

Tese de Mestrado

**“ESTUDO DA ESPECTROSCOPIA DE  
MASSAS DE MÉSONS SEGUNDO  
UM MODELO DE POTENCIAL  
INSPIRADO EM CROMODINÂMICA  
QUÂNTICA”**

Autor: Alex Eduardo de Bernardini

Orientadora: Prof.a Dr.a Carola Dobrigkeit Chinellato

Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP,  
Campinas, Brasil.

08 de Março de 2001.

*Aos meus pais, Flávio e Mariângela,  
aos meus irmãos, Diego e Leilane,  
que me amam, me compreendem e me ensinam.  
E à memória do meu fantástico avô Neno,  
que me fazia desafios de matemática quando eu era criança.*

Agradecimentos,

Gostaria de agradecer especialmente à professora Carola pela orientação, apoio e convivência amiga durante estes quase cinco anos nos quais ela me deu a oportunidade de aprender Física e começar a me tornar um cientista.

Agradeço, também,

Aos colegas de Graduação e de Pós - Graduação pelas discussões e reflexões que me ajudaram a formar meu caráter profissional e pessoal. (E que me arrumaram todos os softwares que eu precisava!!!).

Aos professores que me ensinaram Física como eu um dia gostaria de ensinar e aos educadores que me mostraram o valor da ética e da educação.

Às simpáticas funcionárias da biblioteca que sempre renovaram meus livros atrasados.

Aos meus grandes amigos e amigas que me fazem rir, me divertem e me trazem de volta ao mundo dos humanos, às garotas, em especial a uma delas que me fez viver mais intensamente esse tempo todo.

E por fim, como não poderia deixar de ser, ao Campeão Mundial, Sport Club Corinthians Paulista, pelas fortes emoções!!!

# Resumo

Desde a descoberta da QCD (Cromodinâmica Quântica), houve o desenvolvimento de técnicas marcantes para os cálculos perturbativos aplicados aos hádrons. Contudo, é difícil utilizar diretamente a QCD no cálculo das propriedades hadrônicas. Dentro deste contexto, modelos fenomenológicos de potenciais têm proporcionado resultados extremamente satisfatórios na descrição dos hádrons ordinários, mais especificamente no caso dos estados ligados quark - antiquark (mésons).

Neste trabalho propomos e estudamos os principais aspectos na construção de um modelo de potencial e investigamos uma descrição generalizada da espectroscopia de mésons, com ênfase em estados ligados de quarks pesados. Analisamos os aspectos importantes na escolha do tratamento de maior concordância com a dinâmica de interação das partículas, considerando os aspectos relativísticos bem como as possibilidades de uma aproximação não-relativística, aplicada com sucesso aos sistemas de quarkônios pesados segundo uma análise Hamiltoniana efetiva. Inicialmente a “QCD soft” é empregada para determinar os termos do potencial efetivo estabelecendo o termo assintótico Coulombiano decorrente da aproximação pela troca de um glúon. Simultaneamente, um termo linear de confinamento é introduzido em concordância com a QCD e com a prescrição fenomenológica. Calculamos o espectro de massas para algumas famílias de mésons e verificamos até que ponto o modelo de potencial pode ser estendido para o cálculo das larguras de transição eletrônica ( $\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+)$ ).

Finalizando, discutimos as possibilidades físicas reais de desenvolvimento de um modelo de potencial generalizado (todos os sabores de quarks), suas possíveis vantagens conforme a parametrização experimental, a complexidade nos cálculos numéricos e a descrição da realidade física de acordo com uma teoria quântica de campos (QCD).

# Abstract

Since the discovery of QCD (Quantum Chromodynamics), there have been remarkable technical achievements in perturbative calculations applied to hadrons. However, it is difficult to use QCD directly to compute hadronic properties. In this context, phenomenological potential models have provided extremely satisfactory results on description of ordinary hadrons, more specifically about quark - antiquark bound states (mesons).

In this work we propose and study the main aspects in the construction of a potential model and search a generalized description of meson spectroscopy, with emphasis in heavy quark bound states. We analyze important aspects in the choice of the treatment in good agreement with the dynamics of interacting particles, attempting to relativistic aspects as well as to the possibilities of nonrelativistic approximation, applied with success to heavy quarkonium systems in an effective Hamiltonian analysis. Initially the “soft QCD” is employed to determine effective potential terms establishing the asymptotic Coulomb term from one gluon exchange approximation. At the same time, a linear confinement term is introduced in accordance with QCD and phenomenological prescription. We perform the calculations of mass spectroscopy for particular sets of mesons and we verify whether the potential model could be extended to calculating the electronic transition rate ( $\Gamma(q\bar{q} \longrightarrow e^-e^+)$ ).

Finishing, we discuss the real physical possibilities of development of a generalized potential model (all quark flavors), its possible advantages relative to experimental parameterization, complexity in numerical calculations and in the description of physical reality in agreement with a quantum field theory (QCD).

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução.</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A interação entre quarks e os modelos de potenciais.</b>	<b>6</b>
2.1	A interação forte entre quarks segundo a QCD. . . . .	7
2.2	Aspectos importantes na construção de um modelo de potencial.	11
<b>3</b>	<b>A redução não - relativística e os elementos importantes na construção do Hamiltoniano quark - antiquark.</b>	<b>17</b>
3.1	A estrutura de spins e as correções relativísticas. . . . .	17
3.2	O termo cinético do Hamiltoniano. . . . .	23
3.3	O potencial de interação. . . . .	28
3.3.1	Aspectos gerais. . . . .	28
3.3.2	Uma forma particular para o potencial. . . . .	32
3.4	A função de onda na origem e as larguras de transição. . . . .	35
<b>4</b>	<b>Metodologia e cálculos desenvolvidos.</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>Resultados obtidos na determinação das propriedades dos quarkônios pesados: charmônio - <math>\Psi</math> e bottomônio - <math>\Upsilon</math>.</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Aplicabilidade a outros sistemas quark - antiquark.</b>	<b>55</b>

6.1	Espectroscopia de massas de mésons para quarks leves segundo uma prescrição não - relativística com correspondência relativística. . . . .	59
<b>7</b>	<b>Conclusões.</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introdução.

A idéia de que os hádrons são compostos por partículas ainda mais fundamentais tem uma longa história. Em 1949, Fermi e Yang [1] propuseram uma idéia interessante do pión (méson  $\pi$ ) como um estado ligado do próton (p) e do nêutron (n) em um multiplete do  $SU(2)$ . No início dos anos 50, de maneira a explicar a regra de Nakano, Nishijima e Gell-Mann (NNG) [2, 3], a conservação de isospin (I) e de estranheza (S), Sakata [4] estendeu a idéia de Fermi e Yang para hádrons incluindo partículas estranhas, considerando p, n e  $\Lambda$  como partículas fundamentais. Apesar do modelo corretamente formulado segundo uma teoria de grupo com simetria unitária, algumas dificuldades já se apresentavam, como o fato de se prever spin  $\frac{1}{2}$  para a partícula  $\Xi$ , diferente do valor experimental medido  $\frac{3}{2}$ , ou o fato do modelo não permitir a construção do octeto de bárions. Foi em 1964 que, então, Gell-Mann e Zweig [5, 6, 7], independentemente, propuseram o modelo a quarks [8]: o quark seria considerado como uma partícula sub - hadrônica e do ponto de vista teórico seria uma realização da representação fundamental do grupo  $SU(3)$ .

Depois disso veio a descoberta do charmônio em 1974 [9, 10] e o advento da Cromodinâmica Quântica (QCD) [11, 12, 13, 14] nesta mesma década. A QCD é a teoria que descreve a dinâmica de quarks e glúons. Desde o desenvolvimento da QCD descobriram-se técnicas marcantes para os cálculos

perturbativos [13, 14, 15]. Contudo, é muito difícil de se obter as propriedades hadrônicas diretamente da QCD. O desenvolvimento da teoria de gauge na rede proporcionou alguns sucessos neste sentido [16], mas ainda com resultados pouco satisfatórios.

Pode ser que a maneira mais direta de se elaborar um modelo para a dinâmica de “cor”, até aqui não exatamente conhecida, seja a utilização de modelos fenomenológicos de quarks e glúons. Modelos relativísticos a quarks puderam ser construídos em termos de correntes de quarks exatas da QCD. O “Bag Model” do MIT assume quarks confinados no interior de uma cavidade [17, 18]. Na aproximação de cavidade estática este modelo é fácil de ser utilizado, mas os resultados obtidos precisam ser corrigidos por uma contribuição espúria do movimento do centro de massa. A pressão para fora exercida sobre a superfície da cavidade seria balanceada pela pressão de vácuo, confinando os quarks. Como resultado, dois tipos de cavidades, diferentes na dimensão, foram concebidos: “cloudy bag model” e “little bag model”.

Os efeitos relativísticos em quarks passaram a ser tratados (e assim permanecem) de diversas maneiras: equação de Klein - Gordon [19], equação de Dirac [20], equação de Bethe - Salpeter [21], resolução de equação ou teoria perturbativa no cone de luz [22, 23], etc. A equação de Fermi - Yang tem sido usada na resolução de mésons do tipo átomo (quark pesado e antiquark leve) em modelos semi - relativísticos.

Há uma grande variedade de modelos a quarks não - relativísticos que em geral permitem a extração das interações de confinamento e residuais a partir da espectroscopia de massas. De Rújula, Georgi e Glashow [24] propuseram a interação quark - quark baseada na troca de um glúon, sugerida pela QCD. Partindo-se da equação de Breit [25, 27], com a idéia de que a constante de acoplamento que governa a interação quark - glúon é suficientemente pequena, a interação quark - quark deveria ter uma certa semelhança com a interação elétron - elétron pela troca de um fóton (QED).

Os quarks nos hádrons possuem duas propriedades: a Liberdade Assintó-

tica [13, 14] e o Confinamento ou “Vínculo Infravermelho”, parte opostamente correspondente à liberdade assintótica para grandes distâncias. Com estas propriedades temos a interação confinante entre quarks em um estado ligado:

$$U = U_{conf} + U_{troca\ de\ um\ glon}. \quad (1.1)$$

Como veremos, o potencial de confinamento, que não decorre diretamente de uma teoria quântica de campos, é fenomenologicamente determinado. O potencial Coulombiano + linear foi proposto primeiramente pelo grupo de Cornell e proporcionou resultados muito bons para o cálculo da espectroscopia de massas do charmônio e do bottomônio [27]. Potenciais logarítmicos e de outras potências também alcançaram relativo sucesso.

Antes de iniciarmos propriamente o estudo da espectroscopia de massas de hádrons segundo modelos de potenciais, principal meta do nosso trabalho, deve ser feito um adendo sobre as massas dos quarks. Como os quarks não são detectados isoladamente, suas massas não podem ser medidas experimentalmente. Na construção e execução dos modelos de interação pode-se optar pelas massas de correntes como as usadas por Bogoliubov [26] no “Bag Model”, ou pelas massas constituintes, obtidas da análise dos momentos magnéticos dos bárions [28], adequadas aos modelos de quarks constituintes. A massa constituinte é igual a massa de corrente mais a massa dinâmica [34]. Em mésons do tipo átomo ( $Q\bar{q}$ ), que são aqueles com um quark pesado e um antiquark comparativamente leve, a massa de corrente é mais adequada para o antiquark leve. De qualquer forma, em linhas gerais, utiliza-se a expressão de que as massas dos quarks variam conforme o modelo [27], já que não sabemos como estimar o efeito não - perturbativo de confinamento da QCD, sendo que os valores das massas estão analiticamente ligados aos parâmetros do Hamiltoniano em questão.

Apesar de particularidades como estas, os modelos de potenciais não-relativísticos têm fornecido resultados extremamente satisfatórios na descrição das propriedades dos quarkônios pesados como também na descrição de

hádrons ordinários. Considerações teóricas e aplicações fenomenológicas se misturam de maneira a dificultar o entendimento do que realmente é consequência exata das condições teóricas e do que depende dos parâmetros experimentais.

Neste trabalho, buscando uma continuidade no estudo de modelos de potenciais que estamos desenvolvendo há cerca de três anos [30, 31], temos como objetivo estudar o desenvolvimento e a aplicabilidade dos modelos de potenciais não - relativísticos na determinação das propriedades de quarkônios de quarks pesados. Verificamos, também, até que ponto um determinado modelo pode ser generalizado para estados ligados quark - antiquark relativísticos (mésons leves). Observamos, também, em que aspectos este estudo pode nos fornecer parâmetros para um melhor entendimento da dinâmica de interação entre quarks, analisando o que realmente é consequência exata da QCD e o que depende dos parâmetros experimentais.

Limitamos nosso estudo aos mésons pois estes são objetos fundamentais em física hadrônica por se tratarem de sistemas simples em sua composição por quarks ( $q\bar{q}$ ), portanto, mais adequados aos testes experimentais. Além disso, são considerados como graus de liberdade fundamentais em setores ou sistemas mais complexos como o núcleo atômico.

Especificamente para os estados ligados do charmônio e do bottomônio, nos ocupamos com a obtenção da espectroscopia de massas e com a possibilidade do cálculo das larguras de transição eletrônica ( $\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+)$ ) conforme a prescrição de um modelo de potencial. Em uma etapa complementar, verificamos até que ponto a metodologia desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada aos estados ligados de mésons leves.

No capítulo 2 fazemos uma abordagem dos elementos da QCD importantes no desenvolvimento de um modelo de potencial. O capítulo 3 é dedicado aos procedimentos de uma redução não - relativística de maneira a determinar o caráter analítico dos termos de interação e do termo cinético presentes no Hamiltoniano. No capítulo 4 mostramos os métodos e pro-

cedimentos de cálculo empregados na descrição do espectro de massas do charmônio e do bottomônio que juntamente com alguns outros resultados encontram-se descritos no capítulo 5. No capítulo 6 finalizamos os resultados do nosso trabalho com a extensão do modelo desenvolvido para o cálculo do espectro de massas de mésons leves.

## Capítulo 2

# A interação entre quarks e os modelos de potenciais.

Ao falarmos de forças entre quarks, correções dependentes de spin, etc, estamos utilizando a linguagem dos modelos de potenciais. Os modelos de potenciais são considerados, teoricamente, menos fundamentados do que os cálculos na rede, que as regras de soma da QCD, ou mesmo, que o "Bag Model". As duas principais objeções à aplicação dos modelos de potenciais decorrem do efeito do vácuo não trivial da QCD e da não existência de um potencial local de forma que a aproximação não - relativística não possa ser justificada. Sendo assim, o sucesso dos modelos de potenciais para hádrons ordinários chega a parecer um milagre. Entretanto, com o aprimoramento dos métodos perturbativos, muitas ambigüidades e discussões que se apresentavam foram esclarecidas, resultando em um quadro consistente da QCD [27, 32] sob a conotação dos modelos de potenciais.

O ponto fraco de qualquer modelo sobre a interação entre quarks está justamente na falta de um critério em que se fundamente a validade do mesmo. Nos cálculos na rede, a dimensão mínima do parâmetro de rede, a posição e extensão do comprimento de escala, etc, são determinados empiricamente. Nas regras de soma deve-se escolher um conjunto truncado de operadores

que testem a estabilidade de complicadas transformações de integrais. E como não poderia ser diferente, os modelos de potenciais devem controlar a validade das aproximações utilizadas, checando sua real aplicabilidade. Isso também é verdade para a teoria de gauge na rede e para as regras de soma.

Em três aspectos os modelos de potenciais são superiores aos demais citados. Através dos mesmos é possível o estudo de todo o espectro de energia dos estados ligados entre quarks. A separação por termos dependentes de spin pode ser facilmente obtida pelo cálculo dos elementos de matriz de um Hamiltoniano dependente de spin, ao passo que nos demais modelos cada estado ligado exige uma abordagem particular. E finalmente, os modelos de potenciais são bastante claros na interpretação física do fenômeno que ocorre na interação, tratando-se, portanto, de uma ótima referência quantitativa e qualitativa para a descrição das propriedades dos estados ligados.

Vejamos, a seguir, os elementos teóricos importantes presentes na elaboração de um modelo de potencial.

## 2.1 A interação forte entre quarks segundo a QCD.

Nosso primeiro passo no entendimento da interação entre quarks é classificar a natureza dessa interação bem como destas partículas [33, 34]. Os quarks não aparecem como partículas livres, mas confinados no interior dos hádrons mediante interação forte via troca de glúons. A teoria quântica de campos que se aplica ao acoplamento de interação forte é a Cromodinâmica Quântica (QCD), tratando-se de uma teoria de gauge não - Abelianas [35, 36] com simetria de carga de cor no  $SU_c(3)$ .

O número quântico associado à cor, diante do caráter fermiônico dos quarks, foi sugerido de maneira a manter a coerência com a estatística de Fermi - Dirac (Pauli). Dada a existência da partícula bariônica  $\Delta^{++}$  com-

posta de três férmions idênticos ( $uuu$ ) em um estado ( $espaço \otimes spin \otimes sabor$ ) totalmente simétrico, a falta de um componente antissimétrico para garantir a antissimetria total do sistema levou a proposição do modelo de cores com uma representação interna de simetria global com hádrons físicos descritos como singletos de cor (antissimétricos) do  $SU_c(3)$ .

A QCD, enquanto uma teoria de gauge, é caracterizada pelos fenômenos deste grupo de gauge do  $SU_c(3)$  sem quebra de simetria. Considerando os quarks como entidades físicas associadas à realização da representação interna desta simetria  $SU_c(3)$ , temos o quark -  $q_i$  e o antiquark -  $\bar{q}_i$ , cada um se transformando respectivamente com a representação fundamental 3-dim e com a representação conjugada  $\bar{3}$ -dim.

Os invariantes desta teoria diante de uma transformação no  $SU_c(3)$  fazem aparecer as entidades físicas na forma de uma realização:

$$\begin{aligned} 3 \otimes \bar{3} &\longrightarrow q_i \bar{q}^i \text{ (mésons)} \\ 3 \otimes 3 \otimes 3 &\longrightarrow q_i q_j q_k \epsilon^{ijk} \text{ (bárions)} \\ \bar{3} \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} &\longrightarrow \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k \epsilon^{ijk} \text{ (antibárions)} \end{aligned}$$

Os quarks e os antiquarks são justamente os férmions da teoria e aparecem no mínimo em 6 sabores: up(u), down(d), strange(s), charm(c), bottom(b) e top(t).

Os “quanta” de campo da interação de gauge no  $SU(3)$  são os já citados bósons vetoriais sem massa chamados de glúons e representados pelo campo  $G^a_\nu$  (“ $\nu$ ” é o índice vetorial) associado a cada um dos 8 geradores  $\frac{\lambda^a}{2}$  ( $\lambda^a$  são as matrizes de Gell-Mann com  $a = 1, \dots, 8$ ) do grupo  $SU(3)$ . Existem, portanto, oito “quanta” de campo gluônico.

O grupo de simetria  $SU(3)$ , além dos geradores, é definido pelas constantes de estrutura  $f_{abc}$  diante da relação de comutação  $[\lambda_a, \lambda_b] = 2f_{abc}\lambda^c$ . Esta não comutabilidade é justamente a descrição matemática do caráter interagente dos glúons com os próprios glúons, que na QCD ressaltará os aspectos fenomenológicos mais importantes.

O Lagrangiano (com índice de cor suprimido) covariante da QCD é dado

por:

$$L = -\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F_a{}^{\mu\nu} + \sum_{sabor(f)} \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f - \frac{\xi}{2}(\partial_\mu G_a{}^\mu)^2 + (\partial_\mu \bar{\zeta})(D_\mu \zeta). \quad (2.1)$$

O primeiro termo é o termo cinético, com o termo livre dos glúons (propagador) e com glúons interagentes em vértices triplos e quádruplos (na linguagem dos diagramas de Feynman), com:

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a{}_\nu - \partial_\nu G^a{}_\mu + g_s f^{abc} G_{b\mu} G_{c\nu}. \quad (2.2)$$

Nesta expressão (2.2) observe que se as constantes de estrutura ( $f^{abc}$ ) fossem todas nulas não teríamos interações entre os bósons vetoriais (algo semelhante aos fótons na QED).

O segundo termo descreve o termo livre dos férmions e a interação dos férmions num vértice férmion - glúon - férmion, conforme a derivada covariante (invariante de gauge) (2.3):

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G^a{}_\mu \frac{\lambda^a}{2} \quad (2.3)$$

O terceiro termo é chamado de Lagrangiano de fixação de gauge e aparece na derivação das regras de interação de Feynman segundo o formalismo de integrais funcionais [36, 37]. A expressão para o propagador do bóson de gauge é obtida, assim como no caso de uma teoria Abelian, impondo-se a condição de gauge fixo (parâmetro  $\xi$ ) somente após o desenvolvimento das integrais funcionais com gauge variável.

Justamente deste procedimento [38] é que aparece o quarto termo, decorrente da evolução do determinante funcional nos cálculos acima. Este termo é chamado de Lagrangiano de Faddeev - Popov com  $\bar{\zeta}$  e  $\zeta$  chamados de campos fantasmas que, dentro do formalismo de Feynman, cancelam as polarizações não - físicas dos propagadores (longitudinal e temporal) mantendo a validade da identidade de Ward nos cálculos de renormalização [36, 39] <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Para informações mais detalhadas vide por exemplo [33, 34].

Dentro da dinâmica descrita pelo Lagrangiano com todos esses termos, a QCD ressalta dois aspectos fenomenológicos que devem ocorrer com qualquer teoria de gauge não - Abelianas [13, 14, 35, 36]:

- A liberdade assintótica, que é a aproximação para uma teoria não interagente no caso de altas energias de interação.
- O confinamento de cor (para o caso em que os estados observáveis são singletos de cor). Este confinamento está além de uma teoria perturbativa, então, uma expressão analítica para as forças entre quarks não pode ser obtida dos princípios fundamentais da QCD.

Um conceito importante decorrente dessas propriedades se reflete, em uma teoria interagente, no comportamento da constante de acoplamento variável. Fazendo uma análise comparativa simplificada, sabemos da QED que a carga efetiva de um elétron pode se dizer “camuflada” devido aos efeitos de polarização do vácuo, ou seja, a criação de pares virtuais elétron - pósitron que faz com que o valor da carga efetiva (experimental) decresça para longas distâncias. Desta forma, a constante de acoplamento da QED cresce com a escala de energia de interação  $k^2$ . Para  $k^2 \gg M^2$  temos:

$$\alpha(k^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{k^2}{M^2}\right)}. \quad (2.4)$$

A função  $\beta(\alpha)$  que determina o comportamento da constante de acoplamento em função da escala de energia é dada por (2.5) de forma que  $\alpha(k^2)$  cresce com  $k^2$ .

$$\beta(\alpha) = \frac{d\alpha(k^2)}{d(\ln k^2)} = \frac{\alpha^2(k^2)}{3\pi} \quad (2.5)$$

Na QCD, contudo, devido à interação entre os bósons vetoriais, o comportamento do acoplamento de interação forte é diferente. Juntamente com os pares virtuais quark - antiquark que se criam, a polarização do vácuo tem uma contribuição adicional (negativa) dos glúons interagentes.

Perturbativamente, até segunda ordem dos diagramas de Feynman, temos

a expressão (2.6) [27].

$$\beta(\alpha_s) = \frac{d\alpha_s(k^2)}{d(\ln k^2)} = -\frac{33 - 2n_f}{12\pi}\alpha_s^2\left(1 + \frac{153 - 19n_f}{(33 - n_f)2\pi}\alpha_s^2 + \dots\right) \quad (2.6)$$

O fator  $\frac{33}{12\pi}$  aparece devido às interações entre os próprios glúons.

Sendo assim, desde que o número de sabores  $n_f \leq 16$ ,  $\alpha_s(k^2)$  decresce logaritmicamente com o crescimento de  $k^2$  (pequenas distâncias). Isto é contrário à situação da QED e é exatamente o que caracteriza a liberdade assintótica.

Ao mesmo tempo, para grandes distâncias entre as partículas, os quarks encontram-se confinados dentro dos hádrons em singleto de cor e não podem ser encontrados como partículas livres com cor. O fenômeno de confinamento não pode ser tratado perturbativamente, uma vez que todos os termos de (2.6) deveriam ser considerados em uma expressão não - perturbativa.

## 2.2 Aspectos importantes na construção de um modelo de potencial.

Um trabalho pioneiro que propôs um modelo de potencial para quarkônios motivado pela QCD foi o modelo de De Rújula, Georgi e Glashow [24]. Desde então foram traçadas as prerrogativas fenomenológicas que caracterizam os modelos de potenciais:

- Os hádrons encontram-se em um singleto de cor formado de quarks “coloridos”.
- A curtas distâncias, as interações em QCD obedecem à liberdade assintótica, ou seja, temos uma aproximação para uma teoria não interagente para energias (de interação) elevadas (constante de acoplamento pequena). As interações mediante troca de um glúon tornam-se dominantes e o potencial será preponderantemente Coulombiano (situação bastante similar ao limite quase estático da QED com troca de um fóton).

- A longas distâncias, os quarks estão ligados por um potencial de longo alcance independente de sabor.

- O movimento de um quark no interior de um hádron é descrito efetivamente pela dinâmica relativística com correções relativísticas da ordem de  $\frac{v^2}{c^2}$ , as quais são análogas às interações de Breit - Fermi na QED [40].

Sendo assim, em modelos não - relativísticos o potencial motivado pela QCD freqüentemente tem a forma de um termo de troca de um glúon (Coulombiano) e de um termo de confinamento. Como vimos na seção anterior, a principal diferença em relação à interação eletromagnética é a natureza não-Abeliana dos glúons, que carregam carga de cor, diferentemente dos fótons, que não têm carga elétrica.

Como o confinamento não é obtido analiticamente de uma teoria quântica de campos, o termo associado é obtido fenomenologicamente com subsídios teóricos indicados pela QCD. Sendo assim, procura-se descrever as interações entre quarks através de um Hamiltoniano motivado pela QCD.

Em princípio, a descrição da interação dentro de uma abordagem de uma teoria quântica de campos envolve o formalismo de Bethe - Salpeter [41] que, entretanto, sob certos aspectos, apresenta alguns problemas como:

- Em geral, a equação de Bethe - Salpeter (2.7) não é resolvida analiticamente.

$$(\gamma_\mu p_1^\mu - m_1)(\gamma_\mu p_2^\mu - m_2)\tilde{\psi}(p, P) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int U(p - p')\psi(p', P)d^4p'. \quad (2.7)$$

$$P = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

$$p = \frac{m_1 p_1 - m_2 p_2}{m_1 + m_2}.$$

- O elemento de interação não é decorrente dos resultados da QCD.
- Os propagadores dos constituintes são aproximados pela forma não - interagente (propagadores livres), apesar das massas envolvidas serem interpretadas como efetivas.

Há uma enorme dificuldade em resolvermos (2.7) exatamente, devido à falta de conhecimento sobre a energia relativa  $k^0$  e devido à incompatibilidade com o potencial estático inicial, devido à sua natureza covariante. Em

algumas situações opta-se por negligenciar o valor da energia relativa  $k^0$  fazendo uma aproximação instantânea de maneira que se obtenha a equação de Salpeter (2.8)[42].

$$(E - H_1 - H_2)\tilde{\phi}(\vec{p}, P) = \int d^3p' \left( \left[ \Lambda_1^+ \gamma_1^0 U(\vec{p} - \vec{p}') \tilde{\phi}(\vec{p}', P) \gamma_2^0 \Lambda_2^+ \right] - \left[ \Lambda_1^- \gamma_1^0 U(\vec{p} - \vec{p}') \tilde{\phi}(\vec{p}', P) \gamma_2^0 \Lambda_2^- \right] \right) \quad (2.8)$$

Nesta expressão,  $H_i$  é o Hamiltoniano de Dirac da partícula  $i$ . Ainda temos:

$$\Lambda_i^\pm = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{H_i}{\sqrt{p_i^2 + m_i^2}} \right).$$

$$\tilde{\phi}(\vec{p}, P) = \int dp^0 \tilde{\psi}(p^0, \vec{p}, P).$$

Esta é uma equação para função de onda em tempo igual com cinemática relativística mas com aproximação estática do potencial. Mantendo a cinemática relativística na equação de Bethe - Salpeter provavelmente chegaremos a melhores resultados, mas o tratamento pode apresentar algumas complicações na sistemática de cálculos.

A alternativa menos complexa consiste em partirmos para o formalismo de Schrödinger que, na verdade, consiste da aproximação não - relativística aplicada sobre (2.8). Esta aproximação consiste basicamente em dois procedimentos: tomar o termo cinético segundo uma aproximação não - relativística e fazer uma aproximação local para o potencial de interação, ambos, no referencial do centro de momento ( $P = 0$ ).

$$\begin{aligned} H_i(Dirac) &\longrightarrow \text{Aproximação para o termo cinético} \rightarrow T_i^{cin} \\ \Lambda_i^+ U(\vec{p} - \vec{p}') \tilde{\phi}(\vec{p}') \Lambda_i^+ &\longrightarrow U(\vec{p} - \vec{p}') \phi(\vec{p}') \\ \Lambda_i^- U(\vec{p} - \vec{p}') \tilde{\phi}(\vec{p}') \Lambda_i^- &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Com esta aproximação temos exatamente a equação de Schrödinger (2.9), onde todos os elementos de interação virão a aparecer de forma perturbativa

conforme descreveremos no capítulo 3.

$$(T_1^{cin} + T_2^{cin} - E) \tilde{\phi}(\vec{p}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p' \tilde{U}(\vec{p} - \vec{p}') \tilde{\phi}(\vec{p}') \quad (2.9)$$

Com:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \exp(i\vec{r} \cdot \vec{k}) \tilde{U}(\vec{k}). \quad (2.10)$$

$$\vec{k} = \vec{p} - \vec{p}'$$

Neste nosso trabalho, no desenvolvimento da metodologia aplicada ao estudo das propriedades dos estados ligados quark - antiquark, estaremos aplicando a redução não - relativística. Optamos por trabalhar com uma aproximação não - relativística do termo cinético ao mesmo tempo em que também consideramos a não - localidade do potencial [43]. Entretanto, é ainda conforme o formalismo de Schrödinger que buscamos as informações sobre a interação.

Considerando o espalhamento elástico dos constituintes de um estado ligado, a parte perturbativamente acessível do potencial pode ser obtida da seguinte maneira:

Escrevemos a amplitude de espalhamento  $T_{fi}$  em função dos elementos de matriz  $\mathbf{S}$ .

$$S_{fi} = \langle f|i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi} \text{ (termo de menor ordem).}$$

Para a obtenção do potencial de interação tomamos o limite não - relativístico de (2.11)<sup>2</sup>.

$$U(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k [\exp(-ik \cdot x) T_{fi}(k)]. \quad (2.11)$$

$$T_{fi}(k) \longrightarrow -\tilde{U}(\vec{k})(2\pi)\delta(k^0).$$

A situação relevante no cálculo das forças quark - antiquark ( $q\bar{q}$ ) em um méson vem justamente da análise do espalhamento  $q\bar{q}$ :

$$q_1(p_1, s_1) + \bar{q}_2(p_2, s_2) \longrightarrow q_3(p_3, s_3) + \bar{q}_4(p_4, s_4).$$

---

<sup>2</sup> $x$  é o quadri vetor posição,  $\vec{r}$  é o vetor posição e  $r$  é o módulo do vetor posição

O par quark - antiquark em um méson se dispõe em um singlete de cor de forma que a antissimetria da função de onda total diante da troca de férmions seja mantida. A função de onda associada ao singlete de cor é representada por  $\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}}$ .

Segundo os Diagramas de Feynman de primeira ordem da figura 2.1, obtemos o elemento de matriz  $T_{fi}$ .

$$\begin{aligned}
 T_{fi} = & -\frac{m^2}{(2\pi)^6 \sqrt{E_{p1} E_{p2} E_{p3} E_{p4}}} g_s^2 \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{3}} \times \\
 & \left( \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{\lambda_{ki}^a}{2} \frac{\lambda_{jl}^a}{2} \bar{u}(3) \gamma_\mu u(1) \bar{v}(2) \gamma^\mu v(4) + \right. \\
 & \left. (-1) \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \frac{\lambda_{ji}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} \bar{u}(3) \gamma_\mu v(4) \bar{v}(2) \gamma^\mu u(1) \right). \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

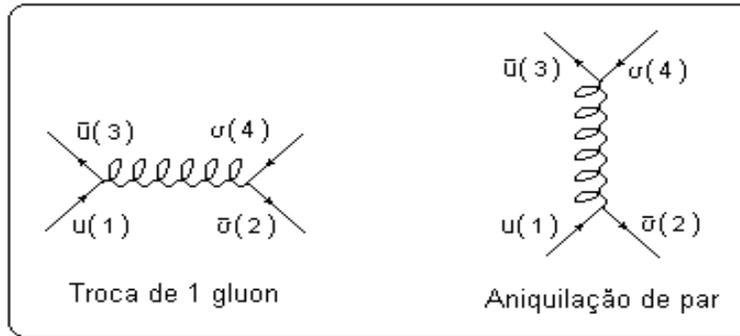


Figura 2.1: Diagramas de Feynman de primeira ordem para a interação quark- antiquark

Sabendo-se que  $Tr[(\lambda^a)^2] = 16$ , os fatores de cor associados à troca de um glúon e à aniquilação de par são dados respectivamente por:

$$\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_{ki}^a}{2} \frac{\lambda_{jl}^a}{2} = \frac{1}{12} \text{Tr}[(\lambda^a)^2] = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{12} [\text{Tr}(\lambda^a)]^2 = 0.$$

Desta forma, no limite não - relativístico, a amplitude de espalhamento fica:

$$T_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4}{3} \frac{g_s^2}{\vec{k}^2} \quad (2.13)$$

Conseqüentemente, a interação quark - antiquark  $q\bar{q}$  vista segundo a aproximação em primeira ordem pela troca de um glúon leva a um potencial da forma:

$$U(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \quad \text{com} \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}. \quad (2.14)$$

No caso de bárions, as forças são determinadas pelo espalhamento quark-quark ( $qq$ ), conforme os resultados da equação de Dirac, (como no caso da interação quark - antiquark  $q\bar{q}$ ). A função de onda associada ao elemento de cor é dada por  $\frac{\varepsilon_{ijk}}{\sqrt{6}}$ .

No caso em que temos apenas a interação entre dois corpos em um sistema de três corpos o fator de cor será de  $-\frac{2}{3}$  e no caso em que temos a interação entre três corpos mediante uma glueball de vértice triplo, o fator de cor será nulo [28].

## Capítulo 3

# A redução não - relativística e os elementos importantes na construção do Hamiltoniano quark - antiquark.

### 3.1 A estrutura de spins e as correções relativísticas.

Procuraremos, agora, uma maneira sistemática de obter as correções de ordem  $\frac{1}{m^2}$  da equação de Schrödinger não - relativística, de maneira a observarmos imediatamente a separação do espectro de massas devido aos termos dependentes de spin. As informações sobre os termos dependentes de spin podem permitir um entendimento profundo da natureza (Lorentz) do confinamento.

Em princípio, a determinação das correções relativísticas parece imediata: expandem-se os termos até a ordem de  $\frac{1}{m^2}$  e identifica-se o Hamiltoniano efetivo que aparece na equação de Schrödinger. Entretanto, um pequeno

problema aparece na associação entre os spinores de quatro componentes da amplitude de Bethe - Salpeter e os spinores de duas componentes que aparecem na equação de Schrödinger. Um certo cuidado é necessário de forma que se preserve a normalização correta na passagem da descrição relativística para a não - relativística [27, 33].

A respeito da interação, se tomarmos um kernel  $\tilde{I}$  generalizado ao invés do kernel Coulombiano (seção 2.2), podemos escrevê-lo como uma composição dos invariantes de Lorentz com paridade definida para cada termo:

$$\tilde{I} = \tilde{S}1 \otimes 1 + \tilde{P}\gamma^5 \otimes \gamma^5 + \tilde{V}\gamma^\mu \otimes \gamma_\mu + \tilde{A}\gamma^\mu\gamma^5 \otimes \gamma_\mu\gamma^5 + \frac{1}{2}\tilde{T}\sigma^{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Nesta expressão, temos  $\tilde{U}\Gamma \otimes \Gamma = \bar{\psi}\Gamma\psi\tilde{U}\bar{\psi}\Gamma\psi$ .

As funções  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{T}$  são funções escalares que podem depender dos quadrimomentos  $p_{in}(p)$ ,  $p_{out}(p')$ ,  $k(p-p')$  ou  $P(\frac{p+p'}{2})$ . No prosseguimento do tratamento, problemas aparecem na integração da componente temporal  $p^0_{out}$ . A energia transferida entre as partículas interagentes,  $k^0$ , é pequena no limite não - relativístico, portanto, no limite estático podemos adotar  $k^0 \rightarrow 0$ .

Uma outra prescrição [43] coloca os quadrimomentos  $p_i$  de forma que  $p_i^0 = \sqrt{m_i^2 + p_i^2}$  (“mass shell”) possibilitando um tratamento mais simples para problemas de espalhamento. Aliás, como já vimos, esta análise com base no formalismo de matriz  $\mathbf{S}$  proporciona meios simples de se obter um potencial efetivo: a interação tratada segundo os termos de menor ordem permite que, pelo caminho inverso da primeira aproximação de Born, o potencial seja obtido pela transformada de Fourier da amplitude de espalhamento com relação ao momento transferido. (O mesmo resultado pode ser obtido com uma complicada redução não - relativística [27] da equação de Bethe - Salpeter sem termos que assumir que a energia de interação é pequena).

O fato de se colocar as componentes de momento  $p_{in}$ ,  $p_{out}$ ,  $k$  ou  $P(\text{total})$  na “camada de massa” (“mass shell”), ao invés de se adotar a aproximação instantânea, gerou inúmeras ambigüidades, outrora discutidas [40, 43, 44, 45], na maneira de se expressar corretamente o Hamiltoniano efetivo.

Uma sugestão bem mais simples [27], adotada no nosso trabalho, consiste em partirmos de uma teoria perturbativa estacionária do tipo de Schrödinger com aproximação estática inicial para, em seguida, considerarmos os desvios desta aproximação segundo uma teoria perturbativa.

Outro fato a ficarmos atentos na derivação do Hamiltoniano interagente é no ordenamento correto dos operadores não comutantes que aparecem no potencial efetivo [27]. Para evitarmos maiores problemas com respeito a isso, efetuamos a transformação de Foldy (3.2) e escrevemos o Hamiltoniano de interação em termos dos momentos  $\vec{k}$  e  $\vec{p}$  que são respectivamente o momento de troca entre as partículas e o momento de cada partícula no referencial de centro de momento.

$$\langle \Gamma \rangle = \psi^\dagger(\vec{p}') \Gamma \psi(\vec{p}). \quad (3.2)$$

Impondo a restrição de que a dependência do kernel de interação seja da forma  $\tilde{I} = \tilde{I}(k^2)$  e seguindo o procedimento de redução não - relativística, chegaremos ao resultado esperado.

Inúmeros são os trabalhos na tentativa de encontrar um Hamiltoniano efetivo que descreva com maior precisão os elementos de interação em um estado ligado de dois quarks [32, 40, 43, 44, 45, 46, 49]. Dentro deste contexto, ainda restam controvérsias sobre como expressar exatamente os efeitos de retardamento do potencial. Optamos por tomar como referência a prescrição de Gromes [43] que atenta para os termos dependentes do momento de forma que sejam convenientemente escritos, mantendo-se a hermeticidade do Hamiltoniano.

Utilizando a notação  $\beta = \gamma^0$ ,  $\gamma^0 \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$  e  $\vec{\sigma}$  representando as matrizes de Pauli (operador de spin  $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ ), temos que a função de onda para o estado livre normalizado é escrita como:

$$u^s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_s$$

(onde “1” representa a matriz identidade  $2 \times 2$ .)

A redução não - relativística fornece:

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p^2}{8m^2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \end{pmatrix} \chi_s.$$

Segundo as transformações de Foldy, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= 1 - \frac{\vec{k}^2}{8m^2} + i \frac{1}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} \times \vec{p}). \\ \langle \beta \rangle &= 1 - \frac{\vec{P}^2}{2m^2} - i \frac{1}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} \times \vec{p}). \\ \langle \vec{\alpha} \rangle &= \frac{\vec{P}}{m} - i \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \times \vec{k}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Consideramos somente termos até a ordem de  $(\frac{1}{m^2})$ .

As funções de  $\vec{k}$  atuam somente no potencial em questão e as funções de  $\vec{P}$  (e  $\vec{p}$ ) atuam somente na função de onda.

Utilizamos (3.3) no cálculo dos termos escalar e vetorial presentes no Hamiltoniano efetivo.

**A componente escalar  $U_S(r)$ .**

$$\bar{\psi}_1 \psi_1 S(r) \bar{\psi}_2 \psi_2 \Rightarrow \langle \beta_1 \rangle S(r) \langle \beta_2 \rangle \Rightarrow .$$

$$\begin{aligned} S(r) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) S(r) \vec{P}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{s}_1}{m_1^2} + \frac{\vec{s}_2}{m_2^2} \right) \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} S(r) - \quad (3.4) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) f(\omega_s(r)). \end{aligned}$$

O operador  $\vec{P}$  é aplicado somente na função de onda.

$\omega_s(r)$  é a transformada de Fourier de  $\frac{d}{d(-k^2)} S(-k^2)$ .

Temos  $\nabla^2 \omega_s(r) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{r} S(r))$  introduzida segundo a já citada prescrição de Gromes [43].

**A componente vetorial**  $U_V(r)$  .

- Temporal.

$$\bar{\psi}_1 \gamma^0 \psi_1 V(r) \bar{\psi}_2 \gamma^0 \psi_2 \Rightarrow \langle 1_1 \rangle V(r) \langle 1_2 \rangle \Rightarrow .$$

$$V(r) + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \nabla^2 S(r) + \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{s}_1}{m_1^2} + \frac{\vec{s}_2}{m_2^2} \right) \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V(r). \quad (3.5)$$

- Espacial.

$$- \left( \bar{\psi}_1 \vec{\gamma} \psi_1 V(r) \bar{\psi}_2 \vec{\gamma} \psi_2 + \bar{\psi}_1 \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \psi_1 \frac{V(r)}{k^2} \bar{\psi}_2 \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \psi_2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \langle \vec{\alpha}_1 \rangle V(r) \langle \vec{\alpha}_2 \rangle + (\langle \vec{\alpha}_1 \rangle \cdot \vec{k}) \frac{V(r)}{k^2} (\vec{k} \cdot \langle \vec{\alpha}_2 \rangle) \Rightarrow .$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1 m_2} V(r) \vec{P}^2 + \frac{2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{3m_1 m_2} \nabla^2 V(r) - \frac{S_{12}}{12m_1 m_2} \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) V(r) \\ + \frac{1}{m_1 m_2} \vec{s} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V(r) + \frac{1}{m_1 m_2} f(\omega(r)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Novamente o operador  $\vec{P}$  atua somente na função de onda. Temos ainda

$$S_{12} = 3(\vec{s}_1 \cdot \hat{n})(\vec{s}_2 \cdot \hat{n}) - (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2).$$

$$f(\omega(r)) = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \omega(r)$$

Da mesma maneira  $\omega(r)$  é a transformada de Fourier de  $\frac{d}{d(-k^2)} V(-k^2)$  satisfazendo  $\nabla^2 \omega(r) = -V(r)$ .

Os demais termos: pseudo - escalar, axial (ou pseudo - vetorial) e tensorial, também são calculados segundo o mesmo procedimento:

**A componente pseudo - escalar**  $U_P(r)$ .

$$\frac{1}{3m_1m_2} \nabla^2 P(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \frac{2S_{12}}{3m_1m_2} \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) P(r) \quad (3.7)$$

**A componente axial**  $U_A(r)$ .

$$-4A(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \quad (3.8)$$

**A componente tensorial**  $U_T(r)$ .

$$+4T(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \quad (3.9)$$

As formas explícitas das correções axial e tensorial não são fisicamente muito interessantes (na interação quark - antiquark não temos propagadores com essas características). Uma interação pseudo - escalar tem sua importância em alguns modelos nucleares com interação via propagadores pseudo - escalares (troca de um pión na ligação do deuteron por exemplo).

De qualquer forma, é importante observar que somente as componentes escalar e vetorial apresentam termos puros de potencial:  $S(r)$  e  $V(r)$ . No nosso trabalho, as prerrogativas físicas impõem no Hamiltoniano efetivo de interação somente a presença das componentes vetorial e escalar para os sistemas que estaremos estudando. É importante salientar que esse Hamiltoniano contém todos os termos de interação de Breit - Fermi.

Os termos do Hamiltoniano que vêm da interação escalar são bem mais simples, com apenas um termo de interação dependente de spin: spin - órbita (pode ser interpretado como o termo de precessão de Thomas).

Dos resultados teóricos e fenomenológicos [27] que temos até agora, há uma série de argumentos muito convincentes de que as forças entre quarks vêm da combinação de um termo Coulombiano de troca vetorial de curto alcance (um glúon) e um termo linear de confinamento escalar. O sinal oposto entre os termos de interação spin - órbita vetorial e escalar leva a uma

compensação de tais efeitos, ou seja, sem esta característica a separação de energias devido a esses termos não comportaria um tratamento perturbativo.

É importante constar que a determinação da estrutura de Lorentz do potencial de interação Coulombiano + linear decorre de uma análise simplificada dos dados experimentais [27]. Diante disso, alguns trabalhos [47, 48, 49] optam por parametrizar este comportamento, ao invés da denominação vetorial para o termo Coulombiano e escalar para o termo linear. Algo desse tipo é feito quando fazemos os cálculos com o potencial logarítmico, mas de qualquer forma, tal procedimento não acrescenta nenhum conteúdo físico ao problema.

Voltando a falar do potencial pseudo - escalar, observamos a ausência de um potencial estático e a presença de um termo spin - spin e um termo tensorial que não promovem uma interação muito forte. Sendo assim, somente as interações relativísticas sobrevivem.

Com relação à existência de propagadores axiais ou tensoriais, teríamos as interações spin - spin bem mais significativas ( $O(1 \gg \frac{1}{m^2})$ ), o que definitivamente não observamos na espectroscopia de energia que temos experimentalmente.

Uma vez estabelecida a expressão geral para o nosso Hamiltoniano, falta encontrar a maneira mais conveniente de desenvolvermos o tratamento, em termos do que ocorre fisicamente e da subsequente abordagem matemática, para o potencial de interação e para o termo cinético efetivo num estado ligado quark - antiquark.

## 3.2 O termo cinético do Hamiltoniano.

Desde os trabalhos pioneiros de Stanley e Robson [50] e de Godfrey e Isgur [46] observa-se com cuidado os efeitos do termo cinético do Hamiltoniano de um estado ligado quark - antiquark, havendo uma certa preocupação com relação aos efeitos relativísticos mesmo em sistemas de quarks pesados.

Enquanto houve progresso no tratamento perturbativo das correções relativísticas do espectro de Schrödinger, os efeitos relativísticos nas funções de onda ainda apresentam complicações em seu tratamento [51, 52, 53], afetando os valores calculáveis das grandezas físicas que nos interessam (no caso, as larguras de transição). Sendo assim, espera-se que a aproximação para o termo de energia cinética seja exata dentro de um comportamento médio para os estados de menor energia. Adotaremos uma aproximação não - relativística com base na desigualdade de Martin (3.10) já sugerida em outros trabalhos [52, 54].

$$\sqrt{p^2 + m^2} \leq \frac{M}{2} + \frac{p^2}{2M} + \frac{m^2}{2M}. \quad (3.10)$$

Dado  $M$ , a igualdade em (3.10) se mantém no espaço de momentos justamente no ponto  $p_0 = \sqrt{M^2 - m^2}$ . As curvas definidas pelos dois lados da desigualdade são tangentes em  $p_0$  que é o ponto que satisfaz a igualdade  $M^2 = m^2 + p_0^2$ .

Como a condição de Martin é uma relação de operadores, esta desigualdade se mantém para os valores esperados de um estado e para a média dos valores esperados sobre um conjunto de estados com  $M$  e  $p_0$  arbitrários. Em [52] sugere-se a escolha de  $p_0^2 = \langle p^2 \rangle$  para um conjunto de estados em questão, esperando uma aproximação não - relativística razoavelmente exata. A expressão (3.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sqrt{p^2 + m^2} \leq M + \frac{p^2}{2M} - \frac{\langle p^2 \rangle}{2M}. \quad (3.11)$$

$$M = \sqrt{\langle p^2 \rangle + m^2}.$$

O conteúdo físico deste resultado pode ser ilustrado pela expansão direta em torno de  $p_0^2$  a seguir:

$$\sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{p^2 - p_0^2 + M^2} = M + \frac{p^2 - p_0^2}{2M} - \frac{(p^2 - p_0^2)^2}{8M^3} + \dots \quad (3.12)$$

Nos nossos cálculos, veremos que uma escolha aproximadamente correta para o parâmetro  $p_0^2$  proporciona bons resultados para o cálculo do espectro

de massas de sistemas quark - antiquark pesados e, com algumas restrições, para sistemas relativísticos (leves). Em [52] foi adotada uma aproximação linear (3.13) com um termo de translação  $\epsilon$ .

$$\sqrt{p^2 + m^2} \approx M + \frac{p^2}{2M} + \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.13)$$

$$\epsilon = \frac{\langle -p^2 \rangle}{M} - \left\langle \frac{(p^2 - \langle p^2 \rangle)^2}{4M^3} \right\rangle.$$

Nessa aproximação segundo [52], o parâmetro  $p_0^2 = \langle p^2 \rangle$  foi sugerido e calculado como sendo o valor médio dos valores esperados do quadrado do momento dos quatro primeiros estados de energia.

Com a motivação da idéia de uma aproximação linear, procurando expressá-la da melhor maneira que represente a energia cinética de cada partícula no referencial de centro de momento com  $p^2 < 10 \text{ GeV}^2$  para os estados que estaremos estudando, que é a região de energia cinética com probabilidade significativa de encontrarmos um quark no estado ligado, propomos a utilização de um termo cinético na forma (3.15). Este termo, um pouco mais simples que (3.13), fisicamente não perde nenhum valor uma vez que em (3.13) o parâmetro  $\epsilon$  é determinado em função dos dados experimentais.

$$T_i^{cin}(exata) = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \quad (3.14)$$

$$T_i^{cin}(aprox.) = \sqrt{p_{0i}^2 + m_i^2} + \frac{p_i^2 - p_{0i}^2}{2\sqrt{p_{0i}^2 + m_i^2}} \quad (3.15)$$

Com esta aproximação empregaremos uma nova maneira, mais próxima do termo exato, de determinar  $p_0^2$  ou o momento quadrático médio em questão.

No gráfico da figura 3.1 ilustramos o desvio quadrático médio desta aproximação (3.15) em relação ao termo cinético relativístico exato (3.14) no intervalo de  $0 \text{ GeV}^2 < p^2 < 10 \text{ GeV}^2$ , em função de  $p_0^2$  para diferentes valores de massa que nos interessam ( de 0 GeV a 5 GeV).

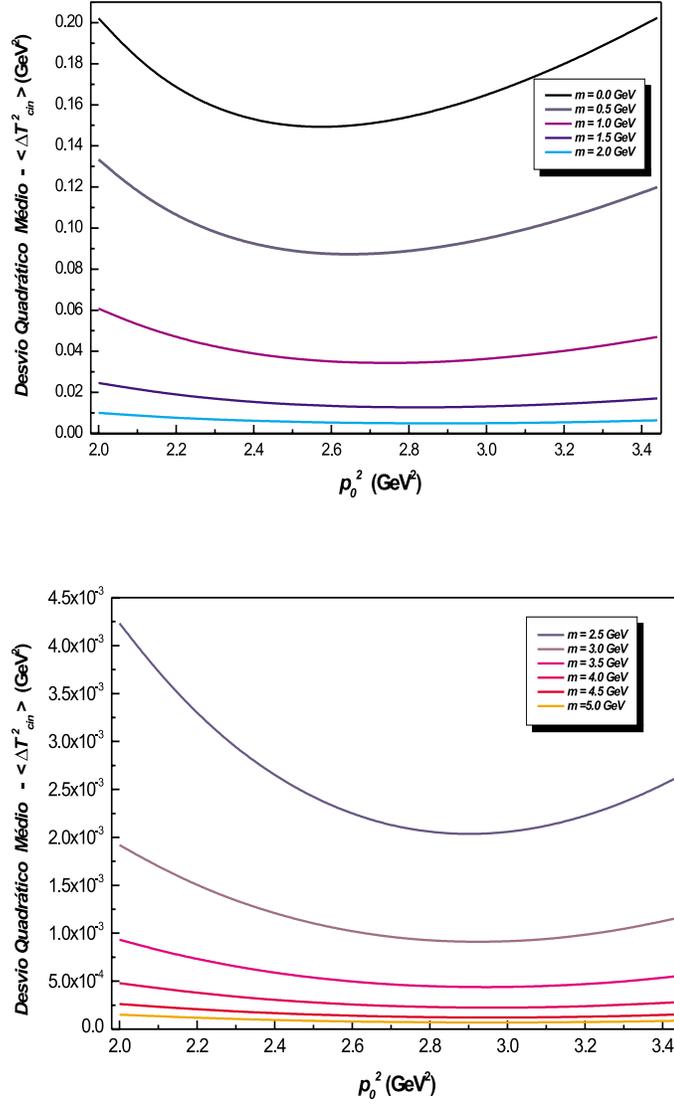


Figura 3.1: Desvio quadrático médio da aproximação linear em relação ao termo cinético exato em função de  $p_0^2$  para massas variando de 0 a 5 GeV.

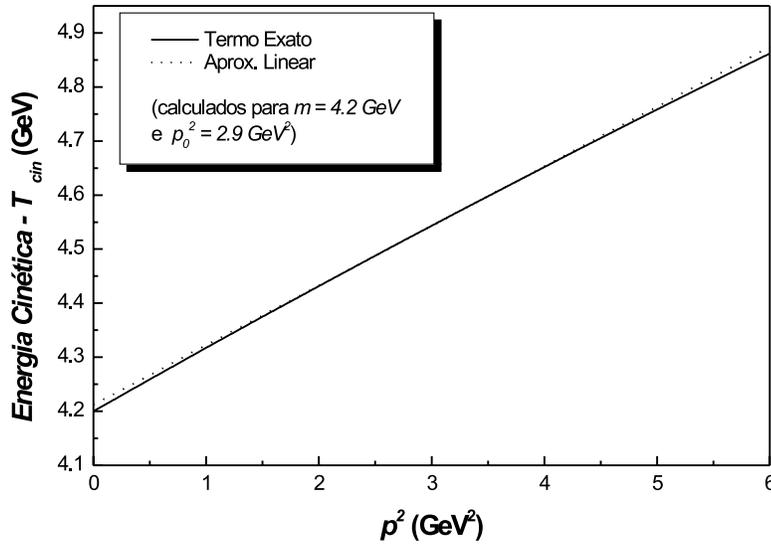
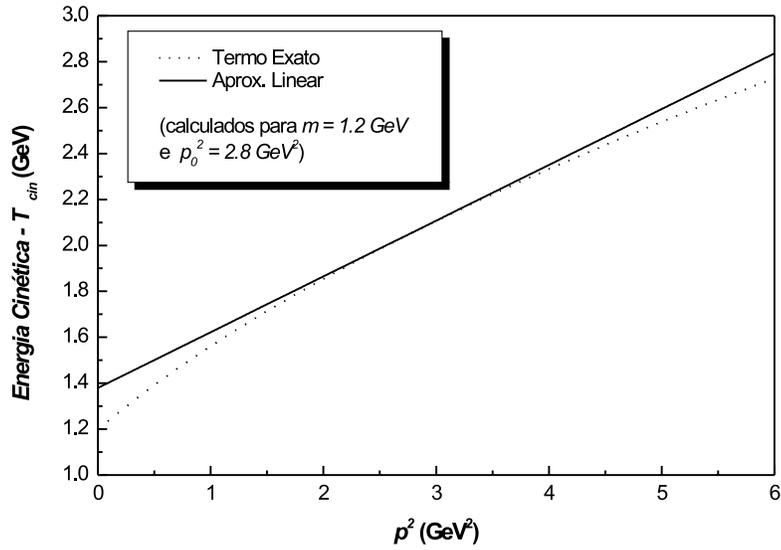


Figura 3.2: Comparação da aproximação do termo de energia cinética em relação ao termo exato relativístico em função de  $p^2$ , com  $p_0^2$  assumindo o valor do ponto de mínimo.

Notamos que para o quark bottom com massa de aproximadamente  $4.5 GeV$  o valor indicado para  $p_0^2$  é de aproximadamente  $2.9 GeV^2$ . Para o quark charm com massa de aproximadamente  $1.2 GeV$  teremos  $p_0^2$  de aproximadamente  $2.8 GeV^2$ . Para o tratamento de outros estados ligados seremos guiados pelo gráfico da figura 3.1.

Esta aproximação elimina o parâmetro  $\epsilon$  do termo de energia cinética, apesar de manter uma escolha até certo ponto arbitrária do parâmetro  $p_0^2$ .

Veja a representação das curvas  $T_i^{cin}(exata)$  e  $T_i^{cin}(aprox.)$  em função de  $p^2$  para o caso em que  $p_0^2$  assume o valor do ponto de mínimo (figura 3.2). Observe a coerência da aproximação adotada.

Outras formas adequadas ao tratamento dos termos não - locais de energia cinética já foram propostas e analisadas no decorrer deste trabalho [46, 48, 53, 55, 56], entretanto, nenhuma está propensa a uma simplificação tão grande nos cálculos como a descrita nesta seção, de maneira que ainda se mantenha a precisão desejada (observe o desvio quadrático médio em relação ao termo exato na figura 3.1).

## 3.3 O potencial de interação.

### 3.3.1 Aspectos gerais.

De acordo com a análise da estrutura de spins do potencial, os indícios fenomenológicos mostram que o potencial da interação quark - antiquark deve conter uma componente escalar e uma vetorial [27, 57, 58]. Para pequenas distâncias, onde a interação é mediada pela troca de um glúon de alta energia, o potencial do tipo Coulombiano ponderado por um fator de cor constitui uma boa aproximação em primeira ordem. Para grandes distâncias deve haver uma contribuição que descreva o confinamento de cor. Dinamicamente, diretamente da QCD, não temos uma expressão analítica que descreva uma interação pela troca de um quantum de campo associado à força confinante.

Fenomenologicamente, supõe-se:

$$U(r)_{conf} = ar^n, \quad n > 0. \quad (3.16)$$

Os dados experimentais indicam que  $n$  é aproximadamente igual a um, assim, o potencial completo ficaria:

$$U(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + ar + b. \quad (3.17)$$

A origem do termo constante  $b$  vem da divergência infravermelha da integral de Fourier (3.18) do kernel de confinamento que leva ao potencial de confinamento (o valor de  $b$  depende dos parâmetros de confinamento e da escala de momento  $\rightarrow$  ponto de renormalização, mas para todos os efeitos é determinado fenomenologicamente).

$$\int d^3k \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})}{k^4} \approx r. \quad (3.18)$$

Potenciais da forma (3.17) têm o termo Coulombiano com caráter vetorial e o termo linear com caráter escalar [27], conforme a prescrição da seção (3.1).

Alguns modelos limitam a ação destes potenciais para um intervalo de energia de troca (momento transversal) específico: os estados ligados de quarks leves teriam o termo linear de interação predominante e os estados ligados de quarks pesados (bottomônio e topônio) seriam muito bem descritos pelo termo Coulombiano dominante. Nessa linha, alguns modelos com potencial logarítmico, correspondente justamente à região intermediária de (3.17), são muito bem aplicados no estudo do charmônio e do bottomônio [51].

Uma forma simples de se interpolar as regiões de ação desses potenciais é através do potencial de Richardson [59, 27], cuja característica é depender de um único parâmetro  $\Lambda$ :

$$U(r) = -\frac{4}{3B} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})}{k^2 \ln\left(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (3.19)$$

$$B = \frac{33 - n_f}{48\pi^2}$$

Não é possível fornecer uma expressão analítica para este potencial, mas para seus extremos encontramos:

$$\vec{k}^2 \gg \Lambda^2 \Rightarrow \frac{1}{\vec{k}^2 \ln\left(1 + \frac{\vec{k}^2}{\Lambda^2}\right)} \approx \frac{1}{\vec{k}^2 \ln\left(\frac{\vec{k}^2}{\Lambda^2}\right)} = \frac{4\pi B \alpha_s(\vec{k}^2)}{\vec{k}^2}$$

$$\vec{k}^2 \ll \Lambda^2 \Rightarrow \frac{1}{\vec{k}^2 \ln\left(1 + \frac{\vec{k}^2}{\Lambda^2}\right)} \approx \frac{\Lambda^2}{\vec{k}^4}$$

Para distâncias curtas este potencial apresenta um comportamento linear e para distâncias longas é exatamente igual à aproximação pela troca de um glúon, que no caso de  $\alpha_s(\vec{k}) \rightarrow \alpha_s$  equivale ao potencial do tipo Coulombiano. Entretanto, não vemos conveniência na parametrização em termos de um único parâmetro pois não temos nenhum indício de que existe esta correlação entre os dois comportamentos para distâncias longas e curtas (ainda precisa ser verificado fenomenologicamente)..

Em resumo, os potenciais que se apresentam são variações do potencial Coulombiano + linear que num tratamento perturbativo aparecem como potenciais estáticos somados às correções de Breit - Fermi com termos relativísticos até 2ª ordem do inverso das massas constituintes dos quarks nos estados ligados.

De maneira a se obter os autoestados, a equação de Schrödinger pode ser resolvida numericamente sem os termos perturbativos. O espectro de energia do sistema em consideração é obtido aproximadamente pelos valores esperados do Hamiltoniano completo, calculado em função dos estados não - perturbados. Não há diferença entre os autoestados de spins diferentes. Em princípio, estes modelos são designados para sistemas de quarks pesados.

Para sistemas de estados ligados constituídos de quarks leves o problema é mais difícil, pois o tratamento perturbativo não pode ser justificado. Um dos fatores é a diferença entre o singlete e o tripleto de spin de um mesmo

estado cuja diferença de massa é muito elevada ( $\pi$  e  $\rho$ ), sendo da ordem ou maior que as massas constituintes do estado ligado.

A interação spin - spin que causa esta discrepância não pode ser tratada perturbativamente.

Conseqüentemente, para quarks leves, as correções do Hamiltoniano de Breit - Fermi precisam ser tratadas não - perturbativamente, ou seja, a equação de Schrödinger deve ser resolvida com todos os termos do Hamiltoniano.

Para um potencial com termo Coulombiano, a inclusão dos termos relativísticos pode causar problemas de singularidade, do tipo

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta^3(\vec{r}). \quad (3.20)$$

Para um Hamiltoniano da forma  $H = T^{cin} + H_{ss}$ , que apresente o termo acima explicitamente, com a aplicação do método variacional, esta expressão não teria limitante inferior [27, 32, 46, 48] o que significa que não teríamos um estado fundamental, sendo portanto, fisicamente inconcebível. A função delta é conseqüência da aproximação relativística para um modelo de potencial. Este problema pode ser contornado ao deixarmos para tomar o limite não - relativístico para a interação spin - spin somente na última etapa.

A solução mais simples imaginada é o “smearing” da função delta que é substituída por uma função que converge fracamente para  $\delta^3(\vec{r})$ :

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \frac{\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)}{r}. \quad (3.21)$$

Este procedimento pode ser aplicado ao potencial Coulombiano + linear acrescido de um termo exponencial [27].

Outra possibilidade é introduzir um termo de delocalização na parte Coulombiana do potencial na forma:

$$Erf(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r \exp(-t^2) dt \Rightarrow \nabla^2 \left( \frac{Erf(r)}{r} \right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-r^2) \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Uma forma particular para o potencial.

A nossa proposição para o desenvolvimento do nosso trabalho seguirá algumas das prescrições desenvolvidas até aqui. Para empregarmos o potencial na forma Coulombiana + linear levaremos em conta mais algumas considerações.

Sabemos que, em uma aproximação até primeira ordem dos diagramas de Feynman, a QCD fornece uma expressão para a constante de acoplamento [60] na forma de (3.23).

$$\alpha_s(k^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (3.23)$$

O parâmetro de escala  $\Lambda$  é dado no intervalo de  $0.15 \text{ GeV} < \Lambda < 0.30 \text{ GeV}$ , para  $n_f = 4$  ou  $5$  [60]. Isto indica, conforme (3.23), que  $\alpha_s(k^2)$  tende a um valor aproximadamente constante para a região  $5 \text{ GeV} < k < 20 \text{ GeV}$ . Por outro lado, quando  $k \rightarrow \Lambda$ , o tratamento perturbativo em primeira ordem não se aplica pois (3.23) diverge indicando a existência do confinamento.

Godfrey e Isgur [46] propõem a parametrização deste comportamento para a região  $5 \text{ GeV} < k < 20 \text{ GeV}$  da seguinte maneira:

$$\alpha_s(k^2) = \sum_m \alpha_m \exp\left(-\frac{k^2}{\eta_m^2}\right) \Rightarrow \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \alpha_s(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_m \alpha_m \int_0^{\frac{w_m r}{2}} \exp(-x^2) dx.$$

$$\alpha_s(r) \approx \alpha_s(1 - \exp(-wr)) \quad (3.25)$$

Esta parametrização é procedente uma vez que ela acaba por descrever com bastante propriedade o comportamento assintótico da constante de acoplamento. A partir do momento em que obtemos a constante de acoplamento forte segundo um tratamento perturbativo ( $k^2$  elevado), considerando apenas uma expansão diagramática em primeira ordem, é conveniente

assumí-la como tal somente para esta região acessível a um tratamento perturbativo.

O confinamento deve aparecer separadamente com os dados experimentais indicando um comportamento linear (3.26). Na região de interação  $5 \text{ GeV} < k < 20 \text{ GeV}$  apenas o primeiro termo da somatória em (3.24) é suficiente para parametrizar o comportamento do potencial que propomos (3.26), e em função de um parâmetro  $w$  podemos reproduzir este comportamento dentro da região citada através da parametrização exponencial em (3.25). Veja na figura 3.3 como podemos perfeitamente adotar uma parametrização exponencial em  $w$  ao invés da expressão em termos da função erro de (3.24), simplificando os cálculos das autoenergias.

É importante lembrar que em um estado ligado o quark é tido como um grau de liberdade efetivo “camuflado” por uma nuvem de glúons e pares quark - antiquark (renormalização), de maneira que alguns trabalhos [46, 47, 48] propõem uma densidade de probabilidade de quarks no espaço de configuração como uma função que venha a descrever o efeito de delocalização do potencial. O efeito de um termo como este em uma descrição simplificada como a proposta neste trabalho, pode ser englobado pelo parâmetro  $w$  da constante de acoplamento variável (3.24).

Além disso, tal parametrização elimina o problema decorrente da ação do operador  $\nabla^2$  na expressão (3.20).

$$U(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} (1 - \exp(-wr)) + ar + b. \quad (3.26)$$

Obviamente, a expressão (3.26) descreve apenas os termos puros do potencial ( $U(r) = S(r) + V(r)$ ), mas para os nossos cálculos todos os elementos dependentes do momento angular orbital, do spin e dos termos não - locais descritos na seção 3.1 foram considerados.

Como o desenvolvimento do nosso trabalho está centrado no estudo dos estados ligados do charmônio e do bottomônio ainda fazemos menção ao potencial logarítmico [51] na forma (3.27).

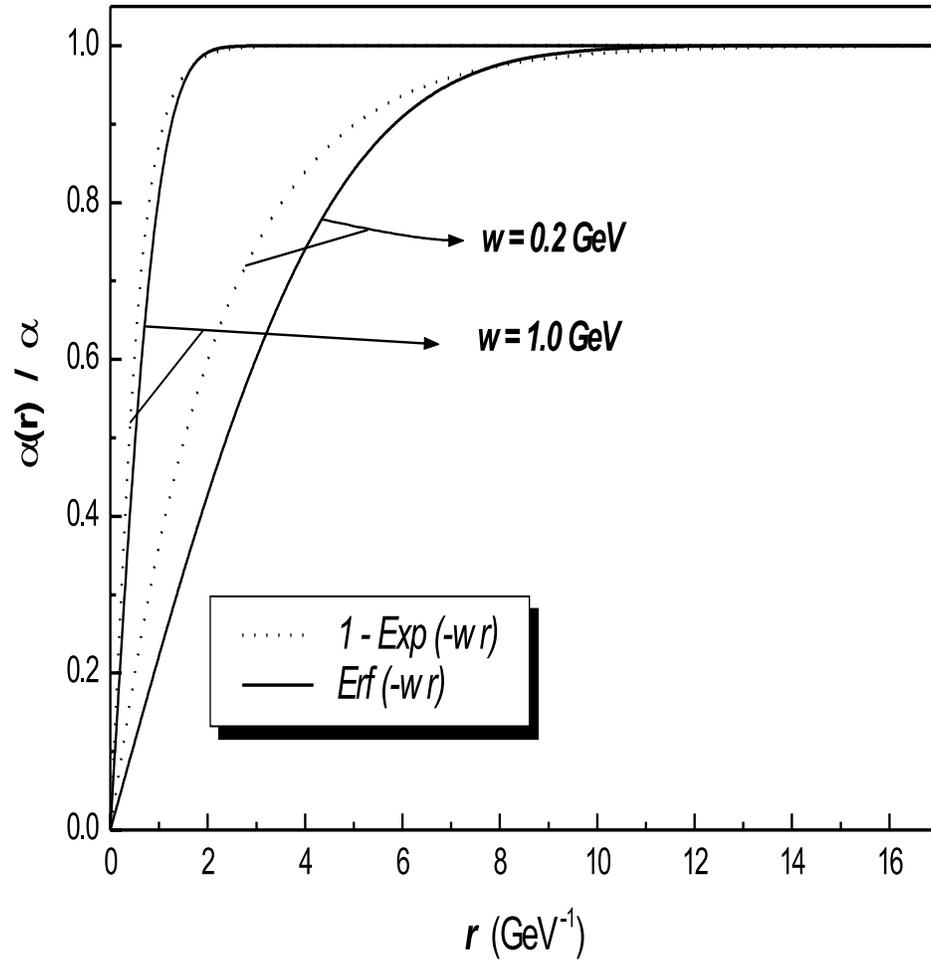


Figura 3.3: Parametrização da constante de acoplamento do potencial Coulombiano para  $w = 0.2 \text{ GeV}$  e  $w = 1.0 \text{ GeV}$

$$U_{ln}(r) = (a_s + a_v)r \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (3.27)$$

(Os parâmetros  $a_s$  e  $a_v$  se referem às componentes escalar e vetorial).

### 3.4 A função de onda na origem e as larguras de transição.

Sempre que duas partículas se aniquilam, isto deve ocorrer em um mesmo ponto espacial. O elemento de matriz correspondente a este processo é proporcional à função de onda do sistema na origem. Utilizando os resultados de teoria de perturbação em primeira ordem, a largura de transição de um méson vetorial em um par elétron - pósitron é dada pela expressão (3.28) [51].

$$\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+) = \frac{16\pi\alpha_{em}^2}{M_{q\bar{q}}^2} Q_i^2 |\Psi(0)|^2. \quad (3.28)$$

onde  $Q_i$  é a carga do quark (em unidades de carga do pósitron) e  $M_{q\bar{q}}$  é a massa do quarkônio em questão.

Como a função de onda que será utilizada neste trabalho é uma função teste que não tem vínculo direto com o potencial de interação, dado que ela não é obtida pela resolução da equação do estado ligado em questão, recorreremos ao teorema do virial para o cálculo da função de onda na origem, dentro de uma aproximação não - relativística com termo cinético linear em  $p^2$ .

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{m_i}{4\pi} \left\langle \frac{dU(r)}{dr} \right\rangle. \quad (3.29)$$

onde  $m_i$  é a massa do quark que compõe o quarkônio em questão.

Desta forma, temos um vínculo estabelecido entre o potencial de interação e as larguras de transição. A expressão para as larguras de transição

eletrônica para os estados  $n^3S_1$  ficam estabelecidas como na expressão (3.30).

$$\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+) = \frac{4m_i}{M_{q\bar{q}}^2} \alpha_{em}^2 Q_i^2 \left\langle \frac{dU(r)}{dr} \right\rangle. \quad (3.30)$$

Utilizamos apenas os termos puros do potencial pois queremos apenas um parâmetro aproximado para uma análise comparativa. Outros modelos [46, 51, 61] não tiveram sucesso nessa descrição vinculada à espectroscopia de massa.

Para o caso específico do estudo das ressonâncias do charmônio e do bot-tomônio, a relação entre as larguras de transição, dos níveis de energia mais baixos dessas ressonâncias podem fornecer uma componente importante na determinação do parâmetro de escala ( $\beta$ ) da função de onda característica de cada ressonância. Veremos melhor como isso procede no próximo capítulo. Mas sob um ponto de vista generalizado, as larguras de transição das ressonâncias que estudaremos também terão um fim em uma análise de correspondência para com os resultados decorrentes do estudo do espectro de massas.

Além disso, é importante ressaltar o caráter da função de onda na origem em um termo de aniquilação no Hamiltoniano de interação [46, 48]. Em mésons, a aniquilação por um único glúon é proibida por conservação de cor, mas a aniquilação via vários glúons pode ser esperada. Para estados de quarks pesados, onde o processo de aniquilação é controlado (probabilidade) pela constante de acoplamento suficientemente pequena, o processo é dominado por um número mínimo de glúons (2 ou 3, conforme a conjugação de cargas). Godfrey e Isgur [46] sugerem uma contribuição ao Hamiltoniano proporcional a (3.31), não nulo apenas para  $L = 0$  ( $n$  é o número de glúons).

$$\alpha_s^n \frac{|\psi_{q\bar{q}}|}{M_q^2} \quad (3.31)$$

Podemos notar ainda, nesta aproximação, que somente para o estado de singlete um termo desta forma adquire uma dimensão significativa, sendo,

para o estado de tripleto, bem pequeno se comparado aos termos de estrutura hiperfina. Portanto, para sistemas de quarks pesados, o único estado para o qual os cálculos poderão divergir em virtude da ausência explícita deste termo no Hamiltoniano [46] seria o estado  $1^1S_0$ . Para estados ligados de quarks leves, na totalidade dos trabalhos que analisamos, com destaque para [46, 48, 49, 47], o termo de aniquilação assume uma conotação fenomenológica em forma de mais um parâmetro a ser determinado. Ainda há uma discussão intensa de como esses efeitos devem ser implementados, uma vez que qualquer que seja a descrição, mesmo para mésons leves, elas vão assumir valores médios muito pequenos diante das incertezas dos cálculos e mesmo das incertezas experimentais [46]. Em virtude disso, optamos por deixar a manifestação desta propriedade a cargo dos parâmetros com que descrevemos o nosso modelo.

No próximo capítulo mostramos os procedimentos de cálculo abordados na determinação do espectro de massas de quarkônios, com os elementos de interação descritos nesta seção.

# Capítulo 4

## Metodologia e cálculos desenvolvidos.

Após o desenvolvimento descrito até agora, onde conseguimos definir todos os elementos do Hamiltoniano característico de uma interação quark - antiquark, faremos uma pequena abordagem dos procedimentos de cálculo adotados para a determinação dos parâmetros através dos quais calculamos o espectro de massas do charmônio e do bottomônio.

Uma das particularidades do nosso trabalho é que o potencial  $U(r)$  inclui todas as correções relativísticas que podem aparecer na interação [43].

Buscando uma maior simplicidade nos cálculos, em detrimento a métodos mais complicados como o método matricial de colocação ortogonal [55, 56] ou a um método variacional que não proporcionaria um resultado tão exato [47, 48, 49], optamos <sup>1</sup> pela simplicidade de adotarmos uma minimização dos erros quadráticos médios das massas de oito ressonâncias (quatro do

---

<sup>1</sup>Chegamos a estudar a viabilidade dos dois métodos citados, mas estes, apesar de eficazes no cálculo do espectro de massas de um conjunto pequeno de estados ressonantes com momento angular orbital fixo, não apresentam a mesma exatidão e muito menos chegam a ser mais simples no caso em que procuramos descrever a espectroscopia completa (todas as possibilidades dos números quânticos) de um méson.

charmônio e quatro do bottomônio) que em função da precisão de seus valores detectados experimentalmente se mostram como excelentes parâmetros de entrada <sup>2</sup>.

Para a função de onda na forma  $\psi(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\hat{r})$ , podemos escrever a parte radial da equação de onda para um estado ligado quark - antiquark da seguinte maneira:

$$(T^{cin} + U_s(r) + U_v(r) - E_{nl})R_{nl}(r) = 0. \quad (4.1)$$

Os termos  $U_s(r)$  e  $U_v(r)$  envolvem todas as correções decorrentes da redução não - relativística descrita no capítulo 3. Esta é justamente uma das vantagens do procedimento de cálculo adotado, pois permite o levantamento da espectroscopia completa (todos os números quânticos) de um sistema quark - antiquark.

A escolha mais apropriada de uma função radial de base depende em geral do problema a ser resolvido. Depois de analisarmos e testarmos as possibilidades de três funções de onda diferentes: as autofunções de Schrödinger para o potencial Coulombiano, as autofunções de Schrödinger para o potencial de oscilador harmônico 3-dim e uma função de base proposta por Fulcher [53], optamos por esta última que se mostrou passível de um tratamento numérico com uma menor possibilidade de erro diante de um truncamento na integração numérica, limitada aos valores onde a distribuição radial seja significativa. Este truncamento leva a um erro relativo de ordem de grandeza menor que  $10^{-20}$ . Esta função está descrita em (4.2) e até certo ponto apresenta um comportamento semelhante ao da função de onda de Schrödinger para um potencial Coulombiano, já tendo sido usada em vários trabalhos [52, 53, 55, 56].

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{(2\beta)^3 k!}{(k + 2l + 2)!}} (2\beta r)^l e^{(-\beta r)} L_k^{2l+2}(2\beta r). \quad (4.2)$$

---

<sup>2</sup>Estes estados serão descritos no capítulo 5.

$L_k^{2l+2}(\beta r)$  é o polinômio associado de Laguerre e o número quântico principal  $n$  com o qual estaremos descrevendo os estados ligados  $n^{2s+1}l_J$  é dado em função de  $k$  por  $n = k + 1$ <sup>3</sup>.

Como temos interesse em obter um potencial que, de maneira única, descreva os resultados da dinâmica de interação tanto em sistemas de quark charm como em sistemas de quark bottom com os parâmetros em comum, recorreremos a (3.28) de forma que em função de (4.2) obtemos:

$$\frac{\Gamma_{e^-e^+}(\Upsilon)}{\Gamma_{e^-e^+}(\psi)} = \frac{1}{4} \frac{m_c^2}{m_b^2} \left( \frac{\beta_b}{\beta_c} \right)^3 \quad (4.3)$$

A diferença entre as ressonâncias do charmônio e do bottomônio ficará por conta dos parâmetros  $\beta_c$  e  $\beta_b$  das funções de onda. Experimentalmente temos:

$$\Gamma_{e^-e^+}(\psi) = 5.26 \pm 0.37 \text{ keV.}$$

$$\Gamma_{e^-e^+}(\Upsilon) = 1.32 \pm 0.05 \text{ keV.}$$

Estes valores indicam que:

$$\beta_c \approx \beta_b \left( \frac{m_c}{m_b} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Para esse tratamento, os cálculos são desenvolvidos em termos dos seguintes parâmetros: as massas efetivas dos quarks charm ( $m_c$ ) e bottom ( $m_b$ ), um parâmetro  $\beta_b$  da função de onda além dos parâmetros do potencial ( $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  e  $\omega$ ). Estes parâmetros são determinados segundo uma minimização quadrática média com base na espectroscopia de massas dos estados de momento angular orbital nulo do charmônio e do bottomônio (em um único conjunto

---

<sup>3</sup>É muito importante o esclarecimento deste ponto pois existe uma grande confusão na literatura sobre o que indica o número quântico principal. Nos diversos “Review of Particle Physics” não há esclarecimento sobre o que o índice  $n$  de diversos estados ligados realmente significa. Escolhemos a definição  $n = k + 1$  de maneira que o número quântico principal  $n$  corresponda à mesma notação de [63]. Em algumas situações a definição  $n = k - l + 1$  também é cabível.

de parâmetros, ou seja, teremos os parâmetros do potencial e da função de onda em comum para o charmônio e para o bottomônio). Quando a interação for descrita pelo potencial logarítmico, mudamos os parâmetros do potencial para:  $a_s$ ,  $a_v$  e  $r_0$ , mantendo-se os valores das massas  $m_c$  e  $m_b$  encontradas com o potencial Coulombiano + linear. O algoritmo para a execução destes cálculos foi desenvolvido com o software “Mathematica 4.0”.

Ainda com relação aos parâmetros, o parâmetro  $w$  da exponencial que parametriza o termo de interação vetorial, a partir de um determinado valor, faz com que o comportamento de tal termo tenda a um termo Coulombiano puro, conforme os níveis de energia em que estivermos tratando. Tal comportamento é esperado para quarks pesados.

Observe que até agora não fizemos nenhum adendo sobre os estados ligados de quarks leves. Dentro desse nosso modelo de Hamiltoniano efetivo com correções relativísticas, dedicamos o capítulo 6 deste trabalho ao desenvolvimento da idéia de como estes estados podem ser tratados. Entretanto, ainda nos restringiremos aos estados ligados de quarks pesados.

# Capítulo 5

## Resultados obtidos na determinação das propriedades dos quarkônios pesados: charmônio - $\Psi$ e bottomônio - $\Upsilon$ .

Conforme a sistemática descrita no capítulo anterior, com o uso da função de onda radial (4.2), calculamos a energia dos estados com números quânticos correspondentes aos dados de entrada (tabela 5.1). Com estes valores em função dos parâmetros a serem determinados, minimizamos a função  $\chi^2$ , pois estamos interessados no parâmetro  $\chi' = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$  ( $n$  é o número dos parâmetros de entrada).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \left[ \frac{(M_i^{teo} - M_i^{exp})}{\Delta M_i} \right]^2 \quad (5.1)$$

O termo  $\Delta M_i$  é o erro da medida experimental de  $M_i^{exp}$ . Para valores de  $\Delta M_i$  menores que  $3 MeV$ , adotamos  $\Delta M_i = 3 MeV$  conforme sugerido por [48].

O valor mínimo encontrado foi de  $\chi' = 42.6$ .

Desta maneira os resultados que obtivemos para os parâmetros que carac-

Tabela 5.1: Parâmetros de entrada e os parâmetros da teoria obtidos o estudo do charmônio e do bottomônio.

Entrada		
Massas <sup>a</sup>		
meson	$n^{2s+1}l_J$	Exp. (MeV)
$\eta_c$	$1^1S_1$	<b>2979.8 ± 2.1</b>
$\Psi_1$	$1^3S_1$	<b>3096.88 ± 0.04</b>
$\Psi_2$	$2^3S_1$	<b>3686.0 ± 0.09</b>
$\Psi_3$	$3^3S_1$	<b>3769.9 ± 2.5</b>
$\Upsilon_1$	$1^3S_1$	<b>9460.37 ± 0.21</b>
$\Upsilon_2$	$2^3S_1$	<b>10023.3 ± 0.31</b>
$\Upsilon_3$	$3^3S_1$	<b>10355.3 ± 0.6</b>
$\Upsilon_4$	$4^3S_1$	<b>10580 ± 3</b>
Razões de transição eletrônica		
meson	Exp.(keV)	
$\Gamma_{\Psi_1}$	<b>5.26 ± 0.37</b>	
$\Gamma_{\Upsilon_1}$	<b>1.32 ± 0.05</b>	

Parâmetros da Teoria	
$m_c =$	1.108 GeV
$m_b =$	4.727 GeV
$\beta_c =$	0.148 GeV
$\beta_b =$	0.390 GeV
$\alpha_s =$	0.739
$a =$	0.0475 GeV <sup>2</sup>
$b =$	0.088 GeV
$w =$	0.550 GeV

<sup>a</sup>Erros experimentais da ordem do último algarismo significativo

terizam a interação quark - antiquark nas ressonâncias do charmônio -  $\Psi$  e do bottomônio -  $\Upsilon$ , com interação segundo um potencial Coulombiano + linear parametrizado na forma de (3.26) são expressos na tabela 5.1 juntamente com os dados experimentais que utilizamos como parâmetros de entrada.

Sendo assim, em função desses parâmetros, podemos calcular o espectro de massas do charmônio e do bottomônio para vários números quânticos. Para verificarmos até que ponto vai a coerência adotada na parametrização das funções de onda, também podemos calcular as larguras de transição para várias ressonâncias do charmônio e do bottomônio. O espectro de massas do

charmônio e do bottomônio calculados para o potencial Coulombiano + linear proposto encontram-se respectivamente nas tabelas 5.2 e 5.3, e as respectivas larguras de transição na tabela 5.9.

Com relação ao topônio ( $t\bar{t}$ ), como ainda não temos dados experimentais (energias da ordem de ou maior que 50 GeV) para um tratamento segundo o desenvolvimento deste trabalho, optamos por não estender o nosso tratamento às ressonâncias do mesmo.

Conforme os valores calculados expressos nas tabelas 5.2 e 5.3, considerando apenas os dados com números quânticos precisamente confirmados pelas medidas experimentais, para o espectro de massas do charmônio obtivemos um desvio médio de 3.54 % em relação aos valores experimentais e para o espectro de massas do bottomônio, um desvio médio de 1.14 % em relação aos valores experimentais.

Como trabalhamos com um conjunto reduzido e unificado (famílias do charmônio e do bottomônio) de parâmetros, esses resultados descrevem tão bem o espectro de massas como outros trabalhos que usaram uma análise mais complexa [46, 47, 48, 49].

Alguns aspectos da análise espectroscópica ainda devem ser enfatizados. É de certa forma intuitivo, além de alguns resultados já obtidos [27, 32, 51, 52, 55], que a análise espectroscópica segundo modelos separados para cada família de mésons (diferentes conjuntos de parâmetros) propiciaria resultados ainda melhores na descrição do espectro, porém, os dados experimentais com números quânticos precisos ainda não são suficientes para uma análise estatística mais rigorosa.

Com relação à precisão e à exatidão da aproximação não - relativística adotada para o termo cinético, é natural termos como consequência um menor desvio médio para os estados (não - relativísticos) do bottomônio, pois os estados do charmônio já podem ser considerados semi - relativísticos. Novamente, com dois conjuntos separados de parâmetros para cada família (charm e bottom), temos perspectivas ainda melhores para resultados com o

Tabela 5.2: Espectro de massas do charmônio -  $\Psi$  para o potencial Coulombiano + Linear.

Massa efetiva (MeV) <sup>a</sup>				
meson	$n^{2s+1}l_J$	Val. Exp.	Val. Calc.	Teo. x Exp.
$\Psi_1$	$1^3S_0$	3096.9	<b>3096</b>	-1
$\Psi_2$	$2^3S_0$	3686.0	<b>3476</b>	-210
$\Psi_3$	$3^3S_1$	3769.9	<b>3851</b>	+81
$\Psi_4$	$4^3S_1$	4040	<b>4223</b>	+183
$\Psi_{(?)}$	$5(?)^3S_1$	4159	<b>4593</b>	+434
$\Psi_{(?)}$	$6(?)^3S_1$	4415	<b>4960</b>	+545
$\eta_c$	$1^1S_1$	2979.8	<b>3093</b>	+113
$\chi_0$	$1^3P_0$	3417.3	<b>3468</b>	+51
$\chi_1$	$1^3P_1$	3510.5	<b>3468</b>	-42
$\chi_2$	$1^3P_2$	3556.2	<b>3467</b>	-89
$?^b$	$1^1P_1$	?	<b>3467</b>	—
?	$2^1P_1$	?	<b>3815</b>	—
?	$2^3P_0$	?	<b>3814</b>	—
?	$2^3P_1$	?	<b>3815</b>	—
?	$2^3P_2$	?	<b>3815</b>	—
?	$3^3P_0$	?	<b>4160</b>	—
?	$3^3P_1$	?	<b>4162</b>	—
?	$3^3P_2$	?	<b>4163</b>	—
?	$1^1D_2$	?	<b>3806</b>	—
?	$2^1D_2$	?	<b>4143</b>	—
?	$1^3D_1$	?	<b>3808</b>	—
?	$1^3D_2$	?	<b>3807</b>	—
?	$1^3D_3$	?	<b>3805</b>	—
?	$2^3D_1$	?	<b>4145</b>	—
?	$2^3D_2$	?	<b>4145</b>	—
?	$2^3D_3$	?	<b>4143</b>	—

<sup>a</sup>Os valores calculados estão em negrito.

<sup>b</sup>? - não confirmados experimentalmente.

Tabela 5.3: Espectro de massas do bottomônio -  $\Upsilon$  para um potencial Coulombiano + Linear.

Massa efetiva (MeV) <sup>a</sup>				
meson	$n^{2s+1}l_J$	Val. Exp.	Val. Calc	Teo. x Exp.
$\Upsilon_1$	$1^3S_1$	9460.4	<b>9608</b>	+149
$\Upsilon_2$	$2^3S_1$	10023.3	<b>9931</b>	-92
$\Upsilon_3$	$3^3S_1$	10353.3	<b>10237</b>	-116
$\Upsilon_4$	$4^3S_1$	10580	<b>10533</b>	-47
$\Upsilon_5$	$5^3S_1$	10865	<b>10825</b>	-40
$\Upsilon_{(?)}$	$6(?)^3S_1$	11019	<b>11113</b>	+96
$\chi_{b0}$	$1^3P_0$	9859.8	<b>9811</b>	-49
$\chi_{b1}$	$1^3P_1$	9891.9	<b>9812</b>	-80
$\chi_{b2}$	$1^3P_2$	9913.2	<b>9812</b>	-101
$\chi'_{b0}$	$2^3P_0$	10231.1	<b>10042</b>	-189
$\chi'_{b1}$	$2^3P_1$	10255.2	<b>10043</b>	-212
$\chi'_{b2}$	$2^3P_2$	10268.5	<b>10044</b>	-224
?	$1^1S_0$	?	<b>9607</b>	—
?	$1^1P_1$	?	<b>9812</b>	—
?	$2^1P_1$	?	<b>10043</b>	—
?	$3^3P_0$	?	<b>10270</b>	—
?	$3^3P_1$	?	<b>10271</b>	—
?	$3^3P_2$	?	<b>10272</b>	—
?	$1^1D_2$	?	<b>9980</b>	—
?	$2^1D_2$	?	<b>10174</b>	—
?	$1^3D_1$	?	<b>9980</b>	—
?	$1^3D_2$	?	<b>9980</b>	—
?	$1^3D_3$	?	<b>9980</b>	—
?	$2^3D_1$	?	<b>10174</b>	—
?	$2^3D_2$	?	<b>10174</b>	—
?	$2^3D_3$	?	<b>10175</b>	—

<sup>a</sup>Os valores calculados estão em negrito

termo cinético sugerido neste trabalho.

Outro dado bastante interessante, que assim como em outros trabalhos [27, 46, 47, 48, 49, 51] não concorda com os dados experimentais, se refere à degenerescência relativa ao momento angular total. Tal situação, como podemos observar nas tabelas 5.2 e 5.3 também se manifesta para o potencial logarítmico (tabelas 5.5 e 5.6). Esta questão ainda não foi explicada no contexto da interação segundo um Hamiltoniano efetivo, havendo modelos que nem mesmo distinguem os estados com diferentes valores de  $J(l-1, l \text{ e } l+1)$ . De qualquer forma, os termos de Breit - Fermi para os potenciais abordados neste trabalho não descrevem com propriedade esta quebra de degenerescência.

Seguindo os mesmos procedimentos de cálculo, porém, com a parametrização logarítmica do potencial (3.27), descrevemos a seguir, nas tabelas 5.5 e 5.6 respectivamente, os resultados que encontramos para o espectro de massas do charmônio e do bottomônio. Utilizamos os mesmos dados de entrada que na parametrização anterior e o valor mínimo encontrado para  $\chi'$  foi de  $\chi' = 45.1$ . Os parâmetros encontrados estão descritos na tabela 5.4. Optamos por manter os valores encontrados para as massas dos quarks charm e bottom para o caso do potencial Coulombiano + linear pois a variação em torno do valor das mesmas deve ser muito pequena, independente do potencial que está sendo tratado. Reduzimos, assim, o número de parâmetros a serem determinados para apenas quatro:  $a_s$ ,  $a_v$ ,  $r_0$  e  $\beta$ .

Desta forma, sob a ação de um potencial logarítmico, o espectro de massas calculado para os estados ligados do charmônio apresenta um desvio médio de 4.52% em relação aos dados experimentais, enquanto que para os estados ligados do bottomônio esse desvio é de 1.08%.

É também importante salientar que nenhum dos trabalhos que até agora propuseram um potencial logarítmico propuseram a separação dos termos escalar e vetorial de Lorentz.

Os valores obtidos permitem verificar, segundo essa comparação do po-

Tabela 5.4: Parâmetros para um potencial logarítmico.

Parametrização Logarítmica	
$m_c =$	$1.108 \text{ GeV}$
$m_b =$	$4.727 \text{ GeV}$
$\beta_c =$	$0.149 \text{ GeV}$
$\beta_b =$	$0.394 \text{ GeV}$
$a_v =$	$0.0044 \text{ GeV}^2$
$a_s =$	$0.0014 \text{ GeV}^2$
$r_0 =$	$0.010 \text{ GeV}^{-1}$

tencial Coulombiano + linear versus o potencial logarítmico, que há um início da preponderância do termo vetorial sobre o termo escalar na região de interação correspondente aos estados ligados do charmônio e do bottomônio.

As observações pertinentes ao potencial Coulombiano + linear também se aplicam aos resultados obtidos com o potencial logarítmico pois, como podemos observar na figura 5.1, existe uma correspondência entre esses potenciais na região de interação de aproximadamente  $4 \text{ GeV}^{-1} < r < 60 \text{ GeV}^{-1}$ .

Com todos esses fatores, a nossa interpretação é a de que a universalidade de um potencial para a descrição da interação forte pode ser questionada. É claro que temos o dado de que nenhuma mudança qualitativa muito grande acontece no comportamento de sistemas mesônicos (pelo menos os até aqui estudados) à medida que as massas decrescem. Mas isto não garante de maneira alguma tal universalidade. A QCD para região não - perturbativa deve assumir um papel importante nesta discussão.

Ainda com respeito ao espectro de massas, sobre os estados ligados de mésons mistos, especificamente do tipo  $c\bar{b}$  ou  $b\bar{c}$ , alguns cálculos podem ser feitos. Experimentalmente temos apenas o multiplete  $B$  e o estado  $B^*$  com massas expressas na tabela 5.8.

Tabela 5.5: Espectro de massas do charmônio -  $\Psi$  para o potencial Logarítmico.

Massa efetiva (MeV)				
meson	$n^{2s+1}l_J$	Val. Exp.	Val. Calc.	Teo. x Exp.
$\Psi_1$	$1^3S_1$	3096.9	<b>3078</b>	-18.9
$\Psi_2$	$2^3S_1$	3686.0	<b>3472</b>	-214
$\Psi_3$	$3^3S_1$	3769.9	<b>3880</b>	+110.1
$\Psi_4$	$4^3S_1$	4040	<b>4299</b>	+259
$\Psi(?)$	$5(?)^3S_1$	4159	<b>4727</b>	+558
$\Psi(?)$	$6(?)^3S_1$	4415	<b>5161</b>	+746
$\eta_c$	$1^1S_1$	2979.8	<b>3072</b>	+92.2
$\chi_0$	$1^3P_0$	3417.1	<b>3390</b>	-27.1
$\chi_1$	$1^3P_1$	3510.3	<b>3394</b>	-116.3
$\chi_2$	$1^3P_2$	3556.2	<b>3400</b>	-156.2
?	$1^1P_1$	?	<b>3393</b>	—
?	$2^1P_1$	?	<b>3781</b>	—
?	$2^3P_0$	?	<b>3778</b>	—
?	$2^3P_1$	?	<b>3782</b>	—
?	$2^3P_2$	?	<b>3787</b>	—
?	$3^3P_0$	?	<b>4175</b>	—
?	$3^3P_1$	?	<b>4179</b>	—
?	$3^3P_2$	?	<b>4184</b>	—
?	$1^1D_2$	?	<b>3730</b>	—
?	$2^1D_2$	?	<b>4119</b>	—
?	$1^3D_1$	?	<b>3726</b>	—
?	$1^3D_2$	?	<b>3730</b>	—
?	$1^3D_3$	?	<b>3736</b>	—
?	$2^3D_1$	?	<b>4115</b>	—
?	$2^3D_2$	?	<b>4120</b>	—
?	$2^3D_3$	?	<b>4126</b>	—

Tabela 5.6: Espectro de massas do bottomônio -  $\Upsilon$  para um potencial Logarítmico.

Massa efetiva (MeV)				
meson	$n^{2s+1}l_J$	Val. Exp.	Val. Calc	Teo. x Exp.
$\Upsilon_1$	$1^3S_1$	9460.4	<b>9730</b>	+270
$\Upsilon_2$	$2^3S_1$	10023.3	<b>10074</b>	+50.7
$\Upsilon_3$	$3^3S_1$	10353.3	<b>10290</b>	-63.3
$\Upsilon_4$	$4^3S_1$	10580.0	<b>10576</b>	-4
$\Upsilon_5$	$5^3S_1$	10865	<b>10866</b>	+1
$\Upsilon(?)$	$6(?)^3S_1$	11019	<b>11158</b>	+139
$\chi_{b0}$	$1^3P_0$	9859.8	<b>9837</b>	-22.8
$\chi_{b1}$	$1^3P_1$	9891.9	<b>9836</b>	-56
$\chi_{b2}$	$1^3P_2$	9913.2	<b>9837</b>	-76
$\chi'_{b0}$	$2^3P_0$	10231.1	<b>10054</b>	-177.1
$\chi'_{b1}$	$2^3P_1$	10255.2	<b>10054</b>	-201.2
$\chi'_{b2}$	$2^3P_2$	10268.5	<b>10055</b>	-213.5
?	$1^1S_0$	?	<b>9730</b>	—
?	$1^1P_1$	?	<b>9836</b>	—
?	$2^1P_1$	?	<b>10054</b>	—
?	$3^3P_0$	?	<b>10275</b>	—
?	$3^3P_1$	?	<b>10276</b>	—
?	$3^3P_2$	?	<b>10277</b>	—
?	$1^1D_2$	?	<b>9950</b>	—
?	$2^1D_2$	?	<b>10143</b>	—
?	$1^3D_1$	?	<b>9948</b>	—
?	$1^3D_2$	?	<b>9949</b>	—
?	$1^3D_3$	?	<b>9950</b>	—
?	$2^3D_1$	?	<b>10143</b>	—
?	$2^3D_2$	?	<b>10143</b>	—
?	$2^3D_3$	?	<b>10144</b>	—

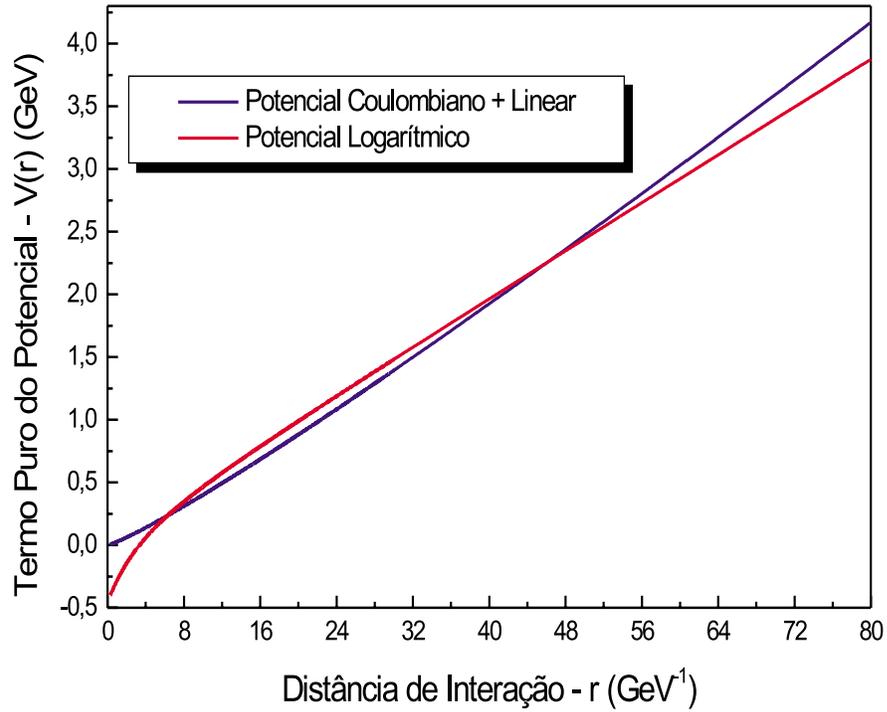


Figura 5.1: Equivalência entre o potencial Coulombiano + linear e o potencial logarítmico.

Tabela 5.7: Comparação dos resultados: Potencial Coulombiano + linear e Potencial Logarítmico

<b>Desvios médios dos valores calculados.</b>			
Potencial	$\chi'$	Desv. Méd. (%) ( $\Psi$ )	Desv. Méd. (%) ( $\Upsilon$ )
Coul. + Linear	42.6	3.54	1.14
Logarítmico	45.1	4.52	1.08

A tentativa de desenvolvermos um modelo fenomenológico para mésons desse tipo ainda é restrita, entretanto, como temos os parâmetros obtidos na análise do charmônio e do bottomônio, calculamos, com esses parâmetros, as massas para esses estados, expressos na tabela 5.8.

Para o cálculo destes valores foi necessário assumir uma simetria  $SU(2)$  para os sabores bottom - (b) e charm - (c) de maneira que pudéssemos representar os estados  $c\bar{b}$  (ou  $b\bar{c}$ ) como elementos do tripleto de  $SU(2)$ .

Tabela 5.8: Espectro de massas para mésons mistos( $c\bar{b}$ ,  $b\bar{c}$ ).

Massa efetiva				
meson	$n^{2s+1}l_J$	Val. Exp.(MeV))	Val. Calc.	Teo. x Exp.
$B$	$1^1S_0$	5279	<b>5520</b>	+ 241
$B^*$	$1^3S_1$	5325	<b>5523</b>	+ 198

Desta maneira, calculamos o valor médio do Hamiltoniano efetivo para os estados representados por este tripleto, considerando os valores efetivos das massas  $m_c$  e  $m_b$  encontradas para os estados do charmônio e do bottomônio. Podemos observar na tabela 5.8 que a coincidência com os dados experimentais é muito boa, entretanto, isto não é um fator suficiente para assumirmos a generalização deste procedimento, uma vez que temos poucos dados para a correspondência experimental. Além disso, é importante lembrar que para estados com momento angular orbital não nulo, deve ser considerada a presença de mais um termo de interação proporcional a (5.2) que até então, obviamente, se anulava para os quarkônios, mas que para o caso dos mésons  $B$  tem um valor significativo, uma vez que as massas dos quarks charm e bottom são bem diferentes.

$$\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) (\vec{L} \cdot (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)). \quad (5.2)$$

Tabela 5.9: Larguras de Transição  $\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+)$  do charmônio -  $\Psi$  e do bottomônio -  $\Upsilon$  em função de  $\beta_c$  e  $\beta_b$  para uma parametrização Coulombiana + Linear.

Larguras de transição eletrônica $\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+)$					
$\Gamma(c\bar{c} \rightarrow e^-e^+)$ do $\Psi$ (keV)			$\Gamma(b\bar{b} \rightarrow e^-e^+)$ do $\Upsilon$ (keV)		
meson	$\Gamma$ Exp.	$\Gamma$ Teo.	meson	$\Gamma$ Exp.	$\Gamma$ Teo.
$\Psi_1$	$5.26 \pm 0.37$	<b>0.72</b>	$\Upsilon_1$	$1.32 \pm 0.05$	<b>0.13</b>
$\Psi_2$	$2.14 \pm 0.21$	<b>0.50</b>	$\Upsilon_2$	$0.52 \pm 0.03$	<b>0.098</b>
$\Psi_3$	$0.26^a \pm 0.04$	<b>0.47</b>	$\Upsilon_3$	?	<b>0.086</b>
$\Psi_4$	$0.75 \pm 0.15$	<b>0.40</b>	$\Upsilon_4$	$0.248 \pm 0.003$	<b>0.078</b>
$\Psi_5$	$0.77 \pm 0.23$	<b>0.38</b>	$\Upsilon_5$	$0.31 \pm 0.07$	<b>0.071</b>
$\Psi_6$	$0.47 \pm 0.10$	<b>0.33</b>	$\Upsilon_6$	$0.13 \pm 0.03$	<b>0.067</b>

<sup>a</sup>Outros efeitos de limiar

Tabela 5.10: Larguras de Transição  $\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+)$  do charmônio -  $\Psi$  e do bottomônio -  $\Upsilon$  em função de  $\beta_c$  e  $\beta_b$  para uma parametrização logarítmica.

Larguras de transição eletrônica $\Gamma(q\bar{q} \rightarrow e^-e^+)$					
$\Gamma(c\bar{c} \rightarrow e^-e^+)$ do $\Psi$ (keV)			$\Gamma(b\bar{b} \rightarrow e^-e^+)$ do $\Upsilon$ (keV)		
meson	$\Gamma$ Exp.	$\Gamma$ Teo.	meson	$\Gamma$ Exp.	$\Gamma$ Teo.
$\Psi_1$	$5.26 \pm 0.37$	<b>0.490</b>	$\Upsilon_1$	$1.32 \pm 0.05$	<b>0.049</b>
$\Psi_2$	$2.14 \pm 0.21$	<b>0.361</b>	$\Upsilon_2$	$0.52 \pm 0.03$	<b>0.046</b>
$\Psi_3$	$0.26 \pm 0.04$	<b>0.356</b>	$\Upsilon_3$	?	<b>0.045</b>
$\Psi_4$	$0.75 \pm 0.15$	<b>0.317</b>	$\Upsilon_4$	$0.248 \pm 0.003$	<b>0.044</b>
$\Psi_5$	$0.77 \pm 0.23$	<b>0.305</b>	$\Upsilon_5$	$0.31 \pm 0.07$	<b>0.042</b>
$\Psi_6$	$0.47 \pm 0.10$	<b>0.275</b>	$\Upsilon_6$	?	<b>0.042</b>

Para finalizar, vejamos os resultados que obtivemos segundo a expressão (3.30) para as larguras de transição eletrônica para os estados  $n^3S_1$  do charmônio e do bottomônio com interação sob potencial Coulombiano + linear e logarítmico, respectivamente nas tabelas 5.9 e 5.10.

Definitivamente, fazendo uso de uma expressão utilizada por C. Quigg e J.L. Rosner [51] com relação aos resultados obtidos para as larguras de transição eletrônica: “Não há bons indícios de que os resultados acima correspondam à realidade física dos processos de transição de estados ( $q\bar{q} \rightarrow e^+e^-$ )”. Isto demonstra que a relação entre as larguras de transição eletrônica e o espectro de massas não pode apresentar um vínculo tão estreito como o apresentado neste trabalho. Melhores resultados podem ser obtidos caso a determinação do parâmetro  $\beta$  seja exclusivamente em função da parametrização em termos dos valores das larguras de transição medidas experimentalmente.

De qualquer forma, como recorrência para os parâmetros obtidos, segundo os valores experimentais do espectro de massas, temos concordância suficiente.

## Capítulo 6

# Aplicabilidade a outros sistemas quark - antiquark.

O grande entrave em estendermos a descrição não - relativística ou semi-relativística de um problema de interação entre quarks pesados para um problema de interação entre quarks leves está justamente no fato de que o momento linear intrínseco de cada quark leve assume valores, comparativamente às suas massas, muito mais significativos do que em sistemas de quarks pesados. Isso impõe, diante destes sistemas de quarks leves, a necessidade de um tratamento relativístico que, de certa forma, passa a gerar um número considerável de restrições, algumas delas citadas no capítulo 3, no que se refere à simplificação ou mesmo à execução dos cálculos das propriedades destes sistemas. Uma das soluções encontradas para contornar esse tipo de problema, segundo uma dinâmica não - relativística, é justamente procurar associar as previsões de uma dinâmica não - relativística com as previsões de uma dinâmica relativística ou até mesmo ultra - relativística ( $m_q \rightarrow 0$ ), e através desse vínculo, possibilitar a descrição de um estado ligado relativístico segundo uma dinâmica não - relativística.

Buscando a extensão do nosso modelo não - relativístico a esses sistemas, descreveremos a seguir algumas maneiras de se fazer presente o vínculo entre

a dinâmica não - relativística e a dinâmica (ultra) relativística, e com base nisso, procuramos o espectro de massas de alguns mésons leves.

Seja o Hamiltoniano relativístico com potencial de interação  $U(r)$  para o caso mais simples de duas partículas de mesma massa no referencial de centro de momento:

$$H_R = 2(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} + U(r). \quad (6.1)$$

Utilizando a desigualdade de Schwarz  $|\langle A \rangle| \leq \sqrt{\langle A^2 \rangle}$  obtemos a desigualdade  $\langle (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \rangle \leq (\langle \vec{p}^2 \rangle + m^2)^{\frac{1}{2}}$ , obtendo a relação (6.2).

$$E = \langle H_R \rangle \leq 2(\langle \vec{p}^2 \rangle + m^2)^{\frac{1}{2}} + \langle U(r) \rangle = 2\left(\frac{\langle \vec{p}^2 + m^2 \rangle}{(\langle \vec{p}^2 \rangle + m^2)^{\frac{1}{2}}} + U(r)\right). \quad (6.2)$$

Este operador tem estrutura semelhante ao de um potencial não - relativístico como (6.3) de acordo com as seguintes transformações de variáveis:

$$\hat{m} = 2\mu = \frac{1}{2}(\langle \vec{p}^2 \rangle + m^2)^{\frac{1}{2}} + U(r)$$

$$W(r) = 2\hat{m} - \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{\hat{m}} + U(r)$$

$$H_{NR} = 2\hat{m} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + W(r). \quad (6.3)$$

A massa efetiva  $\hat{m}$ , bem como o potencial  $W(r)$ , dependem do valor médio do momento, variando de nível para nível de energia. O valor esperado da energia cinética (teorema do virial [27]) será expresso por (6.4)(sendo constante somente para o caso de um potencial logarítmico).

$$\langle \vec{p}^2 \rangle \propto \left\langle r \frac{dU(r)}{dr} \right\rangle. \quad (6.4)$$

O mais interessante é que o desenvolvimento em termos da desigualdade de Martin (seção 3.3), ou propriamente em termos de uma série de Taylor em torno de um valor  $p_0^2 = \langle \vec{p}^2 \rangle$ , pode levar às mesmas conclusões [27, 52].

Uma outra maneira de procurarmos encontrar uma equivalência de modelos não - relativísticos para sistemas quark - antiquark relativísticos, na região assintótica, vem da observação de uma certa dualidade entre um Hamiltoniano ultra - relativístico com um potencial de oscilador harmônico (6.5) e um Hamiltoniano não - relativístico com potencial linear (6.6), relacionados pela transformação dual (6.7).

$$H_{UR} = 2(\vec{p}^2)^{\frac{1}{2}} + \kappa r^2. \quad (6.5)$$

$$H_{NR} = 2\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + ar. \quad (6.6)$$

$$|\vec{p}| \leftrightarrow \frac{ar}{2} \text{ com } \kappa = \frac{a^2}{8\mu}. \quad (6.7)$$

As autofunções nas equações de onda correspondentes estão relacionadas pela transformada de Fourier a seguir:

$$H_{UR}\Phi(\vec{x}) = E\Phi(\vec{x})$$

$$H_{NR}\Psi(\vec{y}) = E\Psi(\vec{y})$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3y \exp(i\frac{a}{2}\vec{x} \cdot \vec{y})\Psi(\vec{y}).$$

Ou seja, podemos encontrar o mesmo espectro de massas dos mésons tanto para uma prescrição não - relativística como para uma prescrição ultra-relativística.

Um terceiro ponto de vista a ser adotado na comparação de uma prescrição não - relativística versus uma prescrição ultra - relativística decorre de uma generalização relativística para o teorema do virial [27] conforme a expressão (6.8), com valores médios calculados segundo os autoestados do Hamiltoniano relativístico.

$$\langle r \frac{dU(r)}{dr} \rangle = 2\langle \frac{\vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \rangle. \quad (6.8)$$

Obtemos a autoenergia relativística (6.9):

$$E = \langle H_R \rangle = 2\langle (\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \rangle + \langle U(r) \rangle \quad (6.9)$$

Do teorema virial expresso por (6.8) juntamente com o limite ultra - relativístico de (6.9) encontramos (6.10).

$$E_{UR} = \langle r \frac{dU(r)}{dr} \rangle + \langle U(r) \rangle. \quad (6.10)$$

Escolhendo o potencial do tipo Coulombiano + linear teremos o desaparecimento do termo Coulombiano no cálculo de  $E_{UR}$  segundo (6.10).

$$E_{UR} = \langle 2ar \rangle. \quad (6.11)$$

Concluindo, até o ponto em que o valor do termo de massa pode ser negligenciado (que pode ser o caso dos mésons de quarks leves u (up) e d (down)), o valor esperado de um Hamiltoniano não - relativístico com potencial puramente linear tem semelhança formal com o Hamiltoniano relativístico com potencial Coulombiano + linear. Os autoestados são obviamente diferentes.

Devemos, porém, deixar claro que as considerações em cima do teorema virial descrevem muito bem a interação decorrente unicamente dos termos puros (sem as correções relativísticas) do potencial.

Sendo assim, para um potencial com parametrização Coulombiana + linear, em estados ligados de quarks leves (sistemas aproximadamente ultra - relativísticos), a semelhança acima sugere um caráter de confinamento mais intenso. Esta observação é muito importante uma vez que este comportamento se inverte à medida que as massas dos quarks constituintes aumentam (charmônio e bottomônio).

Com estas pequenas considerações explanadas até aqui, procuramos chamar a atenção para o fato de que, dentro de um modelo de potencial em sua forma mais simples, a dinâmica real (física) das interações em um sistema quark- antiquark pode ser parametrizada em termos de uma dinâmica mais simples, na maioria das vezes não - relativística, de forma que a correlação

se dê em termos dos parâmetros fenomenológicos que aparecem na construção do Hamiltoniano que pretende descrever o espectro de energias de uma determinada família de mésons.

A diferença de massas muito acentuada de sistemas como os quarkônios para com sistemas de mésons leves impede o desenvolvimento de um modelo unificado para a descrição da espectro de energias em termos de um número reduzido de parâmetros, como tem sido o objetivo deste trabalho. Entretanto, a correspondência entre as prescrições discutidas neste capítulo, em princípio, possibilita a generalização de uma prescrição com aproximação não - relativística para sistemas de quarks leves, apenas com a mudança dos parâmetros fenomenológicos do Hamiltoniano.

Nesta etapa, então, conforme os resultados que serão descritos na seção 6.1, procuramos verificar até que ponto essa generalização é possível, procurando fazer um levantamento do espectro de massas de alguns mésons leves, incluindo no Hamiltoniano não apenas os termos puros de interação, como também os termos de Breit - Fermi, mas com parâmetros fenomenológicos ( $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $w$ ,  $a$ ,  $b$  e  $\beta$ ) diferentes em relação aos quarkônios pesados.

## **6.1 Espectroscopia de massas de mésons para quarks leves segundo uma prescrição não - relativística com correspondência relativística.**

Com base nos argumentos até aqui desenvolvidos, estamos aptos a verificar até que ponto uma parametrização não - relativística poderá descrever parametricamente o espectro de massas de um conjunto de estados sujeitos a uma dinâmica relativística, ou seja, não estamos assumindo uma dinâmica relativística, apenas estamos utilizando a equivalência matemática desen-

volvida na primeira parte deste capítulo como uma maneira de contornar as dificuldades de uma descrição totalmente relativística.

Semelhante ao estudo dos quarkônios pesados, descrevemos a interação em termos de um conjunto unificado de parâmetros que venha a descrever o espectro de massas dos mésons de quarks “up”, “down” e “strange” ( $u$ ,  $d$  e  $s$ ). As massas dos quarks “up” e “down” são consideradas como sendo as mesmas ( $m_u = m_d \rightarrow m_n$ ).

Diferentemente do que fizemos para os sistemas de quarks pesados, optamos por não utilizar o vínculo de entrada com as larguras de transição eletrônica, pois para sistemas de quarks leves vários termos de correção às larguras de transição são de ordem de grandeza significativa se comparado ao valor calculado em (3.28). Parametrizamos o comportamento da função de onda espacial em termos de um único parâmetro  $\beta$ , o que a grosso modo é como se considerássemos a simetria  $SU(3)$  de sabor quebrada somente pela diferença de massa entre os quarks de sabores diferentes (“up”, “down” e “strange”).

Na tabela 6.1 descrevemos os parâmetros obtidos em função dos dados de entrada para mésons de quarks leves. Estudamos apenas os mésons com sabor neutro, que são os sistemas onde a dinâmica de interação é mais simples para as massas em questão.

(Não temos referência de algum trabalho que tenha sido bem sucedido no cálculo da massa do estado  $\eta'$  segundo um modelo de potencial.)

Como podemos observar na tabela 6.2, para os valores ali expressos, o desvio médio em relação aos dados experimentais foi de 15.9 % para todo o conjunto de mésons de quarks leves. Observamos ainda que este desvio chega a tal valor, devido aos erros suficientemente elevados dos estados de nível de energia superior dos mésons com números quânticos de energia e de momento angular mais elevados.

Algo desse tipo, para um modelo com um número de parâmetros reduzidos como este, onde a distinção entre estados de quarks “up - down” e quarks

Tabela 6.1: Parâmetros de entrada e os parâmetros da teoria obtidos no estudo dos mésons de quarks leves (“up”, “down” e “strange”).

Entrada		
Massas		
meson	$n^{2s+1}l_J$	Exp. (MeV)
$\pi^0\pi^\pm$	$1^1S_0$	<b>138 ± 3</b>
$\pi(1300)$	$2^1S_0$	<b>1300 ± 100</b>
$\pi(1800)$	$3^1S_0$	<b>1801 ± 13</b>
$\rho(770)$	$1^3S_1$	<b>770.0 ± 0.8</b>
$\omega(782)$		<b>781.84 ± 0.12</b>
$\rho(1450)$	$2^3S_1$	<b>1465 ± 25</b>
$\omega(1420)$		<b>1419 ± 31</b>
$\phi(1020)$	$1^3S_1$	<b>1019.41 ± 0.01</b>
$\phi(1680)$	$2^3S_1$	<b>1680 ± 20</b>
$\eta$	$1^1S_0$	<b>547.3 ± 0.12</b>
$\eta(1295)$	$2^1S_0$	<b>1295 ± 2.8</b>

Parâmetros da Teoria
$m_n = 0.197 \text{ GeV}$
$m_s = 0.217 \text{ GeV}$
$\beta_n = 0.1055 \text{ GeV}$
$\alpha_s = 45.1$
$a = 0.263 \text{ GeV}^2$
$b = 0.23 \text{ GeV}$
$w = 0.0963 \text{ GeV}$

Tabela 6.2: Espectro de massas de mésons leves para o potencial Coulomb. + linear.

Massa efetiva (MeV)				
meson	$n^{2s+1}l_J$	Val. Exp.	Val. Calc.	Teo. x Exp.
Isospin - $I = 1$ ( $-u\bar{d}$ , $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ , $d\bar{u}$ ) e $I = 0^a$ ( $(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$ )				
$\pi^\pm \pi^0$	$1^1S_0$	138	<b>220</b>	+82
$\pi(1300)$	$2^1S_0$	1300	<b>1267</b>	-33
$\pi(1800)$	$3^1S_0$	1801	<b>1679</b>	-122
?	$4^1S_0$	?	<b>2032</b>	—
?	$5^1S_0$	?	<b>2560</b>	—
$\rho(770)$	$1^3S_1$	770	<b>697</b>	-73
$\omega(782)$		782		-85
$\rho(1450)$	$2^3S_1$	1465	<b>1400</b>	-65
$\omega(1420)$		1419		-19
$\rho(1700)$	$3^3S_1$	1700	<b>1800</b>	+100
$\omega(1600)$		1649		+151
?	$4^3S_1$	?	<b>2037</b>	—
$\omega_3(1670)$	$1^3D_3$	1667	<b>2322</b>	+645
?	$1^3D_2$	?		—
?	$1^3D_1$	?		—
Isospin - $I = 0$ ( $s\bar{s}$ )				
$\phi(1020)$	$1^3S_1$	1019.4	<b>964</b>	-56
$\phi(1680)$	$2^3S_1$	1680	<b>2090</b>	+410
$\phi(?)$	$3^3S_1$	?	<b>2928</b>	—
Estados mistos - $\eta$ ( $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$ ) e $\eta'$ ( $(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$ )				
$\eta$	$1^1S_0$	547.3	<b>454</b>	-93
$\eta(1295)$	$2^1S_0$	1297	<b>1356</b>	+59
$\eta(1440)$	$3^1S_0(?)$	1440	<b>1998</b>	+558
$\eta'$	$1^1S_0$	957.8	—	—

<sup>a</sup>Para os estados  $\omega$

“strange” se restringe única e exclusivamente ao valor das massas efetivas, era algo esperado. Aliás, o próprio valor efetivo calculado para as massas deve ser tratado apenas como um parâmetro, e não como uma variável física real.

Um fato importante a ser salientado se refere aos valores das constantes teóricas obtidas em função dos dados experimentais: observe especificamente os valores encontrados para  $\alpha$  e  $w$  (tabela 6.1); são valores que promovem uma “suavização” extrema do termo Coulombiano de potencial. Se compararmos com o que temos para os quarkônios pesados, observamos um comportamento bastante diferente. Além disso, a interpretação física destes parâmetros em seus respectivos termos de interação não é direta, pois conforme nos baseamos ao executar estes cálculos, fizemos uso de uma parametrização não - relativística de uma dinâmica relativística.

Uma das poucas interpretações imediatas que temos é a de que justamente o parâmetro  $a$  do termo linear de confinamento adquire um valor bem superior ao que temos para os quarkônios pesados indicando uma preponderância bem maior do termo linear nesta família de estados ligados, como era de se esperar conforme a prescrição teórica do início deste capítulo.

Estes mésons leves possuem quarks com momento linear intrínseco  $\vec{p}$  bastante elevados (relativísticos) porém com momento conjugado de interação  $\vec{k}$  bastante pequeno, conforme é previsto para a região de espalhamento inelástico profundo. Esta região corresponde justamente à região de interação onde o confinamento se manifesta intensamente, que é o que justamente acontece, conforme os dados obtidos, para aproximadamente  $r > 12 GeV^{-1}$  onde o potencial linear passa a preponderar sobre o Coulombiano. Para os quarkônios pesados esta preponderância já se apresenta a partir de aproximadamente  $r > 3 GeV^{-1}$ .

Tendo em vista que a correspondência da dinâmica relativística para com a parametrização não - relativística fora desenvolvida apenas em função de termos puros de potencial, sem os termos perturbativos utilizados nos nos-

os cálculos, fica muito complicado estabelecermos esta correspondência em termos dos parâmetros encontrados. Em virtude disso é que restringimos nossa observação quanto à validade deste procedimento, aos bons resultados obtidos para o espectro de massas da tabela 6.2, ratificando tal procedimento.

# Capítulo 7

## Conclusões.

Ao tratarmos do estudo dos estados ligados quark - antiquark, segundo um modelo fenomenológico de potencial, a avaliação imediata do sucesso do trabalho decorre, em primeira instância, do confronto dos resultados obtidos para o espectro de massa e, guardadas as devidas proporções, para as larguras de transição eletrônica dos mésons. Por meio desta comparação, conforme os valores comparativos levantados nos capítulos 5 e 6, e conforme a discussão dos resultados, o modelo de potencial desenvolvido com os subsídios teóricos da cromodinâmica quântica permite uma descrição ampla e precisa do espectro de massas de dois grupos bem definidos de mésons: quarkônios pesados e mésons leves.

O fato de ter sido adotado um formalismo segundo a descrição dos estados ligados por um Hamiltoniano efetivo, construído em termos de um conjunto restrito de sete parâmetros para cada grupo, permitiu uma simplificação bastante significativa no desenvolvimento dos cálculos. Diferentemente, têm-se trabalhos [46, 47, 48, 49, 53] com objetivos semelhantes onde o número de parâmetros adotados para descrever a interação ultrapassa o dobro do número de parâmetros aqui adotados.

A primeira das simplificações ocorre porque alguns termos não - locais que aparecem no potencial proposto puderam ser “absorvidos” por um dos

parâmetros lineares devido aos seus valores médios calculados serem pouco significativos diante da própria exatidão dos valores encontrados segundo o modelo. Na verdade, a espectroscopia de hádrons segundo um modelo de potencial, devido à ordem de grandeza dos termos não - locais, não se apresenta como a mais indicada para a determinação da forma exata desses termos, que exigem um tratamento mais cuidadoso <sup>1</sup>.

Outro aspecto, que consideramos de suma importância, foi a forma pela qual pudemos descrever o termo de energia cinética segundo uma aproximação não - relativística, onde, diferentemente da grande maioria dos trabalhos estudados [46, 47, 52, 53, 54, 55], optamos por escrever este termo de maneira que na região de momento de cada partícula entre  $0\text{GeV}$  e  $10\text{GeV}$  o termo cinético aproximado minimizasse a diferença em relação ao termo relativístico exato. Outros trabalhos optam por manter esta relação a critério de mais um parâmetro no Hamiltoniano efetivo [52, 55].

Estes aspectos, em conjunto com o número reduzido de sete parâmetros, possibilitaram a obtenção das propriedades mesônicas em função de um número também reduzido de valores experimentais de entrada (dez para o grupo de mésons pesados e onze para o grupo de mésons leves), possibilitando uma descrição unificada das propriedades das famílias dos quarks “bottom” e “charm” e dos quarks “up”, “down” e “strange”. Além disso, o desenvolvimento dos cálculos numéricos se torna mais simples, e os estados ligados de onda S, P, D e F bem como os níveis de energia mais altos com  $n = 3$  ou  $4$  não apresentam vínculo direto com os dados experimentais, que poderiam forçar uma maior concordância nos resultados. Entretanto, apesar do modelo desenvolvido ter atingido nossas expectativas no que concerne a descrição do espectro de mésons, algumas questões ainda podem nos perturbar com respeito às linhas gerais de um modelo de potencial: por exemplo,

---

<sup>1</sup>Há na verdade uma divisão dos trabalhos neste aspecto: ou se ignora alguns termos das correções locais ou se escreve estes em termos de um conjunto exagerado de parâmetros, exigindo um maior número de dados de entrada e possivelmente mais etapas de cálculo.

se a equação de Bethe - Salpeter, indiretamente um dos pontos de partida [27, 43, 46, 48, 49] do nosso trabalho, apresenta um limite não - relativístico que exige um tratamento tão cuidadoso, porque não partir diretamente de uma equação de onda relativística que pudesse ser resolvida analiticamente ou numericamente?

Em resumo, há inúmeras sugestões para equações de onda relativísticas, modelos relativísticos, etc, que também apresentam virtudes e inconsistências. Parece ironia, mas é extremamente improvável que alguém se dê ao enorme trabalho de rever todas as proposições que temos; seria mais viável propor uma nova equação de onda relativística. Nessa linha de trabalho, esperamos que alguns outros resultados diretos ou indiretos da QCD possam ter maior influência na elaboração dos modelos fenomenológicos.

A grande importância de um trabalho deste tipo está na possibilidade do estudo da natureza das forças presentes em uma interação entre quarks. Neste contexto, a base teórica fornecida pela QCD se apresenta de forma bastante sólida, mesmo diante de algumas ambigüidades decorrentes de alguns comportamentos controversos <sup>2</sup> que aparecem nos cálculos perturbativos, que na minha opinião só poderão ser evitados, ou melhor entendidos, após uma extensa análise dos fundamentos da cromodinâmica quântica, independente do que temos na fenomenologia.

---

<sup>2</sup>Quando se compara a outros modelos generalizados como com QCD na rede, regras de soma, redução de Bethe - Salpeter, etc.

# Suporte financeiro.

Este trabalho foi possível graças ao financiamento pelo programa de mestrado da CAPES.

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Fermi, *Phys. Rev.* **76**, 1739 (1949).
- [2] M. Gell - Mann, *Phys. Rev.* **92**, 883 (1953).
- [3] T. Nakano and K. Nishijima, *Phys. Rev.* **92**, 883 (1953).
- [4] S. Sakata, *Phys. Rep.* **16**, 686 (1956).
- [5] M. Gell - Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964).
- [6] G. Zweig, CERN 8142 Th 401 prepr. , (1964)
- [7] G. Zweig, CERN 8419 Th 412 prepr. , (1964)
- [8] Uma extensa bibliografia sobre o modelo a quarks é dada por O. W. Greenberg, *Am. J. Phys.* **50**, 1074 (1982).
- [9] J. J. Aubert *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404 (1974).
- [10] J. E. Augustin *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974).
- [11] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 494 (1973).
- [12] H. Fritzsch, M. Gell - Mann and H. Leutwyler, *Phys. Lett. B* **47**, 365 (1973).
- [13] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).

- [14] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [15] T. Muta in *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore, (1987).
- [16] H. G. Rothe in *Lattice Gauge Theories, An Introduction*, World Scientific, New York, (1992).
- [17] T. De Grand, *J. Phys. D* **12**, 2060 (1975).
- [18] P. Hazenfratz and J. Kuti, *J. Phys. Rep.* **40**, 75 (1978).
- [19] J. F. Gunion and L. F. Lee, *Phys. Rev. D* **12**, 3583 (1975).
- [20] T. Goldman and T. Yankielowicz, *Phys. Rev. D* **12**, 2910 (1975).
- [21] A. N. Mitra, *Z. Phys. C* **8**, 25 (1981).
- [22] H. C. Pauli, *Phys. Rev. D* **55**, 2486 (1997).
- [23] S. C. Brodsky, H. C. Pauli and S. S. Pinsky, *Phys. Rep.* **301**, 299 (1998).
- [24] A. De Rújula, H. Georgi and S. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 785 (1975).
- [25] G. Breit, *Phys. Rev.* **34**, 353 (1929).
- [26] P. N. Bogoliubov, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **1**, 163 (1967).
- [27] W. Lucha, D. Gromes and F. Shöberl, *Phys. Rep.* **200**, 127 (1991).
- [28] F. Halzen and A. D. Martin in *Quarks and Leptons, An Introductory Course in Modern Particle Physics*, World Scientific, New York, (1984).
- [29] S. Weinberg in *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge Press, New York, (1995).
- [30] A. E. Bernardini and C. Dobrigkeit, a ser publicado em *Proceedings of "VII Hadron Physics 2000"*.

- [31] A. E. Bernardini and C. Dobrigkeit, a ser publicado em *Proceedings of "XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos"*.
- [32] S. N. Mukherjee *et al*, *Phys. Rep.* **231**, 201 (1993).
- [33] M. E. Peskin and D. V. Schröder in *An Introduction to Field Theory*, Addison - Wesley Publishing Company, New York, (1994).
- [34] S. Weinberg in *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, New York, (1995).
- [35] C. N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **191**, 201 (1954).
- [36] E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rep.* **9**, 1 (1973).
- [37] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).
- [38] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett. B* **25**, 29 (1967).
- [39] G't Hooft and M. T. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 89 (1973).
- [40] T. Barnes and G. I. Ghandour, *Phys. Lett. B* **118**, 411 (1982).
- [41] E. E. Salpeter and H. Bethe, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951).
- [42] E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **87**, 328 (1952).
- [43] D. Gromes, *Nucl. Phys. B* **131**, 80 (1977).
- [44] K. J. Miller and M. G. Olsson, *Phys. Rev. D* **28**, 674 (1983).
- [45] F. Gestezy *et al*, *Phys. Rev. D* **30**, 2189 (1984).
- [46] S. Godfrey and N. Isgur, *Phys. Rev. D* **32**, 189 (1985).
- [47] G. S. Bankova, *J. Phys. G* **19**, 1143 (1993).
- [48] C. Semay and B. Silvestre - Brac, *Nucl. Phys. A* **647**, (1999).

- [49] C. Semay and B. Silvestre - Brac, *Nucl. Phys. A* **618**, 455 (1997).
- [50] D. P. Stanley and D. Robson, *Phys. Rev. D* **31**, 180 (1980).
- [51] C. Quigg and J. L. Rosner, *Phys. Rep.* **56**, 167 (1979).
- [52] G. Jaczko and L. Durand, *Phys. Rev. D* **58**, 4017 (1998).
- [53] L. P. Fulcher, *Phys. Rev. D* **50**, 447 (1994).
- [54] A. Martin, *Phys. Lett. B* **214**, 561 (1988).
- [55] L. Durand and A. Gara, *J. Math. Phys.* **31**, 2237 (1990).
- [56] L. J. Nickisch, L. Durand and B. Durand, *Phys. Rev. D* **30**, 660 (1984).
- [57] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 369 (1975).
- [58] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita *et al*, *Phys. Rev. D* **21**, 203 (1980).
- [59] R. J. Richardson, *Phys. Lett. B* **82**, 272 (1979).
- [60] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber in *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press, U. K., (1996).
- [61] B. Dieckmann, *Phys. Rep.* **159**, 99 (1988).
- [62] D. Flamm and F. Schöberl in *Introduction to the Quark Model of Elementary Particles*, Gordon and Breach Science, New York, (1982).
- [63] Rev. Particle Phys., *Eur. Phys. J. C* **3**, 17 (2000).