

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física 'Gleb Wataghin'

O Movimento de Cargas em Capacitores e a
Velocidade Limite
de Acordo com a Lei de Weber

ALUNO: João José Caluzi

ORIENTADOR: Prof. Dr. André Koch Torres Assis

Tese submetida ao Instituto de Física 'Gleb Wataghin' da
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos
requisitos para obtenção do grau de mestre em ciências
Agosto de 1991

IF 91-103721
Este exemplar corresponde a redação final da Tese
defendida pelo aluno João José Caluzi e aprovada
pela Comissão Julgadora.

*Campinas, 03/09/91
André Koch Torres de Assis*

PROF. ANDRÉ KOCH TORRES DE ASSIS

Aos meus pais,
Emilia e José,
e à memória de meus avós.
Amábile e José,
Tereza e Fortunato.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. André Koch Torres Assis pela sugestão do tema, estímulo e orientação necessária para a realização deste trabalho. Ao Prof. Dr. Roberto de Andrade Martins pelos primeiros passos. Ambos um exemplo de entusiasmo e dedicação ao trabalho.

Ao amigo Francisco Arpad Bajay pelo estímulo, atenção e ajuda sempre pronta.

Aos amigos João Paulo, Elis, Manuel (Mané), Fausto e Marco pelos longos e sempre agradáveis 'papos'.

Aos meus familiares pela dedicação e apoio.

Ao pessoal do desenho pela confecção das figuras.

E ao CNPq pelo apoio financeiro, através da bolsa de mestrado e em uma fase anterior também pelo apoio financeiro, através da bolsa de iniciação.

Conteúdo

RESUMO	4
ABSTRACT	6
1 Introdução	9
1.1 Preliminares	9
1.2 Notação	10
1.3 Objetivos	12
2 Introdução Histórica	14
3 Estudo do problema proposto	26
3.1 Preliminares	26
3.2 Formalismo clássico	30
3.3 Formalismo relativístico	38
3.4 Formalismo Weberiano	51
3.5 Teoria de Weber modificada: Potencial de Phipps	74
4 Discussões e Conclusão	84
4.1 Discussões e Conclusão	84
4.2 Perspectivas	88
Apêndices	89
A Cálculo da energia potencial de uma partícula em um capacitor plano ideal utilizando o potencial de Weber e o potencial de Phipps	89
B As grandezas relacionais \vec{r}_i e \vec{r}_i , em função das grandezas vetoriais	100
C Derivação da lei de força de Ampère a partir da lei de força de Weber	102
D A lei de força de Weber e a conservação do momento linear, do momento angular e da energia	105
D.1 Conservação do momento linear	105
D.2 Conservação do momento angular	106
D.3 Conservação da energia	107
Bibliografia	109

RESUMO

O presente trabalho aplica o formalismo Weberiano ao estudo do movimento de uma carga em um capacitor plano ideal, utilizando a energia proposta por W. Weber em 1848. O objetivo é estudar a existência ou não de uma velocidade limite neste formalismo.

A situação estudada é a de uma carga movendo-se ortogonalmente às placas de um capacitor plano ideal, onde são desprezados os efeitos de borda e de radiação eletromagnética.

O primeiro caso estudado é o de uma energia potencial Coulombiana junto com a energia cinética clássica. Concluimos que não há velocidade limite neste caso, com a carga podendo atingir velocidades acima da velocidade da luz. Porém a velocidade só diverge para uma diferença de potencial infinita.

O segundo caso analisado é o de uma energia potencial Coulombiana junto com a energia cinética relativística. Concluimos que há uma velocidade limite neste caso, sendo que a carga nunca atinge uma velocidade maior do que a da luz, qualquer que seja o potencial entre as placas.

O terceiro caso pesquisado é o de uma energia potencial Weberiana junto com a energia cinética clássica. Encontramos que novamente não há uma velocidade limite, como no primeiro caso, só que agora a velocidade pode divergir mesmo numa região limitada de espaço devido a uma diferença de potencial finita e factível. No caso de um elétron a velocidade iria a infinito para uma diferença de potencial de 1MV. Além disto neste formalismo a carga sofreria uma força do capacitor mesmo quando está fora dele, desde que esteja sendo acelerada simultaneamente por algum agente externo. Ela se comportaria dentro e fora do capacitor como se tivesse uma massa inercial efetiva que depende do potencial eletrostático onde se encontra, havendo mesmo situações onde esta massa efetiva seria negativa.

Por último é analisado a energia potencial de Phipps junto com a energia cinética clássica. Encontramos que a carga atinge a velocidade da luz de maneira não assintótica para uma diferença de potencial finita, tal que além deste ponto ela passaria a ter uma velocidade complexa (imaginária). Isto indica uma limitação deste formalismo.

A conclusão geral é que a lei de Weber juntamente com a mecânica Newtoniana apresenta limitações quando aplicada a velocidades próximas da luz, devendo ser aplicada apenas em situações de baixa velocidade. Por outro lado os resultados experimentais estão de acordo com as previsões relativísticas para esta situação, mesmo para cargas se movendo a velocidades próximas à da luz.

ABSTRACT

This work applies Weber's formalism to study the motion of a charge in an ideal plane capacitor, utilizing Weber's energy presented in 1848. The goal is to study the existence of a limiting velocity in this formalism.

The situation analysed is that of a charge moving orthogonally to the plates of an ideal plane capacitor. We neglect electromagnetic radiation and edge effects.

The first case studied is that of Coulomb's potential energy plus the classical kinetic energy. We conclude that there is no limiting velocity here. The charge can attain velocities larger than that of light, but the velocity only goes to infinity for an infinite potential difference.

The second case analysed is that of a Coulombian potential energy plus the relativistic kinetic energy. We conclude that there is a limiting velocity here, and the charge cannot attain a velocity larger than that of light for any potential difference in the capacitor.

The third case studied is that of a Weberian potential energy plus the classical kinetic energy. We found once more that there is no limiting velocity here, as in the first situation, but now the velocity can go to infinity in a limited region of space due to a finite and feasible potential difference. For an electron the velocity goes to infinity with a potential difference of 1MV. Moreover in this formalism the charge would experience a force from the capacitor even when it is outside of the capacitor, provided the charge is simultaneously accelerated from another external source. The charge would behave inside and outside the capacitor as if it had an inertial effective mass which depends on the electrostatic potential where it is located. There would even be situations where this effective mass would be negative.

Lastly it is analysed Phipps' potential energy plus the classical kinetic energy. We found that the charge attains the light velocity, but not asymptotically, due to a finite potential difference, so that beyond this point it would have a complex velocity. This indicates a limitation of this formalism.

The general conclusion is that Weber's law together with Newton's mechanics presents limitations when applied to velocities near the light velocity.

and should be applied only to situations of low velocity. On the other hand the experimental results are in agreement with the relativistic predictions for this situation, even for charges moving near the light velocity.

ABREVIACOES

- T.E.M.: J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism,
3^a ed., New York, Dover, 1954, 2 vol.
- H.T.A.E.: Edmund T. Whittaker, A History of the Theories of Aether
and Electricity, 2^a ed., New York, Tomash Publishers,
1987, 2 vol., Em: The History of Modern Physics 1800–1950, vol.7.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preliminares

Neste trabalho apresentaremos um esboço do desenvolvimento histórico do eletromagnetismo, sua origem e seus desdobramentos posteriores, com ênfase nos trabalhos de André Marie Ampère (1775–1836), Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) e Hermann von Helmholtz (1821–1894). Esta ênfase deve-se ao fato que nosso objeto de estudo tem por base a força entre cargas elétricas pontuais proposta por W. Weber em 1846.

Os outros dois personagens, Ampère e Helmholtz, foram fonte de inspiração e crítico do trabalho de Weber, respectivamente. Com “fonte de inspiração” quero dizer que Weber utilizou o trabalho de Ampère sobre a força entre elementos de corrente como base para seu trabalho. Neste esboço histórico também abordaremos a retomada da força de Ampère, o que vem ocorrendo em especial nos últimos dez anos, e a crítica da lei de Biot–Savart.

Após este esboço histórico aplicaremos o formalismo clássico, relativístico e Weberiano do eletromagnetismo a uma situação importante: uma partícula com carga q e massa m movendo-se perpendicularmente às placas de um capacitor plano ideal, para em seguida analisarmos os resultados obtidos.

1.2 Notação

No decorrer deste estudo algumas grandezas vetoriais ou relacionadas com estas grandezas aparecerão e muitas com subíndices. Definiremos agora que o subíndice 1 *sempre* referir-se-á à partícula que é acelerada (carga de prova); o subíndice 2 *sempre* referir-se-á à placa do capacitor com uma densidade de cargas positivas e que será denominada "placa S_2 " e o subíndice 3 *sempre* referir-se-á à placa do capacitor com uma densidade de cargas negativas e que será denominada "placa S_3 ".

A posição, velocidade e aceleração da partícula e dos elementos de carga das placas em relação a um referencial inercial serão representadas por vetores nas formas \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i e \mathbf{a}_i , respectivamente; onde i igual a 1, 2 ou 3. Como veremos adiante, a lei de força obtida por Weber é relacional, ou seja, depende somente da distância, velocidade e aceleração entre as partículas interagentes. A distância relacional é dada pelo módulo da diferença entre dois vetores posição, ou seja, $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_{ij}|$, onde $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$; a velocidade relacional é dada por ¹

$$\dot{r}_{ij} \equiv \frac{dr_{ij}}{dt}, \quad (1.1)$$

e a aceleração relacional por

$$\ddot{r}_{ij} \equiv \frac{d^2 r_{ij}}{dt^2}. \quad (1.2)$$

As grandezas relacionais \dot{r}_{ij} e \ddot{r}_{ij} em algumas situações serão escritas como produtos escalares de grandezas não relacionais; e.g. \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_j e \mathbf{v}_{ij} (vide apêndice B):

$$\dot{r}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}} = \hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}, \quad (1.3)$$

onde $\hat{r}_{ij} \equiv \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$ e $\mathbf{v}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{ij}$.

¹Quando estivermos definindo alguma grandeza usaremos \equiv como símbolo de definição.

$$\ddot{r}_{ij} = \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} - (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2 + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij}}{r_{ij}}, \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{a}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{ij}$. As demais grandezas serão explicitadas no decorrer do trabalho.

1.3 Objetivos

Deve ser dito neste momento que esta tese é parte de um trabalho mais abrangente, que vai além dos objetivos deste mestrado. Nosso objetivo consiste no estudo do comportamento de uma partícula com carga q e massa m (nos exemplos numéricos esta partícula será sempre um elétron ou um pósitron) movendo-se perpendicularmente às placas de um capacitor plano ideal (com uma densidade de carga de sinais opostos, módulos iguais e distribuída homoganeamente) pelo formalismo Weberiano, e por uma modificação deste, para em seguida compararmos os dados obtidos com outros formalismos e resultados experimentais.

Como veremos adiante, no início da década de 80 tivemos uma retomada da força de Ampère entre elementos de corrente, que apesar de ser pouco estudada atualmente nunca foi refutada experimentalmente. Com isto houve também um renovado interesse na lei de Weber entre cargas pontuais, pois podemos deduzir a força de Ampère a partir dela (apêndice C). Além disto a lei de Weber satisfaz a conservação de energia, momento angular, momento linear e o princípio da ação e reação na forma forte (apêndice D), além de ser uma lei relacional.

A situação que vamos estudar encontra-se representada na figura 1.1.

onde: r_1 posição da partícula,

r_2 posição do elemento de carga dq_2 ,

r_3 posição do elemento de carga dq_3 ,

z_0 posição da placa com densidade de carga $+\sigma$,

$-z_0$ posição da placa com densidade de carga $-\sigma$.

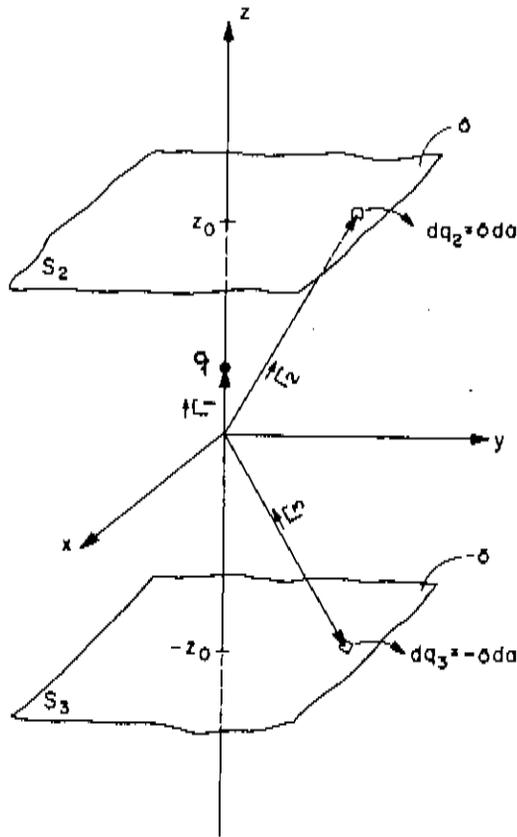


Figura 1.1: Capacitor plano com uma densidade de carga $\pm\sigma$ em suas placas, e uma partícula com carga q e massa m movendo-se perpendicularmente às placas.

Capítulo 2

Introdução Histórica

O eletromagnetismo como é conhecido hoje teve seu início na descoberta, em 1820, de Hans Christian Ørsted (1777–1851) que corrente elétrica gera campo magnético (ØRSTED, 1820). Entre nós existe a crença que esta descoberta foi obra do acaso. Uma leitura, mesmo que superficial, dos artigos de Ørsted e sobre seu trabalho revela-nos fatos interessantes:

1. A descoberta que corrente elétrica gera um campo magnético não foi acidental.
2. Ørsted estava inserido na corrente filosófica da “Naturphilosophie”. Esta corrente via o universo como um todo interagente, portanto nada mais natural que buscar uma origem comum para a luz, calor, eletricidade e talvez o magnetismo.
3. A unificação destas, digamos, manifestações da natureza não era tão descabida pois existiam alguns estudos e alguns relatos neste sentido, e.g., o trabalho de Benjamin Franklin e relatos de que objetos metálicos atingidos por raios apresentavam propriedades magnéticas.
4. O trabalho de Ørsted teve uma divulgação rápida e de grande repercussão no meio científico e vários cientistas iniciaram seus estudos nesta área de imediato e com isto houve um aprimoramento rápido dos resultados de Ørsted. Talvez esta seja uma das causas de subestimarmos o trabalho do cientista dinamarquês ¹.

¹Para maiores informações sobre Ørsted e suas idéias ler (MARTINS, 1986) e o livro de FRANKSEN.

A unificação da eletricidade com o magnetismo era um fato mais ou menos esperado pela comunidade científica da época e quando esta unificação ocorreu um grupo de cientistas tiveram dificuldade em aceitá-la. Este fato deveu-se à simetria apresentada pelo problema (para uma discussão aprofundada deste ponto ver (MARTINS, 1988)). Houve várias tentativas no sentido de buscar uma outra solução. Há, por exemplo, a de Jakob Berzelius (1779–1848) que propôs a seguinte explicação: a corrente ao passar pelo condutor criaria quatro polos magnéticos e o campo gerado por estes pólos apresentariam o aspecto de uma flor de quatro pétalas (vide figura 2.1). Este modelo explicaria somente em parte a simetria apresentada pelo campo magnético de um fio percorrido por uma corrente elétrica.

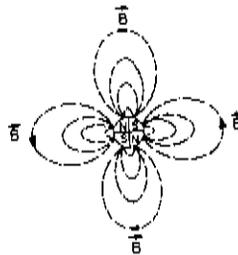


Figura 2.1: Modelo proposto por Berzelius para o campo magnético ao redor de um fio (figura extraída de (MARTINS, 1986)).

A maior repercussão da descoberta deu-se na França e sua divulgação teve início com a publicação do trabalho de Ørsted nos *Annales de Chimie et Physique* e da comunicação, em 04/09/1820, da descoberta à Academia de Ciências de Paris por Francois Jean Arago (1786–1853).

Neste período, final do século XVIII e início do XIX, a física na França estava sofrendo grandes alterações devido a influência de Pierre Simon de Laplace (1749–1827) e Claude Louis Berthollet (1748–1822). O projeto dos físicos Laplacianos (Poisson, Biot, Malus, Gay-Lussac, etc) era levar a matematização existente na dinâmica, estática, hidrostática, hidrodinâmica e mecânica celeste à física dita experimental onde tínhamos um tratamento qualitativo dos fenômenos envolvidos como, por exemplo, o estudo do calor, eletricidade, magnetismo e da luz.

Os eventos que prenunciaram o início da matematização e quantificação das ciências físicas foram os estudos de Laplace e Lavoisier sobre o calor, que foram publicados em uma memória intitulada 'Mémoire sur la chaleur' (LAVOISIER e LAPLACE, 1783) e os trabalhos de Coulomb sobre eletricidade e magnetismo (COULOMB, 1785).

Escrever sobre a física Laplaciana seria estender-se por demais para uma breve introdução. Por isso para os interessados indicamos algumas referências para os que quiserem maiores informações. Para uma visão da física Laplaciana como um todo ler (FOX, 1975), para um exemplo de matematização da óptica temos o trabalho de Etienne Louis Malus sobre a dupla refração (MALUS, 1811) e para uma visão mais abrangente que conduziu Malus a este trabalho ler (FRANKEL, 1974). Biot foi o discípulo mais próximo de Laplace e um representante característico dos Laplacianos, sobre ele ler (FRANKEL, 1977). Sobre a influência de Newton sobre este período ler (ABRANTES, 1989).

Como foi dito anteriormente, o trabalho de Ørsted teve grande repercussão. Laplacianos e anti-Laplacianos — possivelmente Ampère era anti-Laplaciano, a este respeito ler (CANEVA, 1980) — se dedicaram ao assunto. Para ter-se idéia deste fato faremos uma pequena cronologia dos acontecimentos:

- abril/1820: Ørsted faz sua descoberta.
- 19/08/1820: Arago assiste a uma repetição do experimento de Ørsted realizado por Auguste la Rive em Genebra .
- 04/09/1820: Arago comunica à Academia de Ciências de Paris a descoberta de Ørsted .
- 18/09/1820: Ampère apresenta uma memória em que descreve um aparelho que mede corrente elétrica a partir de efeitos eletromagnéticos.
- 25/09/1820: Ampère apresenta um trabalho sobre a interação entre duas correntes.
- 25/09/1820: Arago descreve seus experimentos em que um fio atua como imã sobre as limalhas de ferro.
- 16/10/1820: Arago mostra que podemos imantar agulhas a partir de solenóides .
- 30/10/1820: Biot e Savart comunicam que mediram a intensidade de um campo magnético de uma corrente, dado pela equação 2.1 (em notação moderna).

$$d\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2 d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (2.1)$$

Este é o campo magnético no ponto \mathbf{r}_1 devido ao elemento de corrente $I_2 d\mathbf{s}_2$ localizado em \mathbf{r}_2 . Temos $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Entre a comunicação de Arago em 19/08/1820 e o trabalho de Biot e Savart transcorrem aproximadamente 40 dias. Em um tempo extremamente curto as idéias evoluíram de um resultado qualitativo para um resultado quantitativo.

Mas a primeira lei de força entre elementos de corrente foi dada por Ampère em sua versão final em 1823 (AMPÈRE, 1827). Ela é dada por :

$$d\mathbf{F}_{21}^A = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} (2d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 - \frac{3}{r^2} (d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})). \quad (2.2)$$

Esta é a força exercida pelo elemento $I_2 d\mathbf{l}_2$ no elemento $I_1 d\mathbf{l}_1$. Mas a lei de força entre elementos de corrente que utilizamos atualmente foi proposta por H. Grassmann (GRASSMANN, 1845) em 1845 a partir do trabalho de Biot e Savart. Em notação moderna temos que a força de $I_2 d\mathbf{l}_2$ em $I_1 d\mathbf{l}_1$ por Grassmann é

$$d\mathbf{F}_{21}^G = I_1 d\mathbf{s}_1 \times d\mathbf{B}_2, \quad (2.3)$$

onde $d\mathbf{B}_2$ é dado por 2.1.

As duas leis quando integradas sobre circuitos fechados conduzem a um mesmo resultado (TRICKER, 1965, pp. 55-58). Mas estas leis têm como base pressupostos diferentes. A base da lei de Grassmann é o experimento de Biot-Savart e para eles a corrente elétrica ao passar pelo condutor cria uma disposição complexa de pólos magnéticos e estes pólos agiriam sobre outros pólos magnéticos. Para Ampère existe somente uma interação entre correntes elétricas. Assim ele supõe que um imã tenha uma corrente superficial similar a um solenóide.

A diferença crucial entre estas duas abordagens é que na visão de Grassmann a força não satisfaz o princípio da ação e reação para elementos de

corrente. Na visão de Ampère este é um princípio básico e a sua lei satisfaz este princípio e na forma forte.

Após este impulso inicial de 1820 a 1823 a eletrodinâmica entrou em um período de pouca fertilidade na opinião de W. Weber pois nenhum princípio básico foi obtido a partir da lei de Ampère, como ocorreu com a lei de Kepler, pois esta foi corroborada por um princípio fundamental, ou seja a lei da gravitação de Newton.

Os avanços ocorridos após o trabalho de Ampère, por exemplo, a lei de indução de Faraday, foram obtidos independentemente da teoria de Ampère. Assim Weber se propõe colocar a eletrodinâmica em uma base similar a gravitação, ou seja, buscar uma lei fundamental. Para isto Weber toma como base a força entre elementos de correntes dada pela equação 2.2 e a hipótese de Fechner (FECHNER, 1845).

Esta diz que a corrente elétrica em metais é devido a quantidades iguais de cargas positivas e negativas se moverem no fio com velocidades de igual magnitude mas com sentidos opostos. Hoje sabemos que isto não é verdade já que em geral apenas os elétrons se movem. Para a dedução da lei de Weber ver (WEBER, 1848) ou (T. E. M., arts. 846–851) e para uma dedução às avessas, ou seja, a partir da lei de Weber obtermos a lei de força de Ampère, ver o Apêndice C.

Deve ser ressaltado que se assumimos a força de Weber então podemos derivar a força de Ampère, equação 2.2, mesmo quando apenas os elétrons são responsáveis pela corrente. Ou seja, não é necessária a hipótese de Fechner como Weber utilizou, mas apenas a neutralidade das correntes.

No artigo de 1848 Weber chega à seguinte lei de força (em notação moderna) que a carga q_j exerce na q_i :

$$\mathbf{F}_{ji} = K \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} (r_{ij} \ddot{r}_{ij} - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2}) \right\}, \quad (2.4)$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{ji} = K \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2 + r_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij}] \right\}, \quad (2.5)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r}_{1,2} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, & r_{1,2} \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \\ \hat{\mathbf{r}}_{1,2} \equiv \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}}, & \\ \dot{\mathbf{r}}_{1,2} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{1,2}, & \ddot{\mathbf{r}}_{1,2} \equiv \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{1,2}, \\ \mathbf{v}_{1,2} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, & \mathbf{a}_{1,2} \equiv \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \\ c & = 2 \cdot 998 \times 10^8 \text{ms}^{-1}, \\ K & \equiv \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Esta força, equação 2.4, pode ser derivada de uma energia potencial generalizada dada por

$$U = \frac{K}{r_{1,2}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{1,2}^2}{2c^2} \right). \quad (2.7)$$

A equação 2.4 apresenta as seguintes propriedades:

1. É uma lei de força relacional, ou seja, depende somente das distâncias, velocidades e acelerações entre as partículas envolvidas.
2. Satisfaz o princípio da ação e reação na forma forte: a força sempre está na linha que liga as cargas interagentes.
3. Pode ser derivada de uma energia potencial (equação 2.7).
4. Satisfaz os princípios de conservação (momento linear, momento angular e energia), ver apêndice D.

Um resultado importante que podemos derivar com a força de Weber é a lei de indução de Faraday. Esta dedução pode ser encontrada nos livros (T. E. M., art. 855) e (H. T. A. E., p. 204) e nos artigos (WESLEY, 1987 e 1990 b, c). Uma das propriedades da lei de Weber é a conservação de energia, que não foi mostrada no artigo de 1848, e só veio a ser provada em um artigo em

1871 (WEBER, 1871). Neste intervalo de 1848 a 1871 uma série de críticas foram feitas à lei de Weber, especialmente por Hermann von Helmholtz.

A base da crítica de Helmholtz era seu artigo "Sobre a Conservação da Energia" onde provou que uma força dependente da posição e velocidade da partícula não deveria conservar a energia. Mas esta crítica não procede no caso da força de Weber pois esta é mais geral e depende também da aceleração.

Os trabalhos de Helmholtz em física de alguma forma estão relacionados com a fisiologia, não devemos esquecer que ele era médico ². Por exemplo, seu artigo "Sobre a Conservação da Energia" tem início em seu interesse no estudo do calor animal. Seu trabalho sobre eletrodinâmica surgiu do interesse na propagação de impulsos nervosos. Este estudo dependia de como a corrente fluía em condutores extensos e as teorias existentes na época conduziam a resultados contraditórios. Helmholtz, diante destes dados, inicia um estudo das teorias existentes: teoria dos potenciais de Neumann, teoria de Weber e a teoria de Maxwell, a fim de investigar qual era a correta. Seu estudo teórico mostrou problemas em relação à teoria de Weber pois esta conduzia a situações de instabilidade.

Os resultados destas investigações foram publicadas em uma série de artigos intitulados "Sobre a Teoria Eletrodinâmica". As críticas iniciais à teoria de Weber estão nos artigos de 1870 e 1872 (vide bibliografia). No artigo de 1872 Helmholtz sintetiza seus objetivos, resultados e perspectivas para novos estudos e cujo trecho transcrevemos:

O plano de minha memória [a de 1870] era principalmente pesquisar aquelas diferenças [entre as teorias de F. Neumann, W. Weber e J. C. Maxwell no que diz respeito à energia potencial entre elementos de corrente] ³ que fossem suscetíveis à experimentos práticos.

Deve ser esclarecido aqui que as várias expressões do potencial que formei diferem uma da outra por somente uma constante (em minha memória de 1870 denominada por K). Obtemos a expressão de Neumann se colocamos $K=1$, a de Maxwell se $K=0$, e a de Weber se $K=-1$. O estudo mostrou que as expressões com K negativo conduzem a consequências impossíveis, isto é,

²Uma boa biografia de Helmholtz é a de KOENIGSBERGER

³Helmholtz rejeitava a hipótese de Ampère que a interação entre elementos de corrente se restringe a uma força dirigida no sentido da reta que une os elementos de corrente.

a um equilíbrio instável da electricidade nos condutores que, uma vez perturbado, poderia dar origem a uma intensidade de corrente infinitamente grande e a cargas ilimitadas. Por outro lado as expressões com K positivo, ou com $K=0$, dão um equilíbrio estável, e, mesmo para correntes abertas dão diferenças que são difíceis de detectar com nossos meios experimentais atuais; de maneira que o que é ainda uma ambiguidade na concepção matemática da lei, a saber o valor da constante K , parece não ter efeito na aplicação dela nos experimentos (HELMHOLTZ, 1872, p. 531).

É neste artigo de 1872 que se encontra uma crítica à lei de força de Weber que discutiremos em seguida. Além disto nestes artigos Helmholtz ajudou a tornar a teoria de Maxwell conhecida e acessível aos físicos do continente europeu.

O argumento de Helmholtz contra a lei de força de Weber é o seguinte: Tomemos uma casca esférica de raio a não condutora, fixa, com uma densidade de carga σ homogeneamente distribuída, com uma partícula de carga q e massa m em seu interior (vide figura 2.2).

A energia potencial dentro da casca esférica obtida a partir da equação 2.7 é

$$U = \frac{a\sigma q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right), \quad (2.8)$$

e a energia total é dada quando somamos a energia cinética da partícula ($E=const$):

$$E = \frac{a\sigma q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right) + \frac{mv^2}{2}. \quad (2.9)$$

Repare que a energia não depende da posição da partícula no interior da casca esférica. A equação 2.9 pode ser escrita na forma

$$E = \frac{a\sigma q}{\epsilon_0} + \left(m - \frac{a\sigma q}{3\epsilon_0 c^2}\right) \frac{v^2}{2}. \quad (2.10)$$

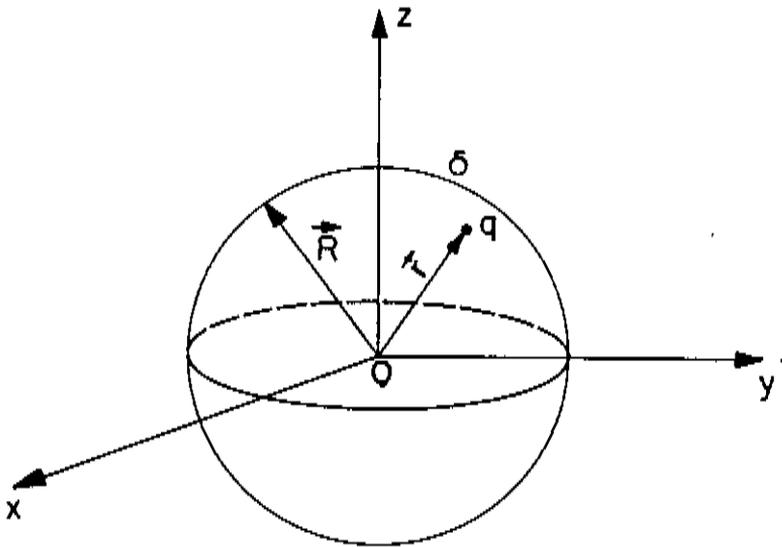


Figura 2.2: Casca esférica com uma densidade de cargas σ homogeneamente distribuída, com uma partícula de massa m e carga q em seu interior ($r < R$).

Se aumentarmos o valor de a até tornarmos o coeficiente de v^2 negativo ou muito próximo de zero podemos aumentar a velocidade da partícula indefinidamente quando uma pequena força está presente. Este efeito nunca foi observado.

Além desta crítica de Helmholtz outros fatores contribuíram para o esquecimento da lei de Weber: O sucesso da teoria de Maxwell em explicar o experimento de Hertz (ondas eletromagnéticas) e a dificuldade da teoria de Weber em fazê-lo pois esta é uma lei de ação-a-distância; o trabalho de Lorentz em eletromagnetismo e logo a seguir o sucesso da relatividade restrita (baseada no conjunto das equações de Maxwell mais a força de Lorentz).

Como foi dito anteriormente, a lei de força entre elementos de corrente que atualmente utilizamos foi proposta por Grassmann e teve como base o trabalho de Biot e Savart. Por isso em muitos livros textos a força dada pela equação 2.3 é denominada incorretamente de lei de Biot e Savart, em outros, força de Lorentz e chegando ao extremo de ser denominada de lei de Ampère (não confundir com a circuital). Este estado de confusão, ou melhor imprecisão histórica, começou a ser revista no início da década de 80 em uma série de artigos de P. Graneau, P. T. Pappas e outros onde, por meio de experimentos, obtêm novos resultados e questionam a validade da equação 2.3.

Os experimentos atualmente envolvem circuitos únicos pois, como dissemos, quando dois circuitos fechados estão envolvidos as duas leis conduzem às mesmas previsões. O resultado de que a força de um circuito sobre um elemento é a mesma por Ampère e por Grassmann é válida desde que o circuito seja fechado e o elemento de corrente que sofre a força não pertença a este mesmo circuito (TRICKER, 1965, pp: 55-58). Caso o elemento faça parte do circuito este resultado pode não ser mais válido. Para esclarecermos em que pontos as duas leis são diferentes, atentem para as situações mostradas na figura 2.3. As duas leis conduzem a resultados diferentes:

Para a situação (A) da figura 2.3, a lei de Grassmann prevê uma força de (no MKS)

$$d\mathbf{F}_{21}^G = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} dl_1 dl_2 \text{ e } d\mathbf{F}_{12}^G = 0, \quad (2.11)$$

e a lei de Ampère prevê uma força de

$$d\mathbf{F}_{21}^A = d\mathbf{F}_{12}^A = 0. \quad (2.12)$$

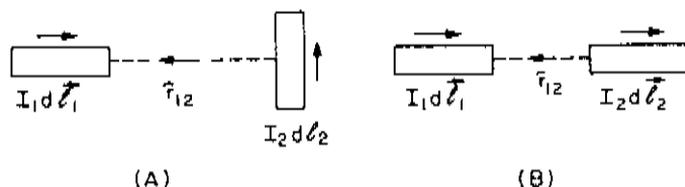


Figura 2.3: Elementos de corrente.

Para a situação (B) da figura 2.3 a lei de Grassmann prevê uma força de

$$d\mathbf{F}_{21}^G = d\mathbf{F}_{12}^G = 0, \quad (2.13)$$

e a lei de Ampère prevê uma força de

$$d\mathbf{F}_{21}^A = -d\mathbf{F}_{12}^A = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}. \quad (2.14)$$

É baseado na situação (B) da figura 2.3 que têm sido realizados experimentos de circuito único para tentar distinguir as forças de Ampère e de Grassmann. Esta repulsão entre elementos de corrente colineares prevista por Ampère mas não por Grassmann sugere que um fio com corrente pode estar tracionado (tração de Ampère). Esta pode ser a explicação para muitos fenômenos observados (ruptura de fios, aceleração eletromagnética de projéteis, pêndulos de impulso eletromagnético, etc). Só tem se conseguido encontrar uma explicação quantitativa para estes experimentos baseado na força de Ampère, mas não na de Grassmann. Se bem que deve ser ressaltado que esta ainda é uma questão em aberto e novos resultados experimentais e

teóricos têm sido publicados continuamente questionando posições anteriores (ver. por exemplo, os artigos de Moyssides).

Para uma discussão mais aprofundada consultar os trabalhos de P. Graneau, P. T. Pappas, P. G. Moyssides e T. E. Phipps (vide bibliografia) e para uma visão geral dos experimentos realizados consultar (ASSIS, 1990).

Junto com estes trabalhos experimentais recentes de revisão das leis de Ampère e Grassmann temos a redescoberta da lei de Weber (lembramos que com Weber chegamos à força de Ampère, mas não à de Grassmann).

Esta redescoberta tem levado a novos resultados e a novos modelos. Temos por exemplo a aplicação de uma lei de Weber à gravitação fornecendo a precessão do periélio dos planetas, um modelo para a implementação do princípio de Mach e da derivação do princípio de equivalência (proporcionalidade das massas inerciais e gravitacionais), etc: (TREDER, 1972), (TREDER, von BORZESZKOWSKI, van der MERWE e YOURGRAU, 1980), (EBY, 1977), (SOKOL'SKII e SADOVNIKOV, 1987), (ASSIS, 1989 a), (WESLEY, 1990 a, d), (GRANEAU, 1990 a, b, c). Temos a introdução do tempo retardado na lei de Weber para com isto obter os efeitos de radiação eletromagnética e então superar a limitação da lei de Weber ser uma teoria de ação à distância: (MOON e SPENCER, 1954 a, b, c), (WESLEY, 1987), (WESLEY, 1990 a, b, c, d). Temos uma comparação sugestiva entre a força de Weber e as forças nucleares (PEARSON e KILAMBI, 1974). E temos ainda propostas de acrescentar termos de ordens superiores em v/c à energia e força de Weber para com isto superar as críticas de Helmholtz (PHIPPS, 1990 a).

É dentro desta retomada recente da lei de Weber que se encaixa esta tese. Estudaremos esta lei com o objetivo de delimitar suas regiões de validade.

Capítulo 3

Estudo do problema proposto

3.1 Preliminares

Foi dito anteriormente que um dos objetivos é comparar os resultados obtidos nos cálculos com resultados experimentais e um aspecto particularmente interessante é a existência de uma velocidade limite (BERTOZZI, 1964).

Em um artigo recente A. K. T. Assis e R. A. Clemente (ASSIS e CLEMENTE, 1991) mostraram que duas partículas carregadas interagindo entre si tendem a uma velocidade limite $\sqrt{2}c$ de acordo com a lei de Weber. Deve ser ressaltado que esta velocidade limite ocorre para \dot{r}_{ij} , mas nunca simultaneamente para \dot{r}_{ij} , v_i e v_i como na relatividade restrita.

A energia potencial de Weber é dada por

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2}\right). \quad (3.1)$$

Será que ao modificarmos este potencial obteremos uma velocidade limite condizente com os dados experimentais?

T. E. Phipps no artigo "Toward Modernization of Weber's Force Law" (PHIPPS, 1990 a) propõe a seguinte modificação para a equação 3.1:

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Repare que quando expandimos a equação 3.2 em série de potência obtemos

como primeira aproximação a energia potencial Coulombiana

$$U_{1,2} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}}, \quad (3.3)$$

e em segunda aproximação o potencial Weberiano dado pela equação 3.1.

Uma generalização do potencial 3.1 também foi proposta por A. K. T. Assis e R. A. Clemente (ASSIS e CLEMENTE, 1991) dada por

$$U_{1,2} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}} \left(1 - \frac{1}{2\beta} \frac{\dot{r}_{1,2}^2}{c^2}\right)^\beta, \quad (3.4)$$

para $\beta \neq 0$. Assim quando $\beta = 1$ temos o potencial Weberiano e para $\beta = 1/2$ temos o potencial de Phipps. Quando o potencial dado pela equação 3.4 foi utilizado (ASSIS e CLEMENTE, 1991) para o cálculo da velocidade limite de duas partículas carregadas interagindo uma com a outra foi obtido o seguinte resultado para a velocidade limite: $\dot{r}_{12} = \sqrt{2\beta}c$ e $|v_1| = |v_2| = \sqrt{2\beta}c/2$. Então para $\beta = 1$ temos que $\dot{r}_{12} = \sqrt{2}c$ e $|v_1| = |v_2| = \sqrt{2}c/2$, como foi dito anteriormente. Para $\beta = 1/2$ temos que $\dot{r}_{12} = c$ e $|v_1| = |v_2| = c/2$. Deve ser notado que para $\beta = 2$ temos $\dot{r}_{12} = 2c$ e $|v_1| = |v_2| = c$. Para todos os casos apresentados acima os valores limites de \dot{r}_{12} e $|v_1| = |v_2|$ são diferentes, o que não ocorre na relatividade restrita.

Aqui vamos nos restringir ao caso em que $\beta = 1$ (potencial Weberiano) e $\beta = 1/2$ (potencial de Phipps). Deve ser ressaltado que o trabalho de Assis e Clemente envolve *duas partículas interagentes* movendo-se radialmente sem a presença de campos externos, enquanto em nosso trabalho temos *uma única partícula interagindo com as placas de um capacitor*.

Antes de iniciarmos os cálculos gostaríamos de fazer algumas considerações sobre a configuração do problema (figura 3.1).

Uma partícula de massa m e carga q com velocidade inicial v_a (velocidade antes de entrar no capacitor) incide perpendicularmente à placa negativa do capacitor pela abertura A e é acelerada (se for carga negativa) e desacelerada (se for carga positiva) devido à diferença de potencial entre as placas, adquirindo uma velocidade v_i (velocidade no interior do capacitor) e saindo ou não por uma abertura B com uma velocidade v_d (velocidade depois). *Sempre*, neste trabalho, as partículas incidirão da esquerda para a direita (ver figura 3.1). Um estudo do movimento da partícula no sentido paralelo às placas foi feito no artigo (ASSIS, 1989 b) e uma reinterpretação dos resultados obtidos

pode ser encontrado em (WESLEY, 1990 a) e (ASSIS e CALUZI, 1991). Neste último trabalho se encontram também os principais resultados desta tese.

Temos duas abordagens para nosso problema: Calculamos a força sobre a partícula e depois resolvemos a equação diferencial; ou então obtemos a equação da energia e a partir dela fazemos nossa análise. Optamos pela segunda abordagem (vide apêndice A).

Neste trabalho não levaremos em conta a radiação emitida pela partícula acelerada, a redistribuição de cargas no capacitor devido à força que a partícula exerce sobre elas, a perda de energia da partícula devido às correntes induzidas no capacitor, os efeitos de borda (os buracos pelos quais a partícula entra e sai do capacitor com a conseqüente distorção que eles geram no campo elétrico em suas proximidades) e o fato de todo capacitor ou acelerador real ter dimensões finitas. Em resumo não consideraremos nenhum tipo de perda de energia.

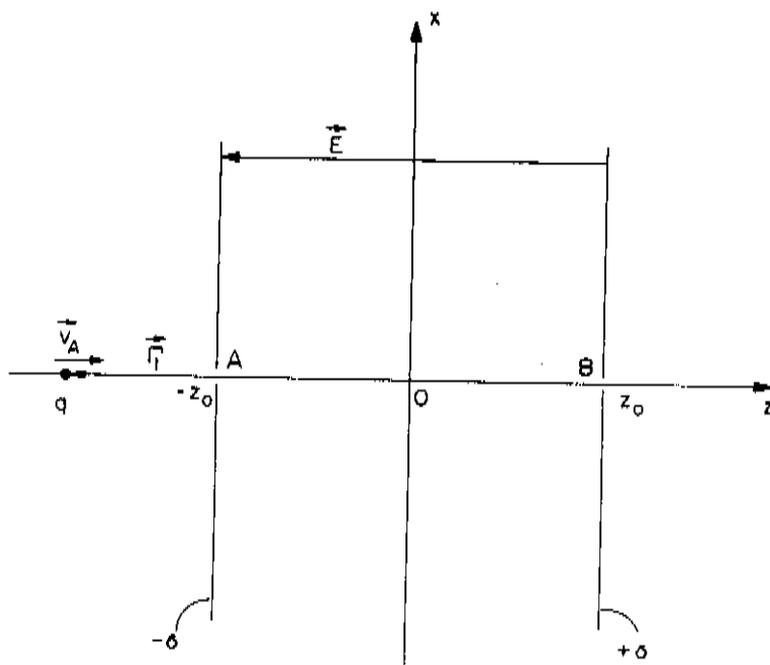


Figura 3.1: Configuração do problema estudado. Partícula de massa m e carga q entrando em um capacitor plano ideal pela abertura A e saindo pela abertura B .

3.2 Formalismo clássico

Neste caso a energia da partícula é dada por

$$E_T^C = U_P^C + E_K^C, \quad (3.5)$$

onde: E_T^C é a energia total clássica,

U_P^C é a energia potencial Coulombiana,

E_K^C é a energia cinética clássica.

Das equações A.31, A.32 e A.33 (apêndice A) temos a energia potencial Coulombiana e a energia cinética clássica é dada por:

$$E_K^C = \frac{mv_z^2}{2}, \quad (3.6)$$

onde m é a massa da partícula e v_z sua velocidade (a componente da velocidade será, neste trabalho, sempre na direção z portanto daqui para frente omitiremos o subíndice z das equações). Assim a energia total é dada por

$$E_T^C(z_1 \leq -z_o) = -\frac{q\sigma z_o}{\epsilon_o} + \frac{mv_a^2}{2} + \mathcal{K}, \quad (3.7)$$

$$E_T^C(-z_o \leq z_1 \leq z_o) = \frac{q\sigma z_1}{\epsilon_o} + \frac{mv_i^2}{2} + \mathcal{K}, \quad (3.8)$$

$$E_T^C(z_o \leq z_1) = \frac{q\sigma z_o}{\epsilon_o} + \frac{mv_d^2}{2} + \mathcal{K}, \quad (3.9)$$

onde: q é a carga da partícula;
 σ densidade de carga na placa positiva;
 z_1 posição da partícula;
 ϵ_0 permissividade do vácuo ($\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F/m$);
 v_a velocidade da partícula na entrada do capacitor;
 v_i velocidade da partícula no interior do capacitor;
 v_d velocidade da partícula na saída do capacitor;
 K é uma constante arbitrária.

Para fins de cálculo temos que atribuir valores numéricos a z_1 quando este se encontrar no intervalo $-z_0 \leq z_1 \leq z_0$. Vamos escrever z_1 na forma

$$z_1 = az_0, \quad (3.10)$$

onde a é um parâmetro adimensional entre -1 e 1. Assim quando $a = 1$ teremos $z_1 = z_0$, se $a = 0,5$ teremos $z_1 = z_0/2$, etc. Outro parâmetro presente nas equações 3.7, 3.8 e 3.9 é a densidade de carga que pode ser escrita na forma

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \quad (3.11)$$

onde: Q é a carga total na placa positiva.
 A é a área da placa.

Temos ainda que

$$Q = \frac{\epsilon_0 A \Delta\varphi}{2z_0}, \quad (3.12)$$

onde: $\Delta\varphi$ é a diferença de potencial entre as placas ($\Delta\varphi \geq 0$).

Substituindo 3.12 em 3.11:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \Delta\varphi}{2z_0}. \quad (3.13)$$

Deve ser notado que as grandezas aqui introduzidas não dependem do formalismo utilizado, pois estas são características do capacitor.

Substituindo a equação 3.13 nas equações 3.7, 3.8 e 3.9, e fazendo $K = 0$ temos

$$E_T^C(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{mv_a^2}{2}, \quad (3.14)$$

$$E_T^C(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = \frac{q\Delta\varphi}{2} \frac{z_1}{z_0} + \frac{mv_i^2}{2}, \quad (3.15)$$

$$E_T^C(z_0 \leq z_1) = \frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{mv_d^2}{2}. \quad (3.16)$$

Estamos interessados na velocidade da partícula ao sair do capacitor, dentro do capacitor e no quadrado da velocidade da partícula em função da energia cinética que a partícula ganha ao atravessar o capacitor.

Isto nos mostrará explicitamente a existência ou não de uma velocidade limite. Sabemos que a energia se conserva no caso clássico e então podemos dizer que a energia total antes da carga entrar no capacitor é igual à energia depois que ela o atravessa. Utilizando as equações 3.14 e 3.16 podemos escrever que

$$-\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{mv_a^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{mv_d^2}{2}. \quad (3.17)$$

Definindo

$$m_\omega \equiv \frac{q\Delta\varphi}{2c^2}, \quad (3.18)$$

a equação 3.17 pode ser escrita como

$$\frac{v_d}{c} = \sqrt{\frac{v_a^2}{c^2} - 4 \frac{m_\omega}{m}}. \quad (3.19)$$

Pela definição 3.18 temos duas situações possíveis: $q > 0$ e $m_\omega > 0$; ou $q < 0$ e $m_\omega < 0$. Isto deve ser levado em consideração na equação 3.19, pois estamos interessados em soluções reais para 3.19. Então quando $m_\omega > 0$ (neste caso estamos trabalhando com partículas de carga positiva) a equação 3.19 tem soluções reais para

$$\frac{m_\omega}{m} \leq \frac{v_a^2}{4c^2}. \quad (3.20)$$

Se fizermos $m_\omega/m > v_a^2/4c^2$ obteremos um valor imaginário para v_d e isto indica que a partícula retornou antes de atingir a abertura B (figura 3.1), como veremos mais adiante. Para $m_\omega < 0$ (neste caso estamos trabalhando com partículas negativas) sempre teremos soluções reais.

Utilizando as equações 3.14 e 3.15 podemos escrever que

$$\frac{v_i}{c} = \sqrt{\frac{v_a^2}{c^2} - 2 \frac{m_\omega}{m} (1+a)}. \quad (3.21)$$

Aqui também temos que impor condições sobre m_ω/m quando $m_\omega \geq 0$ (pois para $m_\omega < 0$ sempre há soluções reais para v_i), que é dada por (para que haja soluções reais para v_i):

$$\frac{m_\omega}{m} \leq \frac{1}{2(1+a)} \frac{v_a^2}{c^2}, \text{ para } a \neq -1. \quad (3.22)$$

Como $-1 \leq a \leq 1$ esta condição sobre m_ω/m inclui a dada pela inequação 3.20, bastando para isto colocar $a = +1$ em 3.22

Vamos agora estudar esta equação em alguns casos particulares. Pela figura 3.2, vemos que uma partícula com carga positiva; e.g. um pósitron, entra no capacitor com uma velocidade $v_a/c = 0.1$ e sai com uma velocidade v_d/c . Esta velocidade v_d/c depende da diferença de potencial entre as placas. Assim

quando a diferença de potencial é $\Delta\varphi = 2000\text{V}$ a partícula entra com uma velocidade $v_a/c = 0.1$. é desacelerada e sai com uma velocidade $v_d/c = 0.045$. Para uma diferença de potencial $\Delta\varphi = 3000\text{V}$ a partícula é desacelerada, atinge a velocidade $v_i/c \approx 0$ em $a = 0.66$, sendo então acelerada novamente no sentido da placa negativa.

A figura 3.3 mostra que uma partícula com carga negativa; e.g. um elétron, entra no capacitor com uma velocidade $v_a/c = 0.1$ e sai com uma velocidade de v_d/c . Como no caso anterior v_d/c também depende da diferença de potencial, mas com uma alteração: a partícula é continuamente acelerada (antes ela era continuamente desacelerada). Com uma velocidade inicial pequena ($v_a/c = 0.1$) e uma diferença de potencial não muito elevada ($\Delta\varphi = 0.3 \text{ MV}$) conseguimos velocidades acima da velocidade da luz. Como sabemos, isto nunca foi observado experimentalmente.

Para o caso clássico falta-nos analisar o comportamento do quadrado da velocidade em função da diferença de potencial do capacitor ($\Delta\varphi$). Da equação 3.17 temos

$$\frac{v_d^2}{c^2} = \frac{v_a^2}{c^2} - 2\frac{q\Delta\varphi}{mc^2}. \quad (3.23)$$

Podemos ver pela figura 3.4 que não existe uma velocidade limite para o caso clássico no caso de uma partícula de carga negativa já que v_d^2 cresce linearmente com o aumento da diferença de potencial.

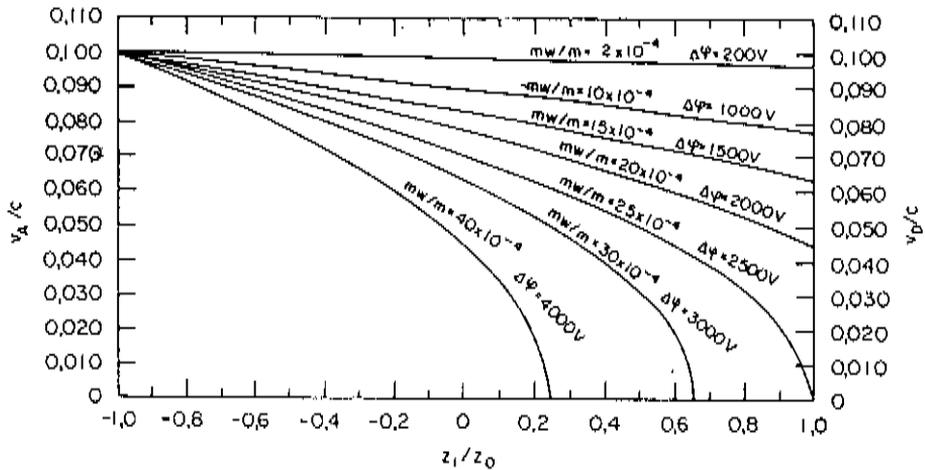


Figura 3.2: Uma partícula positiva (pósitron) entra no capacitor em A com $v_a = 0.1c$ sendo desacelerada. O gráfico indica a velocidade de saída v_d ou o local de retorno para várias $\Delta\varphi$.

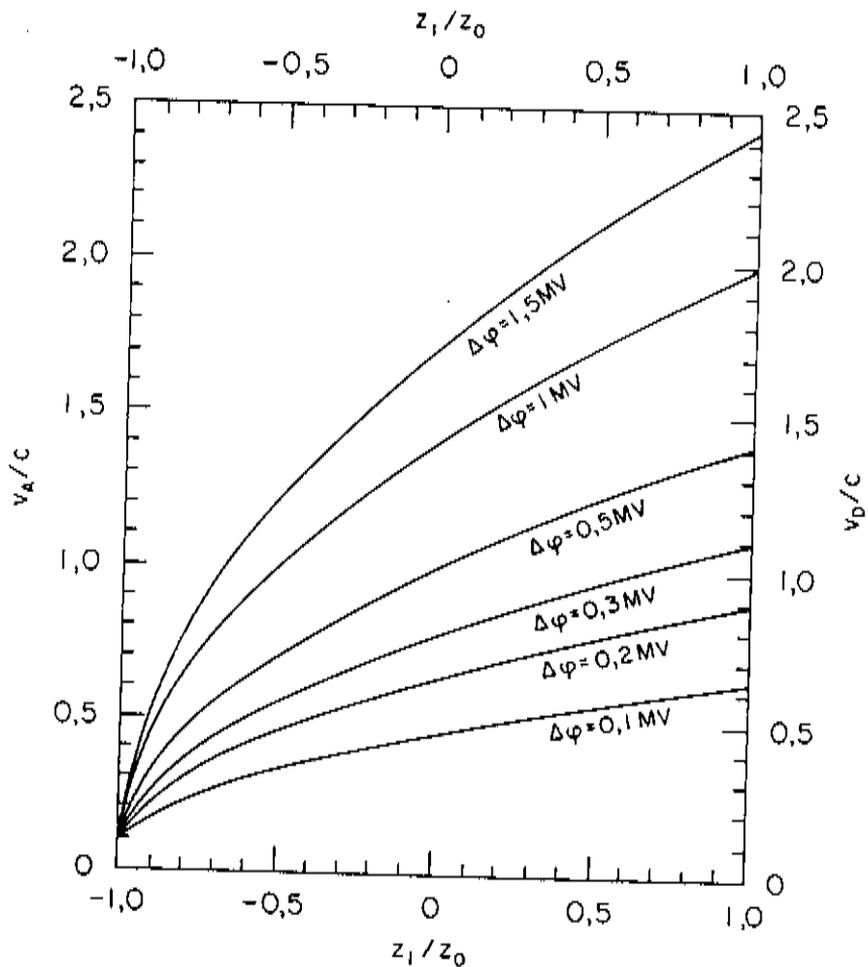


Figura 3.3: Partícula negativa (elétron) entra no capacitor em A com $v_a = 0.1c$ sendo acelerada. O gráfico indica a velocidade de saída v_d para várias $\Delta\varphi$.

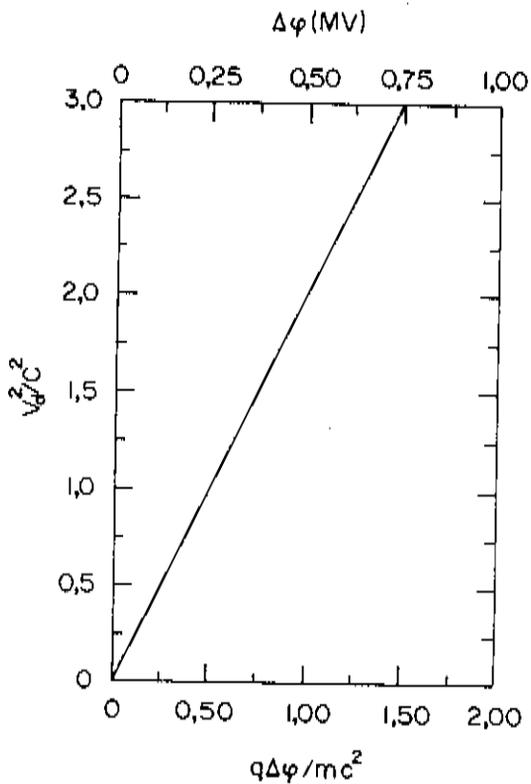


Figura 3.4: Quadrado da velocidade como função da diferença de potencial entre as placas (caso de um elétron com $v_a = 0$).

3.3 Formalismo relativístico

A energia da partícula é dada por

$$E_T^R = U_P^C + E_K^R, \quad (3.24)$$

onde: E_T^R é a energia total relativística,
 U_P^C é a energia potencial Coulombiana,
 E_K^R é a energia cinética relativística.

Das equações A.31, A.32 e A.33 temos a energia potencial Coulombiana. A energia cinética é dada por:

$$E_K^R = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2, \quad (3.25)$$

onde: m_0 é a massa de repouso da partícula.
 v a velocidade da partícula em relação a um referencial inercial.

Assim a energia total é dada por, adicionando a constante arbitrária K e utilizando a equação 3.13

$$E_T^R(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 + K, \quad (3.26)$$

$$E_T^R(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = \frac{q\Delta\varphi}{2} \frac{z_1}{z_0} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 + K, \quad (3.27)$$

$$E_T^R(z_0 \leq z_1) = \frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}}} - m_0c^2 + K. \quad (3.28)$$

Como no formalismo clássico estamos interessados na velocidade da partícula ao sair do capacitor, dentro do capacitor e no quadrado da velocidade da partícula em função da energia cinética que a partícula ganha ao atravessar o capacitor. Utilizando as equações 3.26 e 3.28 temos que (utilizando também a conservação da energia):

$$-\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}}} = \frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}}}, \quad (3.29)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{v_d}{c} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{v_d^2}{c^2}\right)^{-1/2} - \frac{q\Delta\varphi}{m_0c^2}\right]^2}}. \quad (3.30)$$

Lembrando que $m_w \equiv q\Delta\varphi/2c^2$, então (pegando apenas a solução positiva para v_d/c):

$$\frac{v_d}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{v_d^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 2\frac{m_w}{m_0}\right]^2}}. \quad (3.31)$$

Vamos estudar a equação 3.31. Estamos interessados em soluções reais para a equação 3.31 e isto ocorre quando

$$1 - \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{v_d^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 2\frac{m_w}{m_0}\right]^2} \geq 0. \quad (3.32)$$

Se tivermos problemas com divergência na equação 3.31, ($v_d/c \rightarrow \pm\infty$), eles acontecerão quando

$$\left| \left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 2 \frac{m_w}{m_o} \right|^2 = 0. \quad (3.33)$$

Ou seja, para um valor de m_w/m dado por

$$\frac{m_w}{m_o} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (3.34)$$

Repare que se tivermos problemas com divergência eles ocorrerão para partículas positivas ($m_w/m_o > 0$). Só que isto não ocorre pois no caso da equação 3.34 teríamos v_d/c imaginário.

Os zeros da equação 3.31 são dados quando

$$\left| \left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 2 \frac{m_w}{m_o} \right|^2 - 1 = 0, \quad (3.35)$$

ou seja, para um valor de m_w/m_o dado por

$$\frac{m_w}{m_o} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \pm \frac{1}{2}. \quad (3.36)$$

Da equação 3.31 é fácil ver que $v_d/c \rightarrow 1$ para $m_w/m_o \rightarrow \pm\infty$ (isto é, $\Delta\varphi \rightarrow \pm\infty$).

Na figura 3.5 apresentamos um gráfico da equação 3.31 onde temos que:

$$A \equiv \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} - \frac{1}{2} \geq 0, \quad (3.37)$$

$$B \equiv \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} + \frac{1}{2} > 0. \quad (3.38)$$

O ponto P indica a velocidade inicial normalizada (v_a/c) da partícula antes de entrar no capacitor. As partículas negativas ($m_w/m_o < 0$) são

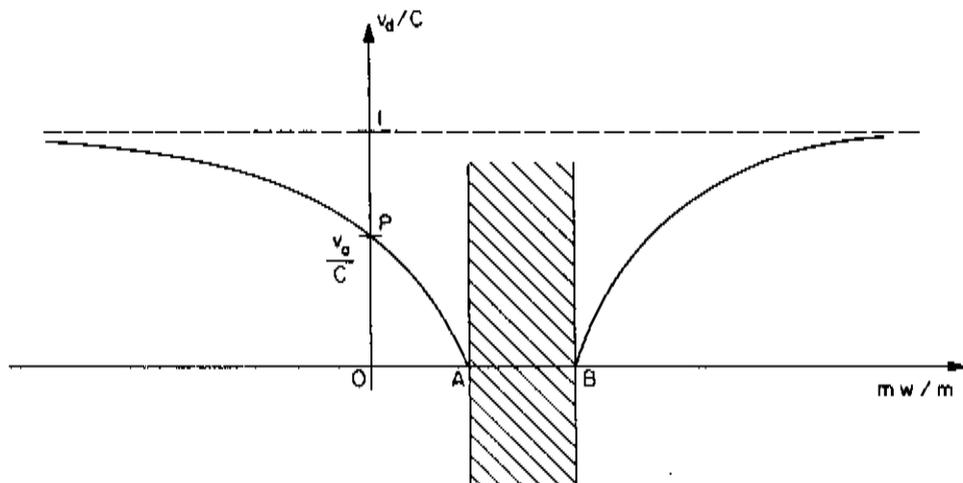


Figura 3.5: Gráfico da equação 3.31.

aceleradas pela diferença de potencial entre às placas do capacitor e saem com uma velocidade maior que v_a ($v_a \leq v_d \leq c$). Agora uma partícula positiva ($m_w/m_o > 0$) é desacelerada pela diferença de potencial do capacitor e sai com uma velocidade menor ($v_a \geq v_d \geq 0$). A região hachurada na figura 3.5 ($A \leq m_w/m_o \leq B$) é uma região em que não temos soluções reais para v_d/c . Mas como veremos adiante, para $m_w/m_o > A$ a partícula, com carga positiva, retorna antes de atingir a placa positiva, e veremos também que isto ocorre mesmo para $m_w/m_o > B$.

A velocidade no interior do capacitor é dada pelas equações 3.26 e 3.27. Assim

$$\frac{v_i}{c} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{v_d^2}{c^2}\right)^{-1/2} - \frac{m_w}{m_o}(1+a) \right]^2}}, \quad (3.39)$$

onde $a \equiv z_1/z_o$. Lembramos que $-1 \leq a \leq 1$ (se $a = -1$ vem de 3.39 que $v_i/c = \pm v_a/c$). Teremos soluções reais para a equação 3.39 quando

$$1 - \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{v_d^2}{c^2}\right)^{-1/2} - \frac{m_w}{m_o}(1+a) \right]^2} \geq 0. \quad (3.40)$$

As possíveis divergências da equação 3.39, ($v_i/c \rightarrow \pm\infty$), ocorrerão quando

$$\left[\left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{-1/2} - \frac{m_\omega}{m_o}(1+a)\right]^2 = 0. \quad (3.41)$$

Ou seja, para valores de m_ω/m_o dados por (supondo $a \neq -1$)

$$\frac{m_\omega}{m_o} = \frac{1}{(1+a)\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (3.42)$$

Aqui também teremos problemas de divergência somente para valores positivos de m_ω/m_o (pois $-1 \leq a \leq 1$). Os zeros da equação 3.39 são dados quando

$$\left[\left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{-1/2} - \frac{m_\omega}{m_o}(1+a)\right]^2 - 1 = 0, \quad (3.43)$$

ou seja, para valores de m_ω/m_o dados por (supondo $a \neq -1$)

$$\frac{m_\omega}{m_o} = \pm \frac{1}{(1+a)} + \frac{1}{(1+a)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (3.44)$$

De 3.39 é fácil ver que $|v_i/c| \rightarrow 1$ para $m_\omega/m_o \rightarrow \pm\infty$.

Vamos construir um gráfico para a equação 3.39 similar à figura 3.5.

Definições:

$$F \equiv -\frac{1}{(1+a)} + \frac{1}{(1+a)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad (3.45)$$

$$G \equiv \frac{1}{(1+a)} + \frac{1}{(1+a)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (3.46)$$

As equações 3.45 e 3.46 podem ser escritas em função de A e B , equações 3.37 e 3.38:

$$F = \frac{2A}{(1+a)}, \quad (3.47)$$

$$G = \frac{2B}{(1+a)}. \quad (3.48)$$

A linha tracejada, na figura 3.6, indica o valor m_w/m_o em que poderíamos ter uma divergência. Também podemos ver as posições relativas de A, B, F e G. As equações 3.47 e 3.48 indicam para que valores de m_w/m_o a velocidade da partícula seria zero ($v_i/c = 0$). Vamos graficar as equações 3.47 e 3.48 para termos uma idéia de seu comportamento. Vamos supor que uma partícula com carga positiva incida na abertura A (vide figura 3.1), lembre-se da esquadra para a direita, com uma velocidade $v_a = 0,5c$ (vide figura 3.7)

A curva I indica os possíveis valores da equação 3.47 e a curva II indica os possíveis valores da equação 3.48 (caso em que $v_a/c = 0,5$). Assim para que o ponto de retorno seja a placa positiva ($a = 1$) m_w/m_o terá um valor de $m_w/m_o = 0,077$ ($\Delta\varphi = 77kV$) e o valor onde poderia ocorrer uma

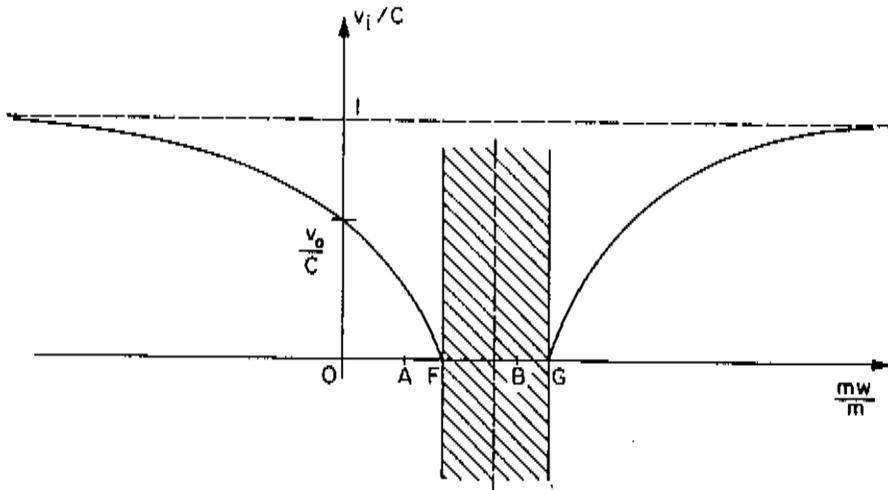


Figura 3.6: Gráfico da equação 3.39.

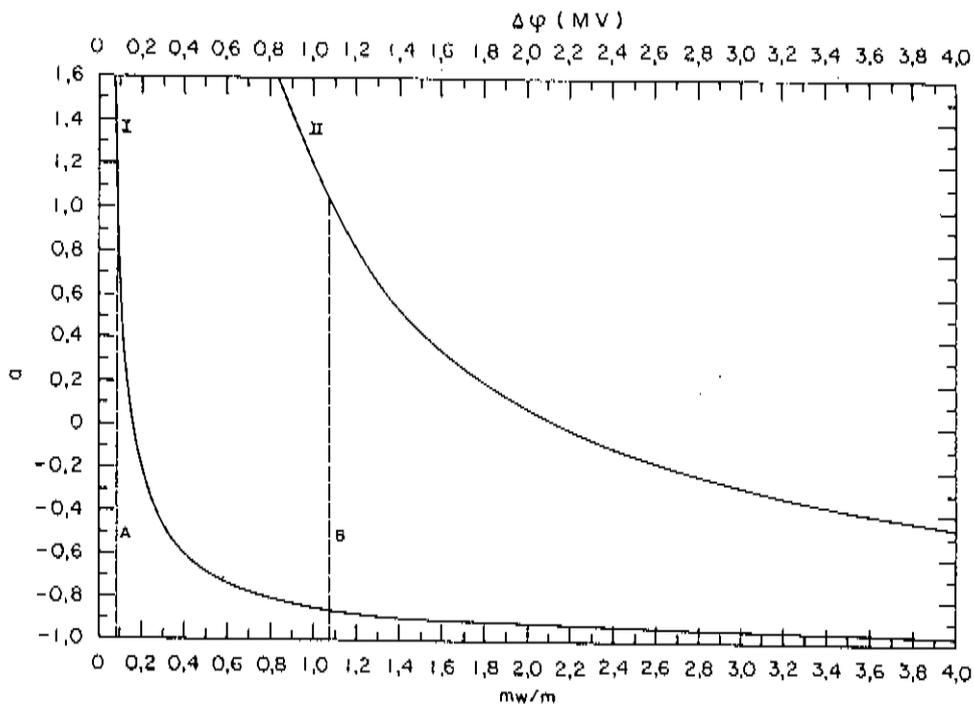


Figura 3.7: Gráfico para as equações 3.47, curva I, e 3.48, curva II. $v_a/c = 0,5$ é a velocidade inicial.

divergência é $m_w/m_o = 0,578$ ($\Delta\varphi = 0,58MV$). Agora vamos supor que temos $m_w/m_o = 0,578$. Isto levará a uma divergência? Não, pois se supormos $m_w/m_o = 0,578$ o ponto de retorno será no interior do capacitor em $a = -0,73$. Repare que $A < 0,578 < B$. Agora vamos supor $m_w/m_o > B$, por exemplo, $m_w/m_o = 3,0$. Teremos duas soluções possíveis: $a = -0,28$ ou $a = -0,95$. A solução fisicamente viável é $a = -0,95$. Ou seja, os pontos de retorno estão sempre sobre a curva I da figura 3.7. Sempre que $m_w/m_o > A$ (ver figura 3.5) vem que a partícula retornará antes de atingir a placa positiva. E isto ocorrerá mesmo para $m_w/m_o > B$ (figura 3.5).

Falta-nos analisar o comportamento do quadrado da velocidade de saída (v_d) em função da diferença de potencial entre as placas do capacitor. Levando em consideração a equação 3.31 temos

$$\frac{v_d^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 2\frac{m_w}{m_o}\right]^2} \quad (3.49)$$

Vamos estudar o comportamento das equações 3.31, 3.39 e 3.49 para situações particulares. A figura 3.8 mostra o comportamento da velocidade de saída (v_d/c) da partícula para diversas diferenças de potencial. No gráfico (A) a partícula (pósitron) entra no capacitor com uma velocidade $v_a = 0,1c$ e no gráfico (B) a velocidade de entrada é $v_a = 0,9c$.

Na figura 3.9 temos o comportamento da velocidade de saída v_d/c de um elétron com uma velocidade de entrada $v_a = 0,1c$. Repare o comportamento assintótico da velocidade de saída (v_d/c) da partícula. Nosso objetivo é ver se há ou não esta velocidade limite no formalismo Weberiano.

A figura 3.10 mostra o comportamento da velocidade do elétron no interior do capacitor. Aqui também verificamos um comportamento assintótico da velocidade. v_a indica a velocidade com que a partícula entra no capacitor ($v_a = 0,1c$) e v_d a velocidade de saída da partícula. Por exemplo, com uma diferença de potencial de $0,5MV$ entre as placas a velocidade de saída será $v_d = 0,87c$. A figura 3.11 tem especial importância para nós, pois faremos gráficos similares para os vários formalismos que estamos estudando. Consideramos um elétron com velocidade inicial desprezível, $v_a \cong 0$. Ele é acelerado e sua velocidade de saída do capacitor (ao quadrado) está graficada em função da diferença de potencial entre as placas ($\Delta\varphi$). A energia cinética ganha pelo elétron ao atravessar o capacitor é $q\Delta\varphi$. Repare que a curva do formalismo

relativístico sai abaixo da curva do formalismo clássico. Aqui novamente vemos um comportamento assintótico da velocidade v_d/c , mas apenas no caso relativístico.

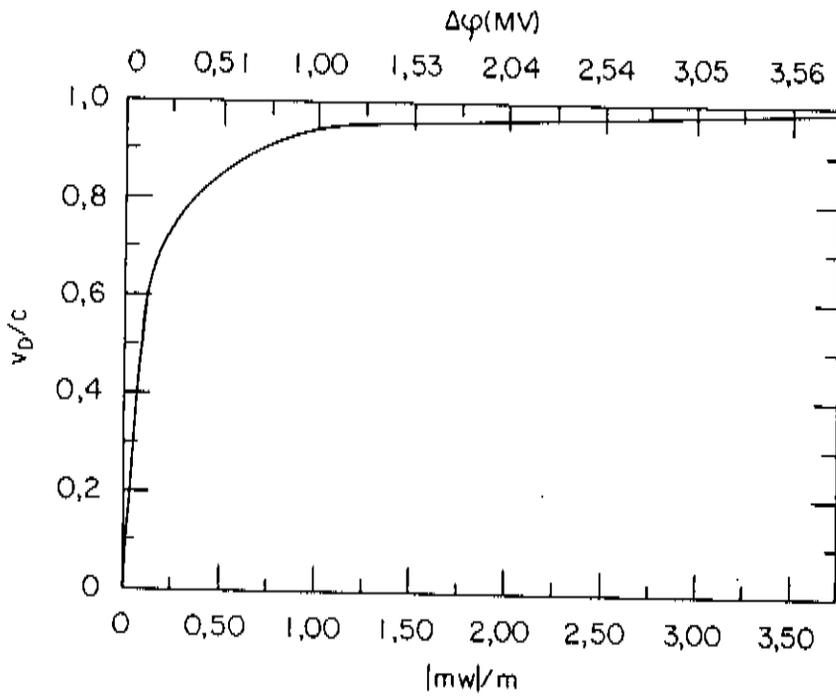


Figura 3.9: Elétron entra no capacitor com $v_a = 0,1c$ sendo acelerado. A velocidade de saída (v_d/c) é dada em função de $\Delta\phi$.

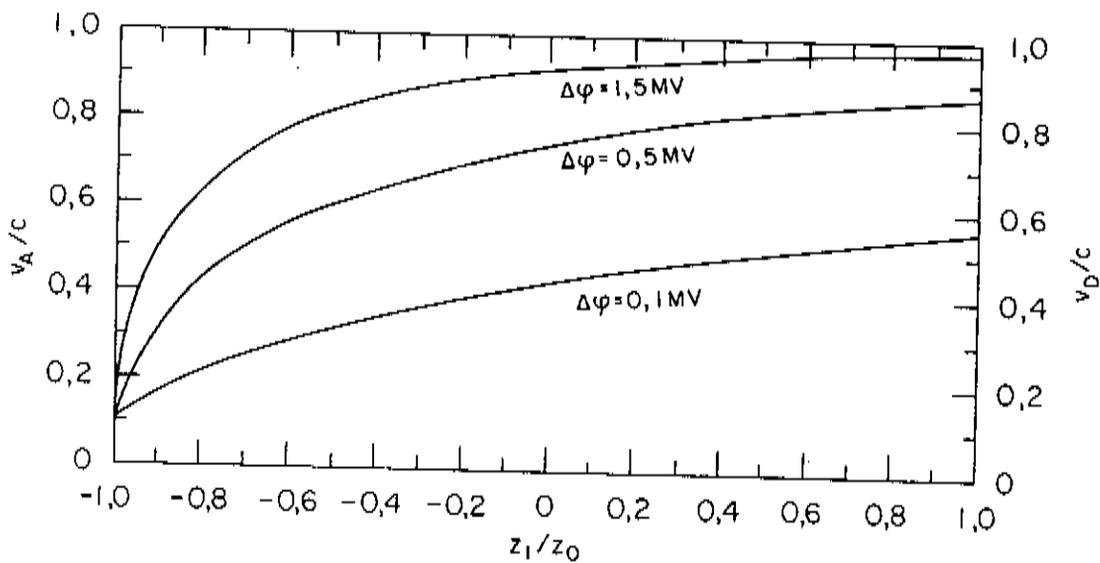


Figura 3.10: Comportamento da velocidade do elétron no interior do capacitor para várias diferenças de potencial. Caso em que $v_a/c = 0,1$

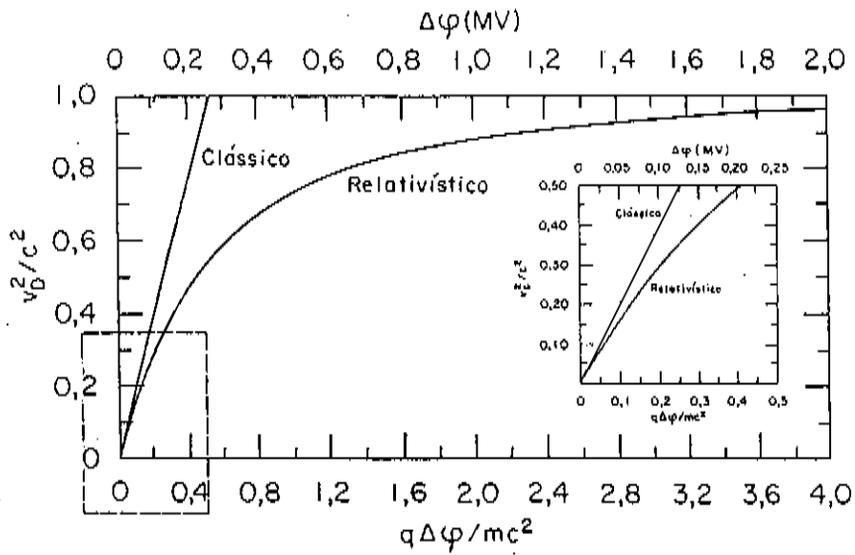


Figura 3.11: Velocidade v_d/c ao quadrado em função de $\Delta\phi$. Repare o comportamento assintótico da curva relativística.

3.4 Formalismo Weberiano

A energia total da partícula quando consideramos o potencial Weberiano e a energia cinética clássica é

$$E_T^\omega = U_P^\omega + E_K^C, \quad (3.50)$$

onde: E_T^ω é a energia total Weberiana;
 U_P^ω é a energia potencial Weberiana;
 E_K^C é a energia cinética clássica.

Devemos lembrar que neste caso vale a conservação da energia (ver Apêndice D). A energia potencial Weberiana está calculada no Apêndice A. Assim quando substituímos A.28, A.29 e A.30 em 3.50, temos, adicionando a constante arbitrária K :

$$E_T^\omega(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} - \frac{q\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{v_a^2}{c^2} + \frac{mv_a^2}{2} + K, \quad (3.51)$$

$$E_T^\omega(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = \frac{q\sigma z_1}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma z_1}{2\epsilon_0} \frac{v_i^2}{c^2} + \frac{mv_i^2}{2} + K, \quad (3.52)$$

$$E_T^\omega(z_0 \leq z_1) = \frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{v_d^2}{c^2} + \frac{mv_d^2}{2} + K. \quad (3.53)$$

Sabendo que $\sigma = \epsilon_0 \Delta\varphi / 2z_0$ podemos escrever as equações 3.51, 3.52 e 3.53 como:

$$E_T^\omega(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} - \frac{q\Delta\varphi}{2c^2} \frac{v_a^2}{2} + \frac{mv_a^2}{2} + K, \quad (3.54)$$

$$E_T^\omega(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = \frac{q\Delta\varphi}{2} \frac{z_1}{z_0} + \frac{q\Delta\varphi}{2c^2} \frac{z_1}{z_0} \frac{v_i^2}{2} + \frac{mv_i^2}{2} + \mathcal{K}, \quad (3.55)$$

$$E_T^\omega(z_0 \leq z_1) = +\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{q\Delta\varphi}{2c^2} \frac{v_d^2}{2} + \frac{mv_d^2}{2} + \mathcal{K}. \quad (3.56)$$

Definindo:

$$m' \equiv m + \frac{qV(z)}{2c^2}, \quad (3.57)$$

onde $V(0) \equiv 0$, e $V(z)$ é o potencial eletrostático no ponto z . podemos escrever as equações 3.54, 3.55 e 3.56 na forma

$$E_T^\omega(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{m'v_a^2}{2} + \mathcal{K}, \quad (3.58)$$

$$E_T^\omega(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = \frac{q\Delta\varphi}{2} \frac{z_1}{z_0} + \frac{m'v_i^2}{2} + \mathcal{K}, \quad (3.59)$$

$$E_T^\omega(z_0 \leq z_1) = +\frac{q\Delta\varphi}{2} + \frac{m'v_d^2}{2} + \mathcal{K}. \quad (3.60)$$

As equações 3.58 a 3.60 são similares às equações 3.14 a 3.16. A única alteração é que agora temos m' em vez de m . Vemos então que a mudança essencial do formalismo Weberiano em relação ao formalismo clássico pode ser interpretada como uma mudança na massa inercial da partícula. Esta passa a se comportar como se tivesse uma massa efetiva m' que depende do

potencial onde a partícula se encontra e da carga da partícula, mas não do módulo de sua velocidade. Os efeitos mais interessantes do formalismo Weberiano vão ocorrer quando esta massa efetiva vai a zero, havendo então uma divergência na velocidade e na aceleração, e quando ela se torna negativa.

Antes de continuarmos a análise das equações 3.54, 3.55 e 3.56 vamos retornar a energia potencial calculada no apêndice A e que é dada por

$$U_P^\omega(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} - \frac{q\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{v_a^2}{c^2}, \quad (3.61)$$

$$U_P^\omega(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = +\frac{q\sigma z_1}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma z_1}{2\epsilon_0} \frac{v_i^2}{c^2}, \quad (3.62)$$

$$U_P^\omega(z_0 \leq z_1) = +\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{v_d^2}{c^2}. \quad (3.63)$$

Destas equações podemos obter a força exercida pelas placas do capacitor sobre a partícula quando esta se move apenas ao longo do eixo z:

$$\mathbf{F}(z_1 \leq -z_0) = \frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0 c^2} a_\perp \hat{k}, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{F}(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = -\frac{q\sigma}{\epsilon_0} \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{z_1 a_\perp}{c^2} \right] \hat{k}, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{F}(z_0 \leq z_1) = -\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0 c^2} a_\perp \hat{k}, \quad (3.66)$$

onde a_\perp é aceleração da partícula na direção normal às placas do capacitor.

As equações 3.64 a 3.66 são resultados que não obtínhamos com o formalismo clássico. A partícula sofre a ação de uma força, exercida pelas placas,

quando ela possui uma aceleração mesmo quando está fora do capacitor. Uma possível situação de teste para estas previsões é estudarmos como um oscilador harmônico carregado eletricamente é afetado pela presença do capacitor. Este tipo de análise vai além dos objetivos desta tese, mas fica como uma possibilidade para estudos posteriores.

Vamos agora retomar as equações 3.54 a 3.56. Escrevendo a velocidade v_d da partícula ao sair do capacitor como uma função da velocidade de entrada, v_a , e de m_ω obtemos:

$$\frac{v_d}{c} = \sqrt{-\frac{4m_\omega}{m+m_\omega} + \frac{m-m_\omega}{m+m_\omega} \frac{v_a^2}{c^2}}. \quad (3.67)$$

Aqui também estamos interessados em que a equação 3.67 tenha soluções reais. Isto ocorre quando

$$-\frac{4m_\omega}{m+m_\omega} + \frac{m-m_\omega}{m+m_\omega} \frac{v_a^2}{c^2} \geq 0. \quad (3.68)$$

Temos duas situações claras a serem analisadas.

1. $m_\omega > 0$, neste caso a partícula terá carga positiva e estamos interessados em soluções reais para a equação 3.67. Isto ocorre quando

$$m_\omega < \frac{mv_a^2}{4c^2 + v_a^2}. \quad (3.69)$$

2. $m_\omega < 0$, neste caso a partícula terá carga negativa e a equação 3.67 terá soluções reais quando

$$m_\omega > -m. \quad (3.70)$$

Escrevendo a equação 3.67 de um modo mais conveniente

$$\frac{v_d}{c} = \sqrt{\frac{-\frac{4m_\omega}{m} + \frac{1 - \frac{m_\omega}{m} v_a^2}{1 + \frac{m_\omega}{m}}}{1 + \frac{m_\omega}{m}}}. \quad (3.71)$$

Vamos graficar a equação 3.71 para estudarmos seu comportamento em alguns casos particulares. Com partículas de cargas positivas, e. g. um pósitron, teremos um situação extremamente similar ao caso clássico, como podemos ver na sequência de gráficos. Na figura 3.12, gráfico (B) temos o comportamento da velocidade de saída, v_d/c , em função de m_ω/m para o formalismo clássico. No gráfico (A) temos o comportamento da velocidade de saída, v_d/c , para o caso Weberiano. Em ambos a velocidade de entrada no capacitor é $v_a = 0, 1c$. Na figura 3.13, gráficos A e B, temos que a velocidade de entrada no capacitor é $v_a = c$. Como foi dito, há um comportamento similar quando utilizamos o formalismo clássico e o Weberiano para partículas positivas. Considerando partículas com carga negativa o comportamento da velocidade em função de m_ω/m apresentará características marcantes, vide figuras 3.14 e 3.15. Para os dois formalismos não temos uma velocidade limite. No formalismo clássico a velocidade v_d tenderá a infinito quando $|m_\omega|/m$ tender para infinito, o que significa uma diferença de potencial infinita. Mas no caso Weberiano a velocidade v_d tende a infinito quando $|m_\omega|/m \rightarrow 1$ (figura 3.16). Supondo que a partícula negativa seja um elétron, então a diferença de potencial entre as placas é aproximadamente 1MV, no caso limite em que $|m_\omega| = m$. Resumindo, com uma energia finita obtemos velocidades muito acima da velocidade da luz com o formalismo de Weber, e este resultado não é corroborado por dados experimentais.

Passaremos agora a estudar o comportamento da partícula dentro do capacitor. Utilizando as equações 3.54 e 3.55, lembrando que $a \equiv z_1/z_0$, onde $-1 \leq a \leq 1$, e da definição $m_\omega \equiv q\Delta\varphi/2c^2$, podemos escrever que

$$\frac{v_i}{c} = \sqrt{\frac{2m_\omega(1+a)}{m+m_\omega a} + \frac{m-m_\omega}{m+m_\omega a} \frac{v_a^2}{c^2}}. \quad (3.72)$$

Estamos interessados em soluções reais então

$$-\frac{2m_\omega(1+a)}{m+m_\omega a} + \frac{m-m_\omega}{m+m_\omega a} \frac{v_a^2}{c^2} \geq 0. \quad (3.73)$$

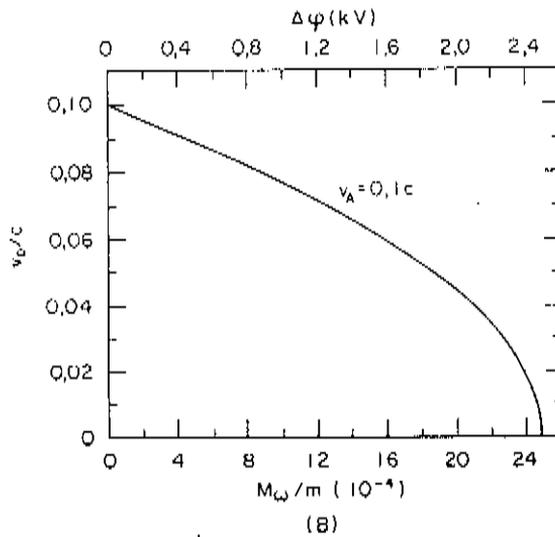
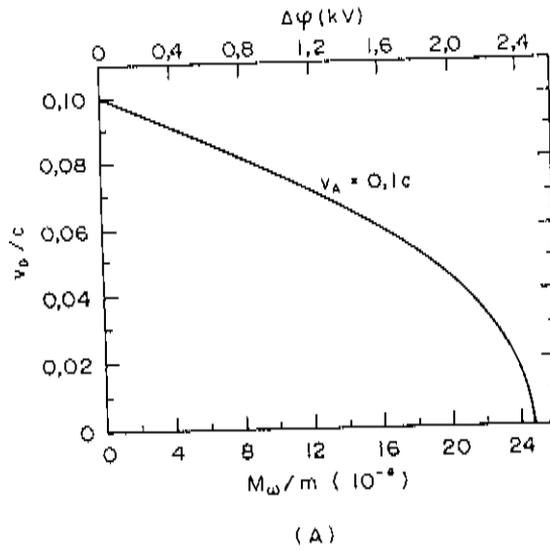


Figura 3.12: Comportamento da velocidade de saída v_d/c em função de m_ω/m . No gráfico (B) temos o caso clássico e no gráfico (A) o Weberiano com $v_a/c = 0,1$ (a partícula está sendo desacelerada, carga positiva, caso do pósitron).

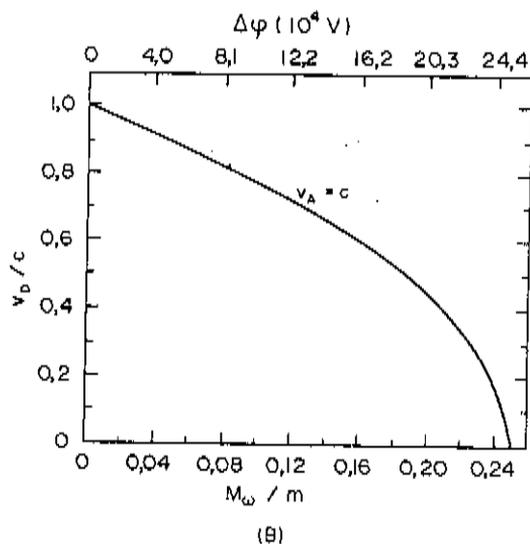
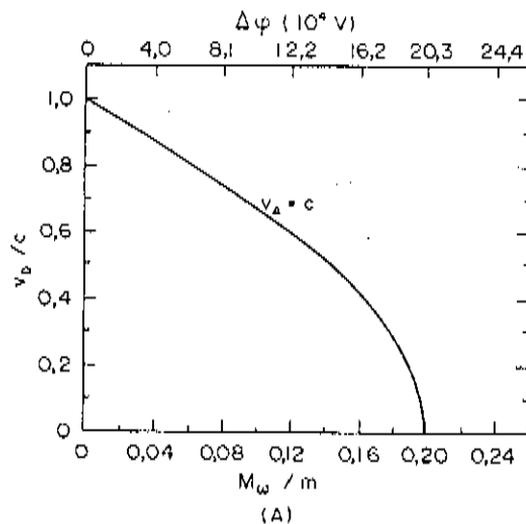


Figura 3.13: Partícula de carga positiva (pósitron) desacelerada em um capacitor plano ideal com velocidade de entrada $v_a = c$. A velocidade de saída é dada em função de m_ω/m . (B) formalismo Weberiano e (A) formalismo clássico.

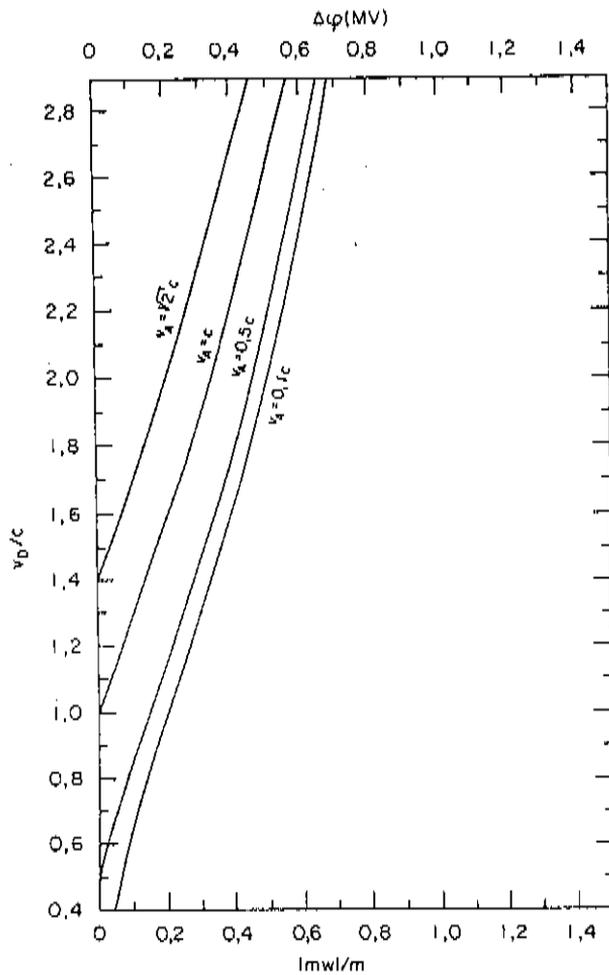


Figura 3.14: O comportamento da velocidade de saída v_d quando aumentamos a diferença de potencial entre as placas. Partícula negativa (elétron). Teoria Weberiana.

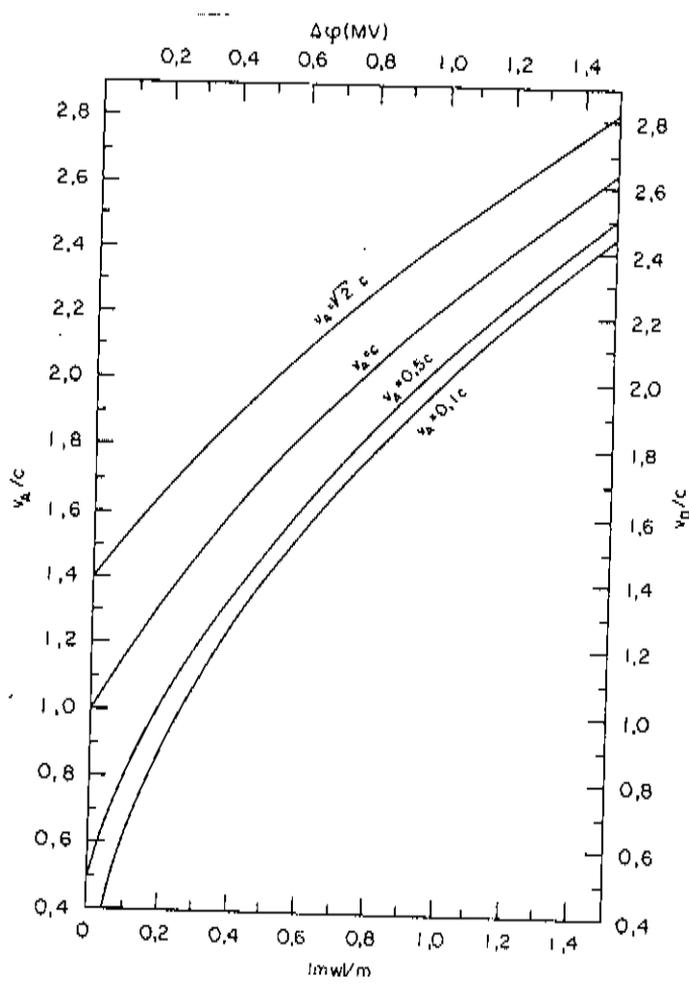


Figura 3.15: O comportamento da velocidade de saída v_d quando aumentamos a diferença de potencial entre as placas. Partícula negativa (elétron). Teoria clássica.

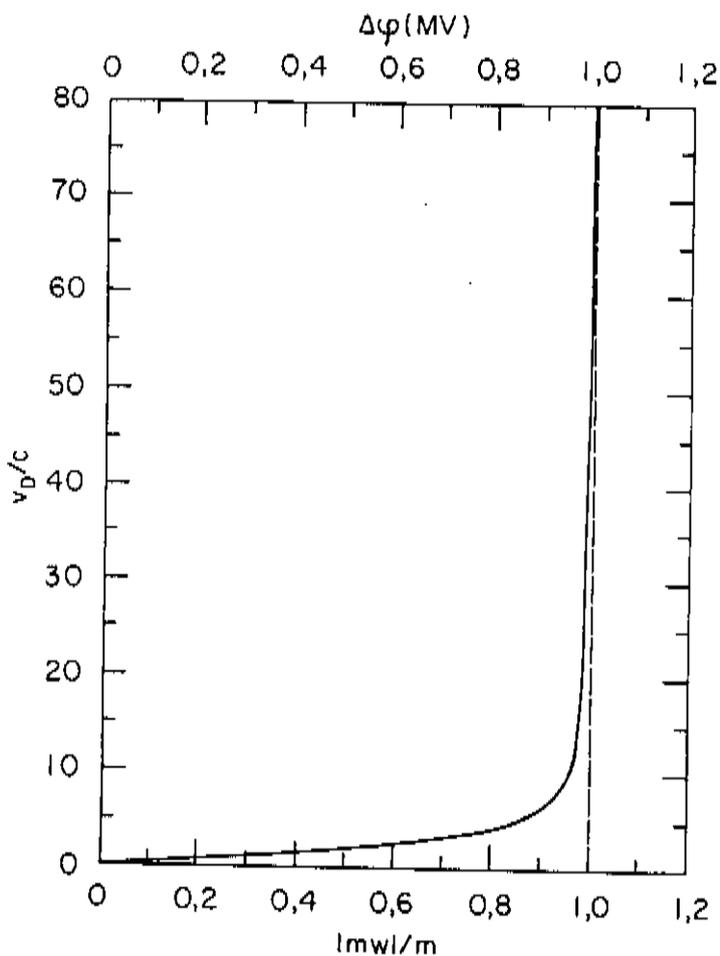


Figura 3.16: Divergência da velocidade da partícula com carga negativa (elétron) quando $|m_w/m| = 1$, $v_a = 0$.

A maneira mais fácil de estudarmos a equação 3.72 é vendo as situações limite. Temos que v_i/c diverge quando o denominador vai a zero, ou seja,

$$a = -\frac{m}{m_\omega}. \quad (3.74)$$

Como $a \equiv z_1/z_0$ temos $-1 \leq a \leq 1$. Isto significa que esta divergência só ocorrerá dentro do capacitor se $m_\omega > m$ ou $m_\omega < -m$.

Os zeros da equação 3.72 ocorrerão quando o numerador vai a zero, ou seja

$$-2m_\omega(1+a)c^2 + (m - m_\omega a)v_a^2 = 0. \quad (3.75)$$

Isto significa que

$$\frac{m_\omega}{m} = \frac{v_a^2}{2(1+a)c^2 + v_a^2}. \quad (3.76)$$

É fácil ver que neste caso (como $-1 \leq a \leq 1$):

$$0 \leq \frac{v_a^2}{4c^2 + v_a^2} \leq \frac{m_\omega}{m} \leq 1. \quad (3.77)$$

Isto significa que a velocidade só vai a zero dentro do capacitor no caso de cargas positivas ($m_\omega > 0$). O ponto onde isto ocorre é dado por 3.76, ou seja

$$a = \frac{1 - \frac{m_\omega}{m} \frac{v_a^2}{c^2}}{2 \frac{m_\omega}{m}} - 1 \equiv a_o. \quad (3.78)$$

Variando-se m_ω/m entre os limites da equação 3.77, pode-se obter o ponto de retorno para quaisquer valores de a entre -1 e 1. Por exemplo, o ponto de retorno ocorrerá em $a = 0$ para $m_\omega/m = v_a^2/(2c^2 + v_a^2)$.

Para iniciarmos a análise da equação 3.72 devemos lembrar que m_ω/m é função da carga da partícula e da diferença de potencial entre as placas do capacitor ($m_\omega/m \equiv q\Delta\varphi/2mc^2$). Teremos duas regiões a serem analisadas:

$\Delta\varphi < 1MV$ e $\Delta\varphi > 1MV$. Em termos de m_ω/m temos três regiões: $m_\omega/m > 1$, $-1 < m_\omega/m < 1$ e $m_\omega/m < -1$. No geral teremos cinco situações a serem analisadas

1. $\Delta\varphi < 1MV$

- (a) $q > 0$ e $0 < m_\omega/m < v_a^2/(4c^2 + v_a^2)$. nestas condições a partícula, e.g. um pósitron, entra no capacitor com uma velocidade inicial v_a . (vide figura 3.17), é desacelerada e sai com uma velocidade v_d . Na figura 3.17 temos um pósitron com $v_a = 0,1c$ entrando no capacitor com uma diferença de potencial entre as placas de 2000V, sendo desacelerado, e saindo do capacitor com uma velocidade $v_d = 0,045c$.
- (b) $q > 0$ e $v_a^2/(4c^2 + v_a^2) < m_\omega/m < 1$. Nestas condições a partícula positiva entra no capacitor, incidindo perpendicularmente à placa negativa, com uma velocidade v_a . é desacelerada até atingir a velocidade nula no interior do capacitor em um ponto a_0 dado por

$$a_0 = \frac{1 - \frac{m_\omega}{m} \frac{v_a^2}{c^2}}{2 \frac{m_\omega}{m}} - 1,$$

e passa então a ser acelerada na direção da placa negativa, deixando o capacitor com uma velocidade $v_d = -v_a$. Um exemplo desta situação é mostrado na figura 3.18.

- (c) $q < 0$ e $-1 < m_\omega/m < 0$. Nestas condições a partícula negativa, e.g. um elétron, entra no capacitor com uma velocidade v_a . é acelerada e deixa o capacitor com uma velocidade v_d . Na figura 3.19 temos um exemplo para esta situação, um elétron entra no capacitor com uma velocidade $v_a = 0,1c$ é acelerado e sai do capacitor com uma velocidade $v_d = 2c$. Isto para uma diferença de potencial de 0.5MV. Repare que a velocidade de saída é maior que a velocidade da luz para uma diferença de potencial finita $\Delta\varphi = 0,5MV$. Esta é uma situação análoga ao caso clássico, pois atinge-se velocidades acima da velocidade da luz. Portanto tanto o formalismo Weberiano quanto o formalismo clássico diferem da relatividade nesta situação, visto que v_d/c pode atingir valores maiores de 1.

2. $\Delta\varphi > 1MV$

- (a) $q < 0$ e $m_\omega/m < -1$. A partícula entra no capacitor com uma velocidade v_a e é acelerada até sua velocidade divergir no interior do capacitor. Esta divergência ocorrerá para $a \rightarrow -m/m_\omega$, não podendo ultrapassar este ponto (além dele teríamos v_i complexo). Um exemplo desta situação é mostrado na figura 3.20. Um elétron entra no capacitor com $v_a = 0,1c$ sendo acelerado e para $\Delta\varphi = 1MV$ a velocidade diverge em $a = 1$. Para $\Delta\varphi = 1,5MV$ a velocidade do elétron irá divergir em $a = 0,66$.
- (b) $q > 0$ e $m_\omega/m > 1$. Este é o caso mais curioso de todos. Ele também apresenta o mesmo comportamento do anterior: carga sendo acelerada até uma velocidade infinita. O mais curioso é que agora temos uma carga positiva $m_\omega > 0$ sendo acelerada em direção à placa positiva. A figura 3.21 mostra o comportamento da velocidade de um pósitron com $v_a = 0,1c$ sendo acelerado. Para $\Delta\varphi = 5MV$ a velocidade diverge em $a = -0,20$. O motivo deste comportamento é que nesta situação a carga estaria se comportando como se tivesse uma massa inercial negativa. Logo sua aceleração é oposta à direção da força aplicada.

Vale ressaltar que nos casos 2a e 2b os pontos em que a velocidade diverge são aqueles onde a aceleração vai a infinito, ou seja, onde a "massa inercial efetiva" da partícula definida no interior do capacitor por,

$$m_{ie} \equiv m + m_\omega a, \quad (3.79)$$

vai a zero.

A figura 3.22 mostra o comportamento das cinco situações estudadas. A figura 3.23 põe em um mesmo gráfico as situações indicadas na figura 3.22, casos (C) e (D), e a figura 3.24 põe em um mesmo gráfico as situações indicadas na figura 3.22, casos (A) e (B).

Falta-nos analisar o comportamento do quadrado da velocidade em função da energia cinética que a partícula ganha ao atravessar o capacitor. Levando em consideração as equações 3.54 e 3.56, e a conservação da energia, podemos escrever que

$$\frac{q\Delta\varphi}{mc^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{v_u^2}{c^2} - \frac{v_d^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{v_d^2}{c^2} + \frac{v_u^2}{c^2}\right)}. \quad (3.80)$$

A figura 3.25 mostra o comportamento da equação 3.80 para uma caso particular em que $v_d/c \rightarrow 0$ e $q < 0$. aqui mais uma vez fica evidente a divergência da velocidade da partícula, v_d . Podemos ver neste gráfico o caso clássico comparado com o Weberiano, onde este sempre está acima da curva do formalismo clássico.

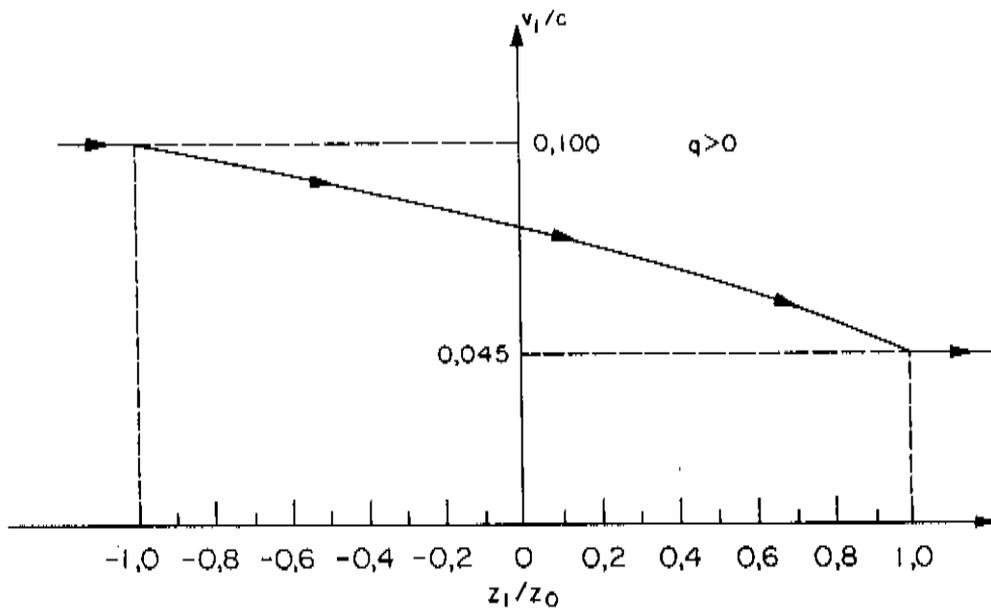


Figura 3.17: Pósitron entra no capacitor com uma velocidade $v_d = 0,1c$ sendo desacelerado por uma diferença de potencial de 2000V e sai com uma velocidade $v_d = 0,045c$.

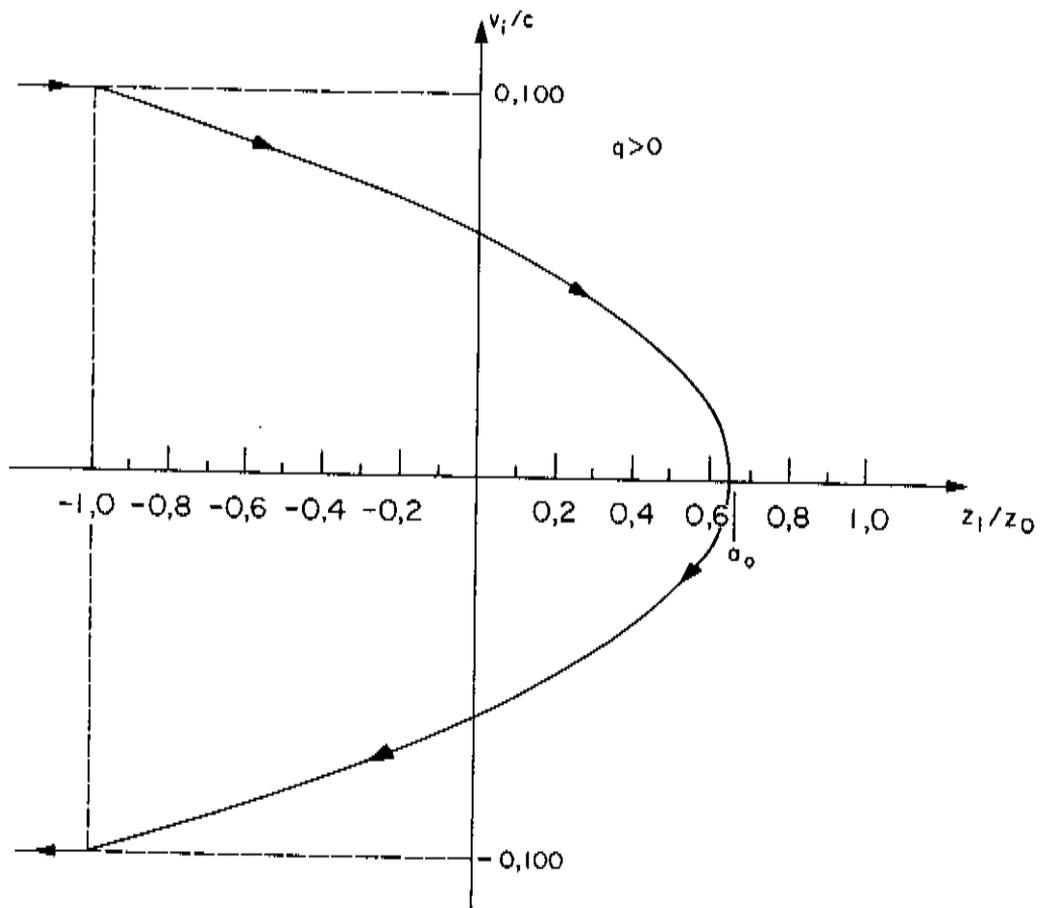


Figura 3.18: Póstron entra no capacitor com uma velocidade $v_a = 0,1c$, sendo desacelerado e atinge a velocidade $v_i = 0$ em $a_o = 0,65$. Isto para uma diferença de potencial entre as placas de 3000V.

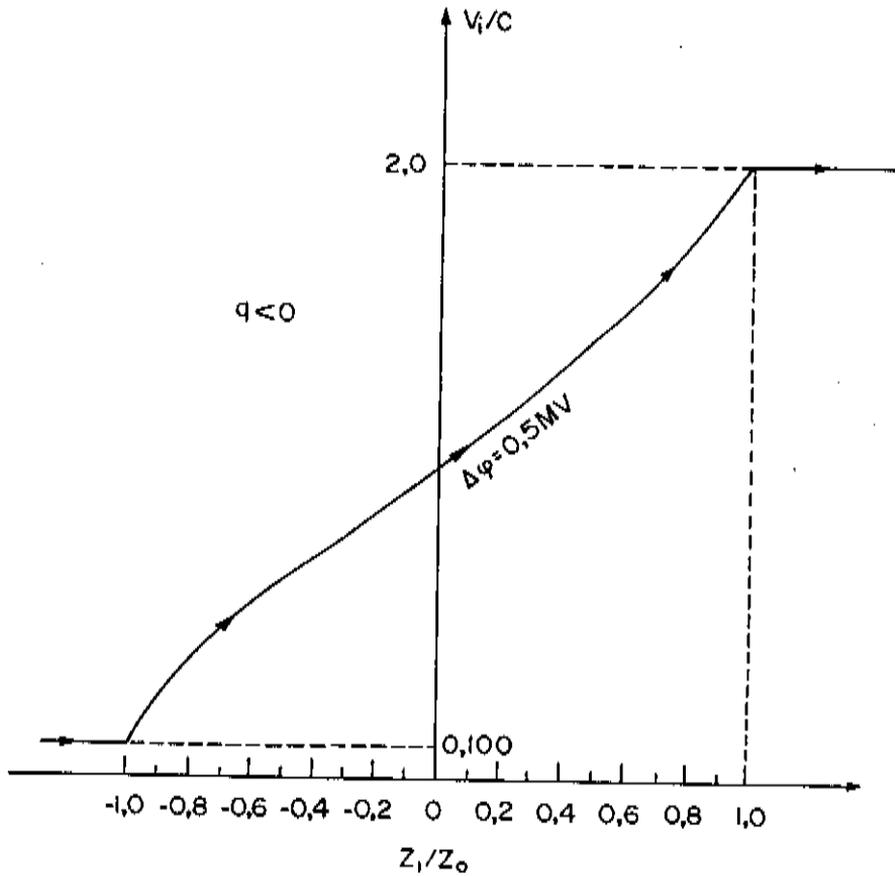


Figura 3.19: Elétron entra no capacitor com uma velocidade $v_a = 0,1c$ sendo acelerado pela diferença de potencial de $0,5\text{MV}$ e sai do capacitor com uma velocidade $v_d = 2c$.

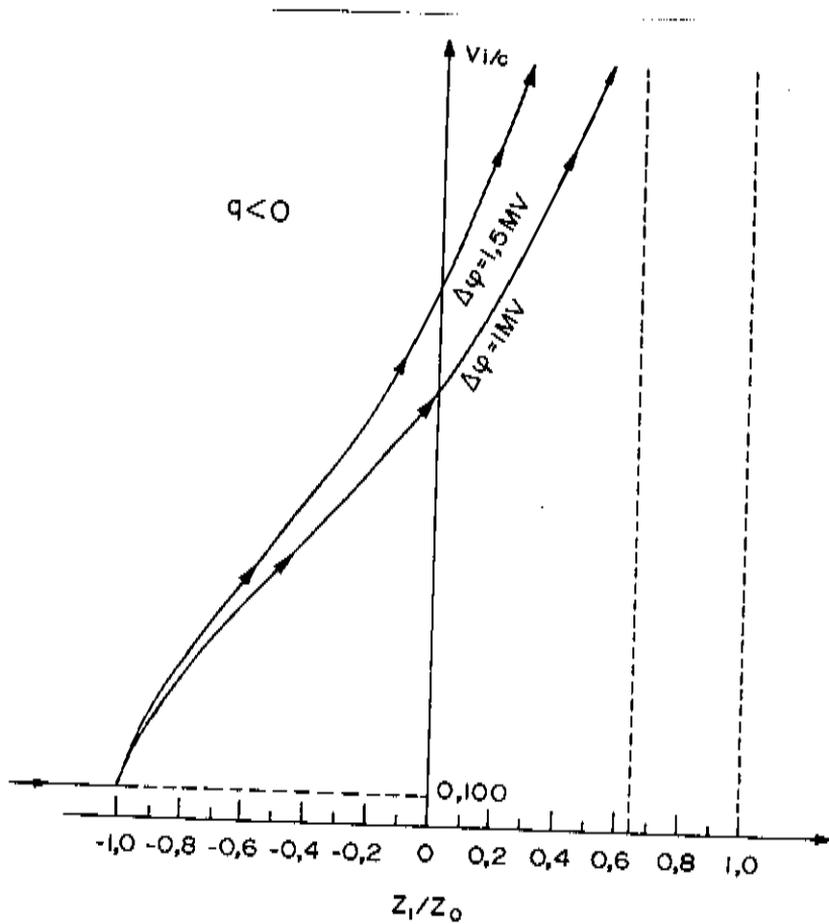


Figura 3.20: Elétron entra no capacitor com uma velocidade de $v_a = 0,1c$ sendo acelerado. Caso $\Delta\varphi = 1\text{MV}$ a velocidade do elétron divergirá ao atingir a placa positiva. No caso em que $\Delta\varphi = 1,5\text{MV}$ a divergência ocorre em $a = 0,66$.

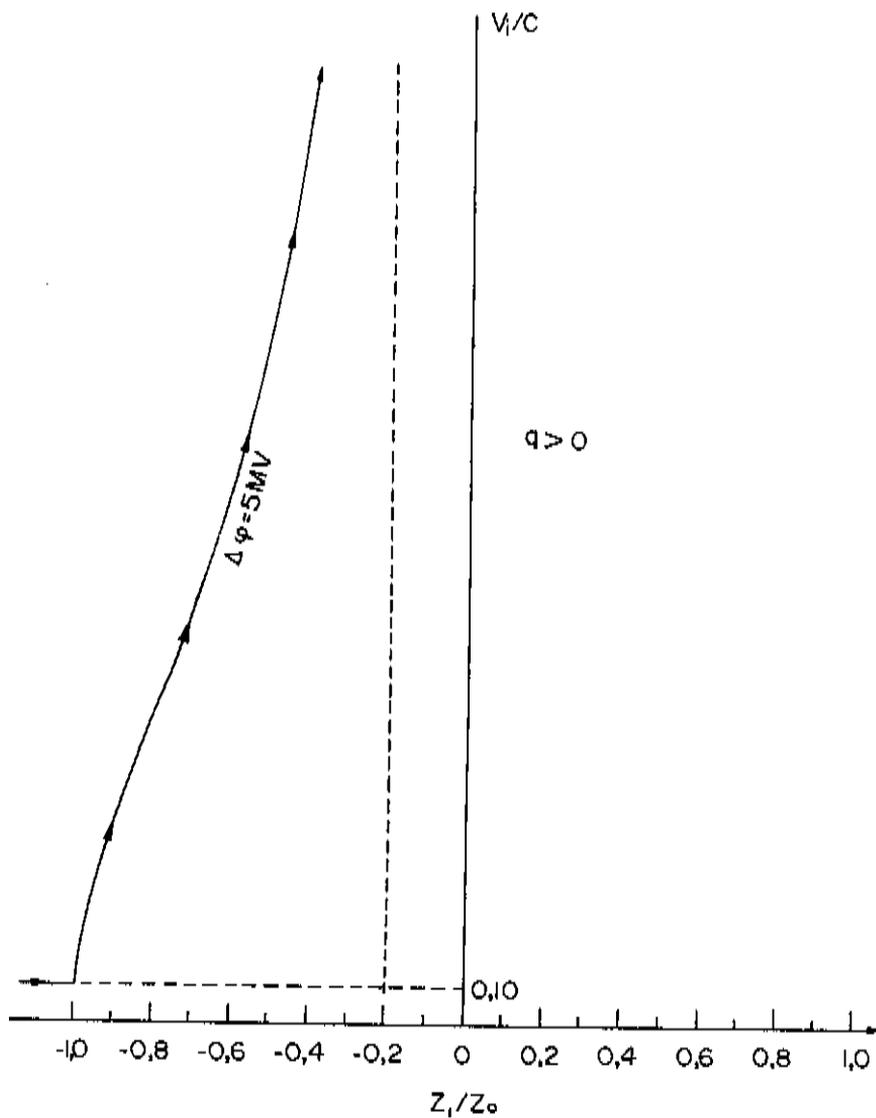


Figura 3.21: Póstron sendo acelerado em direção à placa positiva por uma diferença de potencial entre as placas de 5MV. O ponto de divergência é $a = -0,20$.

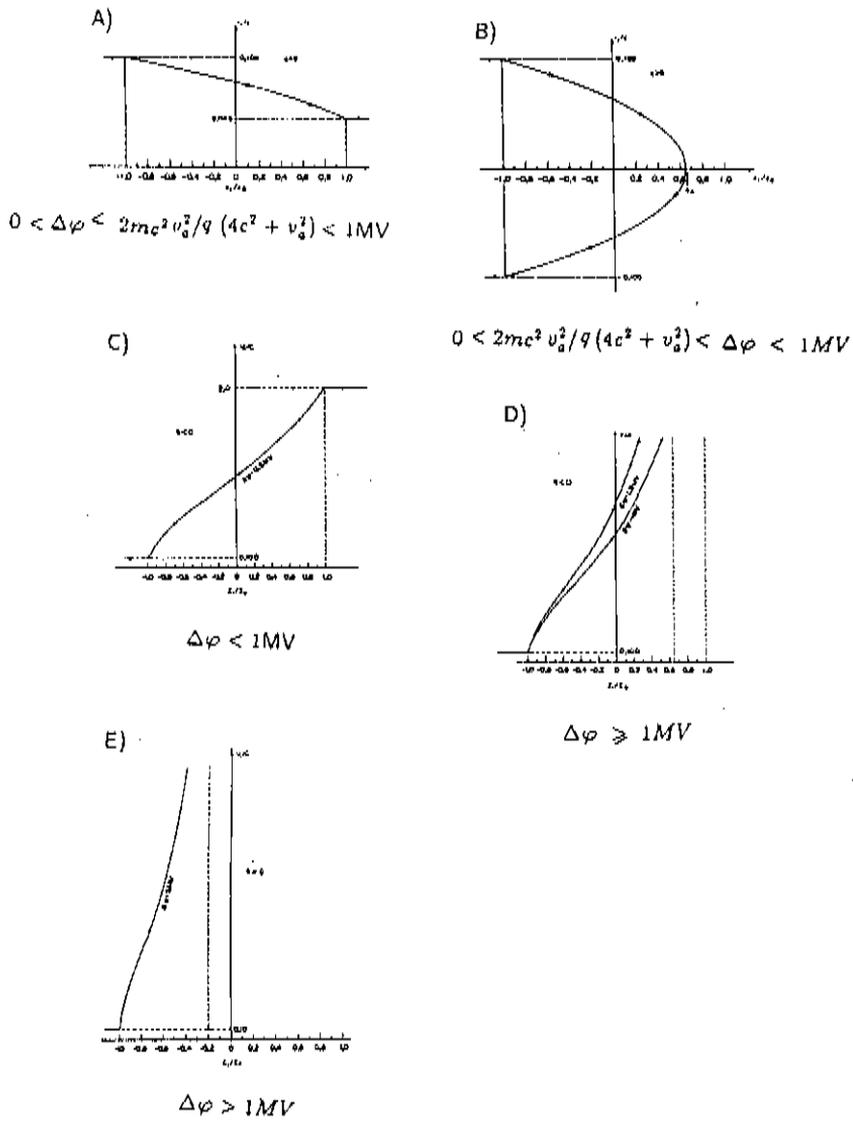


Figura 3.22: Comportamento da equação 3.72, para as cinco situações possíveis .

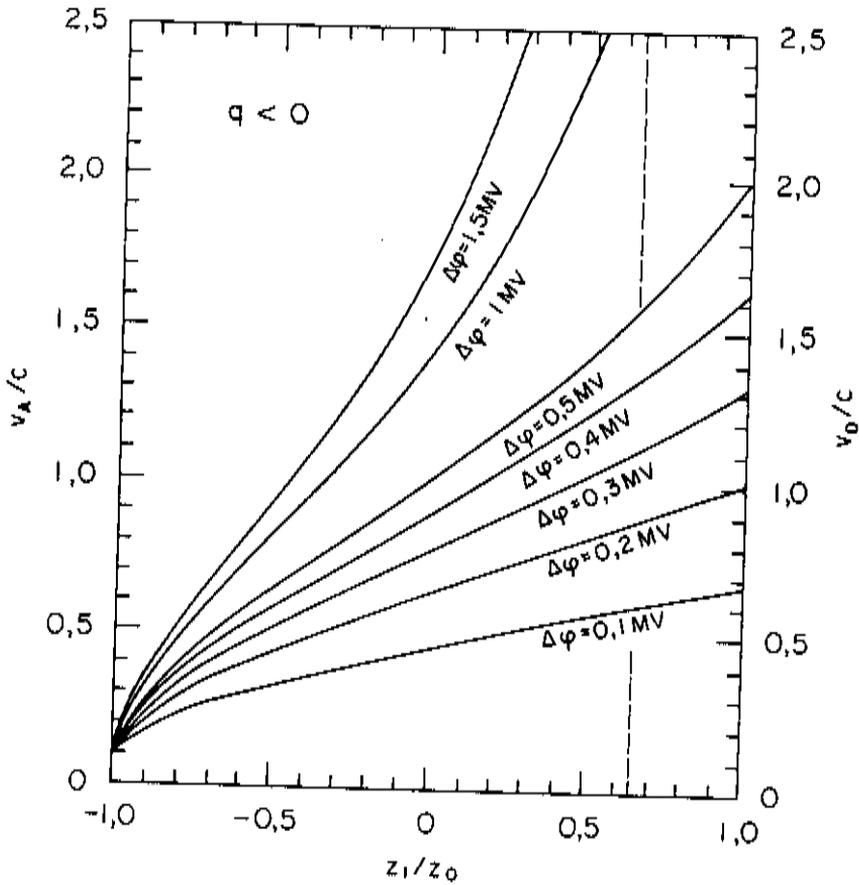


Figura 3.23: Comportamento da velocidade de uma partícula com carga negativa (elétron) no interior de um capacitor em função de sua posição para várias diferenças de potencial, sendo a velocidade de entrada $v_a = 0,1c$. A curva pontilhada indica a divergência para $\Delta\varphi = 1,5\text{ MV}$ e para $\Delta\varphi = 1\text{ MV}$ a divergência ocorre em $a = 1$.

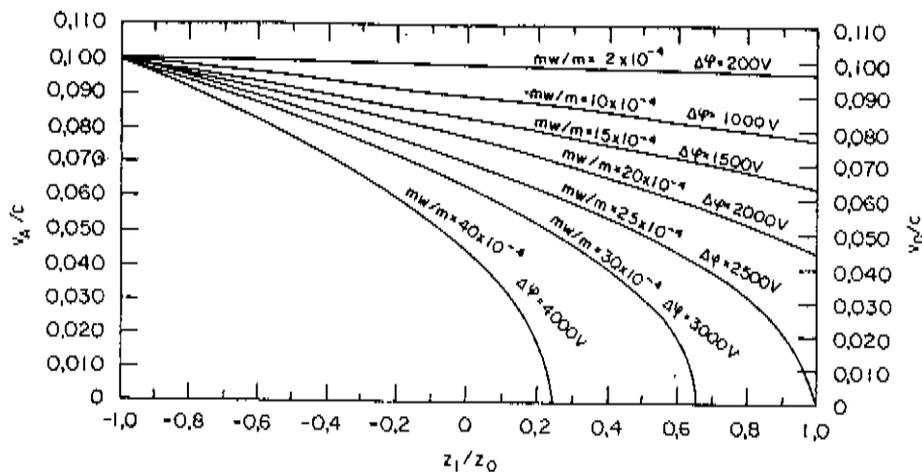


Figura 3.24: Comportamento da velocidade de uma partícula com carga positiva (pósitron) no interior de um capacitor em função de sua posição para várias diferenças de potencial, sendo a velocidade de entrada $v_a = 0,1c$.

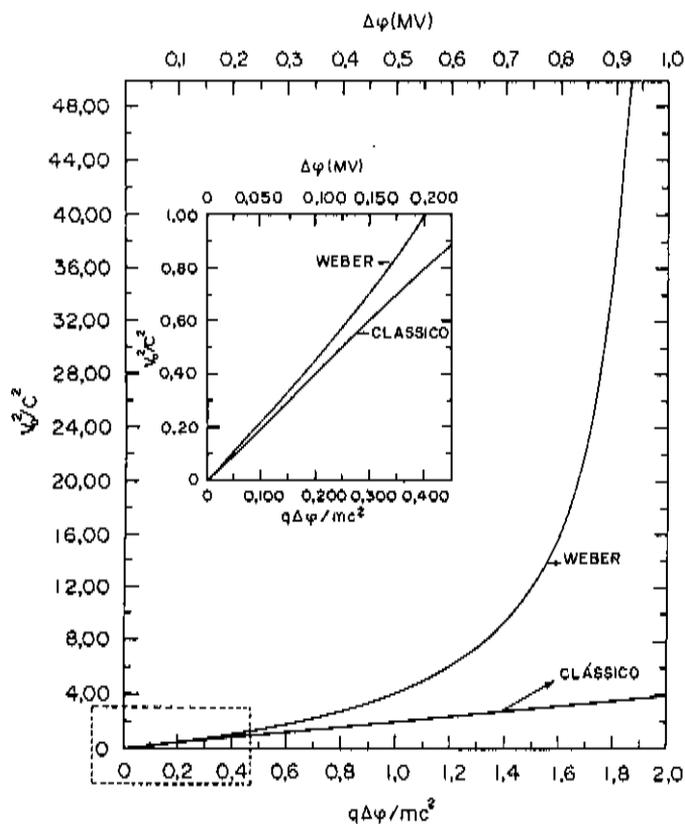


Figura 3.25: Comportamento do quadrado da velocidade em função da energia ganha pela partícula (elétron) ao atravessar o capacitor.

3.5 Teoria de Weber modificada: Potencial de Phipps

A energia total da partícula é dada por

$$E_T^P = U_P^P + E_K^C, \quad (3.81)$$

onde: E_T^P é a energia total,
 U_P^P é a energia potencial de Phipps,
 E_K^C é a energia cinética clássica.

Das equações A.25, A.26 e A.27 temos a energia potencial de Phipps (PHIPPS, 1990 a), e a energia cinética é dada pela equação 3.6. Assim a energia total é dada por, adicionando a constante arbitrária K e utilizando a equação 3.13:

$$E_T^P(z_1 \leq -z_o) = -\frac{q\Delta\varphi}{2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \frac{v_a}{c} \arcsin \frac{v_a}{c} \right\} + \frac{mv_a^2}{2} + K, \quad (3.82)$$

$$E_T^P(-z_o \leq z_1 \leq z_o) = +\frac{q\Delta\varphi}{2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} + \frac{v_i}{c} \arcsin \frac{v_i}{c} \right\} \frac{z_1}{z_o} + \frac{mv_i^2}{2} + K, \quad (3.83)$$

$$E_T^P(z_o \leq z_1) = \frac{q\Delta\varphi}{2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} \right\} + \frac{mv_d^2}{2} + K. \quad (3.84)$$

Como em outros formalismos, estamos interessados na velocidade da partícula ao sair do capacitor, em seu interior e no quadrado da velocidade da partícula em função da energia cinética que a partícula ganha ao atravessar o capacitor. Utilizando as equações 3.82 e 3.84 podemos escrever que

$$-\frac{q\Delta\varphi}{2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \frac{v_a}{c} \arcsin \frac{v_a}{c} \right\} + \frac{mv_a^2}{2}$$

$$= \frac{q\Delta\varphi}{2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} \right\} + \frac{mv_d^2}{2}. \quad (3.85)$$

Aqui temos uma dificuldade que não tínhamos nos formalismos anteriores, uma função transcendente. Portanto não podemos escrever v_d/c em função de m_ω/m e v_a/c . Mas podemos escrever 3.85 como

$$\frac{m_\omega}{m} = \frac{\frac{v_a^2}{c^2} - \frac{v_d^2}{c^2}}{2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} + \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \frac{v_a}{c} \arcsin \frac{v_a}{c} \right\}}. \quad (3.86)$$

Supondo que $v_a/c \cong 0$ então 3.86 fica

$$\frac{m_\omega}{m} = - \frac{\frac{v_d^2}{c^2}}{2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} + 1 \right\}}. \quad (3.87)$$

Vamos estudar os extremos de m_ω/m . Para $m_\omega/m = 0$ temos que $v_d/c = 0$, já que por hipótese $v_a/c = 0$. Para $m_\omega/m \rightarrow \pm\infty$ vem

$$2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} + 1 \right\} = 0. \quad (3.88)$$

Mas para quais valores reais de v_d/c isto poderia ocorrer? Isto ocorrerá quando

$$\sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} = -1. \quad (3.89)$$

Sabemos que $\arcsin \frac{v_d}{c}$ é definido para v_d/c entre -1 e 1 . Vamos fazer um esboço para o lado esquerdo da equação 3.89 (figura 3.26). Vemos que para valores reais de v_d/c o denominador da equação 3.87 não se anula. Para um elétron com $v_a = 0$ a sua velocidade de saída do capacitor em função de m_ω/m é mostrada na figura 3.27. Neste caso não teremos divergência como no formalismo Weberiano, mas o comportamento não é assintótico como no caso relativístico.

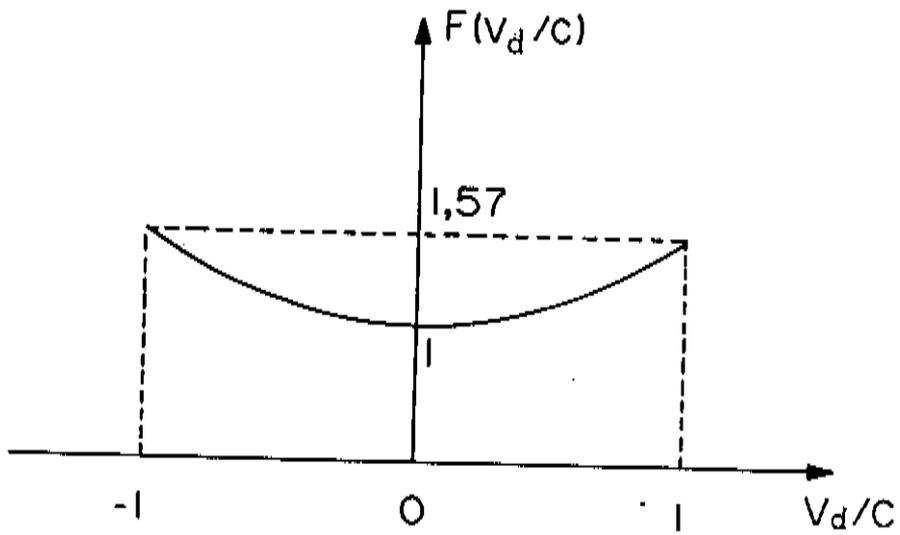


Figura 3.26: Comportamento do lado esquerdo da equação 3.89.

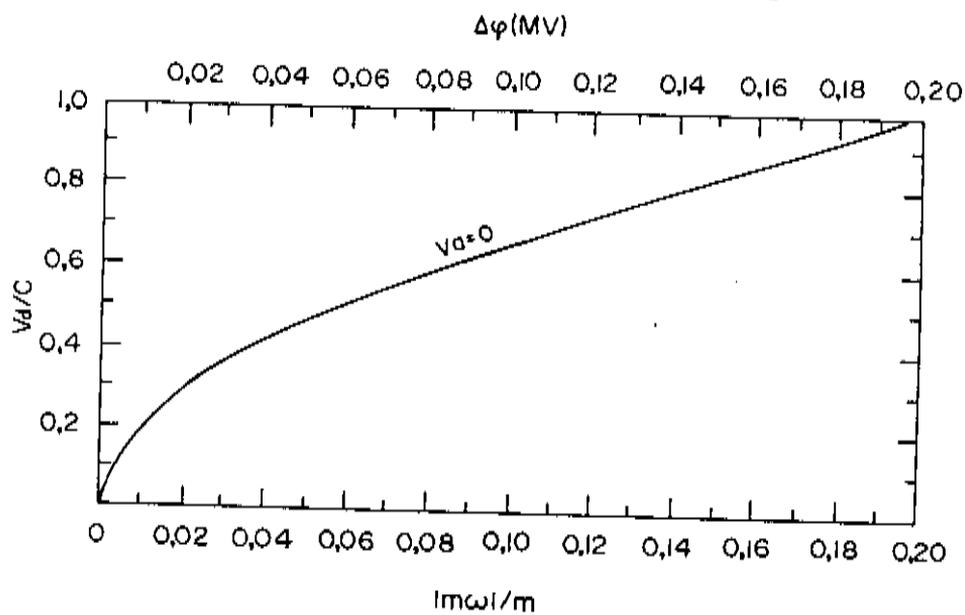


Figura 3.27: Velocidade de saída de um elétron com $v_\alpha = 0$ em função de $|m_\omega|/m$.

Para $v_a/c = 1$ a equação 3.86 fica

$$\frac{m_\omega}{m} = \frac{1 - \frac{v_d^2}{c^2}}{2\left\{\sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} + \frac{\pi}{2}\right\}} \quad (3.90)$$

Para a velocidade da partícula, pósitron, ter um valor zero na placa positiva devemos ter $m_\omega/m = 0,194$ (vide figura 3.28).

Agora vamos estudar o comportamento do quadrado da velocidade em função da energia cinética ganha pela partícula ($q\Delta\varphi$), estamos considerando um elétron com velocidade inicial $v_a \cong 0$. O comportamento (vide figura 3.29) é similar ao formalismo Weberiano. Repare que a curva sai por cima da curva do formalismo clássico.

Levando em consideração as equações 3.82 e 3.83. podemos escrever que

$$\frac{m_\omega}{m} = \frac{\frac{v_d^2}{c^2} - \frac{v_i^2}{c^2}}{2\left\{a\left[\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} + \frac{v_i}{c} \arcsin \frac{v_i}{c}\right] + \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c}\right\}} \quad (3.91)$$

Aqui também vamos supor $v_a \cong 0$, então a equação 3.91 fica

$$\frac{m_\omega}{m} = \frac{\frac{v_d^2}{c^2}}{2\left\{a\left[\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} + \frac{v_i}{c} \arcsin \frac{v_i}{c}\right] + 1\right\}} \quad (3.92)$$

Teremos divergência ($m_\omega/m \rightarrow \infty$) quando

$$a\left[\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} + \frac{v_i}{c} \arcsin \frac{v_i}{c}\right] = -1 \quad (3.93)$$

O máximo valor de v_i/c é 1 e quando isto ocorre temos que

$$a = -\frac{2}{\pi} = -0,637 \quad (3.94)$$

Podemos interpretar a equação 3.92 da seguinte maneira. Quando $m_\omega/m \rightarrow -\infty$ a partícula, supondo um elétron, atingirá sua "velocidade limite" $v_i = c$

em $a = -0,637$. Vamos diminuir a diferença de potencial entre as placas tal que, por exemplo, $m_\omega/m = -2$. Agora a partícula atingirá sua "velocidade limite", $v_i = c$, em $a = -0,473$. Supondo $m_\omega/m = -0,2$ a partícula atingirá sua "velocidade limite" em $a = 0,955$ e para $0 > m_\omega/m > -0,194$ a partícula deixará o capacitor sem atingir a "velocidade limite" (figura 3.30).

Um fato interessante é que a partícula nunca atingirá o seu valor limite no intervalo $-1 \leq a \leq -0,637$, para $v_a/c = 0$.

Concluindo podemos dizer que quando temos uma energia potencial tipo Phipps e a energia cinética clássica, a partícula atinge uma "velocidade limite" c para um certo potencial, numa certa posição interna ao capacitor, não havendo solução real para a velocidade além deste ponto. Não há divergências para a velocidade neste caso (como havia no formalismo Weberiano). Mas a velocidade limite que se obtém aqui não é assintótica como no caso relativístico, pois agora $dv/d(\Delta\varphi)$ não tende a zero quando $v \rightarrow c$ para um certo potencial.

Um gráfico qualitativo é apresentado a seguir comparando os quatro casos, figura 3.31.

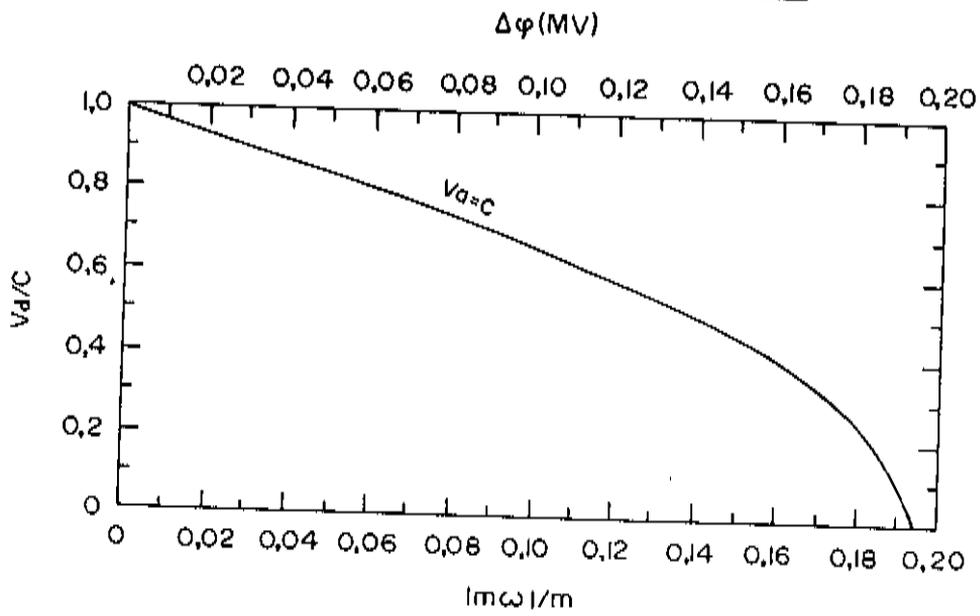


Figura 3.28: Velocidade de saída de um pósitron com $v_a = c$ em função de $|m_\omega|/m$.

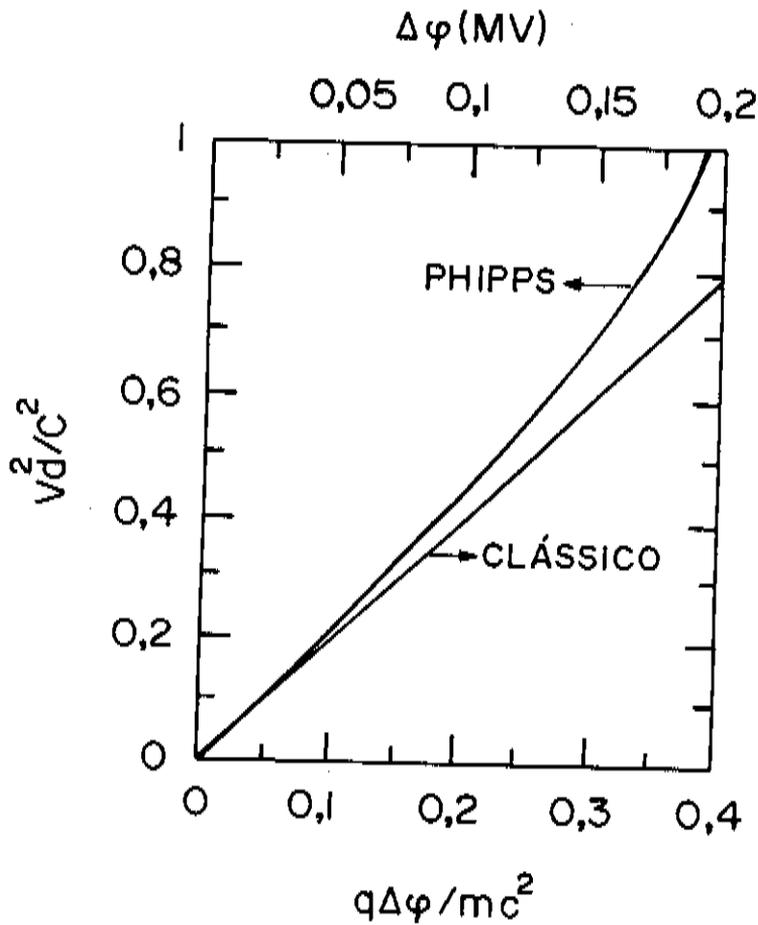


Figura 3.29: Comparação entre o formalismo clássico e o resultado utilizando o potencial de Phipps. Repare que Phipps é extremamente similar ao resultado obtido com o formalismo Weberiano no intervalo $0 \leq 2 |m_\omega|/m < 0,4$, ver figura 3.25.

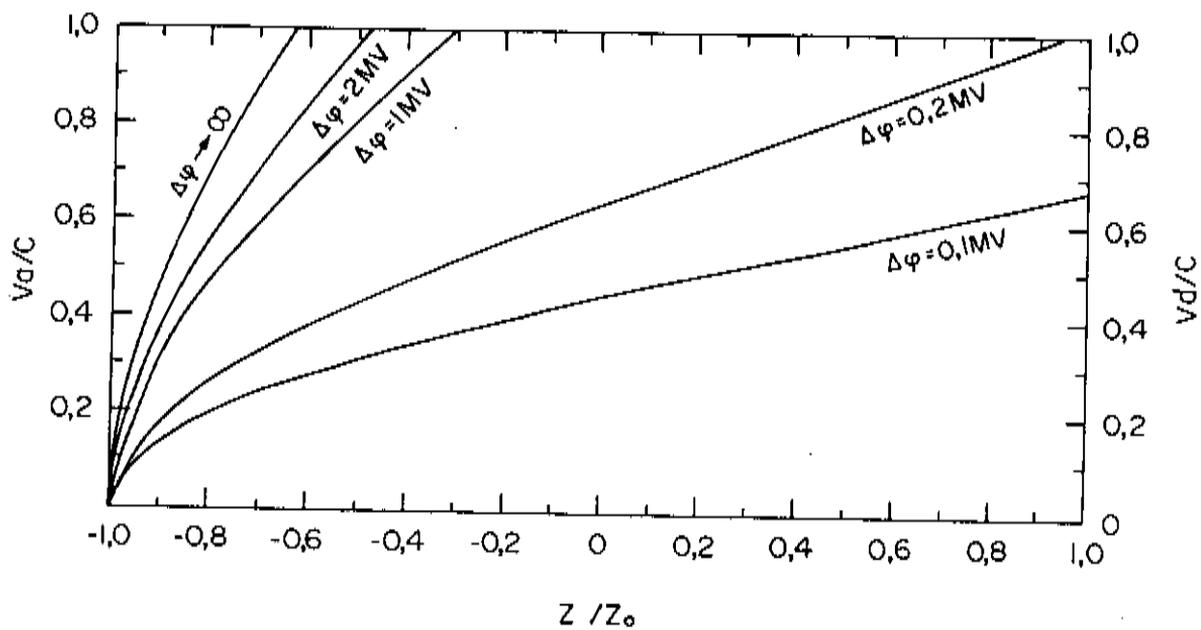


Figura 3.30: Comportamento da equação 3.92.

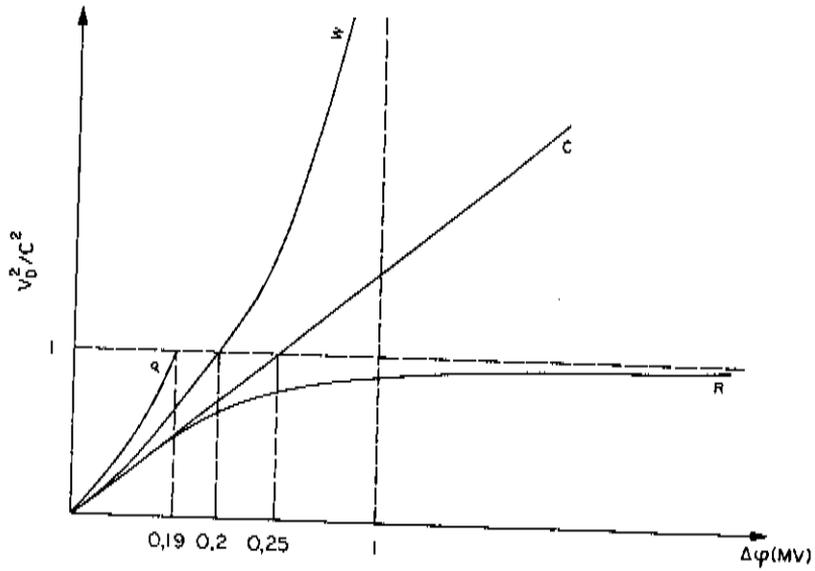


Figura 3.31: Elétron com velocidade inicial $v_a/c = 0$. Situações: relativística (R), clássica (C), Weberiana (W) e de Phipps (P).

Capítulo 4

Discussões e Conclusão

4.1 Discussões e Conclusão

Quando utilizamos o formalismo Weberiano obtemos alguns resultados extremamente interessantes como mencionado no final do capítulo 2. Dentre os estudos anteriormente realizados encontra-se o trabalho de A. K. T. Assis (ASSIS, 1989 b), onde estuda-se o movimento de um elétron movendo-se paralelamente às placas de um capacitor na presença de um campo magnético perpendicular ao campo elétrico (experimento de Kaufmann e Bucherer) e o resultado foi a explicação do experimento sem a introdução da variação da massa (ver também (WESLEY, 1990 a, b, c, d) e (ASSIS e CALUZI, 1991)).

Motivado pelos sucessos anteriores do formalismo Weberiano e em especial pela explicação do experimento de Kaufmann, iniciamos o estudo do movimento de partículas carregadas, especificamente elétrons e pósitrons, movendo-se perpendicularmente às placas de um capacitor plano ideal, sem a presença do campo magnético, com o objetivo de verificarmos se a eletrodinâmica de Weber mais a mecânica Newtoniana ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ou $E_K^G = mv^2/2$) prevê uma velocidade limite, como prevê a teoria da relatividade restrita.

Quando calculamos a força sobre a partícula, utilizando o formalismo Weberiano, exercida pelas placas do capacitor, obtivemos os resultados dados pelas equações 3.64 a 3.66. Repare que na região externa ao capacitor temos uma força que será exercida sobre a partícula quando esta estiver acelerada. Isto não é previsto no eletromagnetismo clássico.

Como dito anteriormente uma possível situação de teste para estas previsões é estudarmos como um oscilador harmônico carregado eletricamente é

afetado pela presença do capacitor. Não temos informações se algum experimento neste sentido foi realizado.

No formalismo Weberiano temos a conservação de energia, então quando igualamos a energia da partícula antes de sua entrada no capacitor, equação 3.54, com a energia da partícula no interior do capacitor, equação 3.56, obtemos a equação 3.72. Da análise desta equação foi que obtivemos nossos principais resultados.

Estes resultados estão sintetizados na figura 3.22. Nos casos (A) e (B) temos o comportamento da velocidade no interior do capacitor de uma partícula positiva. Quando comparamos este resultado com o caso clássico, figura 3.2, o comportamento é extremamente similar. Esta similaridade se torna mais clara quando comparamos as figuras 3.2 e 3.24.

O caso (C) da figura 3.22 mostra uma limitação para o formalismo Weberiano mais a mecânica Newtoniana. Para uma diferença de potencial finita (0.5MV) obtemos uma velocidade acima da velocidade da luz. Mas temos evidências experimentais da existência de uma velocidade limite (BERTOZZI, 1964). Além da não existência de uma velocidade limite o formalismo Weberiano conduz a divergências da velocidade no interior do capacitor e um exemplo disto é mostrado no gráfico (D) da figura 3.22. Este resultado corrobora as críticas de Helmholtz à formulação de Weber (HELMHOLTZ, 1872) de uma forma mais contundente. Na crítica de Helmholtz a instabilidade surgia quando uma força de origem não elétrica, por exemplo a força de atrito, estava presente. Em nosso caso a instabilidade é devida somente a forças de origem elétrica.

O caso (E) da figura 3.22 é o mais curioso de todos e mostra um aspecto da teoria de Weber que será discutido a seguir. Repare que temos um pósitron ($q > 0$) sendo acelerado na direção da placa positiva, e sua velocidade diverge em um ponto no interior do capacitor. O motivo deste comportamento é que nesta situação a carga estaria se comportando como se tivesse uma massa inercial negativa. Logo sua aceleração é oposta à direção da força aplicada.

Vimos no estudo do formalismo Weberiano ($Weber + mv^2/2$) que as equações que regiam este caso podiam ser colocadas na mesma forma que as equações do formalismo clássico ($Coulomb + mv^2/2$), apenas substituindo m por m' . Esta quantidade m' é o que chamamos de massa inercial efetiva e é dada por $m + qV(z)/2c^2$. Vemos então que ela depende da carga de prova e do potencial onde ela se encontra, mas não da velocidade da partícula. Os pontos em que a velocidade diverge são justamente aqueles onde a massa efetiva vai a zero,

e as situações mais interessantes são nas regiões em que a massa efetiva é negativa. No caso de um elétron vimos que a divergência ocorre para uma diferença de potencial de 1MV.

Esta massa efetiva dependente do potencial nos lembra da relação de Einstein $E = mc^2$, onde E agora seria a energia potencial eletrostática (qV). Só que deve ser enfatizado que no caso do formalismo Weberiano a massa efetiva depende não só do potencial mas também da geometria do problema, o que já não ocorre na relatividade. Por exemplo, caso tivéssemos uma mesma carga q movendo-se no interior de uma casca esférica carregada eletricamente até o potencial V ela se comportaria, de acordo com o formalismo Weberiano, como se tivesse uma massa inercial dada por $m + qV/3c^2$, (HELMHOLTZ, 1872), em vez de $m + qV/2c^2$. Portanto deve-se tomar cuidado com esta analogia com a relatividade. Para uma discussão aprofundada da relação entre massa e energia potencial dentro do contexto da relatividade ver (MARTINS, 1989) e (PETEAN, 1991).

Este é um ponto do formalismo Weberiano que necessita de um estudo mais detalhado. Uma primeira tentativa de suplantar estas dificuldades foi a adoção da modificação proposta por T. E. Phipps (PHIPPS, 1990 a) ao potencial obtido por W. Weber, equação 3.1, que é dada pela equação 3.2. Repare que a forma da equação é altamente sugestiva.

Quando se faz uma modificação deste tipo a massa efetiva deixa de ser independente da velocidade como no caso de Weber, e passa a ter um valor diferente para cada velocidade da partícula. Foi por este motivo que Phipps conseguiu superar as críticas de Helmholtz (ao menos para baixas velocidades). Mas obviamente o potencial de Phipps ainda não foi testado experimentalmente e no momento é apenas uma hipótese interessante.

Ao utilizarmos esta equação obtemos a energia dada pelas equações 3.82, 3.83 e 3.84. Empregando o mesmo procedimento do formalismo Weberiano, igualando a energia da partícula antes de entrar no capacitor e no interior do capacitor, temos a equação 3.87 onde $v_a/c \cong 0$.

A equação 3.87 está plotada no gráfico da figura 3.30. Aqui não podemos escrever v_i em função de m_ω/m como no caso Weberiano devido à presença da função transcendente $\arcsin v_i/c$. Então escrevemos m_ω/m em função de v_i/c .

O resultado, figura 3.30, foi uma "velocidade limite" $v/c = 1$ mas seu comportamento não é assintótico como na relatividade, pois agora $dv/d(\Delta\varphi)$ não tende a zero quando $v \rightarrow c$ para um certo potencial. Além deste ponto a

velocidade torna-se imaginária.

Para uma comparação final dos formalismos relativístico, clássico, Weberiano e de Phipps fizemos um gráfico qualitativo mostrado na figura 3.31. Repare que o formalismo de Phipps não apresenta divergência mas sua inadequação em relação ao formalismo relativístico é mais acentuada que o formalismo Weberiano.

Como não conhecemos nenhum resultado experimental conclusivo que mostre cargas sendo aceleradas até atingir velocidades superiores à da luz podemos concluir que dos quatro casos estudados o relativístico é o único compatível com os resultados experimentais.

4.2 Perspectivas

Apesar do que concluímos esta tese abre várias possibilidades futuras de pesquisa que valem a pena serem mencionadas. Podemos, por exemplo, retomar o problema usando capacitores reais de dimensão finita, incluindo também os efeitos de borda. Podemos também incluir os efeitos da radiação eletromagnética e dentro do formalismo de Weber isto pode ser feito usando o tempo retardado como utilizado por Wesley (WESLEY, 1990 a, b, c, d). Os três formalismos problemáticos utilizaram a energia cinética clássica. Uma outra possibilidade é utilizar o formalismo de Weber ou de Phipps juntamente com uma energia cinética relativística. Isto não é tão arbitrário ou incompatível assim como talvez possa parecer à primeira vista. O ponto é que a própria energia cinética clássica pode ser derivada como uma energia de interação gravitacional de qualquer corpo com o restante do universo, usando para isto uma energia do tipo da de Weber na gravitação (ASSIS, 1989 a). Pois bem, recentemente Wesley conseguiu mostrar que mesmo a energia cinética relativística pode ser derivada por um procedimento semelhante utilizando para a gravitação um potencial do tipo de Weber mas ligeiramente modificado (WESLEY, 1990 d). É provável que ao utilizarmos uma energia de Weber ou de Phipps juntamente com uma energia cinética relativística também obtenhamos uma velocidade limite como no caso de Coulomb mais energia cinética relativística, mas uma análise detalhada destes casos está além dos objetivos desta tese. Por último vale ressaltar a importância de se testar experimentalmente, para baixas velocidades ($v^2/c^2 \ll 1$), a dependência da massa inercial com o valor da carga e do potencial eletrostático onde esta se encontra, como previsto pela lei de Weber. Cremos que tal estudo tem uma importância muito grande como um teste definitivo da validade ou das limitações da lei de Weber.

Apêndice A

Cálculo da energia potencial de uma partícula em um capacitor plano ideal utilizando o potencial de Weber e o potencial de Phipps

Em nosso problema vamos supor uma partícula carregada incidindo perpendicularmente sobre a placa negativa do capacitor com uma velocidade inicial v_a (velocidade antes de entrar no capacitor) dada por $v_a = v_a \hat{k}$ e sua posição dada por $r_1 = z_1 \hat{k}$. Temos três regiões distintas para calcularmos a energia: $z_1 \leq -z_o$, $-z_o \leq z_1 \leq z_o$ e $z_o \leq z_1$. Utilizando o formalismo Weberiano vamos calcular a energia na região $-z_o \leq z_1 \leq z_o$ e para isto vamos utilizar a energia potencial obtida por W. Weber (WEBER, 1848) dada por

$$U_{ij}^w = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_o r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2}\right). \quad (\text{A.1})$$

onde: q_i e q_j são duas cargas pontuais,
 ϵ_o permissividade do vácuo ($\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m),
 r_{ij} distância entre q_i e q_j ,
 \dot{r}_{ij} velocidade relacional entre q_i e q_j ,
 $c = 2.99 \times 10^8$ m/s.

Na fórmula de Weber esta constante c é a razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga. Os primeiros a medi-la experimentalmente foram Weber e Kohlrausch, em 1856 (KOHLRAUSCH e WEBER, 1856). O valor que encontraram foi, dentro do erro experimental, o mesmo

valor que a velocidade da luz no vácuo. Esta medida foi um dos primeiros fatos quantitativos concretos indicando uma conexão forte e profunda entre o eletromagnetismo e a óptica (ROSENFELD, 1957), (KIRCHNER, 1957), (JUNGNICKEL e McCORMMACH, 1986, pp: 145-6 e 176-7). O resultado obtido por Kohlrausch e Weber foi utilizado por Maxwell em apoio à sua própria teoria eletromagnética (T.E.M. art. 771 e 787).

A equação A.1 relaciona cargas pontuais, e como as placas do capacitor são extensas faremos $q_j = \pm \sigma da$, onde $\pm \sigma$ são as densidades de carga das placas, que supomos distribuídas homoganeamente nas placas, e da é o elemento de área das placas. Assim a equação A.1 pode ser escrita como

$$dU_{ij}^{\omega} = \pm \frac{q_i \sigma da}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2}{2c^2 r_{ij}^2}\right), \quad (\text{A.2})$$

onde utilizamos o resultado da equação 1.3. A energia total é obtida quando integramos a equação A.2:

$$U_{\omega} = \int_{S_2} dU_{12} + \int_{S_3} dU_{13}. \quad (\text{A.3})$$

Calculando U: Vamos utilizar coordenadas cilíndricas para facilitar nossos cálculos. Temos que, dentro do capacitor:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = z_1 \hat{k}, \\ \mathbf{r}_2 = \rho \cos \theta \hat{i} + \rho \sin \theta \hat{j} + z_0 \hat{k}, \quad \dots \\ \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\rho \cos \theta \hat{i} - \rho \sin \theta \hat{j} + (z_1 - z_0) \hat{k}, \\ r_{12} = (\rho^2 + (z_1 - z_0)^2)^{1/2}, \\ \mathbf{v}_1 = v_1 \hat{k}, \\ \mathbf{v}_2 = 0, \\ \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = v_1 \hat{k}. \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Ainda:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 &= z_1 \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{r}_3 &= \rho \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \rho \sin \theta \hat{\mathbf{j}} - z_o \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{r}_{13} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = -\rho \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \rho \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + (z_1 + z_o) \hat{\mathbf{k}}, \\ r_{13} &= (\rho^2 + (z_1 + z_o)^2)^{1/2}, \\ \mathbf{v}_1 &= v_1 \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_{13} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = v_1 \hat{\mathbf{k}}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Sustituindo A.4 e A.5 em A.2 teremos

$$dU_{12}^\omega = \frac{q_1 \sigma da}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{(\rho^2 + (z_1 - z_o)^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{v_1^2 (z_1 - z_o)^2}{2c^2 (\rho^2 + (z_1 - z_o)^2)}\right), \quad (\text{A.6})$$

$$dU_{13}^\omega = -\frac{q_1 \sigma da}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{(\rho^2 + (z_1 + z_o)^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{v_1^2 (z_1 + z_o)^2}{2c^2 (\rho^2 + (z_1 + z_o)^2)}\right). \quad (\text{A.7})$$

Substituindo A.6 e A.7 em A.3 e sabendo que $da = \rho d\rho d\theta$ teremos

$$\begin{aligned} U_P^\omega &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{q_1 \rho d\rho d\theta}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{(\rho^2 + (z_1 - z_o)^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{v_1^2 (z_1 - z_o)^2}{2c^2 (\rho^2 + (z_1 - z_o)^2)}\right) \\ &- \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{q_1 \rho d\rho d\theta}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{(\rho^2 + (z_1 + z_o)^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{v_1^2 (z_1 + z_o)^2}{2c^2 (\rho^2 + (z_1 + z_o)^2)}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Calculando a integral obtemos a energia potencial da partícula, onde a hipótese que $R^2 \gg (z_1 + z_o)^2$ e $R^2 \gg (z_1 - z_o)^2$ foi utilizada. Assim:

$$U_P^\omega = \frac{q\sigma}{\epsilon_o} z_1 \left(1 + \frac{v_1^2}{2c^2}\right), \quad -z_o \leq z_1 \leq z_o. \quad (\text{A.9})$$

Repare que esta energia potencial é a clássica corrigida por um fator dependente da velocidade.

Utilizaremos agora uma modificação proposta por T. E. Phipps (PHIPPS, 1990 a) à equação A.1:

$$U_{ij}^P = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{r_{ij}^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo $q_j = \pm\sigma da$ e utilizando a equação 1.3, a equação A.10 pode ser escrita como

$$dU_{ij}^P = \frac{\pm q_i \sigma da}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2}{c^2 r_{ij}^2}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.11})$$

Neste caso calcularemos a energia potencial para as três regiões possíveis: 1) $z_1 \leq -z_0$; 2) $-z_0 \leq z_1 \leq z_0$ e 3) $z_0 \leq z_1$. Aqui vamos considerar o potencial de cada placa para no final somarmos o potencial da configuração dada pela figura 1.1.

1) Potencial devido à placa S_3

A energia potencial devido à placa S_3 , figura A.1, é obtida quando substituímos A.5 em A.11 e integramos. Com isto obtemos

$${}_1U_{13}^P = \frac{-q_i \sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2 (z_1 + z_0)^2}{c^2 (\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)}}. \quad (\text{A.12})$$

Fazemos uma mudança de variável:

$$t \equiv \pm \frac{v_1 (z_1 + z_0)}{c (\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.13})$$

Para $(z_1 + z_0)$ temos duas possibilidades: A) $z_1 + z_0 \geq 0$, portanto $z_1 \geq -z_0$; e B) $z_1 + z_0 < 0$, portanto $z_1 < -z_0$. Primeiro vamos estudar a possibilidade em que $z_1 + z_0 \geq 0$ (logo pegamos o sinal superior em A.13 pois por definição vamos sempre escolher t positivo) e quando fazemos isto estamos calculando a energia potencial na região indicada na figura A.2. Integrando A.12 em θ :

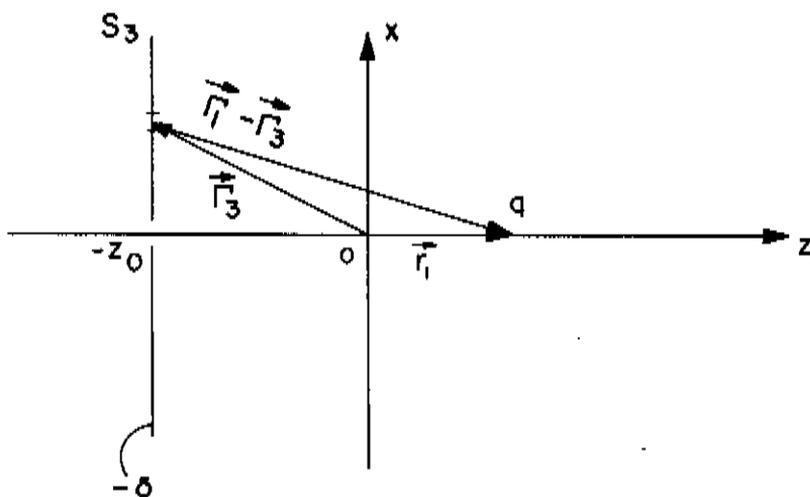


Figura A.1: Placa S_3 .

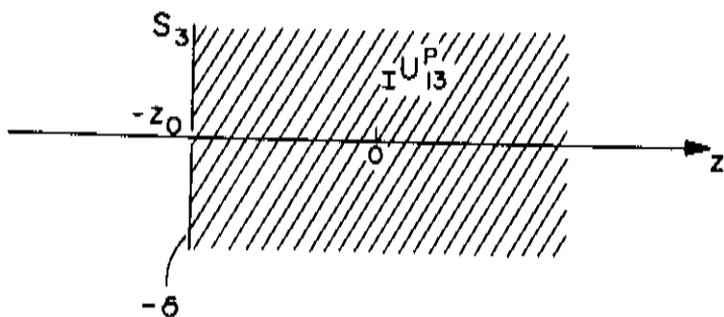


Figura A.2: O hachurado indica a região de cálculo.

$${}_I U_{13}^P = \frac{-q_i \sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2(z_1 + z_0)^2}{c^2(\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)}}. \quad (\text{A.14})$$

Levando em consideração A.13, os limites de integração são dados por

$$\rho = 0 \longrightarrow t = \frac{v_1}{c},$$

$$\rho = R \longrightarrow t = \frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(R^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}},$$

e temos que

$$\frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}} = -\frac{v_1(z_1 + z_0)}{c} \frac{dt}{t^2}. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo os limites de integração e a equação A.15 em A.14 teremos

$${}_I U_{13}^P = \frac{q\sigma(z_1 + z_0)v_1}{2\epsilon_0 c} \int_{\frac{v_1}{c}}^{\frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(R^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}}} \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{t^2} dt. \quad (\text{A.16})$$

Quando calculamos a integral A.16 obtemos

$$\begin{aligned} {}_I U_{13}^P = & \frac{q\sigma(z_1 + z_0)v_1}{2\epsilon_0 c} \left\{ -\sqrt{1 - \frac{v_1^2(z_1 + z_0)^2}{c^2(R^2 + (z_1 + z_0)^2)}} \cdot \frac{c\sqrt{R^2 + (z_1 + z_0)^2}}{v_1(z_1 + z_0)} \right. \\ & \left. - \arcsin \frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(R^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}} + \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \cdot \frac{c}{v_1} + \arcsin \frac{v_1}{c} \right\}. \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Agora vamos calcular a energia potencial para $z_1 + z_0 < 0$ e quando fazemos isto estamos calculando a energia potencial na região indicada na figura A.3. Neste caso a equação A.13 é dada por (agora pegamos o sinal de baixo

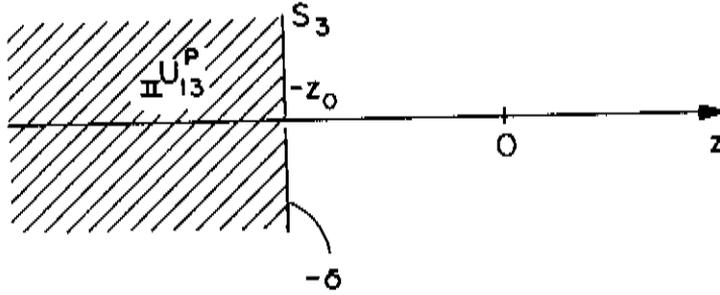


Figura A.3: O hachurado indica a região de cálculo.

em A.13 para que t seja positivo):

$$t = -\frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.18})$$

Então temos

$$\frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}} = \frac{v_1(z_1 + z_0) dt}{c t^2}. \quad (\text{A.19})$$

Os limites de integração são dados por

$$\rho = 0 \rightarrow t = \frac{v_1}{c},$$

$$\rho = R \rightarrow t = -\frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(R^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}}.$$

Substituindo A.19 e os limites de integração na equação A.12 temos

$${}_{II}U_{13}^P = -\frac{q\sigma(z_1 + z_0)v_1}{2\epsilon_0 c} \int_{\frac{v_1}{c}}^{-\frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(R^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}}} \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{t^2} dt. \quad (\text{A.20})$$

Calculando a integral temos

$$\begin{aligned}
 {}_{II}U_{13}^P = & -\frac{q\sigma(z_1 + z_0)v_1}{2\epsilon_0 c} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_1^2(z_1 + z_0)^2}{c^2(R^2 + (z_1 + z_0)^2)}} \cdot \frac{c\sqrt{R^2 + (z_1 + z_0)^2}}{v_1(z_1 + z_0)} + \right. \\
 & \left. + \arcsin \frac{v_1(z_1 + z_0)}{c(R^2 + (z_1 + z_0)^2)^{1/2}} + \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \cdot \frac{c}{v_1} + \arcsin \frac{v_1}{c} \right\}. \quad (\text{A.21})
 \end{aligned}$$

2) Potencial devido à placa S_2

Fazendo um cálculo análogo ao anterior chegamos que (ver figura A.4):

$$\begin{aligned}
 {}_I U_{12}^P = & -\frac{q\sigma(z_1 - z_0)v_1}{2\epsilon_0 c} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_1^2(z_1 - z_0)^2}{c^2(R^2 + (z_1 - z_0)^2)}} \cdot \frac{c\sqrt{R^2 + (z_1 - z_0)^2}}{v_1(z_1 - z_0)} - \right. \\
 & \left. - \arcsin \frac{v_1(z_1 - z_0)}{c(R^2 + (z_1 - z_0)^2)^{1/2}} + \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \cdot \frac{c}{v_1} + \arcsin \frac{v_1}{c} \right\}, \quad (\text{A.22})
 \end{aligned}$$

válido para $z_1 \geq z_0$. Para a outra região temos

$$\begin{aligned}
 {}_{II}U_{12}^P = & \frac{q\sigma(z_1 - z_0)v_1}{2\epsilon_0 c} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_1^2(z_1 - z_0)^2}{c^2(R^2 + (z_1 - z_0)^2)}} \cdot \frac{c\sqrt{R^2 + (z_1 - z_0)^2}}{v_1(z_1 - z_0)} + \right. \\
 & \left. + \arcsin \frac{v_1(z_1 - z_0)}{c(R^2 + (z_1 - z_0)^2)^{1/2}} + \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \cdot \frac{c}{v_1} + \arcsin \frac{v_1}{c} \right\}, \quad (\text{A.23})
 \end{aligned}$$

válido para $z_1 \leq z_0$.

Fazendo um esquema geral das situações em que calculamos o potencial, figura A.5. então o potencial para as diversas regiões é dado por:

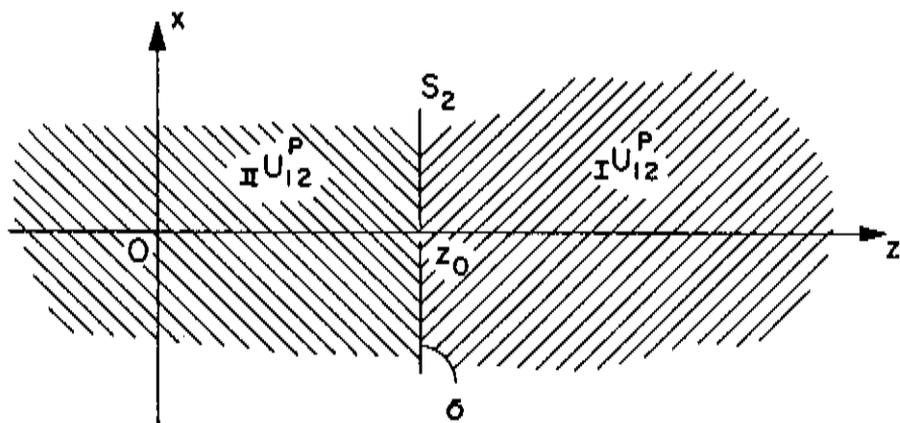


Figura A.4: O hachurado indica a região de cálculo.

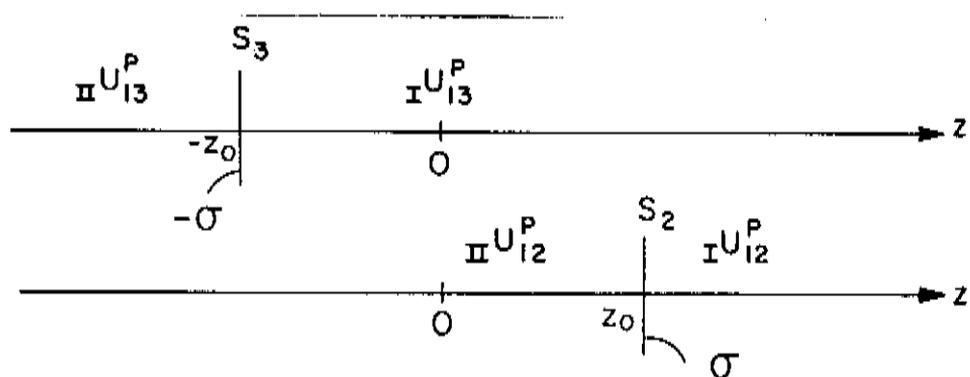


Figura A.5: Esquema geral para os cálculos dos potenciais.

$$U_P^P = \begin{cases} {}_{II}U_{13}^P + {}_{II}U_{12}^P, & \text{para } z_1 \leq -z_0, \\ {}_I U_{13}^P + {}_{II}U_{12}^P, & \text{para } -z_0 \leq z_1 \leq z_0, \\ {}_I U_{13}^P + {}_I U_{12}^P, & \text{para } z_0 \leq z_1. \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Quando substituímos os valores na equação A.24 obtemos que, quando $R^2 \gg (z_1 + z_0)^2$ e $R^2 \gg (z_1 - z_0)^2$:

$$U_P^P(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \frac{v_a}{c} \arcsin \frac{v_a}{c} \right\}, \quad (\text{A.25})$$

$$U_P^P(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = \frac{q\sigma z_1}{\epsilon_0} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} + \frac{v_i}{c} \arcsin \frac{v_i}{c} \right\}, \quad (\text{A.26})$$

$$U_P^P(z_0 \leq z_1) = \frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} \left\{ \sqrt{1 - \frac{v_d^2}{c^2}} + \frac{v_d}{c} \arcsin \frac{v_d}{c} \right\}. \quad (\text{A.27})$$

Expandindo as equações A.25, A.26 e A.27 em série de potência e considerando somente até segunda ordem em v/c temos

$$U_P^w(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} - \frac{q\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{v_a^2}{c^2}, \quad (\text{A.28})$$

$$U_P^w(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = +\frac{q\sigma z_1}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma z_1}{2\epsilon_0} \frac{v_i^2}{c^2}, \quad (\text{A.29})$$

$$U_P^w(z_0 \leq z_1) = +\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0} + \frac{q\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{v_d^2}{c^2}, \quad (\text{A.30})$$

onde U_P^w é a energia potencial de Weber nestas regiões. Comparando a equação A.29 e A.9 vemos que a energia potencial Weberiana é uma aproximação em

segunda ordem de v/c da energia potencial calculada a partir da equação A.10. o potencial de Phipps.

Deve ser feita a seguinte observação sobre a energia potencial Weberiana U_P^ω . Caso tivéssemos utilizado o potencial dado por A.1 e calculado a energia o resultado seria o mesmo que as equações A.28, A.29 e A.30.

A energia potencial clássica também é uma aproximação da energia potencial Weberiana. Assim temos:

$$U_P^C(z_1 \leq -z_0) = -\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.31})$$

$$U_P^C(-z_0 \leq z_1 \leq z_0) = +\frac{q\sigma z_1}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.32})$$

$$U_P^C(z_0 \leq z_1) = +\frac{q\sigma z_0}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.33})$$

Apêndice B

As grandezas relacionais $\dot{r}_{1,2}$ e $\hat{r}_{1,2}$ em função das grandezas vetoriais

Temos que $\mathbf{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ e $\mathbf{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$. A diferença entre eles é dada por

$$\mathbf{r}_{1,2} \equiv (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\hat{j} + (z_1 - z_2)\hat{k}, \quad (\text{B.1})$$

e o módulo por

$$r_{1,2} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (\text{B.2})$$

Então:

$$\dot{r}_{1,2} \equiv \frac{dr_{1,2}}{dt} = \frac{(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + (z_1 - z_2)(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}}, \quad (\text{B.3})$$

que pode ser escrito como

$$\dot{r}_{1,2} = \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}} \cdot \mathbf{v}_{1,2}, \quad (\text{B.4})$$

ou

$$\dot{r}_{1,2} = \hat{r}_{1,2} \cdot \mathbf{v}_{1,2}, \quad (\text{B.5})$$

onde $\hat{r}_{1,2} \equiv \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$.

Partindo de $d(r_{ij}\hat{r}_{ij})/dt$ temos que

$$\frac{d(r_{ij}\hat{r}_{ij})}{dt} = \dot{r}_{ij}\hat{r}_{ij} + r_{ij}\ddot{r}_{ij}, \quad (\text{B.6})$$

que pode ser escrito como

$$r_{ij}\ddot{r}_{ij} = \frac{d(r_{ij}\hat{r}_{ij})}{dt} - \dot{r}_{ij}^2. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo B.5 em B.7 temos

$$r_{ij}\ddot{r}_{ij} = \frac{d(r_{ij}\hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})}{dt} - (\hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2, \quad (\text{B.8})$$

mas $\mathbf{r}_{ij} = r_{ij}\hat{r}_{ij}$. Substituindo isto em B.8 obtemos

$$r_{ij}\ddot{r}_{ij} = \frac{d(\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})}{dt} - (\hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2 = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2 + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij}. \quad (\text{B.9})$$

Logo:

$$\ddot{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} [\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2 + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij}]. \quad (\text{B.10})$$

Apêndice C

Derivação da lei de força de Ampère a partir da lei de força de Weber

Historicamente o processo inverso foi o que ocorreu, ou seja, Weber derivou sua lei a partir da força de Ampère. Quem estiver interessado nesta derivação consultar (WEBER, 1848). (T. E. M., art. 846–851) ou (H. T. A. E., p. 200).

Nesta derivação vamos supor que cada elemento de corrente $I_i d\mathbf{l}_i$ é constituído de cargas positivas dq_{i+} e negativas dq_{i-} , com velocidades \mathbf{v}_{i+} e \mathbf{v}_{i-} , e acelerações \mathbf{a}_{i+} e \mathbf{a}_{i-} , respectivamente. Além disto suporemos que cada elemento de corrente é neutro, $-dq_{i+} = dq_{i-}$.

Como estamos tratando com elementos infinitesimais temos $\mathbf{r}_{i+} = \mathbf{r}_{i-} = \mathbf{r}_i$ (vide figura C.1). A força do elemento 2 em 1 é dada por

$$d\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{2-,1-} + \mathbf{F}_{2-,1+} + \mathbf{F}_{2+,1-} + \mathbf{F}_{2+,1+}, \quad (\text{C.1})$$

onde $\mathbf{F}_{2-,1-}$ é a força que as cargas negativas em 2 exercem nas cargas negativas em 1, e de modo semelhante para as outras ($\mathbf{F}_{2-,1+}$, etc).

Utilizando a força de Weber dada pela equação 2.5

$$\mathbf{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} - \frac{3}{2} (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})^2 + \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij}] \right\}, \quad (\text{C.2})$$

podemos escrever as $d\mathbf{F}_{ji}$ como, lembrado que $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$:

$$d\mathbf{F}_{2-,1-} = \frac{dq_2 - dq_1 - \mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} \left[c^2 + \mathbf{v}_{1-,2-} \cdot \mathbf{v}_{1-,2-} - \frac{3}{2} (\hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot \mathbf{v}_{1-,2-})^2 + \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{a}_{1-,2-} \right], \quad (\text{C.3})$$

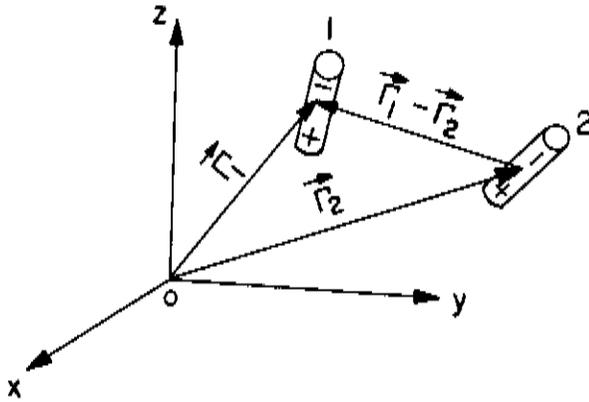


Figura C.1: Posição dos elementos de corrente eletricamente neutros em relação a um referencial O .

$$d\mathbf{F}_{2-,1+} = -\frac{dq_2+dq_1+\mu_o}{4\pi} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[c^2 + \mathbf{v}_{1+,2-} \cdot \mathbf{v}_{1+,2-} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \mathbf{v}_{1+,2-})^2 + \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{a}_{1+,2-} \right], \quad (\text{C.4})$$

$$d\mathbf{F}_{2+,1-} = -\frac{dq_2+dq_1+\mu_o}{4\pi} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[c^2 + \mathbf{v}_{1-,2+} \cdot \mathbf{v}_{1-,2+} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \mathbf{v}_{1-,2+})^2 + \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{a}_{1-,2+} \right], \quad (\text{C.5})$$

$$d\mathbf{F}_{2+,1+} = \frac{dq_2+dq_1+\mu_o}{4\pi} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[c^2 + \mathbf{v}_{1+,2+} \cdot \mathbf{v}_{1+,2+} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \mathbf{v}_{1+,2+})^2 + \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{a}_{1+,2+} \right]. \quad (\text{C.6})$$

Somando as equações C.3, C.4, C.5 e C.6 temos que

$$d\mathbf{F}_{2,1} = -\frac{dq_2 + dq_1 + \mu_0 \hat{r}_{12}}{4\pi r_{12}^2} [2(\mathbf{v}_{1+} - \mathbf{v}_{1-}) \cdot (\mathbf{v}_{2+} - \mathbf{v}_{2-}) - 3\hat{r}_{12} \cdot (\mathbf{v}_{1+} - \mathbf{v}_{1-}) \hat{r}_{12} \cdot (\mathbf{v}_{2+} - \mathbf{v}_{2-})]. \quad (\text{C.7})$$

Utilizando as relações

$$I_1 d\mathbf{l}_1 = dq_{1+} \mathbf{v}_{1+} + dq_{1-} \mathbf{v}_{1-} = dq_{1+} (\mathbf{v}_{1+} - \mathbf{v}_{1-}), \quad (\text{C.8})$$

$$I_2 d\mathbf{l}_2 = dq_{2+} \mathbf{v}_{2+} + dq_{2-} \mathbf{v}_{2-} = dq_{2+} (\mathbf{v}_{2+} - \mathbf{v}_{2-}), \quad (\text{C.9})$$

obtemos:

$$d\mathbf{F}_{21} = -\mu_0 I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} [2d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\mathbf{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2)]. \quad (\text{C.10})$$

Esta é a lei de força entre elementos de corrente obtida por Ampère (AMPÈRE, 1827). Esta derivação da força de Ampère a partir da lei de Weber foi baseada em (WESLEY, 1987) e (ASSIS, 1989 a).

Apêndice D

A lei de força de Weber e a conservação do momento linear, do momento angular e da energia

Vamos supor que os corpos apenas interagem entre si através de forças do tipo de Weber:

$$\mathbf{F}_j = \frac{K}{r_{ij}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) \hat{r}_{ij}, \quad (\text{D.1})$$

onde $K \equiv \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0}$.

D.1 Conservação do momento linear

O momento linear de duas partículas interagentes é definido por

$$\mathbf{p} \equiv m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \quad (\text{D.2})$$

Assim

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (\text{D.4})$$

onde $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21}$ e $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{12}$. Usando o fato de que a força de Weber satisfaz

à terceira lei de Newton (ação e reação) vem então

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (\text{D.5})$$

Este resultado pode ser facilmente generalizado para um número qualquer de cargas interagindo através da lei de Weber.

D.2 Conservação do momento angular

O momento angular de duas partículas é definido por

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2. \quad (\text{D.6})$$

Assim

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}. \quad (\text{D.7})$$

Mas $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Então:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{21}, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{21}. \quad (\text{D.9})$$

Como a lei de Weber satisfaz à terceira lei de Newton na forma forte ($\mathbf{r}_{12} // \mathbf{F}_{21}$) temos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \quad (\text{D.10})$$

Este resultado pode ser facilmente generalizado para um número qualquer de corpos interagindo entre si através de forças de Weber e de forças de outro tipo (gravitacionais, elásticas, etc). desde que todas elas também satisfaçam à terceira lei de Newton na forma forte.

D.3 Conservação da energia

Vamos supor que temos 2 corpos interagindo entre si. Definimos a energia total por:

$$E_T \equiv T + U, \quad (D.11)$$

onde T é a energia cinética dada por

$$T \equiv \frac{m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}{2}, \quad (D.12)$$

e U a energia potencial de Weber dada por

$$U \equiv \frac{K}{r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right). \quad (D.13)$$

Assim

$$\frac{dE_T}{dt} = m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{K}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12} \ddot{r}_{12}}{c^2}\right). \quad (D.14)$$

Sabendo que $\dot{r}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \mathbf{v}_{12}$ e levando em consideração a segunda e terceira leis de Newton e a relação D.1 vem :

$$\frac{dE_T}{dt} = \mathbf{F}_{21} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \mathbf{F}_{21} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad (D.15)$$

portanto

$$\frac{dE_T}{dt} = 0. \quad (D.16)$$

Este resultado também pode ser facilmente generalizado para um número qualquer de corpos interagindo através de forças de Weber e de forças de outro tipo (gravitacionais, elásticas, etc) desde que elas satisfaçam à terceira lei de Newton na forma forte e também possam ser derivadas de uma energia potencial (dependente ou não da velocidade).

Bibliografia

- [1] ABRANTES, P. C. C. Newton e a física francesa no século XIX. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 2(1):5–31, 1989.
- [2] AMPÈRE, A. M. Théorie des phénomènes électro–dynamiques uniquement déduite de l'expérience. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institute de France*, 6:175–387, 1827.
- [3] ASSIS, A. K. T. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989 a.
- [4] ASSIS, A. K. T. Weber's law and mass variation. *Physics Letters A*, 136:277–280, 1989 b.
- [5] ASSIS, A. K. T. Modern experiments related to Weber's electrodynamics. Em: U. Bartocci e J. P. Wesley (editores), *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics, Perugia, Italia*, pp. 8–12. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1990.
- [6] ASSIS, A. K. T. e CALUZI, J. J. A limitation of Weber's law. Submetido para publicação, 1991 .
- [7] ASSIS, A. K. T. e CLEMENTÉ, R. A. The ultimate speed implied by theories of Weber's type. A sair em *International Journal of Theoretical Physics*, 1991.
- [8] BERTOZZI, W. Speed and kinetic energy of relativistic electrons. *American Journal of Physiscs*, 32:551–562, 1964.
- [9] CANEVA, K. L. Ampère, the etherians, and the Ørsted connexion. *British Journal for the History of Science*, 13:121–138, 1980.

- [10] COULOMB, C. A. Sur l'électricité et le magnétisme. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1785.
- [11] EBY, P. B. On the perihelion precession as a Machian effect. *Letter Nuovo Cimento*, 18:93–96, 1977.
- [12] FECHNER, G. T. Ueber die Verknüpfung der Faraday'schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampèreschen elektrodynamischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 64:337–345, 1845.
- [13] FOX, R. The rise and fall of Laplacian physics. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 4:89–139, 1975.
- [14] FRANKEL, E. The search for a corpuscular theory of double refraction: Malus, Laplace and the prize competition of 1808. *Centaurus*, 18:222–245, 1974.
- [15] FRANKEL, E. J. B. Biot and mathematization of experimental physics in Napoleonic France. *Historical Studies in Physical Sciences*, 8:33–72, 1977.
- [16] FRANKSEN, O. I. *H. C. Ørsted— A Man of the Two Cultures*. Birkerød, Strandberg, 1981.
- [17] GRANEAU, P. Electromagnetic jet propulsion in the direction of current flow. *Nature*, 295:311–312, 1982.
- [18] GRANEAU, P. First indication of Ampère tension in solid electric conductors. *Physics Letters*, 97A:253–255, 1983 a.
- [19] GRANEAU, P. Compatibility of Ampère and Lorentz force laws with the virtual-work concept. *Il Nuovo Cimento*, 78B:213–233, 1983 b.
- [20] GRANEAU, P. *Ampère-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Nonantum, 1985.
- [21] GRANEAU, P. The Ampère-Neumann electrodynamics of metallic conductors. *Fortschritte der Physik*, 34:457–503, 1986.
- [22] GRANEAU, P. Railgun recoil and relativity. *Journal of Physics D*, 20:391–393, 1987.

- [23] GRANEAU, P. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990 a.
- [24] GRANEAU, P. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*. 13:191–201, 1990 b.
- [25] GRANEAU, P. The riddle of inertia. *Electronics World and Wireless World*, 96:60–62, 1990 c.
- [26] GRASSMANN, H. Neue Theorie der Elektrodynamik. *Annalen der Physik und Chemie*, 64:1–18. 1845.
- [27] HELMHOLTZ, H. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhend leitend Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72:57–129, 1870.
- [28] HELMHOLTZ, H. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872. Publicado originalmente em *Monatsberichte der Berliner Akademie*, pp: 247–256, 1872.
- [29] JUNGnickel, C. e McCORMMACH, R. *Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein*. The University of Chicago Press, Chicago, 1986. 2 vol.
- [30] KIRCHNER, F. Determination of the velocity of light from electromagnetic measurements. *American Journal of Physics*, 25:623–629, 1957.
- [31] KOENIGSBERGER, L. *Hermann von Helmholtz*. Dover, New York, 1965.
- [32] KOHLRAUSCH, R. e WEBER, W. Ueber die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik und Chemie*, 99:10–25, 1856.
- [33] LAVOISIER, A. L. e LAPLACE, P. L. Mémoire sur la chaleur. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*. 355–405, 1783.
- [34] MALUS, E. L. Théorie de la double réfraction. *Mémoires de l'Institut des Sciences*, 2:303–508, 1811.

- [23] GRANEAU, P. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990 a.
- [24] GRANEAU, P. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*, 13:191–201, 1990 b.
- [25] GRANEAU, P. The riddle of inertia. *Electronics World and Wireless World*, 96:60–62, 1990 c.
- [26] GRASSMANN, H. Neue Theorie der Elektrodynamik. *Annalen der Physik und Chemie*, 64:1–18, 1845.
- [27] HELMHOLTZ, H. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhend leitend Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72:57–129, 1870.
- [28] HELMHOLTZ, H. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872. Publicado originalmente em *Monatsberichte der Berliner Akademie*, pp: 247–256, 1872.
- [29] JUNGnickel, C. e McCORMMACH, R. *Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein*. The University of Chicago Press, Chicago, 1986. 2 vol.
- [30] KIRCHNER, F. Determination of the velocity of light from electromagnetic measurements. *American Journal of Physics*, 25:623–629, 1957.
- [31] KOENIGSBERGER, L. *Hermann von Helmholtz*. Dover, New York, 1965.
- [32] KOHLRAUSCH, R. e WEBER, W. Ueber die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik und Chemie*, 99:10–25, 1856.
- [33] LAVOISIER, A. L. e LAPLACE, P. L. Mémoire sur la chaleur. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 355–405, 1783.
- [34] MALUS, E. L. Théorie de la double réfraction. *Mémoires de l'Institut des Sciences*, 2:303–508, 1811.

- [35] MARTINS, R. de A. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:89–114, 1986.
- [36] MARTINS, R. de A. Contribuição do conhecimento histórico ao ensino do eletromagnetismo. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 5:49–57, 1988. número especial.
- [37] MARTINS, R. de A. A relação massa–energia e a energia potencial. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 6:56–80, 1989. número especial.
- [38] MOON, P. e SPENCER, D. E. Interpretation of the Ampère experiments. *Journal of the Franklin Institute*, 257:203–220, 1954 a.
- [39] MOON, P. e SPENCER, D. E. The Coulomb force and the Ampère force. *Journal of the Franklin Institute*, 257:305–315, 1954 b.
- [40] MOON, P. e SPENCER, D. E. A new electrodynamics. *Journal of the Franklin Institute*, 257:369–382, 1954 c.
- [41] MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954, 2 vol.
- [42] MOYSSIDES, P. G. Calculation of the sixfold integrals of the Biot–Savart–Lorentz force law in a closed circuit. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4298–4306, 1989 a.
- [43] MOYSSIDES, P. G. Calculation of the sixfold integrals of the Ampère force law in a closed circuit. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4307–4312, 1989 b.
- [44] MOYSSIDES, P. G. Experimental verification of the Biot–Savart–Lorentz and Ampère force laws in a closed circuit, revisited. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4313–4321, 1989 c.
- [45] MOYSSIDES, P. G. e PAPPAS, P. T. Rigorous quantitative test of Biot–Savart–Lorentz forces. *Journal of Applied Physics*, 59:19–27, 1986.
- [46] ØRSTED, H. C. Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. Trad: Roberto de Andrade Martins. Em: *Cadernos de*

História e Filosofia da Ciência 10:89–114, 1986. O trabalho original foi publicado em 1820.

- [47] PAPPAS, P. T. The original Ampère force and Biot–Savart and Lorentz forces. *Il Nuovo Cimento*, 76B:189–197, 1983.
- [48] PEARSON, J. M. e KILAMBI, A. Velocity-dependent nuclear forces and Weber's electrodynamics. *American Journal of Physics*, 42:971–975, 1974.
- [49] PETEAN, S. *O problema da relação massa-energia potencial para interações eletromagnéticas*. Tese de Mestrado, Instituto de Física 'Gleb Wataghin'. UNICAMP, Campinas, junho de 1991.
- [50] PHIPPS Jr, T. E. Toward modernization of Weber's force law. *Physics Essays*, 3:414–420, 1990 a.
- [51] PHIPPS Jr, T. E. New evidence for Ampère longitudinal forces. *Physics Essays*, 3:198–206, 1990 b.
- [52] PHIPPS, T. E. e PHIPPS Jr, T. E. Observation of Ampère forces in mercury. *Physics Letters A*, 146:6–14, 1990.
- [53] ROSENFELD, L. The velocity of light and the evolution of electrodynamics. *Nuovo Cimento (supplement to vol. 4)*, 4:1630–1669, 1956/7.
- [54] SOKOL'SKII, A. G. e SADOVNIKOV, A. A. Lagrangian solutions for Weber's law of attraction. *Soviet Astronomy Letters*, 51:90–93, 1987.
- [55] TREDER, H. J. *Die Relativität der Trägheit*. Akademie Verlag, Berlin, 1972.
- [56] TREDER, H. J., von BORZESZKOWSKI, H. H., van der MERWE, A. e YOURGRAU, W. *Fundamental Principles of General Relativity Theories*. Plenum, New York, 1980.
- [57] TRICKER, R. A. R. *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*. Pergamon, New York, 1965.
- [58] WEBER, W. On the measurement of electro-dynamic forces. R. Taylor (editor), Londres, *Scientific Memoires*, 5:489–529, 1852. Publicado originalmente em *Annalen der Physik und Chemie* 73:793–240, 1848.

- [59] WEBER, W. Electrodynamics measurements – Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 e 119–149, 1872. Publicado originalmente em *Abhandlungen der Mathematik und Physik* 10:1–62, 1871.
- [60] WESLEY, J. P. Weber electrodynamics extended to include radiation. *Speculations in Science and Technology*, 10:46–61, 1987.
- [61] WESLEY, J. P. Evidence for Weber–Wesley electrodynamics. Em: U. Bartocci e J. P. Wesley (editores), *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics, Perugia, Italia*, pp. 289–343. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1990 a.
- [62] WESLEY, J. P. Weber electrodynamics, part I: general theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters*, 3:443–469, 1990 b.
- [63] WESLEY, J. P. Weber electrodynamics, part II: unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters*, 3:471–490, 1990 c.
- [64] WESLEY, J. P. Weber electrodynamics, part III: mechanics, gravitation. *Foundations of Physics Letters*, 3:586–605, 1990 d.
- [65] WHITTAKER, E. T. *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Tomash Publishers, 2ª ed., New York, 1987. Em: *The History of Modern Physics 1800–1950*, vol. 7 e vol. 8.