0} \right|}, \quad (1.61)$$

onde

$$\frac{dN}{dy_0} = \frac{y_0}{\sigma_y^2} \exp\left(-\frac{y_0^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (1.62)$$

é a distribuição de amplitudes betatron em um feixe de elétrons Gaussiano. A Fig.(1.8) mostra as curvas de dispersão de sintonia para uma nuvem iônica de mesma largura e outra de largura menor que a largura do feixe de elétrons.

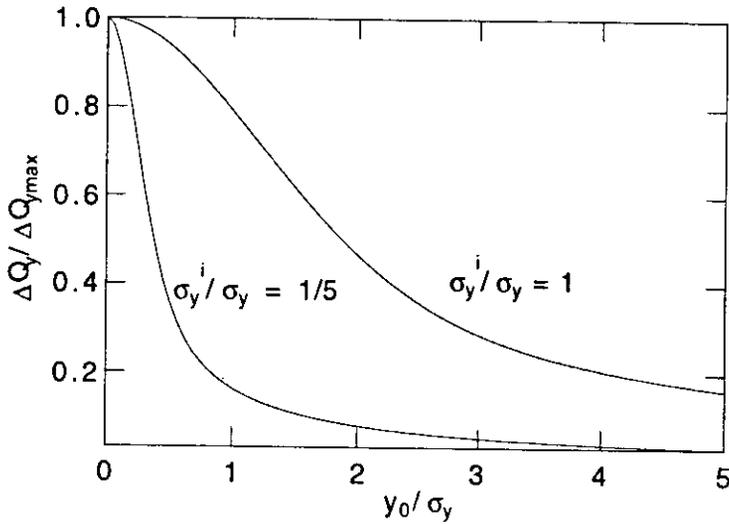


Figura 1.7: Deslocamento de sintonia vertical devido a nuvem iônica Gaussiana de largura RMS  $\sigma_y^i$  em função da amplitude de oscilação bétatron. O deslocamento de sintonia máximo (partículas de amplitude nula) é normalizado para 1. A amplitude é medida em unidades da largura RMS do feixe de elétrons.

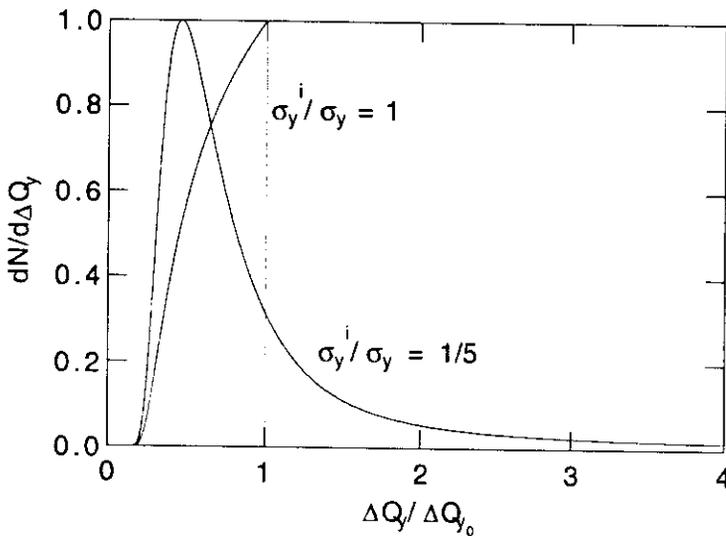


Figura 1.8: Curvas de dispersão de sintonia bétatron vertical para um nuvem iônica Gaussiana de largura RMS  $\sigma_y^i$ .

## 1.8 Curas

Três métodos são comumente usados para extrair íons do feixe: eletrodos de limpeza, excitação ressonante do feixe (*shaking*) e espaços (*gaps*) no trem de pacotes (Cf. seção 1.5).

Eletrodos de limpeza são estruturas metálicas alimentadas com uma alta tensão negativa que cancela localmente o poço de potencial. A distribuição dos eletrodos deve evitar a formação de bolsões de neutralização [Fig.(1.4)] e o potencial deve ser calculado de forma que o campo elétrico seja suficientemente intenso para contrabalançar o campo aprisionador do feixe e ao mesmo tempo suficientemente fraco para não deformar demasiadamente a órbita do feixe de elétrons. Para evitar o estabelecimento de campos induzidos pelo próprio feixe (e que podem interagir com ele, causando instabilidades), os eletrodos têm geralmente terminações casadas para evitar reflexões e conectores resistivos que amortecem os campos induzidos. Mais recentemente, eletrodos dielétricos (placas de cerâmica), revestidos com uma camada resistiva têm sido usados como eletrodos, de forma a minimizar o seu impacto sobre o feixe de elétrons.

A excitação de oscilações transversais do feixe, em frequências próximas às frequências de oscilação dos íons, é utilizada em anéis de anti-prótons de forma rotineira[Orl89].

# Capítulo 2

## Detecção de íons via bremsstrahlung

### 2.1 Introdução

Apesar de muitos anos de estudos teóricos e experimentais, o conhecimento atual do parâmetro básico em problemas de aprisionamento iônico – a neutralização  $\eta$  – é ainda muito limitado. Experimentalmente a neutralização é usualmente estimada a partir de seus efeitos sobre o feixe de elétrons, em particular o deslocamento da sintonia bétatron (Cf. seção 1.7.2) [BGP<sup>+</sup>80]<sup>1</sup>. Na obtenção do grau de neutralização a partir do desvio de sintonia, hipóteses simplificadoras são invariavelmente introduzidas, tanto com relação à dinâmica dos íons aprisionados (a distribuição transversal da carga neutralizante altera o deslocamento da sintonia) quanto a respeito da dinâmica do feixe de elétrons (não somente os íons podem causar deslocamento das sintonias bétatron – é preciso estimar o desvio de sintonia causado por outros processos, como por exemplo a interação do feixe com as paredes metálicas da câmara de vácuo), o que torna a interpretação dos dados bastante difícil. Kobayashi et al[KHBH84] foram os primeiros a utilizar a radiação de frenamento (*bremsstrahlung*) produzida em colisões dos elétrons circulantes com os núcleos dos íons aprisionados como forma de observar *diretamente* os íons. Kobayashi e seus colaboradores verificaram uma correlação entre reduções bruscas no tempo de vida do feixe e aumentos da taxa de contagem de fótons bremsstrahlung.

Mais tarde[KHI<sup>+</sup>86], a contagem bremsstrahlung<sup>2</sup> foi registrada em sincronismo com um aumento repentino das dimensões verticais do feixe (*blow-up*) causado pelos íons aprisionados. A contagem mostrou um decréscimo rápido no momento da explosão vertical, seguido por um crescimento lento que foi atribuído à criação de novos íons. A constante de tempo para este crescimento lento é compatível com o tempo de ionização de moléculas de CO.

Sakanaka et al[SIKK87b, SIKK87a] utilizaram uma excitação ressonante externa para provocar uma explosão do tamanho vertical do feixe e mediram a variação correspondente na contagem de fótons. Como a contagem bremsstrahlung devida às colisões com núcleos

---

<sup>1</sup>Medidas da corrente elétrica drenada por eletrodos de limpeza em anéis de anti-prótons foram extensamente utilizadas como diagnóstico qualitativo da neutralização. A técnica só pode ser aplicada em anéis de elétrons tomando-se medidas para evitar que a corrente iônica seja mascarada pela corrente produzida pela intensa radiação síncrotron que atinge os eletrodos[BPT93].

<sup>2</sup>Aqui e no restante deste capítulo, uso o termo *contagem bremsstrahlung* para me referir ao número de fótons bremsstrahlung detectados por segundo.

de moléculas neutras do gás residual independe das dimensões do feixe, o decréscimo observado nas contagens no momento da explosão vertical foi interpretado como um sinal da presença de íons aprisionados e a comparação entre vários modos de operação confirmou a predição teórica de que um número menor de íons é aprisionado quando há poucos pacotes armazenados.

Watanabe et al[WMOS87] utilizaram vários detectores de raios gama, instalados em seções sucessivas do anel UVSOR, para estudar o movimento longitudinal dos íons aprisionados. Observando a resposta temporal das contagens nestes vários detectores a uma alta tensão pulsada aplicada a um eletrodo de limpeza, os autores calcularam uma dispersão de velocidades para os íons que é consideravelmente maior que a dispersão térmica.

A detecção de bremsstrahlung foi usada ainda por Marin[Mar91] e Saeki et al[SMI91] para observar o aprisionamento de partículas macroscópicas ionizadas (poeira da câmara de vácuo) e por Takada et al[TTT90] para estudar o aprisionamento de íons em um anel compacto.

Ao contrário de medidas do deslocamento da sintonia, que dão informação sobre a neutralização *média* ao longo de toda a máquina, medidas de bremsstrahlung proporcionam informação sobre a densidade *local* de íons aprisionados, o que torna a comparação dos resultados experimentais com modelos teóricos mais fácil, particularmente se a seção reta observada é isolada do restante do acelerador por uma barreira eletrostática. Além disso, medidas do deslocamento da sintonia proporcionam informação sobre a densidade de carga *total*, enquanto que o número de fótons bremsstrahlung produzidos por unidade de tempo depende da composição dos íons aprisionados (CIA), i.e., das densidades relativas das várias espécies aprisionadas no feixe, assim como da densidade de carga total. De fato, a seção de choque para produção de bremsstrahlung (Cf. Apêndice E) é proporcional ao quadrado do número atômico do átomo alvo e a contagem de fótons medida é proporcional a uma média ponderada das densidades iônicas, cada íon participando com um peso  $Z^2$ . Colisões com moléculas neutras do gás residual produzem um bremsstrahlung adicional que deve ser estimado teoricamente a partir da composição conhecida do gás residual, ou experimentalmente, e.g. operando a máquina com pósitrons ou comparando-se as contagens de bremsstrahlung com e sem eletrodos de limpeza em operação.

Neste capítulo, relato uma série de experimentos realizados no Acumulador de Elétrons e Pósitrons (EPA) do CERN, nos quais as contagens bremsstrahlung e as emitâncias do feixe foram medidas em função da corrente armazenada, número de pacotes e tensões em eletrodos de limpeza. Espectros das oscilações transversais do feixe também foram registrados, assim como o efeito de uma excitação externa de rádio-freqüência. Na seção 2.2, descrevo a montagem experimental e discuto as precauções tomadas para evitar o ruído provocado por elétrons perdidos do feixe. Os resultados experimentais são relatados na seção 2.3. A seção 2.4 descreve um modelo simples para o cálculo da contagem bremsstrahlung, no qual a CIA é determinada pelas probabilidades relativas de vários processos de colisão elétron-molécula e elétron-íon, pela intensidade e dimensões transversais do feixe de elétrons e pela pressão e composição do gás residual. Mostro que, se ionização múltipla e dissociação molecular são desconsideradas nos cálculos, a contagem bremsstrahlung resultante é muito maior que os resultados experimentais. A seção 2.5 apresenta uma revisão de resultados teóricos e experimentais de Física Atômica sobre a ionização e dissociação, por impacto eletrônico, do hidrogênio molecular, monóxido de carbono e dos íon deles derivados. Expressões para as

seções de choque são dadas em forma apropriada para as energias de interesse em anéis de armazenamento de elétrons. Finalmente, estas seções de choque são utilizadas na seção 2.6, onde a contagem bremsstrahlung calculada é comparada com os resultados experimentais. Os cálculos predizem que átomos de carbono multiplamente ionizados (até  $C^{+4}$ ) são responsáveis por uma fração apreciável da neutralização de um feixe com 4 pacotes e dão contagens bremsstrahlung compatíveis com as medidas.

## 2.2 Montagem experimental

A Fig.(2.2) mostra uma visão esquemática do EPA e a Tab.(2.1) lista os principais parâmetros da máquina. As dimensões transversais RMS do feixe em um ponto  $s$  qualquer do anel são determinadas pelas funções bétatron horizontal ( $\beta_x$ ) e vertical ( $\beta_y$ ) e pela função dispersão  $D_x$  [Fig.(2.1)]:

$$\begin{aligned}\sigma_x(s) &= \sqrt{\epsilon_x \beta_x(s) + \left(\frac{\delta p}{p} D_x(s)\right)^2} \\ \sigma_y(s) &= \sqrt{\epsilon_y \beta_y(s)},\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $\epsilon_{x,y}$  são as emitâncias horizontal e vertical e  $\delta p/p$  é a dispersão de energia do feixe de elétrons.

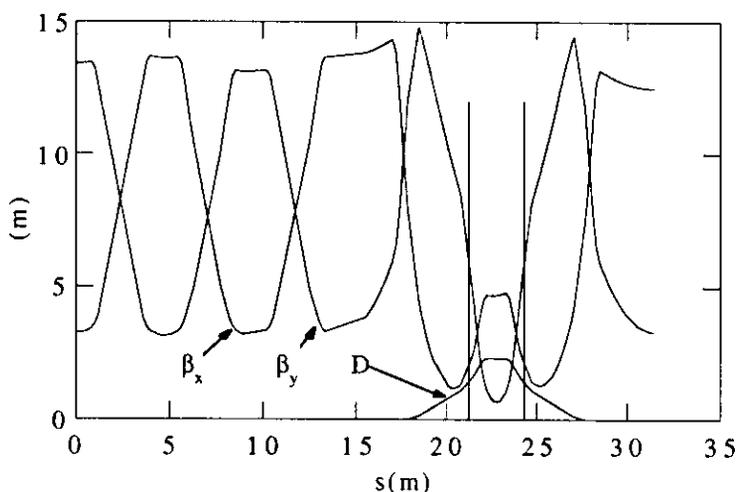


Figura 2.1: Funções óticas do anel EPA. As linhas verticais indicam a região observada com o detector de raios gama.

A Fig.(2.3) mostra uma vista esquemática do arco do EPA que foi utilizado nos experimentos. Fótons bremsstrahlung produzidos ao longo da seção reta de 3.3 metros de comprimento entre os magnetos dipolares BHZ44 e BHZ46 atravessam uma janela de aço inoxidável fina ( $300 \mu\text{m}$ ) e atingem o detector de raios gama (D).

O detector de raios gama é um contador Cherenkov(Cf. Tab. 2.2) de absorção total, composto por um bloco de vidro carregado com chumbo (*lead-glass*) colado à uma foto-multiplicadora (PM). Fótons de alta energia produzem uma cascata eletromagnética no bloco de

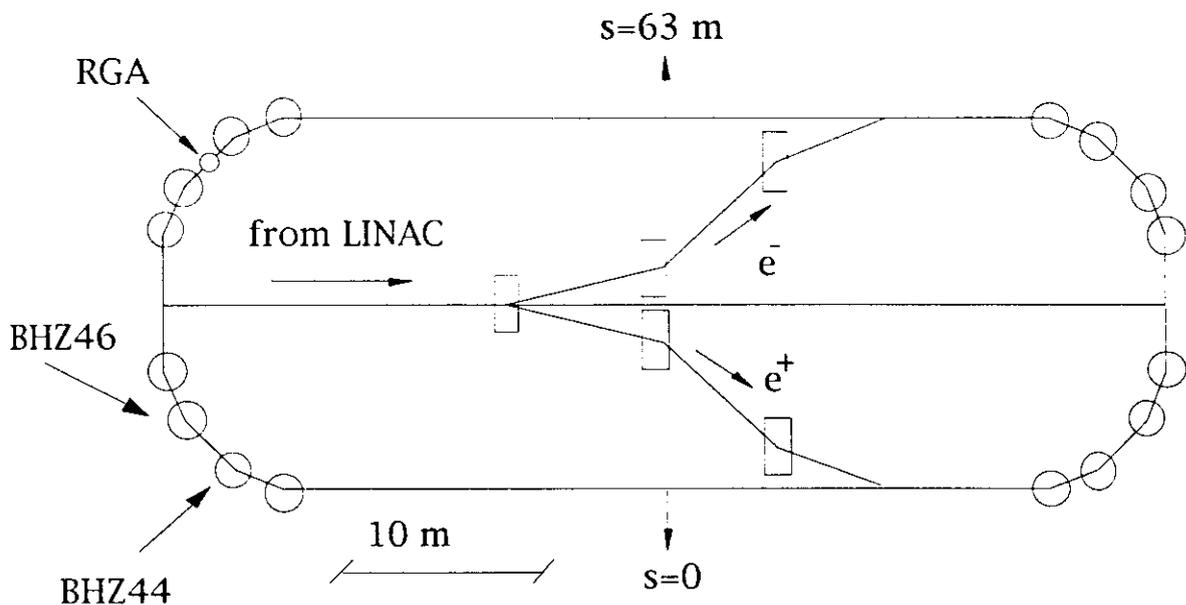


Figura 2.2: Vista geral do EPA, mostrando as linhas de injeção de pósitrons e elétrons. Os círculos indicam as posições dos magnetos dipolares do anel e os retângulos os magnetos dipolares das linhas de transporte. Note a simetria de reflexão e a origem para a coordenada  $s$ . A posição do analisador de gases residuais (RGA) também está indicada.

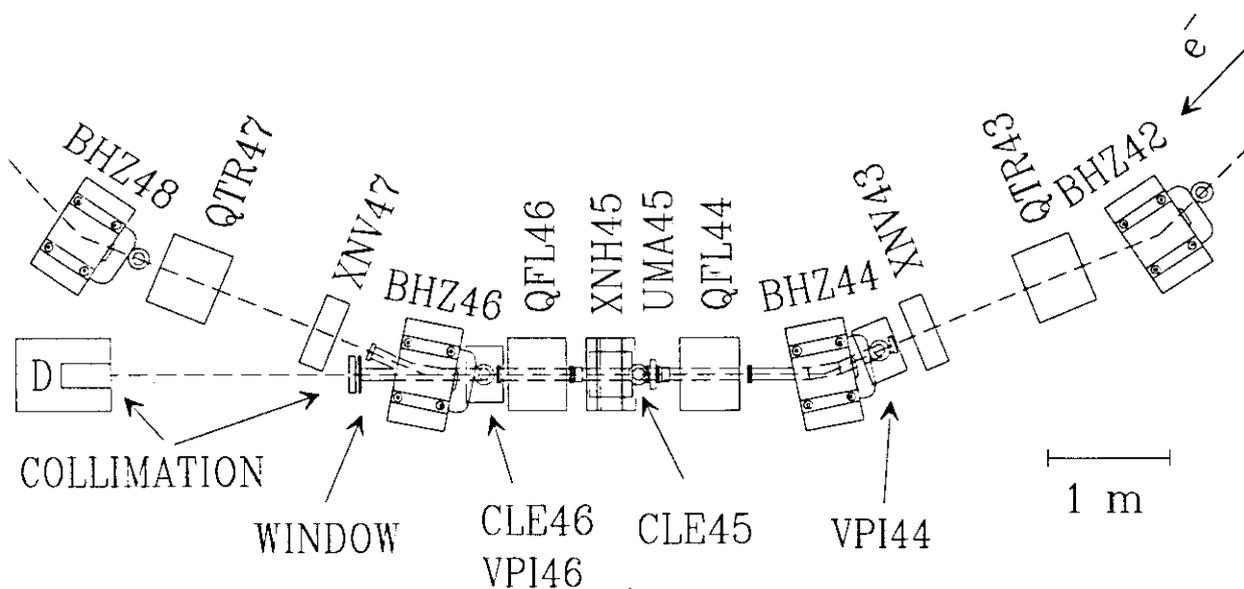


Figura 2.3: Visão esquemática da seção reta do EPA usada nos experimentos. Estão mostrados os magnetos dipolares (BHZ), quadrupolares (QFL, QTR) e sextupolares (XNH), eletrodos de limpeza (CLE), medidores de pressão (VPI), um monitor de posição do feixe de elétrons (UMA) e o detector de raios gama (D).

Energia	$E_0$	500 MeV
Circunferência	$L$	126 m
Sintonia horizontal	$Q_x$	4.60
Sintonia vertical	$Q_y$	4.36
Frequência de RF	$f_{RF}$	19.0852 MHz
Frequência de revolução	$f_r$	2.3856 MHz
Número harmônico	$h$	8
Raio de curvatura dos dipolos	$\rho_B$	1.43 m
Campo dos dipolos	$B_0$	1.17 T

Tabela 2.1: Principais parâmetros do EPA.

Material	SF6-W Lead Glass (Ohara)
Índice de refração a 587 nm	1.806
Transmitância interna a 400 nm	0.8
Comprimento de radiação	1.7 cm
Energia crítica	12.6 MeV
Dimensões	$22 \times 8 \times 8$ cm <sup>3</sup>
Fotomultiplicadora	Hamamatsu R594
Resolução em energia estimada (FWHM)	$\frac{12\%}{\sqrt{E(\text{GeV})}}$

Tabela 2.2: Principais parâmetros do detector de raios gama. A resolução em energia foi estimada considerando-se apenas a estatística de fotoelétrons (Cf. Apêndice H). A transmitância interna corresponde a uma placa de 25 mm.

vidro e a radiação Cherenkov emitida pelos elétrons e pósitrons da cascata é detectada pela fotomultiplicadora. O comprimento total da trajetória das partículas (elétrons e pósitrons) da cascata dentro do bloco de vidro é proporcional à energia do fóton incidente e, como o número de fótons Cherenkov gerados por um elétron por unidade de comprimento da trajetória é aproximadamente independente de sua energia (para elétrons de alguns poucos MeV ou mais), a amplitude dos pulsos da fotomultiplicadora é aproximadamente proporcional à energia do fóton incidente[Fab87].

Os pulsos da fotomultiplicadora são enviados por cabos coaxiais de baixa perda até a sala de controle do EPA, onde eles são amplificados, discriminados em amplitude e contados. O contador é controlado por uma unidade de temporização de forma a acumular contagens por períodos de 10 s seguidos por períodos inativos de 3 s durante os quais os dados são transmitidos a um microcomputador. Após cada período de contagem a intensidade do feixe (medida por um DCCT – direct current current transformer) e as pressões de vácuo obtidas de dois monitores – *ion gauges* VPI46 e VPI44 – são registrados para análise posterior.

O EPA tem 38 eletrodos de limpeza tipo *botão*[Pon83] [Cf. Fig.(2.4)] distribuídos ao longo da máquina. Eles são todos operados na tensão nominal -6 kV exceto os eletrodos

CLE45 e CLE46. que são dotados de fontes de alimentação individuais e podem ser alimentados positivamente (+5 kV) ou negativamente (-6 kV). Cálculos numéricos mostraram que o potencial elétrico no eixo da câmara de vácuo diretamente abaixo do eletrodo para uma tensão aplicada de + 5 kV é 1 kV e que o campo extrator para uma tensão aplicada de -6 kV é 600 V/cm, um valor muito mais alto que o campo aprisionador do feixe de elétrons ( $\approx 50 - 100$  V/cm). Quando alimentados positivamente, os eletrodos CLE45 e CLE46 produzem uma barreira eletrostática longitudinal que impede íons criados entre estes eletrodos de escaparem para eletrodos vizinhos.

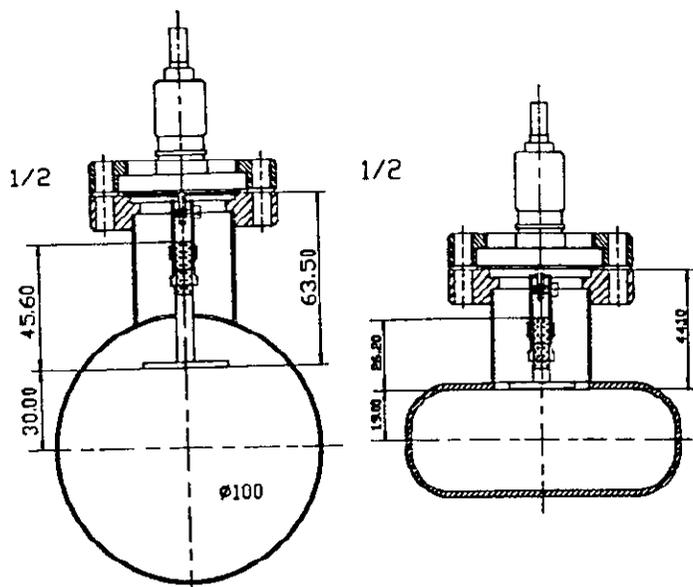


Figura 2.4: Eletrodos de limpeza CLE45 (esquerda) e CLE46 (direita). Dimensões em mm.

Medidas das larguras transversais RMS do feixe de elétrons são feitas com dois conjuntos de foto-diodos que coletam a radiação síncrotron emitida pelo feixe em duas posições ao redor da máquina [BBDFM87] (uma delas numa região com função dispersão  $D_x(s) \approx 0$  e outra com  $D_x(s) \neq 0$ ). As emitâncias e a dispersão de energia são então obtidas com as Eqs.(2.1), utilizando-se os valores calculados das funções óticas [Fig.(2.1)].

Espectros das oscilações transversais do feixe são registrados com um analisador de espectros HP8691A conectado a um monitor de posição vertical. Finalmente, a análise do gás residual é feita com um analisador Balzers QMA120.

Elétrons do feixe perdidos por espalhamento elástico ou inelástico nas moléculas do gás residual ou por espalhamento elétron-elétron (espalhamento Touschek [Bruc62]) constituem fontes potenciais de ruído. Ainda que estes elétrons não possam atingir diretamente o detector já que eles são desviados pelo campo magnético do dipolo BHZ46, fótons gama secundários produzidos nas paredes da câmara de vácuo podem atravessar o campo magnético e produzir contagens espúrias. Um sistema de colimação, constituído por duas fendas de chumbo idênticas de 10 cm de espessura, 20 mm de abertura horizontal e 5 mm de abertura vertical, instaladas, uma junto ao detector e outra próxima à janela da câmara de vácuo [Cf. Fig.(2.3)], evita que a câmara de vácuo seja visível para o detector. Além disso, blocos de chumbo estão dispostos ao redor do detector. Para verificar a eficácia da colimação, as

fendas foram fechadas uma de cada vez e contagens foram medidas. Em ambos os casos a contagem bremsstrahlung caiu a níveis de background ( $\approx 1$  count/sec), confirmando que toda a radiação detectada (com as fendas abertas) passou por *ambas* as fendas e foi produzida portanto no volume de gás e não nas paredes da câmara de vácuo.

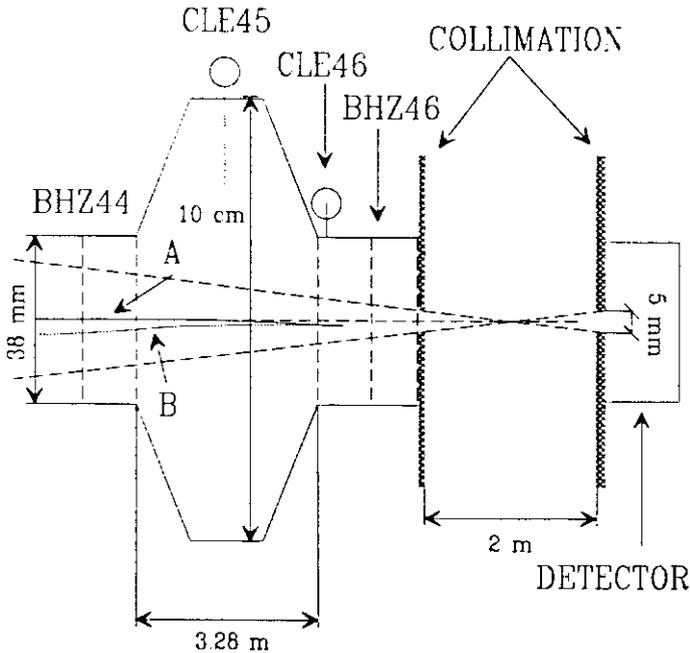


Figura 2.5: Corte vertical da câmara de vácuo do EPA do dipolo BHZ44 ao dipolo BHZ46. Note as diferentes escalas nas direções longitudinal e vertical. Também estão mostrados os eletrodos de limpeza (CLE), o ângulo de aceitação da colimação e a órbita fechada antes (B) e após (A) a correção.

A pequena abertura vertical da colimação é imposta pela necessidade de evitar-se a restrição de abertura da câmara de vácuo dos dipolos BHZ46 e BHZ44 [Cf. Fig.(2.5)]. Em consequência disso, a órbita do feixe de elétrons deve ser cuidadosamente corrigida no plano vertical para evitar que uma fração demasiadamente grande dos fótons bremsstrahlung seja perdida devido a distorções da órbita. Os desvios horizontais e verticais da órbita fechada são medidos com 18 monitores de posição e a órbita é reconstruída ao redor da máquina por meio de uma análise de Fourier (Cf. Apêndice D). A órbita é corrigida com um único dipolo corretor e a órbita resultante é mostrada na Fig.(2.5). A órbita reconstruída e sua inclinação são posteriormente utilizadas para calcular a fração da radiação bremsstrahlung que atinge o detector (Cf. Apêndice F).

Uma seção de tomada de dados típica consiste na injeção de aproximadamente  $10^{11}$  elétrons no EPA (em 1, 2, 4 ou 8 pacotes equidistantes), correção da órbita e verificação das sintonias e tensões dos eletrodos de limpeza. A tomada de dados é então iniciada e prossegue enquanto a intensidade do feixe cai até  $2 \times 10^{10}$  elétrons, com um tempo de vida da ordem de 80 minutos. Em alguns casos, uma fenda vertical é trazida junto ao feixe de forma a aumentar as perdas e diminuir o tempo de aquisição de dados.

Os erros experimentais nas medidas descritas acima variam consideravelmente de uma grandeza para outra. A intensidade do feixe é a grandeza medida com maior precisão

( $\approx 0.1\%$ ), enquanto que a composição do gás residual é a mais sujeita a incertezas. Isto se deve em parte ao fato do analisador de gás não estar situado na seção reta observada com o detector de gamas[Cf. Fig.(2.2)]. As medidas de emitância têm precisão limitada pela resolução da grade de fotodiodos em  $\approx 20\%$ . Estas incertezas propagam-se para as quantidades calculadas a partir das dimensões e intensidade do feixe (densidade do feixe, massa crítica) e podem afetar posteriormente os resultados do modelo teórico descrito na seção 2.4. No entanto, somente valores médios (tomados ao longo da região de aprisionamento efetivo, entre os eletrodos CLE45 e CLE46) destas grandezas são utilizados no modelo e as variações longitudinais das dimensões do feixe associadas às variações das funções bétatron e da função dispersão são maiores que as incertezas experimentais na medida da emitância.

## 2.3 Resultados experimentais

Os resultados experimentais estão expressos em termos da contagem normalizada de fótons bremsstrahlung definida por:

$$R^{tot} = \frac{N_p}{P_g N_e} = R^{gas} + R^{ion}, \quad (2.2)$$

onde  $N_p$  é o número de fótons bremsstrahlung detectados por segundo,  $P_g$  é a pressão de vácuo lida diretamente nos monitores - *gauge pressure* - (média de VPI46 and VPI44) e  $N_e$  é o número de elétrons armazenados. A contagem total é uma soma de contribuições das moléculas neutras do gás residual e dos íons aprisionados. Como a contribuição do bremsstrahlung nas moléculas do gás residual,  $R^{gas}$ , independe da intensidade do feixe, efeitos dos íons aprisionados podem ser identificados em um gráfico de  $R^{total}$  vs  $N_e$  como um desvio de uma linha reta horizontal.

A composição do gás residual dentro da faixa de intensidades do feixe explorada nos experimentos foi 70%  $H_2$  and 30%  $CO$  e a pressão (*gauge pressure*) variou de 0.35 a 0.6 ntorr para  $N_e$  variando de  $2 \times 10^{10}$  a  $1 \times 10^{11}$  elétrons, correspondendo a uma densidade do gás residual de  $1.6$  a  $2.7 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$ . A Fig.(2.6) mostra a contagem bremsstrahlung normalizada em função do número de elétrons armazenados em 1, 2, 4 ou 8 pacotes equidistantes para duas condições diferentes dos eletrodos de limpeza: (1) todos os eletrodos da máquina alimentados com a tensão nominal (-6 kV) e (2) os eletrodos CLE45 e CLE46 alimentados com uma tensão aprisionante +5 kV, todos os eletrodos restantes permanecendo com a tensão nominal. Em todas as formas de enchimento, a tensão de -6 kV foi eficiente em extrair os íons, ainda que algum aprisionamento tenha sido observado. A extrapolação para corrente nula de uma linha reta ajustada à curva de um pacote dá uma estimativa da contribuição do gás residual à contagem total:

$$R_n^{gas} = 200 \text{ fótons/s/ntorr}/10^{11} \text{ elétrons}. \quad (2.3)$$

Todas as curvas para +5 kV mostram um aumento em relação às curvas correspondentes com -6 kV, confirmando que a barreira de potencial longitudinal criada pelos eletrodos alimentados positivamente evitou que íons criados entre os eletrodos aprisionantes escapassem para eletrodos próximos, aumentando assim a contagem bremsstrahlung total. O aumento foi mais pronunciado para 4 e 8 pacotes armazenados que para 1 ou 2 pacotes, o que pode

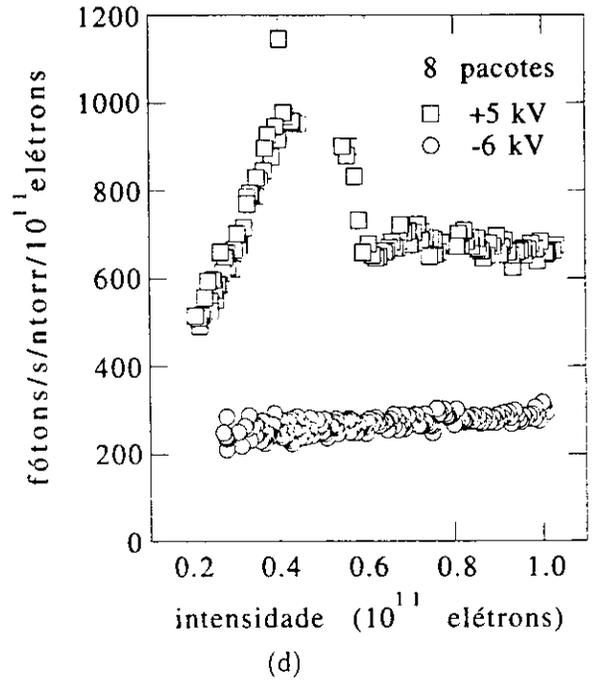
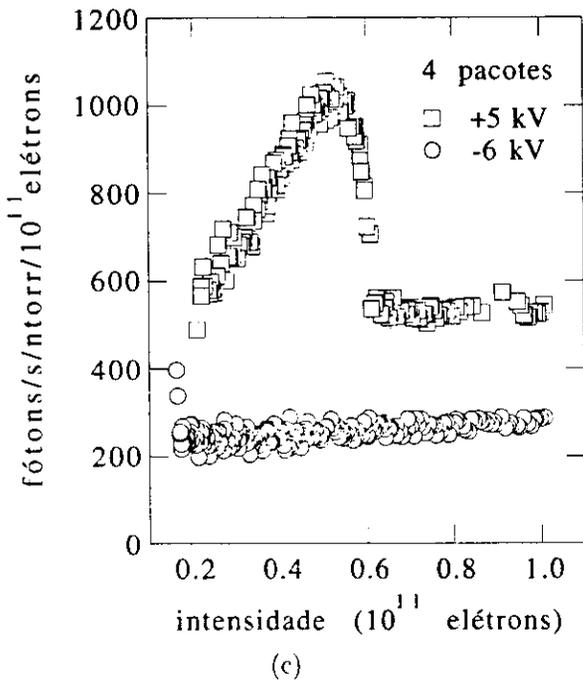
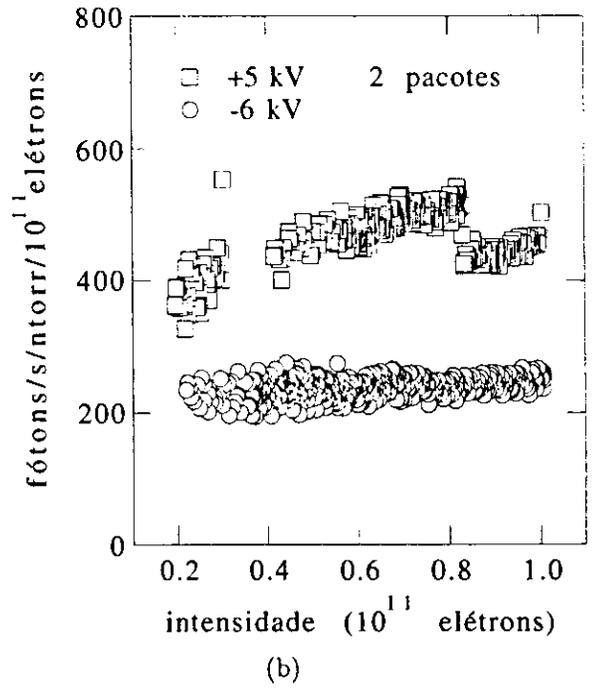
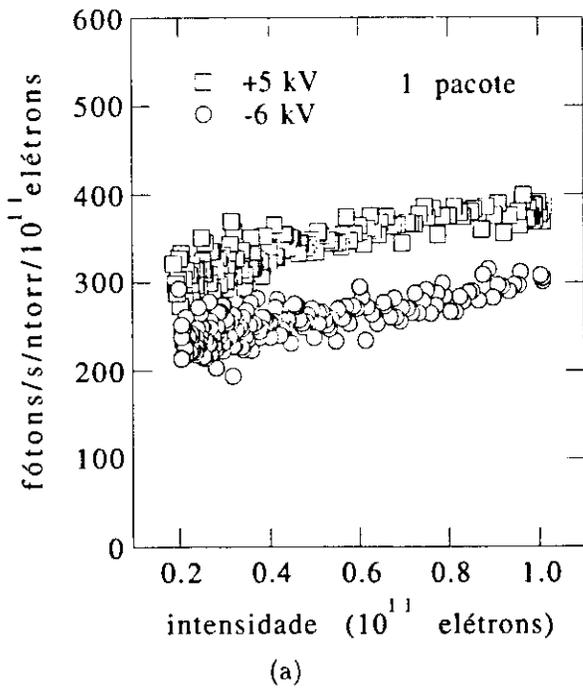


Figura 2.6: Contagem bremsstrahlung normalizada em função do número de elétrons armazenados em 1, 2, 4 e 8 pacotes equidistantes. As tensões nos eletrodos de limpeza CLE45 e CLE46 são +5 kV( $\square$ ) ou -6 kV( $\circ$ ), enquanto que a tensão nos 36 eletrodos restantes é sempre -6 kV.

ser compreendido qualitativamente da expressão da massa crítica vertical Eq.(1.37)

$$A_c^y = \frac{N_e}{n_b^2} \frac{r_p L}{2\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}. \quad (2.4)$$

À medida que o número de pacotes aumenta, íons mais leves tornam-se estáveis e a neutralização aumenta.

As emitâncias horizontal e vertical medidas são mostradas nas Figs.[2.7 (a) e (b)], enquanto que a dispersão de energia foi aproximadamente constante e igual a 0.05%. A densidade média do feixe de elétrons ao longo da região entre os eletrodos CLE45 e CLE46 é mostrada na Fig.(2.8) e a massa crítica vertical média (para 2, 4 e 8 pacotes) é mostrada na Fig.(2.9). A curva de 1 pacote não é mostrada porque ela está acima da maior massa observada no gás residual( $\text{CO}^+=28$ )<sup>3</sup>. Nas curvas correspondentes a 4 pacotes, as barras de erro indicam a faixa de variação da densidade e da massa crítica associadas à variação das dimensões transversais do feixe ao longo da região entre os eletrodos CLE45 e CLE46 e à incerteza na medida da emitância e da dispersão de energia. A Fig.(2.10) mostra a densidade e a massa crítica em função da posição para o caso particular  $N_e = 0.5 \times 10^{11}$  elétrons armazenados em 4 pacotes.

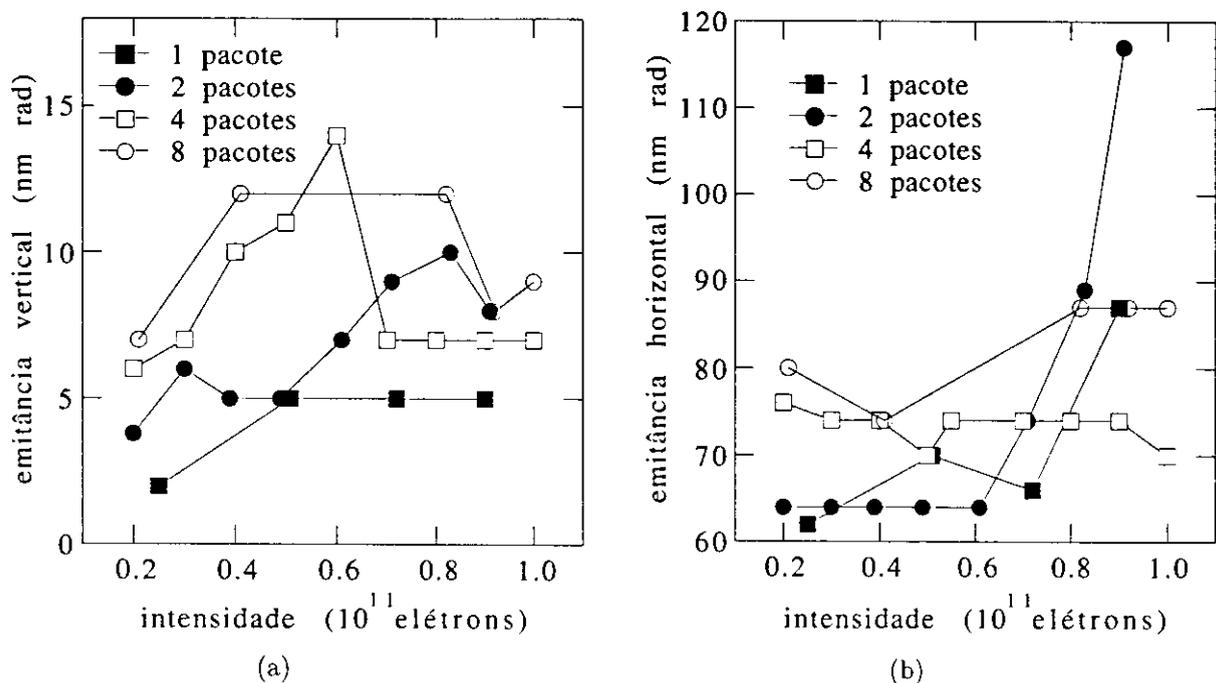


Figura 2.7: Emitâncias vertical (a) e horizontal (b) medidas.

Com 4 pacotes, a emitância horizontal foi constante a menos de 10%. Por outro lado, a emitância vertical mostrou um crescimento lento na região de baixa intensidade seguido por um decréscimo rápido por volta de  $N_e^{th} = 6 \times 10^{10}$  elétrons. O mesmo comportamento pode ser observado na curva de contagem bremsstrahlung [Fig.(2.6)(c)], o que mostra uma clara

<sup>3</sup>O fato da curva de contagem bremsstrahlung normalizada ter apresentado um pequeno aumento com tensão positiva em relação à contagem com tensão negativa[Fig.(2.6)(a)] sugere a presença de traços de espécies moleculares mais pesadas no gás residual (possivelmente  $\text{CO}_2$  ou mesmo mais pesadas como  $\text{C}_2\text{H}_6$ ).

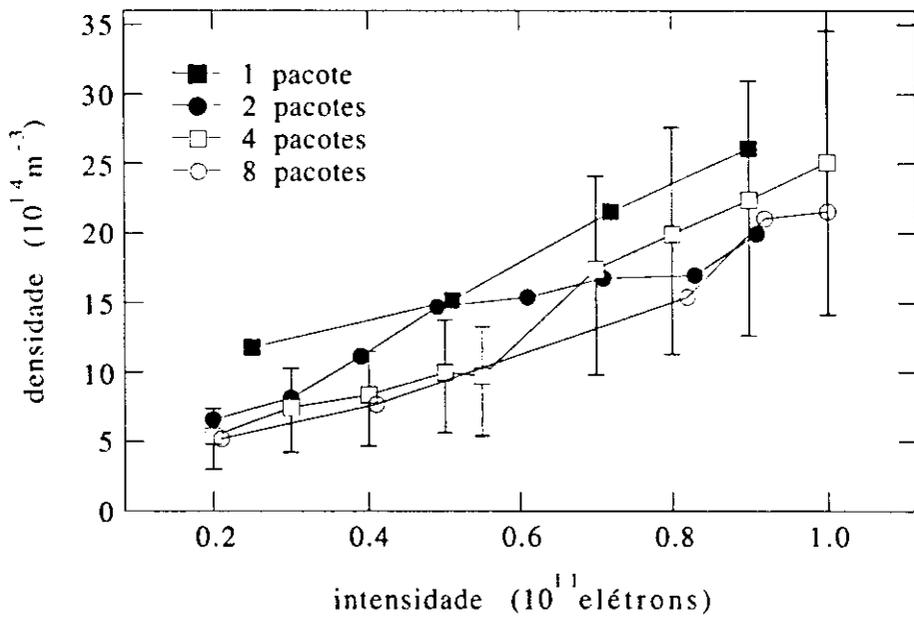


Figura 2.8: Densidade volumétrica média do feixe entre os eletrodos CLE45 e CLE46. As barras de erro na curva de 4 pacotes incluem a variação da densidade nesta região, assim como os erros estimados na medida da emitância e da dispersão de energia.

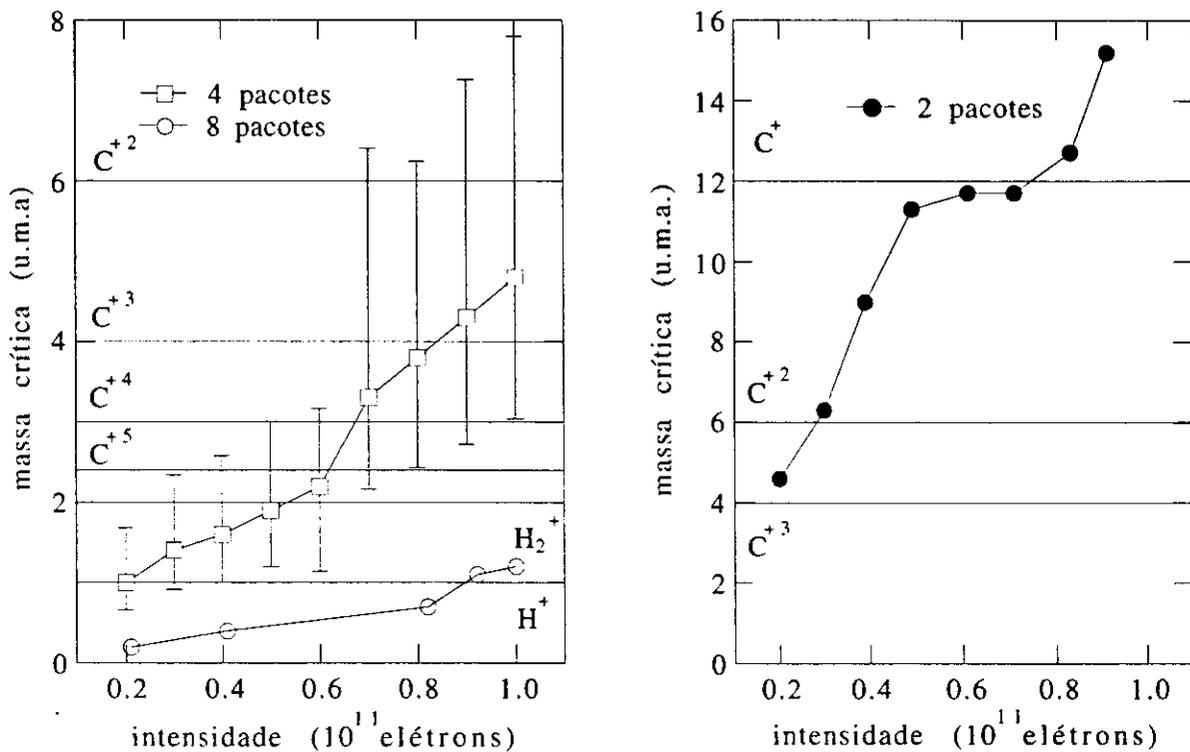


Figura 2.9: Massa crítica média na região entre os eletrodos CLE45 e CLE46.

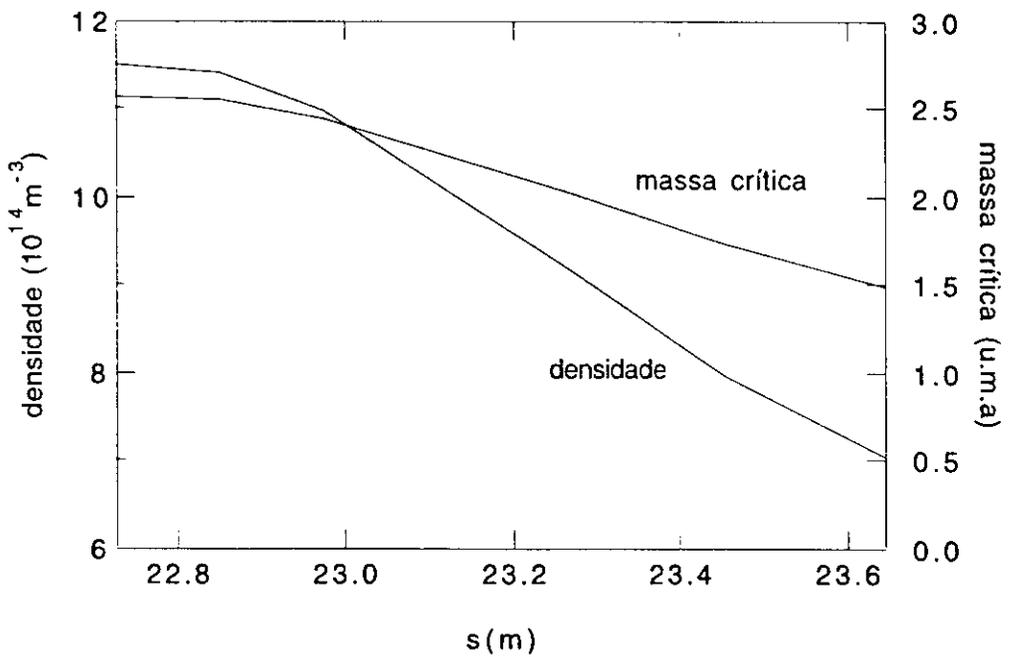


Figura 2.10: Variação longitudinal (no trecho entre os eletrodos CLE45 e CLE46) da densidade do feixe de elétrons e da massa crítica para  $N_e = 0.5 \times 10^{11}$  elétrons armazenados em 4 pacotes.

correlação entre alta densidade iônica (alta contagem bremsstrahlung) e uma emitância vertical grande, uma característica típica de feixes neutralizados. A curva de oito pacotes apresenta comportamento semelhante ainda que o limiar de emitância não seja tão bem correlacionado com o limiar da contagem bremsstrahlung. Com um pacote, tanto a contagem bremsstrahlung quanto a emitância cresceram monotonicamente com a intensidade do feixe, enquanto que com dois pacotes uma variação abrupta da contagem foi observada em  $N_e \approx 8 \times 10^{10}$  elétrons.

A variação rápida na contagem bremsstrahlung nas curvas de 4 e 8 pacotes sugere que algum mecanismo proporcionou uma maior taxa de escape de íons para intensidades acima de  $N_e^{th}$ . De fato, uma evidência de um processo de limpeza, no qual uma oscilação transversal do feixe excita ressonantemente os íons aprisionados, ejetando-os do poço de potencial, foi observada na forma de uma linha no espectro do sinal de um monitor de posição vertical. Este modo surgiu sem qualquer excitação externa para correntes acima de  $N_e^{th}$  desaparecendo subitamente em  $N_e^{th}$  (lembre que os experimentos progridem, no tempo, de altas intensidades para baixas intensidades). A Fig.(2.11) é uma fotografia da linha coerente como vista na tela do analisador de espectro. A frequência corresponde às frequências de oscilação do  $\text{CO}^+$  no poço de potencial e está aproximadamente 100 kHz acima da frequência betatron vertical  $f_r q_y$ , onde  $f_r$  é a frequência de revolução e  $q_y$  é a parte fracionária da sintonia vertical (o valor exato da frequência do modo coerente aumenta com a intensidade do feixe). Para verificar esta hipótese, uma excitação externa (*shaking*) foi aplicada ao feixe com um amplificador de rádio-frequência, de forma a criar artificialmente esta linha na região abaixo de  $N_e^{th}$ , onde ela não estava presente anteriormente. O efeito de extração de íons pode assim ser reproduzido como visto na Fig.(2.12). Nenhuma linha coerente foi observada com um ou dois pacotes de

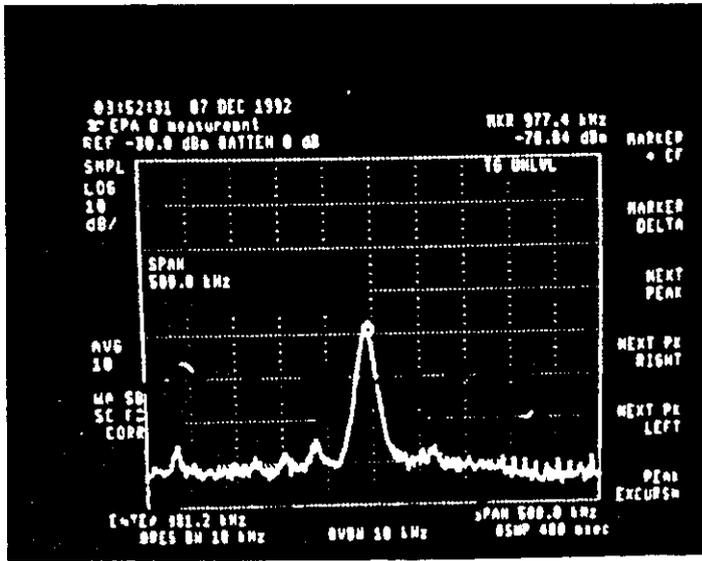


Figura 2.11: Espectro do sinal de um monitor de posição mostrando um modo coerente em  $f = 977.4$  kHz. Há quatro pacotes na máquina e a intensidade total é  $N_e = 8.6 \times 10^{10}$  elétrons.

elétrons.

## 2.4 Cálculo da composição dos íons aprisionados e da contagem bremsstrahlung

### 2.4.1 Bremsstrahlung no gás residual e calibração em energia

A contagem bremsstrahlung normalizada devida ao gás residual é

$$R^{gas} = \frac{\gamma_p \sigma_{BS}^{gas} L^{gas} \xi^{gas}}{T_r k_B T}, \quad (2.5)$$

onde  $\gamma_p = 1.37$  é a razão entre a pressão real e a pressão de *gauge*, determinada pela composição do gás residual e pela sensibilidade do monitor de pressão aos vários gases,  $L^{gas} = 3.3$  m é o comprimento da seção reta observada,  $T_r$  é o período de revolução,  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura,  $\xi^{gas} = 0.28$  é a fração dos fótons bremsstrahlung que realmente atinge o detector (Cf. Apêndice F) e  $\sigma_{BS}^{gas}$  é a seção de choque média para produção de bremsstrahlung

$$\sigma_{BS}^{gas} = \int_{k_{low}}^{E_0} \left( f_{CO} \frac{d\sigma_{BS}^{CO}(k)}{dk} + f_{H_2} \frac{d\sigma_{BS}^{H_2}(k)}{dk} \right) dk, \quad (2.6)$$

onde  $f_{CO, H_2}$  são as densidades relativas de CO e H<sub>2</sub> e as seções de choque de produção de bremsstrahlung diferenciais na energia do fóton  $k$  são integradas desde a menor energia aceita pelo sistema de detecção até a energia cinética dos elétrons incidentes,  $E_0$ . Substituindo a contagem bremsstrahlung medida na Eq.(2.5) e usando a expressão teórica para  $\sigma_{BS}^{neutral}$  (Cf. Apêndice E), obtenho  $k_{low} = 290$  MeV.

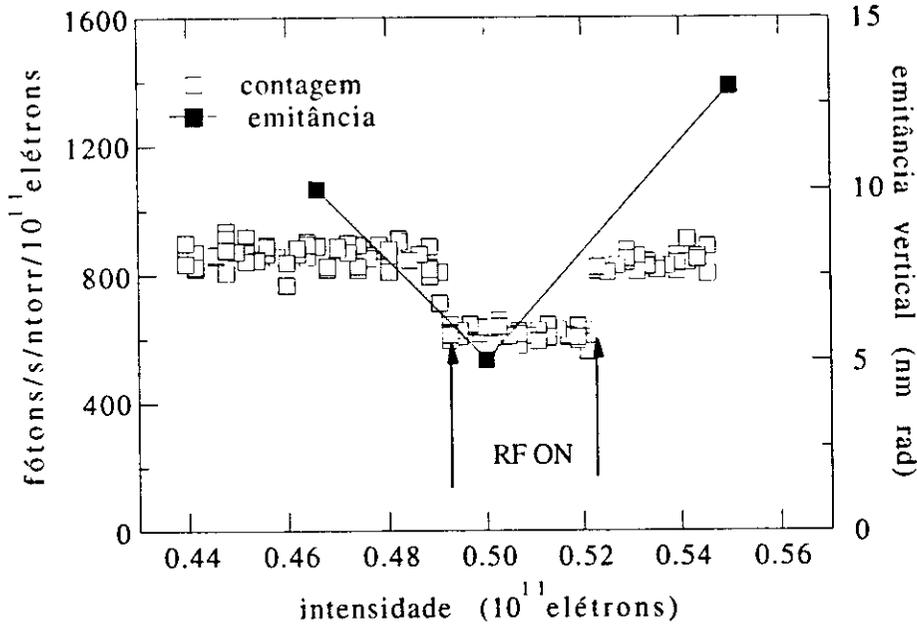


Figura 2.12: Contagem bremsstrahlung e emitância vertical com excitação de RF externa. As setas indicam os momentos em que o amplificador de RF foi desligado e ligado. A frequência de excitação é 973.2 kHz e há quatro pacotes na máquina. Note que o experimento progride, no tempo, da direita para a esquerda.

## 2.4.2 Bremsstrahlung nos íons aprisionados

A contagem bremsstrahlung normalizada devido aos íons aprisionados é

$$R^{ion} = \frac{\gamma_p \sigma_{BS}^{ion} L^{ion} \xi^{ion} S_{ion} \rho_{ion}}{T_r k_B T S_e \rho_g}, \quad (2.7)$$

onde  $L^{ion} = 0.9$  m é o comprimento efetivo ao longo do qual íons são aprisionados,  $\xi^{ion} = 0.27$  é a fração dos fótons bremsstrahlung que realmente atinge o detector (Cf. Apêndice F),  $\frac{S_{ion}}{S_e}$  é um fator de forma que descreve a superposição das densidades iônica e eletrônica no plano transversal ao plano da órbita (e que é igual a 1 quando as densidades do feixe e dos íons são supostas homogêneas dentro de um mesmo contorno elíptico e nula fora dele),  $\rho_{ion}$  é a densidade de íons aprisionado,  $\rho_g$  é a densidade do gás residual e  $\sigma_{BS}^{ion}$  é a seção de choque média para produção de bremsstrahlung

$$\sigma_{BS}^{ion} = \sum_n f_n \int_{k_{low}}^{E_0} \frac{d\sigma_{BS}^n(k)}{dk}, \quad (2.8)$$

onde os  $f_n$  definem a composição dos íons aprisionados (CIA), i.e., a fração da densidade total dos íons representada pela n-ésima espécie iônica.

Para estimar os  $f_n$ , considero um feixe de elétrons de distribuição de carga uniforme no interior de um contorno elíptico de semi-eixos  $\sqrt{2}\sigma_x$  e  $\sqrt{2}\sigma_y$  [Eq.(1.7)]. A seção transversal do feixe é suposta constante de forma que as larguras RMS (e as quantidades associadas massa crítica e densidade do feixe) são na realidade valores médios ao longo da região em que os

íons são aprisionados, i.e., a região entre os eletrodos CLE45 e CLE46. Suponho ainda que todos os íons criados nesta região (e somente estes íons) contribuem para a neutralização e a contagem bremsstrahlung. A evolução temporal da densidade de uma espécie iônica qualquer é dada pelas equações:

$$\frac{d\rho_{ion}^n}{dt} = \rho_e c \sum_j \left\{ \sigma_{jn} \rho_{ion}^j - \sigma_{nj} \rho_{ion}^n \right\}, \quad (2.9)$$

onde  $\rho_{ion}^n$  é a densidade volumétrica da  $n$ -ésima espécie iônica,  $\rho_e$  é a densidade volumétrica de elétrons,  $c$  é a velocidade da luz e  $\sigma_{nj}$  é a seção de choque para produção da espécie  $j$  a partir da espécie  $n$ , por impacto eletrônico. O primeiro termo no somatório descreve a criação de novos íons por impacto de elétrons em moléculas neutras do gás residual ou em outros íons, incluindo a possibilidade de dissociação molecular e subsequente ionização múltipla dos íons atômicos resultantes e o segundo termo descreve a destruição de íons pelos mesmos processos. Somente íons de razão carga-massa maior que a massa crítica têm densidade dada pelas Eqs.(2.9). Íons instáveis são expelidos do feixe em um tempo muito mais curto que o tempo de ionização e sua densidade é suposta nula. Além disso, o modelo descrito acima não leva em consideração o fato de que uma vez totalmente neutralizado (carga iônica total = carga eletrônica total), o feixe não pode mais capturar íons. Portanto, as Eqs.(2.9) com condições iniciais  $\rho_{ion}^n(0) = 0$  são integradas a partir de  $t = 0$  até que um estado estacionário se estabeleça (o que poderá ocorrer quando espécies múltiplamente ionizadas forem instáveis) ou até que a neutralização total seja alcançada<sup>4</sup>. Quando um estado estacionário é alcançado com neutralização parcial, a densidade iônica depende das várias seções de choque de ionização e da composição e pressão do gás residual, mas é independente da densidade do feixe (ainda que continue dependente da massa crítica).

Se processos de dissociação e ionização múltipla não são considerados e a massa crítica é abaixo de 2, a composição dos íons aprisionados para neutralização total é dada por:

$$\rho_1^+ = \rho_e \frac{\sigma_1 \rho_1}{\sigma_1 \rho_1 + \sigma_2 \rho_2} \quad (2.10)$$

$$\rho_2^+ = \rho_e \frac{\sigma_2 \rho_2}{\sigma_1 \rho_1 + \sigma_2 \rho_2}. \quad (2.11)$$

onde  $\rho_1^+$  e  $\rho_2^+$  são as densidades de  $H_2^+$  e  $CO^+$  respectivamente.  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as densidades de  $H_2$  e  $CO$  respectivamente e os  $\sigma$ 's são seções de choque de ionização. Tomando os parâmetros do feixe e do gás residual correspondentes ao ponto  $N_e = 5 \times 10^{10}$  elétrons nas curvas de 4 pacotes mostradas nas Figs.(2.8) e (2.9) e usando as seções de choque de ionização dadas na seção 2.5, encontro uma CIA de 67%  $CO^+$  e 33%  $H_2^+$ . A seção de

<sup>4</sup>Esta descrição do processo de acumulação de íons é uma simplificação em vários aspectos: primeiro, neutralização total nunca pode ser alcançada (com aprisionamento eletrostático) mesmo numa pequena fração da circunferência da máquina, como ocorre aqui, devido à energia cinética finita com que os íons são criados. Íons moleculares são criados com energias térmicas (desprezíveis comparados com a profundidade do poço de potencial) mas íons criados por dissociação podem ter vários eV e escapar do feixe antes que ele esteja completamente neutralizado: segundo, em situações de alta neutralização, a massa crítica efetiva é reduzida conforme a neutralização cresce, de forma a tornar íons mais leves estáveis (*escada iônica*) – este efeito não é considerado no modelo: finalmente, aquecimento dos íons aprisionados pelo feixe de elétrons dá diferentes taxas de extração para diferentes íons, o que poderia ser importante em altas neutralizações.

choque de bremsstrahlung média é  $\sigma_{BS}^{ion} = 0.37$  barn e a contagem bremsstrahlung normalizada [Eq.(2.7)] é 5200 fótons/sec/ntorr/ $10^{11}$  elétrons. Isto é um fator 5 maior que o resultado experimental [Fig.(2.6 - d)], indicando claramente que a ionização múltipla desempenha um papel reduzindo a neutralização ou simplesmente introduzindo íons múltiplamente ionizados que proporcionam a mesma neutralização com uma densidade iônica e contagem bremsstrahlung reduzidas.

## 2.5 Ionização e dissociação molecular

A seção de choque para qualquer processo inelástico (excitação, ionização, dissociação) de uma molécula ou átomo por impacto de um elétron rápido é dada pela fórmula assintótica de Bethe [Eq.(1.8)]:

$$\sigma^B = 4\pi \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \left\{ M_0^2 \left( \frac{1}{\beta^2} \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right] - 1 \right) + \frac{C_0}{\beta^2} \right\}, \quad (2.12)$$

onde  $M_0$  e  $C_0$  são constantes que dependem da estrutura interna do átomo alvo e do processo em consideração. Como no caso da seção de choque de ionização (seção 1.3), esta relação permite a extrapolação para altas energias (várias centenas de MeV) de um grande número de dados experimentais e teóricos sobre colisões inelásticas rápidas que, em sua maior parte, referem-se a energias de algumas centenas de eV até poucos MeV. A Tab.(2.3) lista valores experimentais e teóricos das constantes  $M_0^2$  e  $C_0$  para vários processos de ionização e dissociação do hidrogênio molecular e monóxido de carbono.

A colisão de elétrons com moléculas de hidrogênio pode levar à ionização simples, com produção de íons  $H_2^+$  no estado fundamental ou em estados excitados, ionização dupla e excitação dupla (outros processos são possíveis que levam à formação de produtos neutros como, por exemplo, excitações discretas). Destes processos, o mais provável é ionização simples com produção de um íon no estado fundamental. Além disso, qualquer dos outros mecanismos citados leva a estados dissociativos da molécula de hidrogênio ou do íon  $H_2^+$ . A ionização dissociativa simples (i.e., ionização com produção de um íon  $H_2^+$  em um estado excitado, seguida de dissociação em um átomo de hidrogênio e um próton) dá uma contribuição desprezível à seção de choque total[Liu73] e a seção de choque para ionização dupla a partir da molécula neutra é duas ordens de magnitude menor que a seção de choque para ionização simples.

Colisões inelásticas de elétrons com íons  $H_2^+$  podem levar à excitação dissociativa (todos os estados eletronicamente excitados do  $H_2^+$  são dissociativos), que produz um próton e um átomo de hidrogênio e à ionização dissociativa, que produz dois prótons (compartilhando uma energia cinética de aproximadamente 10 eV). Como toda interação inelástica com um íon  $H_2^+$  produz dissociação, a seção de choque total mostrada na Tab.(2.3) é também a seção de choque de dissociação do  $H_2^+$ . Medidas das seções de choque para produção de prótons[PD71], excitação dissociativa[PD72], e ionização dissociativa[PD73] concordam a menos de 10% com os resultados teóricos citados na Tab.(2.3), pelo menos nas energias mais altas usadas nos experimentos, para as quais espera-se que a fórmula de Bethe seja válida.

A ionização simples é o processo mais importante para elétrons incidentes em moléculas de CO neutras, sua seção de choque sendo um ordem de grandeza maior que a seção de choque

Processo	$M_0^2$	$C_0$	Seção de Choque (Mbarn)	Referência
$e^- + H_2 \longrightarrow H_2^+ + 2e^-$	0.70	8.1	$\sigma_1^* = 0.32$	Rieke[RP72] – exp.
$e^- + H_2 \longrightarrow 2H^+ + 3e^-$	0.0020	0.036	$\sigma_2 = 0.0013$	Edwards[EWDE90] – exp.
$e^- + H_2^+ \longrightarrow 2H^+ + 2e^-$	0.046	1.1	$\sigma_3^* = 0.031$	Liu[Liu89] – teórico
$e^- + H_2^+ \longrightarrow H + H^+ + e^-$	1.04	12.2	$\sigma_4^* = 0.48$	Liu[Liu89]
Inelástica total ( $\sigma_3 + \sigma_4$ )	1.08	13.3	$\sigma_5 = 0.51$	Liu[Liu89]
Produção de prótons ( $2\sigma_3 + \sigma_4$ )	1.1	14.3	$\sigma_6 = 0.54$	Liu[Liu89]
$e^- + CO \longrightarrow CO^- + 2e^-$	3.7	35.1	$\sigma_7^* = 1.54$	Rieke[RP72]
$e^- + CO \longrightarrow C^+ + O + 2e^-$	0.35	3.0	$\sigma_8^* = 0.14$	Orient[OS87] – exp.
$e^- + CO \longrightarrow C + O^+ + 2e^-$	0.11	0.97	$\sigma_9 = 0.044$	Orient[OS87]
$e^- + CO \longrightarrow CO^{++} + 3e^-$	0.035	0.30	$\sigma_{10} = 0.01$	Hille[HM78] – exp.
Dissociação do $N_2^+$	7.37	65.8	$\sigma_{11}^* = 3.0$	Van Zyl[ZD67] – exp.
$e^- + C^+ \longrightarrow C^{++} + 2e^-$	0.84	7.7	$\sigma_{12}^* = 0.35$	
$e^- + C^{+2} \longrightarrow C^{+3} + 2e^-$	0.36	3.0	$\sigma_{13}^* = 0.14$	
$e^- + C^{+3} \longrightarrow C^{+4} + 2e^-$	0.16	0.13	$\sigma_{14}^* = 0.062$	
$e^- + C^{+4} \longrightarrow C^{+5} + 2e^-$	0.048	0.31	$\sigma_{15}^* = 0.017$	
$e^- + C^{+5} \longrightarrow C^{+6} + 2e^-$	0.038	0.24	$\sigma_{16}^* = 0.014$	

Tabela 2.3: Parâmetros de Bethe para processos inelásticos do  $H_2$  e  $CO$ . Os valores experimentais de Rieke and Prepjchal são na realidade *counting cross sections*, que incluem ionização dupla diretamente a partir da molécula neutra – esta contribuição é, entretanto, pequena, como pode-se ver pelos resultados de Edwards ( $\sigma_2$ ). Os resultados  $\sigma_8$  e  $\sigma_9$  para o  $CO$  foram obtidos fitando-se pontos experimentais à fórmula de Bethe. Todas as seções de choque para o carbono atômico foram obtidas com a fórmula de Lotz. As seções de choque são calculadas para  $E_0 = 500$  MeV. As seções de choque marcadas com um asterisco são aquelas introduzidas nos cálculos da composição dos íons aprisionados.

de ionização dissociativa com produção de um íon de carbono e um átomo de oxigênio. A dissociação em um íon de oxigênio e um átomo de carbono e ionização dupla são muito menos prováveis e foram desprezadas nos cálculos. Não foram encontrados dados sobre os processos dissociativos do íon  $CO^+$ . Sabe-se[NS70], no entanto, que moléculas de monóxido de carbono duplamente ionizadas existem somente em estados metaestáveis com tempos de vida da ordem de uns poucos  $\mu\text{sec}$ , o que é muito menor que os tempos de ionização de interesse, podendo-se portanto supor que elas dissociem imediatamente. A seção de choque para dissociação do  $CO^+$  foi suposta igual à seção de choque de dissociação do íon molecular isoeletrônico  $N_2^+$ , para o qual dados experimentais estão disponíveis. As similaridades entre o  $CO$  e o  $N_2$  foram enfatizadas por vários autores[DR76, KHK<sup>+</sup>83] e podem ser observadas nas seções de choque de ionização simples medidas por Rieke[RP72], que são idênticas para o  $CO$  e  $N_2$  a menos de 0.3%.

A ionização sequencial múltipla de íons de carbono atômico pode ser descrita pela fórmula modificada de Bethe proposta por Lotz[Lot67a].

$$\sigma^{Lotz} = \sum_i^N a_i q_i \frac{\ln(E_0/P_i)}{E_0 P_i} \{1 - b_i \exp[-c_i(E_0/P_i - 1)]\}, \quad (2.13)$$

onde  $P_i$ ,  $q_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  foram tabulados por Lotz[Lot67b, Lot68a, Lot68b]. No limite de energias relativísticas, o termo exponencial pode ser desprezado, mas o termo logaritmico deve ser modificado e assume a mesma forma da fórmula assintótica de Bethe Eq.(2.12), com parâmetros  $M_0^2$  e  $C_0$  dados por

$$M_0^2 = \sum_i^N \frac{a_i q_i}{4\pi a_0^2 \mathcal{R} P_i} \quad (2.14)$$

$$C_0 = \sum_i^N \frac{a_i q_i}{4\pi a_0^2 \mathcal{R} P_i} \left[ \ln \left( \frac{\mathcal{R}}{4P_i} \right) + \ln \left( \frac{2m_e c^2}{\mathcal{R}} \right) \right], \quad (2.15)$$

onde  $\mathcal{R} = 13,61$  eV é a constante de Rydberg e  $a_0 = 0,52 \times 10^{-10}$  m é o raio de Bohr. A ionização múltipla de átomos em uma única colisão também é possível[MKS77], mas muito menos provável que o processo sequencial descrito pela Eq.(2.13).

## 2.6 Resultados e Discussão

Os seguintes processos foram incluídos nas Eqs.(2.9): ionização simples do  $H_2$ , ionização simples do CO, ionização dissociativa do CO produzindo um íon de carbono e um átomo de oxigênio, dissociação do  $H_2^+$  (produzindo um próton e um átomo de hidrogênio ou dois prótons), dissociação do  $CO^+$  em um íon de carbono e um átomo de oxigênio e a ionização sequencial de todos os íons do carbono atômico. O conjunto de nove equações para as densidades de  $H_2^+$ ,  $CO^+$ ,  $C^+$ ,  $C^{+2}$ ,  $C^{+3}$ ,  $C^{+4}$ ,  $C^{+5}$ ,  $C^{+6}$  e  $H^+$  foi integrado analiticamente usando o programa de manipulação algébrica Mathematica[Wol88].

As Figs.(2.13) até (2.15) mostram as contagens bremsstrahlung normalizadas calculadas e medidas. As curvas experimentais são as mesmas mostradas na Fig.[2.6(b)-(d)] para +5 kV.

Os cálculos não mostram nenhum aprisionamento de íons no caso de um pacote armazenado, já que a massa crítica está acima da maior massa detectada no gás residual, o  $CO^+$ . A contagem bremsstrahlung normalizada calculada é então constante e igual à contagem devida ao gás residual  $R^{gas}$ . A curva experimental [Fig.(2.6) (a)] é um fator 1.4 a 1.8 maior, indicando, como mencionado acima, a possível presença de traços de alguma espécie mais pesada, não detectada na análise do gás residual.

Para dois pacotes [Fig.(2.13)], os resultados teóricos estão também muito baixos, ainda que por um fator menor. No entanto, um decréscimo abrupto da contagem em  $N_e = 8 \times 10^{10}$  pode ser visto na curva teórica e na experimental e corresponde ao íon  $C^+$  tornar-se instável [Fig.(2.9) - (b)]. A Fig.(2.16) mostra que a neutralização completa não é alcançada.

Os cálculos para quatro e oito pacotes foram divididos em duas regiões: abaixo de  $N_e^{th} = 6 \times 10^{10}$ , a CIA é calculada por meio das Eqs.(2.9); acima deste limiar um termo da forma  $-\frac{\rho_{CO^+}}{\tau}$  foi adicionado ao lado direito da equação para o  $CO^+$  e o tempo de limpeza ressonante  $\tau$  foi usado como um parâmetro livre para simular o efeito de extração ressonante mencionado na seção 2.3. A Fig.(2.14) mostra que os resultados experimental e teórico concordam a menos de 30% na região de baixa intensidade. Para alta intensidade, há uma boa concordância entre teoria e experimento para um tempo de limpeza ressonante da ordem de alguns ms. Conclusões semelhantes são válidas para o caso de oito pacotes, ainda que a

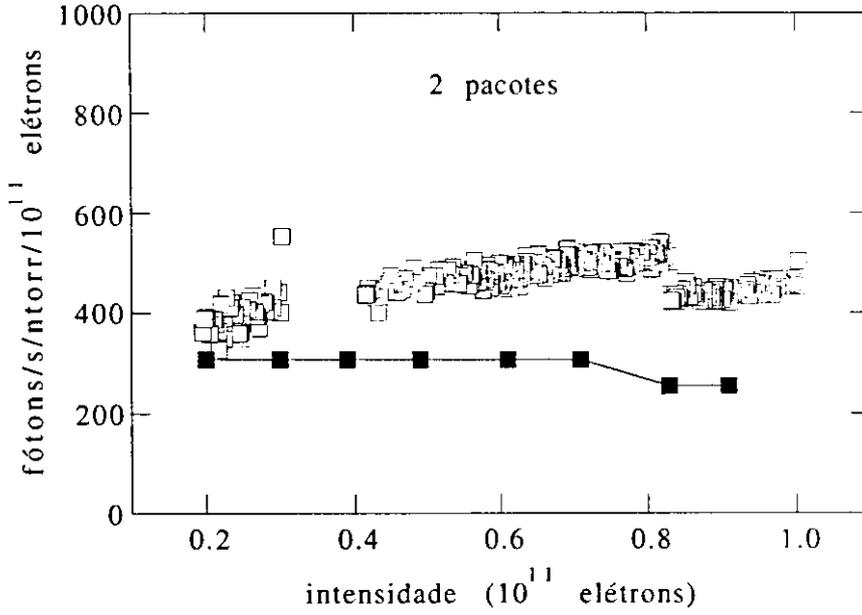


Figura 2.13: Contagem bremsstrahlung normalizada calculada (linha contínua) e medida ( $\square$ ) em função da intensidade do feixe com dois pacotes de elétrons.

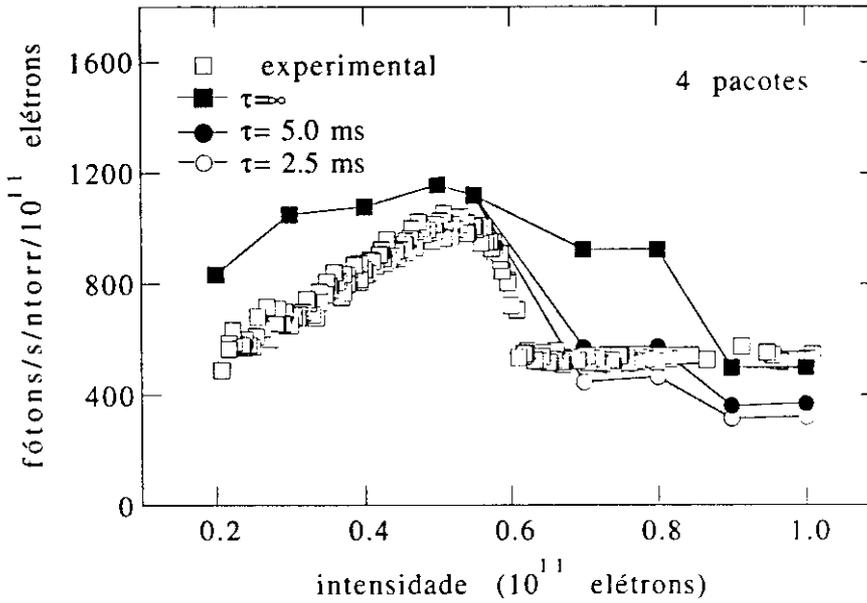


Figura 2.14: Contagem bremsstrahlung normalizada calculada (linhas contínuas) e medida em função da intensidade do feixe para quatro pacotes. As três curvas calculadas mostradas correspondem a diferentes valores do tempo de escape ressonante  $\tau$  (usado apenas acima de  $N_e^{th} = 6 \times 10^{10}$  elétrons).

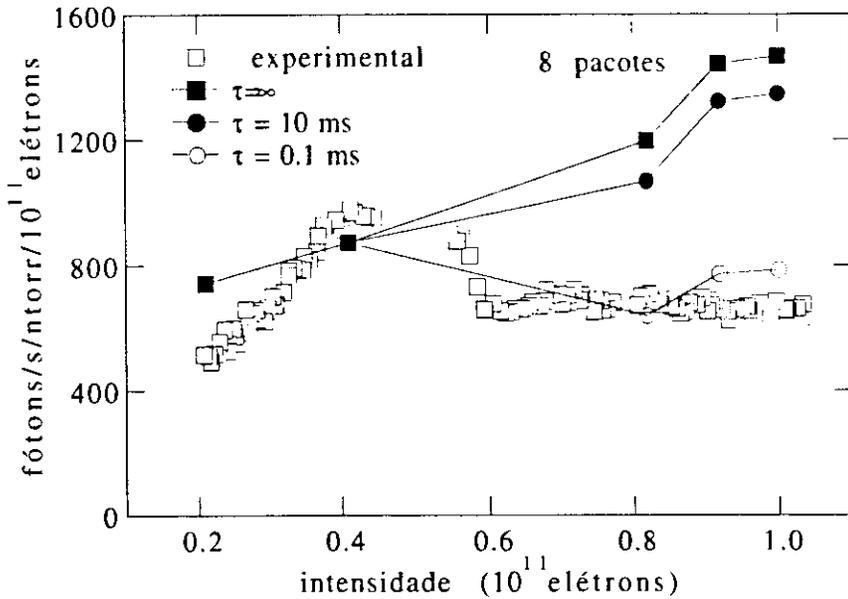


Figura 2.15: Contagem bremsstrahlung calculada e medida em função da intensidade do feixe para oito pacotes. As três curvas calculadas correspondem a diferentes valores do tempo de escape ressonante  $\tau$ .

falta de dados de emitância do feixe (e portanto massa crítica e densidade do feixe) na região de intensidades intermediárias torne a comparação difícil. Note que a redução da contagem bremsstrahlung na Fig.(2.14) (na região de baixa intensidade) quando comparada com o cálculo anterior em que dissociação molecular foi desprezada (Cf. seção 2.4), é devido não a uma neutralização menor, mas à mesma neutralização ser obtida com um número menor de íons múltiplemente carregados. Como a densidade do feixe é duas ordens de grandeza superior à densidade do gás residual, a densidade de íons uma vez ionizados<sup>5</sup> atinge rapidamente um valor estacionário muito menor que aquele necessário para neutralizar o feixe e a carga neutralizante restante é proporcionada por espécies múltiplemente ionizadas.

A Fig.(2.17) mostra a CIA para um feixe de quatro pacotes. Prótons são estáveis somente em baixas intensidades onde eles são a espécie mais densa. Na região de intensidades intermediárias, a neutralização é dominada por átomos de carbono múltiplemente ionizados até  $C^{+4}$ , enquanto a contribuição de estados de carga superior é marginal.

À medida que a intensidade aumenta, limiares de massa crítica são cruzados e íons de carbono tornam-se sucessivamente instáveis, deslocando a distribuição para estados de carga inferior. A Fig.(2.16) mostra que o feixe está totalmente neutralizado abaixo do limiar para extração ressonante.

Nos cálculos acima, apenas os valores médios de densidade e massa crítica na região entre os eletrodos aprisionantes foram utilizados. A Fig.[2.18 (a)] mostra a contagem bremsstrahlung calculada e medida (idênticas às mostradas na Fig.[2.14]) para intensidades abaixo do limiar  $N_e^{th}$  com barras de erro que descrevem o efeito da variação longitudinal da densidade do feixe e da massa crítica (além da incerteza na medida da emitância) e a Fig.[2.18 (b)] mostra a curva obtida pelo mesmo procedimento, mas sem considerar os efeitos de ionização

<sup>5</sup>i.e., íons de carga  $+e_0$ .

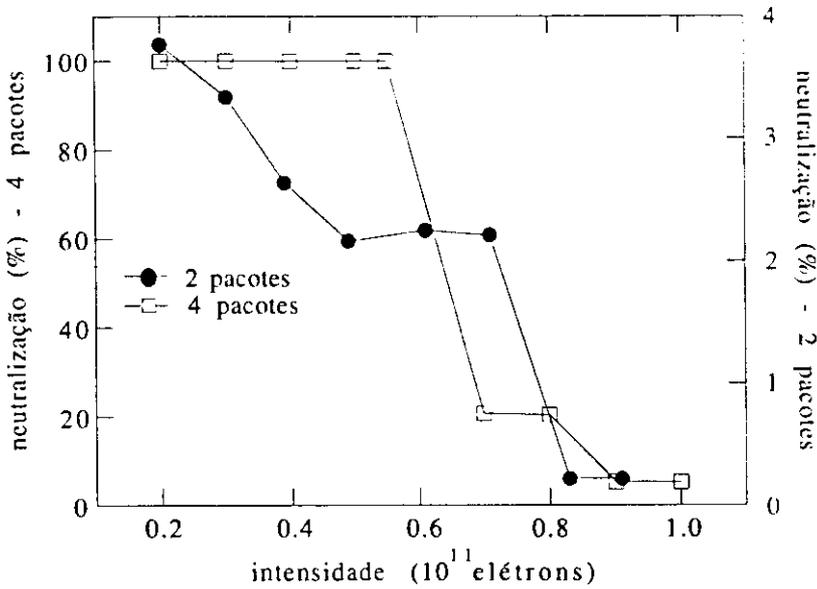


Figura 2.16: Neutralização média na região entre os eletrodos CLE45 e CLE46 em função da intensidade do feixe para dois e quatro pacotes.

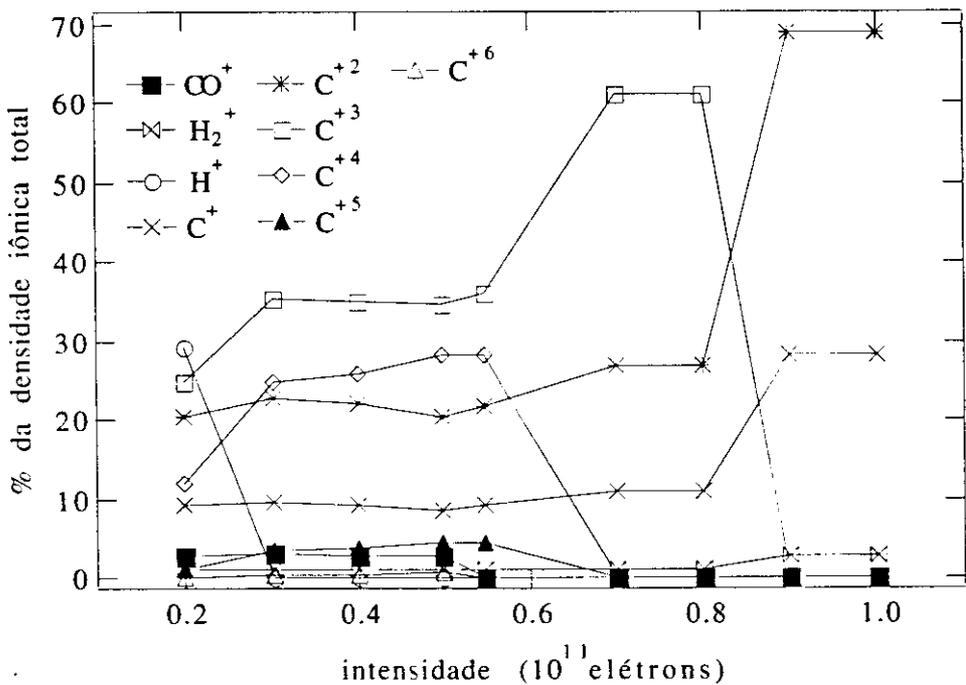
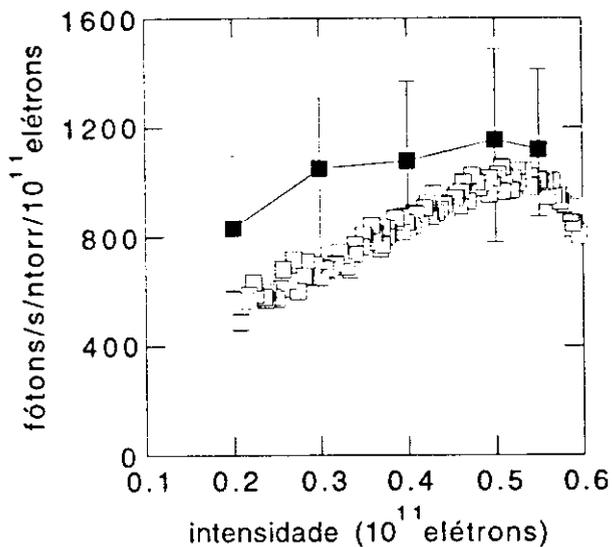
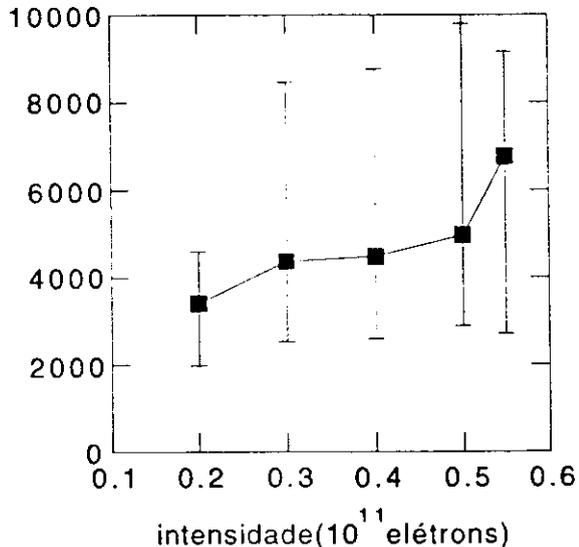


Figura 2.17: Composição calculada dos íons aprisionados em função da intensidade para um feixe com quatro pacotes. O tempo de escape ressonante dos íons CO<sup>+</sup> (usado apenas acima de  $N_e^{th}$ ) é 5 ms.



(a)



(b)

Figura 2.18: (a) Contagem bremsstrahlung calculada para 4 pacotes. As barras de erro incluem a variação da massa crítica e da densidade do feixe ao longo da região de aprisionamento, assim como a incerteza na medida da emitância. Os quadrados são os pontos experimentais. (b) Mesmo cálculo, desprezando-se ionização múltipla e dissociação molecular.

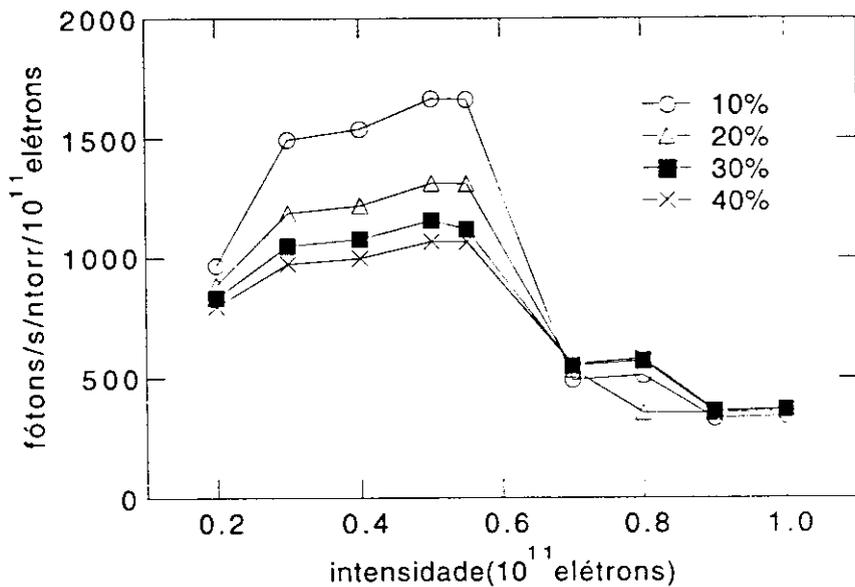


Figura 2.19: Contagem bremsstrahlung calculada para diferentes composições do gás residual (as porcentagens são as frações de CO, o restante sendo H<sub>2</sub>). O tempo de limpeza ressonante é 5 ms.

múltipla e dissociação molecular. A introdução de íons multiplamente ionizados é essencial para explicar os resultados experimentais.

Finalmente, a Fig.(2.19) mostra como a contagem bremsstrahlung calculada varia com a composição do gás residual.

# Capítulo 3

## Acoplamento bétatron provocado por íons

### 3.1 Introdução

O aumento das dimensões verticais de um feixe de elétrons é um dos mais característicos e danosos efeitos do aprisionamento iônico, impondo uma limitação importante ao desempenho de fontes de radiação síncrotron e dos anéis de elétrons de colisores elétron-pósitron assimétricos, atualmente sendo propostos como fábricas de mésons[Sag91a]. De fato, a explosão das dimensões verticais, juntamente com o deslocamento da sintonia bétatron são freqüentemente utilizados para avaliar a eficiência de sistemas de limpeza de íons[Pon88].

As dimensões horizontal e vertical do feixe de elétrons ao longo da máquina são dadas pelas funções bétatron  $(\beta_x, \beta_y)$ , pela função dispersão  $D_x$ , pelas emitâncias horizontal  $\epsilon_x$  e vertical  $\epsilon_y$  e pela dispersão de energia  $\delta p/p$ :

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\epsilon_x \beta_x(s) + \left(D_x(s) \frac{\delta p}{p}\right)^2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_y(s) = \sqrt{\epsilon_y \beta_y(s)}. \quad (3.2)$$

O valor de equilíbrio da emitância horizontal  $\epsilon_x$  é determinado pela competição entre dois efeitos: o amortecimento radiativo (emissão de radiação síncrotron) e a excitação quântica (a emissão de radiação é quantizada e no processo de emissão de um fóton oscilações transversais são excitadas). Somente oscilações horizontais são excitadas numa máquina perfeitamente plana e, na ausência de campos que acoplam os movimentos dos planos horizontal e vertical, a emitância vertical (e portanto  $\sigma_y$ ) seria nula. Numa máquina real, erros de alinhamento (e.g. rotação dos quadropolos) introduzem campos acoplantes que canalizam parte da energia proveniente da excitação quântica para o plano vertical, gerando uma emitância vertical finita. Tipicamente, a razão das emitâncias ou razão de acoplamento  $\kappa = \epsilon_y/\epsilon_x$  é da ordem de 10% em um feixe não neutralizado.

Acredita-se atualmente que o mecanismo através do qual íons aprisionados provocam aumento da emitância vertical é a excitação de ressonâncias de soma e diferença [BGP+80, THTM85, Row88]. A nuvem de íons cria um deslocamento e dispersão da sintonia, fazendo com que o feixe atravesse linhas de ressonância. Ressonâncias de diferença transferem energia

do plano horizontal ao plano vertical levando a um batimento que, quando promediado em muitas revoluções, resulta num aumento efetivo da emitância vertical. Ressonâncias de soma podem, em princípio, levar à perda do feixe, via aumento ilimitado das amplitudes de oscilação, mas termos de desintonização não-linear do potencial da nuvem iônica podem afastar partículas de alta amplitude da ressonância. Além disso, à medida que o tamanho do feixe aumenta, a densidade iônica diminui e, junto com ela, o deslocamento e a dispersão da sintonia. Um equilíbrio é alcançado, no qual as dimensões do feixe são determinadas pela força da ressonância e pela sintonia não-perturbada[Row88].

Há um interesse óbvio em identificar-se as linhas de ressonância relevantes, assim como a origem física dos campos acoplantes: a elucidação dos mecanismos físicos envolvidos sugeriria possíveis curas ou medidas amenizadoras. Neste capítulo, considero uma possível origem do acoplamento em um feixe neutralizado: o termo acoplador de quarta ordem proveniente de uma nuvem iônica Gaussiana que excita uma ressonância de diferença de quarta ordem. Esta é a ressonância de acoplamento de ordem mais baixa que pode ser excitada pelo campo eletrostático de uma nuvem iônica simétrica. Os resultados numéricos referem-se ao EPA.

Começo derivando um resultado geral relativo ao cálculo da média temporal<sup>1</sup> do valor médio (numa distribuição de partículas) de uma variável dinâmica arbitrária. Isto permite calcular o efeito médio de uma ressonância de acoplamento em qualquer distribuição inicial de elétrons. Na seção 3.3 rederivo a razão das emitâncias vertical e horizontal devida ao acoplamento provocado por campos quadrupolares  $skew^2$  de uma forma diferente da derivação original de Guignard[Gui78]. Faço isto para estabelecer a notação e um procedimento facilmente generalizável para o caso não-linear. A seção 3.4 discute o acoplamento devido à ressonância  $2Q_x - 2Q_y = 0$  excitada por termos de até quarta ordem na expansão de Taylor do potencial elétrico de uma nuvem iônica Gaussiana. Esta seção baseia-se largamente no trabalho de Montague[Mon68] extendendo seus resultados para o cálculo numérico das emitâncias acopladas.

O acoplamento calculado é pequeno em comparação com o observado experimentalmente, sugerindo a existência de outros fatores que contribuem para a explosão da emitância vertical: nuvens iônicas não-simétricas, efeitos coerentes ou ainda acoplamento excitado por campos dos próprios ímãs da máquina.

## 3.2 Média temporal do valor médio de uma variável dinâmica

No cálculo da dinâmica de feixe próximo a uma ressonância de acoplamento, verifica-se que as partículas executam um batimento, trocando periodicamente energia entre os planos horizontal e vertical. Para um feixe plano ( $\sigma_x \gg \sigma_y$ ), o efeito médio em muitas revoluções é um aumento da emitância vertical às custas da emitância horizontal. Para obter-se a emitância, é preciso calcular a média de  $x^2$  ou  $y^2$  sobre a distribuição de elétrons no plano

<sup>1</sup>O tempo aqui – e no resto deste capítulo – é considerado equivalente à posição azimutal ao longo da máquina.

<sup>2</sup>Este é o campo magnetostático produzido por um ímã quadrupolar cujo plano de simetria não coincide com o plano da órbita, estando girado de 45 graus. Numa máquina real, pequenos erros de alinhamento dos quadrupolos adicionam pequenas componentes *skew* às componentes normais dos quadrupolos.

transversal à órbita e então promediar o resultado sobre um grande número de períodos bétatron. Para considerar o problema em termos mais gerais, sejam  $(q, p)$  a coordenada e momentum canônicos de um sistema cuja evolução temporal é governada pelo Hamiltoniano  $H(q, p, t)$ . Seja ainda  $F(q, p, t)$  uma variável dinâmica arbitrária. Um conjunto de partículas tem uma distribuição no espaço de fases  $f_0(q, p)$  em  $t = 0$ . Num instante posterior  $t$ , a nova distribuição é

$$f(q, p, t) = f_0[q_0(q, p, t), p_0(q, p, t)], \quad (3.3)$$

onde as funções  $q_0(q, p, t)$ ,  $p_0(q, p, t)$  são obtidas invertendo-se as soluções das equações canônicas de movimento para dar as condições iniciais em função dos valores finais  $(q, p)$  no tempo  $t$ . A média de  $F$  sobre a distribuição  $f$  num instante qualquer  $t$  é

$$\langle F \rangle (t) = \int dq dp F(q, p, t) f(q, p, t) = \int dq dp F(q, p, t) f_0[q_0(q, p, t), p_0(q, p, t)]. \quad (3.4)$$

As equações  $q_0 = q_0(q, p, t)$  e  $p_0 = p_0(q, p, t)$  podem ser consideradas como equações de definição de uma transformação canônica, de forma que  $dq dp = dq_0 dp_0$  e

$$\langle F \rangle (t) = \int dq_0 dp_0 F[q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t), t] f_0[q_0, p_0]. \quad (3.5)$$

Desta forma, a dependência temporal aparece apenas em  $F$  e a média temporal de  $\langle F \rangle$  é

$$\overline{\langle F \rangle} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int dq_0 dp_0 F[q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t)] f_0(q_0, p_0), \quad (3.6)$$

e definindo a média *na trajetória*

$$F_{av}(q_0, p_0) = \frac{1}{T} \int_0^T F[q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0)] dt, \quad (3.7)$$

reescrevo  $\overline{\langle F \rangle}$

$$\overline{\langle F \rangle} = \int F_{av}(q_0, p_0) f_0(q_0, p_0) dq_0 dp_0 = \langle \overline{F} \rangle_0, \quad (3.8)$$

onde  $\langle \rangle_0$  denota a média sobre a distribuição inicial  $f_0$ .  $F_{av}$  depende da trajetória particular através das condições iniciais mas, para movimento periódico, não depende da origem de tempo escolhida (i.e., do ponto particular na trajetória fechada no espaço de fases em que  $t = 0$ ).

## 3.3 Acoplamento bétatron produzido por quadrupolos *skew*

### 3.3.1 O Hamiltoniano

O Hamiltoniano para o movimento transversal de um elétron ultra-relativístico com focalização linear e um termo quadrupolar *skew* é (Cf. Apêndice G)

$$H(x, x', y, y'; \theta) = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{q_x^2 x^2 + q_y^2 y^2}{2} + M(\theta)xy, \quad (3.9)$$

onde  $M(\theta)$  é a força da componente quadrupolar *skew*,  $q_{x,y}$  são forças focalizadoras horizontal e vertical e as linhas denotam diferenciação em relação ao ângulo azimutal  $\theta = \frac{s}{R}$ . Introduzindo os fatores de Floquet:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{\beta_x(\theta)}{2R}} \exp\left(i \int_0^\theta \left(\frac{R}{\beta_x(\xi)} - Q_x\right) d\xi\right) = \sqrt{\frac{\beta_x(\theta)}{2R}} e^{i(\varphi_x - Q_x\theta)} \\ u_1 &= \sqrt{\frac{\beta_y(\theta)}{2R}} \exp\left(i \int_0^\theta \left(\frac{R}{\beta_y(\xi)} - Q_y\right) d\xi\right) = \sqrt{\frac{\beta_y(\theta)}{2R}} e^{i(\varphi_y - Q_y\theta)} \\ \omega_2 &= \omega_1' + iQ_x\omega_1 \\ u_2 &= u_1' + iQ_yu_1\end{aligned}\quad (3.10)$$

e as fases bétatron

$$\varphi_x(\theta) = \int_0^\theta \frac{R}{\beta_x(\xi)} d\xi \quad (3.11)$$

$$\varphi_y(\theta) = \int_0^\theta \frac{R}{\beta_y(\xi)} d\xi, \quad (3.12)$$

defino as transformações canônicas:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \sqrt{a_x} \left\{ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} e^{i(Q_x\theta + \varphi_x)} + \begin{pmatrix} \overline{\omega_1} \\ \overline{\omega_2} \end{pmatrix} e^{-i(Q_x\theta + \varphi_x)} \right\} \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \sqrt{a_y} \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{i(Q_y\theta + \varphi_y)} + \begin{pmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{u_2} \end{pmatrix} e^{-i(Q_y\theta + \varphi_y)} \right\}, \quad (3.14)$$

que leva ao novo Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}H^{(2)}(a_x, a_y, \varphi_x, \varphi_y; \theta) &= M(\theta) \left\{ \omega_1(\theta) \overline{u_1(\theta)} e^{i(\psi_x - \psi_y)} + \omega_1(\theta) u_1(\theta) e^{i(\psi_x + \psi_y)} \right. \\ &\quad \left. + \overline{\omega_1(\theta)} u_1(\theta) e^{i(\psi_y - \psi_x)} + \overline{\omega_1(\theta)} \overline{u_1(\theta)} e^{-i(\psi_x + \psi_y)} \right\},\end{aligned}\quad (3.15)$$

onde  $\psi_{x,y} = Q_{x,y}\theta + \varphi_{x,y}$ . Neste ponto, é conveniente fazer uma transformação de escala nas amplitudes  $a_x$  e  $a_y$ , introduzindo variáveis adimensionais  $A_x = \frac{a_x}{R\epsilon_x}$  e  $A_y = \frac{a_y}{R\epsilon_x}$ , onde  $\epsilon_x$  é a emitância horizontal não acoplada (inicial). A forma do Hamiltoniano permanece inalterada. Como  $M(\theta)$ ,  $\omega_1(\theta)$  e  $u_1(\theta)$  são todos periódicos em  $\theta$  com período  $2\pi$ , expando cada termo de  $H^{(2)}$  em série de Fourier e, supondo que as sintonias não perturbadas satisfazem a condição de ressonância  $Q_x \approx Q_y$ , desconsidero todos os termos que oscilam rapidamente para obter o Hamiltoniano aproximado:

$$H_{ap}^{(2)} = \sqrt{A_x A_y} \{ A_0 \exp\{i(\varphi_y - \varphi_x + \delta\theta)\} + A_0^* \exp\{-i(\varphi_y - \varphi_x + \delta\theta)\} \} \quad (3.16)$$

O asterisco indica o complexo conjugado,  $\delta = Q_y - Q_x$  e  $A_0$  é a componente de Fourier de ordem zero:

$$A_0 = \frac{1}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \sqrt{\beta_x \beta_y} \exp\{i(\varphi_y - \varphi_x - \delta\theta)\} M(\theta) d\theta \quad (3.17)$$

Em aproximação macia,  $\beta_{x,y} = \frac{R}{Q_{x,y}}$  e o Hamiltoniano  $H_{ap}^{(2)}$  fica

$$H_{ap}^{(2)} = V_{11} \sqrt{A_x A_y} \cos(\psi_y - \psi_x) \quad (3.18)$$

com

$$V_{11} = \frac{1}{2\pi\sqrt{Q_x Q_y}} \int_0^{2\pi} M(\theta) d\theta \quad (3.19)$$

As equações canônicas do movimento são

$$\frac{dA_x}{d\theta} = -V_{11}\sqrt{A_x A_y} \sin(\psi_y - \psi_x) \quad (3.20)$$

$$\frac{dA_y}{d\theta} = V_{11}\sqrt{A_x A_y} \sin(\psi_y - \psi_x) \quad (3.21)$$

$$\frac{dH^{(2)}}{d\theta} = -V_{11}(Q_y - Q_x)\sqrt{A_x A_y} \sin(\psi_y - \psi_x), \quad (3.22)$$

das quais derivo as constantes do movimento

$$C_1 = A_x + A_y \quad (3.23)$$

$$C_2 = Q_x A_x + Q_y A_y + H_{ap}^{(2)}. \quad (3.24)$$

Uma transformação canônica de  $(A_x, \varphi_x, A_y, \varphi_y)$  para  $(P_\psi, \psi, C_1, \bar{\psi})$  torna estas constantes um momentum (cuja variável conjugada é cíclica) e um Hamiltoniano (a menos de constante aditiva) independente do tempo. A função geradora desta transformação é<sup>3</sup>

$$G(\psi, \varphi_y, A_x, C_1; \theta) = (\psi - (Q_y - Q_x)\theta - \varphi_y)(A_x - C_1), \quad (3.25)$$

com equações de transformação

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{\partial G}{\partial \varphi_y} = -(A_x - C_1) \\ \varphi_x &= -\frac{\partial G}{\partial A_x} = -(\psi - (Q_y - Q_x)\theta - \varphi_y) \\ \bar{\psi} &= \frac{\partial G}{\partial C_1} = -(\psi - (Q_y - Q_x)\theta - \varphi_y) = \varphi_x \\ P_\psi &= -\frac{\partial G}{\partial \psi} = -(A_x - C_1) = A_y \end{aligned} \quad (3.26)$$

A nova coordenada  $\psi$  conjugada a  $P_\psi$  é então

$$\psi = \varphi_y - \varphi_x + (Q_y - Q_x)\theta \quad (3.27)$$

e o novo Hamiltoniano é

$$H^{(3)}(A_y, \psi, C_1, \varphi_x) = H_{ap}^{(2)} + Q_y A_y + Q_x A_x - Q_x C_1 = \text{const} \quad (3.28)$$

$$H^{(3)} = V_{11}\sqrt{A_y(C_1 - A_y)} \cos \psi + (Q_y - Q_x)A_y. \quad (3.29)$$

$H^{(3)}$  não depende de  $\theta$  ou  $\varphi_x$  de forma que tanto  $C_1$  quanto  $H^{(3)}$  são constantes do movimento, conforme vimos acima. O problema foi portanto reduzido a um Hamiltoniano unidimensional no espaço de fases  $(A_y, \psi)$ . Com mais uma transformação de escala para o novo momentum

$$\alpha = \frac{A_y}{C_1} - \frac{1}{2}, \quad (3.30)$$

<sup>3</sup>Na nomenclatura de Goldstein[Gol81], a função geradora acima é de tipo  $F_3$  nas variáveis  $A_x$  e  $\varphi_x$  e de tipo  $F_2$  nas variáveis  $A_y$  e  $\varphi_y$ .

obtenho o Hamiltoniano

$$C(\alpha, \psi) = V_{11} \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \cos \psi + (Q_y - Q_x) \alpha \quad (3.31)$$

onde termos constantes, que não alteram as equações canônicas de movimento, foram desprezados.

### 3.3.2 Estrutura do espaço de fases

As Figs.[3.1(a) – (c)] mostram possíveis trajetórias no plano  $(\alpha, \psi)$  para o Hamiltoniano  $C$ . Todas as trajetórias são pares e periódicas (com período  $2\pi$ ) em  $\psi$ ; desta forma, toda a informação relevante está contida no intervalo  $0 \leq \psi \leq \pi$ . Além disso, da sua própria definição,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ . Note que as variáveis  $(\alpha, \psi)$  são totalmente desacopladas das variáveis  $(C_1, \varphi_x)$ , de maneira a preservar a mesma topologia do espaço de fases para quaisquer amplitudes. Isto é equivalente ao fato de que o deslocamento de sintonia betatron é aqui independente da amplitude, i.e., só há termos lineares no Hamiltoniano. Há dois tipos de trajetórias: aquelas que são fechadas, circulando em torno de pontos fixos estáveis e trajetórias abertas ao longo das quais  $\alpha$  oscila, enquanto a fase  $\psi$  varia monotonicamente. Separatrizes passando por pontos fixos instáveis dividem o espaço de fases nestes dois tipos de curvas. Os pontos fixos são dados por

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = V_{11} \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \sin \psi = 0 ; \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \delta - \frac{\alpha V_{11}}{\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}} \cos \psi = 0 . \quad (3.32)$$

Excluindo o caso trivial  $|\alpha| = \frac{1}{2}$  (que corresponde a partículas não acopladas que oscilam ao longo do eixo horizontal ou vertical unicamente), os pontos fixos são

$$\psi = 0, \pi ; \quad \alpha = \pm \frac{\delta}{2\sqrt{\delta^2 + V_{11}^2}} . \quad (3.33)$$

Há sempre dois pontos fixos simétricos, um em  $\psi = 0$ , o outro em  $\psi = \pi$ , cuja estabilidade ou instabilidade depende do sinal de  $V_{11}$ . Os pontos fixos são também extremos locais de  $C$ , dados por

$$C_{I,II} = \pm \sqrt{\delta^2 + V_{11}^2} \quad (3.34)$$

Os extremos absolutos de  $C$  no intervalo  $0 \leq \psi \leq \pi$ ,  $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$  são os valores nos extremos locais ou os valores nas extremidades do intervalo, a saber  $\pm C_B = \pm \frac{\delta}{2}$ . Concluo que a faixa de possíveis valores de  $C$  é  $C_{II} \leq C \leq C_I$ . Em particular, ao longo da linha  $\psi = \pi$ ,  $C_{II} \leq C \leq |C_B|$ , enquanto que ao longo da linha  $\psi = 0$ ,  $-|C_B| \leq C \leq C_I$ . Posso agora dar uma classificação das trajetórias de acordo com a “energia”  $C$ . Trajetórias fechadas atravessam  $\psi = 0$  ou  $\psi = \pi$ , enquanto que trajetórias abertas atravessam ambos. Das faixas de  $C$  em  $\psi = 0$  e  $\psi = \pi$  concluo que órbitas fechadas têm  $|C| \leq C_B$  enquanto que órbitas abertas satisfazem  $|C| \geq C_B$  e as separatrizes são determinadas por  $C_{sep} = \pm C_B$  e têm equações

$$\pm \frac{\delta}{2} = \delta \alpha + V_{11} \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \cos \psi . \quad (3.35)$$

Quando  $\delta = 0$ , a separatriz reduz-se à linha reta horizontal  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Quanto maior a razão  $\frac{\epsilon}{V_{11}}$ , maior a região de trajetórias abertas, indicando pequeno acoplamento, já que  $\alpha$  oscila entre limites restritos, as órbitas tendendo a linhas retas verticais no limite  $\frac{\epsilon}{V_{11}} \rightarrow \infty$ . No limite oposto  $\frac{\epsilon}{V_{11}} \rightarrow 0$ , todas as trajetórias são curvas fechadas simétricas em torno dos pontos fixos  $\alpha = 0$  ( $\psi = 0$  ou  $\psi = \pi$ ) e todas as partículas estão totalmente acopladas. As Figs.[3.1 (b) e (c)] ilustram as duas situações.

### 3.3.3 Cálculo da emitância

Seguindo o procedimento geral delineado na seção 3.2. começo calculando a média temporal da amplitude quadrática do movimento de uma partícula. A solução completa para o movimento de uma partícula qualquer é obtida das equações canônicas:

$$\alpha = \frac{2C\delta + \sqrt{\Delta} \sin \left[ \sqrt{V_{11}^2 + \delta^2} (\theta - \theta_0) \right]}{2(V_{11}^2 + \delta^2)}, \quad (3.36)$$

onde  $\Delta = V_{11}^2(\delta^2 + V_{11}^2 - 4C^2)$ . Promediando sobre  $\theta$ , obtenho

$$\bar{\alpha} = \frac{C\delta}{V_{11}^2 + \delta^2} = \frac{\delta}{V_{11}^2 + \delta^2} \left\{ \delta\alpha_0 + V_{11} \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha_0^2} \cos \psi_0 \right\}, \quad (3.37)$$

onde  $(\alpha_0, \psi_0)$  é um ponto qualquer sobre uma trajetória particular. Da definição de  $C_1$  e  $\alpha$ ,  $A_{y,x} = C_1(\frac{1}{2} \pm \alpha)$ , de maneira que

$$\overline{A_{y,x}} = C_1 \left( \frac{1}{2} \pm \bar{\alpha} (A_{x_0}, A_{y_0}, \varphi_{x_0}, \varphi_{y_0}) \right). \quad (3.38)$$

Seja  $f(A_x, A_y)$  a distribuição de densidade inicial no espaço de fases  $(A_x, A_y, \varphi_x, \varphi_y)$ .  $f_0$  é suposta uniforme em fases mas é, de resto, arbitrária. Aplicando a Eq.(3.8) para  $A_{x,y}$ , obtenho

$$\overline{\langle A_{y,x} \rangle} = \langle \overline{A_{y,x}} \rangle_0 = \frac{\langle A_x + A_y \rangle}{2} + \langle (A_x + A_y) \bar{\alpha} \rangle. \quad (3.39)$$

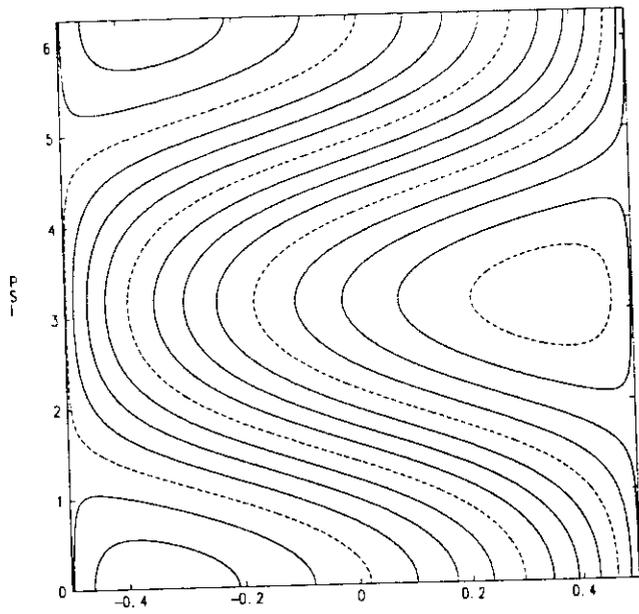
Desde que as fases estejam uniformemente distribuídas, o termo cosenoidal em  $\bar{\alpha}$  tem média zero e

$$\overline{\langle A_{y,x} \rangle} = \frac{1 + \kappa}{2} \mp \frac{\delta^2}{V_{11}^2 + \delta^2} \frac{1 - \kappa}{2}, \quad (3.40)$$

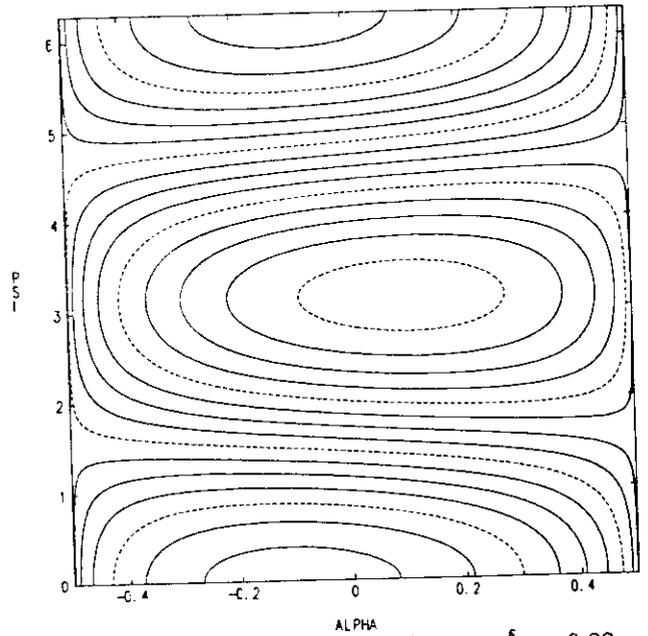
onde  $\langle A_y \rangle_0 = \kappa$  é a razão de emitâncias inicial não acoplada. A nova razão de emitâncias é

$$\frac{\overline{\langle A_y \rangle}}{\overline{\langle A_x \rangle}} = \frac{\frac{1+\kappa}{2} - \frac{\delta^2}{V_{11}^2 + \delta^2} \frac{1-\kappa}{2}}{\frac{1+\kappa}{2} + \frac{\delta^2}{V_{11}^2 + \delta^2} \frac{1-\kappa}{2}}. \quad (3.41)$$

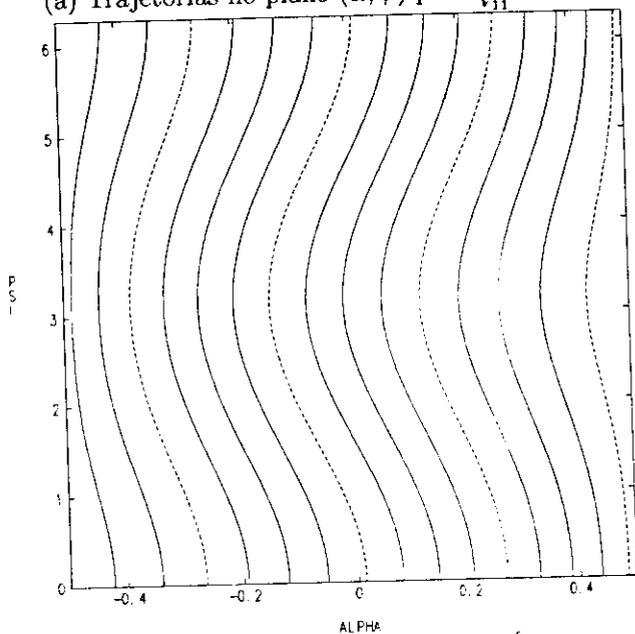
Este resultado é idêntico àquele dado por Guignard[Gui78] com as associações  $r \rightarrow \frac{1}{\kappa}$ ,  $|C| \rightarrow V_{11}$  e  $\Delta \rightarrow \delta$



(a) Trajetórias no plano  $(\alpha, \psi)$  para  $\frac{\delta}{v_{11}} = 1.1$



(b) Trajetórias no plano  $(\alpha, \psi)$  para  $\frac{\delta}{v_{11}} = 0.22$



(c) Trajetórias no plano  $(\alpha, \psi)$  para  $\frac{\delta}{v_{11}} = 6.2$

Figura 3.1: Acoplamento linear: trajetórias no espaço de fases.

## 3.4 Acoplamento bétatron provocado por uma nuvem Gaussiana

### 3.4.1 O Hamiltoniano

O Hamiltoniano do movimento eletrônico na presença de uma nuvem Gaussiana de dimensões iguais às dimensões iniciais do feixe de elétrons (i.e., o cálculo não é auto-consistente) é (Cf. Apêndice G)

$$H(x, x', y, y'; \theta) = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{q_x^2 x^2 + q_y^2 y^2}{2} + \sum_{k_1, k_2} \varphi_{k_1, k_2} x^{k_1} y^{k_2} \quad (3.42)$$

Como na seção anterior, introduzo variáveis amplitude e fase ( $a_x, \varphi_x, a_y, \varphi_y$ ) e reescrevo o Hamiltoniano

$$H^{(2)}(a_x, \varphi_x, a_y, \varphi_y) = \sum_{k_1, k_2} \sum_{\substack{l_1 + m_1 = k_1 \\ l_2 + m_2 = k_2}} \binom{l_1 + m_1}{m_1} \binom{l_2 + m_2}{m_2} a_x^{\frac{k_1}{2}} a_y^{\frac{k_2}{2}} \omega_1^{l_1} \bar{\omega}_1^{m_1} u_1^{l_2} \bar{u}_1^{m_2} \\ \times \exp \{i[(l_1 - m_1)\psi_x + (l_2 - m_2)\psi_y]\} \varphi_{k_1, k_2}.$$

Retendo apenas os termos de baixa frequência da expansão de Fourier  $H^{(2)}$  em  $\theta$ , obtenho o Hamiltoniano aproximado (com aproximação macia para os fatores de Floquet)

$$H_{ap}^{(2)}(A_x, \varphi_x, A_y, \varphi_y) = V_{20}A_x + V_{02}A_y + V_{22}A_xA_y + V_{40}A_x^2 + V_{04}A_y^2 + \frac{V_{22}}{2}A_xA_y \cos [2(\psi_y - \psi_x)], \quad (3.43)$$

onde assumo que as sintonias não perturbadas satisfazem  $2(Q_y - Q_x) \approx 0$  e os coeficientes  $V_{ij}$  são dados por:

$$\begin{aligned} V_{20} &= \frac{\varphi_{20}}{Q_x} & V_{02} &= \frac{\varphi_{02}}{Q_y} & V_{40} &= \frac{3}{2} \frac{R\epsilon_x}{Q_x^2} \varphi_{40} \\ V_{04} &= \frac{3}{2} \frac{R\epsilon_x}{Q_y^2} \varphi_{04} & V_{22} &= \frac{R\epsilon_x}{Q_x Q_y} \varphi_{22} \end{aligned} \quad (3.44)$$

e  $\psi_{x,y} = \varphi_{x,y} + Q_{x,y}\theta$ . Note que  $H_{ap}^{(2)}$  está escrito em função das amplitudes escaladas  $A_{x,y} = \frac{a_{x,y}}{R\epsilon_x}$ . As equações canônicas são

$$\frac{dA_x}{d\theta} = -V_{22}A_xA_y \sin [2(\psi_y - \psi_x)] \quad (3.45)$$

$$\frac{dA_y}{d\theta} = V_{22}A_xA_y \sin [2(\psi_y - \psi_x)] \quad (3.46)$$

$$\frac{dH^{(2)}}{d\theta} = -V_{22}(Q_y - Q_x)A_xA_y \sin [2(\psi_y - \psi_x)], \quad (3.47)$$

das quais obtenho as constantes do movimento

$$C_1 = A_x + A_y \quad (3.48)$$

$$C_2 = H_{ap}^{(2)} + Q_x A_x + Q_y A_y, \quad (3.49)$$

Como na seção 3.3, uma transformação canônica permite fazer das constantes do movimento  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente um momentum (cuja coordenada conjugada é cíclica) e um Hamiltoniano independente do tempo. A função geradora desta transformação é

$$G(\psi, \varphi_y, A_x, C_1; \theta) = \left( \frac{v}{2} - (Q_y - Q_x)\theta - \varphi_y \right) (A_x - C_1). \quad (3.50)$$

com

$$\psi = 2(Q_y - Q_x)\theta + 2(\varphi_y - \varphi_x) \quad (3.51)$$

que é idêntica à Eq.( 3.25) a menos do fator  $\frac{1}{2}$ . O novo Hamiltoniano é

$$H^{(3)}\left(\frac{A_y}{2}, \psi, C_1, \varphi_x\right) = H_{ap}^{(2)} + Q_y A_y + Q_x A_x - Q_x C_1 = \text{const.} \quad (3.52)$$

O problema é agora unidimensional e a transformação de escala adicional  $\alpha = \frac{A_y}{C_1} - \frac{1}{2}$  leva ao Hamiltoniano nas coordenadas  $(\alpha, \psi)$ :

$$H^{(4)}(\alpha, \psi) = \Delta Q_\epsilon \left\{ (v - \cos \psi)\alpha^2 + \chi\alpha^2 + \frac{1}{4} \cos \psi + C_3 \right\}, \quad (3.53)$$

onde

$$\Delta Q_\epsilon = V_{22}C_1 \quad (3.54)$$

$$v = \frac{2(V_{04} + V_{40})}{V_{22}} - 2 \quad (3.55)$$

$$\chi = 2 \frac{Q_y - Q_x + V_{02} - V_{20} + C_1(V_{04} - V_{40})}{V_{22}C_1}. \quad (3.56)$$

$\Delta Q_\epsilon$  é proporcional à força do termo de acoplamento,  $C_3$  é uma constante que não afeta a dinâmica no plano  $(\alpha, \psi)$  e o significado de  $\chi$  pode ser entendido da equação canônica de movimento para  $\psi$  no limite de  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\partial H^{(4)}}{\partial \alpha} = \Delta Q_\epsilon \{2\alpha(v - \cos \psi) + \chi\} \rightarrow \Delta Q_\epsilon \chi. \quad (3.57)$$

Além disso, da definição de  $\psi$ ,  $\frac{dv}{d\theta} = 2(Q_y - Q_x) + 2\left(\frac{d\varphi_y}{d\theta} - \frac{d\varphi_x}{d\theta}\right)$ .  $\chi$  é proporcional à diferença das sintonias vertical e horizontal para pequenas amplitudes  $\alpha$  e contém três contribuições:

- A separação das sintonias não-perturbadas  $Q_y - Q_x$ .
- A diferença entre os deslocamentos de sintonia lineares induzido pelos íons  $V_{02} - V_{20}$ . Esta é uma quantidade positiva para um feixe plano e reduz-se a zero para um feixe com  $\epsilon_x = \epsilon_y$ .
- A diferença entre os deslocamentos de sintonia não-lineares (dependentes da amplitude)  $C_1(V_{04} - V_{40})$ . Esta é uma quantidade negativa para um feixe plano e reduz-se a zero para um feixe com  $\epsilon_x = \epsilon_y$ .

O parâmetro  $v$  depende somente da razão das emitâncias iniciais e da razão das sintonias não perturbadas:

$$v = \frac{2\sqrt{k\frac{Q_y}{Q_x}}^3 + (k\frac{Q_y}{Q_x})^2 + 2\sqrt{k\frac{Q_y}{Q_x}} + 1}{2\sqrt{k\frac{Q_y}{Q_x}}} - 2 \quad (3.58)$$

$$\kappa = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (3.59)$$

e  $v > 1$  para  $0 < \kappa < 1$ .

### 3.4.2 Estrutura do espaço de fases

As curvas solução no plano  $(\alpha, \psi)$  são curvas de “energia”  $C = H^{(4)}/\Delta Q_e$  constante:

$$C(\alpha, \psi) = (v - \cos \psi)\alpha^2 + \chi\alpha + \frac{1}{4} \cos \psi. \quad (3.60)$$

A diferença essencial com relação ao caso de acoplamento linear é que agora a topologia das curvas solução depende, através da dependência de  $\chi$  na amplitude  $C_1$ , da soma das amplitudes de oscilação vertical e horizontal.  $\chi$  tem aqui o papel anteriormente desempenhado pela diferença de sintonias  $Q_y - Q_x$ , i.e., expressa a distância à ressonância de acoplamento para uma partícula com uma dada amplitude  $C_1$ . Partículas com  $C_1 \approx 0$  estão em cima da ressonância e são portanto altamente acopladas. Suas trajetórias no plano  $(\alpha, \psi)$  são curvas fechadas em torno de pontos fixos estáveis que têm  $\alpha \approx 0$ . Por outro lado, quando  $|\chi| \gg 0$ , as partículas estão muito longe da condição de ressonância e as trajetórias tendem a linhas retas verticais, i.e, não há acoplamento e  $\alpha$  permanece constante.

A Fig.[3.2(a)] mostra o parâmetro  $\chi$  em função de  $C_1$  para um conjunto fixo de parâmetros de máquina. Apenas as partículas com amplitude em torno de  $C_1^0$  – o ponto no qual  $\chi = 0$  – têm movimento significativamente acoplado, enquanto partículas com amplitudes muito grandes ou muito pequenas permanecem desacopladas.

As Figs.[3.2(b) e (c)] mostram trajetórias no espaço de fases para dois valores de  $\chi$ , nas quais as características qualitativas discutidas acima podem ser observadas.

As trajetórias são pares e periódicas em  $\psi$ . Quando  $\chi \approx 0$  elas são também simétricas em  $\alpha$ . Os pontos fixos são os extremos locais de  $C$  :

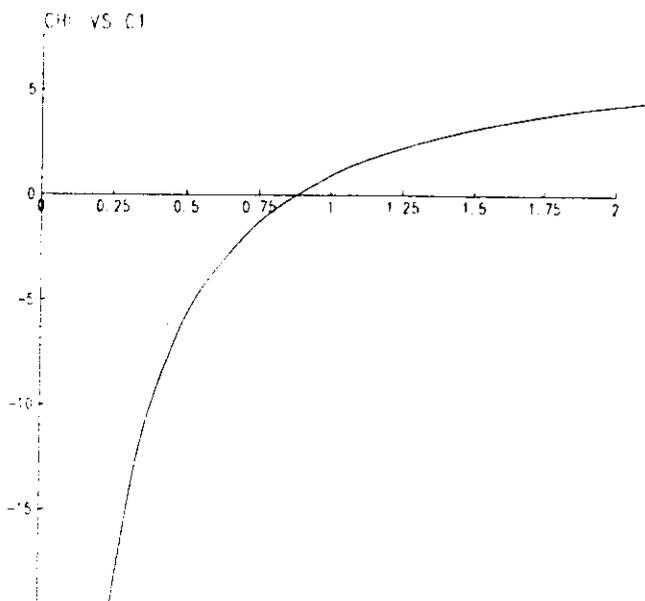
$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \psi} = \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \sin \psi = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \alpha} = 2(v - \cos \psi)\alpha + \chi = 0. \quad (3.62)$$

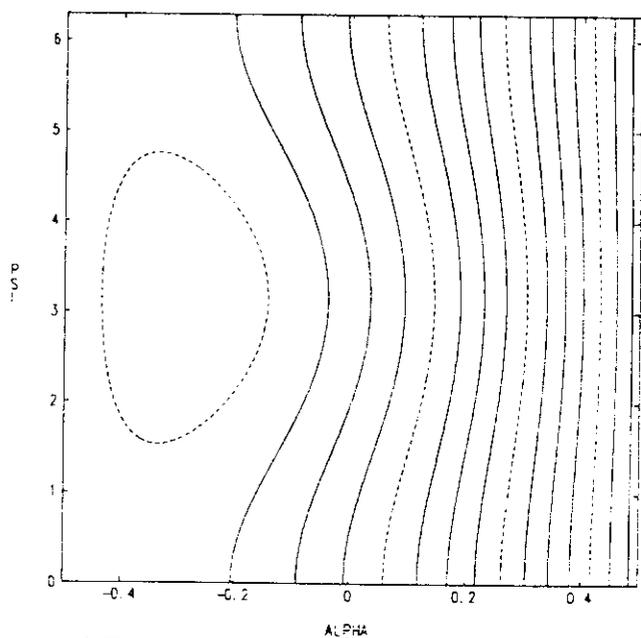
Além dos pontos degenerados  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$  (que correspondem a partículas não acopladas, que permanecem indefinidamente com  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ ), os pontos fixos ocorrem para  $\psi = 0, \pi$  e sua coordenada  $\alpha$  é dada por:

$$2(v \mp 1)\alpha_{0,\pi} + \chi = 0. \quad (3.63)$$

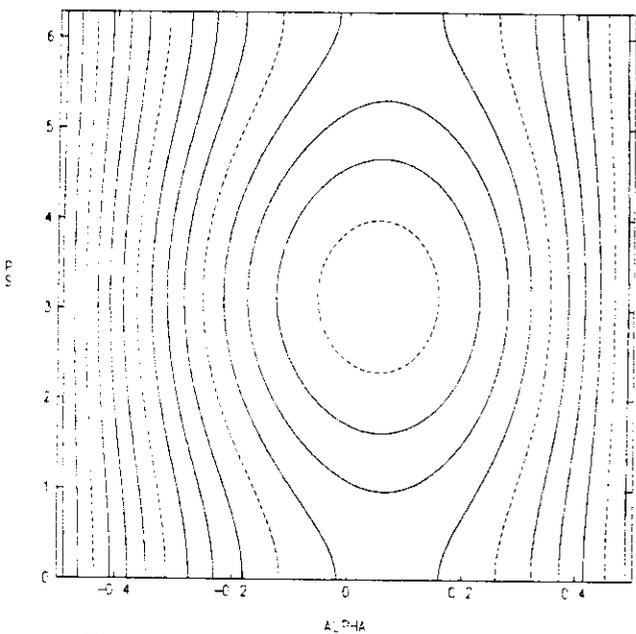
Note que um ponto fixo existe somente se o valor de  $\alpha$  dado acima pertence ao intervalo permitido  $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ , i.e., há um ponto fixo em  $\psi = 0$  somente se  $|\chi| < v - 1$  e há um ponto



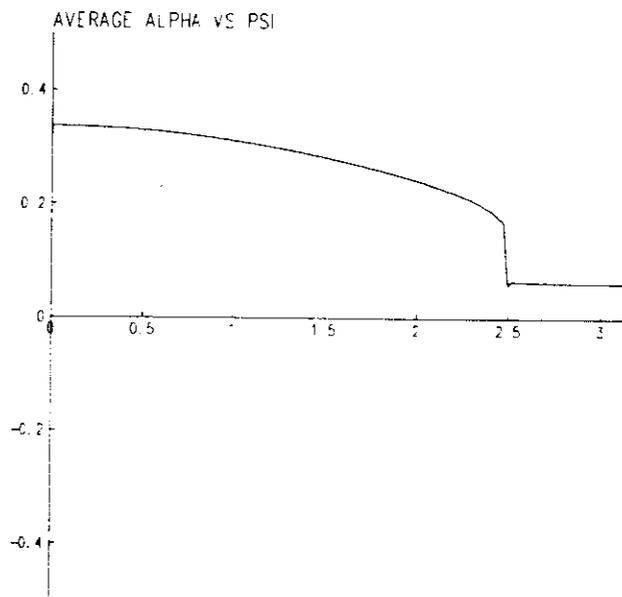
(a) Distância à ressonância,  $\chi$ , em função da amplitude  $C_1$  para  $\nu = 6.6$  (razão de emitâncias inicial = 10%)



(b) Trajetórias no espaço de fase para  $\chi = 4.3$



(c) Trajetórias no espaço de fases para  $\chi = -0.8$



(d)  $\bar{\alpha}$  em função da fase  $\psi$  para  $\alpha = 0.3$ ,  $\chi = -0.8$  e  $\nu = 6.6$

Figura 3.2: Acoplamento não-linear

fixo em  $\psi = \pi$  somente se  $|\chi| < v + 1$ . A estabilidade dos pontos fixos pode ser analisada através da equação característica

$$\det \begin{vmatrix} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \cos \psi - \mu & 2\alpha \sin \psi \\ 2\alpha \sin \psi & 2(v - \cos \psi) - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3.64)$$

que tem raízes

$$\mu_1 = \pm \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) ; \quad \mu_2 = v \mp 1, \quad (3.65)$$

onde os sinais superiores e inferiores referem-se respectivamente a  $\psi = 0$  e  $\psi = \pi$ . Como  $v \geq 1$ ,  $\psi = \pi$  é um ponto fixo estável, enquanto  $\psi = 0$  é instável. Nestes extremos, a constante  $C$  é dada por:

$$C_{I,II} = -\frac{\chi^2}{4(v \mp 1)} \pm \frac{1}{4}. \quad (3.66)$$

O intervalo global de valores assumidos por  $C$  é determinado por  $C_{I,II}$  ou pelos valores nas extremidades dos intervalos de variação permitidos de  $\alpha$ , i.e.,  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ , dado por

$$C_{III,IV} = \frac{v}{4} \pm \frac{\chi}{2}. \quad (3.67)$$

O intervalo efetivo de variação de  $C$  depende dos pontos fixos dados acima existirem de fato ou não, o que é por sua vez determinado pelas razões  $\frac{\chi}{v+1}$  e  $\frac{\chi}{v-1}$ . Além disso, é fácil mostrar que as constantes  $C_{I,II,III,IV}$  obedecem às relações:

$$\begin{aligned} C_{III} > C_{IV} > C_{II} > C_I & \text{ se } \begin{cases} \chi > 0 \\ |\chi| > \sqrt{v^2 - 1} \end{cases} \\ C_{IV} > C_{III} > C_{II} > C_I & \text{ se } \begin{cases} \chi < 0 \\ |\chi| > \sqrt{v^2 - 1} \end{cases} \\ C_{III} > C_{IV} > C_I > C_{II} & \text{ se } \begin{cases} \chi > 0 \\ |\chi| < \sqrt{v^2 - 1} \end{cases} \\ C_{IV} > C_{III} > C_I > C_{II} & \text{ se } \begin{cases} \chi < 0 \\ |\chi| < \sqrt{v^2 - 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Das condições de existência dos pontos fixos e das equações acima, derivo o intervalo global coberto pela constante  $C$  para dados  $\chi$  e  $v$ :

$$\begin{aligned} |\chi| \leq v + 1 & & |\chi| \geq v + 1 \\ \chi > 0 & \implies C_{II} \leq C \leq C_{III} & \chi > 0 & \implies C_{IV} \leq C \leq C_{III} \\ \chi < 0 & \implies C_{II} \leq C \leq C_{IV} & \chi < 0 & \implies C_{III} \leq C \leq C_{IV} \end{aligned} \quad (3.68)$$

A constante  $C$  pode agora ser utilizada para classificar os diferentes tipos de órbitas, verificando-se quais os intervalos de  $C$  que correspondem a trajetórias que cruzam as linhas retas  $\psi = 0$  e  $\psi = \pi$ . Para uma órbita que cruza  $\psi = 0$ ,

$$C(\alpha) = (v - 1)\alpha^2 + \chi\alpha + \frac{1}{4}. \quad (3.69)$$

com  $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ . Esta é uma parábola (cóncava para cima) com um mínimo em  $\alpha_M = -\frac{\lambda}{2(v-1)}$ , que só existe se  $|\lambda| < v-1$ . Portanto, para que uma trajetória cruze  $\psi = 0$ , a constante  $C$  deve pertencer ao intervalo:

$$\begin{array}{ll}
 |\lambda| < v-1 & |\lambda| > v-1 \\
 \begin{array}{l} \chi > 0 \\ \chi < 0 \end{array} \implies C_I \leq C \leq C_{III} & \begin{array}{l} \chi > 0 \\ \chi < 0 \end{array} \implies C_{IV} \leq C \leq C_{III} \\
 \begin{array}{l} \chi > 0 \\ \chi < 0 \end{array} \implies C_I \leq C \leq C_{IV} & \begin{array}{l} \chi > 0 \\ \chi < 0 \end{array} \implies C_{III} \leq C \leq C_{IV}
 \end{array} \quad (3.70)$$

e um resultado análogo é válido para as curvas que cruzam  $\psi = \pi$ . A Tab.( 3.1) resume os resultados para o intervalo global de variação de  $C$  e os subintervalos correspondentes às trajetórias que cruzam as retas  $\psi = 0$  ou  $\psi = \pi$ . Todas as trajetórias cruzam a reta  $\psi = \pi$ , mas nem todas cruzam  $\psi = 0$ . Há portanto dois tipos de órbitas: aquelas que cruzam somente  $\psi = \pi$  (órbitas altamente acopladas) e aquelas que cruzam  $\psi = \pi$  e  $\psi = 0$  (estas podem corresponder a trajetórias forte ou fracamente acopladas, dependendo da faixa de valores coberta por  $\alpha$  durante o batimento). É fácil ver que as primeiras devem cruzar  $\psi = \pi$  duas vezes, dando origem a trajetórias fechadas enquanto que as últimas correspondem a órbitas abertas. Os dois tipos cobrem regiões do espaço de fases divididas por uma separatriz definida por um valor de  $C$  também listado na Tab.(3.1). Note que para  $|\chi| > v+1$  não há separatriz e todas as órbitas são abertas. Isto foi utilizado por Montague[Mon68] como um critério de insensibilidade ao acoplamento. A dificuldade com este critério, como mencionado por Montague, é que, para feixes planos, o parâmetro  $\chi$  varia fortemente com a amplitude  $C_1$  e não é óbvio quais amplitudes são as mais relevantes ao aumento global da emitância vertical do feixe. É precisamente este problema que considero na próxima seção.

$\chi, v$	intervalo de variação total	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	separatriz
$ \chi  < v-1$				
$\chi > 0$	$[C_{II}, C_{III}]$	$[C_I, C_{III}]$	$[C_{II}, C_{III}]$	$C_I$
$\chi < 0$	$[C_{II}, C_{IV}]$	$[C_I, C_{IV}]$	$[C_{II}, C_{IV}]$	$C_I$
$v-1 \leq  \chi  \leq v+1$				
$\chi > 0$	$[C_{II}, C_{III}]$	$[C_{IV}, C_{III}]$	$[C_{II}, C_{III}]$	$C_{IV}$
$\chi < 0$	$[C_{II}, C_{IV}]$	$[C_{III}, C_{IV}]$	$[C_{II}, C_{IV}]$	$C_{III}$
$ \chi  > v+1$				
$\chi > 0$	$[C_{IV}, C_{III}]$	$[C_{IV}, C_{III}]$	$[C_{IV}, C_{III}]$	-
$\chi < 0$	$[C_{III}, C_{IV}]$	$[C_{III}, C_{IV}]$	$[C_{III}, C_{IV}]$	-

Tabela 3.1: Intervalos da constante do movimento  $C$  que correspondem a diferentes tipos de órbitas: todas as trajetórias, trajetórias que cruzam  $\psi = 0$ , trajetórias que cruzam  $\psi = \pi$  apenas e a separatriz. As constantes  $C_{I,II,III,IV}$  estão definidas nas Eqs.(3.66) e (3.67).

### 3.4.3 Cálculo da emitância

Procedo como na seção 3.3 e começo calculando a média temporal da amplitude  $\alpha$ . Desta vez, no entanto, nem mesmo o movimento de uma partícula é solúvel em termos de funções

elementares e expresseo o resultado em termos de funções elípticas de primeiro e terceiro tipos. Desta forma, não é mais possível obter um resultado independente da forma particular da distribuição de densidade inicial no espaço de fases, e suponho uma Gaussiana (com as mesmas larguras RMS que a nuvem iônica). Estabeleço então um procedimento numérico para promediar  $\bar{\alpha}$  sobre esta distribuição. Um tratamento especial deve ser dado às separatrizes, já que elas correspondem a quase-singularidades na derivada do integrando.

A equação canônica para  $\alpha$  é obtida do Hamiltoniano  $H^{(4)}$  :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \Delta Q_e \left( \frac{1}{4} - \alpha^2 \right) \sin \psi, \quad (3.71)$$

e a média temporal de  $\alpha$  é :

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{T} \int \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{T} \int \frac{\alpha d\alpha}{\frac{d\alpha}{d\theta}}. \quad (3.72)$$

Expressando  $\sin \psi$  em função de  $\alpha$  e do invariante  $C$  da Eq.(3.60) , obtenho

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \Delta Q_e \sqrt{G(\alpha)} \quad (3.73)$$

$$T = \frac{1}{\Delta Q_e} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{G(\alpha)}} \quad (3.74)$$

$$G(\alpha) = \left( \frac{1}{4} - \alpha^2 \right) - [C - \chi\alpha - v\alpha^2]^2, \quad (3.75)$$

onde assumi, sem perda de generalidade, que  $0 \leq \psi \leq \pi$  e  $G(\alpha)$  é uma quártica em  $\alpha$ . Da Eq.(3.72)

$$\bar{\alpha} = \frac{\int \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{G(\alpha)}}}{\int \frac{d\alpha}{\sqrt{G(\alpha)}}}. \quad (3.76)$$

As integrações acima são feitas sobre uma ciclo completo no caso de órbitas fechadas e sobre um período em  $\psi$  no caso de órbitas abertas. No primeiro caso, isto pode ser feito integrando-se entre os dois pontos em que a órbita fechada cruza a reta  $\psi = \pi$ . No segundo caso, a integração é feita do ponto onde a órbita cruza a reta  $v = 0$  até o ponto onde ela cruza a reta  $\psi = \pi$ . Em ambos os casos, os limites de integração correspondem às raízes de  $G(\alpha)$ , como pode-se ver reescrevendo-se

$$G(\alpha) = - \left[ (v-1)\alpha^2 + \chi\alpha + \frac{1}{4} - C \right] \left[ (v+1)\alpha^2 + \chi\alpha + \frac{1}{4} - C \right]. \quad (3.77)$$

O primeiro (segundo) fator determina a intersecção da órbita com a reta  $v = 0$  ( $\psi = \pi$ ). As raízes do segundo fator quadrático são sempre reais (ainda que uma delas - e somente uma - possa estar fora do intervalo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , enquanto que o primeiro fator quadrático pode ter duas raízes reais ou complexas conjugadas dependendo de  $\chi$  e  $v$ . Os discriminantes de cada termo são

$$\Delta_{1,2} = \chi^2 + (4C \mp 1)(v \mp 1) \quad (3.78)$$

Considero primeiro o caso  $\Delta_1 > 0$ .  $G(\alpha)$  tem quatro raízes reais  $a > b > c > d$  e surgem integrais do tipo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} ; & J_1 &= \int_b^a \frac{x dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} \\ I_2 &= \int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} ; & J_2 &= \int_c^b \frac{x dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} \\ I_3 &= \int_d^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} ; & J_3 &= \int_d^c \frac{x dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

que podem ser expressas em termos das funções elípticas

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (3.80)$$

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{(1 + n \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.81)$$

Omito a longa álgebra e dou apenas o resultado final:

$$\frac{J_1}{I_1} = (b - c) \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b-a}{a-c}, k\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)} + c \quad (3.82)$$

$$\frac{J_2}{I_2} = (c - d) \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{c-b}{b-d}, l\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, l\right)} + d \quad (3.83)$$

$$\frac{J_3}{I_3} = (d - a) \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{c-d}{a-c}, k\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)} + a, \quad (3.84)$$

com

$$k^2 = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)} ; \quad l^2 = \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)} \quad (3.85)$$

$\bar{\alpha}$  é dado por uma das expressões acima de acordo com o intervalo de integração apropriado, determinado pelas duas raízes de  $G$  que pertencem ao intervalo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e tais que qualquer ponto da órbita está entre estas duas raízes.

No caso  $\Delta_1 < 0$ , as integrais relevantes são :

$$I_4 = \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)((x-\mu)^2 + \nu^2)}} ; \quad J_4 = \int_b^a \frac{x dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)((x-\mu)^2 + \nu^2)}}$$

e

$$\frac{J_4}{I_4} = \frac{(p+q)(a-b)}{2(p-q)} \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{(p-q)^2}{4pq}, m\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, m\right)} + \frac{pb - qa}{p - q}, \quad (3.86)$$

onde

$$p^2 = \nu^2 + (a - \mu)^2 \quad (3.87)$$

$$q^2 = \nu^2 + (b - \mu)^2 \quad (3.88)$$

$$m^2 = \frac{(a-b)^2 - (p-q)^2}{4pq} \quad (3.89)$$

Agora,  $a$  e  $b$  são as duas raízes reais de  $G(\alpha)$  entre as quais a integração é feita e  $\nu$  e  $\mu$  são as partes real e imaginária das raízes complexas.

Pode-se esperar problemas na avaliação numérica de  $\bar{\alpha}$  sempre que as funções elípticas divergem, (i.e. para  $k, l \approx 1$ ) ou quando  $p \approx q$ . De fato, na solução em computador, é preciso detectar estes casos para evitar um *overflow*. Além disso, é instrutivo calcular estes limites analiticamente para verificar os resultados numéricos. Tomo primeiro o caso  $k \rightarrow 1$  ou  $l \rightarrow 1$  (correspondendo a  $b \rightarrow c$  e  $a \rightarrow b$  ou  $c \rightarrow d$  respectivamente) :

$$F(\varphi, 1) = \ln(\sec \varphi + \tan \varphi) \quad (3.90)$$

$$\Pi(\varphi, n, 1) = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + \sqrt{n} \arctan(\sqrt{n} \sin \varphi) \right\} \quad (3.91)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\Pi}{F} = \frac{1}{n+1} \quad (3.92)$$

Analogamente, é fácil verificar o limite  $p \rightarrow q$ , i.e.,  $n \rightarrow 0$  e  $\frac{\Pi}{F} = 1$ . Além disso, para que  $p = q$ , é preciso que  $a = b$  e  $\bar{\alpha} \rightarrow a$ . Outro limite importante é o correspondente às separatrizes. Para  $\chi < v - 1$  este limite acontece em  $C = C_I$  para o qual  $\Delta_1 = 0$ . Quando atravessamos a separatriz, há uma transição de duas raízes reais de  $G(\alpha)$  para quatro raízes reais, duas das quais estão no intervalo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Quando  $\Delta_1 \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow 0$  de forma que  $p \rightarrow \mu - a$ ,  $q \rightarrow \mu - b$  e  $m \rightarrow 0$ . Como  $F(\frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\pi}{2}$  e  $\Pi(\frac{\pi}{2}, n, 0) = 0$  ou  $\frac{\pi/2}{\sqrt{n+1}}$  se  $|n| > 1$  ou  $|n| < 1$  respectivamente,  $\bar{\alpha} = \mu$  ou  $\sqrt{pq} + \mu$  na separatriz.

A Fig.[3.2(d)] mostra  $\bar{\alpha}$  em função da fase  $\psi$  para valores fixos de  $\alpha$  e  $C_1$ , i.e., ao longo de uma linha vertical no plano  $(\alpha, \psi)$ . O cruzamento da separatriz surge aqui como uma mudança brusca na inclinação da curva, inclinação esta que cresce quando  $\chi \rightarrow 0$ .

Uma vez calculado  $\bar{\alpha}$  as emitâncias são dadas pela Eq.(3.39). A distribuição Gaussiana inicial expressa em variáveis fase-amplitude é

$$f(A_x, \varphi_x, A_y, \varphi_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\kappa} \exp \left\{ - \left( A_x + \frac{A_y}{\kappa} \right) \right\}, \quad (3.93)$$

onde  $\kappa$  é a razão inicial de emitâncias. Introduzindo a fase  $v = 2(\varphi_y - \varphi_x)$ , obtenho:

$$\overline{\langle A_{y,x} \rangle} = \frac{1 + \kappa}{2} \pm \frac{1}{\pi \kappa} \int_0^\infty dA_x dA_y \exp \left\{ - \left( A_x + \frac{A_y}{\kappa} \right) \right\} (A_x + A_y) \int_0^\pi \bar{\alpha} d\psi, \quad (3.94)$$

onde usei o fato de que  $\bar{\alpha}$  é par e periódica em  $v$ . Para o cálculo numérico desta integral, é conveniente fazer a transformação de  $A_x, A_y$  em  $C_1, \alpha$  de forma a reduzir o número de integrais impróprias.

$$\overline{\langle A_{y,x} \rangle} = \frac{1 + \kappa}{2} \pm \frac{1}{\pi \kappa} \int_0^\infty dC_1 C_1^2 \exp \left\{ - \frac{1 + \kappa C_1}{\kappa} \right\} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\alpha \exp \left\{ - \left( \frac{1 - \kappa}{\kappa} \right) C_1 \alpha \right\} \times \int_0^\pi \bar{\alpha} d\psi. \quad (3.95)$$

No limite de acoplamento nulo, i.e.,  $\bar{\alpha} \rightarrow \alpha$ , isto se reduz a

$$\overline{\langle A_{y,x} \rangle} = \frac{1 + \kappa}{2} \mp \frac{1 - \kappa}{2}. \quad (3.96)$$

i.e.,  $\overline{\langle A_y \rangle} = \kappa$  e  $\overline{\langle A_x \rangle} = 1$ .

Como visto na Fig.[3.2(d)], a integração numérica de  $\bar{\sigma}$  exige atenção especial quando o caminho de integração cruza a separatriz. Como existem algoritmos de quadratura com passo de integração auto-adaptado que são eficientes em lidar com singularidades nas extremidades do intervalo de integração, divido o intervalo em duas partes e utilizo as rotinas de integração de uso geral D01AJF da biblioteca numérica NAG[TC88]. As duas integrações externas na Eq.(3.95) são feitas com as rotinas NAG D01AHF e D01ABF.

### 3.4.4 Resultados

É fácil ver das expressões da expansão do potencial que todos os resultados dependem apenas de três parâmetros independentes, a saber, a razão das sintonias não perturbadas  $\frac{Q_y}{Q_x}$ , um parâmetro de força da ressonância  $\frac{1}{q} = \frac{\epsilon_0 V_0}{p_0 c \epsilon_x (Q_y - Q_x)} \frac{R}{R}$  e a razão de emitâncias inicial  $\kappa$ . Ainda que seja útil ter isto em mente ao se explorar o espaço de parâmetros do problema, prefiro expressar os resultados em termos do produto  $I\eta$  (corrente do feixe vezes neutralização) para um dado conjunto de parâmetros de máquina que correspondem às condições normais de operação do EPA. Desta forma, assumo  $E_0 = 500$  MeV,  $\epsilon_r = 8 \times 10^{-8} \pi$  mrad,  $R = 20$  m,  $Q_x = 4.60$ ,  $Q_y = 4.38$ . A Fig.[3.3(a)] mostra a razão de acoplamento  $\frac{\overline{\langle A_y \rangle}}{\overline{\langle A_x \rangle}}$  em função da neutralização para uma razão de emitâncias inicial  $\kappa = 0.1$  e a Fig.[3.3(b)] mostra uma curva equivalente para o caso  $Q_x = 4.38$ ,  $Q_y = 4.60$ . É possível compreender a forma destas curvas a partir da Eq.(3.56), da qual deduzo a amplitude de acoplamento máximo:

$$C_1^{max} = \frac{(Q_y - Q_x) + V_{02} - V_{20}}{V_{04} - V_{40}} \quad (3.97)$$

$$= \frac{8\kappa}{2\sqrt{\kappa} + 1 - 2\kappa\sqrt{\kappa} - \kappa^2} \left\{ (1 - \kappa) + (1 + \sqrt{\kappa})^2 \sqrt{\kappa} q \right\}, \quad (3.98)$$

onde assumi  $Q_y/Q_x \approx 1$ . Note que as partículas com  $C_1 \approx 1$  são as mais importantes para a emitância vertical. Considero primeiro o caso  $Q_y > Q_x$ . Para valores muito pequenos de  $I\eta$ , i.e.  $q$  grande, a amplitude para a qual há acoplamento significativo é também grande, o que resulta num número pequeno de partículas sendo acopladas, já que existem poucas partículas com estas grandes amplitudes. À medida que  $q$  decresce,  $C_1^{max}$  fica menor, cada vez mais partículas são acopladas e  $\overline{\langle A_y \rangle}$  aumenta passando por um máximo quando  $C_1^{max} \approx 1$ . Para  $q$  pequeno, no entanto, somente partículas de pequena amplitude são acopladas e estas têm pouco efeito sobre a emitância. Além disso, aquelas partículas relevantes para a emitância afastam-se de  $C_1^{max}$ , que tende a  $\frac{8\kappa}{2\sqrt{\kappa} + \kappa + 1} < 1$  para um feixe plano. Em conseqüência, o acoplamento diminui, como visto na Fig.[3.3(a)]<sup>4</sup>.

Quando  $Q_y < Q_x$ , pode haver casos em que nenhuma partícula está exatamente em ressonância. (isto acontece quando  $|Q_y - Q_x| > V_{20} - V_{02}$ ) mas se este não é o caso, um argumento similar ao exposto acima é válido. Mas agora, à medida que  $I\eta$  aumenta,  $C_1^{max}$  aproxima-se de 1 e a emitância vertical cresce monotonicamente como visto na Fig.[3.3 (b)]

<sup>4</sup>Note, entretanto, que os deslocamentos de sintonia envolvidos são enormes quando  $I\eta$  é grande (e.g.,  $\Delta Q_y = 1.84$  para  $\eta_0 = 50\%$  and  $I = 100$  mA) e todo este procedimento é questionável para  $I\eta$  acima de uns 2.4%.

Cálculos com diferentes razões  $\kappa$  foram feitos e todos os resultados assemelham-se aos mostrados na Fig.[3.3 (a) e (b)], com o ponto de acoplamento máximo deslocando-se em direção de  $I\eta$  pequeno à medida que  $\kappa$  decresce. Em nenhum caso o aumento na razão de acoplamento foi maior do que 30 – 40% da razão inicial. Os resultados experimentais [Cf. Fig.(2.7)], por outro lado, mostram aumentos da razão de emitância de até um fator 3, indicando que o acoplamento de alta ordem produzido por uma nuvem iônica Gaussiana simétrica não é suficientemente intenso para explicar as observações experimentais.

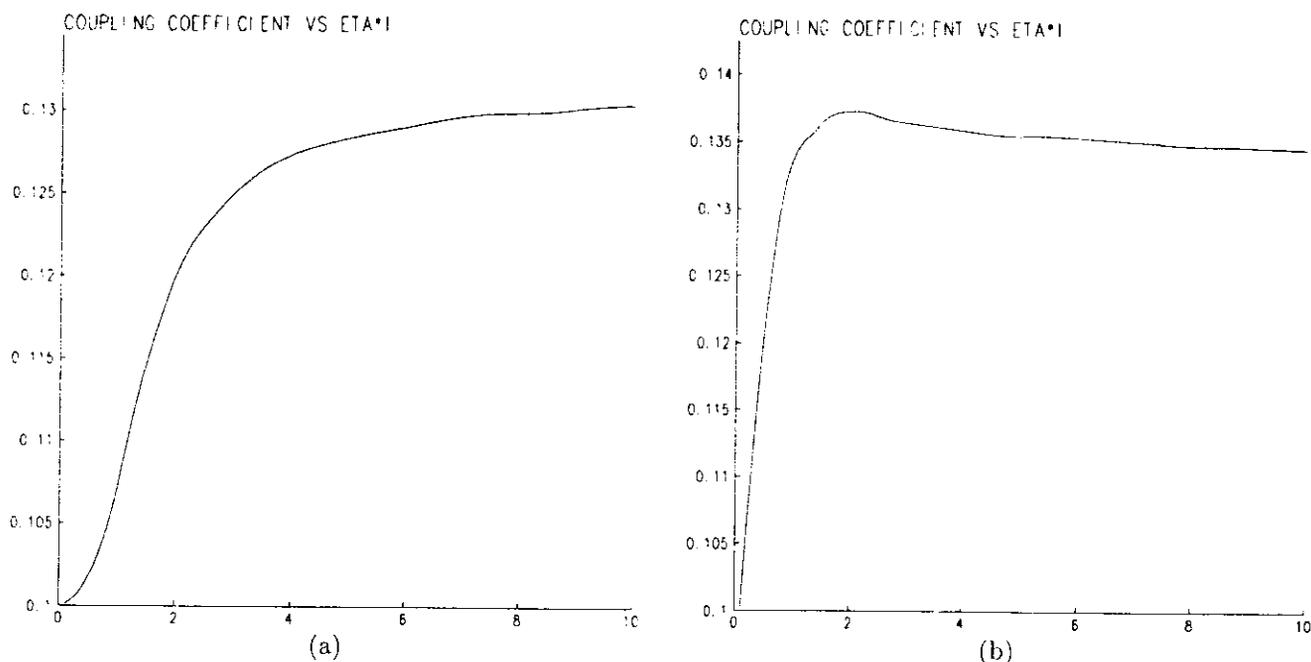


Figura 3.3: Razão de emitâncias  $\kappa$  em função de  $I\eta$  (em A%) para o feixe do EPA. O feixe sem íons tem  $\kappa = 10\%$ . Acoplamento total ( $\kappa = 100\%$ ) indica  $\epsilon_x = \epsilon_y$ , i.e., um feixe cilíndricamente simétrico se  $\beta_x = \beta_y$ . (a)  $Q_y = 4.38$ ,  $Q_x = 4.60$  e (b)  $Q_y = 4.60$ ,  $Q_x = 4.38$

Este resultado sugere algumas *hipóteses* e caminhos de pesquisa teórica e experimental adicional:

- Os campos acoplantes não são produzidos pelos íons (e sim pelos erros de alinhamento da máquina), cujo único papel seria levar o feixe até as condições de ressonância. Neste caso, medidas corretivas seriam possíveis com a introdução de magnetos *skew* que cancelam os campos acoplantes indesejados. Se o acoplamento for provocado por uma ressonância linear seria possível observar uma assimetria de comportamento conforme o ponto de operação da máquina situa-se abaixo ou acima da diagonal que determina a ressonância no diagrama de sintonia: se estamos abaixo da diagonal ( $Q_x > Q_y$ ), a presença dos íons causa um deslocamento das sintonias vertical e horizontal que aproxima o ponto de operação da condição de ressonância ( $Q_x = Q_y$ ), já que o deslocamento na vertical é maior que o deslocamento na horizontal para feixes planos: se, por outro lado, o ponto de operação situa-se acima da diagonal, o deslocamento de sintonia provocado pelos íons tende a afastar o feixe da ressonância.
- Existem distribuições não simétricas de íons aprisionados que são capazes de produzir

acoplamento de primeira ordem. Conjecturas[PonPriv] neste sentido foram sugeridas para explicar o resultado de medidas da corrente drenada de eletrodos de limpeza próximo a ímãs dipolares.

- Efeitos coerentes, i.e., instabilidades, são responsáveis pelo aumento das emitâncias (horizontal e vertical) que se observa a altas correntes.

A discussão anterior deixa claro que a distribuição trasversal dos íons aprisionados tem papel fundamental na dinâmica dos elétrons. Neste capítulo (e em grande parte da literatura) fiz a suposição simplificadora de que a distribuição iônica é um réplica da distribuição eletrônica. No próximo capítulo, analiso em detalhes a distribuição iônica no limite de baixas neutralizações e em situação de equilíbrio térmico.

# Capítulo 4

## Distribuição transversal dos íons aprisionados

### 4.1 Introdução

A força focalizante exercida por uma nuvem de íons aprisionados sobre o feixe de elétrons dá origem, como já vimos, a um deslocamento da sintonia betatron proporcional à derivada da força restauradora com relação à distância ao centro de feixe. Para calcular esta força, é preciso conhecer a distribuição da carga iônica no plano transversal ao plano da órbita. Vários autores (e.g. [BPT93], [SIKK87b], [Pon88]) assumem que esta distribuição é uma réplica da distribuição dos elétrons do feixe, geralmente uma Gaussiana, ou, ainda mais simplesmente, uma distribuição homogênea no interior de um contorno elíptico.

Uma derivação explícita desta distribuição, em que as aproximações envolvidas são claramente enunciadas, foi oferecida por Kohaupt[Koh71]<sup>1</sup>. Ele supõe que os íons oscilam harmonicamente no poço de potencial e que a energia cinética de íons recém-criados é muito menor do que a profundidade do poço de potencial. Em outras palavras, Kohaupt assume que os íons são criados em repouso e começam suas trajetórias no ponto de amplitude máxima de sua oscilação (*turning points*), que são também os pontos onde eles passam a maior parte de seu tempo. A densidade de probabilidade gerada por íons criados em  $z_1$  ou  $z_2$  é então dada por:

$$P(z) = \frac{1}{2} [\delta(z - z_1) + \delta(z - z_2)] \quad (4.1)$$

onde  $(z_1, z_2)$  são os pontos de retorno. A convolução desta distribuição com uma distribuição arbitrária de elétrons resulta numa distribuição iônica que é uma réplica da distribuição eletrônica. O caso particular de um feixe Gaussiano foi largamente utilizado em estudos de aprisionamento iônico.

Neste capítulo, considero um modelo unidimensional da nuvem iônica<sup>2</sup> e calculo explicitamente sua evolução temporal resolvendo a equação de Liouville com um termo fonte que

---

<sup>1</sup>Uma derivação da distribuição transversal de elétrons neutralizantes em um feixe de prótons foi dada por Evans e Warner[EW71], que assumem um gás de elétrons clássico em equilíbrio térmico. Um modelo semelhante é analisado neste capítulo para íons aprisionados em feixes planos.

<sup>2</sup>No caso de íons não-interagentes em um poço harmônico, o cálculo unidimensional é na realidade válido para os eixos horizontal e vertical separadamente. No caso do cálculo de íons em equilíbrio térmico, interagindo via repulsão eletrostática, no entanto, o modelo unidimensional só descreve bem a direção vertical de

descreve a criação contínua de novos íons. Os cálculos referem-se ao caso particular de um feixe Gaussiano cuja estrutura longitudinal (em pacotes) não é levada em consideração (i.e., assumo que a massa do íon em questão é muito maior do que a massa crítica).

A distribuição iônica obtida é composta de um caroço central cuja largura é muito menor que a largura do feixe de elétrons e de longas caudas.

Na seção 4.3 apresento uma solução aproximada do modelo unidimensional que dá uma boa descrição das caudas da distribuição e tem a vantagem de ser fisicamente intuitiva. A seção 4.4 traz o cálculo exato da evolução temporal da função distribuição de densidade.

Os cálculos com a equação de Liouville só são válidos no limite de neutralização nula, já que interações entre os íons não são levadas em consideração. Para neutralização finita, um modelo que assume que colisões íon-íon estabelecem o equilíbrio térmico em tempos muito menores que o tempo de ionização é apresentado na seção 4.6. Novamente, uma distribuição iônica mais estreita que o feixe de elétrons é obtida e as conseqüências em termos da dispersão de sintonias betatron são discutidas.

## 4.2 O modelo unidimensional

Descrevo a nuvem iônica pela distribuição de densidade<sup>3</sup>  $\rho_i(z, t)$ , que pode ser escrita em termos da função distribuição no espaço de fases  $f(z, p, t)$ .

$$\rho_i(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, p, t) dp \quad (4.2)$$

onde  $p$  é o momentum canonicamente conjugado a  $z$  e o movimento dos íons é determinado pelo potencial conservativo  $U(z)$ , criado pelo feixe, sendo as equações de movimento de um íon qualquer derivadas do Hamiltoniano

$$H(z, p) = \frac{p^2}{2m} + U(z) \quad (4.3)$$

$$p = m\dot{z} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{dU(z)}{dz}. \quad (4.4)$$

A evolução temporal da função distribuição no espaço de fases  $f(z, p, t)$  é dada pela equação de Liouville[Gol81]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} = S(z, p). \quad (4.5)$$

onde os pontos denotam diferenciação em relação ao tempo e o termo fonte estacionário  $S(z, p)$ , que descreve a criação de novos íons, é dado por

$$S(z, p) = \frac{\rho_e(z)}{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left\{-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}\right\}. \quad (4.6)$$

---

um feixe plano.

<sup>3</sup>A densidade  $\rho_i$  utilizada nesta seção é uma projeção da densidade volumétrica  $\rho(x, y, s)$  no eixo  $x$  ou  $y$  (representado genericamente por  $z$ ). Ao usar esta projeção, assumo implicitamente que as equações de movimento dos íons ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  são desacopladas.

onde  $\sigma_p^2 = mk_B T$ ,  $\tau$  é o tempo de ionização,  $\rho_e$  é a distribuição (unidimensional) do feixe de elétrons e a distribuição de momentum é a distribuição canônica (Maxwell-Boltzmann) correspondente à temperatura  $T$  do gás residual<sup>4</sup>.

Ainda que o método utilizado para resolver a Eq.(4.5) seja bastante geral, considerarei especificamente uma distribuição de elétrons Gaussiana e um potencial harmônico:

$$\rho_e(z) = \frac{N_e}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right\} \quad (4.7)$$

$$U(z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \quad (4.8)$$

$N_e$  é o número total de elétrons armazenados e  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular de oscilação dos íons no poço de potencial. É interessante ter em mente alguns números típicos para o EPA:

$$\begin{aligned} \sigma_x &\sim 0.6 \text{ mm} & \sigma_y &\sim 0.2 \text{ mm} \\ f_x &\sim 4 \text{ MHz} & f_y &\sim 7 \text{ MHz} \\ U_x(\sigma_x) &\sim 1.1 \text{ eV} & U_y(\sigma_y) &\sim 0.4 \text{ eV} \\ \tau &\sim 1.0 \text{ s} \end{aligned} \quad (4.9)$$

As energias potenciais e frequências correspondem a uma corrente média de 50 mA e a íons  $H_2^+$ . O tempo de ionização corresponde a uma pressão de 1 ntorr (80%  $H_2$  e 20%  $CO$ ). À temperatura ambiente,  $k_B T \sim \frac{1}{40} \text{ eV}$ ,  $\frac{U_x(\sigma_x)}{k_B T/2} \sim 100$  e  $\frac{U_y(\sigma_y)}{k_B T/2} \sim 30$ . Além disso, a razão do tempo de ionização para o período de oscilação transversal é  $4 \times 10^6$  no plano horizontal e  $7 \times 10^6$  no plano vertical.

### 4.3 Uma solução aproximada

Uma solução da Eq.(4.5) pode ser obtida facilmente no limite  $\sigma_p \rightarrow 0$ , i.e., quando todos os íons são criados em repouso, de forma que sua distribuição em momentum reduz-se a  $\delta(p)$ . Em um tempo  $dt$ ,  $\frac{\rho_e(z_0) dz_0 dt}{\tau}$  novos íons são criados em uma fatia de largura  $dz_0$  a uma distância  $z_0$  da origem. Todos eles começam a oscilar com a mesma frequência  $\omega$  e a mesma fase  $\phi$ , já que todos têm momentum transversal nulo no instante em que são criados. À medida que esta fatia de distribuição de íons oscila coerentemente com uma amplitude máxima  $z_0$ , novos íons são criados no intervalo  $(z_0, z_0 + dz_0)$ . Como estes novos íons surgem em tempos distribuídos aleatoriamente, as fases *relativas* de íons criados em tempos diferentes são distribuídas uniformemente. Portanto, após um tempo longo em comparação com o período de oscilação, forma-se uma distribuição no espaço de fases que é independente da fase para todas as amplitudes menores que  $z_0$  e nula para outras amplitudes. Esta distribuição pode ser expressa de forma conveniente em termos de variáveis ângulo-ação  $(J, \phi)$

$$f(J, \phi, t; z_0) = \frac{1}{2\pi} \delta(J - J_0) \frac{t}{\tau} \rho_e(z_0) dz_0 \quad (4.10)$$

<sup>4</sup>O uso desta distribuição de momentum para os íons recém-criados é correto se o momentum transversal transferido ao íon na colisão ionizante que o criou for pequena. Isto é de fato verdade. (Cf. Apêndice C) para íons moleculares. Íons formados dissociativamente, no entanto, podem adquirir energias muito maiores (vários eV) que as energias térmicas.

onde  $\sigma_p^2 = mk_B T$ ,  $\tau$  é o tempo de ionização,  $\rho_e$  é a distribuição (unidimensional) do feixe de elétrons e a distribuição de momentum é a distribuição canônica (Maxwell-Boltzmann) correspondente à temperatura  $T$  do gás residual<sup>4</sup>.

Ainda que o método utilizado para resolver a Eq.(4.5) seja bastante geral, considerarei especificamente uma distribuição de elétrons Gaussiana e um potencial harmônico:

$$\rho_e(z) = \frac{N_e}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right\} \quad (4.7)$$

$$U(z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \quad (4.8)$$

$N_e$  é o número total de elétrons armazenados e  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular de oscilação dos íons no poço de potencial. É interessante ter em mente alguns números típicos para o EPA:

$$\begin{aligned} \sigma_x &\sim 0.6 \text{ mm} & \sigma_y &\sim 0.2 \text{ mm} \\ f_x &\sim 4 \text{ MHz} & f_y &\sim 7 \text{ MHz} \\ U_x(\sigma_x) &\sim 1.1 \text{ eV} & U_y(\sigma_y) &\sim 0.4 \text{ eV} \\ \tau &\sim 1.0 \text{ s} \end{aligned} \quad (4.9)$$

As energias potenciais e frequências correspondem a uma corrente média de 50 mA e a íons  $H_2^+$ . O tempo de ionização corresponde a uma pressão de 1 ntorr (80%  $H_2$  e 20% CO). À temperatura ambiente,  $k_B T \sim \frac{1}{40} \text{ eV}$ ,  $\frac{U_x(\sigma_x)}{k_B T/2} \sim 100$  e  $\frac{U_y(\sigma_y)}{k_B T/2} \sim 30$ . Além disso, a razão do tempo de ionização para o período de oscilação transversal é  $4 \times 10^6$  no plano horizontal e  $7 \times 10^6$  no plano vertical.

### 4.3 Uma solução aproximada

Uma solução da Eq.(4.5) pode ser obtida facilmente no limite  $\sigma_p \rightarrow 0$ , i.e., quando todos os íons são criados em repouso, de forma que sua distribuição em momentum reduz-se a  $\delta(p)$ . Em um tempo  $dt$ ,  $\frac{\rho_e(z_0) dz_0 dt}{\tau}$  novos íons são criados em uma fatia de largura  $dz_0$  a uma distância  $z_0$  da origem. Todos eles começam a oscilar com a mesma frequência  $\omega$  e a mesma fase  $\phi$ , já que todos têm momentum transversal nulo no instante em que são criados. À medida que esta fatia de distribuição de íons oscila coerentemente com uma amplitude máxima  $z_0$ , novos íons são criados no intervalo  $(z_0, z_0 + dz_0)$ . Como estes novos íons surgem em tempos distribuídos aleatoriamente, as fases *relativas* de íons criados em tempos diferentes são distribuídas uniformemente. Portanto, após um tempo longo em comparação com o período de oscilação, forma-se uma distribuição no espaço de fases que é independente da fase para todas as amplitudes menores que  $z_0$  e nula para outras amplitudes. Esta distribuição pode ser expressa de forma conveniente em termos de variáveis ângulo-ação  $(J, \phi)$

$$f(J, \phi, t; z_0) = \frac{1}{2\pi} \delta(J - J_0) \frac{t}{\tau} \rho_e(z_0) dz_0 \quad (4.10)$$

<sup>4</sup>O uso desta distribuição de momentum para os íons recém-criados é correto se o momentum transversal transferido ao íon na colisão ionizante que o criou for pequena. Isto é de fato verdade (Cf. Apêndice C) para íons moleculares. Íons formados dissociativamente, no entanto, podem adquirir energias muito maiores (vários eV) que as energias térmicas.

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{t}{\tau} \rho_e(z_0) dz_0 \delta \left[ \frac{m\omega'}{2} (z^2 - z_0^2) + \frac{p^2}{2m\omega'} \right], \quad (4.11)$$

onde  $J$  e  $\phi$  são definidos por

$$z = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \cos \phi \quad (4.12)$$

$$p = -\sqrt{2Jm\omega} \sin \phi \quad (4.13)$$

$$J_0 = \frac{m\omega z_0^2}{2}. \quad (4.14)$$

Integrando a Eq.(4.10) sobre a distribuição em momentum, obtenho

$$\rho_i(z, t; z_0) dz_0 = \frac{2}{\pi} \frac{t}{\tau} \frac{\rho_e(z_0) dz_0}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} \quad (z < z_0) \quad (4.15)$$

Esta é a distribuição iônica produzida pela fatia  $dz_0$ . Ela diverge para  $z = \pm z_0$  (ainda que a integral de  $\rho_i$  permaneça finita). De fato a aproximação de Kohaupt consiste em substituir a Eq.(4.15) por uma função delta [Eq.(4.1)]. Suponho agora que  $\rho_e$  é uma Gaussiana e adiciono as contribuições de todas as fatias do feixe:

$$\rho_i(z, t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{\tau} \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \frac{e^{-\frac{z_0^2}{2\sigma_z^2}}}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} dz_0 \quad (4.16)$$

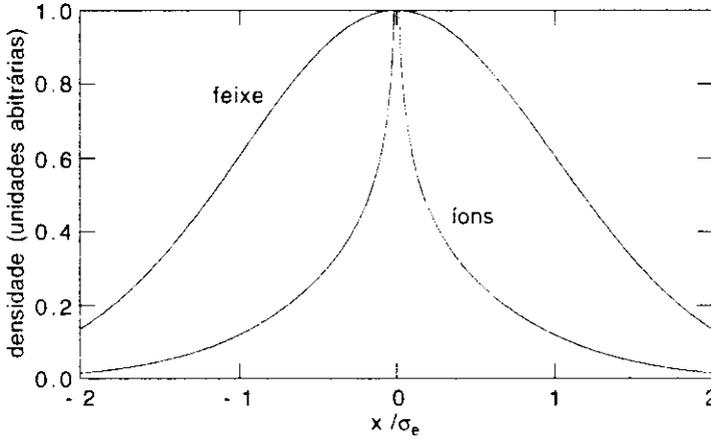


Figura 4.1: Distribuição de íons aprisionados para íons criados em repouso (sem dispersão de energia térmica).

Esta integral pode ser expressa, através da transformação  $y = \frac{z_0^2 - z^2}{2\sigma_z^2}$ , em termos da função de Bessel modificada  $K_0$  (Cf. fórmula 3.364.3 em [GR80])

$$\rho_i(z, t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma_z\tau} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y(y + \frac{z^2}{2\sigma_z^2})}} = \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma_z\tau} e^{-\frac{z^2}{4\sigma_z^2}} \frac{1}{\pi} K_0 \left( \frac{z^2}{4\sigma_z^2} \right) \quad (4.17)$$

É instrutivo considerar o comportamento assintótico de  $\rho_i(z)$ :

$$\rho_i(z) \sim \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}}{z} \quad z \rightarrow \infty \quad (4.18)$$

$$\rho_i(z) \sim \ln\left(\frac{1}{2z}\right) \quad z \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

A divergência na origem é uma consequência da suposição  $\sigma_p = 0$  e será removida no cálculo exato da seção 4.4.

A Fig.(4.1) mostra as distribuições dos íons e do feixe. O cálculo acima só pode ser uma boa aproximação nas extremidades da distribuição, onde a energia cinética térmica é de fato desprezível em comparação com a energia potencial. Para amplitudes  $z_0$  tais que  $k_B T \approx U(z_0)$ , a dispersão de momentum não pode mais ser desprezada, novos íons criados no intervalo  $(z_0, z_0 + dz_0)$  não oscilam coerentemente, todas as fases estando presentes.

## 4.4 Solução exata

O Hamiltoniano nas variáveis canônicas  $(J, \phi)$  é  $K = \omega J$  e  $J$  é uma constante do movimento

$$\dot{J} = 0 \quad (4.20)$$

$$\dot{\phi} = \omega. \quad (4.21)$$

As trajetórias no espaço de fases  $(z, \frac{p}{m\omega})$  são círculos de raio  $\sqrt{\frac{2J}{m\omega}}$ . Reescrevo a equação de Liouville em coordenadas  $(J, \phi)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \dot{J} \frac{\partial f}{\partial J} = S(J, \phi) \quad (4.22)$$

$$S(J, \phi) = \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_p\tau} \exp\left\{-\frac{J}{m\omega\sigma_z^2} (\cos^2 \phi + \Gamma^2 \sin^2 \phi)\right\}. \quad (4.23)$$

O parâmetro adimensional  $\Gamma$  é a raiz quadrada da razão da energia potencial para a energia térmica calculada a um desvio padrão  $\sigma_z$  da origem, i.e.,

$$\Gamma = \frac{m\omega\sigma_z}{\sigma_p} = \sqrt{\frac{U(\sigma_z)}{\frac{1}{2}k_B T}} \quad (4.24)$$

Quando  $\Gamma \approx 1$ , o termo fonte  $S$  torna-se independente da fase, e a distribuição criada depende apenas de  $J$ , uma constante do movimento. Neste caso,  $\rho_i(z, t)$  é de fato uma réplica da distribuição eletrônica, com o número total de íons aumentando linearmente com o tempo, enquanto a forma da distribuição permanece constante. Mas, das Eqs.(4.9) está claro que  $\Gamma \gg 1$ , de forma que a distribuição em fase está longe de ser homogênea. De fato, a maior parte das íons é criada com fases  $\phi \approx 0$  ou  $\phi \approx \pi$  (i.e., nos pontos extremos da trajetória) e as curvas de  $S$  constante no espaço  $(z, \frac{p}{m\omega})$  são elipses muito alongadas ao invés de círculos. Das Eqs.(4.20), (4.22) e (4.23) obtenho:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega \frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_p\tau} \exp\left\{-\frac{J}{m\omega\sigma_z^2} (\cos^2 \phi - \Gamma^2 \sin^2 \phi)\right\} \quad (4.25)$$

Procuo uma solução particular tal que  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , i.e.,

$$f_p = \frac{1}{\omega} \int_0^\phi S(J, \phi') d\phi' \quad (4.26)$$

A solução geral da equação homogênea associada é  $g(J, \phi - \omega t)$ , e a solução geral da Eq.(4.25) fica

$$f(J, \phi, t) = g(J, \phi - \omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^\phi S(J, \phi') d\phi'. \quad (4.27)$$

A forma de  $g$  é determinada pela distribuição inicial  $f_0(J, \phi)$ :

$$g(J, \phi) = f_0(J, \phi) - \frac{1}{\omega} \int_0^\phi S(J, \phi') d\phi'. \quad (4.28)$$

e finalmente

$$f(J, \phi, t) = f_0(J, \phi - \omega t) + \frac{1}{\omega} \int_{\phi - \omega t}^\phi S(J, \phi') d\phi' \quad (4.29)$$

e se não há íons em  $t = 0$ ,  $f_0 \equiv 0$ . Para calcular  $\rho_i(z, t)$ , é preciso voltar às coordenadas  $(z, p)$  e integrar sobre o momentum. É conveniente, no entanto, calcular primeiramente a derivada temporal de  $f$ :

$$\frac{\partial f(J, \phi, t)}{\partial t} = S(J, \phi - \omega t). \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \rho_i(z, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} dp S[J(z, p), \phi(z, p) - \omega t]. \quad (4.31)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_p\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_z^2} [(\cos^2 \omega t + \Gamma^2 \sin^2 \omega t)z^2 + (\sin^2 \omega t + \Gamma^2 \cos^2 \omega t)\frac{p^2}{2m^2\omega^2} + (\Gamma^2 - 1)\frac{2zp}{m\omega} \sin \omega t \cos \omega t] \right\}.$$

A integração é trivial e resulta em:

$$\frac{\partial \rho_i(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z\tau}} \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}} \times \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma_z^2} \left[ \Gamma^2 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t - \frac{(1 - \Gamma^2)^2 \sin^2 2\omega t}{4[\Gamma^2 \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t]} \right] \right\} \quad (4.32)$$

Esta é uma Gaussiana com normalização e largura dependentes do tempo. A densidade iônica em um tempo qualquer  $t$  é obtida integrando-se a equação acima numericamente. Note que  $\frac{\partial f}{\partial t}$  é periódica em  $t$  e que o período é muito mais curto que o tempo de ionização. Como esta é a escala de tempo de interesse, posso integrar sobre um ciclo completo e então multiplicar o resultado pelo número de ciclos que se passaram desde  $t = 0$ . Explicitamente:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial \rho_i(z, t')}{\partial t'} dt' &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega} + \epsilon} \frac{\partial \rho_i(z, t')}{\partial t'} dt' \\ &= n \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\partial \rho_i(z, t')}{\partial t'} dt' + \int_0^\epsilon \dots dt' \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para  $n$  grande, o segundo termo é desprezível,  $\rho_i$  cresce linearmente com o tempo, mantendo uma forma constante. Para o cálculo numérico, é conveniente usar variáveis unidimensionais.  $\zeta = \frac{z}{\sigma_n}$ ,  $\varphi = \omega t$  and  $\tilde{\rho}_i = \rho_i \sigma_z$ .

$$\tilde{\rho}_i(\zeta, \varphi) = \frac{\varphi}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \omega \tau} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma d\varphi'}{\sqrt{\Gamma^2 \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi'}} \quad (4.34)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\zeta^2}{2} \left[ \Gamma^2 \sin^2 \varphi' + \cos^2 \varphi' - \frac{(1 - \Gamma^2)^2 \sin^2 2\varphi'}{4 [\Gamma^2 \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi']} \right] \right\}.$$

## 4.5 Resultados

A Fig.(4.2) mostra um gráfico da Eq.(4.34) para  $n = 1$  e vários valores de  $\Gamma$ . Há uma cauda, que pouco depende de  $\Gamma$  desde que  $\Gamma \gg 1$  e um caroço interno que torna-se mais estreito à medida que  $\Gamma \rightarrow \infty$ . A distribuição do feixe também é mostrada para comparação. Ainda que o modelo seja unidimensional, se o potencial externo for parabólico (i.e. força

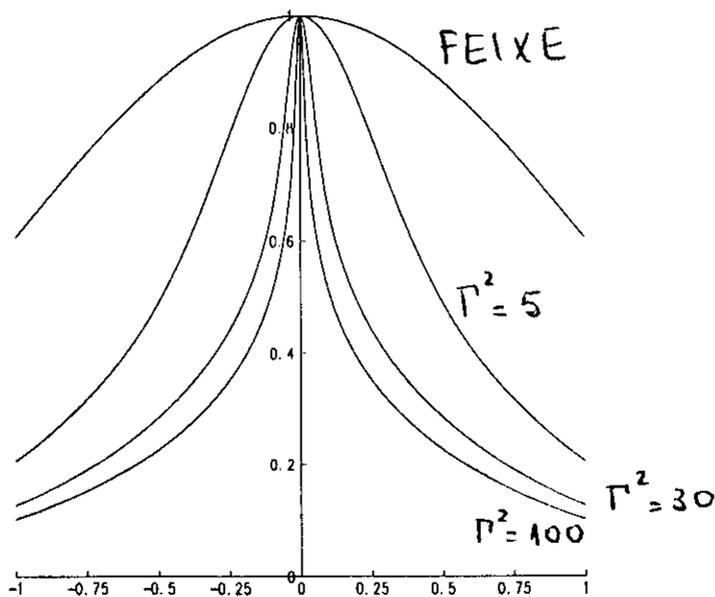


Figura 4.2: Distribuições transversais dos íons aprisionados obtidas pela solução direta da equação de Liouville, para vários valores da razão  $\Gamma^2$  da energia potencial para a energia cinética.

restauradora linear) os movimentos vertical e horizontal são desacoplados e as variáveis ação  $J_x$ ,  $J_y$  permanecem constantes do movimento. Todas as curvas mostradas na Fig.(4.2) são válidas para cada plano separadamente, se introduzimos os parâmetros  $\Gamma_{x,y}^2 = \frac{U_{x,y}(\sigma_{x,y})}{1/2k_B T}$ . As curvas correspondentes a  $\Gamma^2 = 30$  e  $\Gamma^2 = 100$  são portanto representativas das distribuições horizontal e vertical dos íons aprisionados no EPA<sup>5</sup> [Cf. Eqs.(4.9)]. A razão da largura

<sup>5</sup>É preciso ter cuidado ao interpretar a Fig.(4.2) para dois planos diferentes, já que a unidade no eixo horizontal é a largura RMS do feixe no plano horizontal ou vertical.

(FWHM) vertical da distribuição iônica para a horizontal, obtida da Fig.(4.2), é  $\frac{\Delta_z}{\Delta_x} = 0.6$ . Isto pode ser estimado também da Eq.(4.32), observando-se que, quando  $\Gamma$  é grande, a dependência da largura da distribuição iônica com o tamanho do feixe é dada por:

$$\Delta_i \sim \frac{\sigma_z}{\Gamma} \sim \frac{\sigma_p}{\omega} \sim \sqrt{\sigma_z}, \quad (4.35)$$

ou

$$\frac{\Delta_{iy}}{\Delta_{ix}} \sim \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} \quad (4.36)$$

Usando os parâmetros do EPA, obtenho  $\frac{\Delta_{iy}}{\Delta_{ix}} = 0.58$ , que concorda com o cálculo numérico exato.

A distribuição iônica obtida é constituída por um caroço central (mais estreito que o feixe) e longas caudas. A largura da distribuição é proporcional à raiz quadrada da largura da distribuição do feixe e, para  $z$  grande, a distribuição cai como a distribuição do feixe dividida por  $z$ .

O cálculo só se aplica a um modelo simples da nuvem iônica: não são consideradas interações íon-íon, sejam elas promediadas (carga espacial) ou súbitas (colisões). Estas suposições são válidas no limite de baixas neutralizações (o que pressupõe a existência de algum mecanismo de escape dos íons não relacionado ao enchimento do poço de potencial, e.g., deriva longitudinal em direção a eletrodos de limpeza). Não são levadas em consideração, ainda, colisões com moléculas neutras do gás residual ou com elétrons do feixe: os elétrons podem aquecer os íons enquanto que colisões com as moléculas do gás residual podem esfriá-los, ambos efeitos que alteram a distribuição de momentum dos íons aprisionados.

## 4.6 Modelo de equilíbrio térmico

Se as colisões íon-íon são freqüentes, a nuvem iônica alcança um estado de equilíbrio térmico e a distribuição de carga iônica é a distribuição canônica (Maxwell-Boltzmann) para partículas em um potencial  $\vartheta$

$$\rho_i(y) = \rho_{i0} \exp \left\{ -\frac{\epsilon_0 \vartheta(y)}{k_B T} \right\}, \quad (4.37)$$

onde assumo novamente um modelo unidimensional para a distribuição de carga iônica na direção vertical de um feixe plano<sup>6</sup>. O potencial eletrostático  $\vartheta$  é determinado de forma auto-consistente pela equação de Poisson:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dy^2} = -\frac{\rho_i(y) - \rho_e(y)}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

Das equações acima obtém-se uma única equação diferencial não-linear para o potencial:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dy^2} = \frac{\epsilon_0 n_{e0}}{\epsilon_0} \left( e^{-\frac{\vartheta}{2\sigma_y^2}} - \frac{n_{i0}}{n_{e0}} e^{-\frac{\epsilon_0 \vartheta + y^2}{k_B T}} \right). \quad (4.39)$$

<sup>6</sup>Aqui, como na seção 1.7.2,  $\rho_i$  é uma densidade *volumétrica* suposta unidimensional para uma feixe com  $\sigma_x \gg \sigma_y$ .

onde introduzi as densidades de íons  $n_{i0} = \rho_i(0)/\epsilon_0$  e de elétrons  $n_{e0} = \rho_e(0)/\epsilon_0$  na origem. É conveniente usar as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{y}{\lambda_D} \\ \Lambda &= \frac{\sigma_y}{\lambda_D} \\ \Theta &= \frac{e_0 \vartheta}{k_B T},\end{aligned}\tag{4.40}$$

onde  $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T / n_{e0} e_0^2}$  é a distância de blindagem de Debye (que para os parâmetros do EPA [Cf. Tab.(1.1)] é  $\approx 30 \mu\text{m}$ ), para obter

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} = e^{-\frac{\xi^2}{2\Lambda^2}} - \frac{n_{i0}}{n_{e0}} e^{-\Theta}.\tag{4.41}$$

Soluções numéricas da equação acima, com as condições de contorno  $\Theta(0) = 0$  e  $\Theta'(0) = 0$  (esta última decorrente da simetria do problema) são mostradas na Fig.(4.3). As várias curvas correspondem a diferentes valores do parâmetro  $n_{i0}/n_{e0}$ . Para cada curva a neutralização é calculada integrando-se a densidade iônica numericamente. Note que a condição de que a carga iônica seja finita implica uma neutralização máxima (ou um valor máximo de  $n_{i0}/n_{e0}$ ) para uma dada temperatura: para este valor máximo, a curva de potencial não é mais monotonicamente crescente, mas sua derivada alcança um valor nulo a uma distância finita da origem. Neste ponto o campo elétrico total é nulo e novos íons não podem mais ser aprisionados – não há solução auto-consistente possível<sup>7</sup>. A concentração dos íons aprisionados no centro do feixe, verificada anteriormente no caso de íons não interagentes, permanece válida aqui até níveis de neutralização de várias dezenas de %.

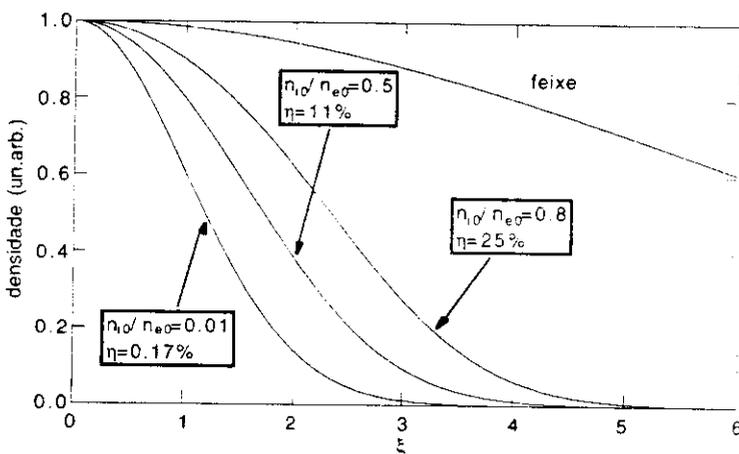


Figura 4.3: Distribuição de íons aprisionados em equilíbrio térmico para diferentes níveis de neutralização  $\eta$ .

<sup>7</sup>Na realidade, a câmara de vácuo tem dimensões finitas  $b$  e a condição de neutralização máxima, para uma dada temperatura, é determinada pelo valor da razão  $n_{i0}/n_{e0}$  para a qual o campo elétrico total é nulo em  $y = b$ .

# Conclusões

A neutralização de feixes de elétrons em aceleradores circulares por ionização do gás residual é um fenômeno ainda mal compreendido tanto experimental quanto teoricamente. Mesmo o parâmetro básico que determina a magnitude dos efeitos do aprisionamento iônico – a neutralização  $\eta$  – não pode ser predito teoricamente ou medido com precisão. Modelos simplificados, que privilegiam um ou outro aspecto da dinâmica dos íons aprisionados, precisam ser introduzidos em cálculos teóricos ou na interpretação de resultados experimentais. Ao mesmo tempo, uma compreensão detalhada dos processos que determinam a densidade de íons aprisionados parece essencial para que medidas remediadoras dos efeitos danosos da neutralização possam ser implementadas, em particular em máquinas com injeção a baixa energia (100 – 200 MeV) (como por exemplo anéis de energia nominal da ordem de 1 GeV, usados como fonte de radiação síncrotron na ultravioleta e raios x moles e em anéis compactos para aplicações industriais), mais sensíveis ao deslocamento de sintonia produzido pelos íons e em anéis de armazenamento de elétrons de colisores elétron-pósitron, atualmente propostos como fábricas de mésons, nos quais as altas correntes armazenadas tornam difícil o uso de eletrodos de limpeza, devido aos altos campos extratores necessários e aos efeitos da interação do feixe com os campos induzidos por ele mesmo nos eletrodos metálicos.

Os fótons de bremsstrahlung produzidos nas colisões dos elétrons armazenados com os núcleos dos íons aprisionados proporcionam uma detecção *direta* da densidade de íons em uma pequena fração da circunferência da máquina, na qual as condições de aprisionamento podem ser facilmente modificadas por meio de eletrodos polarizados. Experimentos conduzidos com esta técnica de detecção no EPA mostraram que as contagens bremsstrahlung medidas são compatíveis com um cálculo da composição dos íons aprisionados que prediz que uma fração significativa da neutralização é composta por íons de carbono atômico múltiplamente ionizados. O modelo utilizado nestes cálculos contém basicamente dois ingredientes: seções de choque de ionização e dissociação molecular obtidas de dados experimentais e teóricos disponíveis na literatura e expressas na forma assintótica de Bethe e a estabilidade do movimento oscilatório dos íons sob a ação dos impulsos repetitivos dos pacotes de elétrons, expressa na massa crítica. Além disso, um processo de auto-limpeza ressonante foi observado na forma de um modo coerente (de frequência da ordem da frequência de oscilação de íons  $\text{CO}^+$ ) que se estabeleceu para feixes com quatro e oito pacotes acima de um limiar de intensidade do feixe de elétrons. Este processo pode ser reproduzido artificialmente a baixas intensidades, excitando-se oscilações transversais do feixe em frequências ligeiramente acima das frequências próprias de oscilação vertical do feixe e da ordem das frequências de oscilação do  $\text{CO}^+$ . A redução na contagem bremsstrahlung quando a excitação foi aplicada constitui uma observação direta do efeito de limpeza ressonante induzida.

A análise teórica do acoplamento bétatron produzido por uma nuvem iônica Gaussiana

mostrou que os campos acoplantes de uma nuvem de carga neutralizante simétrica não são capazes de provocar suficiente troca de energia entre os planos horizontal e vertical para explicar as observações experimentais. Este resultado sugere a existência de distribuições não-simétricas de íons aprisionados ou ainda a possibilidade de que o acoplamento seja provocado por campos acoplantes não oriundos dos íons e sim de elementos da rede magnética. Neste caso, o papel dos íons seria apenas o de criar as condições necessárias (através de deslocamentos de sintonia) para que uma ressonância possa atuar.

A distribuição transversal da carga neutralizante foi estudada no limite de baixas neutralizações e no limite em que os íons aprisionados podem ser considerados em equilíbrio térmico. Em ambos os casos, uma distribuição significativamente mais estreita que a distribuição do feixe de elétrons foi obtida, em contraste com a suposição freqüentemente feita na literatura de que ambas as distribuições são idênticas. O cálculo das conseqüências em termos da distribuição de sintonias mostra que medidas da resposta em freqüência do feixe a uma excitação externa podem ser usadas para obter-se informação sobre a distribuição iônica.

# Apêndice A

## Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição	Unidade
$\eta$	neutralização	%
$\rho_i$	densidade volumétrica de carga iônica	C/m <sup>3</sup>
$\rho_e$	densidade volumétrica de carga eletrônica	C/m <sup>3</sup>
$\lambda_i$	densidade linear de carga iônica	C/m
$\lambda_e$	densidade linear de carga eletrônica	C/m
$\sigma_x$	largura RMS horizontal da distribuição dos elétrons	m
$\sigma_y$	largura RMS vertical da distribuição dos elétrons	m
$E_0$	energia cinética nominal	eV
$E'$	energia transferida em uma colisão	eV
$\beta$	velocidade dos elétrons em unidades da velocidade da luz	-
$\gamma$	$= 1/\sqrt{1 - \beta^2}$	-
$I$	corrente média armazenada	A
$\hat{I}$	corrente de pico	A
$B$	fator de empacotamento	-
$N_e$	número de elétrons armazenados	-
$N_i$	carga neutralizante total em unidades da carga eletrônica	-
$a$	raio do feixe (modelo cilíndrico)	m
$b$	raio da câmara de vácuo	m
$L$	circunferência do acelerador	m
$R = L/2\pi$	raio médio do acelerador	m
$\rho_g$	densidade volumétrica de um componente do gás residual	m <sup>-3</sup>
$V$	potencial elétrico do feixe	V
$V_{av}$	potencial médio de escape	V
$\mathcal{E}$	campo elétrico do feixe	V/m

$V_d$	profundidade do poço de potencial	V
$v_d^0$	velocidade de deriva para campo elétrico uniforme	m/s
$v_d^{max}$	velocidade de deriva máxima	m/s
$v_{th}$	velocidade térmica	m/s
$\omega_0$	freqüência angular de oscilação no poço de potencial	s <sup>-1</sup>
$T_0$	período de oscilação no poço de potencial	s
$\omega_c$	freqüência cíclotron	s <sup>-1</sup>
$T_c$	período cíclotron	s
$B_0$	campo magnético dos dipolos	T
$A$	número de massa do íon	-
$Z$	número atômico	-
$Q$	estado de ionização	-
$x$	desvio horizontal em relação à órbita central	m
$y$	desvio vertical em relação à órbita central	m
$r$	desvio radial = $\sqrt{x^2 + y^2}$	m
$s$	posição ao longo da órbita	m
$M_0$	elemento de matriz de dipolo para ionização	-
$C_0$	constante na fórmula de Bethe para a seção de choque de ionização	-
$l_{free}$	livre caminho médio entre colisões ionizantes de um elétron secundário	m
$\tau_i^n$	tempo de ionização para o n-ésimo componente do gás residual	s
$\tau_i^t$	tempo de ionização global	s
$R_i$	taxa de ionização	íons/s
$\sigma_s$	comprimento do pacote	m
$t_b$	duração do pacote	s
$T_r$	período de revolução	s
$n_b$	número de pacotes	-
$m_T$	massa de núcleo alvo	kg
$\tilde{\omega}_z$	freqüência de oscilação durante a passagem do pacote	s <sup>-1</sup>
$A_c^z$	razão carga-massa crítica ( $z = x$ ou $y$ )	u.m.a./ $e_0$
$\sigma^i$	seção de choque de ionização primária de Bethe	m <sup>2</sup>
$\sigma^{SGL}$	seção de choque para escape por colisão simples	m <sup>2</sup>
$R_h$	taxa de aquecimento por colisões a grande parâmetro de impacto	J/s
$\tau_c^{SGL}$	tempo de escape por colisão a pequeno parâmetro de impacto	s
$\tau_c^{mul}$	tempo de escape por colisão a grande parâmetro de impacto	s
$Q_x$	sintonia horizontal	-
$Q_y$	sintonia vertical	-
$\omega_{\beta_z}$	freqüência angular bétatron horizontal ( $z = x$ ) ou vertical ( $z = y$ )	MHz
$\Delta Q_z$	deslocamento de sintonia	-
$\beta_x$	função bétatron horizontal	m
$\beta_y$	função bétatron vertical	m
$\epsilon_x$	emitância horizontal	m rad
$\epsilon_y$	emitância vertical	m rad
$\frac{\delta E}{E}$	dispersão de energia	%

### Constantes

$e_0$	carga elementar = $1.602 \times 10^{-19}$	C
$\epsilon_0$	permissividade do vácuo = $8.85 \times 10^{-12}$	Farad/m
$c$	velocidade da luz = $2.998 \times 10^8$	m/s
$r_e$	raio clássico do elétron = $2.82 \times 10^{-15}$	m
$r_p$	raio clássico do próton = $1.53 \times 10^{-18}$	m
$m_e$	massa do elétron = $9.109 \times 10^{-31}$	kg
$m_p$	massa do próton = $1.673 \times 10^{-27}$	kg
$\hbar$	constante de Planck = $1.055 \times 10^{-34}$	J s
$k_B$	constante de Boltzmann = $1.38 \times 10^{-23}$	J/K
Algumas combinações úteis de constantes		
$m_e c^2$	510.999	keV
$m_p c^2$	938.27	MeV
$4\pi \left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^2$	$1.874 \times 10^{-24}$	$\text{m}^2$

# Apêndice B

## Ionização secundária

A seção de choque de ionização de Bethe Eq.(1.8) não considera a ionização adicional produzida pelos elétrons secundários (raios  $\delta$ ) que possuem energia suficiente para produzir outros pares elétron-íon. Esta contribuição pode ser significativa em feixes de prótons, nos quais os elétrons são aprisionados por longos períodos, mas em feixes de elétrons, os elétrons secundários são rapidamente repelidos em direção às paredes da câmara de vácuo e perdem-se antes de poder ionizar um número apreciável de moléculas. Para estimar esta ionização adicional é preciso, em princípio, conhecer as seções de choque de ionização para elétrons de baixa energia. Estas são de cálculo muito mais difícil que as seções de choque para elétrons de alta energia, porque a aproximação de Born não é mais válida e efeitos ligados à estrutura interna das moléculas alvo devem ser levados em consideração. Além disso, as seções de choque variam mais rapidamente com a energia do elétron incidente que a seção de choque de Bethe (que mostra dependência logaritmica com a energia para altas energias). No entanto, resultados experimentais[KD66, TK87] mostram que a seção de choque de ionização, para qualquer energia do elétron incidente, é (para os gases comuns nos aceleradores) menor que  $\approx 3 \times 10^{-20} \text{m}^2$  e para uma pressão do gás residual de 1 ntorr, encontro um livre caminho médio entre colisões ionizantes de  $l_{free} \approx 1000 \text{ km}$ . Com uma câmara de vácuo de alguns centímetros de raio, está claro que os elétrons secundários criados em regiões livres de campos magnéticos externos atingem as paredes da câmara muito antes de poderem ionizar moléculas do gás residual. Por outro lado, elétrons secundários criados em ímãs dipolares realizam um movimento cicloidal sob a ação dos campos elétrico (do feixe) e magnético do ímã (Cf. seção 1.4.2), o que pode resultar em trajetórias muito mais longas, dependendo da energia do elétron. Como uma estimativa extrema, considero um elétron criado no plano da órbita com velocidade nula na direção perpendicular ao plano da órbita e com energia cinética  $E_i$ . Tal elétron deve derivar ao longo de todo o magneto antes que ele possa alcançar as paredes da câmara de vácuo. A velocidade de deriva é (assumindo um raio ciclotron muito menor que a raio do feixe)  $v_d^0 = E_x/B_0$ , onde  $E_x$  é o campo elétrico horizontal do feixe e  $B_0$  o campo magnético. Usando os valores numéricos da Tab.(1.3), encontro  $v_d^0 \approx 5 \text{ km/s}$  e para os magnetos de 60 cm de comprimento do EPA, o tempo para escape do elétron é  $\approx 0.1 \text{ ms}$ . O comprimento total da trajetória neste tempo é proporcional a  $\sqrt{E}$ , e há uma distribuição de velocidades dos elétrons secundários (que é largamente concentrada em baixas energias). Mesmo para um (altamente improvável) elétron ultra-relativístico, o comprimento total da trajetória seria de apenas  $\approx 30 \text{ km}$ , muito menor que  $l_{free}$ .

# Apêndice C

## Transferência de energia em colisões atômicas

A seção de choque de transferência de energia em uma colisão de um elétron de carga  $-e_0$  e energia cinética  $E_0$  (velocidade  $\beta c$  e energia total  $\gamma m_e c^2$ ) com uma partícula estacionária de carga  $Ze_0$  e massa  $m_T$  pode ser calculada, no limite de velocidades não relativísticas, a partir da seção de choque clássica de Rutherford[Gol81] para o espalhamento por um centro de força fixo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Ze_0^2}{16\pi\epsilon_0 E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \quad (\text{C.1})$$

onde  $\theta$  é o ângulo de espalhamento. Para considerar o recuo do alvo, introduzo a massa reduzida  $\mu = \frac{m_e m_T}{m_e + m_T}$  e noto que  $\theta$  é na verdade o ângulo de espalhamento no sistema de referência do centro de massa (C-O-M). A seção de choque de espalhamento no C-O-M fica:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Ze_0^2}{8\pi\epsilon_0 \mu \beta^2 c^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} = \left( \frac{Zr_e}{2} \right)^2 \frac{\left(1 + \frac{m_e}{m_T}\right)^2}{\beta^4} \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}. \quad (\text{C.2})$$

A relação entre a transferência de energia  $E'$  e o ângulo de espalhamento no sistema do centro de massa pode ser obtida de considerações puramente cinemáticas[Gol81]:

$$E' = E_0 \frac{2m_e m_T}{(m_e + m_T)^2} (1 - \cos \theta) \quad (\text{C.3})$$

Diferenciando com relação a  $E'$ , obtenho a seção de choque de transferência de energia (fórmula de Rutherford):

$$\frac{d\sigma}{dE'} = 2\pi \frac{\sigma}{d\Omega} \frac{d(\cos \theta)}{dE'} = 2\pi (Zr_e)^2 \frac{m_e}{m_T} \frac{m_e c^2}{\beta^2} \frac{1}{E'^2} \quad (\text{C.4})$$

A expressão acima também pode ser obtida *exatamente* ou em primeira aproximação de Born em mecânica quântica não-relativística. Além disso, a Eq.(C.4) permanece válida mesmo para velocidades relativísticas da partícula incidente, desde que a partícula alvo recue com energia não-relativística, i.e., para pequenas transferências de energia, ou, equivalentemente, pequeno desvio angular ou grande parâmetro de impacto. De fato, Jackson[Jac75]

e Rossi[Ros52] dão uma derivação clássica aproximada (mas relativística) da fórmula de Rutherford, supondo que a trajetória da partícula incidente não é significativamente alterada durante a colisão e que a partícula alvo permanece estacionária. O momentum concedido ao alvo é dado pelo produto da força elétrica da partícula incidente sobre o alvo (que é função do parâmetro de impacto  $\rho$ ) por um *tempo de colisão*. Relativisticamente, o campo elétrico sofre uma deformação (contração de Lorentz) que é exatamente compensada por um aumento correspondente do tempo de colisão. A transferência de energia é calculada então usando-se a relação não-relativística entre momentum e energia, enquanto que a deflexão angular pode ser obtida diretamente da variação do momentum da partícula incidente. As relações resultantes entre o parâmetro de impacto e a perda de energia ou deflexão são:

$$E' = 2(Zr_e)^2 \frac{m_e m_e c^2}{m_T \beta^2 \rho^2} \quad (\text{C.5})$$

$$\theta = \frac{2Zr_e}{\rho \beta^2 \gamma}, \quad (\text{C.6})$$

das quais pode-se deduzir a Eq.(C.4) usando-se  $d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \pi d^2(\rho^2)$ . Portanto, se a transferência de energia é pequena, não há correção relativística à fórmula de Rutherford. Note também que esta não depende de outras propriedades das partículas em colisão como spin, estrutura interna ou identidade projétil-alvo.

Para grandes transferências de energia ( $\rho$  pequeno), a expressão de Rutherford deixa de ser válida devido a efeitos quânticos (spin, exchange se alvo e projétil forem iguais) ou relativísticos<sup>1</sup>. A condição de que o alvo seja não-relativístico após a colisão leva a um parâmetro de impacto mínimo:

$$\rho_{min}^{rel} = \sqrt{2} \frac{m_e Zr_e}{m_T \beta}, \quad (\text{C.7})$$

enquanto que correções quânticas tornam-se importantes quando o momento angular (no sistema do centro de massa) é da ordem de  $\hbar$ .

$$p' \rho_{min}^{quant} = \hbar \quad (\text{C.8})$$

$$\rho_{min}^{quant} = \lambda_c \sqrt{\frac{2\gamma \frac{m_e}{m_T} + \left(\frac{m_e}{m_T}\right)^2 + 1}{\gamma^2 - 1}}, \quad (\text{C.9})$$

onde  $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$  é o comprimento de onda Compton do elétron. Quando  $\gamma \gg 1$  e o alvo é um núcleo,

$$\frac{\rho_{min}^{quant}}{\rho_{min}^{rel}} = \frac{1}{\alpha_f} \frac{\sqrt{\gamma \frac{m_e}{m_T} + \frac{1}{2}}}{\gamma} \approx \frac{1}{\alpha_f} \sqrt{\frac{m_T}{m_e}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \quad (\text{C.10})$$

<sup>1</sup>As duas outras suposições feitas na derivação da fórmula de Rutherford, a saber, pequena deflexão angular da partícula incidente e alvo estacionário também limitam a validade da Eq.(C.4). É fácil verificar que os parâmetros de impacto mínimos correspondentes são dados por:  $\rho_{min}^{SD} = \frac{2Zr_e}{\beta^2 \gamma}$  e  $\rho_{min}^{ST} = \frac{m_e Zr_e}{m_T \beta^2 \gamma}$  respectivamente. Se o alvo é um núcleo de número de massa  $A \approx 2Z$ , a segunda condição fica  $\rho_{min}^{ST} = \frac{m_e r_e}{m_T \gamma}$ . Na faixa de energias da partícula incidente que nos interessa ( $\gamma \gg 1$ ), estas limitações são menos restritivas que as limitações impostas pelos efeitos relativísticos e quânticos mencionados acima, e podem portanto ser desprezadas.

onde  $\alpha_f = r_e/\lambda_c = 1/137$  é a constante de estrutura fina. Finalmente, a conservação de momentum e energia impõe um limite à maior energia transferível numa colisão. O análogo relativístico da Eq.(C.3), relacionando a transferência de energia ao ângulo de espalhamento no sistema do centro de massa é [Gol81]:

$$E' = E \frac{2m_e c^2 + E_0}{m_T c^2 + 2E_0} (1 - \cos \theta), \quad (C.11)$$

do qual obtenho a energia máxima transferível :

$$W_m = 2E_0 \frac{2m_e c^2 + E_0}{m_T c^2 + 2E_0}. \quad (C.12)$$

É fácil ver que este limite é também menos restritivo que a condição (C.8). Fora destes limites, é preciso usar as expressões completas da mecânica quântica relativística e, para colisões elétron-núcleo, Hofstader [Hof61] dá a seção de choque diferencial (a seção de choque de Mott) no sistema do laboratório<sup>2</sup>

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Zr_e}{2} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{m_T c^2} \sin^2(\frac{\vartheta}{2})}, \quad (C.15)$$

onde  $E_0 \gg m_e c^2$  e  $\vartheta$  é o ângulo de espalhamento no sistema de referência do laboratório (i.e., um sistema em que a partícula alvo se encontrava em repouso antes da colisão). O termo cosenoidal representa o efeito do spin eletrônico e o último fator descreve o efeito do recuo nuclear. Para obter uma seção de choque de transferência de energia, escrevo  $\cos \vartheta$  em termos da perda de energia através da Eq.(C.3) e da relação entre ângulos de espalhamento no sistema do centro de massa e do laboratório, que, no limite ultra-relativístico é [Hof61]:

$$\cos \theta = \frac{\cos \vartheta - \Upsilon}{1 - \Upsilon \cos \vartheta}, \quad (C.16)$$

<sup>2</sup>A altas energias e grandes ângulos de deflexão, a seção de choque de Mott deve ser corrigida devido ao tamanho finito do núcleo. Esta correção torna-se importante quando o comprimento de onda de de Broglie do elétron incidente é comparável às dimensões nucleares

$$\theta_{max}^{NS} = \frac{\hbar}{r_n \gamma \beta m_e c} \approx 1, \quad (C.13)$$

onde o raio do núcleo pode ser aproximado por [Ros52]  $r_n = 0.49 r_e A^{1/3}$ . Esta deflexão corresponde a um parâmetro de impacto [Cf. Eq.(C.5)]  $\varrho_{min}^{NS} = \frac{2Z\alpha_f}{\beta} 0.49 r_e A^{1/3}$  e usando a Eq.(C.8) obtenho:

$$\frac{\varrho_{min}^{quant}}{\varrho_{min}^{NS}} = \frac{1}{Z A^{1/3} \alpha_f} \frac{\sqrt{2 \frac{m_e}{m_T} \gamma + 1}}{\gamma} \quad (C.14)$$

A condição quântica é a mais restritiva para energias do elétron incidente de até 180 GeV. Além disso, como o efeito do raio finito do núcleo é *reduzir* a seção de choque, esta correção pode ser desprezada no cálculo das seções de choque integradas que farei adiante.

onde  $\Upsilon = \frac{E_0}{E_0 + m_T c^2}$ . A seção de choque resultante é<sup>3</sup>:

$$\frac{d\sigma}{dE'} = (Zr_e)^2 \frac{m_e}{m_T} \frac{m_e c^2}{E'^2} \left(1 - \frac{E'}{W_{max}}\right), \quad (\text{C.17})$$

onde  $W_{max}$  é a energia máxima transferível Eq.(C.12).

A seção de choque de Mott foi deduzida supondo-se partículas alvo isoladas e deixa de ser válida para grandes parâmetros de impacto devido ao efeito de blindagem do campo nuclear pelos elétrons atômicos. Se o alvo é um átomo neutro, pode-se esperar que a blindagem seja total fora de alguns raios atômicos. O parâmetro de impacto correspondente pode ser dado por considerações clássicas ou quânticas. Classicamente, tomo simplesmente o raio atômico do modelo Thomas-Fermi  $\varrho_{max}^{ShC} = a_{TF} = 1.4a_0 Z^{-1/3}$  (onde  $a_0$  é o raio de Bohr), enquanto que quânticamente  $\varrho_{max}$  é determinado pela condição de que a transferência de momentum deve ser grande em comparação com a incerteza no momentum incidente correspondente a um parâmetro de impacto da ordem do raio atômico, i.e.,

$$\Delta p = \theta p \approx \frac{\hbar}{a_{TF}} \quad (\text{C.18})$$

$$\varrho_{max}^{ShQ} = \frac{2Z\alpha_f a_{TF}}{\beta} \quad (\text{C.19})$$

Exceto no caso de números atômicos muito altos, a limitação quântica é a mais restritiva.

Se o átomo alvo está ionizado, a blindagem não pode ser completa mesmo para parâmetros de impacto muito grandes e o parâmetro de impacto máximo  $\varrho_{max}^{ShQ}$  calculado acima divide a região onde os elétrons do feixe interagem diretamente com os núcleos atômicos (de carga  $Ze_0$ ) da região onde a interação ocorre com o íon como um todo (com uma carga líquida  $Qe_0$  - assumo  $Q = 1$ ). Assim, para parâmetros de impacto maiores que  $\varrho_{max}^{ShQ}$  uso a seção de choque de Rutherford<sup>4</sup> com uma carga nuclear efetiva igual à carga do íon. Obviamente, este procedimento só pode ser correto até um parâmetro de impacto máximo global  $\varrho_{max}^g$ , primeiramente porque nem todos os parâmetros de impacto estão presentes no feixe e um limite superior para  $\varrho_{max}^g$  é o raio do feixe. Além disso, blindagem de Debye por outros íons aprisionados pode causar uma redução adicional de  $\varrho_{max}^g$ . A distância de blindagem de Debye é dada, para um conjunto de partículas carregadas de energia cinética média  $\bar{E}$ , por [Jac75]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\bar{E}\epsilon_0}{n_0 e^2}} \quad (\text{C.20})$$

onde  $n_0$  é a densidade volumétrica das partículas que produzem a blindagem. Para blindagem produzida pelos próprios íons aprisionados,  $n_0$  depende da corrente do feixe, da neutralização  $\eta$  e da energia térmica  $k_B T$ . A situação mais restritiva surge para um feixe completamente

<sup>3</sup>O mesmo resultado pode ser obtido partindo-se da seção de choque de Bhabha para perda de energia de uma partícula pesada (sem spin) incidente em um elétron estacionário [Ros52], por meio de uma transformação de Lorentz.

<sup>4</sup>Quaisquer correções quânticas ou relativísticas são desprezíveis a grande parâmetro de impacto.

	Parâmetro de impacto				Transferência de energia			
	H	C	O		H	C	O	
$\varrho_{min}^{rel}$	2.2	13	17.4	$10^{-16}$ cm	940	2.2	0.9	MeV
$\varrho_{min}^{quant}$	5.7	4.1	4.1	$10^{-14}$ cm	$1.3 \times 10^5$	2.2	1.6	keV
$\varrho_{max}^{ShQ}$	1.1	3.6	4.3	$10^{-10}$ cm	3800	2	1.5	$10^{-5}$ eV
$\varrho_{max}^{ShC}$	7.4	4.1	3.7	$10^{-9}$ cm	8	2.7	2	$10^{-7}$ eV
$\varrho_{max}^g$	3.2	3.2	3.2	$10^{-3}$ cm	41	3.4	2.6	$10^{-19}$ eV

Tabela C.1: Parâmetros de impacto limite para elétrons incidentes em átomos de hidrogênio, carbono e oxigênio.

neutralizado<sup>5</sup>

$$\varrho_{max}^g = \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 c k_B T}{I \epsilon_0}} a. \quad (C.21)$$

Tudo o que foi dito até agora é válido para colisões com átomos neutros e íons atômicos. Colisões com moléculas podem ser tratadas de forma semelhante supondo-se que as interações com cada núcleo da molécula são independentes (i.e., adicionam-se incoerentemente).

Termino esta seção com um resumo dos parâmetros de impacto limite e transferências de energia correspondentes para os parâmetros do EPA [Tab. (C.1)].

<sup>5</sup>Para um feixe parcialmente neutralizado, o parâmetro de impacto máximo global está entre o valor acima e o raio do feixe  $a$ , o que, para os parâmetros do EPA, significa uma faixa de variação de um fator  $\approx 1000$ . No entanto, o efeito final da escolha de um ou outro valor no cálculo das taxas de aquecimento é pequeno, porque o parâmetro de impacto só aparece na expressão da seção de choque de aquecimento [Eq.(1.43)] no argumento de um logaritmo.

# Apêndice D

## Reconstrução da órbita fechada

No EPA, a órbita fechada é medida com 18 monitores de posição (magnetic pick-ups) simetricamente posicionados ao longo da circunferencia da máquina. O conhecimento da órbita nas posições dos monitores e das funções óticas determinadas pela rede magnética do anel permite a reconstrução da órbita fechada em toda a máquina, por meio de uma análise de Fourier. Neste apêndice descrevo o programa COEPA escrito para fazer esta análise. COEPA foi elaborado com um objetivo específico em mente, a saber, o cálculo da órbita ao longo da seção reta curta observada com o detector bremsstrahlung.

### D.1 O método

A análise de Fourier da órbita fechada (ou de qualquer outro sinal) medida num conjunto de pontos discretos é trivial quando estes pontos estão uniformemente distribuidos. No EPA, no entanto, os monitores de posição *não* estão uniformemente distribuidos seja com relação à fase betatron, seja com relação à posição azimutal. Por outro lado, se um dos monitores (UMA49) é descartado, o conjunto restante é simetricamente distribuido ao longo da circunferencia. Para grades de pontos deste tipo, o algoritmo de Bouthéon e Potier [MVJ77] permite a obtenção dos coeficientes de Fourier.

Seja  $z$  a coordenada betatron,  $\beta$  e  $\alpha$  as funções óticas  $\eta, \psi$  as coordenadas de Floquet correspondentes

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{\beta}} \quad (\text{D.1})$$

$$\psi = \int \frac{ds}{\beta(s)}. \quad (\text{D.2})$$

Nestas variáveis, uma solução geral da equação de Hill, i.e., uma oscilação betatron livre é dada por

$$z = A\sqrt{\beta} \cos\left(\int \frac{ds}{\beta(s)} + \psi_0\right) \quad (\text{D.3})$$

$$\eta = \eta_0 \cos(\psi + \psi_0), \quad (\text{D.4})$$

i.e., o movimento torna-se uma oscilação harmónica simples.

Distorções da órbita fechada, causadas por exemplo por erros de campo ou desalinhamentos de quadrupolos podem ser introduzidas como termos excitantes no lado direito da equação de movimento. A órbita fechada é a solução periódica desta oscilação forçada.

Como a fase betatron  $\psi$  avança de  $2\pi Q_z$  em uma volta completa, este é também o período da função  $\eta_{co}(\psi)$ . É conveniente definir a variável

$$\phi = \frac{\psi}{Q_z}, \quad (\text{D.5})$$

de forma que o período de  $\eta_{co}(\phi)$  seja  $2\pi$ .

Seguindo [MVJ77], separo  $\eta_{co}(\phi)$  em partes par e ímpar:

$$\begin{aligned} \eta_{co}(\phi) &= g(\phi) + h(\phi) \\ g(\phi) &= \frac{1}{2}(\eta_{co}(\phi) + \eta_{co}(-\phi)) \quad \text{par} \\ h(\phi) &= \frac{1}{2}(\eta_{co}(\phi) - \eta_{co}(-\phi)) \quad \text{ímpar.} \end{aligned}$$

e expando-as separadamente:

$$g(\phi) = \sum_{i=0}^n A_i \cos i\phi \quad (\text{D.6})$$

$$h(\phi) = \sum_{i=1}^n B_i \sin i\phi. \quad (\text{D.7})$$

Os coeficientes  $A_i$  e  $B_i$  são obtidos com um método de mínimos quadrados aplicado separadamente às partes par e ímpar:

$$\begin{aligned} [A] &= [C][G] \\ [B] &= [S][H], \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

onde  $[A]$  e  $[G]$  são matrizes  $(n+1) \times 1$ ,  $[B]$  and  $[H]$  são matrizes  $(n \times 1)$  e  $[C]$  e  $[S]$  são matrizes  $(n+1) \times (n+1)$  e  $n \times N$  respectivamente.  $[C]$  e  $[S]$  são obtidas por inversão das matrizes  $[C']$ ,  $[S']$ :

$$C'_{kj} = \sum_{i=1}^M \cos(k\phi_i) \cos(j\phi_i) \quad (\text{D.9})$$

$$S'_{kj} = \sum_{i=1}^M \sin(k\phi_i) \sin(j\phi_i). \quad (\text{D.10})$$

$M$  é o número de monitores na máquina e  $\phi_i$  são suas respectivas fases normalizadas.  $[G]$  e  $[H]$  são dadas por :

$$G_k = \sum_{i=1}^M g(\phi_i) \cos(k\phi_i) \quad (\text{D.11})$$

$$H_k = \sum_{i=1}^M h(\phi_i) \sin(k\phi_i). \quad (\text{D.12})$$

## D.2 Exemplo

Para testar o algoritmo, uma perturbação intencional da órbita fechada horizontal foi introduzida por meio de um dipolo corretor. As órbitas fechadas com e sem o dipolo corretor foram medidas e a diferença foi utilizada como entrada do programa COEPA. A Fig.(D.1) mostra que, como esperado, a órbita reconstituída (expressa em termos das coordenadas de Floquet) é uma oscilação harmônica com uma descontinuidade na derivada na posição do dipolo perturbador.

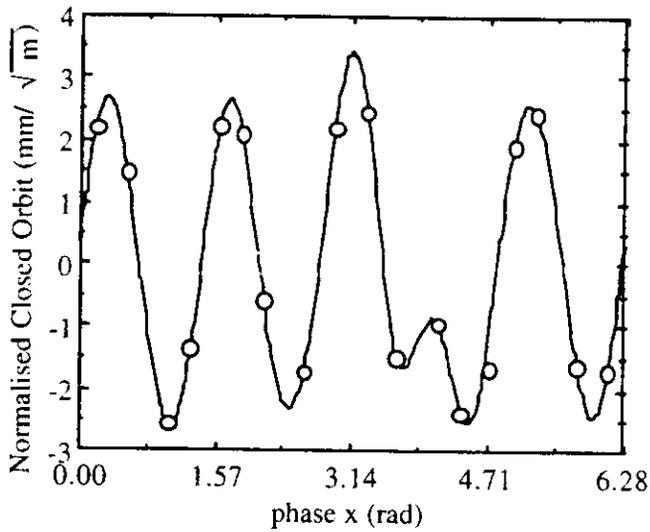


Figura D.1: Desvio da órbita fechada horizontal devido a um dipolo corretor. Os círculos são os valores medidos e a linha contínua é a órbita reconstituída

# Apêndice E

## Seção de choque para a produção de bremsstrahlung

Fórmulas da seção de choque para produção de bremsstrahlung foram revisadas por Koch e Motz (KM)[KM58]. Neste apêndice, listo simplesmente as equações em (KM) que foram utilizadas nos cálculos apresentados nesta tese. Seguindo (KM), as energias cinética, total e os momenta antes ( $E_0$ ,  $U_0$ ,  $p_0$ ) e depois ( $E$ ,  $U$ ,  $p$ ) da colisão, assim como a energia do fóton emitido ( $k$ ) são expressos em unidades de  $m_e c^2$  (energias) e  $m_e c$  (momenta). Para elétrons de alta energia incidentes em átomos neutros, a seção de choque bremsstrahlung, para blindagem completa, diferencial na energia do fóton

$$\frac{d\sigma_{BS}^{neut}}{dk} = \frac{4Z^2 r_e^2}{137} \frac{1}{k} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{U}{U_0} \right] \ln \left( 183/Z^{-1/3} \right) + \frac{1}{9} \frac{U}{U_0} \right\} \quad (\text{E.1})$$

é válida para todas as energias do fóton exceto na extremidade superior do espectro, que representa uma fração pequena do fluxo integrado dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{BS}^{neut} &= \int_{k_{low}}^{E_0} \frac{d\sigma_{BS}^{neutral}}{dk} \\ &= \frac{4Z^2 r_e^2}{137} \left\{ \left( \frac{4}{3} \ln \left( \frac{183}{Z^{1/3}} \right) + \frac{1}{9} \right) \left( \ln \frac{E_0}{k_{low}} - \frac{E_0 - k_{low}}{U_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \left( \frac{E_0^2 - k_{low}^2}{2U_0^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde  $r_e$  é o raio clássico do elétron e  $Z$  é o número atômico do átomo alvo. Para elétrons incidentes em íons totalmente ionizados, a expressão sem blindagem

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{BS}^{ST}}{dk} &= \frac{Z^2 r_e^2}{137} \frac{1}{k} \frac{p}{p_0} \left\{ \frac{4}{3} - 2U_0 U \left( \frac{p^2 + p_0^2}{p^2 p_0^2} \right) + \frac{\varepsilon_0 U}{p_0^3} + \frac{\varepsilon U_0}{p^3} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{p_0 p} + \right. \\ &\quad \left. + L \left[ \frac{8U_0 U}{3p_0 p} + \frac{k^2 (U_0^2 U^2 + p_0^2 p^2)}{p_0^3 p^3} + \frac{k}{2p_0 p} \left( \left( \frac{U_0 U + p_0^2}{p_0^3} \right) \varepsilon_0 - \left( \frac{U_0 U + p^2}{p^3} \right) \varepsilon + \frac{2kU_0 U}{p^2 p_0^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

onde

$$L = 2 \ln \left[ \frac{U_0 U + p_0 p - 1}{k} \right] \quad (\text{E.4})$$

Átomo/ion	$\sigma_{BS}$ (barn)
C, C <sup>+</sup> , C <sup>+2</sup> , C <sup>+3</sup>	0.2
C <sup>+4</sup> , C <sup>+5</sup>	0.22
C <sup>+6</sup>	0.23
O	0.34
CO <sup>+</sup>	0.54
H, H <sup>+</sup>	0.01
H <sub>2</sub> <sup>+</sup>	0.02

Tabela E.1: Seções de choque para produção de bremsstrahlung integradas na energia do fóton. A energia cinética dos elétrons incidentes é  $E_0 = 500$  MeV.

$$\varepsilon_0 = \ln \left( \frac{U_0 + p_0}{U_0 - p_0} \right) \quad (\text{E.5})$$

$$\varepsilon = \ln \left( \frac{U + p}{U - p} \right) \quad (\text{E.6})$$

foi utilizada, enquanto que, para átomos parcialmente ionizados, a seção de choque de bremsstrahlung foi calculada com a expressão para blindagem arbitrária

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{BS}^{arb}}{dk} = & \frac{4Z^2 r_e^2}{137} \frac{1}{k} \left\{ \left( 1 + \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 \right) \left[ \int_{\delta}^1 (q - \delta)^2 (1 - F(q))^2 \frac{dq}{q^3} + 1 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2U}{3U_0} \left[ \int_{\delta}^1 \left( q^3 - 6\delta^2 q \ln \frac{q}{\delta} + 3\delta^2 q - 4\delta^2 \right) (1 - F(q))^2 \frac{dq}{q} + \frac{5}{6} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

onde

$$\delta = \frac{k}{UU_0} \quad (\text{E.8})$$

e o fator de forma atômico é definido por

$$F(q) = \frac{4\pi}{Ze_0} \int \rho(r) \left( \frac{\sin qr}{qr} \right) r^2 dr. \quad (\text{E.9})$$

onde  $\rho(r)$  é a densidade de carga eletrônica no átomo ou íon em consideração e  $r$  é medido em unidades do comprimento de onda Compton do elétron  $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 3.86 \times 10^{-13}$  m. Fatores de forma obtidos de funções de onda Hartree-Fock autoconsistentes estão disponíveis na literatura [oC61] para os íons de carbono C<sup>+2</sup>, C<sup>+3</sup> e C<sup>+4</sup>. O fator de forma para o C<sup>+5</sup> foi obtido a partir das funções de onda exata do átomo de hidrogênio

$$F(q) = \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{Z^2} \left( \frac{a_0}{\lambda_c} \right)^2 q^2 \right]^2}. \quad (\text{E.10})$$

onde  $a_0$  é o raio de Bohr.

O fator de forma para o  $C^+$  foi obtido de uma aproximação Thomas-Fermi para a densidade eletrônica, que foi calculada resolvendo-se numericamente a equação de Thomas-Fermi

$$\varphi''(\chi) = \frac{\varphi(\chi)^{3/2}}{\chi^{1/2}}. \quad (\text{E.11})$$

com condições iniciais apropriadas para íons[Gom56]:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi'(0) &= -1.588070972 - 0.083 \left( \frac{Z - \mathcal{N}_e}{Z} \right)^3 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

onde  $\mathcal{N}_e$  é o número de elétrons no íon.

A densidade eletrônica é dada por

$$\rho(r) = \frac{Z}{4\pi\mu^3} \varphi'' \left( \frac{\lambda_c Z^{1/3}}{\mu_0} r \right). \quad (\text{E.13})$$

onde

$$\mu_0 = \frac{1}{4} \left( \frac{9\pi^2}{2} \right)^{1/3} a_0 \quad (\text{E.14})$$

e o fator de forma Eq.(E.9) fica:

$$F(q) = \frac{Z - \mathcal{N}_e}{Z\chi_0} \frac{\sin \left( \frac{\mu_0}{\lambda_c} q Z^{-1/3} \chi_0 \right)}{\frac{\mu_0}{\lambda_c} q Z^{-1/3}} - \int_0^{\chi_0} \varphi'(\chi) \cos \left( \frac{\mu_0}{\lambda_c} q Z^{-1/3} \chi \right) d\chi \quad (\text{E.15})$$

onde  $\chi_0$  é o ponto onde<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \varphi(\chi_0) &= 0 \\ \chi_0 \varphi'(\chi_0) &= -\frac{Z - \mathcal{N}_e}{Z} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

As várias seções de choque diferenciais foram então integradas numericamente de  $k_{low}$  MeV até  $E_0$ . As seções de choque resultantes para  $E_0 = 500$  MeV e  $k_{low} = 290$  MeV estão listadas na Tab.(E.1).

---

<sup>1</sup>Na verdade, estas são as condições de contorno que definem a solução desejada da equação Thomas-Fermi Eq.(E.11). As condições iniciais Eqs.(E.12) representam uma aproximação conveniente, que pode ser testada, verificando-se se a solução numérica obtida com E.12 satisfaz às condições de contorno exatas.

# Apêndice F

## Distribuição angular dos fótons bremsstrahlung

Devido à abertura bastante reduzida da colimação, apenas uma pequena fração  $\xi$  do fluxo bremsstrahlung total é detectada. Distorções da órbita fechada (posição e ângulo) também contribuem para um decréscimo do número de fótons detectados. A órbita fechada foi reconstituída por análise de Fourier de dados de monitores de posição ao longo de toda a máquina (Cf. Apêndice D) e a distribuição angular do fluxo bremsstrahlung é dada pela expressão [KM58] (que é praticamente independente da energia do fóton na região de interesse)

$$\frac{d\sigma_{BS}(y)}{dy} = \frac{4Z^2 r_e^2 dk}{137 k} y dy \left\{ \frac{16y^2 U}{(y^2 + 1)^4 U_0} - \frac{(U_0 + U)^2}{(y^2 + 1)^2 U_0^2} + \left[ \frac{U_0^2 + U^2}{(y^2 + 1)^2 U_0^2} - \right. \right. \quad (F.1)$$

$$\left. - \frac{4y^2 U}{(y^2 + 1)^4 U_0} \right] \ln M(y) \left. \right\}. \quad (F.2)$$

onde

$$y = U_0 \theta \quad (F.3)$$

$$\frac{1}{M(y)} = \left( \frac{k}{2U_0 U} \right)^2 + \left( \frac{Z^{1/3}}{111(y^2 + 1)} \right)^2. \quad (F.4)$$

O ângulo quadrático médio de emissão é  $\frac{m_e c^2}{E} \approx 1$  mrad.

Num ponto qualquer ao longo da parte da órbita sob observação:

$$\xi = \frac{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma_{BS}(\theta)}{d\Omega} f_c(\theta, \phi)}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma_{BS}(\theta)}{d\Omega}}, \quad (F.5)$$

onde os ângulos  $\theta, \phi$  referem-se a um sistema de coordenadas alinhado com a órbita fechada e a função  $f_c$  define a abertura da colimação, i.e.,  $f_c(\theta, \phi) = 1$  se um fóton emitido com ângulos  $\theta, \phi$  com relação à órbita fechada atravessa a colimação e 0 em caso contrário. A Eq.(F.5) foi calculada numa grade de pontos ao longo da região de interesse (toda a seção reta entre BHZ44 e BHZ46 para o bremsstrahlung no gás residual ou a região entre os eletrodos CLE45 e CLE46 para bremsstrahlung nos íons aprisionados) e os resultados promediados são  $\xi^{gas} = 0.27$  e  $\xi^{ion} = 0.28$ .

# Apêndice G

## Hamiltoniano para movimento eletrônico em nuvem iônica Gaussiana

O Hamiltoniano para o movimento de elétrons relativísticos em um anel de armazenamento, na presença da carga espacial iônica e de quadrupolos *skew* foi dado por vários autores (Cf. e.g. [Rut85]). Aqui limito-me a citar os principais resultados e as aproximações relevantes. O Hamiltoniano completo para o movimento transversal no sistema de coordenadas local  $(x, y, s)$  é (unidades MKS):

$$H(x, y, p_x, p_y) = e_0 V(x, y, s) + c \left[ m_e^2 c^2 + \frac{(p_s - e_0 A_s)^2}{(1 + \frac{x}{\rho})^2} + (p_x - e_0 A_x)^2 + (p_y - e_0 A_y)^2 \right], \quad (\text{G.1})$$

onde  $\rho$  é o raio de curvatura local da órbita central,  $V$  e  $(A_x, A_y, A_s)$  são os potenciais escalar e vetorial e  $e_0$  é a carga eletrônica,  $c$  é a velocidade da luz e  $(p_x, p_y, p_s)$  são as componentes do momentum canonicamente conjugado a  $(x, y, s)$ . Se há somente componentes transversais dos campos magnéticos estáticos ( $A_x = A_y = 0$ ), mudando a variável independente de  $t$  para o ângulo azimutal  $\theta$ , expandindo o termo da energia cinética e fazendo uma transformação de escala de  $p_{x,y}$  para  $x', y' = \frac{d(x,y)}{d\theta}$ , obtenho

$$H(x, x', y, y'; \theta) = -\frac{e_0}{p_0} R^2 A_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) R^2 \left(1 + \frac{e_0 V}{p_0 c}\right), \quad (\text{G.2})$$

onde  $p_0$  é o momentum nominal<sup>1</sup> e  $R$  é o raio médio da máquina. Expando o potencial vetorial incluindo termos normais e *skew*

$$A_s = -\frac{p_0}{e_0} \left\{ \frac{x}{\rho} + \left[ \frac{1}{\rho^2} - \frac{e_0}{p_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right] \frac{x^2}{2} + \frac{e_0}{p_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{e_0}{p_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) xy \right\}, \quad (\text{G.3})$$

<sup>1</sup>Para energias ultrarelativísticas,  $p_0 c = E_0$ .

onde  $B_x$  e  $B_y$  são componentes do campo magnético e as derivadas são calculadas sobre a órbita central. O potencial eletrostático produzido por uma nuvem iônica Gaussiana é[BE80]

$$V(x, y) = \frac{I\eta}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^\infty \frac{1 - \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2 + q} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2 + q}\right]}{\sqrt{2\sigma_x^2 + q}\sqrt{2\sigma_y^2 + q}} dq. \quad (\text{G.4})$$

onde  $I$  é a corrente armazenada e  $\sigma_{x,y}$  são as dimensões RMS da nuvem iônica<sup>2</sup>. A expressão acima também pode ser expandida em série de Taylor (retenho termos de até quarta ordem)

$$V(x, y) = \varphi_{20}x^2 + \varphi_{02}y^2 + \varphi_{40}x^4 + \varphi_{04}y^4 + \varphi_{22}x^2y^2 \quad (\text{G.5})$$

com

$$\varphi_{20} = \frac{e_0\mathcal{V}_0}{p_0c} \frac{R^2}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (\text{G.6})$$

$$\varphi_{02} = \frac{e_0\mathcal{V}_0}{p_0c} \frac{R^2}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (\text{G.7})$$

$$\varphi_{22} = \frac{e_0\mathcal{V}_0}{p_0c} \frac{R^2}{2\sigma_x\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)^2} \quad (\text{G.8})$$

$$\varphi_{40} = \frac{e_0\mathcal{V}_0}{p_0c} \frac{(2\sigma_x + \sigma_y)R^2}{12\sigma_x^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} \quad (\text{G.9})$$

$$\varphi_{04} = \frac{e_0\mathcal{V}_0}{p_0c} \frac{(2\sigma_y + \sigma_x)R^2}{12\sigma_y^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} \quad (\text{G.10})$$

$$\mathcal{V}_0 = \frac{I\eta}{4\pi\epsilon_0 c}. \quad (\text{G.11})$$

Uma distribuição iônica simétrica (mas arbitrária) não produz termos acoplantes lineares. Das Eqs.(G.3) e (G.6), obtenho finalmente:

$$H(x, x', y, y'; \theta) = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{q_x^2 x^2 + q_y^2 y^2}{2} + M(\theta)xy + \sum_{k_1, k_2} \varphi_{k_1, k_2} x^{k_1} y^{k_2}. \quad (\text{G.12})$$

com

$$q_x^2 = \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{e_0}{p_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) R^2 \quad (\text{G.13})$$

$$q_y^2 = \frac{e_0}{p_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} R^2 \quad (\text{G.14})$$

$$M(\theta) = \frac{e_0 R^2}{p_0} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) \quad (\text{G.15})$$

<sup>2</sup>Assumo aqui que a nuvem iônica tem larguras RMS idênticas às do feixe.

# Apêndice H

## O detector de bremsstrahlung

Para detectar-se fótons de alta energia (várias centenas de MeV), é preciso fazê-los atravessar um material no qual sua energia é depositada e convertida em luz visível que pode então ser observada com um fotocátodo ligado a uma tubo multiplicador de elétrons. Como estes fótons gama não produzem diretamente ionização ou excitação do material pelo qual eles passam, a detecção é feita através dos elétrons secundários que, sendo partículas carregadas, perdem energia no meio via colisões. Dos três processos de interação de fótons com a matéria (Compton, fotoelétrico e produção de pares), somente a produção de pares tem seção de choque significativa em altas energias. De fato, um fóton de energia maior que algumas centenas de MeV cria, ao incidir na matéria, um par elétron-pósitron de alta energia que emite subseqüentemente fótons por bremsstrahlung. O efeito combinado da produção de pares e emissão de bremsstrahlung dá origem a uma *cascata eletromagnética* com muitos elétrons e pósitrons que perdem sua energia por excitação e ionização do meio.

Dois diferentes processos são normalmente utilizados para a detecção da energia depositada pelos elétrons secundários: cintilação e efeito Cerenkov. No primeiro caso, a excitação de níveis eletrônicos (cintiladores orgânicos) ou de sítios de impurezas (em que a estrutura do cristal é modificada para incluir estados ativadores entre a banda de condução e a banda de valência do material puro) em uma rede cristalina (cintiladores inorgânicos) cria estados excitados que decaem com emissão de luz visível. Cintiladores inorgânicos são normalmente preferidos em aplicações de espectroscopia de raios gama, devido ao seu maior *yield* de luz visível e maior número atômico, que proporciona uma maior seção de choque de interação com os fótons incidentes. O preço a ser pago por isso é uma resposta temporal mais lenta.

Em detectores Cerenkov, um bloco de material transparente de pequeno comprimento de radiação é usado para produzir uma cascata eletromagnética a partir de um fóton gama. Os elétrons e pósitrons da cascata geram luz visível por efeito Cerenkov e, como, para elétrons de alguns MeV ou mais, o número médio de fótons Cerenkov é proporcional ao comprimento total da órbita dos elétrons secundários, o *yield* Cerenkov é uma função aproximadamente linear da energia do fóton incidente. O detector Cerenkov tem a desvantagem, em relação ao cintilador, de produzir muito menos luz visível para uma mesma energia depositada, mas é de construção mais simples e barata e apresenta resposta temporal mais rápida (limitada essencialmente pela fotomultiplicadora).

Nos experimentos do EPA, o detector utilizado foi um contador Cerenkov de absorção total cujo meio ativo é um bloco de vidro carregado com chumbo (a introdução de um

elemento de alto  $Z$  aumenta a seção de choque de absorção para os gamas), tipo SF6-W [Cf. Tab.(2.2)]. O bloco tem as quatro faces polidas e revestidas com uma folha de alumínio e uma das faces é colada (com uma graxa de silicone) ao fotocátodo de uma fotomultiplicadora Hamamatsu R549. Todo o conjunto é montado no interior de um cilindro de alumínio anodizado, estanque à luz. A face do detector voltado para o feixe de gamas possui parede de alumínio de 0.3 mm de espessura.

As dimensões do bloco são determinadas pelos requerimentos de eficiência de detecção (i.e., a fração dos fótons gama incidentes que produzem uma contagem) e de resolução de energia. Uma eficiência de detecção de praticamente 100% é garantida com um comprimento do bloco de vidro de vários comprimentos de radiação [Cf. Tab.(2.2)]. A resolução em energia é afetada por três fatores: flutuações inerentes ao caráter estatístico do desenvolvimento da cascata eletromagnética no interior do vidro, escape pelas laterais e pela extremidade do bloco de parte dos elétrons e fótons secundários produzidos na cascata (vazamento da cascata ou *shower leakage*), que faz com que somente uma fração da energia total do fóton incidente seja depositada no material e flutuações estatísticas no processo de emissão fotoelétrica que ocorre no cátodo da fotomultiplicadora.

A análise teórica do desenvolvimento de uma cascata eletromagnética foi feita por Rossi[Ros52], que dá expressões simples para várias propriedades da distribuição longitudinal da densidade de partículas secundárias (elétrons e pósitrons). Na chamada aproximação B de Rossi, apenas dois parâmetros são necessários para caracterizar o material no qual ocorre a cascata: o comprimento de radiação e a energia crítica. Se as distâncias são expressas em unidades do comprimento de radiação e  $y$  é a energia do fóton incidente em unidades da energia crítica, o máximo e o centro de gravidade da distribuição longitudinal de elétrons e pósitrons secundários ocorrem em:

$$\begin{aligned} t_{max} &= \ln(y) - 0.5 \\ t_{med} &= t_{max} + 1.7, \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

e para o SF6-W e um fóton incidente de 500 MeV, encontro  $t_{max} = 5.4$  cm e  $t_{med} = 8.3$  cm, enquanto o comprimento total da trajetória das partículas secundárias é  $T = y$ , ou  $T = 67.5$  cm.

Nem todos os secundários são na realidade detectáveis (há um limite inferior de energia  $\mu = 1/n$ , onde  $n$  é o índice de refração do material, abaixo do qual não há emissão de radiação Cerenkov). Por isso, deste comprimento de órbita total  $T$ , somente uma fração  $T_d$  é observável:  $T_d$  é uma quantidade que flutua de acordo com a estatística do desenvolvimento da cascata e estas flutuações determinam um limite inferior da resolução em energia do detector. Uma estimativa deste limite pode ser obtida[Fab87] assumindo-se que a trajetória detectável é composta de um número de segmentos que obedece a uma estatística de Poisson. O número de segmentos é estimado de  $N_{max} = E_p/\mu$ , onde  $E_p$  é a energia do fóton incidente. Para o SF6-W,  $\mu = 0.4$  MeV e para um fóton incidente de  $E_p = 500$  MeV

$$\frac{\sigma E}{E} = \frac{1}{\sqrt{E_p/\mu}} \approx 3\%. \quad (\text{H.2})$$

A influência do escape de energia da cascata do volume ativo de detector pode ser estimada pela expressão[Fab87]:

$$\frac{\sigma E}{E} = \left(\frac{\sigma E}{E}\right)_0 \left\{1 + 2\sqrt{E[\text{GeV}]f}\right\}, \quad (\text{H.3})$$

onde  $f$  é a fração da energia do fóton incidente que não é depositada no material. O comprimento do bloco de vidro que corresponde a uma absorção de 98% da energia do fóton é dado por

$$L_{98\%} \approx 2.5t_{max} = 19 \text{ cm.} \quad (\text{H.4})$$

e a deterioração correspondente na resolução de energia é de um fator 1.03.

O número de fótons Cerenkov produzidos por centímetro de trajetória de um elétron secundário é:

$$N_{ph} \approx 400 \sin^2 \theta_c, \quad (\text{H.5})$$

onde  $\theta_c = \arccos(1/n)$  é o ângulo de emissão da radiação Cerenkov. Para o SF6-W, encontro  $\theta_c = 56^\circ$  e  $N_{ph} \approx 300$  fótons/cm ou  $4 \times 10^4$  fótons Cerenkov por GeV de energia depositada no material. Assumindo uma eficiência de transmissão de 1% até o fotocátodo (incluo aqui as perdas ao longo do vidro, na interface do vidro com a janela da fotomultiplicadora e a eficiência quântica do fotocátodo), concluo que aproximadamente 400 fotoelétrons são gerados por GeV de energia depositada. As flutuações na geração dos fotoelétrons também limita a resolução em energia ;

$$\left(\frac{\sigma E}{E}\right)_{pe} = \frac{5\%}{E[\text{GeV}]} \quad (\text{H.6})$$

ou  $\left(\frac{\sigma E}{E}\right)_{pe} = 17\%$  (FWHM) a 500 MeV. Fica claro que a resolução em energia é determinada principalmente pela estatística dos fotoelétrons e as flutuações intrínsecas da cascata ou os vazamentos para fora do bloco dão apenas uma pequena contribuição.

# Apêndice I

## Lista de Publicações

- Espalhamento Elástico de Elétrons de Baixa Energia por Moléculas de  $H_2S$ ; P.F. Tavares, L.M. Brescansin, L.E. Machado e M.A.P. Lima. Apresentação oral no XI Encontro Nacional de Física Da Matéria Condensada, Caxambú, MG, 09 a 13 de maio de 1988.
- Canhão Injetor do LINAC do LNLS, P.F. Tavares; LNLS MP-006/88.
- Studies on Linac LIL-V bunching; E. Chevally, J.P. Delahaye, G. Metral, A. Riche, G. Rossat, L. Jahnel e P.F. Tavares; PS/LP Note (CERN), 1989.
- The Injection System for the LNLS Synchrotron Light Source: The Linear Accelerator; Liu Lin, L. Jahnel e P.F. Tavares; Proceedings of the 1989 IEEE Particle Accelerator Conference, Chicago, USA.
- The Injection System for the LNLS Synchrotron Light Source: The Linear Accelerator; Liu Lin, L. Jahnel e P.F. Tavares; LNLS MP-004/89.
- Preliminary Study of a 6-Fold Symmetric Chasman-Green Lattice for the LNLS VUV Ring; Liu Lin, L. Jahnel, P.F. Tavares e W.Vieira; LNLS MP-005/89.
- Beam Loading; P.F. Tavares e L. Jahnel; LNLS MP-006/89.
- Injection Time for VUV-I; Liu Lin e P.F. Tavares; LNLS MP-007/89.
- An Electron Gun for the LNLS Pre-Injector; O.R. Bagnato, L. Jahnel, A.C. Lira e P.F. Tavares; EPAC Conference Proceedings Nice, França 1990.
- A Magnet Lattice for the LNLS Soft X-Ray Source; Liu Lin, L. Jahnel e P.F. Tavares; EPAC Conference Proceedings Nice, França 1990.
- Introdução à Dinâmica de Feixes de Partículas Carregadas; W.M. Vieira e P.F. Tavares; LNLS MP-001/90.
- Envelope - Um programa para Dinâmica de Feixe em Linhas de Transporte Solenoidais; P.F. Tavares; LNLS MP-002/90.

- Bancada de Caracterização do Canhão do LNLS: P.F. Tavares (editor); LNLS MP-009/90.
- Track: Manual do Usuário; P.F. Tavares; LNLS MP-010/90.
- Primeira Estimativa do Comprimento Físico do dipolo do UVX; P.F. Tavares e F.B.W. Talarico; LNLS MP-012/90.
- A Magnet Lattice for the LNLS Soft X-Ray Source; Liu Lin, L. Jahnel e P.F. Tavares; LNLS MP-13/90.
- A Magnet Lattice for the LNLS Soft X-Ray Source; L. Lin, L. Jahnel and P.F. Tavares; Festschrift in Honor of Rogério Cerqueira Leite, World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd, 1991.
- LNLS Status Report; Accelerator Physics and Instrumentation Groups of LNLS: The 4th International Conference on Synchrotron Radiation Instrumentation. Chester, 1991.
- The transport line from MAIRA to the LNLS UVX Electron Storage Ring; Liu Lin, L. Jahnel, P.F. Tavares e R.H.A. Farias; Proceedings of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference, San Francisco. USA.
- A Low Vertical  $\beta$  Mode for the LNLS UVX Electron Storage Ring; Liu Lin e P.F. Tavares; Proceedings of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference. San Francisco, USA.
- Linha de Transporte da MAIRA ao Anel UVX: Proposta Preliminar; Liu Lin e P.F. Tavares; LNLS MeT-02/91.
- Bremsstrahlung Yield from Trapped Ions and Neutral Residual Gas in EPA; P.F. Tavares; LNLS MeT-06/91.
- Choice of  $\gamma$ -Ray Detector for the Ion-Trapping Experiment in the EPA; P.F. Tavares; LNLS MeT-07/91.
- Sketchy Ideas for Beam Dynamics Experiments with the Bremsstrahlung Detector; P.F. Tavares; LNLS MeT-08/91.
- The LNLS UVX2 Soft X-Ray source; Liu Lin, L. Jahnel e P.F. Tavares; LNLS MeT-09/91.
- Resonator Modes of the LNLS RF Cavity; P.F. Tavares; LNLS CT-04/91.
- Frequency Response of a Pair of Cylindrical Striplines; P.F. Tavares; LNLS CT-06/91.
- The LNLS UVX2 Soft X-Ray source; Liu Lin, L. Jahnel e P.F. Tavares; Proceedings of the 3rd EPAC Belim, Alemanha, 1992.
- Ion Clearing in the LNLS UVX-2 Soft X-Ray Source P.F. Tavares; Proceedings of the 3rd EPAC Berlin, Alemanha, 1992.
- Betatron Coupling in Ion Loaded Electron Beams; P.F. Tavares; CERN-PS/92-54.

- Transverse Distribution of Ions Trapped in an Electron Beam; P.F. Tavares; CERN-PS/92-55.
- Fourier Analysis of the EPA closed orbit; P.F. Tavares; CERN-PS/LP 93-13.
- Neutralisation of Accelerator Beams by Ionisation of the Residual Gas; Y. Baconnier, A. Poncet e P.F. Tavares; a ser publicado no CERN Accelerator School (1993).
- Bremsstrahlung detection of ions trapped in the EPA electron beam; P.F. Tavares; Aceito para publicação na PARTICLE ACCELERATORS.

# Lista de Figuras

1.1	Sistema de coordenadas usado para descrever a distribuição de carga do feixe de elétrons. A <i>órbita central</i> é aquela traçada por um elétron de energia igual à energia nominal da máquina. Os elétrons executam oscilações horizontais ( $x$ - no plano da órbita) e verticais ( $y$ - perpendicular ao plano da órbita) em torno desta órbita. . . . .	12
1.2	Poço de potencial para diferentes tamanhos do feixe. O número ao lado de cada curva é a razão $b/a$ . A corrente é 50 mA. . . . .	15
1.3	Profundidade do poço em função do raio do feixe. A corrente é 50 mA. . . . .	16
1.4	Variações da profundidade do poço de potencial devido às variações na geometria da câmara de vácuo e do feixe. Um bolsão de neutralização pode surgir entre os pontos B e C. A corrente é 50 mA. . . . .	17
1.5	Dinâmica de um íon $\text{CO}^+$ no feixe do EPA dentro dos magnetos dipolares ( $B_0 = 1.17 \text{ T}$ ): (a) Trajetória de um íon criado na borda do feixe ( $x_0 = 0.5 \text{ mm}$ , $s_0 = 0$ ) e em repouso. A corrente é $I = 50 \text{ mA}$ ; (b) Velocidade de deriva de um íon criado em repouso na borda do feixe em função da corrente. . . . .	19
1.6	Diagrama de sintonia mostrando o ponto de operação do EPA (asterisco) e linhas de ressonância de até terceira ordem. . . . .	24
1.7	Deslocamento de sintonia vertical devido a nuvem iônica Gaussiana de largura RMS $\sigma_y^i$ em função da amplitude de oscilação betatron. O deslocamento de sintonia máximo (partículas de amplitude nula) é normalizado para 1. A amplitude é medida em unidades da largura RMS do feixe de elétrons. . . . .	26
1.8	Curvas de dispersão de sintonia betatron vertical para um nuvem iônica Gaussiana de largura RMS $\sigma_y^i$ . . . . .	26
2.1	Funções óticas do anel EPA. As linhas verticais indicam a região observada com o detector de raios gama. . . . .	30
2.2	Vista geral do EPA, mostrando as linhas de injeção de pósitrons e elétrons. Os círculos indicam as posições dos magnetos dipolares do anel e os retângulos os magnetos dipolares das linhas de transporte. Note a simetria de reflexão e a origem para a coordenada $s$ . A posição do analisador de gases residuais (RGA) também está indicada. . . . .	31
2.3	Visão esquemática da seção reta do EPA usada nos experimentos. Estão mostrados os magnetos dipolares (BHZ), quadrupolares (QFL, QTR) e sextupolares (XNH), eletrodos de limpeza (CLE), medidores de pressão (VPI), um monitor de posição do feixe de elétrons (UMA) e o detector de raios gama (D). . . . .	31

2.4	Eletrodos de limpeza CLE45 (esquerda) e CLE46 (direita). Dimensões em mm.	33
2.5	Corte vertical da câmara de vácuo do EPA do dipolo BHZ44 ao dipolo BHZ46. Note as diferentes escalas nas direções longitudinal e vertical. Também estão mostrados os eletrodos de limpeza (CLE), o ângulo de aceitação da colimação e a órbita fechada antes (B) e após (A) a correção.	34
2.6	Contagem bremsstrahlung normalizada em função do número de elétrons armazenados em 1, 2, 4 e 8 pacotes equidistantes. As tensões nos eletrodos de limpeza CLE45 e CLE46 são +5 kV(□) ou -6 kV(○), enquanto que a tensão nos 36 eletrodos restantes é sempre -6 kV.	36
2.7	Emitâncias vertical (a) e horizontal (b) medidas.	37
2.8	Densidade volumétrica média do feixe entre os eletrodos CLE45 e CLE46. As barras de erro na curva de 4 pacotes incluem a variação da densidade nesta região, assim como os erros estimados na medida da emitância e da dispersão de energia.	38
2.9	Massa crítica média na região entre os eletrodos CLE45 e CLE46.	38
2.10	Variação longitudinal (no trecho entre os eletrodos CLE45 e CLE46) da densidade do feixe de elétrons e da massa crítica para $N_e = 0.5 \times 10^{11}$ elétrons armazenados em 4 pacotes.	39
2.11	Espectro do sinal de um monitor de posição mostrando um modo coerente em $f = 977.4$ kHz. Há quatro pacotes na máquina e a intensidade total é $N_e = 8.6 \times 10^{10}$ elétrons.	40
2.12	Contagem bremsstrahlung e emitância vertical com excitação de RF externa. As setas indicam os momentos em que o amplificador de RF foi desligado e ligado. A frequência de excitação é 973.2 kHz e há quatro pacotes na máquina. Note que o experimento progride, no tempo, da direita para a esquerda.	41
2.13	Contagem bremsstrahlung normalizada calculada (linha contínua) e medida(□) em função da intensidade do feixe com dois pacotes de elétrons.	46
2.14	Contagem bremsstrahlung normalizada calculada (linhas contínuas) e medida em função da intensidade do feixe para quatro pacotes. As três curvas calculadas mostradas correspondem a diferentes valores do tempo de escape ressonante $\tau$ (usado apenas acima de $N_e^{th} = 6 \times 10^{10}$ elétrons).	46
2.15	Contagem bremsstrahlung calculada e medida em função da intensidade do feixe para oito pacotes. As três curvas calculadas correspondem a diferentes valores do tempo de escape ressonante $\tau$ .	47
2.16	Neutralização média na região entre os eletrodos CLE45 e CLE46 em função da intensidade do feixe para dois e quatro pacotes.	48
2.17	Composição calculada dos íons aprisionados em função da intensidade para um feixe com quatro pacotes. O tempo de escape ressonante dos íons $CO^+$ (usado apenas acima de $N_e^{th}$ ) é 5 ms.	48
2.18	(a) Contagem bremsstrahlung calculada para 4 pacotes. As barras de erro incluem a variação da massa crítica e da densidade do feixe ao longo da região de aprisionamento, assim como a incerteza na medida da emitância. Os quadrados são os pontos experimentais. (b) Mesmo cálculo, desprezando-se ionização múltipla e dissociação molecular.	49

2.19	Contagem bremsstrahlung calculada para diferentes composições do gás residual (as porcentagens são as frações de CO, o restante sendo H <sub>2</sub> ). O tempo de limpeza ressonante é 5 ms. . . . .	49
3.1	Acoplamento linear: trajetórias no espaço de fases. . . . .	58
3.2	Acoplamento não-linear . . . . .	62
3.3	Razão de emitâncias $\kappa$ em função de $I\eta$ (em A%) para o feixe do EPA. O feixe sem íons tem $\kappa = 10\%$ . Acoplamento total ( $\kappa = 100\%$ ) indica $\epsilon_x = \epsilon_y$ , i.e., um feixe cilíndricamente simétrico se $\beta_x = \beta_y$ . (a) $Q_y = 4.38$ , $Q_x = 4.60$ e (b) $Q_y = 4.60$ , $Q_x = 4.38$ . . . . .	69
4.1	Distribuição de íons aprisionados para íons criados em repouso (sem dispersão de energia térmica). . . . .	74
4.2	Distribuições transversais dos íons aprisionados obtidas pela solução direta da equação de Liouville, para vários valores da razão $\Gamma^2$ da energia potencial para a energia cinética. . . . .	77
4.3	Distribuição de íons aprisionados em equilíbrio térmico para diferentes níveis de neutralização $\eta$ . . . . .	79
4.4	Nuvem iônica em equilíbrio térmico com neutralização $\eta = 25\%$ . (a) Deslocamento de sintonia em função da amplitude e (b) Distribuição de sintonia (curva normalizada). . . . .	80
D.1	Desvio da órbita fechada horizontal devido a um dipolo corretor. Os círculos são os valores medidos e a linha contínua é a órbita reconstituída . . . . .	94

# Lista de Tabelas

1.1	Parâmetros para modelo cilíndrico do feixe do EPA. . . . .	12
1.2	Tempos de neutralização e taxas de ionização no EPA (energia cinética dos elétrons $E_0 = 500$ MeV). As taxas de ionização correspondem um feixe de 50 mA [Tab.(1.1)]. . . . .	14
1.3	Parâmetros do movimento de íons $H_2^+$ e $CO^+$ no feixe do EPA [Tab.(1.1)]. O campo magnético é de 1.17 T e a velocidade de deriva é calculada para um íon criado em repouso na borda do feixe. $v_{th}$ é a velocidade média (rms) de uma distribuição Maxwelliana à temperatura $T = 300$ K. A profundidade do poço de potencial $V_d$ é calculada para uma câmara de vácuo de raio $b = 50$ mm. . . . .	18
1.4	Tempo de escape por colisões simples e múltiplas de íons de monóxido de carbono e hidrogênio molecular. . . . .	22
2.1	Principais parâmetros do EPA. . . . .	32
2.2	Principais parâmetros do detector de raios gama. A resolução em energia foi estimada considerando-se apenas a estatística de fotoelétrons (Cf. Apêndice H). A transmitância interna corresponde a uma placa de 25 mm. . . . .	32
2.3	Parâmetros de Bethe para processos inelásticos do $H_2$ e $CO$ . Os valores experimentais de Rieke and Prepjchal são na realidade <i>counting cross sections</i> , que incluem ionização dupla diretamente a partir da molécula neutra – esta contribuição é, entretanto, pequena, como pode-se ver pelos resultados de Edwards ( $\sigma_2$ ). Os resultados $\sigma_8$ e $\sigma_9$ para o $CO$ foram obtidos fitando-se pontos experimentais à fórmula de Bethe. Todas as seções de choque para o carbono atômico foram obtidas com a fórmula de Lotz. As seções de choque são calculadas para $E_0 = 500$ MeV. As seções de choque marcadas com um asterisco são aquelas introduzidas nos cálculos da composição dos íons aprisionados. . . . .	44
3.1	Intervalos da constante do movimento $C$ que correspondem a diferentes tipos de órbitas: todas as trajetórias, trajetórias que cruzam $\psi = 0$ , trajetórias que cruzam $\psi = \pi$ apenas e a separatriz. As constantes $C_{I,II,III,IV}$ estão definidas nas Eqs.(3.66) e (3.67). . . . .	64
C.1	Parâmetros de impacto limite para elétrons incidentes em átomos de hidrogênio, carbono e oxigênio. . . . .	91
E.1	Seções de choque para produção de bremsstrahlung integradas na energia do fóton. A energia cinética dos elétrons incidentes é $E_0 = 500$ MeV. . . . .	96

# Bibliografia

- [AS70] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York, November 1970.
- [Bac84] Yves Baconnier. Neutralization of accelerator beams by ionization of the residual gas. In P. Bryant and S. Turner, editors. *CAS General Accelerator Physics*, volume II, pages 267 – 300, Geneva. Sep 1984. CERN.
- [BB80] Yves Baconnier and G. Brianti. The stability of ions in bunched beam machines. Internal Report CERN/SPS/80-2 (DI). CERN. Geneva, March 1980.
- [BBDFM87] S. Battisti, J.F. Bottollier-Depois, B. Frammery, and E. Marcarini. The synchrotron radiation measurements in EPA. Technical Report CERN/PS 87 – 72 (LPI), CERN, Geneva, 1987.
- [BE80] M. Bassetti and G.A. Erskine. Closed expressions for the electrical field of a two-dimensional gaussian charge. Internal Report CERN-ISR-TH/80-06, CERN, Geneva, March 1980.
- [Ben34] W.H. Benett. Magnetically self-focussing streams. *Physical Review*, 45:890 – 897, June 1934.
- [Ber58] C. Bernardini. Space-charge effects in electron synchrotrons. *Il Nuovo Cimento*, X(5):804 – 816, December 1958.
- [Bet30] Hans Bethe. *Annalen der Physik*, 5:325, 1930.
- [BGP+80] M.F. Biagini, S. Guiducci, M. Preger, M. Serio, and S. Tazzari. Observation of ion trapping at ADONE. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on High Energy Accelerators*, pages 687 –692, Geneva, 1980.
- [Ble88] J.P. Blewett. Synchrotron radiation – 1873 to 1947. *Nuclear Instruments and Methods*. A266:1 – 9, 1988.
- [BPT93] Yves Baconnier, Alain Poncet, and Pedro F. Tavares. Neutralisation of accelerator beams by ionisation of the residual gas. Internal report, CERN. Geneva, 1993.
- [Bruc62] H. Brück. *Circular Particle Accelerators*. 1966.

- [BW83] A. Bienenstock and H. Winick. Synchrotron radiation research - an overview. *Physics Today*, 36(6):48 - 58, June 1983.
- [BW88] C.J. Bochetta and A. Wrulich. The trapping and clearing of ions in ELETTRA. Internal Report ST/M-88/26, SINCROTRONE TRIESTE. Trieste, November 1988.
- [CS58] E.D. Courant and H. Snyder. Theory of the alternating gradient synchrotron. *Annals of Physics*, 3:1 - 48, 1958.
- [DR76] R.D. Dubois and M.E. Rudd. Differential cross sections for elastic scattering of electrons from argon, neon, nitrogen and carbon monoxide. *Journal of Physics B*, 9(15):2657, 1976.
- [Duf85] J. Le Duff. Current and current density limitations in existing electron storage rings. *Nuclear Instruments and Methods*, A239:83 - 101, 1985.
- [EW71] L.R. Evans and D.J. Warner. Space-charge neutralization of intense charged particle beams: Some theoretical considerations. Internal Report CERN/MPS/LIN. 71-2, CERN, Geneva, August 1971.
- [EWDE90] A.K. Edwards, R.M. Wood, J.L. Davis, and R.L. Ezell. Collisional ionization and excitation of  $H_2^+$ : Two-electron processes. *Physical Review A*, 42(3):1367, 1990.
- [Fab87] C. Fabjan. Calorimetry in high-energy Physics. In T. Ferbel, editor, *Experimental Techniques in High-Energy Physics*, pages 257 - 324. Addison-Wesley, 1987.
- [Fis60] E. Fischer. Space charges in electron storage rings and the removal of positive ions by a D.C. clearing field. Internal Report PS/Int.AR/60-14, CERN, Geneva, June 1960.
- [Gol81] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., 2<sup>nd</sup> edition. 1981.
- [Gom56] P. Gombás. Statistische behandlung des atoms. In S. Flügge, editor, *Encyclopedia of Physics*. pages 109 -231. Springer-Verlag. 1956.
- [GR80] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Inc., New York, 1980.
- [Gui78] G. Guignard. A general treatment of resonances in accelerators. Internal Report CERN 78-11, CERN, Geneva, 1978.
- [HHS55] M.E. Hines, G.W. Hoffman, and J.A. Saloom. Positive-ion drainage in magnetically focused electron streams. *Journal of Applied Physics*. 26(9):1157 - 1162, September 1955.

- [HM78] E. Hille and T.D. Märk. Cross section for single and double ionization of carbon monoxide by electron impact from threshold up to 180 eV. *Journal of Chemical Physics*, 69(10):4500, 1978.
- [Hof61] Hofstadter. *Nuclear Electron Scattering*. 1961.
- [Hol86] A.J.T. Holmes. Neutralization of ion beams. In P. Bryant and S. Turner, editors, *CAS General Accelerator Physics*, volume I, pages 79 – 98, Geneva, .Sep 1986. CERN.
- [Ino71] Mitio Inokuti. Inelastic collisions of fast particles with atoms and molecules—the Bethe theory revisited. *Reviews of Modern Physics*, 43(3):297–344, July 1971.
- [ISGI93] H. Ishimaru, S. Shibata, J.E. Griffin, and M. Inokuti. Ionization cross sections of gases for protons at kinetic energies between 20 MeV and 385 GeV. *Physical Review A*, 1993. Submitted for publication.
- [Jac75] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2<sup>nd</sup> edition, 1975.
- [Jol63] R. Jolivot. Le piégeage des ions dans ACO et leur balayage. Rapport Technique 75 – 63, LAL, Orsay. December 1963.
- [KD66] L.J. Kieffer and G.H. Dunn. Electron impact ionisation cross-section data for atoms, atomic ions, and diatomic molecules: I. experimental data. *Reviews of Modern Physics*, 38(1):1 – 35, January 1966.
- [KHBH84] M. Kobayashi, K. Huke, S. Ban, and H. Hirayama. Observations of bremsstrahlung caused by ion trapping. In *Proceedings of the 5th Symposium on Accelerator Science and Technology*, pages 148 – 150. KEK, 1984.
- [KHI+86] H. Kobayakawa, K. Huke, M. Izawa, Y. Kamiya, M. Kihara, M. Kobayashi, and S. Sakanaka. Observation of ion trapping phenomenon with bremsstrahlung. *Nuclear Instruments and Methods*, A248:565, 1986.
- [KHK+83] C.K. Kwan, Y.F. Hsieh, W.E. Kauppila, S.J. Smith, T.S. Stein, and M.N. Uddin.  $e^\pm - \text{CO}$  and  $e^\pm - \text{CO}_2$  total cross-section measurements. *Physical Review A*, 27(3):1328, 1983.
- [KM58] H.W. Koch and J.W. Motz. Bremsstrahlung cross-section formulas and related data. *Reviews of Modern Physics*, 31(4):920, 1958.
- [Koh71] R.D. Kohaupt. Ion clearing mechanism in the electron-positron storage ring Doris. Internal Report M-71/2, DESY, Hamburg, December 1971.
- [Liu73] J.W. Liu. Total inelastic cross section for collision of  $\text{H}_2$  with fast charged particles. *Physical Review A*, 7(1):103, 1973.

- [Liu89] J.W. Liu. The Bethe theory for dissociative excitations and ionisation of  $H_2^+(1s\sigma_g)$  by electron impact. *Journal of Physics B*, 22:2605, 1989.
- [Lot67a] W. Lotz. An empirical formula for the electron-impact ionization cross-section. *Zeitschrift für Physik*, 206:205, 1967.
- [Lot67b] W. Lotz. Ionization potentials for atoms and ions from hydrogen to zinc. *Journal of the Optical Society of America*, 57(7):873, 1967.
- [Lot68a] W. Lotz. Electron impact ionization cross-sections and ionization rate coefficients for atoms and ions from hydrogen to calcium. *Zeitschrift für Physik*, 216:241, 1968.
- [Lot68b] W. Lotz. Subshell binding energies for atoms and ions from hydrogen to zinc. *Journal of the Optical Society of America*, 58(7):915, 1968.
- [Mar91] P. Marin. Observation of bremsstrahlung on dust particles trapped in electron beams at DCI and Super-ACO. Rapport Technique RT/91-03, LURE, Orsay, 1991.
- [MCKY72] G.I. Merson, V.A. Chechin, L.P. Kotenko, and V.C. Yermilova. The relativistic rise of the track density in bubble chambers. *Nuclear Instruments and Methods*, 98:577 – 587, 1972.
- [MKS77] A. Müller, K. Klinger, and E. Salzborn. On the charge state distribution of multiply charged ions extracted from electron beam ion sources. *Nuclear Instruments and Methods*, 140:181, 1977.
- [Mon68] B. Montague. Fourth order resonance excited by space-charge forces in a synchrotron. Internal Report CERN 68-38, CERN, Geneva, 1968.
- [MTH88] Y. Miyahara, K. Takayama, and G. Horikoshi. Dynamical analysis of the longitudinal motion of trapped ions in an electron storage ring. *Nuclear Instruments and Methods*, A270:217 – 225, 1988.
- [MVJ77] M. Boutheon, V. Chohan, and J.P. Potier. A novel least-square Fourier algorithm for decomposition of discrete, non-equidistant acquisition data. *The Radio and Electronic Engineer*, 47(6):257, 1977.
- [NS70] A.S. Newton and A.F. Sciamanna. Metastable dissociation of the doubly charged carbon monoxide ion. *Journal of Chemical Physics*, 53(1):132, 1970.
- [OG74] O. Gröbner. Performance study on proton-proton storage rings at several hundred GeV/c. Internal Report CERN/ISR-AS/74-67, CERN, Geneva, 1974.
- [oC61] International Union of Crystallography. *International tables for x-ray crystallography*, 1961.

- [Orl89] Y. Orlov. The suppression of transverse instabilities caused by trapped ions in the AA by shaking of the antiproton beam. Internal Report CERN/PS/89-01, CERN, Geneva, 1989.
- [OS87] O.J. Orient and S.K. Srivastava. Electron impact ionisation of H<sub>2</sub>O, CO, CO<sub>2</sub> and CH<sub>4</sub>. *Journal of Physics B*, 20:3923, 1987.
- [PD71] B. Peart and K.T. Dolder. Collisions between electrons and H<sub>2</sub><sup>+</sup> ions. I. Measurements of cross sections for proton production. *Journal of Physics B*, 4:1496, 1971.
- [PD72] B. Peart and K.T. Dolder. Collisions between electrons and H<sub>2</sub><sup>+</sup> ions. II. Measurements of cross sections for dissociative excitation. *Journal of Physics B*, 6:860, 1972.
- [PD73] B. Peart and K.T. Dolder. Collisions between electrons and H<sub>2</sub><sup>+</sup> ions. IV. Measurements of cross sections for dissociative ionization. *Journal of Physics B*, 6:2409, 1973.
- [Pon83] A. Poncet. Ion clearing in EPA. Internal Report PS/ML/Note 83-1, CERN, Geneva, 1983.
- [Pon88] A. Poncet. Trapping of ions in the EPA electron beam: Stability conditions and diagnostics. Internal Report CERN/PS 88-14 (ML), CERN, Geneva, 1988.
- [PonPriv] A. Poncet. Private communication
- [Reg77] E. Regenstreif. Potential and field created by an elliptical beam inside an infinite vacuum chamber of circular cross-section. Internal Report CERN/PS/DL 77-37, CERN, Geneva, October 1977.
- [Ros52] Bruno Rossi. *High Energy Particles*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1952.
- [Row88] E. Rowe. Trapped ion effects and their treatment in electron storage rings. In H.J. Halama, J.C. Schuchman, and P.M. Stefan, editors. *Vacuum Design of Advanced and Compact Synchrotron Light Sources*. AIP, 1988.
- [RP72] Foster F. Rieke and William Prepejchal. Ionization cross-sections of gaseous atoms and molecules for high-energy electrons and positrons. *Physical Review A*, 6(4):1507–1519, October 1972.
- [Rut85] R. Ruth. Single particle dynamics in circular accelerators. In M. Month, editor, *Physics of Particle Accelerators – SLAC Summer School*, pages 152–235. AIP, 1985.
- [Sag91a] D. Sagan. Ion trapping in the CESR B-Factory. Internal Report CBN 91-2, Cornell University, Cornell, May 1991.
- [Sag91b] D. Sagan. Some aspects of the longitudinal motion of ions in electron storage rings. *Nuclear Instruments and Methods*, A307:171–178, 1991.

- [San71] M. Sands. The Physics of electron storage rings. An introduction. In B. Touschek, editor, *International School of Physics Enrico Fermi*, pages 257 – 411, 1971.
- [SH90] Jr. S. Humphries. *Charged Particle Beams*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
- [SIKK87a] S. Sakanaka, M. Izawa, H. Kobayakawa, and M. Kobayashi. Differences in the ion trapping between uniform and partial bunch filling. *Nuclear Instruments and Methods*, A256:184 – 188, 1987.
- [SIKK87b] S. Sakanaka, M. Izawa, H. Kobayakawa, and M. Kobayashi. Observation of ion trapping in single bunch operation at the Photon Factory storage ring. Internal Report KEK 87-168, KEK, 1987.
- [SMI91] H. Saeki, T. Momose, and H. Ishimaru. Observations of dust trapping phenomena in the Tristan accumulation ring and a study of dust removal in a beam chamber. *Review of Scientific Instruments*, 62(4):874, 1991.
- [Tav93] Pedro F. Tavares. Using the electron current from ionisation of the residual gas by the proton beam to measure the pressure in the LHC cold bore. Memorando de Projeto LNLS MP 93-01, LNLS, Campinas, September 1993.
- [TC88] T.Hopkins and C.Phillips. *Numerical Methods in Practice Using The NAG Library*. Addison-Wesley, 1988.
- [THTM85] T.Kasuga, H.Yonehara, T.Kinoshita, and M.Hasumoto. Ion trapping effect in UVSOR storage ring. *Japanese Journal of Applied Physics*, 24(9):1212, 1985.
- [TK87] H. Tawara and T. Kato. Total and partial ionization cross sections of atoms and ions by electron impact. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 36:167 – 353, 1987.
- [TTT90] H. Takada, Y. Tsutsui, and T. Tomimasu. Ion effects in a compact storage ring. *Nuclear Instruments and Methods*, A294:373 – 381, 1990.
- [WD80] H. Winick and S. Doniach. *Synchrotron Radiation Research*. Plenum Press, New York, 1980.
- [Wie86] H. Wiedemann. Design of low emittance storage rings. *Nuclear Instruments and Methods*, A246:4 – 11, 1986.
- [WMOS87] K. Watanabe, Y. Miyahara, H. Ohkuma, and K. Shinoe. Drift velocity and pulse response of trapped ions in a circulating electron beam. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26(12):L1964, 1987.
- [Wol88] S. Wolfram. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, 1988.
- [ZD67] B Van Zyl and G.H. Dunn. Dissociation of  $N_2^+$  and  $O_2^+$  by electron impact. *Physical Review*, 163(1):163. 1967.