

UNICAMP
INSTITUTO DE FÍSICA

Tese de Mestrado

Lei de Weber e Indução de Correntes

Dario S. Thober
Aluno

André K. T. Assis
Orientador

Campinas, Setembro de 1993

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REDAÇÃO
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO
E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA.

23/09/93

André Koch Torres de Assis

UNIDADE IF

N.º CHAMADA:

+UNICA MP/M

+35LL

V. 19946

T. 26493

E.

P. CR\$ 800.00

E. 28/10/93

N.º CPD em 0049981-9

TM/925 H.F. W

3

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a tantos quantos realmente gostem de Física.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a orientação do prof. André e o financiamento do CNPq durante estes meses de trabalho.

...A CIÊNCIA É COMO A RELIGIÃO, A FÉ GUIA AMBAS.

(G.U.D.)

RESUMO

O objetivo desta Tese é o estudo do fenômeno da indução de correntes entre circuitos pela eletrodinâmica de Weber.

Mostramos que a lei de indução de Faraday é consequência da eletrodinâmica de Weber. Isto é mostrado de duas maneiras: (A) Calculando a força eletromotriz que vem da integração da força por unidade de carga ao longo de um circuito. (B) Calculando a força eletromotriz a partir da energia magnética dos circuitos.

Outra questão analisada aqui se refere às induções de corrente quando não há variação aparente do fluxo de campo magnético no circuito induzido. Nessa classe de induções analisamos o caso das induções unipolares. Mostramos que a lei de Faraday da indução se aplica também nesses casos, como se verifica pela eletrodinâmica de Weber.

ABSTRACT

The goal of this work is the study of induced currents between circuits by Weber's electrodynamics.

We show that Faraday's law of induction can be derived from Weber's electrodynamics. This is shown in two ways: (A) Calculating the electromotive force by the line integration of the force per unit charge along the circuit. (B) Calculating the electromotive force through the magnetic energy of the circuits.

We also analyse the induction of currents when there is no apparent variation of the flux of the magnetic field. Unipolar induction is also analysed. We show that even in these cases Faraday's law of induction can be applied, as is verified by Weber's electrodynamics.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.....	6
2. INDUÇÃO DE CORRENTES PELA LEI DE WEBER.....	8
2.1 Indução com a hipótese de Fechner.....	13
2.2 Indução sem a hipótese de Fechner em alguns casos particulares.....	14
2.3 Indução sem a hipótese de Fechner no caso geral.....	25
2.4 Indução no caso geral pela energia.....	27
3. O DISCO DE FARADAY.....	34
4. INDUÇÃO UNIPOLAR.....	41
5. CONCLUSÕES.....	53
REFERÊNCIAS.....	55

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é utilizar a força de Weber entre cargas elétricas para analisar aspectos novos na lei de indução de correntes. Vamos tratar do caso da indução entre dois circuitos quaisquer, do caso da indução unipolar e da situação onde a lei de indução de Faraday parece não valer.

Uma discussão ampla e recente da lei de Weber apresentando suas principais propriedades e características, os experimentos recentes relacionados com ela, assim como seus desenvolvimentos técnicos nos últimos anos se encontra em [1] e [2].

É fato conhecido que a lei de Weber satisfaz aos princípios de conservação de momento linear, de momento angular e da energia. No caso de não haver movimento relativo entre as cargas se reobtem a força de Coulomb e a lei de Gauss. Com a lei de Weber se deriva também a força entre elementos de corrente de Ampère, a partir da qual se derivam outras duas equações de Maxwell: a lei circuital de Ampère e o fato de se anular a divergência do campo magnético. Para uma demonstração de todos estes fatos ver [2] ou o *Treatise* de Maxwell, referência [3].

Weber mostrou que a lei de indução de Faraday (outra das equações de Maxwell) também pode ser derivada a partir da força de Weber. Uma prova disto também se encontra no livro de Maxwell, [3]. Na prova de Weber e de Maxwell se utiliza a hipótese de Fechner, usual no século passado, segundo a qual uma corrente elétrica em um condutor metálico comum é constituída de cargas positivas e negativas se movendo em direções opostas em relação ao fio com uma velocidade de mesmo módulo. Desde o início do século se sabe que esta hipótese não é verdadeira, já que os íons positivos ficam fixos na rede cristalina e apenas os elétrons se movem, sendo os responsáveis pela corrente.

Um dos objetivos da Tese é reobter a lei de indução de correntes a partir da força de Weber no caso geral, sem utilizar a hipótese de Fechner. Recentemente o físico J. P. Wesley iniciou a pesquisa nesta direção ao analisar num caso particular apenas o movimento dos elétrons, [4]. A restrição da análise de Wesley é que ele analisou apenas o caso de variação da corrente no circuito primário, deixando de pesquisar o caso em que há movimento relativo entre os dois circuitos (como quando um ímã se aproxima ou se afasta

de um circuito fechado, gerando então uma corrente elétrica), ou quando apenas parte de um circuito se move ou ainda o caso em que há variação de corrente simultânea nos dois circuitos. Embora o caso geral seja complicado de analisar de maneira completa, um dos objetivos da Tese é pesquisar os termos não fechnerianos em algumas geometrias particulares. Com isto almeja-se ampliar a pesquisa de Wesley e então analisar criteriosamente a relevância destes termos não fechnerianos. Isto é feito de duas maneiras, ou seja, comparam-se os termos não fechnerianos com os demais termos que levam à lei de Faraday, e de outro modo, deriva-se a lei de indução via energia entre os circuitos de corrente sem considerar a hipótese de Fechner. Isto leva à conclusão que de fato os termos não fechnerianos são nulos.

Além desta linha central de pesquisa analisamos a situação onde ocorre indução de correntes elétricas apesar de aparentemente não valer a lei de indução de Faraday (lei dos fluxos). Exemplos de experimentos famosos nesta categoria se encontram bem descritos no livro de Feynman, referência [5].

Por último espera-se iniciar a pesquisa da indução unipolar dentro deste novo enfoque, assunto de grande relevância experimental. Novamente a idéia é ampliar a pesquisa de Wesley (referência [6] neste caso) para o caso de movimento de parte de um circuito.

Estes dois últimos assuntos tratados estão intimamente relacionados, desde que o caso em que não há variação de fluxo (que violaria a lei dos fluxos de Faraday) é um caso particular dos experimentos de indução unipolar, como veremos.

2. INDUÇÃO DE CORRENTES PELA LEI DE WEBER

Nesta parte objetivamos calcular a força eletromotriz devida a um circuito qualquer (onde a forma é arbitrária e a corrente pode ser função do tempo), num circuito com as mesmas características gerais que o primeiro, a partir da lei de Weber:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \left[1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12} \ddot{r}_{12}}{c^2} \right]$$

sendo $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, a distância entre as duas cargas cujas posições são \vec{r}_1 e \vec{r}_2 ($\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$), $\dot{r}_{12} = \frac{dr_{12}}{dt}$ e $\ddot{r}_{12} = \frac{d^2 r_{12}}{dt^2}$, são a velocidade e aceleração relativas, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m a permeabilidade do vácuo, e $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} = 3 \times 10^8$ m/s. Em termos das velocidades das cargas, $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$ e $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$ (sendo $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$) e das acelerações, $\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt}$ e $\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt}$ (sendo $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$), podemos escrever \dot{r}_{12} e \ddot{r}_{12} como:

$$\dot{r}_{12} = \frac{dr_{12}}{dt} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12}$$

$$\ddot{r}_{12} = \frac{d\dot{r}_{12}}{dt} = \frac{1}{r_{12}} \left[\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \dot{r}_{12}^2 + r_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right]$$

Usando a hipótese de Fechner das correntes em fios condutores, de que a corrente é formada por íons positivos e negativos movendo-se em sentidos opostos com a mesma velocidade absoluta, chegamos à lei de Faraday da indução de correntes. Em seguida mostramos que não valendo essa hipótese, os termos que aparecem a mais são nulos nas situações da figura 1 (a serem discutidas mais para a frente).

Em seu *A Treatise on Electricity and Magnetism*, [3], James Clerk Maxwell apresenta no último capítulo, *Theories of Action at a Distance*, os desenvolvimentos de Weber com relação à sua força entre partículas carregadas, críticas relativas ao assunto, e no artigo 856 comenta sobre a teoria de Weber da indução de correntes elétricas. Neste artigo Maxwell mostra como calcula-se a força eletromotriz entre dois circuitos a partir da força de Weber.

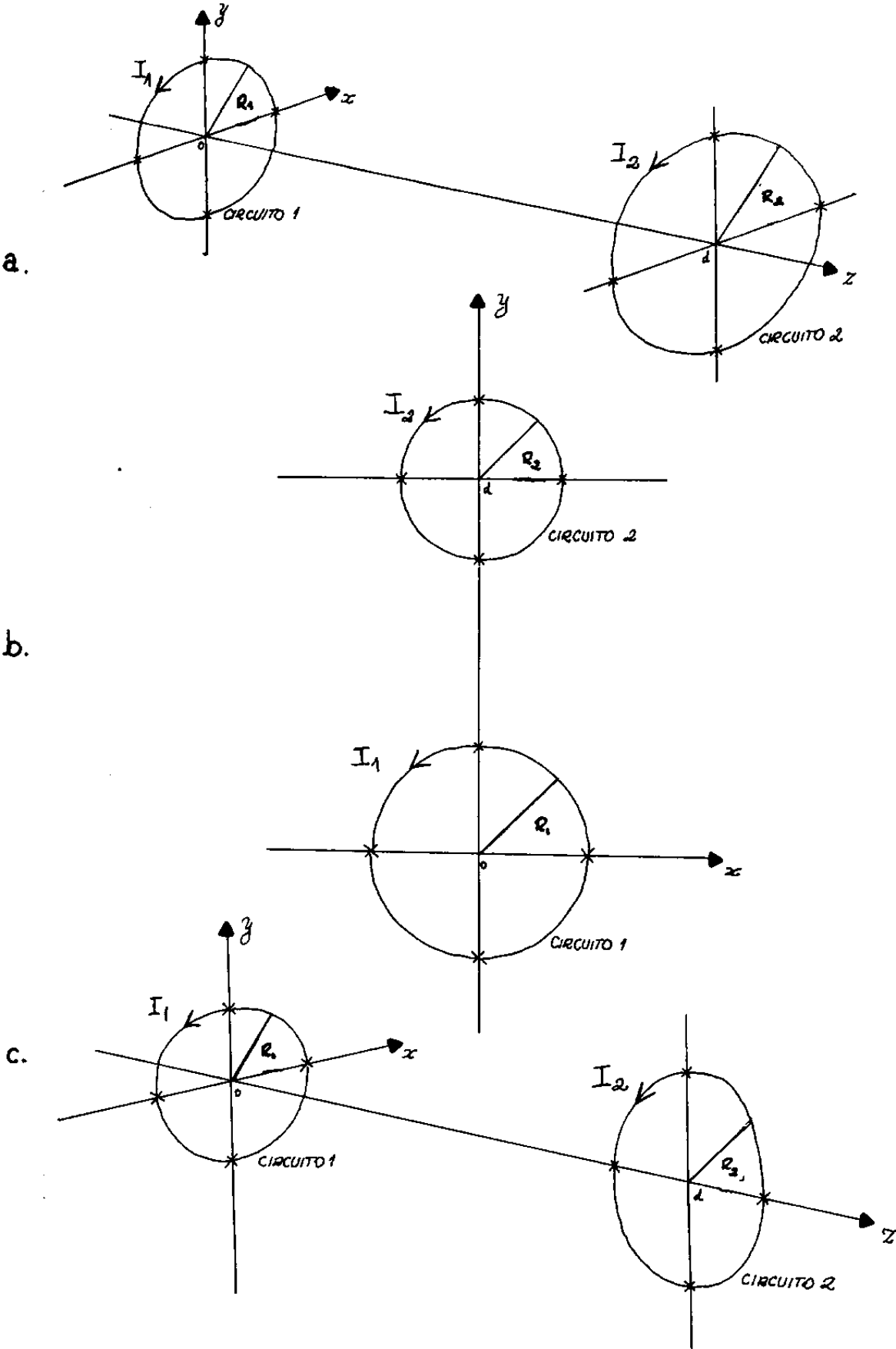


Figura 1: Casos em que a partir da força de Weber se obtém a lei de Faraday exatamente (sem a hipótese de Fechner)

Foi mostrado por Helmholtz e Thomson (ver art. 543 do mesmo livro), que se a força de Ampère for verdadeira, e se o princípio da conservação da energia for válido, então o fenômeno descoberto por Faraday da indução segue por necessidade. Devemos lembrar que a lei de força de Weber teve sua origem na força entre elementos de corrente de Ampère. Além disto a força de Weber é compatível com o princípio de conservação da energia. Logo a lei de Weber deve explicar o fenômeno de indução de correntes.

Na dedução feita por Weber, apresentada por Maxwell no último capítulo de seu livro, [3], a corrente elétrica nos fios está de acordo com a hipótese de Fechner das correntes. Na época essa questão de como e do que era feita a corrente elétrica estava ainda aberta, sendo a sugestão de Fechner uma possível explicação.

Sejam dois circuitos quaisquer, onde os elementos de corrente estão em destaque com as respectivas cargas, como na figura 2, temos então:

$dq_{1\pm}$: Carga positiva ou negativa, componente do elemento de corrente do circuito 1.

$dq_{2\pm}$: Carga positiva ou negativa, componente do elemento de corrente do circuito 2.

$dq_{1-} = -dq_{1+}$; $dq_{2-} = -dq_{2+}$: As cargas positiva e negativa nos elementos de corrente têm o mesmo valor absoluto, fazendo-os neutros eletricamente.

$\vec{r} = \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$: Distância relativa \vec{r} entre os elementos de corrente.

$r = |\vec{r}_{21}|$: Módulo do vetor \vec{r}_{21}

$\hat{r} = \frac{\vec{r}_{21}}{r}$: Vetor unitário na direção de \vec{r}_{21}

$\vec{v}_{d1\pm}$: Velocidade de *drifting* das cargas positivas ou negativas no elemento de corrente do circuito 1, ou seja, velocidade das cargas em relação ao fio.

$\vec{v}_{d2\pm}$: Velocidade de *drifting* das cargas positivas ou negativas no elemento de corrente do circuito 2, ou seja, velocidade das cargas em relação ao fio.

$\vec{V}_{1,2}$: Velocidade do elemento de corrente do circuito 1 ou 2 como um todo, ou seja, do elemento como parte de um condutor que se move com certa velocidade \vec{V} , velocidade do fio em relação a um referencial inercial.

$\vec{v}_{i\pm} = \vec{v}_{id\pm} + \vec{V}_i$, $i=1, 2$: Velocidade total da carga $dq_{i\pm}$ em relação a um referencial inercial.

$v_{id\pm} = |\vec{v}_{id\pm}|$: Módulo da velocidade de *drifting* das cargas positivas ou negativas no circuito 1 ou 2 ($i=1, 2$).

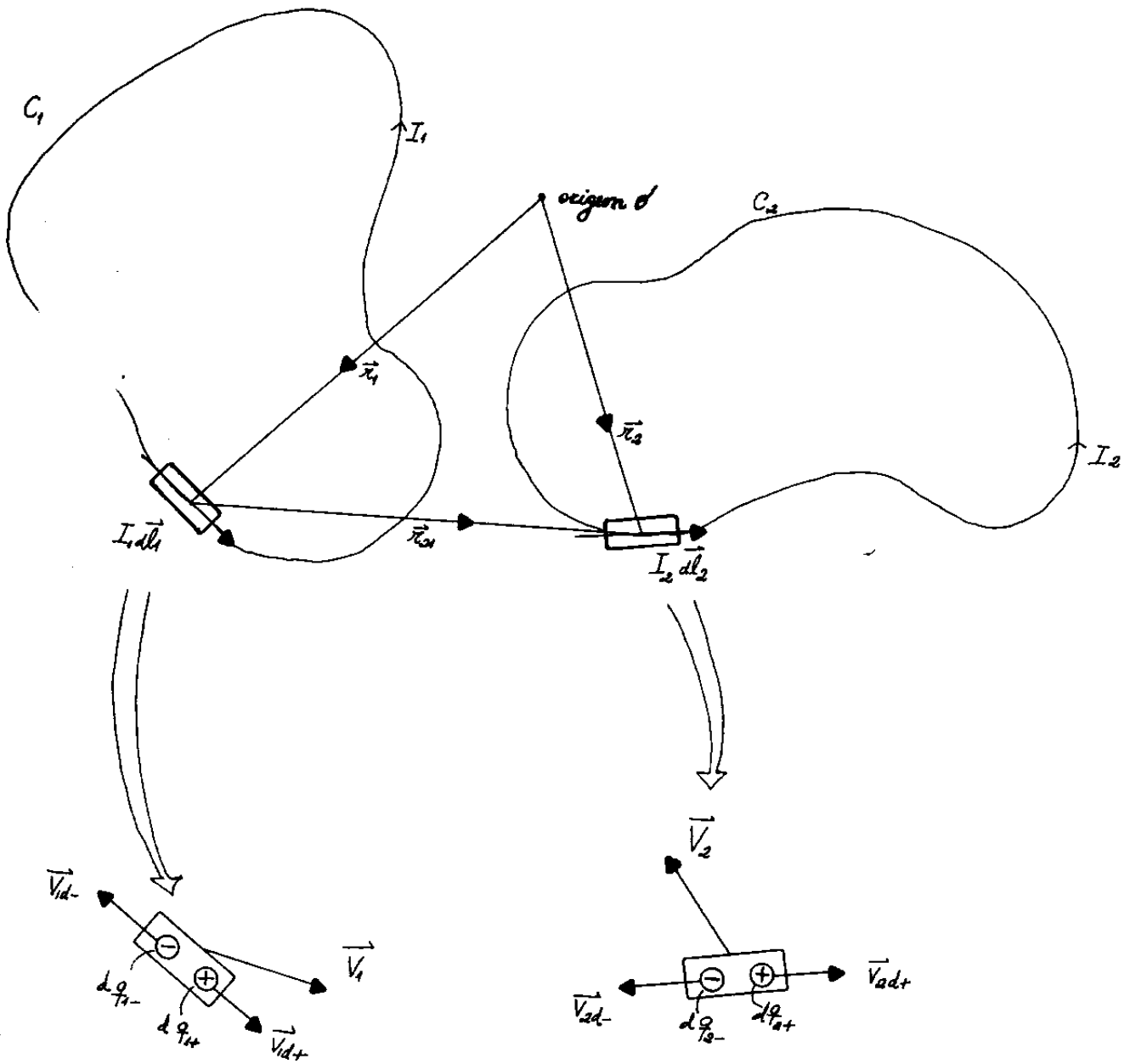


Figura 2: Dois circuitos quaisquer com os elementos de corrente (neutros) em destaque para um \vec{r}_1 e um \vec{r}_2 . As velocidades de drifting das cargas nos fios aparecem com índice "d". As velocidades dos elementos de corrente são \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , sendo $\vec{v}_{i\pm} = \vec{v}_{id\pm} + \vec{v}_i$, $i=1, 2$: a velocidade total da carga $dq_{i\pm}$ em relação a um referencial inercial.

$\vec{a}_{i\pm} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{i\pm})$: Aceleração total das cargas positivas ou negativas no circuito 1 ou 2 ($i=1, 2$), em relação a um referencial inercial.

$\vec{l}_i = \frac{d\vec{l}_i}{|d\vec{l}_i|} = \pm \frac{\vec{v}_{i,d\pm}}{|\vec{v}_{i,d\pm}|}$: O vetor unitário na direção da corrente em cada ponto do circuito 1 ou 2 ($i=1, 2$).

É válido em geral que:

$$I_i d\vec{l}_i = dq_{i+}(\vec{v}_{i+} - \vec{v}_{i-}), i = 1, 2. \quad (1)$$

A força por unidade de carga exercida por dq_{1+} e dq_{1-} em dq_{2+} é $(d^2 \vec{F}_{1+,2+} + d^2 \vec{F}_{1-,2+})/dq_{2+}$. No caso de dq_{2-} temos $(d^2 \vec{F}_{1+,2-} + d^2 \vec{F}_{1-,2-})/dq_{2-}$.

Seguindo Maxwell e utilizando a neutralidade dos elementos de corrente, citado acima, temos que a força por unidade de carga atuando em $I_2 d\vec{l}_2$ é $\frac{1}{2}[(d^2 \vec{F}_{1+,2+} + d^2 \vec{F}_{1-,2+})/dq_{2+} + (d^2 \vec{F}_{1+,2-} + d^2 \vec{F}_{1-,2-})/dq_{2-}] = (d^2 \vec{F}_{1+,2+} + d^2 \vec{F}_{1-,2+} - d^2 \vec{F}_{1+,2-} - d^2 \vec{F}_{1-,2-})/(2dq_{2+})$. No caso da indução de correntes só nos interessa a componente desta força paralela a $I_2 d\vec{l}_2$, por isto multiplicamos escalarmente este resultado por $d\vec{l}_2$. O resultado final é obtido integrando sobre os circuitos 1 e 2. Portanto sendo $\vec{F}_{i,j}$ a força de i em j , a força eletromotriz induzida pelo circuito 1 no circuito 2, $fem_{1,2}$, será (integrando ao longo dos circuitos 1 e 2):

$$fem_{1,2} = \oint \oint \left(\frac{d^2 \vec{F}_{dq_{1+},dq_{2+}} + d^2 \vec{F}_{dq_{1-},dq_{2+}} - d^2 \vec{F}_{dq_{1+},dq_{2-}} - d^2 \vec{F}_{dq_{1-},dq_{2-}}}{2dq_{2+}} \right) \cdot d\vec{l}_2 \quad (2)$$

onde as forças são dadas pela equação da força de Weber e o elemento de integração correspondente ao circuito 1 aparece quando usamos a equação (1). Isto resulta em (os detalhes para estas contas podem ser encontrados em [2], capítulo 4; ou em [3]):

$$\begin{aligned} fem_{1,2} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint [(2\vec{V}_1 \cdot d\vec{l}_1 I_1 - 2\vec{V}_2 \cdot d\vec{l}_1 I_1 - 3(\hat{r} \cdot \vec{V}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{l}_1) I_1 \\ & - 3(\hat{r} \cdot \vec{V}_2)(\hat{r} \cdot d\vec{l}_1) I_1 - \vec{r} \cdot (\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) q_{1+} \\ & + I_1 d\vec{l}_1 \cdot (\vec{v}_{1d+} + \vec{v}_{1d-}) + I_1 d\vec{l}_1 \cdot (\vec{v}_{2d+} + \vec{v}_{2d-}) \\ & - \frac{3}{2} I_1 \hat{r} \cdot d\vec{l}_1 (\hat{r} \cdot (\vec{v}_{1d+} + \vec{v}_{1d-})) \\ & + \frac{3}{2} (\hat{r} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r} \cdot (\vec{v}_{2d+} + \vec{v}_{2d-})) I_1] \frac{\vec{r} \cdot d\vec{l}_2}{r} \quad (3) \end{aligned}$$

2.1 Indução com a hipótese de Fechner

Quando utilizamos a hipótese de Fechner das correntes, de que tanto as cargas positivas como negativas, num elemento de corrente, têm a mesma velocidade mas em sentidos contrários, os termos que contêm as velocidades de *drifting* (quatro últimos termos de (3)) vão a zero. De acordo com (3), então obtemos:

$$\begin{aligned} fem_{1,2}^{Fechner} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint [2I_1 \vec{dl}_1 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \\ & - 3I_1 (\hat{r} \cdot \vec{dl}_1) (\hat{r} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)) \\ & - \vec{r} \cdot (\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) q_{1+}] \frac{\vec{r} \cdot \vec{dl}_2}{r} \end{aligned} \quad (4)$$

Sendo M o coeficiente de indução mútua:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r_{21}} \quad (5)$$

podemos escrever a força eletromotriz quando utilizamos a hipótese de Fechner como (ver [2], capítulo 4; ou [3]):

$$fem_{1,2} = -\frac{d(I_1 M)}{dt} \quad (6)$$

que é o resultado clássico conhecido.

2.2 Indução sem a hipótese de Fechner em alguns casos particulares

A pergunta que segue imediatamente é se no caso geral, ou seja, quando não vale a hipótese de Fechner, continua valendo esse mesmo resultado. Nosso passo seguinte é apresentar algumas situações específicas onde o resultado acima é válido, mesmo no caso geral.

A força eletromotriz geral que calculamos a partir da força de Weber é a eq. (3). Portanto no caso geral, quando as velocidades das cargas nos condutores podem ser de qualquer valor, a fem_{1em2} é (usando $\vec{v}_{id\pm} = \pm v_{id\pm} \hat{l}_i$):

$$\begin{aligned}
 fem_{1,2} = & -\frac{d(I_1 M)}{dt} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} [I_1(v_{1d+} - v_{1d-})(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2) \frac{1}{r^2} (\hat{l}_1 \cdot \vec{dl}_1) \\
 & + I_1(v_{2d+} - v_{2d-})(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)(\hat{r} \cdot \hat{l}_2) \frac{1}{r^2} \\
 & - \frac{3}{2} I_1(v_{1d+} - v_{1d-})(\hat{r} \cdot \vec{dl}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2) \frac{1}{r^2} (\hat{r} \cdot \hat{l}_1) \\
 & + \frac{3}{2} I_1(v_{2d+} - v_{2d-})(\hat{r} \cdot \vec{dl}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2) \frac{1}{r^2} (\hat{r} \cdot \hat{l}_2)] \quad (7)
 \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito de (7) é obtido dos cinco primeiros termos do lado direito de (3). Os quatro últimos termos de (7) se anulam quando usamos a hipótese de Fechner ($\vec{v}_{id-} = -\vec{v}_{id+}$), mas agora queremos saber o valor destes termos quando não usamos esta hipótese.

O segundo termo de (7) quando integrado primeiro ao longo de C_2 arbitrário, pelo teorema de Stokes, se anula. A partir da última equação, podemos notar que dados dois circuitos quaisquer, temos que calcular as seguintes integrais:

$$A = \oint \oint \frac{(\hat{r} \cdot \hat{l}_2)(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)}{r^2} \quad (8)$$

$$B = \oint \oint \frac{(\hat{r} \cdot \hat{l}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2)}{r^2} \quad (9)$$

$$C = \oint \oint \frac{(\hat{r} \cdot \hat{l}_2)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2)}{r^2} \quad (10)$$

Mesmo para os casos mais simples, essas integrais não são fáceis de resolver analiticamente. Propomos estudar o integrando, mostrando que os efeitos

computados de elementos de corrente dos dois circuitos, cuja distância relativa é a mesma, se cancelam quando somados. Em outras palavras, quando integramos (integrais A , B ou C) ao longo de um dos circuitos, fixando um elemento de corrente do outro circuito, encontramos um valor que é o mesmo em magnitude, porém com o sinal oposto do que se encontra quando se calcula esse mesmo efeito em outro elemento simétrico desse último circuito. Quando enfim efetua-se a integração ao longo deste último, o qual se calculou as integrais em partes elementares, encontra-se o valor zero como resultado. Par a par, os efeitos sobre os elementos desse último circuito cancelam-se mutuamente, resultando numa ação nula para A , B e C , nas situações propostas da figura 1. Para as situações propostas vamos usar este método para calcular as integrais acima.

O primeiro caso que vamos estudar é o da figura 3. Temos dois circuitos circulares de raios R_1 e R_2 , paralelos um ao outro e ao plano xy , com centros ao longo do eixo z tal que $z_2 - z_1 = d$, $x_1 = R_1 \cos \phi_1$, $y_1 = R_1 \sin \phi_1$, $x_2 = R_2 \cos \phi_2$, $y_2 = R_2 \sin \phi_2$. Temos então:

$$\vec{r} = (R_2 \cos \phi_2 - R_1 \cos \phi_1, R_2 \sin \phi_2 - R_1 \sin \phi_1, d) \quad (11)$$

$$\hat{l}_1 = (-\sin \phi_1, \cos \phi_1, 0) \quad (12)$$

$$\hat{l}_2 = (-\sin \phi_2, \cos \phi_2, 0) \quad (13)$$

$$\vec{r} \cdot \hat{l}_1 = -R_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 + R_2 \sin \phi_2 \cos \phi_1 \quad (14)$$

$$\vec{r} \cdot \hat{l}_2 = R_1 \sin \phi_2 \cos \phi_1 - R_1 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \quad (15)$$

$$\hat{l}_1 \cdot \hat{l}_2 = \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \quad (16)$$

Para resolver as integrais de A a C escolhemos dois elementos de corrente no circuito C_1 , \vec{dl}_1^a e \vec{dl}_1^b , simétricos em relação ao eixo y (ver figura 3):

$$\phi_1^b = \pi - \phi_1^a \quad (17)$$

Também escolhemos dois elementos de corrente no circuito C_2 , \vec{dl}_2^a e \vec{dl}_2^b , simétricos em relação ao eixo y :

$$\phi_2^b = \pi - \phi_2^a \quad (18)$$

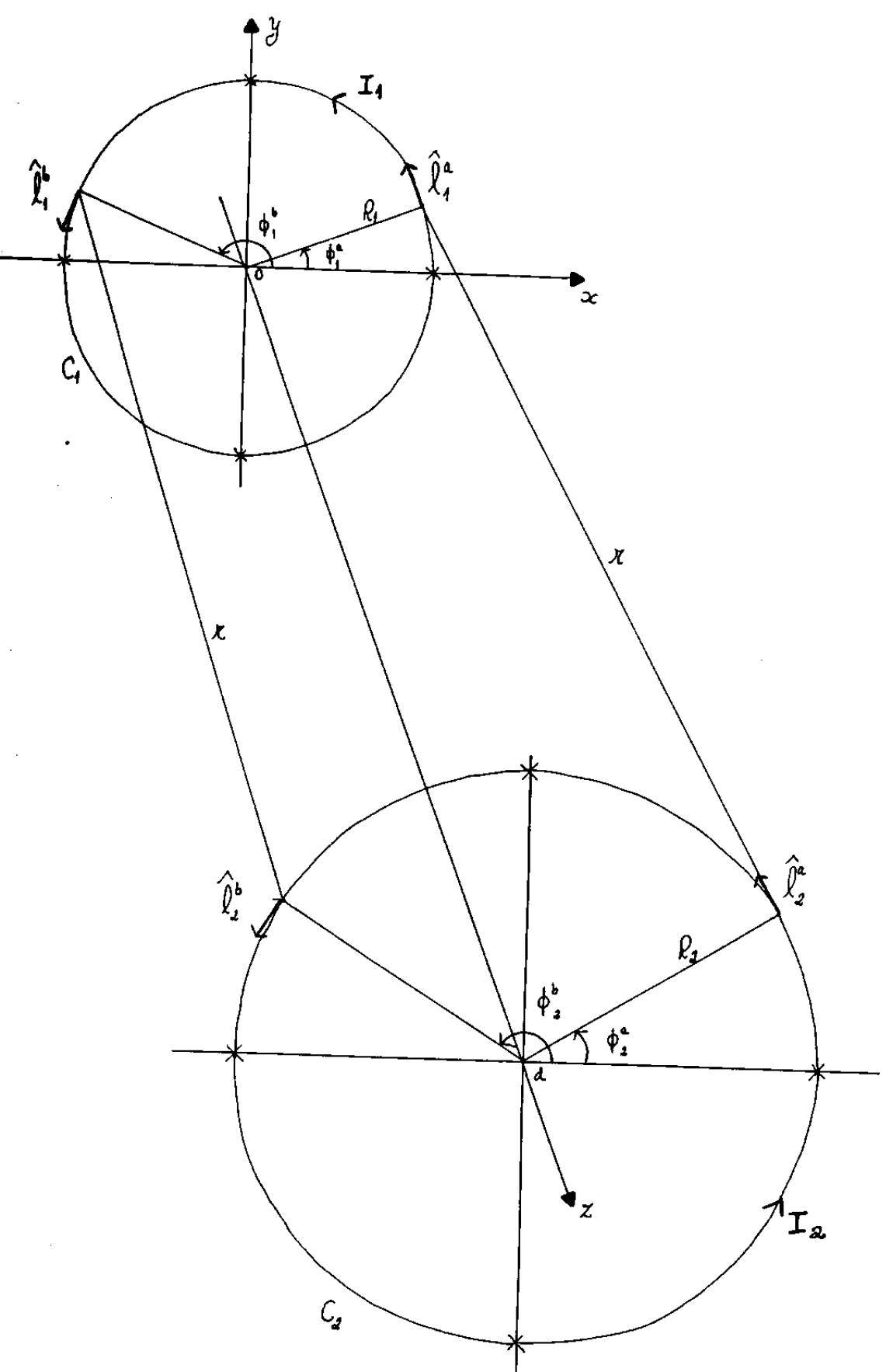


Figura 3: Dois circuitos circulares de raios R_1 e R_2 dispostos de modo que os planos que os contêm são paralelos. A distância entre esses planos que são perpendiculares ao eixo z é " d ".

Vamos agora calcular os integrandos de A a C somando as contribuições de \vec{dl}_1^a interagindo com \vec{dl}_2^a , e de \vec{dl}_1^b com \vec{dl}_2^b . Os integrandos denotaremos por:

$$d^2A = \frac{(\hat{r} \cdot \hat{l}_2)(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)}{r^2} \quad (19)$$

$$d^2B = \frac{(\hat{r} \cdot \hat{l}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2)}{r^2} \quad (20)$$

$$d^2C = \frac{(\hat{r} \cdot \hat{l}_2)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_1)(\hat{r} \cdot \vec{dl}_2)}{r^2} \quad (21)$$

Vamos usar (14) a (16) para somar as duas contribuições (lembrando que $\text{sen}(\pi - \phi) = \text{sen}\phi$ e $\text{cos}(\pi - \phi) = -\text{cos}\phi$). Temos:

$$\begin{aligned} d^2A = & R_1 \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(\text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a \\ & - \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a)(\text{sen}\phi_1^a \text{sen}\phi_2^a \\ & + \text{cos}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a)] + R_1 \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(\text{sen}\phi_2^b \text{cos}\phi_1^b \\ & - \text{sen}\phi_1^b \text{cos}\phi_2^b)(\text{sen}\phi_1^b \text{sen}\phi_2^b + \text{cos}\phi_1^b \text{cos}\phi_2^b)] \end{aligned} \quad (22)$$

então ao utilizar (17) e (18) vem:

$$\begin{aligned} d^2A = & R_1 \frac{dl_1 dl_2}{r^3} (\text{sen}\phi_1^a \text{sen}\phi_2^a + \text{cos}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a)(\text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a \\ & - \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a - \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a + \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Calculando o segundo integrando,

$$\begin{aligned} d^2B = & R_1 R_2 \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(-\text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a + \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)^2 (\text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a \\ & - \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a)] \\ & + R_1 R_2 \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(\text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a - \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)^2 (-\text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a \\ & + \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a)] \end{aligned} \quad (24)$$

onde o primeiro colchete se refere ao par "a" e o segundo ao par "b". Ao utilizarmos (17) e (18) vem que este integrando também se anula.

O último integrando pode ser avaliado, também quando se soma a contribuição dos pares,

$$\begin{aligned}
 d^2C = & R_1 R_2 \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(-\text{sen}\phi_1^a \cos\phi_2^a \\
 & + \text{sen}\phi_2^a \cos\phi_1^a)(\text{sen}\phi_2^a \cos\phi_1^a - \text{sen}\phi_1^a \cos\phi_2^a)^2] \\
 & + R_1 R_2 \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(\text{sen}\phi_1^a \cos\phi_2^a \\
 & - \text{sen}\phi_2^a \cos\phi_1^a)(-\text{sen}\phi_2^a \cos\phi_1^a + \text{sen}\phi_1^a \cos\phi_2^a)^2] = 0 \quad (25)
 \end{aligned}$$

onde notamos que a soma dos efeitos dos pares se anulam, como nos casos anteriores de d^2A e d^2B .

O resultado final é obtido integrando estes resultados de $\phi_1^a = -\frac{\pi}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$ (e ϕ_1^b indo então de $\frac{3\pi}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$), e depois integrando de $\phi_2^a = 0$ até 2π (e ϕ_2^b de π a $-\pi$). Como os integrandos já são nulos para todo ϕ_1^a e ϕ_2^a , as integrais vão ser nulas automaticamente. Concluimos então que $A = B = C = 0$ no caso da figura 3, mesmo sem supor a hipótese de Fechner.

Passando para o caso da figura 4, temos dois circuitos circulares de raio R_1 e R_2 , localizados no mesmo plano xy , com centros ao longo do eixo y tal que $x_1 = R_1 \cos\phi_1$, $y_1 = R_1 \text{sen}\phi_1$, $z_1 = 0$, $x_2 = R_2 \cos\phi_2$, $y_2 = d + R_2 \text{sen}\phi_2$, $z_2 = 0$. Logo temos,

$$\vec{r} = (R_2 \cos\phi_2 - R_1 \cos\phi_1, d + R_2 \text{sen}\phi_2 - R_1 \text{sen}\phi_1, 0) \quad (26)$$

$$\hat{l}_1 = (-\text{sen}\phi_1, \cos\phi_1, 0) \quad (27)$$

$$\hat{l}_2 = (-\text{sen}\phi_2, \cos\phi_2, 0) \quad (28)$$

$$\vec{r} \cdot \hat{l}_1 = d \cos\phi_1 + R_2 \text{sen}\phi_2 \cos\phi_1 - R_2 \cos\phi_2 \text{sen}\phi_1 \quad (29)$$

$$\vec{r} \cdot \hat{l}_2 = d \cos\phi_2 - R_1 \text{sen}\phi_1 \cos\phi_2 + R_1 \text{sen}\phi_2 \cos\phi_1 \quad (30)$$

$$\hat{l}_1 \cdot \hat{l}_2 = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \text{sen}\phi_1 \text{sen}\phi_2 \quad (31)$$

Agora escolhemos dois elementos de corrente em cada circuito, simétricos em relação ao eixo y tal que (ver figura 4):

$$\phi_1^b = \pi - \phi_1^a \quad (32)$$

$$\phi_2^b = \pi - \phi_2^a \quad (33)$$

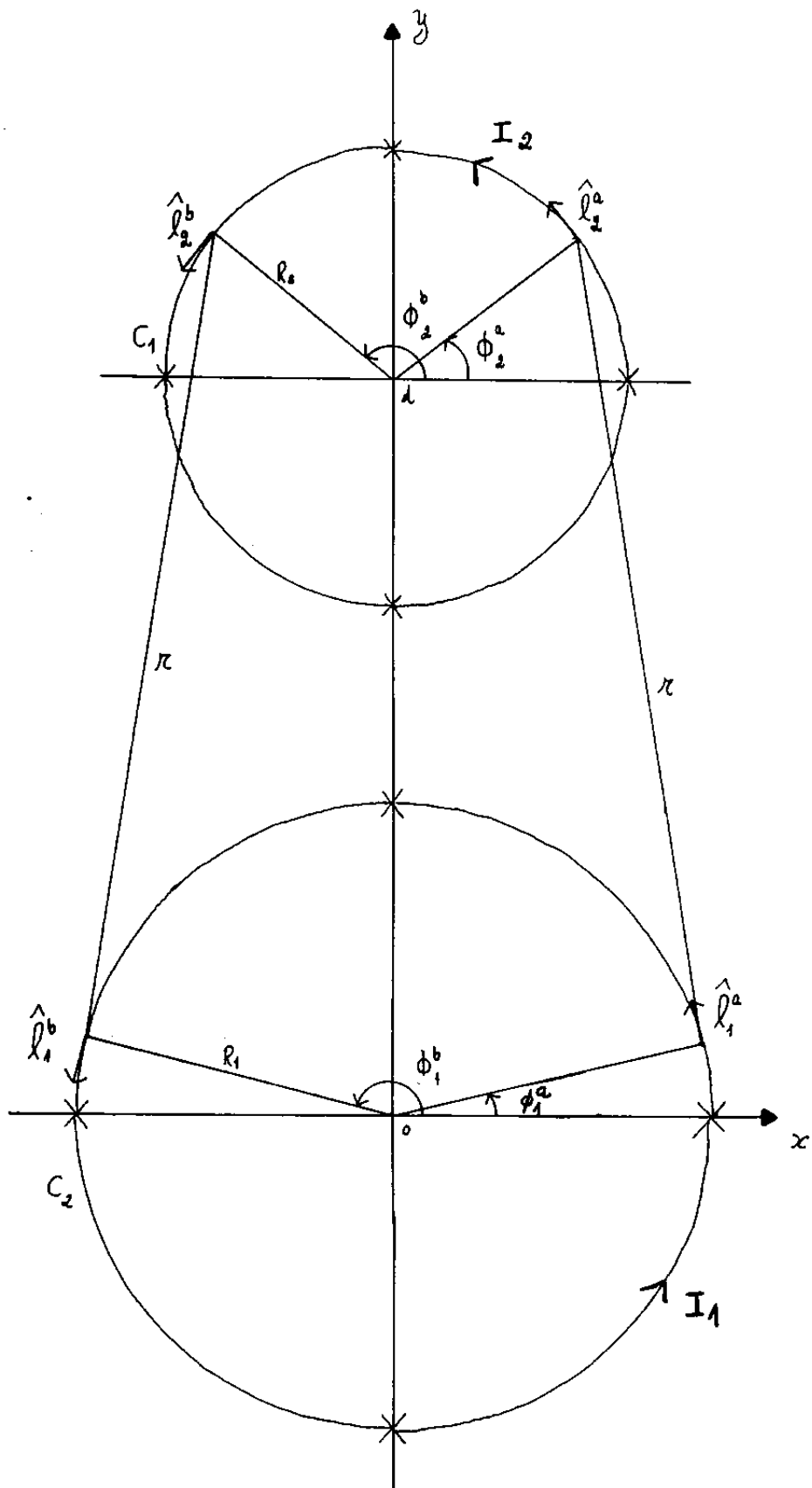


Figura 4: Dois circuitos circulares de raios R_1 e R_2 dispostos no mesmo plano. A distância entre os centros é "d" ao longo do eixo y.

Vamos calcular agora os integrandos de A a C somando as contribuições de \vec{dl}_1^a interagindo com \vec{dl}_2^a , e de \vec{dl}_1^b com \vec{dl}_2^b . Lembrando que $\text{sen}(\pi - \phi) = \text{sen}\phi$ e que $\text{cos}(\pi - \phi) = -\text{cos}\phi$, e de acordo com (19), (20) e (21),

$$\begin{aligned} d^2 A = & \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(d\text{cos}\phi_2^a - R_1 \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a \\ & + R_1 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)(\text{cos}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a + \text{sen}\phi_1^a \text{sen}\phi_2^a)] \\ & + \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(-d\text{cos}\phi_2^a + R_1 \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a \\ & - R_1 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)(\text{cos}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a + \text{sen}\phi_1^a \text{sen}\phi_2^a)] = 0 \quad (34) \end{aligned}$$

onde no segundo colchetes (referente à ação do elemento "b" do circuito 1 no elemento "b" do circuito 2) substituímos "b" por "a", de acordo com (32) e (33).

No caso de $d^2 B$, temos:

$$\begin{aligned} d^2 B = & \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(d\text{cos}\phi_1^a + R_2 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a - R_2 \text{cos}\phi_2^a \text{sen}\phi_1^a)^2 (d\text{cos}\phi_2^a \\ & - R_1 \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a + R_1 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)] \\ & + \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(-d\text{cos}\phi_1^a - R_2 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a + R_2 \text{cos}\phi_2^a \text{sen}\phi_1^a)^2 (-d\text{cos}\phi_2^a \\ & + R_1 \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a - R_1 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)] = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

onde no segundo colchetes (referente à ação do elemento "b" do circuito 1 no elemento "b" do circuito 2) substituímos "b" por "a" de acordo com (32) e (33).

Calculando agora a soma dos efeitos dos pares no caso do integrando $d^2 C$:

$$\begin{aligned} d^2 C = & \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(d\text{cos}\phi_1^a + R_2 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a \\ & - R_2 \text{cos}\phi_2^a \text{sen}\phi_1^a)(d\text{cos}\phi_2^a - R_1 \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a + R_1 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)^2] \\ & + \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(-d\text{cos}\phi_1^a - R_2 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a \\ & + R_2 \text{cos}\phi_2^a \text{sen}\phi_1^a)(-d\text{cos}\phi_2^a + R_1 \text{sen}\phi_1^a \text{cos}\phi_2^a \\ & - R_1 \text{sen}\phi_2^a \text{cos}\phi_1^a)^2] \quad (36) \end{aligned}$$

que é zero, pois se cancelam as ações como no caso de $d^2 A$ e $d^2 B$, ou seja, onde no segundo colchetes (referente à ação do elemento "b" do circuito 1

no elemento "b" do circuito 2) substituímos "b" por "a" de acordo com (32) e (33).

O resultado final é obtido integrando estes resultados de $\phi_1^a = -\frac{\pi}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$ (e ϕ_1^b indo então de $\frac{3\pi}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$), e depois integrando de $\phi_2^a = 0$ até 2π (e ϕ_2^b de π a $-\pi$). Como os integrandos já são nulos para todo ϕ_1^a e ϕ_2^a , as integrais vão ser nulas automaticamente. Concluimos então que $A = B = C = 0$ no caso da figura 4, mesmo sem supor a hipótese de Fechner.

A última situação que vamos analisar deste modo é a da figura 5. Nesta temos dois circuitos circulares de raios R_1 e R_2 dispostos de maneira que o plano do circuito dois (de acordo com a figura) é perpendicular ao plano que contém o circuito um. O circuito 1 está no plano xy com centro na origem. O circuito 2 está no plano yz com centro em $z = d, y = 0$. Agora as componentes espaciais de um ponto do circuito 1 são: $x_1 = R_1 \cos \phi_1$, $y_1 = R_1 \sin \phi_1$ e $z_1 = 0$. Para um ponto também genérico no circuito 2 temos: $x_2 = 0, y_2 = R_2 \sin \phi_2$ e $z_2 = d + R_2 \cos \phi_2$. Então:

$$\vec{r} = (-R_1 \cos \phi_1, R_2 \sin \phi_2 - R_1 \sin \phi_1, d + R_2 \cos \phi_2) \quad (37)$$

$$\hat{l}_1 = (-\sin \phi_1, \cos \phi_1, 0) \quad (38)$$

$$\hat{l}_2 = (0, \cos \phi_2, -\sin \phi_2) \quad (39)$$

e

$$\vec{r} \cdot \hat{l}_1 = R_2 \cos \phi_1 \sin \phi_2 \quad (40)$$

$$\vec{r} \cdot \hat{l}_2 = -d \sin \phi_2 - R_1 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \quad (41)$$

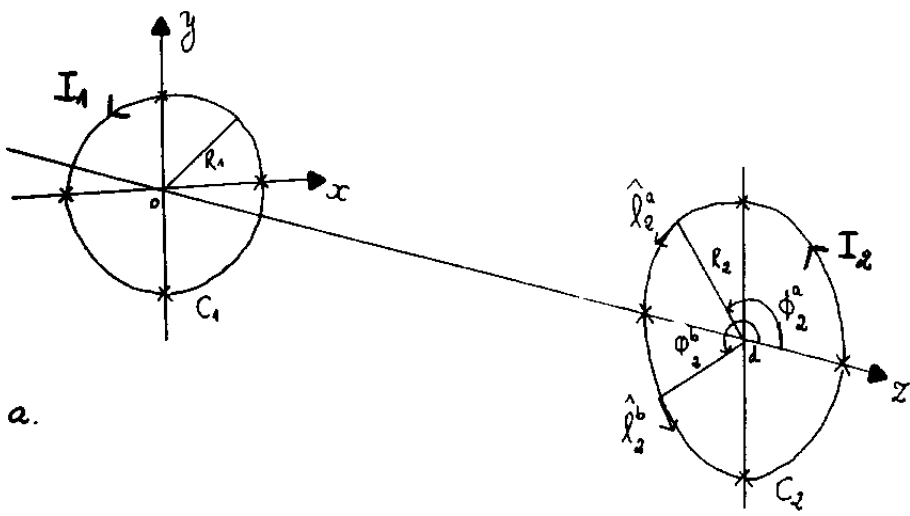
$$\hat{l}_1 \cdot \hat{l}_2 = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \quad (42)$$

A escolha dos elementos de corrente nesse caso segue o mesmo princípio que nos outros casos, com a diferença de que para um elemento do circuito 2, escolhemos dois elementos do circuito 1. Escolhemos portanto dois elementos localizados em ϕ_1^a e ϕ_1^b do circuito dois, simétricos em relação ao eixo z . Eles estão representados na figura 5-a. Temos então:

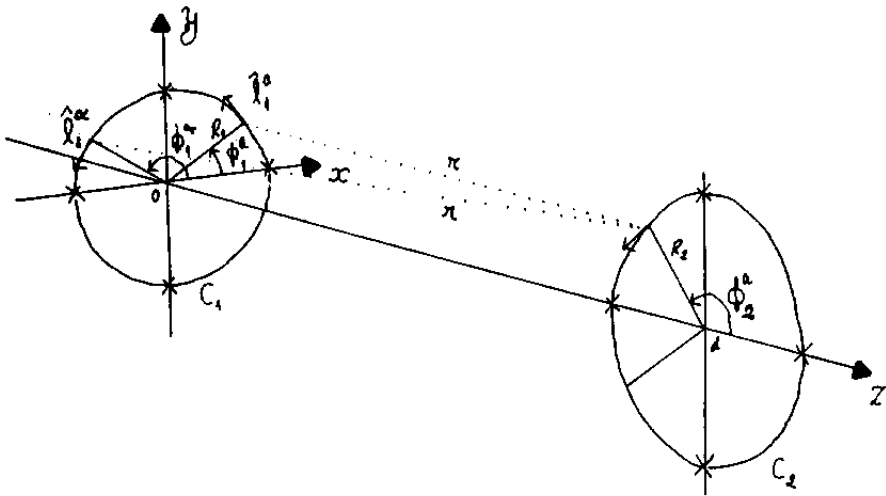
$$\phi_2^b = 2\pi - \phi_2^a \quad (43)$$

Para ϕ_2^a escolhemos dois elementos de corrente no circuito 1, localizados em ϕ_1^a e ϕ_1^b , simétricos em relação ao eixo y , como representado na figura 5-b. Eles estão a uma mesma distância r do elemento localizado em ϕ_2^a . Temos então:

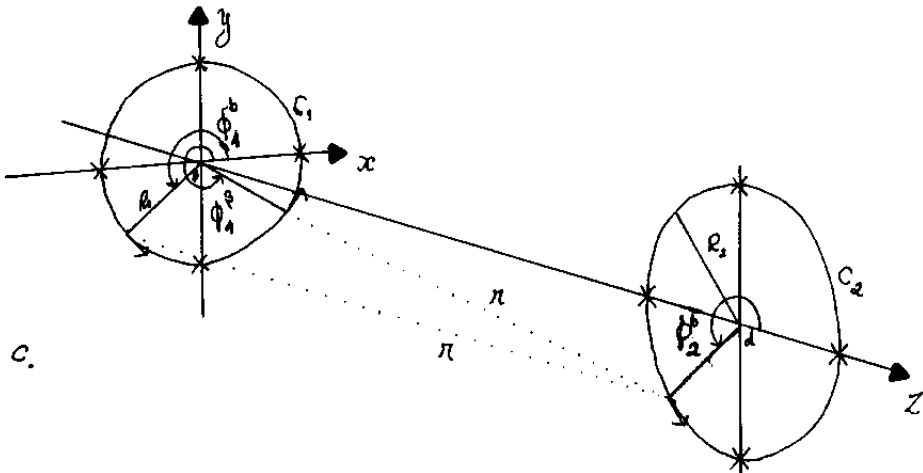
$$\phi_1^b = \pi - \phi_1^a \quad (44)$$



a.



b.



c.

Figura 5: Dois circuitos circulares de raios R_1 e R_2 dispostos de modo que os planos que os contêm são perpendiculares. a) elementos simétricos no circuito 2 em destaque. b) elementos simétricos no circuito 1 cuja distância relativa a um dos elementos do circuito 2 é a mesma. c) o mesmo que b), agora relativo ao outro elemento do circuito 2.

Para ϕ_2^b escolhemos outros dois elementos de corrente no circuito 1, localizados em ϕ_1^b e ϕ_1^β , simétricos em relação ao eixo y , como representado na figura 5-c. Eles estão a uma mesma distância r do elemento localizado em ϕ_2^b . Temos então:

$$\phi_1^\beta = \pi - \phi_1^b \quad (45)$$

Além disto, $\phi_1^b = \pi + \phi_1^a$ e $\phi_1^\beta = -\phi_1^a$.

De acordo com as expressões para os integrandos (19), (20) e (21), calculamos :

d^2A : Somando as ações dos elementos "a" e "α" do circuito um no elemento "a" do circuito dois,

$$\begin{aligned} d^2A &= \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(\cos \phi_1^a \cos \phi_2^a) (-d \operatorname{sen} \phi_2^a - R_1 \operatorname{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)] \\ &+ \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(\cos \phi_1^\alpha \cos \phi_2^\alpha) (-d \operatorname{sen} \phi_2^\alpha - R_1 \operatorname{sen} \phi_1^\alpha \cos \phi_2^\alpha)] \quad (46) \end{aligned}$$

Utilizando (44) vem:

$$\begin{aligned} d^2A &= \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(\cos \phi_1^a \cos \phi_2^a) (-d \operatorname{sen} \phi_2^a - R_1 \operatorname{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)] \\ &+ \frac{dl_1 dl_2}{r^3} [(-\cos \phi_1^a \cos \phi_2^a) (-d \operatorname{sen} \phi_2^a - R_1 \operatorname{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)] = 0 \quad (47) \end{aligned}$$

sendo esse resultado válido para quaisquer ϕ_1^a e ϕ_2^a . No caso de d^2B , temos que somar a ação dos elementos "a" e "α" do circuito 1 no elemento "a" do circuito 2, obtendo d^2B_1 :

$$\begin{aligned} d^2B_1 &= \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(R_2 \operatorname{sen} \phi_2^a \cos \phi_1^a)^2 (-d \operatorname{sen} \phi_2^a - R_1 \operatorname{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)] \\ &+ \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(R_2 \operatorname{sen} \phi_2^\alpha \cos \phi_1^\alpha)^2 (-d \operatorname{sen} \phi_2^\alpha \\ &- R_1 \operatorname{sen} \phi_1^\alpha \cos \phi_2^\alpha)] \quad (48) \end{aligned}$$

ou seja,

$$d^2B_1 = \frac{dl_1 dl_2}{r^5} 2 [(R_2 \operatorname{sen} \phi_2^a \cos \phi_1^a)^2 (-d \operatorname{sen} \phi_2^a - R_1 \operatorname{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)] \quad (49)$$

onde substituímos "α" por "a" de acordo com a eq. (44) no segundo colchetes de (48), que é referente à ação do elemento "α" do circuito 1 no elemento "a" do circuito 2.

Agora somamos as ações dos elementos "b" e "β" do circuito um no "b" do circuito dois, usando a equação (45). Obtemos d^2B_2 procedendo como fazemos na equação (48):

$$d^2B_2 = \frac{dl_1 dl_2}{r^5} 2[(R_2 \text{sen} \phi_2^b \cos \phi_1^b)^2 (-d \text{sen} \phi_2^b - R_1 \text{sen} \phi_1^b \cos \phi_2^b)] \quad (50)$$

Somando finalmente d^2B_1 e d^2B_2 , temos d^2B , que é zero, pois $\phi_1^\beta = -\phi_1^a$, $\phi_1^\beta = \pi - \phi_1^b$ e $\phi_2^b = 2\pi - \phi_2^a$, por (43) e (45).

No caso de d^2C , somando as ações dos elementos "a" e "α" do circuito um no elemento "a" do circuito dois, temos:

$$d^2C = \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(R_2 \text{sen} \phi_2^a \cos \phi_1^a)(-d \text{sen} \phi_2^a - R_1 \text{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)^2] \\ + \frac{dl_1 dl_2}{r^5} [(-R_2 \text{sen} \phi_2^a \cos \phi_1^a)(-d \text{sen} \phi_2^a - R_1 \text{sen} \phi_1^a \cos \phi_2^a)^2] \quad (51)$$

que é zero. Em (51) já substituímos "α" por "a" de acordo com a eq. (44) no segundo colchetes que é referente à ação do elemento "α" do circuito 1 no elemento "a" do circuito 2.

O resultado final é obtido integrando, no caso de d^2A e d^2C , ϕ_1^a de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ (e portanto ϕ_1^α de $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$) e ϕ_2^a de 0 a 2π (e portanto ϕ_2^b de 2π a 0). Como os integrandos são nulos para todo ϕ_1^a e ϕ_2^a , as integrais vão ser nulas automaticamente. No caso de d^2B integramos ϕ_1^a de 0 a $\frac{\pi}{2}$ (e portanto ϕ_1^α de π a $\frac{\pi}{2}$, ϕ_1^b de π a $\frac{3\pi}{2}$ e ϕ_1^β de 2π a $\frac{3\pi}{2}$) e ϕ_2^a de 0 a 2π (e portanto ϕ_2^b de 2π a 0). Como os integrandos são nulos, as integrais vão a zero automaticamente.

Concluimos então que nos três casos da figura 1 a lei de indução obtida pela eletrodinâmica de Weber sem utilizar a hipótese de Fechner, eq. (7), vai se reduzir à lei de Faraday, eq. (6), sem sobrar nenhum termo adicional. O caso geral de circuitos de contorno e disposição arbitrária é tratado na próxima seção.

2.3 Indução sem a hipótese de Fechner no caso geral

Na seção anterior mostramos que os quatro últimos termos da equação (7) se anulam no caso de circuitos de forma circular dispostos de maneira simétrica. Agora vamos utilizar circuitos de forma arbitrária.

Nesta seção comparamos a ordem de grandeza dos integrandos destes termos com a ordem de grandeza dos integrandos dos termos que geram a lei de indução de Faraday na forma (6). Para isto vamos usar a equação (3).

A expressão $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}\vec{l}_2}{r}$ ocorre em todos os termos do integrando de (3) e então vamos deixá-la de lado agora. Os cinco primeiros termos de (3) geram a lei de Faraday na forma (6). Entre estes, os quatro primeiros contêm: $2I_1(\vec{V}_1 \cdot \vec{d}\vec{l}_1)$, $2I_1\vec{V}_2 \cdot \vec{d}\vec{l}_1$, $-3I_1(\hat{r} \cdot \vec{V}_1)(\hat{r} \cdot \vec{d}\vec{l}_1)$, e $-3I_1(\hat{r} \cdot \vec{V}_2)(\hat{r} \cdot \vec{d}\vec{l}_1)$. A ordem de grandeza destes termos é $I_1 V dl_1$, onde V é a velocidade relativa entre os dois circuitos. Já o quinto termo de (3) que leva a Faraday contém $-dq_{1+}(\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) \cdot \vec{r}$. A ordem de grandeza deste termo é $\frac{d}{dt}(I_1) dl_1 r$, onde r é a distância média entre os dois circuitos (isto pode ser visto observando que $I_1 \vec{d}\vec{l}_1 = dq_{1+}(\vec{v}_{1+} - \vec{v}_{1-})$). Já os quatro últimos termos de (3) contêm $I_1(\vec{v}_{1d+} + \vec{v}_{1d-}) \cdot \vec{d}\vec{l}_1$, $I_1(\vec{v}_{2d+} - \vec{v}_{2d-}) \cdot \vec{d}\vec{l}_1$, $-\frac{3}{2}I_1[\hat{r} \cdot (\vec{v}_{1d+} + \vec{v}_{1d-})](\hat{r} \cdot \vec{d}\vec{l}_1)$, e $-\frac{3}{2}I_1[\hat{r} \cdot (\vec{v}_{2d+} + \vec{v}_{2d-})](\hat{r} \cdot \vec{d}\vec{l}_1)$. A ordem de grandeza destes termos é do tipo $I_1 v_d dl_1$, onde v_d é a velocidade de *drifting* típica das correntes nos circuitos.

Temos então de comparar $I_1 V dl_1$ com $I_1 v_d dl_1$, e $\frac{d}{dt}(I_1) dl_1 r$ com $I_1 v_d dl_1$.

Sabemos que a v_d típica é da ordem de alguns milímetros por segundo em condutores metálicos usuais. Se houver uma aproximação ou afastamento entre os dois circuitos teremos que $I_1 V dl_1 \gg I_1 v_d dl_1$ já que em geral nestes casos $V \gg v_d$ (como foi o caso das experiências de Faraday). Quando comparamos essas velocidades no caso de geradores de corrente alternada comuns (usados em indústrias, residências, etc; enfim, os aparelhos onde se usa mais frequentemente a lei de indução de Faraday como princípio de funcionamento físico), a velocidade de rotação do circuito induzido é em geral de centenas de metros por segundo (10^2 m/s), enquanto que a velocidade de *drifting* típica é da ordem de mm/s (10^{-3} m/s). A razão do primeiro pelo segundo é de (10^5) nos casos comuns de geradores de corrente alternada (que pode ser estendido em geral, já que as situações envolvem velocidades desta ordem). Podemos notar então o quanto é pequena a ação dos termos adicionais (últimos quatro termos da eq. (3)), em comparação com os termos

que deduzem a lei de Faraday proporcionais à velocidade relativa entre os circuitos, principalmente nas situações mais comuns de laboratório e nas máquinas industriais que funcionam pelo princípio da indução de correntes.

Agora analisamos o caso em que não há movimento relativo entre os circuitos ($V = 0$), mas quando $\frac{d}{dt}(I_1) \neq 0$. Temos então de comparar $\frac{d}{dt}(I_1)dl_1r$ com $I_1v_d dl_1$. Uma situação típica é do tipo $I_1 = I \sin \omega t$, de tal forma que $\frac{d}{dt}(I_1) = \omega I \cos \omega t$, que é da mesma ordem de grandeza que ωI_1 . Logo o que estaríamos comparando seria ωr com v_d . Como r é tipicamente da ordem de centímetros ou metros e ω é usualmente igual ou maior que a frequência da corrente alternada para finalidades residenciais e industriais comuns que é da ordem de 60 Hz, vem que $\omega r \gg v_d$, e portanto $\frac{d}{dt}(I_1)dl_1r \gg I_1v_d dl_1$. No caso de correntes induzidas quando se abre ou se fecha um circuito, esta aproximação vai ser ainda muito melhor devido ao fato de que a variação de corrente é muito mais intensa. O caso prático mais comum que podemos citar é o dos transformadores que funcionam pela indução de correntes por variação de correntes num circuito primário induzindo um secundário. Para esses casos onde a distância entre os circuitos é da ordem de cm, e ω da ordem de dezenas ou centenas de rad./s, a razão entre ωr e v_d é em geral da ordem de (10^5) , novamente uma razão muito grande para ser observado o efeito dos termos adicionais.

Vemos então que mesmo que a soma dos quatro últimos termos de (7) não seja nula para alguma geometria específica, ela vai ser desprezível em comparação com $-\frac{d}{dt}(I_1M)$.

Na próxima seção veremos por outro raciocínio que a soma dos quatro últimos termos de (7) tem de ser exatamente igual a zero para circuitos de forma arbitrária.

2.4 Indução no caso geral pela energia

Podemos encontrar a lei de indução de Faraday a partir da auto-energia e da energia mútua entre dois circuitos. Estas deduções podem ser encontradas no *Treatise* de Maxwell, referência [3] (artigos 543 e 578 nesse caso).

O objetivo desta seção é mostrar de um modo alternativo que os termos adicionais que tratamos na seção anterior são de fato nulos. Isto leva à conclusão de que chegamos à lei de indução de Faraday exatamente, a partir da eletrodinâmica de Weber aplicada a circuitos de corrente, mesmo que a hipótese de Fechner não seja verdadeira.

O caminho que apresentamos é baseado na energia magnética de interação entre dois circuitos de corrente, bem como na auto-energia de cada um deles. Vamos usar a expressão para a energia potencial entre duas cargas dq_1 e dq_2 dada por:

$$d^2U = \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \quad (52)$$

Esta é a energia de Weber, de onde se deriva sua lei de força. A energia entre os circuitos de corrente é calculada a partir da energia entre os elementos de corrente (ver figura 2), usando a expressão da energia de Weber para encontrá-la. Para calcular a energia entre dois elementos de corrente, portanto, sem fazer hipóteses sobre as velocidades das cargas nos elementos (a não ser a neutralidade dos elementos de corrente), ou seja, não vamos impor a hipótese de Fechner, simplesmente somamos as energias entre as cargas dos elementos de corrente. Para dois elementos neutros como os da figura 2 calculamos: $d^2U_{dq_{1+}dq_{2+}} + d^2U_{dq_{1+}dq_{2-}} + d^2U_{dq_{1-}dq_{2+}} + d^2U_{dq_{1-}dq_{2-}}$. A partir da expressão para a energia de Weber encontramos o valor: $\mu_0 dq_{1+} dq_{2+} (\hat{r} \cdot [\vec{v}_{1+} - \vec{v}_{1-}]) (\hat{r} \cdot [\vec{v}_{2+} - \vec{v}_{2-}]) / 4\pi r$ para esta soma. Se $I_i d\vec{l}_i = dq_{i+} (\vec{v}_{i+} - \vec{v}_{i-})$, $i = 1, 2$, esta expressão fica: $\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left(\frac{1}{r}\right) (\hat{r} \cdot d\vec{l}_1) (\hat{r} \cdot d\vec{l}_2)$, ou seja, este é o valor da energia entre dois elementos de corrente de acordo com a energia de Weber. A energia entre os dois circuitos (figura 2) é a soma das energias entre seus elementos de corrente, par a par, ou seja: $\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{(\hat{r} \cdot d\vec{l}_1) (\hat{r} \cdot d\vec{l}_2)}{r}$, que é igual (ver [3] ou [2], cap. 3) a $\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$, ou ainda $I_1 I_2 M$ (M o coeficiente de indução mútua). Portanto calculamos a energia entre dois circuitos de corrente a partir da soma das energias entre todas as cargas que compõe um circuito e as que compõe o outro, ou seja, integrando ao longo dos dois

circuitos a energia entre dois elementos de corrente (estamos usando as definições da figura 2). A auto-energia de um ou de outro circuito de corrente é calculada da mesma maneira. A diferença é que integramos a energia entre elementos de corrente do mesmo circuito. Chamando a energia mútua E_m , e M o coeficiente de indução mútua entre os circuitos, encontramos:

$$E_m = I_1 I_2 M \quad (53)$$

onde I_1 e I_2 são as correntes nos circuitos. As auto-energias E_1 e E_2 , correspondentes aos circuitos de corrente 1 e 2, respectivamente, são:

$$E_1 = \frac{1}{2} I_1^2 L_1 \quad (54)$$

e

$$E_2 = \frac{1}{2} I_2^2 L_2 \quad (55)$$

onde L_1 e L_2 são os coeficientes de auto-indução correspondentes aos circuitos 1 e 2, respectivamente.

Estas energias são as mesmas que encontramos no eletromagnetismo clássico quando integramos as energias entre os elementos de corrente ao longo dos circuitos. Uma prova disto se encontra no *Treatise* de Maxwell, referência [3], artigo 578. Helmholtz, W. Thomson e F. Neumann (ver também referência [3] artigo 543), deduzem a lei de indução de correntes de Faraday a partir destas energias que encontramos. O cálculo das energias feitas por eles é a partir do eletromagnetismo clássico. Mas como chamamos a atenção acima, o resultado clássico para a energia entre elementos de corrente integrada ao longo dos circuitos é o mesmo que quando calculamos usando a energia de Weber entre cargas pontuais. Em uma nota de rodapé de J. J. Thompson incluída no artigo 544 do *Treatise* do Maxwell (referência [3]) encontramos esta dedução que apresentamos a seguir.

Vamos chamar a energia magnética devido às correntes nos dois circuitos de T_e . De (53) a (55) vem então:

$$T_e = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

de onde podemos calcular

$$dT_e = \frac{\partial T_e}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial T_e}{\partial I_2} dI_2 + \Sigma \frac{\partial T_e}{\partial x} dx$$

onde x é um parâmetro qualquer que determina o coeficiente de indutância mútua entre os circuitos. Podemos citar como exemplo o caso de duas espiras frontais que já discutimos, onde o coeficiente de indutância mútua M pode ser calculado e obtemos (ver figura 3 e Grover, referência [17], Capítulo 11, páginas 77 a 79):

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} f \sqrt{R_1 R_2}$$

onde f é um coeficiente que vem da tabela 1 como função da variável k'^2 :

$$k'^2 = \frac{(R_2 - R_1)^2 + d^2}{(R_2 + R_1)^2 + d^2}$$

Portanto os parâmetros que determinam o coeficiente de indutância mútua M , neste caso, são R_1 , R_2 e d . Esses são exemplos dos parâmetros representados por x em $\frac{\partial T_e}{\partial x}$.

Desde que T_e é uma função quadrática homogênea de I_1 e I_2 vem:

$$2T_e = I_1 \frac{\partial T_e}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial T_e}{\partial I_2}$$

então

$$2dT_e = \frac{\partial T_e}{\partial I_1} dI_1 + I_1 d\frac{\partial T_e}{\partial I_1} + \frac{\partial T_e}{\partial I_2} dI_2 + I_2 d\frac{\partial T_e}{\partial I_2}$$

subtraindo a expressão para dT_e da $2dT_e$, encontramos

$$dT_e = I_1 d\frac{\partial T_e}{\partial I_1} + I_2 d\frac{\partial T_e}{\partial I_2} - \Sigma \frac{\partial T_e}{\partial x} dx$$

mas $\frac{\partial T_e}{\partial x}$ é a força em relação à coordenada x agindo no sistema, então, desde que não supomos qualquer força externa agindo no sistema, $\Sigma \frac{\partial T_e}{\partial x} dx$ será o aumento na energia cinética mecânica T_m devido ao movimento do sistema. A última equação fica então:

$$d(T_e + T_m) = I_1 d\frac{\partial T_e}{\partial I_1} + I_2 d\frac{\partial T_e}{\partial I_2}$$

k^2	f	Diff.	$\log f$	Diff.	k^2	f	Diff.	$\log f$	Diff.
0.010	0.021474		2.33191		0.260	0.003805		3.58034	
.020	.017315	-4159	.23842	-9349	.270	.003649	- 156	.58215	-1819
.030	.014937	-2378	.17246	-6596	.280	.003500	- 149	.54410	-1805
.040	.013284	-1653	.12333	-4913	.290	.003359	- 141	.52618	-1792
0.050	0.012026	-1258	2.08014	-4319	0.300	0.003224	- 135	3.50835	-1783
.060	.011017	-1009	.04207	-3807	.310	.003095	- 129	.49062	-1773
.070	.010179	- 838	2.00770	-3437	.320	.002971	- 124	.47295	-1767
.080	.009464	- 715	3.97608	-3162	.330	.002853	- 118	.45535	-1760
.090	.008843	- 621	.94662	-2946	.340	.002740	- 113	.43778	-1757
0.100	0.008297	- 546	3.91890	-2772	0.350	0.0026317	- 108	3.42024	-1754
.110	.007810	- 487	.89263	-2627	.360	.0025276	-1041	.40271	-1753
.120	.007371	- 439	.86754	-2509	.370	.0024276	-1000	.38518	-1753
.130	.006974	- 397	.84347	-2407	.380	.0023315	- 961	.36764	-1754
.140	.006611	- 363	.82026	-2321	.390	.0022391	- 924	.35008	-1756
0.150	0.006278	- 333	3.79780	-2246	0.400	0.0021502	- 889	3.33248	-1760
.160	.005970	- 308	.77599	-2181	.410	.0020646	- 856	.31483	-1765
.170	.005685	- 285	.75475	-2124	.420	.0019821	- 825	.29712	-1769
.180	.005420	- 265	.73401	-2074	.430	.0019026	- 795	.27934	-1778
.190	.005173	- 247	.71371	-2030	.440	.0018259	- 767	.26148	-1786
0.200	0.004941	- 232	3.69380	-1991	0.450	0.0017519	- 740	3.24352	-1796
.210	.004723	- 218	.67423	-1957	.460	.0016805	- 714	.22545	-1807
.220	.004518	- 205	.65497	-1926	.470	.0016116	- 689	.20726	-1819
.230	.004325	- 193	.63598	-1899	.480	.0015451	- 665	.18894	-1832
.240	.004142	- 183	.61723	-1875	.490	.0014808	- 643	.17048	-1846
0.250	0.003969	- 173	3.59869	-1854	0.500	0.0014186	- 622	3.15186	-1862
		- 164		-1835			- 601		-1879

tabela 1

O trabalho feito pelas baterias nos dois circuitos cujas forças eletromotricas são A_1 e A_2 , durante o tempo dt é:

$$A_1 I_1 dt + A_2 I_2 dt$$

O calor produzido no mesmo tempo é, pela lei de Joule:

$$(R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt$$

Pela conservação da energia o trabalho feito pelas baterias deve ser igual ao calor produzido no circuito mais o aumento na energia do sistema, então:

$$A_1 I_1 dt + A_2 I_2 dt = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt + d(T_e + T_m)$$

Substituindo o valor encontrado de $d(T_e + T_m)$ na expressão acima, obtemos

$$I_1 \left[A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial I_1} \right] + I_2 \left[A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial I_2} \right] = 0$$

ou

$$I_1 \left[A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt} (L_1 I_1 + I_2 M) \right] + I_2 \left[A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt} (L_2 I_2 + I_1 M) \right] = 0$$

Thompson conclui dizendo que utilizando apenas a lei da conservação da energia chegamos nesta última equação. Vamos agora utilizar a segunda lei de Kirchhoff para circuitos elétricos. De acordo com esta lei a soma algébrica das diferenças de voltagem em torno de qualquer malha de um circuito é nula ([5], cap. 22, seção 22.3). Neste caso cada circuito é constituído de uma única malha. Concluimos então que cada um dos colchetes desta última equação é nulo. E isto é exatamente a lei de Faraday onde queríamos chegar, levando ainda em conta o efeito da auto-indutância de cada um dos circuitos.

Nós mostramos a seguir outra dedução da lei de indução de Faraday a partir da energia, como Maxwell apresenta em seu *Treatise* (referência [3] artigos 578 a 582).

Seja T_e a energia magnética do sistema formado por dois circuitos (figura 2) de correntes I_1 e I_2 , temos então:

$$T_e = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (56)$$

Podemos chamar a L_1 e a L_2 os “momentos de inércia elétricos” dos circuitos 1 e 2 e ainda M o produto da “inércia elétrica” dos dois circuitos. Estamos fazendo uma analogia com um sistema mecânico de dois corpos, pois a expressão dos dois primeiros termos da energia é semelhante àquela da energia mecânica de dois corpos rígidos em rotação (com as correntes fazendo o papel das velocidades angulares de rotação). O tratamento lagrangeano se aplica igualmente, por exemplo, dando nomes como “inércia elétrica” aos coeficientes de indução. Assim o fez Maxwell para mostrar a similaridade entre as energias e explicar o fundamento da aplicação deste formalismo mecânico a um sistema elétrico.

Diferenciando T_e com respeito a I_1 obtemos a quantidade p_1 , que no caso mecânico pode ser chamado de momento relativo a I_1 . No caso elétrico podemos chamá-lo de “momento elétrico” do circuito 1. Seu valor é:

$$p_1 = L_1 I_1 + M I_2 \quad (57)$$

Sendo V a força eletromotriz no circuito, proveniente de algo como uma bateria (*fem* independente da *fem* da indução) e R a resistência ôhmica do circuito, podemos dizer que nesta situação existe uma força eletromotriz $V - RI$ disponível para mudar o momento do circuito. Vamos chamar esta força eletromotriz Y . Através da equação da força generalizada F dada pela lagrangeana \mathcal{L} , $F = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$, onde q e \dot{q} são as variáveis generalizadas, calculamos Y como:

$$Y = \frac{d}{dt} p - \frac{\partial T_e}{\partial Q} \quad (58)$$

sendo $Q = \int I dt$ e p o momento elétrico. Desde que T_e não envolve Q , o último termo é nulo e a equação da força eletromotriz fica:

$$V - RI = Y = \frac{d}{dt} p \quad (59)$$

ou

$$V = RI + \frac{d}{dt} p \quad (60)$$

Aplicando ao circuito 2 este cálculo, temos (para um circuito sem outro tipo de *fem* além da indução, quer dizer, sem baterias, $V_2 = 0$):

$$R_2 I_2 + \frac{d}{dt} (M I_1 + L_2 I_2) = 0 \quad (61)$$

onde R_2 é a resistência do circuito 2, ou seja:

$$R_2 I_2 = -\frac{d}{dt}(M I_1 + L_2 I_2) \quad (62)$$

mesmo válido para o circuito 1:

$$R_1 I_1 = -\frac{d}{dt}(M I_2 + L_1 I_1) \quad (63)$$

onde R_1 é a resistência do circuito 1. E estas expressões são novamente a lei de Faraday que queríamos derivar.

A partir dos cálculos da seção anterior e desta, concluímos que a lei de indução de Faraday é uma consequência da eletrodinâmica de Weber, ou seja, os termos adicionais que mostramos serem muito menores em relação àqueles que levam à lei de Faraday no cálculo usando a lei de força, são de fato zero, pois o cálculo acima não faz qualquer hipótese sobre as correntes.

3. O DISCO DE FARADAY

Faraday foi o primeiro a idealizar um experimento de indução de correntes onde a “lei dos fluxos” não se aplicava, pelo menos à primeira vista. Em 1831 construiu um disco de metal que tinha ligado por contatos deslizantes no centro e na borda um galvanômetro, sendo o primeiro livre para girar em torno do eixo de simetria. Um ímã permanente era fixado próximo ao disco, o que junto com o movimento do disco provocava uma corrente no galvanômetro (ver figura 6):

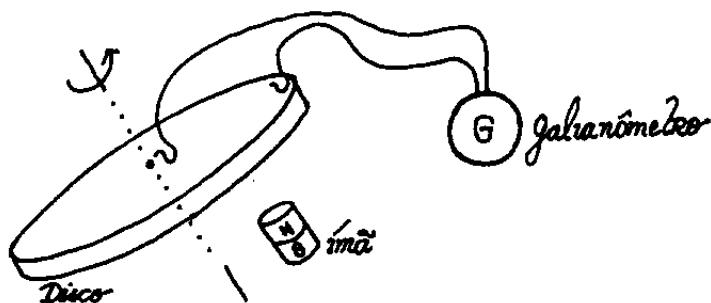


Figura 6: O disco de Faraday. Contatos deslizantes conectam o galvanômetro ao disco que gira em torno de seu eixo na presença de um campo magnético constante.

Nesse caso o ímã, fios e galvanômetro estão fixos no laboratório, em relação ao qual gira o disco. Os contatos deslizantes são feitos no centro e na borda do disco.

A idéia principal para se afirmar que a lei dos fluxos não vale é que o circuito formado pelo disco e pelo galvanômetro não varia de forma ainda que o disco gire, não havendo portanto variação de fluxo nesse circuito uma vez que o ímã está parado (ver referência [5]).

Dos experimentos de 1831, [7] (parágrafo 85), Faraday explicava que o material do disco está cortando as linhas de campo do magneto, ocasionando assim a corrente. A partir dos experimentos e conclusões de Faraday é que F. Neumann e Maxwell formularam a lei de indução como a conhecemos, portanto é dela que temos que tirar uma explicação para o fenômeno.

Na última seção derivamos a lei de indução de Faraday a partir da força de Weber aplicada a circuitos. Nesta seção em particular portanto, estamos dando continuidade à pesquisa, analisando uma situação em que verificamos a aplicabilidade da lei de indução de Faraday.

Dada a forma da expressão da indução de Faraday podemos estudar o caso usando a equivalente “lei dos fluxos”:

$$fem = -\frac{d}{dt} \left(\int \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \right) = -\frac{d}{dt} \Phi_m \quad (64)$$

O exemplo da figura 6 é um caso que alguns autores como Feynman, [5], dizem ser uma exceção à regra do fluxo, ou seja, onde não se aplica. Este caso mostra um disco condutor que pode girar sobre um eixo fixo na presença de um campo magnético. Contatos se fazem no eixo e na borda do disco, completando um circuito fechado com um galvanômetro. Quando o disco gira, o circuito, no sentido do lugar geométrico do espaço onde estão as correntes, sempre é o mesmo. A parte do circuito onde está o disco, se move sem que haja mudança do lugar geométrico da corrente. Apesar disso há uma *fem* induzida, constante no tempo para uma rotação a velocidade constante do disco, como se observa no galvanômetro. A explicação, de acordo com Feynman, [5], vem com a força de Lorentz, $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, onde as cargas livres do disco sofrem uma força proporcional ao seu valor e à $\vec{v} \times \vec{B}$, sendo $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ($\vec{\omega}$ a velocidade angular do disco e \vec{r} a posição de certa carga livre deste ao longo do raio) e \vec{B} o campo magnético do ímã. De acordo com Feynman ainda, a *fem* que se calcula através da força de Lorentz integrada ao longo do raio do disco não se pode igualar a uma variação de fluxo.

Podemos portanto calcular a força eletromotriz de acordo com Feynman através da força de Lorentz e assim a corrente pelo galvanômetro. Para simplificar e exemplificar vamos considerar um disco de raio a com velocidade angular constante ω imerso num campo magnético homogêneo e perpendicular ao plano do disco, como na figura 7:

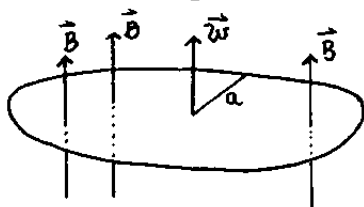


Figura 7: Disco de raio a na presença de um campo magnético homogêneo e uniforme perpendicular ao plano em que gira o disco.

Encontrando então a polarização provocada no disco pelo seu movimento de rotação no campo magnético, podemos estimar a corrente pelo galvanômetro cujos contatos deslizantes se fazem no centro e na borda deste.

A partir da figura 8 podemos entender melhor a situação:



Figura 8: Mesma situação que da figura 7 vista de cima do plano que contém o disco. Uma seção elementar do disco em destaque.

Para uma seção elementar do disco podemos calcular a tensão induzida V pelo movimento no campo magnético (que vai ser também a tensão entre o centro e a borda). Ela é dada por:

$$V = \int_0^a \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \int_0^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \frac{B\omega a^2}{2} \quad (65)$$

Esta é a tensão aplicada no galvanômetro. Considerando uma resistência equivalente à soma das resistências ôhmicas do disco condutor, dos fios condutores e do galvanômetro, R , a corrente pelo circuito será:

$$I = \frac{B\omega a^2}{2R} \quad (66)$$

Para exemplificar, podemos estimar a corrente I quando a é 10cm, $\omega = 1$ rad/s, $R = 1\Omega$, B de 5×10^{-5} Tesla (campo magnético terrestre típico). Com esses valores obtemos uma corrente de aproximadamente $0,3\mu A$ e portanto uma tensão induzida no disco de aproximadamente $0,3\mu V$. Com um pequeno ímã industrial cujo campo magnético na proximidade de um dos polos é da

ordem de cem vezes o valor do campo magnético terrestre, encontramos os valores de corrente em torno de $30\mu\text{A}$ e uma tensão de $30\mu\text{V}$, valores possíveis de se medir com um galvanômetro.

Essas mesmas equações para V e I podem ser encontradas usando a lei de Weber. Assis, [8], calcula a força sobre uma carga pontual movendo-se em uma região de campo magnético uniforme e mostra que a expressão da força nesse caso é igual a expressão de Lorentz com a diferença que a velocidade \vec{v} que aparece na expressão é aquela relativa entre a carga e a fonte do campo magnético e não em relação ao observador, como no caso da força de Lorentz. No caso de o ímã estar parado em relação ao observador, como neste apresentado, as equações são idênticas, resultando que os mesmos valores podem ser derivados a partir da força de Weber.

Mostramos a seguir que se pode chegar a esses mesmos valores usando a lei dos fluxos, ao contrário do que afirmam alguns autores, [5].

Consideremos uma seção do disco como na figura 8, com o galvanômetro conectado por contatos deslizantes na borda e no centro (figura 9):

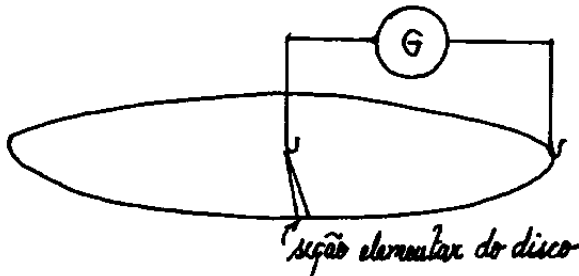


Figura 9: Seção do disco em destaque com o galvanômetro conectado por contatos deslizantes na borda e no centro.

Vejamos o que acontece a essa seção isoladamente, como fizemos no cálculo anterior, observando a construção da figura 9 pela parte de cima (figura 10):

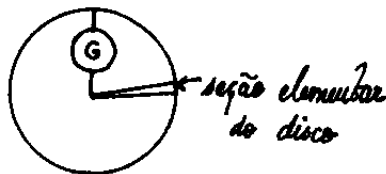


Figura 10: O mesmo que em 9 mas visto de cima do plano que contém o disco.

Girando o conjunto: anel externo e condutor da seção elementar do disco, vamos encontrar a partir da regra do fluxo a corrente pelo galvanômetro e a tensão ao longo do raio do disco, pois esta é a mesma que a induzida na seção elementar deste.

Pela figura 10 observamos que fechamos circuito ligando as extremidades do galvanômetro por dois caminhos, como mostramos na figura 11:

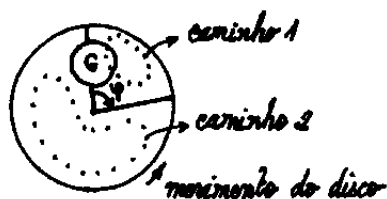


Figura 11: Saindo do centro (um dos terminais do galvanômetro) para a borda do disco pela seção elementar, temos dois caminhos que levam ao outro terminal do galvanômetro: Um por um lado da borda do disco e outro pelo outro lado, determinando os caminhos um e dois.

sendo que ambos os caminhos perfazem certa área (figura 12):

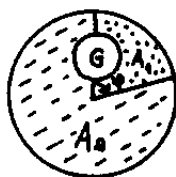


Figura 12: Os caminhos determinam áreas correspondentes.

Quando o disco gira, ou melhor, quando o fio elementar (seção elementar do disco) gira, a área A_1 diminui, enquanto que A_2 aumenta. O campo \vec{B} é uniforme e está "saindo" do plano do papel. Segundo a lei dos fluxos, no circuito de caminho 1 este está diminuindo, provocando uma corrente neste caminho que tenta anular essa diminuição, como na figura 13. No caso do caminho de área A_2 acontece justamente o contrário. O fluxo está aumentando e surge uma corrente neste de modo a tentar diminuir o fluxo do campo \vec{B} , como mostra a mesma figura 13:

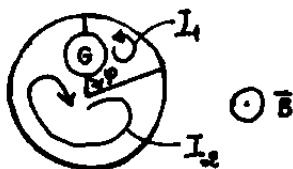


Figura 13: Devido à variação de fluxo nas áreas correspondentes aos caminhos, temos uma circulação de corrente em cada um deles.

Como observamos, as correntes concordam no sentido pelo galvanômetro, quer dizer que temos portanto forças eletromotrizes induzidas com a mesma polaridade no galvanômetro. Vamos calcular então cada *fem* para o caso desta seção elementar do disco (o que é calcular a *fem* sobre o disco como um todo), como mostra esquematicamente a figura 14:

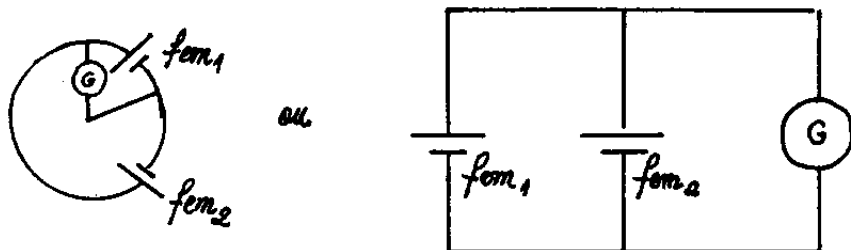


Figura 14: As correntes que circulam pelos caminhos um e dois são do mesmo sentido quando passam pelo galvanômetro. Podemos representar isso como duas baterias em paralelo.

As áreas A_1 e A_2 da figura 12 são dadas por: $A_1 = \pi a^2 \frac{\phi}{2\pi}$ e $A_2 = \pi a^2 (1 - \frac{\phi}{2\pi})$. O fluxo portanto em A_1 é $B\pi a^2 \frac{\phi}{2\pi}$ e em A_2 , $B\pi a^2 (1 - \frac{\phi}{2\pi})$. As *fem*'s induzidas são da mesma intensidade e estão em paralelo como na figura 14. Portanto, o valor da tensão aplicada ao galvanômetro pode ser calculado por (64). Sendo $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ temos então que a *fem* é dada por: $B\omega a^2/2$, o que concorda com o cálculo usando a força de Lorentz ou Weber. A lei do fluxo pode portanto ser aplicada nesse caso, o que vale dizer que a lei que deduzimos na seção anterior (lei de indução de Faraday), se aplica neste caso também, ao contrário do que afirma Feynman [5]. Embora negado por Feynman, o fato de a lei dos fluxos também poder ser aplicada nestes casos foi defendido por alguns autores como Panofsky e Phillips, [9], e outros [10]. Concordamos com estes autores e com seus cálculos, que são análogos aos que apresentamos aqui.

Concluindo esta seção podemos dizer que há duas maneiras igualmente válidas de calcular a *fem*: Ou por $q\vec{v} \times \vec{B}$, ou pela lei dos fluxos (64). Ambas chegam ao mesmo valor quantitativo.

4. INDUÇÃO UNIPOLAR

Indução unipolar é o caso geral do que estudamos na seção anterior, ou seja, não só o disco pode girar, mas também o magneto. De forma que apesar do movimento, o campo de indução permanece sempre o mesmo no tempo, embora possa variar de ponto para ponto, como na figura 15:

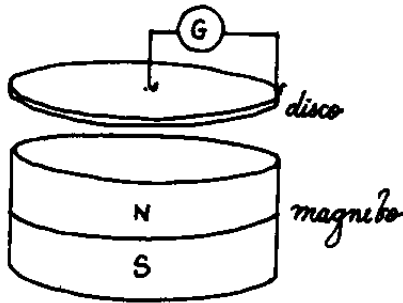


Figura 15: Caso geral do disco de Faraday. Agora o ímã também pode girar sob seu eixo. Isso caracteriza um experimento de indução unipolar.

Tomemos dois cilindros, um sendo um condutor e o outro um magneto, ambos com possibilidade de girar ao redor de seus próprios eixos, que estão alinhados por uma reta comum, como na figura 16:

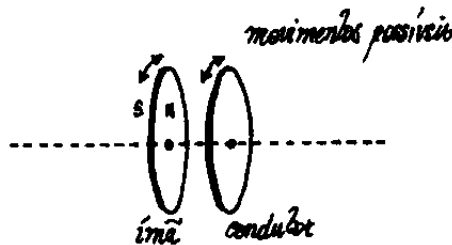


Figura 16: Dois cilindros dispostos frontalmente, livres para girar sob o eixo comum, sendo um o disco condutor e o outro um magneto cujas faces são Norte e Sul.

Devido ao efeito Hall conhecido, esperamos que ao girar o condutor, deixando o ímã parado em relação ao laboratório, temos uma polarização induzida ao longo do raio do disco, como na figura 17.

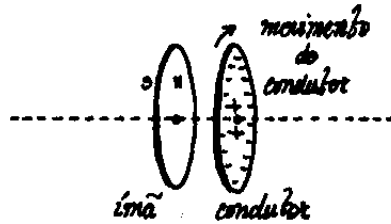


Figura 17: Considerando a situação da figura 16 com apenas o disco girando e o magneto parado em relação ao laboratório. Ocorre uma polarização no disco por efeito Hall.

Tomando a situação em que o magneto gira no sentido oposto (estando o condutor parado em relação ao laboratório), havendo entre os dois cilindros o mesmo movimento relativo, esperamos a mesma polarização no condutor.

Para verificar a polarização no disco usa-se um galvanômetro com contatos deslizantes sobre este, o que forma um circuito. Os experimentos primeiramente concebidos e realizados são de Faraday. Começando seus estudos com discos condutores girando em campos magnéticos em 1831, continuou até 1851 com experimentos mais elaborados visando entender a origem das correntes em condutores se movendo em regiões de campos magnéticos, como veremos logo adiante.

Tanto nos experimentos de Faraday como em outros experimentos (ver referências [7], parágrafos 85 a 139 e 3070 a 3163, e [11] a [14]), o galvanômetro ficou parado em relação ao laboratório, bem como seus condutores. Isso pode levar à suspeita de que pode haver indução no galvanômetro e seus fios. Se as linhas de campo magnético giram com o magneto que as origina quando este gira sobre seu eixo de simetria, ou se estão paradas em relação ao laboratório apesar do movimento do ímã, é uma questão sob estudo.

No caso de as linhas acompanharem o movimento do magneto quando este gira, chega-se à conclusão de que no caso de, por exemplo, girarmos o

disco e o magneto juntos, uma corrente flui pelo galvanômetro devido ao fato de que as linhas de campo, por girarem, cortarem o material condutor do galvanômetro e seus fios, provocando a indução. Se pensarmos na mesma situação de girar o disco e o magneto juntos, com o campo magnético parado no laboratório, agora é o disco que está cortando as linhas de campo magnético provocando a indução. Pensando intuitivamente no problema em que o disco e o magneto giram juntos, não havendo movimento relativo portanto entre ambos, esperamos que não haja polarização no disco pelo simples fato de que não há movimento relativo entre este e o ímã. As experiências (ver referência [13]) mostram que nestas situações o galvanômetro (que está parado no laboratório) registra uma corrente. Por este motivo, de haver corrente apesar de não haver movimento relativo entre o ímã e o disco, apenas um movimento absoluto de rotação, alguns autores como Kennard (referências [11] e [12]) associam este efeito a algo que acontece a sistemas que giram em relação a um espaço ou referencial absoluto. Kennard desconsidera quaisquer efeitos sobre o galvanômetro devido à rotação do ímã.

Os primeiros experimentos, como citamos, foram idealizados e construídos por Faraday. Em 1832 Faraday (ver referência [7] parágrafo 218) construiu um experimento como o da figura 15 para investigar a indução em condutores que se movem em campos magnéticos, de modo que o disco e o magneto girassem juntos, eletricamente isolados um do outro. Ele observou que a agulha do galvanômetro era deflexionada como no caso de girar apenas o disco, deixando o magneto parado em relação ao laboratório. A conclusão foi que deixar o magneto parado ou girando causa o mesmo efeito no disco que gira.

Em 1851 (referência [7] parágrafos 3070 a 3163) Faraday já investiga com um experimento mais elaborado. Usando uma construção que permitia girar o condutor independentemente do magneto, deixando o galvanômetro fixo no laboratório, como na figura 18:

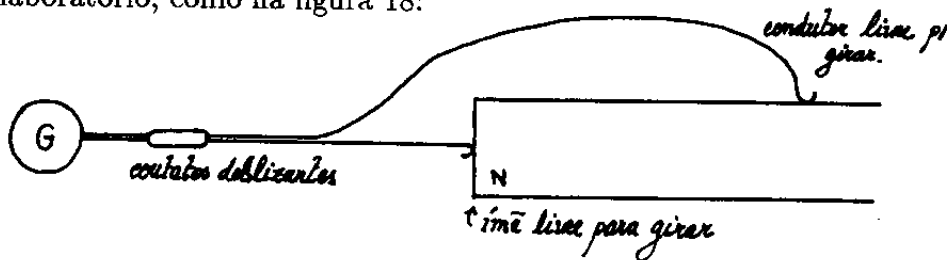


Figura 18: Experimento de indução unipolar de Faraday.

Faraday relata que a força que o magneto provoca não deve ser considerada como girando junto com este, assim como os raios de luz do Sol não giram junto com este em seu movimento de rotação sobre si mesmo ([7], parágrafo 3090). O magneto girando sob ação de suas próprias forças sofreria uma ação sobre seu próprio material condutor (ímã feito de material condutor), produzindo uma polarização que o condutor externo leva ao galvanômetro da bancada.

Nesse último caso Faraday usa uma construção que é equivalente à da figura 15 mas com a modificação de que o disco condutor é o próprio magneto cujo material é condutor.

Devido à questão de o galvanômetro estar sempre parado em relação ao laboratório nas experiências já realizadas, propomos experimentos, dos quais faremos previsões, onde o galvanômetro também pode girar. Consideramos que a questão fundamental envolvida é a da figura 16, onde o movimento relativo entre o ímã e o condutor é o que fundamentalmente interessa na questão da indução unipolar.

Nós estudamos o fenômeno a partir da lei de força de Weber, calculando a força em uma carga livre de algum condutor próximo a um ímã, quando tanto um como o outro podem girar, como na figura 15. Ao calcular esta força estaremos portanto calculando aquela que atua em uma carga livre do galvanômetro ou do disco. A diferença da força, em uma carga livre do disco da que atua em uma do galvanômetro, está na velocidade angular que em geral é diferente para estes dois condutores (uma vez que têm movimentos independentes).

A partir do trabalho de Assis, [15], onde se calculam as forças atuando em uma carga pontual devido a uma casca esférica carregada homoganeamente girando com certa velocidade angular, podemos analisar o caso de um magneto e de uma carga que podem estar em rotação, como uma carga livre do disco e o magneto da figura 17.

Tomemos uma casca esférica de raio R feita de um material isolante, carregada uniformemente com uma carga Q_M ("M", pois adiante faremos do movimento de cascas carregadas, um magneto) fixa na casca, girando com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}_M$ em relação ao laboratório e outra centrada no mesmo ponto, de carga oposta $-Q_M$, raio $R + dR$, girando com $\vec{\omega}_M + \vec{\omega}_n$ em relação ao laboratório, tal que $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_n$ estão na mesma direção.

Na visão do eletromagnetismo clássico estas duas cascas não geram nenhum campo elétrico na região $r < R$ e geram um campo magnético uniforme

nesta região. Para a casca de carga Q_M este campo é, [15]:

$$\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 Q_M \vec{\omega}_M}{6\pi R} \quad (67)$$

onde Q_M é a carga na casca e $\vec{\omega}_M$ sua velocidade angular constante em relação ao laboratório. As duas cascas juntas geram então (supondo $dR \ll R$):

$$\vec{E}(r < R) = 0 \quad (68)$$

e

$$\vec{B}(r < R) = -\frac{\mu_0 Q_M \vec{\omega}_n}{6\pi R} \quad (69)$$

sendo $\vec{\omega}_n$ portanto relacionado com a corrente que produz o campo \vec{B} e $\vec{\omega}_M$ a velocidade de rotação do magneto formado pelas duas cascas.

Uma carga pontual q_1 movendo-se internamente às duas cascas com uma velocidade \vec{v}_1 , em relação ao laboratório vai sofrer então uma força de Lorentz dada por

$$\vec{F} = q_1 \vec{E} + q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 q_1 Q_M}{6\pi R} \vec{v}_1 \times \vec{\omega}_n \quad (70)$$

Panofsky e Phillips, [9] (capítulo 9 neste caso), discutem a situação de condutores que se movem na presença de campo magnético, fazendo correções na maneira de se encarar variações de campo magnético nestas situações, obtendo inclusive termos onde a divergência do campo magnético pode não ser nula. Estudaram o caso de induções unipolares quando o condutor é uma barra retangular que se move na presença de um campo magnético homogêneo e uniforme que é perpendicular a barra condutora, e um galvanômetro é conectado a barra por contatos deslizantes, como mostra a figura 19:

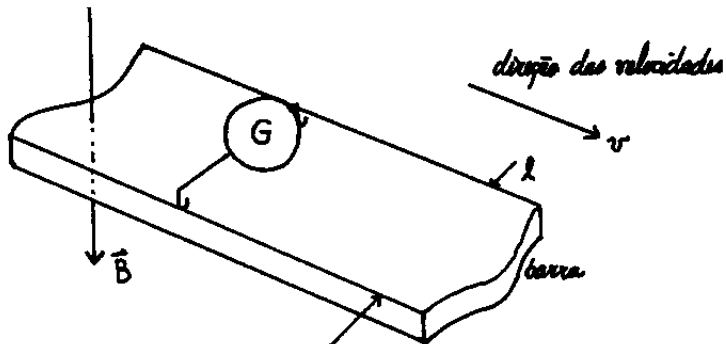


Figura 19: Experimento de indução unipolar considerado por Panofsky e Phillips. Os movimentos são à velocidades constantes.

Nesta situação não há variação aparente do fluxo magnético, como no caso da figura 15. Eles concluem que não há corrente induzida no circuito galvanômetro-barra quando ambos se movimentam com a mesma velocidade, qualquer que seja, em relação à fonte de campo magnético. Seus resultados teóricos são os seguintes (tabela 2):

<u>movimento de</u>			<u>fem prevista no</u> <u>galvanômetro</u>
<u>barra</u>	<u>fonte de \vec{B}</u>	<u>Galvan.</u>	
v	0	0	vBl
0	v	0	0
0	v	v	vBl
v	v	0	vBl
0	0	v	vBl
v	0	v	0

tabela 2.

Estes resultados são equivalentes aos que mostramos a seguir pela eletrodinâmica de Weber, onde estudamos o caso da figura 15. Na eletrodinâmica de Weber, como veremos, este cálculo é bastante simples, mesmo nestes casos.

Do ponto de vista da eletrodinâmica de Weber, [15], uma carga q_1 que tem velocidade \vec{v}_1 e aceleração \vec{a}_1 em relação ao laboratório, dentro de uma das cascas carregadas que gira com velocidade angular ω_M (figura 20):

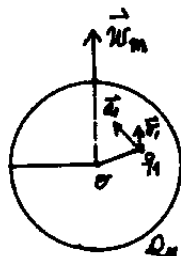


Figura 20: Uma carga q_1 que tem velocidade \vec{v}_1 e aceleração \vec{a}_1 em relação ao laboratório, dentro de uma das cascas carregadas que gira com velocidade angular ω_M .

sofre uma força dada por

$$\vec{F}(\tau_1 < R) = \frac{q_1 Q_M}{12\pi\epsilon_0 c^2 R} [\vec{a}_1 + \vec{\omega}_M \times (\vec{\omega}_M \times \vec{r}_1) + 2\vec{v}_1 \times \vec{\omega}_M + \vec{r}_1 \times \frac{d}{dt}\vec{\omega}_M] \quad (71)$$

Portanto para encontrar as forças que agem em uma carga do condutor devido a um magneto, quando ambos podem girar com certa velocidade em relação ao laboratório, calculamos as forças que agem em q_1 a partir da expressão acima, somando as ações das duas cascas, que geram o campo \vec{B} . Vamos considerar um movimento de rotação da carga q_1 em torno do centro O com velocidade angular $\vec{\omega}_1$ paralelo a $\vec{\omega}_M$ e a $\vec{\omega}_n$. Temos para a casca de carga Q_M (figura 21), com $\frac{d\vec{\omega}_M}{dt} = 0$, $\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$, $\vec{a}_1 = -\omega_1^2 \vec{\rho}_1$:

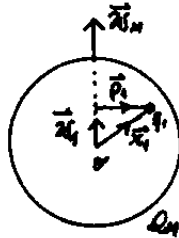


Figura 21: Movimento de rotação da carga q_1 em torno do centro O com velocidade angular $\vec{\omega}_1$ paralela a $\vec{\omega}_M$ e a $\vec{\omega}_n$, dentro uma casca de carga Q_M , com $\frac{d\vec{\omega}_M}{dt} = 0$, $\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$, $\vec{a}_1 = -\omega_1^2 \vec{\rho}_1$.

A força exercida pela casca carregada com Q_M na carga q_1 é dada por:

$$\vec{F}_{QM\text{em}q_1} = -\frac{q_1 Q_M}{12\pi\epsilon_0 c^2 R} (\omega_M - \omega_1)^2 \vec{\rho}_1 \quad (72)$$

e para a casca de carga $-Q_M$ (figura 22):

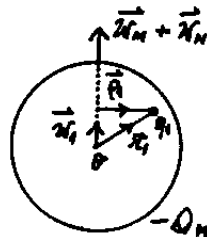


Figura 22: O mesmo que a figura 21 mas para a casca de carga $-Q_M$ girando com velocidade angular $\vec{\omega}_M + \vec{\omega}_n$.

temos a força:

$$\vec{F}_{-QM\text{em}q_1} = -\frac{q_1 Q_M}{12\pi\epsilon_0 c^2 R} [-\omega_1^2 \vec{\rho}_1 - (\omega_M + \omega_n)^2 \vec{\rho}_1 + 2\omega_1(\omega_M + \omega_n)\vec{\rho}_1] \quad (73)$$

sendo ω_n relacionado com a corrente no magneto constituído pelas duas cascas, que produz o campo \vec{B} já calculado para as duas cascas.

O efeito na carga q_1 é $\vec{F}_1 = \vec{F}_{QM\text{em}q_1} + \vec{F}_{-QM\text{em}q_1}$:

$$\vec{F}_1 = -\frac{q_1 Q_M}{12\pi\epsilon_0 c^2 R} [-\omega_n^2 - 2\omega_n(\omega_M - \omega_1)]\vec{\rho}_1 \quad (74)$$

Em (74) ω_n é relacionado com a corrente no magneto que produz \vec{B} , sendo portanto proporcional à velocidade de *drifting* das cargas que em movimento produzem \vec{B} . Em geral $\omega_n^2 \ll \omega_n\omega_M$ ou $\omega_n\omega_1$. Temos então usando (69):

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 Q_M}{6\pi\epsilon_0 c^2 R} [\omega_n(\omega_M - \omega_1)]\vec{\rho}_1 = -q_1 B[\omega_M - \omega_1]\vec{\rho}_1 \quad (75)$$

A indução no disco de metal ($\omega_1 = \omega_D$) quando estiver próximo ao pólo de um magneto, existe somente quando há uma velocidade relativa angular de rotação entre ambos, de acordo com a eletrodinâmica de Weber.

Considerando ainda que o campo \vec{B} (do magneto de velocidade angular ω_M) é uniforme e perpendicular ao disco de raio a e velocidade angular ω_D , podemos calcular a tensão radial no disco como já fizemos na seção anterior, integrando a força por unidade de carga ao longo do raio, obtendo:

$$V = -\frac{B(\omega_M - \omega_D)a^2}{2} \quad (76)$$

que é o mesmo resultado obtido na seção anterior para o caso particular de $\omega_M = 0$ (disco de Faraday). Agora mostramos que a polarização no disco é puramente dependente do movimento relativo entre o disco e o ímã (figura 17).

Quando utilizamos um galvanômetro como na figura 15, temos outro condutor (como o disco) que pode sofrer polarização. Considerando que também o galvanômetro e os fios que fazem contato com o disco estão sob a ação do mesmo campo homogêneo e perpendicular \vec{B} (calculando como antes, supomos o galvanômetro e o disco dentro das cascas carregadas), podemos

prever o que acontece, ou seja, a corrente pelo galvanômetro, quando este também pode girar (proposta que ainda não foi testada experimentalmente).

Consideraremos que as velocidades angulares do disco, ω_D , do magneto, ω_M , e do galvanômetro, ω_G , são constantes e todas no mesmo sentido de rotação em relação ao laboratório.

Mostramos a seguir um quadro prevendo simplesmente quando a corrente pelo galvanômetro é diferente de zero, “*”, ou simplesmente nula, “0”, em função da condição de velocidade diferente de zero, “X”, ou nula, “0” dos componentes: Disco, magneto e galvanômetro. Quando “X” está marcado para ω_D e ω_G , isso quer dizer que ambos giram no mesmo sentido, com a mesma velocidade, ou seja, giram juntos. Usamos somente a equação da força sobre uma carga livre dada pelo magneto para prever os resultados, pois uma carga livre no galvanômetro ou no disco está sujeita a essa força, que depende do movimento relativo entre esta e o magneto. No caso de uma carga nos condutores que compreendem os fios de contato e o galvanômetro,

$$\vec{F}_1 = -q_1 B(\omega_M - \omega_G) \vec{\rho}_1 \quad (77)$$

e no caso de uma carga do disco, figura 23,

$$\vec{F}_1 = -q_1 B(\omega_M - \omega_D) \vec{\rho}_1 \quad (78)$$

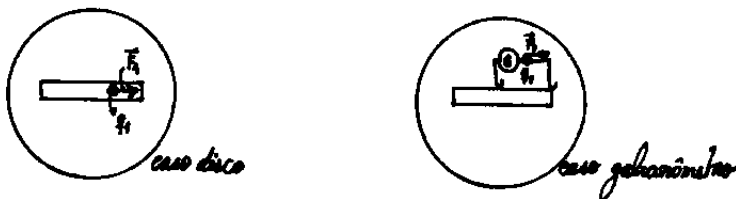


Figura 23: Forças nas cargas livres do disco e do galvanômetro calculadas considerando a ação das cascas carregadas.

Encontramos os seguintes resultados previstos por Weber (tabela 3):

	W_G	W_D	W_M	galvanômetro
1	O	O	O	O
2	O	X	O	*
3	O	O	X	O
4	X	O	O	*
5	X	X	O	O
6	X	O	X	*
7	O	X	X	*
8	X	X	X	O

tabela 3.

Dos experimentos propostos, apenas os de número 1, 2, 3 e 7 já foram realizados ($\omega_G = 0$), concordando com o previsto por Weber. Os resultados previstos 4, 5, 6 e 8 ainda não foram testados experimentalmente.

De acordo com os resultados obtidos sobre a força nas cargas livres, notamos que há circulação de corrente pelo galvanômetro quando há movimento relativo entre o ímã e um condutor, podendo ser este o galvanômetro ou o disco. Quando o disco e o galvanômetro giram juntos (formando um condutor único) em relação ao ímã, o registro no galvanômetro é nulo pois ambos, galvanômetro e disco, estão sob ação de uma força igual sobre suas cargas livres. Se $\omega_G = \omega_D$ (casos 3, 5 e 8), as forças sobre as cargas livres nas duas partes do circuito são iguais em intensidade, porém não concordando no sentido ao longo do circuito (figura 24), portanto não havendo circulação de corrente:

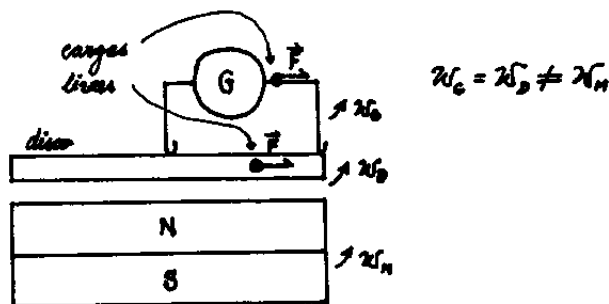


Figura 24: No caso de o disco e o galvanômetro terem a mesma velocidade angular as forças sobre as suas cargas livres são iguais, de modo que não há circulação de corrente no circuito galvanômetro - disco, pois a força líquida ao longo do circuito é nula.

Sempre quando temos movimento relativo entre o ímã e um dos condutores, estando o outro parado em relação ao ímã, temos circulação de corrente, como nos casos 2, 4, 6, e 7. Nesses casos as cargas livres do condutor que se movem relativamente ao ímã sofrem uma força diferente de zero, enquanto que as do condutor que não têm movimento relativo a ele não sofrem força. Como o circuito é formado pelos dois condutores em série, um com uma força sobre suas cargas livres diferente daquela sobre as cargas livres do outro, temos circulação de corrente (figura 25):



Figura 25: A corrente circula pelo galvanômetro quando há uma força líquida diferente de zero ao longo do circuito galvanômetro - disco, ou seja, quando a força sobre as cargas livres desse circuito age hora na parte referente ao disco, hora na parte referente ao galvanômetro.

Parte do assunto tratado nesta seção, como as previsões acima se encontram na referência [16], um artigo sobre indução unipolar e eletrodinâmica de Weber abordando estes pontos, mostrando a concordância das previsões da eletrodinâmica de Weber e os experimentos já feitos, e ainda sugestões e previsões para novos experimentos.

Podemos concluir esta seção ressaltando a questão fundamental da polarização (proposta na figura 17), que de acordo com a lei de Weber é explicada com o movimento relativo entre o cilindro condutor e o cilindro magnético. No caso de se usar um galvanômetro para medir tal polarização chamamos a atenção para a indução que ocorre neste, como vimos, devido ao movimento relativo em relação ao magneto.

5. CONCLUSÕES

Nas primeiras seções desta Tese consideramos o problema da indução de correntes a partir da lei de força de Weber. Encontramos uma expressão para a *fem* sobre os circuitos onde mostramos que quando se aplica a hipótese de Fechner das correntes obtém-se a lei da indução de Faraday. No caso geral, não fazendo hipóteses sobre as correntes, encontramos termos adicionais àqueles que levam à lei da indução de Faraday. A partir de algumas situações particulares onde estes termos são nulos e da comparação dos termos de onde segue a lei de Faraday, concluímos que a relevância destes últimos é muito pequena em termos práticos. O cálculo da *fem* a partir da energia indica que estes termos adicionais são de fato nulos, pois se obtém a lei da indução de Faraday no caso geral (sem hipótese sobre as correntes) por este método.

Estudamos uma situação típica que alguns autores como Feynman, [5], afirmam ser uma excessão à regra do fluxo, que é equivalente à lei de Faraday. Concluímos que não há excessão alguma, desde que aplicamos a mesma regra do fluxo para resolver o problema.

A questão da indução unipolar foi abordada e mostramos que a partir da eletrodinâmica de Weber fica claro que a lei de indução deduzida, ou seja, a lei de Faraday, é sempre válida nas situações de indução. A indução nos casos próximos a um pólo de um magneto, quando não há variação aparente do fluxo magnético, que tanto intriga, é explicada pela lei de Weber de modo direto, mostrando que esta depende exclusivamente do movimento relativo entre os condutores e o magneto mesmo nas situações simétricas como a da figura 16. A dificuldade em aplicar a lei de indução de Faraday por alguns autores que estudaram o problema se deve à dificuldade que existe em se enxergar uma variação de fluxo nestas situações, como mostramos no exemplo particular de indução unipolar que é o disco de Faraday. A partir do cálculo da força sobre as cargas livres dos condutores na presença de campos magnéticos e pela característica fundamental da eletrodinâmica de Weber de ser totalmente relacional quanto à interação entre as partículas, é que foi possível descrever o fenômeno da indução unipolar com simplicidade.

Concluímos que a partir da eletrodinâmica de Weber aplicada a circuitos de corrente, a lei de indução de Faraday é uma consequência e que é válida para todas as situações de indução de correntes. Conseguimos, portanto

deduzir a lei de indução a partir de uma eletrodinâmica puramente relacional, mostrando que quando escrita na forma de uma força integrada ao longo dos circuitos apresenta uma solução bastante simples aos problemas de indução comum e unipolar. Esta força é exatamente a força de Weber calculada para estas situações.

REFERÊNCIAS

1. A. K. T. Assis, *Canadian Journal of Physics*, volume **70**, páginas 330 a 340 (1992), "Deriving gravitation from electromagnetism."
2. A. K. T. Assis, *Curso de Eletrodinâmica de Weber* (Notas de Física IFGW número 5, Setor de Publicações do Instituto de Física da UNICAMP, Campinas, 1992).
3. J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover, New York, 1954), volume 2, capítulo 23.
4. J. P. Wesley, *Foundations of Physics Letters*, volume **3**, páginas 443 a 469 (1990), "Weber electrodynamics, part I: general theory, steady current effects."
5. R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison - Wesley, Reading, 1964), volume 2, seção 17-2.
6. J. P. Wesley, *Foundations of Physics Letters*, volume **3**, páginas 471 a 490 (1990), "Weber electrodynamics, part II: unipolar induction, Z - antenna."
7. M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity* (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Great Books of the Western World, volume 45.
8. A. K. T. Assis, *Physics Letters A*, volume **136**, páginas 277 a 280, (1989), "Weber's law and mass variation."
9. W. K. Panofsky e M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison - Wesley Reading, 1955), capítulo 22, página 344.
10. P. J. Scanlon, R. N. Henriksen e J. R. Allen, *American Journal of Physics*, volume **37**, páginas 698 a 708 (1969), "Approaches to electromagnetic induction."
11. E. H. Kennard, *Philosophical Magazine*, volume **23**, páginas 937 a 941, (1912), "Unipolar induction."

12. E. H. Kennard, *Philosophical Magazine*, volume **33**, páginas 179 a 190, (1917), "Unipolar induction: another experiment and its significance as evidence for the existence of the aether."
13. A. I. Miller, *Annals of Science*, volume **38**, páginas 155 a 189, (1981), "Unipolar induction: a case study of the interaction between science and technology."
14. F. J. Müller, *Galilean Electrodynamics*, volume **1**, páginas 27 a 31, (1990), "Unipolar induction experiments and relativistic electrodynamics."
15. A. K. T. Assis, *Communications of Theoretical Physics*, volume **18**, páginas 475 a 478, (1992), "Centrifugal electrical force."
16. A. K. T. Assis and D. S. Thober, "Unipolar induction and Weber's electrodynamics," submetido para publicação.
17. F. W. Grover, *Inductance Calculations* (D. Van Nostrand Company, New York, 1946), capítulo 11, páginas 77 a 79.