

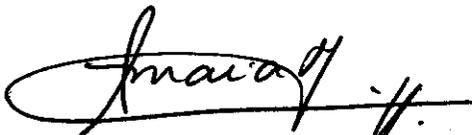
ASPECTOS DO VÁCUO QUÂNTICO

José Alexandre Nogueira

*Este exemplar corresponde
à redação final da Tese
defendida pelo aluno
José Alexandre Nogueira e
aprovada pela Comissão
Julgadora
31 - Janeiro - 94*

Tese apresentada ao Instituto
de Física Gleb Wataghin como
parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Doutor
em ciências.

Orientador:



Prof. Dr. Adolfo Maia Junior (IMECC - UNICAMP)

IFGW - UNICAMP

1993

... e a minha esposa, a quem dedico este trabalho, e a minha futura filha, a quem dedico este trabalho.

... e a minha esposa, a quem dedico este trabalho, e a minha futura filha, a quem dedico este trabalho.

... e a minha esposa, a quem dedico este trabalho, e a minha futura filha, a quem dedico este trabalho.

Dedico este trabalho
a minha esposa
Elisabeth Cristina
e ao minha
futura filha.

... e a minha esposa, a quem dedico este trabalho, e a minha futura filha, a quem dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Adolfo Maia, pela seriedade, competência profissional, orientação segura deste trabalho e pelo seu incentivo, compreensão e paciência.
- A minha esposa, Elisabeth Cristina, pela enorme ajuda e apoio dados, principalmente nas horas difíceis.
- Ao Meus Pais pelo incentivo e apoio com os quais iniciei minha jornada.
- Aos Profs. Carola, Márcio Menon, Waldyr e Marcelo pelas discussões e principalmente pelo apoio e incentivo que deram-me.
- Ao Prof. Bruto Pimentel pelas discussões sobre o trabalho de Regularização de Zel'dovich.
- Aos Meus Profs. que transmitiram os conhecimentos fundamentais que são os alicerces da minha vida profissional.
- Aos Meus Colegas de pós-graduação, em especial J. J. Caluzi pelas discussões e pelo apoio.
- Aos Funcionários da CPG pelo auxílio na parte burocrática.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro a este trabalho.

RESUMO

Na primeira parte deste trabalho estudamos a ambigüidade entre duas definições da Energia do Vácuo, a saber, a Soma das Energias de Ponto Zero e o mínimo do Potencial Efetivo, primeiramente estudada por Eric Myers [17]. Denominamos esta diferença de Anomalia de Ponto-Zero (ZPA) e mostramos que para um campo real escalar massivo e auto-interagente, na geometria das placas paralela de Casimir, a ZPA é indetectável, via Forças de Casimir. Além disso, apresentamos possíveis generalizações da ZPA e mostramos que, em condições muito gerais, a ZPA Renormalizada é nula e o Potencial Efetivo e a Soma das Energias de Ponto-Zero Renormalizados coincidem.

Na segunda parte do trabalho nós generalizamos e melhoramos a Regularização de Zel'dovich da Densidade de Energia e Pressão do Vácuo. Para fazermos isto nós reinterpretamos suas somas divergentes associadas. Também introduzimos um parâmetro de escala de massa m^* para sanar uma inconsistência de dimensionalidade. Observamos que a Energia e Pressão do Vácuo são dependentes da escala mas a Equação de Estado $\epsilon = -P$ não o é.

ABSTRACT

In the first part of this work we study the ambiguity between two definitions of vacuum energy, namely, the energy of Zero-Point fields and the minimum of the Effective Potential, first devised by Eric Myers [17]. We name their difference Zero-Point Anomaly (ZPA). We show that for a massive and interacting real scalar field in the geometry of Casimir plates the ZPA is undetectable via Casimir Forces. Further, we point out possible generalizations of ZPA and show that under very general conditions the Renormalized ZPA vanishes and the Renormalized Effective Potential and Zero-Point Energy coincide.

In the second part of this work we generalize and improve Zel'dovich's Regularization of the Vacuum Energy Density and Pressure. In order to do this we reinterpret their divergent sums. We introduce also a scaling mass parameter m^* in order to solve a dimensional inconsistency. It turns out that Vacuum Energy and Pressure are scale-dependent but the State Equation $\epsilon = -P$ is not.

Capítulo I - Introdução.....	1
Capítulo II - Métodos Funcionais em Teoria Quântica de Campos...5	5
II.1. Introdução.....	5
II.2. Funções de Green em termos de Integrais de Trajetória.....	6
II.3. Ação e Potencial Efetivos.....	17
Capítulo III - Anomalia de Ponto Zero.....	26
III.1. Introdução.....	26
III.2. O Potencial Efetivo.....	27
III.3. Cálculo do Potencial Efetivo com as Placas de Casimir.....	30
III.4. Cálculo do Potencial Efetivo com as Placas Removidas.....	34
III.5. Cálculo da Soma das Energias de Ponto Zero (ZPE) com as Placas de Casimir.....	37
III.6. Cálculo da Soma das Energias de Ponto Zero (ZPE) com as Placas Removidas.....	40
III.7. A Energia do Vácuo Renormalizada.....	41
III.8. A Anomalia de Ponto Zero (ZPA).....	44
III.9. Conclusão.....	45

Capítulo IV - Generalização da Anomalia de Ponto Zero.....	47
IV.1. - Introdução.....	47
IV.2. - Cálculo da Anomalia.....	48
IV.3. - A dependência da ZPA e do parâmetro de escala μ dos termos divergentes da ZPE.....	53
IV.4. - Verificação dos resultados obtidos.....	57
IV.5. - A ZPA em um Campo Magnético Externo homogêneo.....	61
IV.5. - A ZPA Renormalizada.....	64
IV.6. - Conclusão.....	67
Capítulo V - Generalização da Regularização de Zel'dovich da Energia do Vácuo.....	69
V.1. - Introdução.....	69
V.2. - Regularização de Zel'dovich.....	71
V.3. - Regularização Generalizada de Zel'dovich.....	73
V.4. - O parâmetro de escala na Regularização de Zel'dovich Generalizada.....	76
V.5. - Conclusão.....	78
Capítulo VI - Conclusão.....	80
Apêndice.....	83
Apêndice - II.	
II.A. - A equação de Dyson-Schwinger para o funcional gerador $Z[J]$	83

II.B. - Continuação analítica para o espaço-tempo euclidiano.....	87
II.C. - Demonstração de $\frac{\delta \Gamma_E[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x)$	89
II.D. - A equivalência entre a expansão em "loop" e a expansão em potências de \hbar	91
Apêndice - III.	
III.A. - Um caso particular: $V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2$	95
III.B. - $\zeta_3(0) = 0$	97
III.C. - Limites úteis.....	99
III.D. - $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{\Gamma(s)} = -1$	101
III.E. - $\text{Indet} A = -\zeta'_A(0)$	103
Apêndice - IV	
IV.A. - $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ para o campo magnético.....	105
IV.B. - O potencial efetivo para o campo magnético.....	107
Apêndice - V	
V.A. - Integrais úteis.....	108
Bibliografia e Referências	110

Este trabalho nasceu com o objetivo de se compreender com maior profundidade o vácuo quântico. Com este objetivo estudamos dois aspectos diferentes do vácuo: a equivalência entre o mínimo do Potencial Efetivo e a Soma das Energias de Ponto Zero, primeiramente proposta por Eric Myers [17] e a equação de estado $\epsilon = -P$, onde ϵ é a Densidade de Energia do Vácuo e P a Pressão do Vácuo, derivada da Teoria Quântica de Campos, primeiramente por Zel'dovich [26].

A motivação para a realização da primeira parte deste trabalho, a equivalência entre o mínimo do Potencial Efetivo e a Soma das Energias de Ponto Zero, foi dada por um artigo escrito por Eric Myers [17]. Sabemos que os efeitos da energia do vácuo são importantes em problemas tais como : Quebra Espontânea de Simetria [13], a compactificação das dimensões extras em Teorias de Kaluza-Klein [38], a ausência de uma Constante Cosmológica [39], Efeito Casimir em diversas geometrias [18-22, 40-44], flutuações do vácuo causadas por um "background field" (por exemplo: gravidade) [45-51], e em "Bag Models" da QCD [52-54]. Em tais problemas é comum o uso de métodos funcionais da Teoria Quântica de Campos para se obter a Energia do Vácuo como o mínimo do Potencial Efetivo. Infelizmente, na abordagem de métodos

funcionais, a interpretação intuitiva usual da Energia do Vácuo como Soma das Energias de Ponto Zero é obscura, daí então o interesse de se demonstrar a equivalência do mínimo do Potencial Efetivo e a Soma das Energias de Ponto Zero.

Foi mostrado por Myers [17] e também por Blau et al [25] que para o Efeito Casimir usual, isto é, um campo real escalar de massa nula, o mínimo do Potencial Efetivo é idêntico à Soma das Energias de Ponto Zero. Porém, é sugerido por eles que, no caso de um campo real massivo e/ou sujeito a interação, o mínimo do Potencial Efetivo não seja idêntico à Soma das Energias de Ponto Zero, pois, segundo Myers, esta diferença entre as duas energias vem da dependência de escala do sistema, ou melhor, é induzida pela renormalização da ação quadrática sob uma transformação de escala. Então, seguindo a sugestão dos autores acima, realizamos, no capítulo III deste trabalho, o cálculo explícito do Efeito Casimir, em uma geometria de placas paralelas, para um campo real com uma auto-interação que pode incluir termo de massa. Nosso maior objetivo era sabermos se a energia observada é devida ao mínimo do Potencial Efetivo ou à Soma das Energias de Ponto Zero, ou seja, sabermos se esta diferença, que chamamos de *Anomalia de Ponto Zero*, poderia ser observada.

O resultado encontrado nos motivou a generalizarmos a definição da *Anomalia de Ponto Zero* e estudarmos qual sua origem e implicações físicas, como ser ou não observável no caso mais geral possível. É disto que tratamos no capítulo IV.

A motivação para a realização da segunda parte deste trabalho foi dada por um artigo escrito por Zel'dovich [26]. Em seu artigo Zel'dovich defende a tese de que a Constante Cosmológica não deve ser assumida como nula. Ele considera o vácuo como um meio de extensão infinita ao qual deve ser associado um tensor de energia-momento e não um vetor de energia-momento. Com isto, primeiro usando invariância relativística, ele mostra que, macroscopicamente, o vácuo físico pode ser considerado um fluido perfeito com uma equação de estado dada por: $\epsilon = -P$; depois, usando Teoria Quântica de Campos e o fato de que a densidade de energia e pressão do vácuo são dadas pelas componentes T_{00} e T_{11} do tensor de energia-momento, respectivamente, ele mostra a validade da mesma equação de estado.

Para realizar esta demonstração, no âmbito da Teoria de Campos, Zel'dovich (veja apêndice VII da referência [26]) faz uma Regularização do tipo Pauli-Villars e assume um número infinito, contínuo e não degenerado na massa dos campos presentes.

Na nossa proposta nós generalizamos no capítulo V a Regularização de Zel'dovich de forma a podermos ter um número qualquer de campos, degenerados ou não na massa. Mostramos que suas condições de renormalização podem ser enfraquecidas e finalmente mostramos como a introdução de um parâmetro de escala de massa torna as expressões obtidas consistentes.

Apresentamos no capítulo II um breve resumo de Métodos Funcionais em Teoria Quântica de Campos, com vistas ao entendimento do Potencial Efetivo que é um dos objetos básicos usados no Capítulo III e capítulo IV e também para tornar este trabalho auto-suficiente para o leitor que não está acostumado com estes métodos.

II.1. - Introdução

Uma teoria de campos quantizada pode ser definida a partir do chamado *Funcional Gerador das Funções de Green*, também conhecido como *Amplitude de Persistência do Vácuo* sob a influência de fontes de campos externos.

Este "approach" usa o conceito de integrais de trajetória, originalmente introduzido por Feynman, que mostrou que o formalismo de integrais de trajetória podia ser visto como uma alternativa aos formalismos tradicionais de Heisenberg e Schrödinger da mecânica quântica [5,9].

Na seção II.2. usaremos um método perturbativo [3,8] para encontrarmos a solução da equação de Dyson-Schwinger, ou seja, faremos uma expansão em série de potências na constante de acoplamento λ . A solução da equação de Dyson-Schwinger, que é o funcional gerador das funções de Green, pode ser escrita como uma expansão funcional das funções de Green de n -pontos. Então, na verdade, o que teremos é primeiro uma expansão em funções de Green de n -pontos e cada função de Green de n -pontos (graficamente representada pelo propagador cheio) sendo expandida em potências de λ [4].

Na seção II.3. usaremos um método não perturbativo [3,8]. Através de uma transformação funcional de Legendre encontraremos o funcional gerador das funções 1PI, que será posteriormente expandido em potências de \hbar . Tal funcional é chamado de *Ação Efetiva*, pois ele contém, além da *Ação Clássica*, todas as correções quânticas. Uma expansão alternativa do funcional gerador das funções 1PI nos fornecerá o *Potencial Efetivo* com o qual obteremos a densidade de energia do vácuo. Tal como a *Ação Efetiva*, o *Potencial Efetivo* contém, além do *Potencial Clássico*, todas as correções quânticas.

Este capítulo é uma revisão de métodos funcionais em teoria quântica de campos, e foi incluído por motivo de clareza e também para fixar a notação dos objetos matemáticos necessários.

II.2. - Funções de Green em termos de Integrais de trajetória.

Considere a densidade lagrangiana de um campo real escalar neutro $\phi(x)$, num espaço-tempo de Minkowski N-dimensional M, com uma auto-interação dada por $\lambda V(\phi)$, onde $V(\phi)$ é um polinômio local em ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda V(\phi). \quad (1)$$

A ação clássica é dada por

$$S = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda V(\phi) \right]. \quad (2)$$

A Amplitude de Persistência do Vácuo é definida pelo funcional [4]

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int D\phi \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda V(\phi) + J\phi \right] \right\}, \quad (3)$$

com $J \equiv J(x)$ sendo uma fonte externa, $D\phi = \prod d\phi$ é o elemento de volume no espaço de campos e N uma constante de normalização tal que [7]

$$Z[0] = 1. \quad (4)$$

$Z[J]$ é o funcional gerador das funções de Green que são os coeficientes da expansão funcional [4]

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n J(x_1) \dots J(x_n) G_n(x_1 \dots x_n). \quad (5)$$

Dito de outra forma: do funcional gerador $Z[J]$, equação (5), extraímos as funções de Green de n-pontos

$$G_n(x_1 \dots x_n) = (-i)^n \frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}, \quad (6)$$

Prova-se [1,5-7] que $G_n(x_1, \dots, x_n)$ nada mais é que o valor esperado no vácuo do produto cronológico de n-operadores de campo, isto é

$$\left. \frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = (i)^n \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle. \quad (7)$$

Pela própria forma da expressão (7) a função de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$ é também conhecida como *Amplitude de Transição Vácuo-Vácuo* ou ainda *Amplitude de Persistência do Vácuo* [16].

Seguindo um método devido a Symanzik [2,3] é possível mostrar que o funcional gerador $Z[J]$ satisfaz a equação formal

$$[(\square + m^2)(-i\delta/\delta J(x)) + \lambda V'(-i\delta/\delta J(x))]Z[J] = J(x)Z[J] \quad (8)$$

onde temos a identificação

$$-i \frac{\delta}{\delta J} \equiv \phi_{op}. \quad (9)$$

O subscrito "op" na equação (9) indica que ϕ é visto como operador. A equação (8) é a chamada equação de DYSON-SCHWINGER para o funcional gerador $Z[J]$ [3], induzida pelo princípio da ação clássica e pelas relações de comutação a tempos iguais.

A presença do termo $\lambda V(\phi)$, para $V(\phi)$ sendo um polinômio de ordem maior que 2, significa que temos auto-interação

e em geral não podemos calcular $Z[J]$ diretamente, ou seja, encontrar a solução da equação de DYSON-SCHWINGER (equação (8)). Mas, se λ é pequeno podemos contornar o problema encontrando uma solução perturbativa em potências de λ .

Em $\lambda=0$, na verdade, estamos tratando com um campo livre, pois a auto-interação é nula. A equação a ser satisfeita é então

$$(\square + m^2) \left(-i \frac{\delta Z_0}{\delta J} \right) = J Z_0[J], \quad (10)$$

que é induzida pela equação não homogênea de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi(x) = J. \quad (11)$$

O funcional gerador (3) é escrito, neste caso, como

$$Z_0[J] = \frac{1}{N} \int D\phi \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right] \right\}. \quad (12)$$

Realizando uma integração por partes da integral em dx na equação (12), e fazendo agora a substituição [4,11]

$$\phi(x) = \varphi(x) - \int dx' D(x - x') J(x'), \quad (13)$$

onde $\varphi(x)$ é solução da equação homogênea de Klein-Gordon e com

$D(x-x')$ satisfazendo

$$(\square + m^2)D(x-x') = \delta(x-x'), \quad (14)$$

e usando o propagador de Feynman definido como

$$\Delta_F(x-x') = iD(x-x'), \quad (15)$$

teremos

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp\left\{-\frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_2)\right\}. \quad (16)$$

Finalmente, usando a condição de normalização (4) obtemos $Z_0[0]=1$ e então

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_2)\right\}. \quad (17)$$

A expansão da exponencial na equação (17) pode ser representada diagramaticamente como na figura-1 [3,11].

$$Z_0[J] \equiv 1 + \frac{1}{2} \text{X} \text{---} \text{X} + \frac{1}{4} \frac{1}{2!} \text{X} \text{---} \text{X} + \frac{1}{8} \frac{1}{3!} \text{X} \text{---} \text{X} + \dots$$

Figura-1

A aplicação da equação (6) na equação (17) gera as funções de Green de n-pontos, para ordem $\lambda=0$ (campo livre). Por

exemplo as de ordem 2 e 4 são dadas por :

$$G_2^0(x_1, x_2) = \Delta_F(x_1 - x_2), \quad (18a)$$

$$G_4^0(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\left[\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3) \right]. \quad (18b)$$

As equações (18) também podem ser representadas diagramaticamente como na figura-2 [4].

$$G_2^0(x_1, x_2) \equiv \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 1 \qquad 2 \end{array}$$

$$G_4^0(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 1 \qquad 2 \\ \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 3 \qquad 4 \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 1 \qquad 3 \\ \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 2 \qquad 4 \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 1 \qquad 4 \\ \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \\ 2 \qquad 3 \end{array}$$

Figura-2

Note que as funções de Green com números ímpares de pontos são nulas (por causa do J^2 da equação (17)). Podemos identificar $\Delta_F(x_1 - x_2)$ como o propagador de um sinal de x_1 para x_2 . Os sinais que ele propaga são estados de partículas e anti-partículas simples, uma vez que eles (os sinais) são soluções da equação homogênea de Klein-Gordon [4]

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (19)$$

Voltemos ao funcional gerador $Z[J]$ dado pela equação (3). Este pode ser escrito usando a equação (9) imediatamente como

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int D\phi \exp\left\{-i\lambda \int dx V(-i\delta/\delta J)\right\} \exp\left\{i \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi\right]\right\}. \quad (20)$$

Com um pouco de álgebra, prova-se que este funcional pode ser escrito na forma

$$Z[J] = \exp\left\{-i\lambda \int dx V(-i\delta/\delta J)\right\} \frac{1}{N} \int D\phi \exp\left\{i \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi\right]\right\}. \quad (21)$$

A integral em $D\phi$ agora reduz-se ao conhecido gerador livre $Z_0[J]$ dado pela equação (12). Daí podemos escrever

$$Z[J] = \exp\left\{-i\lambda \int dx V(-i\delta/\delta J)\right\} Z_0[J], \quad (22)$$

que é solução da equação (8) (veja apêndice-II.A.).

Fazendo-se a expansão em série da exponencial, obtemos

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{n!} \left[\int dx V(-i\delta/\delta J) \right]^n \exp\left\{-\frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 J(x_1) \Delta_F(x_1-x_2) J(x_2)\right\}. \quad (23)$$

Esta expansão em série de potências de λ , combinadas com a expressão (6) das funções de Green, corresponde à expansão perturbativa de Feynman-Dyson da teoria, ou seja, à expansão em termos de diagramas de Feynman, e permite obter imediatamente as regras de Feynman a eles associados.

Os diagramas de Feynman assim obtidos são chamados conexos e desconexos. Fisicamente, diagramas desconexos representam processos independentes, tais como processos físicos não relacionados em diferentes regiões do espaço-tempo [9].

Para obtermos apenas diagramas conexos definimos um novo funcional gerador $W[J]$ [3-6,12] pela equação

$$Z[J] = \exp(iW[J]). \quad (24a)$$

No espaço-tempo euclidiano esta relação se torna

$$Z_E[J] = \exp(-W_E[J]). \quad (24b)$$

Em analogia com a equação (6), as funções de Green conexas ($G_n^c(x_1, \dots, x_n)$) são dadas pelas derivadas funcionais de $W[J]$ com relação a $J(x)$

$$G_n^c(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (25)$$

A equação de DYSON-SCHWINGER para funções de Green conexas é agora [3]

$$\exp\{-iW[J]\} \left\{ (\square + m^2)(-i\delta/\delta J) + \lambda V'(-i\delta/\delta J) \right\} \exp\{iW[J]\} = J(x). \quad (26)$$

Uma outra maneira de se encontrar os diagramas de Feynman é usando o método de "Saddle Point", o que corresponde a uma expansão assintótica em potências de \hbar [4].

O integrando na equação (3) é oscilatório e assim a integral de trajetória não é bem definida. Para resolver este problema existem duas maneiras: adicionando-se um fator convergente $\exp\{-1/2\int \epsilon \phi^2 dx\}$, com $\epsilon > 0$ ou fazendo-se uma continuação analítica para o espaço-tempo euclidiano, através de uma rotação de Wick (veja apêndice-II.B.).

Realizando a rotação de Wick, o funcional gerador (3) escreve-se no espaço-tempo euclidiano, como

$$Z_E[J] = N_E \int D\phi \exp\{-S_E[\phi, J]\}, \quad (27)$$

onde N_E é uma constante de normalização e $S_E[\phi, J]$ é a ação clássica no espaço-tempo euclidiano dada por

$$S_E[\phi, J] = \int d\bar{x} \left[\frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \phi \bar{\partial}_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda V(\phi) - J\phi \right]. \quad (28)$$

Agora expandimos a ação em torno do campo ϕ_0 , definido como ponto estacionário de S_E , ou seja,

$$S_E[\phi, J] = S_E[\phi_0, J] + \int dx_1 \frac{\delta S_E}{\delta \phi(x_1)} (\phi(x) - \phi_0(x_1)) +$$

$$+ \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} (\phi(x) - \phi_0(x_1)) (\phi(x) - \phi_0(x_2)) + \dots, \quad (29)$$

onde o campo ϕ_0 , sendo ponto estacionário de S_E , satisfaz a equação

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (30)$$

Das equações (28) e (30) é fácil ver que ϕ_0 obedece a equação clássica de movimento com o termo de fonte

$$-\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\mu \phi_0 + m^2 \phi_0 + \lambda V'(\phi_0) = J. \quad (31)$$

Com a expansão funcional (29) de $S_E[\phi, J]$ e a equação (30) o funcional gerador (27) fica¹

$$Z_E[J] = N_E \exp\{-S_E[\phi_0, J]\} \times$$

$$\times \int D\phi \exp\left\{-\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} (\phi(x) - \phi_0(x_1)) (\phi(x) - \phi_0(x_2))\right\}. \quad (32)$$

¹ Sempre que não causar dúvidas, deixaremos de colocar a barra que indica espaço-tempo euclidiano.

A segunda variação da ação é dada por

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} = \left[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V''(\phi_0) \right] \delta(x_1 - x_2). \quad (33)$$

Calculando-se a integral gaussiana em ϕ na equação (32) e usando a identidade para operadores

$$\det M = \exp\{\text{tr} \ln M\}, \quad (34)$$

temos

$$Z_E[J] = N'_E \exp\left\{ -S_E[\phi_0, J] - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V''(\phi_0) \right) \right\}. \quad (35a)$$

Comparando a equação (35a) com a equação (24b), vemos que, a menos da constante de normalização, temos

$$W_E[J] = S_E[\phi_0, J] + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V''(\phi_0) \right). \quad (35b)$$

O primeiro termo $S_E[\phi_0, J]$ dá a contribuição clássica para as funções de Green ($\mathcal{O}(\hbar^0)$), o que corresponde a diagramas em árvore. O próximo termo fornece a primeira correção quântica para as funções de Green ($\mathcal{O}(\hbar)$), o que corresponde a diagramas em um "loop". Se na equação (35) incluíssemos derivadas variacionais de maior ordem de $S_E[\phi, J]$, teríamos as próximas correções em potências de \hbar .

Deve ficar claro que ϕ_0 , sendo solução da equação (31), é um funcional de J . Note que se $V' \neq 0$, ϕ_0 obedece a uma equação não linear. Novamente uma maneira de se resolver este problema é usando Teoria de Perturbação, realizando uma expansão ao redor de $\lambda=0$. Com isto notamos que na verdade temos uma expansão em ordens de λ , que correspondem ao número de vértices dos diagramas; e em ordens de \hbar , que correspondem ao número de "loops".

II.3. - Ação e Potencial Efetivos

Após termos encontrado o funcional gerador $Z[J]$ das funções de Green desconexas e $W[J]$ das conexas, vamos, finalmente, encontrar o funcional gerador das funções de Green irreduzíveis de uma partícula (1PI), algumas vezes chamado Função Vértice [12]. Diremos que um diagrama é 1PI se ele não é separado em duas partes ao cortarmos qualquer um dos propagadores simples do campo ϕ . É claro que qualquer diagrama conexo pode ser obtido unindo-se por propagadores simples do campo ϕ os seus constituintes 1PI [3].

O valor esperado no vácuo do campo na presença de uma fonte externa $J(x)$ é definido por [3,5 e 12]

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad (36)$$

que é também chamado *Campo Clássico*.

Note que o valor esperado no vácuo do campo quântico ϕ , é dado por $\langle 0|\phi|0\rangle = \bar{\phi}$, que é uma constante devido a invariância de translação do vácuo. O valor esperado do vácuo, $\bar{\phi}$, é o limite de $\phi_c(x)$ quando $J \rightarrow 0$, e portanto, neste caso ϕ_c é uma constante [3,5], isto é,

$$\bar{\phi} = \phi_c(x) \Big|_{J=0}. \quad (37)$$

O funcional gerador $\Gamma[\phi_c]$ das funções de Green irreduzíveis de uma partícula (1PI) é definido através de uma transformação funcional de Legendre de $W[J]$ [3,5 e 12]

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int dx J(x)\phi_c(x). \quad (38)$$

Nós podemos expandir $\Gamma[\phi_c]$ em potências de $\phi_c(x)$ como segue:

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n) \Gamma(x_1 \dots x_n). \quad (39)$$

Uma vez que a expansão (39) é de carácter altamente não local, nós podemos expandir, alternativamente, $\Gamma[\phi_c]$ em potências das derivadas de ϕ_c (que é expandir cada campo em (39) ao redor de um ponto comum x_1 , o qual escrevemos como x) [3].

Temos então :

$$\Gamma[\phi_c] = \int dx \left[-U(\phi_c) + \frac{1}{2} Z(\phi_c) \partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c + \dots \right], \quad (40)$$

onde veremos adiante que o primeiro termo $U(\phi_c)$ é a generalização do potencial clássico e é conhecido como *Potencial Efetivo*.

Podemos isolar $U(\phi_c)$, colocando $\phi_c(x) = \rho = \text{constante}$. Com esta escolha, todos os termos da equação (40) serão nulos, exceto o primeiro [3,5], e assim

$$\Gamma[\rho] = -\Omega U(\rho), \quad (41)$$

onde Ω é o volume do espaço-tempo.

Tomando-se as transformadas de Fourier

$$\tilde{\phi}_c(k) = \int dx \phi_c(x) \exp\{ikx\} \quad (42a)$$

e

$$\begin{aligned} & \tilde{\Gamma}_n(k_1, \dots, k_n) \delta(k_1 + \dots + k_n) = \\ & = \int dx_1 \dots dx_n \Gamma_n(x_1, \dots, x_n) \exp\{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)\}, \end{aligned} \quad (42b)$$

e novamente fazendo $\phi_c(x) = \rho$ (constante), temos

$$\Gamma[\rho] = \Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \tilde{\Gamma}_n(0, \dots, 0), \quad (43)$$

e comparando com a equação (41), obtemos

$$U(\rho) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \tilde{\Gamma}_n(0, \dots, 0). \quad (44)$$

A expansão acima corresponde a uma expansão das funções vértices ao redor de momentos zero, o que diagramaticamente corresponde a gráficos sem propagadores externos ("sem pernas").

A expansão em "loop" de $W_E[J]$ pode ser obtida usando a equação (35b)

$$Z_E[J] = \exp\{-W_E[J]\} = \exp\left\{-S_E[\phi_0, J] - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[-\partial_{\mu} \partial_{\mu} + m^2 + \lambda V''(\phi_0) \right]\right\}. \quad (45)$$

No espaço-tempo euclidiano o campo clássico $\phi_c(x)$, dado pela equação (36), fica

$$\phi_c(\bar{x}) = - \frac{\delta W_E[J]}{\delta J(\bar{x})}. \quad (46)$$

Da definição (46) e do resultado (45) temos [12]

$$\phi_c(x) = - \frac{\delta S_E[\phi_0, J]}{\delta J} + \mathcal{O}(\hbar), \quad (47)$$

e agora usando a equação (28), vemos que

$$\phi_c(\bar{x}) = \phi_0 + O(\hbar), \quad (48)$$

o que mostra que, na aproximação em árvore, $\phi_c = \phi_0$ [5].

Da equação (38) temos (veja apêndice-II.C.)

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c} = -J(x), \quad (49)$$

ainda no limite

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \phi_c = \phi_0 \quad (50)$$

e no caso $J \rightarrow 0$, $\phi_c = \bar{\phi}$ (equação (37)), e, portanto, $\Gamma_E[\phi_c]$ pode ser interpretado como a ação clássica mais correções quânticas, sendo por esse motivo chamada *Ação Efetiva* [3].

Agora, da mesma forma que usamos a expansão em \hbar ("loop") para $W_E[J]$ (equação (45)), fazemos a expansão de $\Gamma_E[\phi_c]$ na forma²

$$\Gamma_E[\phi_c] = \Gamma_{E_0}[\phi_c] + \hbar \Gamma_{E_1}[\phi_c] + \dots \quad (51)$$

² Para verificar que a expansão em potências de \hbar corresponde a expansão em "loop" veja apêndice-II.D..

Como já vimos o termo $\Gamma_{E_0}[\phi_c]$ é a ação clássica

$$\Gamma_{E_0}[\phi_c] = S_E[\phi_c, J] + \int J\phi_c d\bar{x}. \quad (52)$$

Para calcularmos o termo $\Gamma_{E_1}[\phi_c]$ em $\mathcal{O}(\hbar)$, escrevemos

$$\phi_c = \phi_0 + \phi_1, \quad (53)$$

com

$$\phi_1 \sim \mathcal{O}(\hbar). \quad (54)$$

Agora expandimos $S_E[\phi_c, J]$ em torno de ϕ_0

$$S_E[\phi_c, J] = S_E[\phi_0, J] + \int dx \frac{\delta S_E[\phi_0, J]}{\delta \phi(x)} (\phi_c - \phi_0) + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (55)$$

$$S_E[\phi_0, J] = S_E[\phi_c, J] + \int dx \frac{\delta S_E[\phi_0, J]}{\delta \phi(x)} \phi_1(x). \quad (56)$$

Da equação (28) temos

$$\frac{\delta S_E[\phi_0, J]}{\delta \phi(x)} = - \int dy J(y) \delta(x-y) = -J(x). \quad (57)$$

Substituindo a equação (57) na equação (56) e depois o resultado na expansão de $W_E[J]$ (equação (35b)) temos

$$W_E[J] = S_E[\phi_c, J] - \int dx J(x) \phi_1(x) + \frac{1}{2} \text{Indet} \int dx \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\phi_c) \right). \quad (58)$$

Da equação (35b) temos que o funcional gerador das funções 1PI, obtido pela transformação funcional de Legendre de $W[J]$, no espaço-tempo euclidiano é dado por

$$\Gamma_E[\phi_c] = W_E[J] + \int dx J(x) \phi_c(x). \quad (59)$$

Substituindo o resultado da equação (58) na equação (59) temos

$$\Gamma_E[\phi_c] = S_E[\phi_c, J] - \int dx J(x) \phi_1(x) + \frac{1}{2} \text{Indet} \int dx \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\phi_c) \right) + \int dx J(x) \phi_c(x). \quad (60)$$

Usando a equação (53) podemos escrever a equação (60) como

$$\Gamma_E[\phi_c] = S_E[\phi_c, J] + \int dx J(x) \phi_0(x) + \frac{1}{2} \text{Indet} \int dx \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\phi_c) \right). \quad (61)$$

Porém, em ordem $\mathcal{O}(\hbar^0)$, temos $\phi_0 = \phi_c$ e usando a equação (52) temos

$$\Gamma_E[\phi_c] = \Gamma_{E_0}[\phi_c] + \hbar \frac{1}{2} \text{Indet} \left[dx \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\phi_c) \right) \right]. \quad (62)$$

Para encontrarmos a expansão de $U(\phi_c)$ fazemos $J=0$, então $\phi_c = \rho = \text{constante}$ [5] e

$$\Gamma_E[\rho] = \left[V(\rho) + \hbar \frac{1}{2} \text{Indet} \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\rho) \right) \right] \Omega. \quad (63)$$

Fazendo uma continuação analítica para espaço-tempo euclidiano, a equação (41) fica

$$\Gamma_E[\rho] = \Omega U(\rho). \quad (64)$$

Comparando as equações (63) e (64), temos

$$U(\rho) = V(\rho) + \hbar \frac{1}{2} \text{Indet} \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\rho) \right). \quad (65)$$

Portanto para $\phi_c = \text{constante}$ podemos escrever

$$U(\phi_c) = V(\phi_c) + \hbar \frac{1}{2} \text{Indet} \left(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + \lambda V'''(\phi_c) \right). \quad (66)$$

Como vemos $U(\phi_c)$ é o potencial clássico $V(\phi_c)$, calculado em ϕ_c , mais correções quânticas. Por esse motivo $U(\phi_c)$ é chamado de *Potencial Efetivo*.

Se determinarmos $\bar{\phi} = \rho$, isto implica $J(x) = J$ (constante). Para tais $\bar{\phi}$ e J a equação (49) torna-se

$$\frac{\delta V}{\delta \bar{\phi}} = J. \quad (67)$$

Assim, quando $J \rightarrow 0$, o $\bar{\phi}$ é solução para

$$\frac{\delta V}{\delta \bar{\phi}} = 0, \quad (68)$$

ou seja, é ponto estacionário de V . Se colocarmos $\phi = \text{constante}$ na hamiltoniana clássica do sistema, $V(\phi)$ torna-se a densidade de energia (espacial) constante do sistema clássico. $U(\phi)$ é então a generalização quântica de $V(\phi)$, ou seja, a densidade de energia do vácuo para a teoria quântica de campos [3].

III.1. - Introdução

Há alguns anos atrás Eric Myers [17] mostrou que a *Densidade de Energia do Vácuo* calculada via *Potencial Efetivo* poderia ser identificada com a *Soma das Energias de Ponto Zero* (ZPE), a menos de um termo anômalo, que denominaremos *Anomalia de Ponto Zero* (ZPA). Segundo ele, esta diferença entre as duas energias (ZPA), vem da dependência de escala do sistema, ou melhor, é induzida pela renormalização da ação quadrática sob uma transformação de escala. Isto nos leva a que para um campo livre sem massa tal anomalia (ZPA) é nula, mas não quando um potencial, que pode incluir termos de massa e interações, é incluído.

O que fazemos aqui é calcular a ZPA, no caso do Efeito Casimir, para um campo escalar real com um potencial arbitrário $V(\phi)$. Discutimos também a possibilidade da ZPA ser experimentalmente observável.

Na seção-III.2. fazemos um pequeno resumo do cálculo para o Potencial Efetivo em ordem \hbar usando a Função Zeta Generalizada. Nas seções III.3. e III.4. calculamos o Potencial Efetivo para um campo escalar real $\phi(x)$ sujeito a um potencial

$V(\phi)$ na presença das Placas de Casimir e quando elas são removidas, respectivamente. Nas seções III.5. e III.6. calculamos a Soma das Energias de Ponto Zero (ZPE) para o mesmo campo ϕ e nas mesmas configurações, respectivamente. Na seção III.7. fazemos a renormalização da Densidade de Energia do Vácuo e na seção III.8. calculamos a ZPA.

III.2. - O Potencial Efetivo

Vamos considerar um campo escalar real $\phi(x)$ com um potencial $V(\phi)$. Sua ação, no espaço-tempo euclidiano de dimensão $N=m+1$, é dada por

$$S_E = \int d\bar{x} \left[\frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \phi(\bar{x}) \bar{\partial}_\mu \phi(x) + V_c(\phi(\bar{x})) \right]. \quad (1)$$

Fazendo a integração por partes da equação (1), temos

$$S = \int dx \left[-\frac{1}{2} \phi \partial_\mu \partial_\mu \phi + V_c(\phi) \right]. \quad (2)$$

Por uma questão de comodidade retiramos o subscrito E e as barras que indicam espaço-tempo euclidiano.

O potencial efetivo em primeira ordem de \hbar é dado pela

equação (2.66)¹

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = V_c(\bar{\phi}) + \hbar \frac{1}{2\Omega_M} \ln \det \left[\frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} \right], \quad (3)$$

onde Ω_M é o volume do espaço-tempo.

Usando a equação (2) para calcularmos $\delta^2 S/\delta\phi^2$ temos

$$M(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} = \delta(x_1 - x_2) \left[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V_c''(\bar{\phi}) \right]. \quad (4)$$

Uma vez que o operador diferencial $M(x_1, x_2)$ é elíptico por causa da continuação analítica a um espaço-tempo euclidiano, nós podemos definir a *Função Zeta Generalizada* $\zeta_M(s)$ associada ao operador $M(x_1, x_2)$ como

$$\zeta_M(s) = \sum (\lambda_i)^{-s}, \quad (5)$$

onde os λ_i são os auto-valores do operador $M(x_1, x_2)^2$.

¹ Usaremos $\bar{\phi}$ e não ϕ_c , uma vez que isto não acarretará erros, pois o termo de fonte (J) é nulo e neste caso $\phi_c = \bar{\phi} = \text{cte}$ [3,5,22].

² Aqui consideraremos M um operador elíptico e hermitiano. Para uma larga classe desses operadores, principalmente em aplicações físicas, os auto-valores são não negativos. veja referência [37].

É bem conhecida a relação (veja apêndice - III.E.)

[4,17]

$$\text{Indet}(M) = - \left. \frac{d\zeta_M(s)}{ds} \right|_{s=0}. \quad (6)$$

Fazendo agora uma transformação de escala do operador M , dada por

$$M \rightarrow M' = M/2\pi\mu^2, \quad (7)$$

onde μ é um parâmetro de escala com unidade de massa, a relação (6) fica

$$\text{Indet}(M') = - \left. \frac{d\zeta_{M'}(s)}{ds} \right|_{s=0} - \ln(2\pi\mu^2)\zeta_M(0), \quad (8)$$

Finalmente usando as equações (3), (4) e (8) escrevemos o Potencial Efetivo como

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = V_c(\bar{\phi}) - \hbar \frac{1}{2\Omega_M} \left[\left. \frac{d\zeta_M(s)}{ds} \right|_{s=0} + \ln(2\pi\mu^2)\zeta_M(0) \right] \quad (9)$$

III.3. - Cálculo do Potencial Efetivo com Placas de Casimir

Vamos considerar o caso em que o campo $\phi(x)$ satisfaz as condições de contorno de Dirichlet (se anula) sobre duas placas paralelas condutoras, colocadas à distância a uma da outra (Placas de Casimir) [6,18 - 20]. A Função Zeta Generalizada do operador M , com os auto-valores de M satisfazendo as condições acima, é dada por

$$\zeta_M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m K}{(2\pi)^m} \left[K^2 + \pi^2 n^2/a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{-s} \Omega_M/a. \quad (10)$$

Para facilidade dos cálculos ignoramos o fator Ω_M/a , considerando-o no final.

Usando a integral [17]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{\pi^{m/2} \Gamma(s-m/2)}{\Gamma(s)} (A^2)^{m/2-s}, \quad (11)$$

podemos escrever a equação (10) como

$$\begin{aligned} \zeta_M(s) &= \frac{\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-m/2)}{\Gamma(s)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{m/2-s} + \\ &+ \frac{\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-m/2)}{\Gamma(s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{m-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 + a^2 V_c''/\pi^2 \right]^{m/2-s}. \end{aligned} \quad (12)$$

A somatória da equação (12) tem a forma $\sum (n^2 + C^2)^{-u}$ (Função Zeta de Epstein-Hurwitz). Nós podemos usar a fórmula [21]

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 + C^2]^{-u} = -\frac{1}{2}C^{-2u} + \frac{\pi^{1/2}}{2C^{2u-1}\Gamma(u)} \left[\Gamma(u-1/2) + \right. \\ \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n C)^{u-1/2} \left\langle \begin{matrix} (2\pi n C) \\ u-1/2 \end{matrix} \right\rangle \right], \quad (13)$$

onde $K_\nu(\lambda)$ são as funções de Bessel modificadas de segunda espécie, com as substituições

$$u = s - m/2 \quad (14)$$

e

$$C^2 = a^2 v_c'' / \pi^2, \quad (15)$$

obtemos

$$\zeta_{\mathcal{M}}(s) = \frac{1}{2} \frac{\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-m/2)}{\Gamma(s)} \left[v_c''(\bar{\phi}) \right]^{m/2-s} + \\ + \frac{a \pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-(m+1)/2)}{\Gamma(s)} \left[v_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} + \\ + \frac{a 2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[v_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[na (v_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]^{s-(m+1)/2} \left\langle \begin{matrix} [2na (v_c'')^{1/2}] \\ s-(m+1/2) \end{matrix} \right\rangle. \quad (16)$$

É de grande interesse o cálculo de $\zeta_M(0)$, pois se $\zeta_M(0)$ for zero a ZPA também será nula.³

Vamos escrever a equação (16) como

$$\zeta_M(s) = \zeta_1(s) + \zeta_2(s) + \zeta_3(s), \quad (17)$$

onde cada termo $\zeta_i(s)$ é óbvio, por comparação.

Usando as propriedades analíticas das funções de Bessel modificadas $K_\nu(\chi)$, não é difícil mostrar que $\zeta_3(0) = 0$ (veja apêndice-III.B.). Também os limites do primeiro e do segundo termo da equação (17) são triviais (veja apêndice-III.C.). Então

$$\zeta_M(0) = \begin{cases} \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{(m+1)/2}}{((m+1)/2)!} a(V_c'')^{(m+1)/2}, & \text{para } m \text{ ímpar} \\ \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{m/2}}{(m/2)!} (V_c'')^{m/2} & \text{para } m \text{ par.} \end{cases} \quad (18)$$

Da equação (16) calculamos $\zeta_M'(0)$ para os casos:

a) m ímpar

³ No capítulo IV (Generalização da Anomalia de Ponto Zero) é mostrado que se $\zeta_M(0)$ é zero então a ZPA também é nula.

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathcal{M}}'(0) &= \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-m/2) (V_c'')^{m/2} + \\
&+ \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} a(V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \left\langle \begin{matrix} [2an(V_c'')^{1/2}] \\ -(m+1)/2 \end{matrix} \right\rangle \right|}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}} + \\
&- \frac{\pi^{(m-1)/2} (-1)^{(m+1)/2}}{2(2\pi)^m ((m+1)/2)!} a(V_c'')^{(m+1)/2} \left\{ \ln \left(\frac{V_c''}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(m+1)/2} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{19a}$$

b) m par

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathcal{M}}'(0) &= \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-(m+1)/2) a(V_c'')^{(m+1)/2} + \\
&+ \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} a(V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \left\langle \begin{matrix} [2an(V_c'')^{1/2}] \\ -(m+1)/2 \end{matrix} \right\rangle \right|}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}} + \\
&- \frac{\pi^{m/2} (-1)^{m/2}}{2(2\pi)^m (m/2)!} (V_c'')^{m/2} \left\{ \ln \left(\frac{V_c''}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(m/2)} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{19b}$$

Usando os resultados das equações (18) e (19) na equação (9), encontramos o Potencial Efetivo como sendo dado por

a) para o caso m ímpar

$$\begin{aligned}
V_{ef} &= \frac{-\hbar}{2a} \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-m/2) (V''_c)^{m/2} + \\
&- \hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V''_c)^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \left\langle [2an(V''_c)^{1/2}] \right\rangle_{-(m+1)/2} \right|}{[na(V''_c)^{1/2}]^{(m+1)/2}} + \\
&+ \frac{\hbar \pi^{(m-1)/2} (-1)^{(m+1)/2}}{2(2\pi)^m ((m+1)/2)!} (V''_c)^{(m+1)/2} \left\{ \ln \left(\frac{V''_c}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{((m+1)/2)} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{20a}$$

b) para o caso m par

$$\begin{aligned}
V_{ef} &= \frac{-\hbar}{2} \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-(m+1)/2) (V''_c)^{(m+1)/2} + \\
&- \hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V''_c)^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \left\langle [2an(V''_c)^{1/2}] \right\rangle_{-(m+1)/2} \right|}{[na(V''_c)^{1/2}]^{(m+1)/2}} + \\
&+ \frac{\hbar}{2a} \frac{\pi^{m/2} (-1)^{m/2}}{2(2\pi)^m (m/2)!} (V''_c)^{m/2} \left\{ \ln \left(\frac{V''_c}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(m/2)} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{20b}$$

III.4. - Cálculo do Potencial Efetivo com as placas removidas

Para calcularmos o Potencial Efetivo com as placas removidas, vamos supor um volume igual àquele com as placas. Os auto-valores de M são agora dados por [6]

$$\lambda_1 = K^2 + \pi^2 n^2 / a^2 + V_c''(\bar{\phi}), \quad (21)$$

e a Função Zeta Generalizada por

$$\zeta_M^0(s) = \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^\infty \frac{d^m K}{(2\pi)^m} \left[K^2 + \pi^2 n^2 / a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{-s} \Omega_M / a. \quad (22)$$

Observe que agora n é uma variável contínua.

Novamente, por uma questão de comodidade, ignoramos o fator $\frac{\Omega_M}{a}$ até o cálculo final quando então este fator será levado em consideração.

Usando a equação (11) encontramos

$$\zeta_M^0(s) = \int_0^\infty dn \frac{\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-m/2)}{\Gamma(s)} \left[\pi^2 n^2 / a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{m/2-s} \quad (23)$$

Novamente, usando a equação (11) temos

$$\zeta_M^0(s) = a \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-(m+1)/2)}{\Gamma(s)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} \quad (24)$$

Com o resultado da equação (24) temos (veja apêndice-III.C.) para os casos:

a) m ímpar

$$\zeta_M^0(0) = \alpha \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{(m+1)/2}}{((m+1)/2)!} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2} \quad (25a)$$

b) m par

$$\zeta_M^0(0) = 0. \quad (26)$$

Da equação (24) calculamos $\zeta_M^{0'}(0)$ para os casos:

a) m ímpar

$$\zeta_M^{0'}(0) = - \frac{\pi^{(m-1)/2} (-1)^{(m+1)/2}}{2(2\pi)^m ((m+1)/2)!} \alpha (V_c'')^{(m+1)/2}_x \times \left\{ \ln \left(\frac{V_c''}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{((m+1)/2)} \right) \right\}. \quad (27a)$$

b) m par

$$\zeta_M^{0'}(0) = \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-(m+1)/2) \alpha (V_c'')^{(m+1)/2}. \quad (27b)$$

Usando as equações (26) e (27) na equação (9), o Potencial Efetivo para as placas removidas é dado para os casos:

a) m ímpar⁴

$$V_{ef}^0 = \frac{\hbar\pi^{(m-1)/2} (-1)^{(m+1)/2}}{2(2\pi)^m ((m+1)/2)!} (V_c'')^{(m+1)/2} \left\{ \ln \left(\frac{V_c''}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{((m+1)/2)} \right) \right\}. \quad (28a)$$

b) m par

$$V_{ef}^0 = \frac{-\hbar}{2} \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-(m+1)/2) (V_c'')^{(m+1)/2}. \quad (28b)$$

III.5. - Cálculo da Soma das Energias de Ponto Zero (ZPE) com as Placas de Casimir.

Agora vamos calcular as Somas das Energias de Ponto Zero para o campo satisfazendo as condições de contorno de Dirichlet (se anulando) sobre as Placas de Casimir. Os auto-valores da energia de ponto zero, para cada modo de oscilação são dados por

$$\omega_1 = \left[|\vec{p}|^2 + \pi^2 n^2 / a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{1/2}. \quad (29)$$

A energia total (soma) de ponto zero é dada por

⁴ Note que para o espaço tridimensional (m=3) este é o potencial de Coleman-Weinberg [13].

$$E = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\hbar}{2} \omega_l, \quad (30)$$

onde a somatória é realizada sobre todos os modos. Como nas direções perpendiculares ao eixo que une as placas os \vec{p} são contínuos, a somatória passa a ser uma integral.

$$E = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^{m-1}|\vec{p}|}{(2\pi)^{m-1}} \left[|\vec{p}|^2 + \pi^2 n^2/a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{1/2} L^{m-1}, \quad (31)$$

onde L^{m-1} são as áreas das placas.⁵

Novamente, recorrendo à técnica da Função Zeta, agora associada ao operador \mathcal{H} (Hamiltoniano), encontramos que

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^{m-1}|\vec{p}|}{(2\pi)^{m-1}} \left[|\vec{p}|^2 + \pi^2 n^2/a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{1/2-s}. \quad (32)$$

Com isto a ZPE é dada por

$$E = \frac{\hbar}{2} L^{m-1} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right]. \quad (33)$$

⁵ Na verdade as placas são hiperplanos de dimensão $\tilde{m}-1$ num espaço de dimensão \tilde{m} .

Observando a equação (32) vemos que esta tem a mesma forma da equação (10), apenas que agora a integral é feita em $m-1$ dimensões. Então trocando s por $s-1/2$ é simples encontrarmos

$$\begin{aligned}
 \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) &= \frac{\pi^{(m+1)/2}}{(2\pi)^{m-1}} \frac{\Gamma(s-m/2)}{\Gamma(s)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{m/2-s} + \\
 &+ \alpha \frac{\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-(m+1)/2)}{\Gamma(s)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} + \\
 &+ \alpha \frac{4\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{1}{\Gamma(s-1/2)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} \times \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\alpha (V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]^{s-(m+1)/2} \left\langle \left[\frac{2n\alpha (V_c'')^{1/2}}{s-(m+1)/2} \right] \right\rangle. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Fazendo o limite $s \rightarrow 0$, encontramos para a ZPE

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{-\hbar}{2} L^{m-1} \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-m/2) (V_c'')^{m/2} + \\
 &- \frac{\hbar}{2} \alpha L^{m-1} \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-(m+1)/2) (V_c'')^{(m+1)/2} + \\
 &- \hbar \alpha L^{m-1} \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \left[\frac{2n\alpha (V_c'')^{1/2}}{-(m+1)/2} \right] \right\rangle}{\left[n\alpha (V_c'')^{1/2} \right]^{(m+1)/2}}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

III.6. - Cálculo da Soma das Energias de Ponto Zero (ZPE)
com as placas removidas

Agora para o caso sem placas, mas no mesmo volume $\Omega=L^{m-1}a$, a Soma das Energias de Ponto Zero é

$$E^0 = \frac{\hbar}{2} \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^\infty \frac{d^{m-1}|\vec{p}|}{(2\pi)^{m-1}} \left[|\vec{p}|^2 + \pi^2 n^2/a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{1/2} L^{m-1} \quad (36)$$

Novamente, usando a *Função Zeta Generalizada* associada ao operador hamiltoniano \mathcal{H} , obtemos

$$\zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2) = \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^\infty \frac{d^{m-1}|\vec{p}|}{(2\pi)^{m-1}} \left[|\vec{p}|^2 + \pi^2 n^2/a^2 + V_c''(\bar{\phi}) \right]^{1/2-s} \quad (37)$$

Usando a relação (11) para calcular as integrais em $d^{m-1}|\vec{p}|$ e dn , temos

$$\zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2) = a \frac{\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma(s-(m+1)/2)}{\Gamma(s-1/2)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} \quad (38)$$

Fazendo o limite $s \rightarrow 0$, temos

$$E^0 = -\frac{\hbar}{2} a L^{m-1} \frac{\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-(m+1)/2) (V_c'')^{(m+1)/2} \quad (39)$$

III.7. - A Energia do Vácuo Renormalizada

Como sabemos, somente diferenças de energias são fisicamente significativas. Com base no tratamento usual do Efeito Casimir, já conhecido, vamos calcular a densidade de energia do vácuo como a diferença da densidade de energia entre as duas configurações do campo no volume $\Omega_H = L^{m-1}a$ quando as placas estão colocadas a uma distância a uma da outra e quando elas são removidas (levadas ao infinito). Nos dois casos os resultados não são iguais, pois as placas introduzem modificações no espectro de energia dos modos normais do vácuo. Estas modificações podem ser medidas via força de Casimir [19,20].

A Densidade de Energia do Vácuo calculada via potencial efetivo é dada pela diferença

$$V_{ef}(a) = V_{ef} - V_{ef}^0, \quad (40)$$

e das equações (20) e (28) temos então:

a) para m ímpar

$$V_{ef}(a) = \frac{-\hbar}{2a} \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-m/2) (V_c'')^{m/2} +$$

$$- \hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \left[\frac{2an(V_c'')^{1/2}}{-(m+1)c/2} \right] \right\rangle}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}}. \quad (41a)$$

b) para m par

$$\begin{aligned}
 V_{ef}(a) = & -\hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle [2an(V_c'')^{1/2}]_{-(m+1)/2} \right\rangle}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}} + \\
 & + \frac{\hbar}{2a} \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{m/2}}{(m/2)!} (V_c'')^{m/2} \left\{ \ln \left(\frac{V_c''}{2\pi\mu^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(m/2)} \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{41b}$$

Antes de calcularmos a energia do vácuo via Soma das Energias de Ponto Zero, devemos lembrar que a Soma das Energias de Ponto Zero não é Densidade de Energia. Para compararmos os resultados, calculamos a Densidade de Energia do Vácuo $\mathcal{E}(a)$ que é a diferença entre as duas configurações do campo no volume $\Omega_M = L^{m-1}a$, dada por

$$\mathcal{E}(a) = \frac{E - E^0}{L^{m-1}a}. \tag{42}$$

Usando as equações (35) e (39) na equação (42) temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(a) = & \frac{-\hbar}{2a} \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \Gamma(-m/2) (V_c'')^{m/2} + \\
 & - \hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle [2an(V_c'')^{1/2}]_{-(m+1)/2} \right\rangle}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}}.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Note que o primeiro termo da equação (43) é divergente para o caso m par. Isto mostra que a prescrição usual para o Efeito Casimir não cancela todos os pólos. Ainda observando este termo, vemos que o mesmo independe de a na energia total. Seguindo autores como Elizalde e Romeo [21], termos independentes de a na energia total não têm significado físico e dependem do esquema de regularização. Então a energia do vácuo renormalizada (física, observada) não deve conter tais termos.

Porém, para continuarmos coerentes, também devemos retirar tais termos de $V_{ef}(a)$. Dadas as considerações acima, é fácil ver que a densidade de energia do vácuo renormalizada calculada via Potencial Efetivo é dada por

$$V_{ef}^R(a) = -\hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \frac{[2an(V_c'')^{1/2}]_{-(m+1)/2}}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}} \right\rangle}{(44)}$$

e a densidade de energia do vácuo renormalizada, calculada via Soma das Energias de Ponto Zero, por

$$\mathcal{E}^R(a) = -\hbar \frac{\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} (V_c'')^{(m+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \frac{[2an(V_c'')^{1/2}]_{-(m+1)/2}}{[na(V_c'')^{1/2}]^{(m+1)/2}} \right\rangle}{(45)}$$

III.8. - A Anomalia de Ponto Zero (ZPA)

Comparando as equações (44) e (45) vemos que as densidades de energia do vácuo renormalizadas são idênticas quando calculadas de ambas as maneiras. Então a Anomalia de Ponto Zero renormalizada é nula

$$\mathcal{A}^R = 0. \quad (46)$$

A retirada dos termos inversamente proporcionais a a , com a justificativa de não terem significado físico pode parecer obscura. Mas note que realmente tais termos não são relevantes para o cálculo da força de Casimir por unidade de área, pois esta é dada por

$$F_{\text{Casimir}} = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{E}{L^{m-1}} \right] = -\frac{\partial}{\partial a} \left[a V_{\text{ef}}(a) \right]. \quad (47)$$

O leitor mais atento pode levantar a questão: " A anomalia realmente não existe ou ela existe e não pode ser medida via força de Casimir ?".

Se entendemos a anomalia como a diferença das densidades de energias do vácuo renormalizadas, então ela realmente não existe para o sistema estudado.

Se, por outro lado, entendemos anomalia como a diferença das densidades de energia do vácuo não renormalizadas, ela existe para o sistema estudado. Observe, porém, que ela não é realmente relevante para o cálculo da força de Casimir e até mesmo parece não ter significado físico.

III.9. - Conclusão

Neste trabalho generalizamos os resultados de Eric Myers [16]. Mostramos que mesmo para um campo escalar real sujeito a um potencial $V(\phi)$, colocado em uma região não compacta do espaço-tempo (Placas de Casimir), a anomalia não renormalizada para um espaço-tempo de dimensão par independe das placas e não pode ser medida (observada) via força de Casimir. Para um espaço-tempo de dimensão ímpar, a anomalia não renormalizada depende das placas, mas esta é proporcional ao inverso da distância entre as placas (a^{-1}) e assim independente de a na densidade de energia por unidade de área das placas e também não pode ser observada através da força de Casimir.

Entendendo a *Anomalia Renormalizada* como uma grandeza com significado físico, isto é, observável, vimos que, para o sistema estudado esta é nula e que a *Anomalia Não Renormalizada* não tem significado físico.

Ainda notamos que a Soma das Energias de Ponto Zero não é sempre idêntica à derivada da função Zeta calculada em $s=0$, (compare as equações (19) e (35)) como antecipa Myers [17]. Por exemplo, entre outros, um termo logarítmico aparece na equação (19) mas não na equação (35).

A propósito, incidentalmente ainda queremos enfatizar que, tanto quanto é de nosso conhecimento, o resultado aqui obtido do cálculo exato, em "1-loop", da Energia de Casimir para um campo escalar com massa e auto-interagente não é conhecido na literatura.

IV.1. - Introdução

Neste capítulo generalizamos a definição de *Anomalia de Ponto Zero* (ZPA). Mostramos que a ZPA vem dos termos divergentes da ZPE. Baseados apenas na hipótese física de que a energia observada deve ser finita, ou melhor, que sendo a energia uma grandeza não absoluta, observamos apenas diferenças de energia entre duas configurações diferentes do sistema e esta diferença deve ser finita para que seja um observável, mostramos que a ZPA não pode ser observada. É claro que esta afirmativa somente é válida no espaço-tempo de Minkowski, não sendo válida quando tratamos de espaços curvos, uma vez que em Teoria de Gravitação a energia é uma grandeza absoluta.

Na seção IV.2. generalizamos a definição da ZPA. Na seção IV.3. mostramos a dependência da ZPA dos termos divergentes da ZPE. Na seção IV.4. verificamos os resultados obtidos no capítulo anterior. Na seção IV.5. apresentamos um caso interessante de um campo magnético. E na seção IV.6. mostramos que a ZPA não pode ser observada.

IV.2. - Cálculo da Anomalia

Como sabemos, em Teoria Quântica de Campo (QFT) o Potencial Efetivo em ordem $\mathcal{O}(\hbar)$ é dado pela equação (3.3)

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = V_c(\bar{\phi}) + \hbar \frac{1}{2\Omega_M} \text{Indet} \left[\frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} \right], \quad (1)$$

onde, agora, o volume do espaço-tempo é

$$\Omega_M = L^m T, \quad (2)$$

com L^m sendo o volume espacial e T um intervalo de tempo.

Seja $M(x_1, x_2)$ a matriz da segunda variação da ação $S[\bar{\phi}]$ dada pela equação (3.4)

$$M(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} = \delta(x_1 - x_2) \left[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\bar{\phi}) \right], \quad (3)$$

onde realizamos uma continuação analítica para o espaço-tempo euclidiano, então $M(x_1, x_2)$ é um operador elíptico.

É muito conhecida a relação (veja apêndice - III.E.

[23])

$$\text{Indet} M(x_1, x_2) = - \left. \frac{d\zeta_M(s)}{ds} \right|_{s=0}, \quad (4)$$

onde $\zeta_M(s)$ é a Função Zeta Generalizada associada ao operador M , dada por

$$\zeta_M(s) = \sum_i \lambda_i^{-s}, \quad (5)$$

com os λ_i sendo os auto-valores de $M(x_1, x_2)$.

Das equações (1) e (4) podemos escrever

$$V_{ef}(\bar{\phi}) = V_c(\bar{\phi}) - \hbar \frac{1}{2\Omega_M} \left. \frac{d\zeta_M(s)}{ds} \right|_{s=0}. \quad (6)$$

Os auto-valores de $M(x_1, x_2)$ dados pela equação (3) podem ser escritos como

$$\lambda_i = \omega_i^2 + h_i, \quad (7)$$

onde h_i representa os auto-valores do operador hamiltoniano \mathcal{H} .

A Função Zeta Generalizada associada ao operador $M(x_1, x_2)$ com os auto-valores dados pela equação (7) é dada por¹

¹ Para o caso de os auto-valores h_i serem contínuos, a somatória deve ser trocada por uma integral. Também não se deve esquecer de incluir o elemento de volume.

$$\zeta_{\mathcal{M}}(s) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_i \left[\omega^2 + h_i \right]^{-s} T. \quad (8)$$

Se os auto-valores h_i independem de ω , podemos usar a relação (3.11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(K^2 + A^2 \right)^{-s} d^n K = \frac{\pi^{n/2} \Gamma[s-n/2]}{\Gamma[s]} A^{n/2-s}, \quad (9)$$

e realizando a integral em $d\omega$, obtemos como resultado

$$\zeta_{\mathcal{M}}(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^{1/2} \Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \sum_i \left(h_i \right)^{1/2-s} T. \quad (10)$$

Usando a equação (5), vemos que a Função Zeta Generalizada $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ associada ao operador \mathcal{H} é dada por

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = \sum_i \left(h_i \right)^{1/2-s}. \quad (11)$$

As equações (10) e (11) nos dão a importante relação entre as duas Funções Zeta

$$\zeta_{\mathcal{M}}(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) T. \quad (12)$$

Por outro lado, sabemos que a Densidade da Soma das Energias de Ponto Zero (ZPE) é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2L^m} \sum_i \left(h_i \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Então a ZPE é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right\}. \quad (14)$$

Para calcularmos o $V_{\text{of}}(\bar{\phi})$ devemos encontrar $\zeta'_M(0)$. Da equação (12) temos

$$\begin{aligned} \zeta'_M(s) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}^{-1}} \Psi(s-1/2) \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)T + \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}^{-1}} \frac{\Psi[s]}{\Gamma[s]} \Gamma[s-1/2] \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)T + \frac{1}{2\sqrt{\pi}^{-1}} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta'_{\mathcal{H}}(s-1/2)T, \end{aligned} \quad (15)$$

e então

$$\begin{aligned} \zeta'_M(0) &= -\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right\} + \\ &+ \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}^{-1}} \Psi(s-1/2) \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)T + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}^{-1}} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta'_{\mathcal{H}}(s-1/2)T \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Substituindo a equação (16) na equação (6) temos

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\bar{\phi}) &= \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right\} + \\
&- \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}^m} \Psi(s-1/2) \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}^m} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta'_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Comparando as equações (17) e (14) vemos que

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\bar{\phi}) &= \mathcal{E} - \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}^m} \Psi(s-1/2) \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}^m} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta'_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right\}. \quad (18)
\end{aligned}$$

A equação (18) mostra que o Potencial Efetivo pode não ser idêntico a ZPE, tendo um termo adicional, o qual denominamos de *Anomalia de Ponto Zero (ZPA)*.

A ZPA é dada então por

$$\begin{aligned}
A &= - \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}^m} \Psi(s-1/2) \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}^m} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta'_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right\}. \quad (19)
\end{aligned}$$

E, finalmente, usando as equações (18) e (19) escrevemos

$$V_{ef}(\bar{\phi}) = \mathcal{E} + A. \quad (20)$$

IV.3. - A Dependência da ZPA e do parâmetro de escala μ
dos Termos Divergentes da ZPE

Sabemos que como $\zeta_M(s)$ é analítica em $s=0$ [15,23,25], então $\zeta_M(0)$ é sempre finita. Observando a equação (12), podemos notar a ocorrência de dois casos.

No primeiro caso $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ é analítica em $s=0$, então

$$\zeta_{\mathcal{H}}(-1/2) \text{ é finita} \quad (21)$$

e ainda

$$\zeta'_{\mathcal{H}}(-1/2) \text{ é finita também.} \quad (22)$$

Portanto, usando as relações (21) e (22) na equação (19), temos que a ZPA é nula

$$A = 0. \quad (23)$$

No segundo caso $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ não é analítica em $s=0$, e então (após o processo de regularização)

$$\zeta_{\mathcal{H}}(-1/2) \equiv (\text{termos finitos}) + (\text{termos divergentes}). \quad (24)$$

Mas, pelo fato de $\zeta_M(s)$ ser sempre analítica em $s=0$, a estrutura de pólos dos termos divergentes deve ser a mesma de $\Gamma[s]$ em $s=0$. Assim podemos escrever

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = C(s) + \Gamma[s] B(s), \quad (25)$$

onde $C(s)$ e $B(s)$ são funções analíticas em $s=0$.

Para verificar que realmente a estrutura de pólos de $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ é a mesma de $\Gamma[s]$ basta escrevermos a equação (12) como

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = \left[\frac{2\sqrt{\pi} \zeta_{\mathcal{M}}(s)}{\Gamma[s-1/2]\Gamma} \right] \Gamma[s]. \quad (26)$$

Uma vez que $\zeta_{\mathcal{M}}(s)$ é analítica em $s=0$, podemos escrever

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = g(s)\Gamma[s], \quad (27)$$

onde

$$g(s) = \frac{2\sqrt{\pi} \zeta_{\mathcal{M}}(s)}{\Gamma[s-1/2]\Gamma}. \quad (28)$$

é uma função analítica em $s=0$.

A equação (27) mostra, então, que realmente a estrutura de pólos da função $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ é a mesma de $\Gamma(s)$ [25].

Agora usando a equação (25) na equação (19) temos

$$A = \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \Psi(s-1/2) \frac{C[s]}{\Gamma[s]} + \Psi(s-1/2)B(S) + \Gamma[s] \frac{\Psi[s]}{\Gamma[s]} B(S) + B'(s) \right\}, \quad (29)$$

$$A = \frac{\hbar}{2L^m} \left\{ \Psi(-1/2)B(0) + B'(0) \right\} - \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \Gamma[s]B(S) \right\}. \quad (30)$$

A equação (30) mostra que a ZPA não depende dos termos finitos da ZPE, mas apenas dos termos divergentes. Ainda usando as equações (25) e (30) na equação (18) temos

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = \frac{\hbar}{2L^m} C(0) + \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \Gamma[s]B(s) \right\} + \frac{\hbar}{2L^m} \left\{ \Psi(-1/2)B(0) + B'(0) \right\} - \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \Gamma[s]B(S) \right\}, \quad (31)$$

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = \frac{\hbar}{2L^m} C(0) + \frac{\hbar}{2L^m} \left\{ \Psi(-1/2)B(0) + B'(0) \right\}, \quad (32)$$

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = \bar{\mathcal{E}} + \bar{A}, \quad (33)$$

com \bar{A} sendo a parte finita da ZPA e $\bar{\mathcal{E}}$ a parte finita da ZPE.

Da equação (31) vemos que a parte divergente da ZPE é exatamente cancelada com a parte divergente da ZPA, fornecendo a convergência necessária para o Potencial Efetivo, quando calculado usando-se a Função Zeta Generalizada.

Vamos agora realizar uma transformação de escala do operador M

$$M \rightarrow M' = M/2\pi\mu^2, \quad (34)$$

onde μ é um parâmetro de escala com unidade de massa.

Com a transformação de escala (34) o Potencial Efetivo dado pela equação (6) fica (veja apêndice III.E.)

$$V_{\text{ef}}(\bar{\phi}) = - \hbar \frac{1}{2\Omega_M} \left. \frac{d\zeta_M(s)}{ds} \right|_{s=0} - \hbar \frac{1}{2\Omega_M} \ln(2\pi\mu^2) \zeta_M(0). \quad (35)$$

Note que, se $\zeta_M(s-1/2)$ é analítica em $s=0$, da equação (12) temos

$$\zeta_M(0) = 0. \quad (36)$$

E, portanto, neste caso não há dependência de μ no Potencial Efetivo.

No segundo caso, em que $\zeta_M(s-1/2)$ não é analítica em $s=0$, temos que

$$\zeta_M(0) = -B(0)T. \quad (37)$$

As equações (36) e (37) mostram que a dependência no Potencial Efetivo de um parâmetro de escala μ está relacionada à parte divergente da ZPE.

Do fato da ZPA e do parâmetro de escala μ dependerem apenas da parte divergente da ZPE, esperamos que a ZPA e μ não tenham significado físico, ou seja, não devam ser observáveis, e fazem apenas parte de um esquema matemático.

IV.4. - Verificação dos resultados obtidos no Capítulo - III

Nesta seção calculamos a ZPA para o caso do Capítulo - III diretamente do resultado fornecido pela equação (30).

Da equação (3.34) vemos que quando a dimensão m do espaço é ímpar, apenas o segundo termo é divergente, e então escrevemos

$$B(s)\Gamma[s] = \frac{\alpha\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma[s]}{(s-1)\dots(s-(m+1)/2)} \frac{1}{\Gamma[s-1/2]} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2-s} \quad (38)$$

Da equação (38) temos que

$$B(s) = \frac{\alpha\pi^{m/2}}{(2\pi)^m} \frac{1}{(s-1)\dots(s-(m+1)/2)} \frac{1}{\Gamma[s-1/2]} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2-s} \quad (39)$$

Calculando a função $B(s)$ em $s=0$ temos

$$B(0) = - \frac{\alpha\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} \frac{(-1)^{(m+1)/2}}{((m+1)/2)!} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2} \quad (40)$$

Realizando a derivada da função $B(s)$ e depois calculando em $s=0$, temos

$$B'(0) = - \frac{\alpha\pi^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{(m+1)/2}}{((m+1)/2)!} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2} \times$$

$$\times \left[\psi(-1/2) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(m+1)/2} \right) + \ln(V_c'') \right]. \quad (41)$$

Usando os resultados das equações (40) e (41) na equação (30) e restabelecendo o volume αL^{m-1} , temos

$$A = \frac{\hbar\pi^{(m-1)/2} (-1)^{(m+1)/2}}{4(2\pi)^m ((m+1)/2)!} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2} \left[\ln(V_c'') - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(m+1)/2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\hbar\pi^{(m-1)/2}}{4(2\pi)^m} \Gamma[-(m+1)/2] \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2} \quad (42)$$

Comparando as equações (3.20a) e (3.35) vemos que esta é realmente a ZPA na presença das placas, quando a dimensão espacial m é ímpar.

Quando a dimensão espacial m é par apenas o primeiro termo da equação (3.34) é divergente, e então escrevemos

$$B(s)\Gamma[s] = \frac{\pi^{(m+1)/2}}{(2\pi)^m} \frac{\Gamma[s]}{(s-1)\dots(s-m/2)} \frac{1}{\Gamma[s-1/2]} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2-s} \quad (43)$$

Da equação (43) temos que

$$B(s) = \frac{\pi^{(m+1)/2}}{(2\pi)^m} \frac{1}{(s-1)\dots(s-m/2)} \frac{1}{\Gamma[s-1/2]} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{(m+1)/2-s} \quad (44)$$

Calculando a função $B(s)$ (equação (44)) em $s=0$ temos

$$B(0) = - \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{m/2}}{(m/2)!} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{m/2} \quad (45)$$

Realizando a derivada da função $B(s)$ (equação (44)) e depois calculando em $s=0$, temos

$$B'(0) = \frac{\pi^{m/2}}{2(2\pi)^m} \frac{(-1)^{m/2}}{(m/2)!} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{m/2} \left[\psi(-1/2) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m/2} \right) + \ln(V_c'') \right] \quad (46)$$

Usando os resultados das equações (45) e (46) na equação (30) e restabelecendo o fator aL^{m-1} , temos

$$A = \frac{\hbar\pi^{m/2}}{2a(2\pi)^m} \frac{(-1)^{m/2}}{(m/2)!} \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{m/2} \left[\psi(-1/2) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m/2} \right) + \ln(V_c'') \right] + \frac{\hbar\pi^{m/2}}{2a(2\pi)^m} \Gamma[-m/2] \left(V_c''(\bar{\phi}) \right)^{m/2}. \quad (47)$$

Comparando as equações (3.20b) e (3.35) vemos que realmente esta é a ZPA quando a dimensão espacial m é par.

Para as placas removidas, da equação (3.38) vemos que quando a dimensão do espaço m é ímpar, o único termo é divergente e idêntico ao segundo termo divergente da equação (3.34) e o resultado da ZPA é o mesmo conseguido das equações (38) a (42).

Comparando agora as equações (3.28a) e (3.39) vemos que as ZPAs são as mesmas.

Quando a dimensão espacial m é par, a equação (3.38) não tem termos divergentes e portanto

$$B(0) = 0, \quad (48)$$

e assim, da equação (30), temos

$$A = 0. \quad (49)$$

Comparando as equações (3.28b) e (3.38) realmente notamos que a ZPA é nula.

IV.5. - A ZPA em um Campo Magnético Externo Homogêneo

Salam e Strathdee mostraram em seu artigo [33] a possibilidade de que um campo magnético forte pode conduzir a um restabelecimento da simetria na teoria. Neste mesmo artigo eles calculam o potencial efetivo e a ZPE, em ordem \hbar , para um sistema elementar colocado ao longo do eixo-z. O mesmo potencial efetivo também foi calculado, posteriormente, por Ghika e Visinescu usando a técnica de regularização da Função Zeta [34].

Os auto-valores do operador hamiltoniano são dados por [35]

$$\omega(k, n) = \left[k^2 + m^2 + (n+1/2)2eH \right]^{1/2}, \quad (50)$$

e o fator de densidade de estado deve ser trocado por

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \longrightarrow \frac{eH}{2\pi} \frac{dk}{2\pi}. \quad (51)$$

Das equações (50) e (51) temos que a ZPE é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega(k, n), \quad (52)$$

que conduz (veja apêndice - IV.A.) a

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma[s]}{\Gamma[s-1/2]} \frac{(2eH)^{2-s}}{16\pi^2(s-1)} \zeta(s-1, u), \quad (53)$$

onde $\zeta(z, q)$ é a Função Zeta de Riemann Generalizada e

$$u = \frac{m^2 + eH}{2eH}. \quad (54)$$

A função $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ da equação (53) tem um pólo simples em $s=0$,

$$\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma[s]}{\Gamma[s-1/2]} \cong -\frac{1}{s}, \quad (55)$$

que reflete o fato da equação (52) ser divergente.

Salam e Strathdee para obterem a "parte finita" da energia do vácuo multiplicam a equação (53) por s e calculam a derivada com respeito a s em $s=0$ [36]

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \cong -\frac{1}{s} \frac{(2eH)^{2-s}}{16\pi^2(s-1)} \zeta(s-1, u), \quad (56)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \frac{(2eH)^2}{16\pi^2} \left[\zeta'(-1, u) + \zeta(-1, u) - \ln(eH/2\pi\mu^2) \zeta(-1, u) \right], \quad (57)$$

onde μ é um parâmetro de escala com unidade de massa.

A ZPE dada pela equação (57) é então idêntica ao potencial efetivo encontrado (veja o cálculo no apêndice IV.B.).

A razão disto fica clara quando observamos que a prescrição usada por Salam e Strathdee, na verdade, transforma a $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ calculada em $s=0$ na $\zeta'_M(s)$ calculada em $s=0$, também.

Para se ver isto, basta substituir a equação (55) na equação (26). Então

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \cong -\frac{1}{s} \zeta'_M(s). \quad (58)$$

Agora, usando a prescrição usada por eles,

$$\zeta_{\mathcal{H}}(-1/2) \cong -\zeta'_M(0). \quad (59)$$

Note que $\zeta_M(0) \neq 0$. Então temos anomalia, mas esta se anula quando realizamos a prescrição de renormalização usada por eles.

IV.6. - A ZPA Renormalizada

A Densidade de Energia do Vácuo dada pela equação (14) pode ser divergente, mas este fato não nos causa incômodos, pois sabemos que sendo a energia uma grandeza não absoluta no espaço-tempo de Minkowski, apenas diferenças de energias têm significado físico, ou seja, são observáveis. Entendemos aqui *Densidade de Energia do Vácuo Renormalizada* (observada) como a diferença das Densidades de Energia do Vácuo em duas diferentes configurações.

Sabemos que este procedimento de subtrações cancela os pólos da ZPE² e faz com que a Densidade de Energia do Vácuo Renormalizada seja finita [25].

Seja ϵ^0 a Densidade da Soma das Energias de Ponto Zero em uma dada configuração; então a Densidade da Soma das Energias de Ponto Zero é dada por

$$\epsilon^R = \epsilon - \epsilon^0, \quad (60)$$

com ϵ dada pela equação (14) e

² Não serão considerados aqui os casos onde isto possa não ser verdade.

$$\varepsilon^0 = \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2) \right\}. \quad (61)$$

O mesmo procedimento é feito para o Potencial Efetivo, e então

$$V_{ef}^R = V_{ef} - V_{ef}^0, \quad (62)$$

com

$$V_{ef}^0 = \varepsilon^0 - A^0. \quad (63)$$

Usando as equações (20), (60), (62) e (63) temos

$$V_{ef}^R = (\varepsilon - \varepsilon^0) + (A - A^0) = \varepsilon^R - A^R, \quad (64)$$

onde A^R é dada por

$$A^R = A - A^0. \quad (65)$$

Usando a equação (61) podemos escrever

$$A^0 = -\frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Psi(s-1/2) \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[s-1/2]}{\Gamma[s]} \zeta_{\mathcal{H}}^{0'}(s-1/2) \right\}. \quad (66)$$

E finalmente

$$A^R = -\frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Psi(s-1/2) \Gamma[s-1/2] \frac{\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) - \zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2)}{\Gamma[s]} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma[s-1/2] \frac{\zeta'_{\mathcal{H}}(s-1/2) - \zeta_{\mathcal{H}}^{0'}(s-1/2)}{\Gamma[s]} \right\}. \quad (67)$$

Mas, como já vimos, a ZPE Renormalizada é finita e portanto

$$\mathcal{E}^R = \frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) - \zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2) \right\} \text{ é finita.} \quad (68)$$

Seja $F(s)$ a função definida como

$$F(s) = \zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) - \zeta_{\mathcal{H}}^0(s-1/2), \quad (69)$$

como, na equação (68), \mathcal{E}^R é finita, então $F(s)$ é analítica em $s=0$ e portanto

$$F(0) \text{ é finita} \quad (70)$$

e também

$$F'(0) \text{ é finita.} \quad (71)$$

Agora usando a definição (69) na equação (67) temos

$$A^R = -\frac{\hbar}{2L^m} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}^s} \Psi(s-1/2) \Gamma[s-1/2] \frac{F(s)}{\Gamma[s]} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}^s} \Gamma[s-1/2] \frac{F'(s)}{\Gamma[s]} \right\}. \quad (72)$$

Com os resultados das equações (70) e (71) a equação (72) fica

$$A^R = 0. \quad (73)$$

Portanto

$$V_{ef}^R(\bar{\phi}) = \mathcal{E}^R. \quad (74)$$

IV.7. - Conclusão

Neste capítulo generalizamos o conceito da *Anomalia de Ponto Zero* (ZPA), encontrando-a de uma forma geral. Mostramos que a ZPA e o parâmetro de escala μ são sempre induzidos, ou melhor, dependentes da parte divergente da ZPE e que por esta razão não devem ter significado físico, ou seja, serem observados ou medidos. Esta conclusão ficou demonstrada na seção IV.6. para a

ZPA.

Ficou também evidente que a prescrição usada por Salam e Strathdee transforma a ZPE no potencial efetivo, resultando daí a igualdade dos resultados por eles encontrada.

Também ficou evidente o cancelamento das partes divergentes da ZPA e da ZPE no Potencial Efetivo.

Esta dependência do parâmetro de escala μ da parte divergente da ZPE pode ter alguma aplicação no estudo da Anomalia Conforme [15,17].

Os resultados aqui obtidos estão de acordo com os resultados obtidos no capítulo anterior, onde estudamos um caso particular de configuração, ou seja, o caso das placas de Casimir.

DA ENERGIA DO VÁCUO

V.1. - Introdução

Uma das maiores dificuldades em relação ao vácuo físico é como conciliar sua estrutura quântica (microscópica) com sua estrutura macroscópica. Ya. Zel'dovich estudou este problema seriamente [26].

No apêndice II da referência [26] ele primeiro usa Relatividade Especial para mostrar que, macroscopicamente, o vácuo físico pode ser considerado como um fluido perfeito com uma equação de estado dada por

$$\epsilon = -P, \quad (1)$$

onde ϵ é a *Densidade de Energia do Vácuo* e P é a *Pressão do vácuo*. Não existem argumentos quânticos em tal apêndice.

A equação (1) é bem conhecida, principalmente por cosmologistas. Ela vem do fato de o tensor energia-momentum do vácuo ser dado por

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} = -Pg_{\mu\nu}, \quad (2)$$

onde Λ é a *Constante Cosmológica*. As equações (1) e (2) foram, pela primeira vez, atribuídas ao vácuo físico por Gliner [27]. Zel'dovich deduziu a equação (2), no mesmo artigo, usando a Invariância de Lorentz de $T_{\mu\nu}$. Uma prova mais explícita foi dada por Grøn [3]. A diferença entre as estimativas Teórica (QFT) e experimental da Constante Cosmológica Λ é nos dias de hoje um intrigante desafio para os físicos teóricos [29].

No mesmo artigo [26], apêndice VIII, Zel'dovich deu uma prova para a equação (1) usando um tipo de regularização de Pauli-Villars [30-32] para a *Densidade de Energia e Pressão do Vácuo*. Neste trabalho nós apontamos algumas deficiências nesta prova de Zel'dovich e propomos uma prova mais geral que acreditamos ser mais correta física e matematicamente.

Na seção V.2. nós resumimos a regularização usada por Zel'dovich. Na seção V.3. apresentamos nossa proposta de regularização. Na seção V.4. introduzimos um parâmetro de escala μ^* para sanar o problema de inconsistência dimensional da regularização de Zel'dovich.

V.2. - Regularização de Zel'dovich

A Densidade de Energia de Ponto Zero (ZPE) (ou *Densidade de Energia do Vácuo*) de um campo escalar com massa m é dada por

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3 \int_0^{\infty} 4\pi c p^2 dp \sqrt{p^2 + \mu^2},$$

$$\epsilon = K \int_0^{\infty} p^2 dp \sqrt{p^2 + \mu^2},$$

$$\epsilon = K I(\mu), \quad (3)$$

onde $\mu = mc$.

Para um campo de spin semi-inteiro, a *Densidade de Energia do Vácuo* é negativa e dada por

$$\epsilon = -4KI(\mu). \quad (4)$$

A *Pressão do Vácuo* para campos de spin inteiro é dada por

$$P = K \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + \mu^2}} = KF(\mu), \quad (5)$$

e para campos de spin semi-inteiro

$$P = -4KF(\mu), \quad (6)$$

onde

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} p^2 dp \sqrt{p^2 + \mu^2}, \quad (7)$$

e

$$F(\mu) = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + \mu^2}}. \quad (8)$$

Zel'dovich considera o vácuo físico como um fluido perfeito que é uma mistura de oscilações de ponto zero de campos de bósons e fermions. Zel'dovich, então, propõe que a *Densidade de Energia do Vácuo* e a *Pressão* sejam dadas por

$$\epsilon = \int_0^{\infty} f(\mu) I(\mu) d\mu, \quad (9)$$

e

$$P = \int_0^{\infty} f(\mu) F(\mu) d\mu, \quad (10)$$

onde a função $f(\mu)$ é contínua.

Agora ele introduz um "cut-off" para o momentum (p_0) e usa uma Regularização tipo Pauli-Villars [30] para concluir que,

se a função $f(\mu)$ satisfaz as equações de vínculo

$$\int f(\mu) d\mu = \int f(\mu) \mu^2 d\mu = \int f(\mu) \mu^4 d\mu = 0, \quad (11)$$

então a *Energia e Pressão Renormalizadas* são dadas por

$$\epsilon = \frac{1}{8} \int f(\mu) \mu^4 \ln(\mu) d\mu = -P, \quad (12)$$

e portanto a equação (1) é satisfeita.

V.3. - Regularização de Zel'dovich Generalizada

Nossa proposta é muito simples. Nós apenas modificamos as equações (9) e (10) para

$$\epsilon = \sum_{\varphi \in \Phi} C(\varphi) I(\mu_\varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} C(\varphi) \int_0^\infty p^2 dp \sqrt{p^2 + \mu^2}, \quad (13)$$

$$P = \sum_{\varphi \in \Phi} C(\varphi) F(\mu_\varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} C(\varphi) \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + \mu^2}}. \quad (14)$$

onde as somas são sobre todos os campos do vácuo, μ_φ é a massa do campo φ e $C(\varphi)$ é uma função real definida sobre o conjunto de

campos $\Phi = \{\varphi\}$. Observe que, formalmente, as equações (13) e (14) são idênticas as equações (9) e (10) de Zel'dovich mas, agora, a soma é sobre o conjunto Φ de campos, que pode ter um número qualquer de campos, finito ou infinito.

As integrais nas equações (3) e (5) podem ser calculadas por um "cut-off" p_0

$$\varepsilon(p_0) = \sum_{\varphi \in \Phi} C(\varphi) \int_0^{p_0} p^2 dp \sqrt{p^2 + \mu^2}, \quad (13')$$

$$P(p_0) = \sum_{\varphi \in \Phi} C(\varphi) \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + \mu^2}}, \quad (14')$$

e usando a expansão

$$\sqrt{1 + \frac{\mu_\varphi^2}{p^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\mu_\varphi^2}{p^2} - \frac{1}{8} \frac{\mu_\varphi^4}{p^4} + \dots \quad (15)$$

nós encontramos das equações (13') e (14') (veja apêndices V.A. e V.B.):

$$\begin{aligned} \varepsilon(p_0) = & \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_\varphi^4 \ln \mu_\varphi + \frac{1}{32} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_\varphi^4 + \\ & + \frac{p_0^4}{4} \sum_{\varphi} C(\varphi) + \frac{p_0^2}{4} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_\varphi^2 - \frac{1}{8} \ln(2p_0) \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_\varphi^4 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned}
P(p_0) &= -\frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \mu_{\varphi} - \frac{7}{96} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 + \\
&+ \frac{p_0^4}{12} \sum_{\varphi} C(\varphi) - \frac{p_0^2}{12} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^2 + \frac{1}{8} \ln(2p_0) \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4. \quad (16b)
\end{aligned}$$

Para que a energia ϵ e a pressão P sejam finitas quando $p_0 \rightarrow \infty$, nós devemos impor as seguintes equações de vínculo:

$$\sum_{\varphi} C(\varphi) = 0 \quad (17a)$$

$$\sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^2 = 0 \quad (17b)$$

$$\sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 = 0 \quad (17c)$$

e então a energia e pressão renormalizadas são:

$$\epsilon = \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \mu_{\varphi} = -P \quad (18)$$

e novamente a equação (1) é obtida.

Observe que nossas equações (17) e (18) são válidas para quaisquer números de campos (finito ou infinito), mas as equações (11) e (12) de Zel'dovich são válidas apenas para um número contínuo de campos.

V.4. - O parâmetro de escala na
Regularização de Zel'dovich Generalizada

É fácil mostrar que para obter a equação (18) para a pressão e energia do vácuo a equação de vínculo (17c) não é necessária. Usando somente as equações de vínculo (17a) e (17b) nas equações (16) e fazendo o limite para $p_0 \rightarrow \infty$, nós temos

$$\frac{\epsilon}{p} = \lim_{p_0 \rightarrow \infty} \frac{\epsilon(p_0)}{P(p_0)} = -1 \quad (19)$$

Por esta razão, a equação de estado

$$\epsilon = -P \quad (20)$$

é independente da divergência logarítmica e a equação de vínculo (17c) não é necessária para fornecer a equação de estado. Contudo a equação (17c) ainda é necessária para obter-se uma expressão matemática bem definida para a energia e pressão do vácuo.

Observe que na energia e pressão renormalizadas de Zel'dovich, equação (12), bem como em nossa equação (18), o logaritmo tem um argumento que é dimensional. De fato, μ_ϕ tem dimensão de momentum. Isto ocorre porque a equação de vínculo (17c) desfaz a adimensionalidade, como é fácil ver na equação (16). Para sanar esta situação nós usamos um procedimento freqüentemente usado na regularização por Função Zeta [4]. Nós introduzimos um parâmetro de escala arbitrário com dimensão de

massa m^* e então $\mu^* = m^* c$. A massa m^* é uma constante independente dos campos φ .

Inserindo $\frac{\mu^*}{\mu} = 1$ no argumento do logaritmo nas equações (16) nós obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(p_0, \mu^*) &= \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \left(\frac{\mu_{\varphi}}{\mu^*} \right) + \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \left(\frac{\mu^*}{2p_0} \right) + \\ &+ \frac{1}{32} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 + \frac{p_0^2}{4} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^2 + \frac{p_0^4}{4} \sum_{\varphi} C(\varphi), \end{aligned} \quad (21)$$

e

$$\begin{aligned} P(p_0, \mu^*) &= \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \left(\frac{\mu^*}{\mu_{\varphi}} \right) + \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \left(\frac{2p_0}{\mu^*} \right) + \\ &- \frac{7}{96} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 - \frac{p_0^2}{12} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^2 + \frac{p_0^4}{12} \sum_{\varphi} C(\varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Segue imediatamente das equações (21) e (22) que todas as equações de vínculo (17) são necessárias para obter a energia e pressão do vácuo independentes do "cut-off" p_0 , mas somente as equações (17a) e (17b) são necessárias para novamente obtermos a equação de estado para o vácuo.

$$\varepsilon(\mu^*) = \frac{1}{8} \sum_{\varphi} C(\varphi) \mu_{\varphi}^4 \ln \left(\frac{\mu_{\varphi}}{\mu^*} \right) = -P(\mu^*) \quad (23)$$

A origem do parâmetro μ^* na equação (23) é claramente da necessidade de separarmos as partes divergentes de ϵ e P [8].

Embora agora as expressões para a energia e pressão do vácuo são dependentes da escala, elas são independentes do "cut-off" e não sofrem de inconsistência dimensional. Observe também que a equação (23) é independente do parâmetro de escala. Nas palavras da referência [4], "A física não muda, somente nossa maneira de interpretar as constantes".

V.5. - Conclusão

A regularização de Zel'dovich é realizada com integrais dadas pela equações (9) e (10); observe que isto implica em um número contínuo de diferentes campos (diferentes massas) no vácuo. Se pensarmos no vácuo como um tipo de fluido, nós concluimos que este vácuo é uma mistura de um número infinito de campos (não enumeráveis) em seus estados fundamentais. Nossa abordagem não elimina esta possibilidade, mas, por outro lado, ela permite qualquer número de campos: finito, infinito enumerável ou infinito não enumerável.

Ainda notamos que a função $f(\mu)$ das integrais (9) e (10) é uma função apenas da massa, μ , do campo e então não pode ser uma função bem definida. Por exemplo, se nós temos dois campos com mesma massa (por exemplo: massas nulas), então nós temos uma ambigüidade para definir o valor de $f(\mu)$. Nossa abordagem elimina este problema de degenerescência da massa, uma vez que, $C(\varphi)$ é função do campo φ apenas. Nossa abordagem é mais ampla, permitindo estados degenerados de massa e não apenas estados não degenerados de massa, como na abordagem de Zel'dovich.

Como sugerido por Eric Myers [17] e Blau et all [26], calculamos no Capítulo - III deste trabalho a Densidade de Energia do Vácuo por dois processos diferentes, como Soma das Energias de Ponto Zero e como o mínimo do Potencial Efetivo, para uma campo escalar real $\phi(x)$ sujeito a um potencial $V(\phi)$, que pode incluir termo de massa, no caso das placas paralelas de Casimir. Nosso objetivo principal era verificar se realmente estas duas definições da Energia do Vácuo não eram idênticas, apresentando um termo anômalo (*Anomalia de Ponto Zero*), como sugeriram os autores acima.

Após o cálculo explícito, descobrimos que a Anomalia de Ponto Zero para este caso existia quando comparávamos a Soma das Energias de Ponto Zero e o mínimo do Potencial Efetivo em uma dada configuração (por exemplo: com as placas removidas). Mas, como sabemos, somente podemos medir diferenças de energias, pois energia não é uma grandeza absoluta. Quando, então, procuramos encontrar uma Anomalia de Ponto Zero Observável, verificamos que a mesma para este caso é nula, ou seja, a Força de Casimir calculada pelos dois processos é idêntica.

Observamos também que, para este caso, a prescrição para encontrarmos a energia do vácuo observável usual para o efeito Casimir não cancela todos os pólos da Soma das Energias de Ponto Zero. Necessitamos, então, de argumentos físicos para retirada deste pólo [21].

A propósito, incidentalmente, notamos que, tanto quanto é de nosso conhecimento, o resultado da Energia de Casimir para um campo escalar massivo e auto-interagente entre placas paralelas, é novo na literatura.

O fato de a Anomalia não poder ser observada para este caso nos fez pensar se este era um resultado particular (para este caso) ou era um resultado geral, ou seja, se a Anomalia observável é sempre nula. Isto nos motivou na realização do Capítulo IV deste trabalho. Neste Capítulo, inicialmente, generalizamos a definição da Anomalia de Ponto Zero. Depois mostramos que esta tem sua origem nos termos divergentes da Soma das Energias de Ponto Zero, o que nos levou a concluir que a Anomalia não tem significado físico. Então mostramos, finalmente, que a Anomalia de Ponto Zero Observável é sempre nula. Estes resultados mostram que a diferença entre a Soma das Energias de Ponto Zero e o mínimo do Potencial Efetivo depende do esquema de renormalização usado para tornar a Soma das Energias de Ponto Zero finita. Nossa definição de Anomalia de Ponto Zero (equação (4.19)) é mais geral e não depende do esquema de renormalização. Note que, para alguns casos, como o

do campo magnético externo homogêneo (IV.5.), a diferença entre a Soma das Energias de Ponto Zero e o Potencial Efetivo é nula, porém a Anomalia de Ponto Zero não. Isto ocorre, como mostramos, porque a prescrição de renormalização usada transforma a Soma das Energias de Ponto Zero no Potencial Efetivo.

Na segunda parte do trabalho (Capítulo V) nossa Generalização da Regularização de Zel'dovich permite a presença de um número qualquer de campos, finito, infinito enumerável ou infinito não enumerável. Nossa generalização, também, permite uma degenerescência nas massas dos campos, uma vez que nosso regulador não é uma função das massas, mas sim do próprio campo. Ainda mostramos que necessitamos de apenas duas das equações de vínculo para obtermos a equação de estado, $\epsilon = -P$, para o vácuo. Também tornamos a regularização mais consistente dimensionalmente com a inclusão de um parâmetro de escala que, como notamos, não provoca alterações físicas nos resultados.

II.A. - A equação de Dyson-Schwinger para o funcional gerador $Z[J]$

Queremos mostrar que

$$Z[J] = \exp\left\{-i\lambda \int dx V(-i\delta/\delta J)\right\} Z_0[J], \quad (1)$$

é solução da equação

$$[(\square + m^2)(-i\delta/\delta J(x)) + \lambda V'(-i\delta/\delta J(x))]Z[J] = J(x)Z[J]. \quad (2)$$

O análogo funcional de

$$\left[x_i, -i\frac{\delta}{\delta x_j}\right] = i\delta_{ij} \quad (3)$$

é

$$\left[J(x), -i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right] = i\delta(x-y). \quad (4)$$

Repetidas aplicações desta equação dão :

$$\left[J(x), \left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n\right] = in\delta(x-y)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1}. \quad (5)$$

Para uma função $F(\phi)$ arbitrária temos a expansão de Maclaurin

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} F^{(n)}(0) \quad (6)$$

e fazendo a correspondência $\phi \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta J}$, segue da equação (5) que

$$\left[J(x), \int F(\phi) dy \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(x) = iF'(\phi). \quad (7)$$

Então

$$\left[J(x), \lambda \int V \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy \right] = i\lambda V' \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right). \quad (8)$$

Da conhecida relação

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (9)$$

onde A e B são operadores, fazemos

$$A = i\lambda \int V \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) dy, \quad (10)$$

$$B = J(x), \quad (11)$$

e teremos

$$\begin{aligned} \exp\left\{-i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\} J(x) \exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\} = \\ = J(x) + \lambda V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

pois uma vez que A comuta com [A,B] (veja equação (8)), somente os dois primeiros termos do lado direito da equação (9) não são nulos.

Das equações (1) e (12) podemos escrever

$$\begin{aligned} J(x)Z[J] &= J(x)\exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\}Z_0[J] = \\ &= \exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\}\left[J(x) + \lambda V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]Z_0[J] = \\ &= \exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\}J(x)Z_0[J] + \\ &+ \exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\}\lambda V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)Z_0[J]. \end{aligned} \quad (13)$$

Usando no primeiro termo do lado direito a equação (1.10) e o fato de $V(-i\delta/\delta J)$, $V'(-i\delta/\delta J)$ e $\delta/\delta J$ comutarem, teremos

$$\begin{aligned} J(x)Z[J] &= (\square + m^2)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left[\exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\}Z_0[J]\right] + \\ &+ \lambda V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\left[\exp\left\{i\lambda\int V\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right\}Z_0[J]\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Novamente usando a equação (1) teremos

$$[(\square + m^2)(-i\delta/\delta J(x)) + \lambda V'(-i\delta/\delta J(x))]Z[J] = J(x)Z[J]. \quad (15)$$

Isto mostra que a equação (1) é solução da equação (2)

II.B. - Continuação analítica para o Espaço-Tempo Euclidiano [5].

Para se obter o espaço-tempo Euclidiano do espaço-tempo de Minkowski fazemos uma rotação no sentido dos ponteiros do relógio, no plano complexo do eixo real ao eixo negativo imaginário (veja figura-a).

Um ponto no espaço-tempo euclidiano, denotado por \bar{x} , está relacionado ao correspondente ponto x no espaço-tempo de Minkowski por

$$\bar{x} = (\bar{x}, \bar{x}_4), \quad (1)$$

$$x_0 = -ix_4 \quad (\text{real}), \quad (2)$$

$$d^4x = -id^4\bar{x}, \quad (3)$$

$$x^2 = -\bar{x}^2, \quad (4)$$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -\bar{\partial}_\mu \phi \bar{\partial}^\mu \phi. \quad (5)$$

O correspondente espaço de momentum euclidiano é definido tal que

$$k_4 x_4 = k^0 x^0. \quad (6)$$

Agora então fazemos uma rotação no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, no plano complexo k_0 , do eixo positivo real ao eixo imaginário positivo (veja figura-b).

$$\bar{k} = (\bar{k}, k_4), \quad (7)$$

$$k_0 = i\bar{k}_4 \quad (\text{real}), \quad (8)$$

$$d^4 k = i d^4 \bar{k}, \quad (9)$$

$$k^2 = -\bar{k}^2. \quad (10)$$

Note que $kx = k^0 x^0 - k \cdot x$, transforma-se em $\bar{k}_4 \bar{x}_4 - \bar{k} \cdot \bar{x}$.

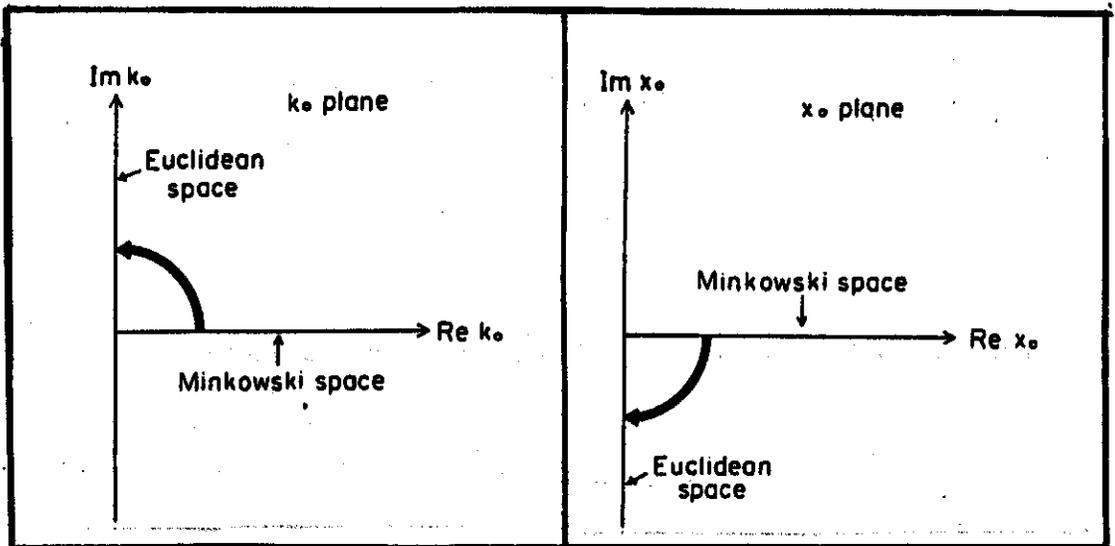


FIGURA-a

FIGURA-b

II.C. - Demonstração de $\frac{\delta \Gamma_E[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x)$ [5]

A transformação funcional de Legendre de $W_E[J]$ é

$$\Gamma_E[\phi_c] = W_E[J] + \int dx \phi_c(x) J(x). \quad (1)$$

Fazendo a derivada variacional de $\Gamma_E[\phi_c]$, temos¹

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} + \int dy \frac{\delta \phi_c(y)}{\delta \phi_c(x)} J(y) + \int dy \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y), \quad (2)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \int dy \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} + \int dy \delta(x-y) J(y) + \int dy \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y). \quad (3)$$

Mas, vimos (equação (2.46)) que

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} = -\phi_c(y). \quad (4)$$

Substituindo a equação (4) na equação (3) e realizando a segunda integral temos

¹ Uma vez que neste apêndice somente trabalhamos no espaço-tempo euclidiano, retiramos o sub-índice E.

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \int dy \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x) - \int dy \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y), \quad (5)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \quad (6)$$

II.D. - Equivalência entre a expansão em "loop" e a expansão em potências de \hbar [12,13]

Considere um diagrama de Feynman com um número V_N de vértices com N pernas, I linhas internas, E linhas externas e L "loops". Para um diagrama com V_N vértices, existem NV_N linhas internas ou externas. Como uma linha interna origina-se em um vértice e necessariamente termina em outro vértice, esta é contada duas vezes. Assim temos

$$NV_N = E + 2I. \quad (1)$$

Como exemplo, para a teoria $\lambda\phi^4$, $N = 4$ e a equação (1) fica

$$4V = E + 2I. \quad (2)$$

O número de momentos internos independentes é igual ao número de "loops", e pode ser encontrado como

$$L = I - V + 1. \quad (3)$$

Substituindo a equação (2) na equação (3) temos

$$L = V + 1 - (E/2). \quad (4)$$

Como exemplo para a teoria $\lambda\phi^4$ temos [4]

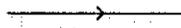
 , para $\mathcal{O}(\hbar^0)$ e $\mathcal{O}(\lambda^0)$;

Figura-1

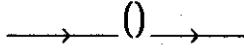
 , para $\mathcal{O}(\hbar)$ e $\mathcal{O}(\lambda)$;

Figura-2

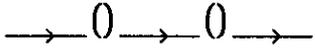
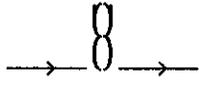
 e  , para $\mathcal{O}(\hbar^2)$ e $\mathcal{O}(\lambda^2)$;

Figura-3

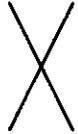
 , para $\mathcal{O}(\hbar^0)$ e $\mathcal{O}(\lambda)$;

Figura-4

 e  , para $\mathcal{O}(\hbar)$ e $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

Figura-5

Uma vez que a ordem da constante de acoplamento (λ) é o número de vértices, a $\mathcal{O}(\lambda)$ não determina o número de "loops" e somente podemos afirmar que

$$L \leq V + 1. \quad (5)$$

Vamos introduzir um parâmetro \hbar^{-1} que multiplica toda a lagrangiana e não somente a parte de interação, ou seja,

$$\exp\left\{\frac{S[J]}{\hbar}\right\}. \quad (6)$$

Lembramos que em um diagrama conexo, cada vértice e cada linha externa contribuem com um fator de $1/\hbar$, e que cada linha interna contribui com um fator \hbar . Uma vez que em um diagrama conexo temos I linhas internas, V vértices e E linhas externas, então a ordem $\mathcal{O}(\hbar)$ de cada diagrama é

$$\hbar : (\hbar)^{I-V-E}. \quad (7)$$

Usando agora a relação (3) temos

$$\hbar : (\hbar)^{L-1-E}. \quad (8)$$

Para obtermos um diagrama da expansão de $(1/\hbar)\Gamma[\phi_c]$ ou $(1/\hbar)G_n^c(x_1, \dots, x_n)$, nós selecionamos um diagrama 1PI da expansão de $(1/\hbar)S[J]$ e multiplicamos pelo propagador inverso (\hbar^{-1}), no caso de $\Gamma[\phi_c]$, ou pelo fator de vértice (\hbar^{-1}), no caso de $G_n^c(x_1, \dots, x_n)$, para cada linha externa (veja equação (1.39) e a expansão de $G_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_P \lambda^P G_n^P(x_1, \dots, x_n)$).

Então os termos na expansão de $(1/\hbar)\Gamma[\phi_c]$ ou $(1/\hbar)G_n^c(x_1, \dots, x_n)$ terão fatores na ordem

$$(\hbar)^{L-1} = (1/\hbar)(\hbar)^L. \quad (9)$$

Conseqüentemente, na expansão em série de $\Gamma[\phi_c]$ ou $G_n^c(x_1, \dots, x_n)$, a potência de \hbar conta o número de "loops".

III.A. - Um caso particular : $V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2$

Como uma verificação de nossos cálculos vamos calcular

$V_{ef}^R(\alpha)$ para o caso particular

$$V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2, \quad (1)$$

no espaço-tempo quadri-dimensional ($m=3$).

Usando a equação (1) no resultado (3.42), temos

$$V_{ef}^R(\alpha) = - \frac{\hbar M^4}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{-2}(z n a M)}{(n a M)^2}. \quad (2)$$

Supondo $aM \ll 1$, podemos usar a expansão [20]

$$(\chi/2)^\nu K_\nu(\chi) = \frac{1}{2}\Gamma(\nu) + O(\chi^2), \quad \chi \ll 1 \quad (3)$$

para obtermos

$$V_{ef}^R(\alpha) = - \frac{\hbar M^4}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n a M)^4} \left[\frac{1}{2}\Gamma(2) + O(aM)^2 \right]. \quad (4)$$

Desprezando termos da ordem $O(aM)^2$ na expansão,

teremos

$$V_{ef}^R(\alpha) = \frac{-\hbar\pi^2}{1440} \frac{1}{\alpha^4} . \quad (5)$$

Este resultado concorda com os resultados já conhecidos [21].

O limite de $\zeta_3(s)$ quando $s \rightarrow 0$ não é direto, requerendo alguns cuidados. Estudemos o comportamento de

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ a \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[na (V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]^{s-(m+1)/2} \left\langle \left[\frac{2na (V_c'')^{1/2}}{s-(m+1)/2} \right] \right\rangle \right\}. \quad (1)$$

Do fato de as funções de Bessel modificadas de segunda espécie $K_\nu(\chi)$ se comportarem assintoticamente como exponenciais decrescentes, a série acima é uniformemente convergente. Daí podemos passar o limite para dentro da somatória, ficando com

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ a \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2-s} \times \left[na (V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]^{s-(m+1)/2} \left\langle \left[\frac{2na (V_c'')^{1/2}}{s-(m+1)/2} \right] \right\rangle \right\}. \quad (2)$$

Note que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \alpha \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} \left[V_c''(\bar{\phi}) \right]^{(m+1)/2} \left[n\alpha (V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]^{s-(m+1)/2} \right\} =$$

$$= \alpha \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{(2\pi)^m} \left[(V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} (n\alpha)^{-1} \right]^{(m+1)/2}, \quad (3)$$

existe e é finito.

Agora a função $K_\nu(\chi)$ é inteira (analítica em \mathbb{C}) na variável ν .² Daí temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left| \left\langle \left[2n\alpha (V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]_{s-(m+1)/2} \right\rangle \right\} = \left| \left\langle \left[2n\alpha (V_c''(\bar{\phi}))^{1/2} \right]_{-(m+1)/2} \right\rangle \right|, \quad (4)$$

que também existe e é finito.

E, ainda, temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(s)} \right\} = 0. \quad (5)$$

Com os resultados das equações (3), (4) e (5) vemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_{-3}(s) = 0. \quad (6)$$

² Veja Batemann, vol II, Pág 9.

III.C. - Limites úteis

Calculemos os limites

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma[s-m/2]}{\Gamma[s]} \quad (1)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma[s-(m+1)/2]}{\Gamma[s]}. \quad (2)$$

i) Se m é par, podemos escrever

$$\frac{\Gamma[s-m/2]}{\Gamma[s]} = \frac{1}{(s-1)\dots(s-m/2)}, \quad (3)$$

então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma[s-m/2]}{\Gamma[s]} = \frac{(-1)!}{(m/2)!}. \quad (4)$$

Para m par, $m+1$ é ímpar e $\Gamma[-(m+1)/2]$ existe e é finito, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma[s-(m+1)/2]}{\Gamma[s]} = 0. \quad (5)$$

ii) Se m é ímpar, podemos escrever

$$\frac{\Gamma[s-(m+1)/2]}{\Gamma[s]} = \frac{1}{(s-1)\dots(s-(m+1)/2)}, \quad (6)$$

então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma[s - (m+1)/2]}{\Gamma[s]} = \frac{(-1)!}{((m+1)/2)!} \quad (7)$$

Para m ímpar, $\Gamma[-m/2]$ existe e é finito, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma[s - m/2]}{\Gamma[s]} = 0. \quad (8)$$

$$\text{III.D.} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{\Gamma(s)} = -1$$

Calculemos o limite

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{\Gamma(s)} \quad (1)$$

Do livro do Batemann, páginas 1 e 15 (fórmulas 1.1(1) e 1.7(2)), temos

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} \quad (2)$$

e

$$\Psi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n) - \frac{1}{s} - \dots - \frac{1}{s+n} \right] \quad (3)$$

A equação (3) pode ser escrita como

$$\Psi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[s(s+1)\dots(s+n)] \log(n) - \left[\begin{array}{l} (s+1)\dots(s+n) + \\ + s(s+2)\dots(s+n) + \\ + s(s+1)\dots(s+n-1) \end{array} \right]}{s(s+1)\dots(s+n)} \right\} \quad (4)$$

Das equações (2) e (4) podemos escrever

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{\Gamma(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[s(s+1)\dots(s+n)] \log(n) - \left[\begin{array}{l} (s+1)\dots(s+n) + \\ + s(s+2)\dots(s+n) + \\ + s(s+1)\dots(s+n-1) \end{array} \right]}{s(s+1)\dots(s+n)} \right\} \cdot \frac{\left\{ \frac{n! n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} \right\}}{\left\{ \frac{n! n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} \right\}} \quad (5)$$

Cancelando os denominadores e trocando a ordem dos

limites teremos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{\tilde{\Gamma}(s)} = 1. \quad (6)$$

$$\text{III.E.} - \text{Indet} A = -\zeta'_A(0)$$

Seja A um operador com auto-valorés λ_i e definamos a Função Zeta associada ao operador A como

$$\zeta_A(s) = \sum_i \lambda_i^{-s} . \quad (1)$$

A derivada da função Zeta calculada em $s=0$ é

$$\zeta_A(s) = \sum \exp\left\{\ln \lambda_i^{-s}\right\} = \sum \exp\left\{-s \ln \lambda_i\right\} , \quad (2)$$

$$\zeta'_A(s) = -\sum \ln \lambda_i \exp\left\{-s \ln \lambda_i\right\} , \quad (3)$$

$$\zeta'_A(0) = -\sum \ln \lambda_i = -\ln\left(\prod \lambda_i\right) , \quad (4)$$

$$\text{Indet} A = -\zeta'_A(0) . \quad (5)$$

Agora realizando uma transformação de escala

$$A \longrightarrow \mathcal{A} = A/2\pi\mu^2 , \quad (6)$$

onde μ é um parâmetro de escala, temos

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \sum \left(\lambda_i/2\pi\mu^2\right)^{-s} , \quad (7)$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \left(2\pi\mu^2\right)^s \sum \lambda_i^{-s} , \quad (8)$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \left(2\pi\mu^2\right)^s \zeta_{\Lambda}(s) , \quad (9)$$

$$\zeta'_{\mathcal{A}}(s) = \ln(2\pi\mu^2) \left(2\pi\mu^2\right)^s \zeta_{\Lambda}(s) + \left(2\pi\mu^2\right)^s \zeta'_{\Lambda}(s) , \quad (10)$$

$$\zeta'_{\mathcal{A}}(0) = \ln(2\pi\mu^2) \zeta_{\Lambda}(0) + \zeta'_{\Lambda}(0) , \quad (11)$$

$$\text{Indet } \mathcal{A} = \text{Indet } \Lambda - \ln(2\pi\mu^2) \zeta_{\Lambda}(0) , \quad (12)$$

$$\text{Indet } \mathcal{A} = -\zeta'_{\Lambda}(0) - \ln(2\pi\mu^2) \zeta_{\Lambda}(0) . \quad (13)$$

IV.A. - $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ para o campo magnético

Definindo a função $\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2)$ como

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{c\hbar}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[k^2 + m^2 + (n+1/2)2e\hbar \right]^{1/2-s}, \quad (1)$$

temos que

$$\mathcal{G} = \frac{\hbar}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) \right]. \quad (2)$$

A integral em dk pode ser realizada usando a relação (3.11), tendo como resultado

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s-1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c\hbar}{2\pi} \frac{\pi^{1/2}}{2\pi} \frac{\Gamma[s-1]}{\Gamma[s-1/2]} \left[2e\hbar \left(\frac{m^2 + e\hbar}{2e\hbar} \right) \right]^{1-s}. \quad (3)$$

Da definição da função Zeta de Riemann Generalizada³

$$\zeta(s, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + n)^{-s}, \quad (4)$$

temos

³Veja Batemann, volume I, página 24.

$$\zeta_H^{(s-1/2)} = \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(s)}{\Gamma[s-1/2]} \frac{(2eH)^{2-s}}{16\pi^2(s-1)} \zeta(s-1, u). \quad (5)$$

IV.B. - O potencial efetivo para o campo magético

A função Zeta associada ao operador $\delta^2 S / \delta \phi^2$ é dada por

[34]

$$\zeta_M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[k^2 + m^2 + (n+1/2)2eH \right]^{-s} \Omega_M. \quad (1)$$

Usando a relação (2.11) e a definição da Função Zeta de Riemann Generalizada (IV.A.4), temos

$$\zeta_M(s) = \frac{(2eH)^{2-s}}{16\pi^2 (s-1)} \zeta(s-1, u) \Omega_M, \quad (2)$$

onde

$$u = \frac{m^2 + eH}{2eH}. \quad (3)$$

Então usando a equação (3.9) temos

$$V_{ef} = \frac{\hbar}{2} \frac{(2eH)^2}{16\pi^2} \left[\zeta'(-1, u) + \zeta(-1, u) - \ln(eH/2\pi\mu^2) \zeta(-1, u) \right]. \quad (4)$$

Seja $I(\mu)$ a integral dada por

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} (p^2 + \mu^2)^{1/2} p^2 dp . \quad (1)$$

Vamos colocar um "cut-off" Λ e depois fazer o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. A integral $I(\mu)$ fica então

$$I(\mu, \Lambda) = \int_0^{\Lambda} (p^2 + \mu^2)^{1/2} p^2 dp. \quad (2)$$

A integral (2) pode ser resolvida usando a integral Indefinida

$$\int_a^b (p^2 + \mu^2)^{1/2} p^2 dp = \left[(p^2 + \mu^2) (p^2 + \mu^2)^{1/2} p/4 + \right. \\ \left. - (p^2 + \mu^2)^{1/2} p\mu^2/8 - \mu^4/8 \ln \left\{ p + (p^2 + \mu^2)^{1/2} \right\} \right]. \quad (3)$$

Usando a expansão assintótica

$$\left(1 + \mu^2/p^2 \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\mu^2/p^2 - \frac{1}{8}\mu^4/p^4 , \text{ para } \mu^2/p^2 \ll 1, \quad (4)$$

temos a equação (V.12a).

Para calcularmos a integral

$$F(\mu) = \int_0^{\infty} \left(p^2 + \mu^2\right)^{-1/2} p^4 dp, \quad (5)$$

usamos a integral indefinida

$$\begin{aligned} F(\mu) = \int_a^b \left(p^2 + \mu^2\right)^{-1/2} p^4 dp &= \int_a^b \left(p^2 + \mu^2\right)^{1/2} p^{3/4} + \\ &- 3\left(p^2 + \mu^2\right)^{1/2} p\mu^2/8 - 3\mu^4/8 \ln\left\{p + \left(p^2 + \mu^2\right)^{1/2}\right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Agora usando a expansão assintótica (4) temos a equação (V.12b).

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

Abaixo, damos uma extensiva lista de referências sobre Métodos Funcionais em Teoria Quântica de Campo (referência [1-16]).

- [1] Nussenzveig, M.; *Integrais de Trajetória*, curso ministrado na I Escola do Verão de Partículas e Campos.
- [2] Fried, H. M.; *Functional Methods and Models in Quantum Field theory*, Cambridge, MIT Press, 1972.
- [3] Rivers, R. J.; *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge, University Press, 1987.
- [4] Ramond, P.; *Field Theory: A MODERN PRIMER*, In: *Frontiers in physics: A Lecture Note and Reprint Series*, v. 51, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [5] Huang, K.; *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte LTD, 1982.
- [6] Itzykson, C. and Zuber, J. B.; *Quantum Field Theory*, Singapore, McGraw-Hill Book Co., 1985.
- [7] Chang, S. J.; *Introduction to Quantum Field Theory*, Singapore World Scientific Publishing Co. Pte LTD, 1990.
- [8] Narlikar, J. V. and Padmanabham, T.; *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology*", Bombay, D. Reidel Publ. Co.

- [9] Lee, T. D.; *Particle Physics and Introduction to Field Theory*,
New York, Harwood Acad. Publ., 1981.
- [10] Faddeev, L. D.; *Introduction to Functional Methods*,
in *Methods in Field Theory*, North-Holland Publ. Co., 1976.
- [11] Veltman, M.; *Path Integral, Feynman Rules, Gauge Theories*,
Lectures given at the international school of
elementary particle physics, Basko-Polje, 1974.
- [12] Iliopoulos, J., Itzykson, C. and Martin, A.,
Rev. Mod. Phys. **47**, 165(1975).
- [13] Coleman, S. and Weinberg, E., Phys. Rev. **D7**, 1888(1973).
- [14] Jackiw, R., Phy. Rev. **D9**, 1687(1974).
- [15] Birrell, N. D. and Davies, P. C. W.; *Quantum Fields in Curved
Space*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982.
- [16] Shellard, R. Cintra; *Introdução à Cromodinâmica Quântica*,
Escola de Verão de Partículas e Campos, vol. II, 1983.
- [17] Eric Myers; Phy. Rev. Letters, **59**, 165(1987).
- [18] Casimir, H. B. G.; In Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch.,
51, 793(1948).
- [19] Sparnaay, M. J.; Physica (ultrrecht) **24**, 751(1958).
- [20] Milonni, P. W. and Mei-li Shih; Contemporary Physics
33(5), 313(1992).
- [21] Elizalde, E. and Romco, A.; J. Math. Phy. **30**(5), 1133(1989).
- [22] Konoplich, R. V.; Hadronic Journal **12**, 19(1989).
- [23] Hawking, S. W.; Commun. Math. Phys. **55**, 133(1977).

- [24] Ingraham, R. L.; Renormalization Theory of Quantum Field with a Cut-Off, New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1967.
- [25] Blau, S. K., Visser, M. and Wipf, A.; Nuclear Phys. **B310**, 163(1988).
- [26] Zel'dovich, Ya. B.; Sov. Phys. Uspekhi **11(4)**, 381(1968).
- [27] Gliner, E. B.; Sov. Phys. JETP **22(2)**, 378(1966).
- [28] Grøn, Ø.; Am. J. Phys. **54(1)**, 46(1986).
- [29] Weinberg, S.; Rev. Mod. Phys. **61**, 1(1989).
- [30] Pauli, W. and Villars, F.; Rev. Mod. Phys. **21**, 434(1949).
- [31] Jost, R. and Rayski, J.; Helv. Phys. Acta **22**, 457(1949).
- [32] Umezawa, W., Yukawa, J. and Yamada, E.; Prog. Theor. Phys. **3**, 315(1948).
- [33] Salam, A. and Strathdee, J.; Nuclear Phys. **B90**, 203(1975).
- [34] Ghika, G. and Visinescu, M.; II. Nuovo Cimento **46A**, 25(1978).
- [35] Landau, L. and Lifchitz, E.; Mécanique Quantique (Moscou, 1967).
- [36] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E.; Generalized Functions, vol. 1, Academic Press, 1964.
- [37] Fulling, S. A.; Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, Cambridge University Press., 1989.
- [38] Applequist, t. and Chodos, A.; Phys. Rev. **D28**, 772(1983).
- [39] Mazur, P. and Mottola, E.; Nucl. Phys. **B278**, 694(1985).
- [40] Fierz, M.; Helv. Pys. Acta **33**, 855(1960).
- [41] Boyer, T. H.; Phys. Rev. **174**, 1764(1968); Ann. of Phys. **56**, 474(1970).

- [42] Milton, K. A.; Ann of Phys. **127**, 49(1980).
- [43] deRaad, L. L. Jr. and Milton K. A.; Ann. of Phys. **136**,
229(1981).
- [44] Plunien, G., Muller, B. and Greiner, W.; Physics Reports **134**,
87(1986).
- [45] Utiyama, R. and deWitt, B. S.; J. Math. Phys. **3**, 608(1962).
- [46] Dowker, J. S. and Critchley, R.; Phys. Rev. **D13**, 3224(1976).
- [47] Ford, L. H.; Phys. Rev. **D11**, 3370(1970); **D14**, 3304(1976).
- [48] Hammond, R. T. and McKinley, A.; Phys. Rev. **D20**, 3047(1979).
- [49] Deutsch, D. and Candelas, P.; Phys. Rev. **D20**, 3063(1979).
- [50] Kay, B. S.; Phys. Rev. **D20**, 3052(1979).
- [51] Dowker, J. S.; Phys. Rev. **D36**, 3095(1987).
- [52] Bender, C. M. and Hays, P.; Phys. Rev. **D14**, 2622(1976).
- [53] Milton, K. A.; Phys. Rev. **D22**, 1441(1980); **D27**, 439(1983);
Ann. of Phys. **150**, 432(1983).
- [54] Baacke, J. and Igarashi, Y.; Phys. Rev. **D27**, 460(1983).