

EFEITO DE UM FLUXO DE DIFUSÃO
NOS MODOS KINK INTERNO
RESISTIVO E DE
RECONEXÃO

por

WALTAIR VIEIRA MACHADO

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Campinas, março de 1980

*Ao Deus desconhecido, de quem procede a
inconfundível sabedoria, aos meus pais
e família, pelo valoroso incentivo, aos
inestimáveis amigos e ao maravilhoso po
vo brasileiro a quem tenho amado.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Ricardo Galvão, primeiramente pelo amigo que nele tenho encontrado, bem como à sua certa, segura e dedicada orientação e ainda, pelo seu incentivo bem dosado e em momentos oportunos. Muito obrigado, Galvão!

Agradeço ao professor Paulo Sakanaka pelo apoio a mim dispensado. Gostaria de salientar a sua dedicação e inestimável ajuda na preparação final deste trabalho, principalmente na parte numérica e dissertação definitiva. Os meus agradecimentos , Paulo !

Aos meus colegas e professores do grupo de Física de Plasma, agradeço a ajuda adequada e o ambiente propício, importante para o trabalho realizado.

Sou grato a todos que de forma direta ou indireta colaboraram comigo nesta obra.

Agradeço o apoio financeiro fornecido pelo CNPq, FINEP e FNDCT, bem como a Universidade do Amazonas, quanto ao apoio moral e incentivo recebido dos colegas de trabalho; e a compreensão do Reitor professor Hamilton Botelho Mourão.

Não estaria completo o meu agradecimento, se deixasse de reconhecer publicamente, a preciosidade daqueles que me geraram, que tão sabiamente nos educaram, a meus irmãos e a mim . Muito obrigado a vocês queridos que me sustentaram com seus votos de breve vitória e preces, desafiando-me mediante a esperança de sucesso na corrida em busca do conhecimento e porque não

dizer, mediante um certo orgulho, dia a dia sedimentados pelos passos dados até então. No entanto, a impressão que tenho agora, olhando o longínquo horizonte de amanhã é que ele é um pouco mais extenso do que o era ontem ao anoitecer. Não espero apenas a recompensa do saber pelo saber simplesmente, porque é enfado de espírito, mas firmo-me no desejo de que a "sabedoria dos homens" e os conhecimentos adquiridos pela humanidade, lhe venham ser de bom propósito e menos usados como forma de subjugação de um para com outros. Lembro-me então daquele ensinamento... confia no Senhor de todo o teu coração e não te estribes no teu próprio entendimento ... Prov. 3:5.

RESUMO

Até recentemente, os trabalhos sobre instabilidades resistivas têm sistematicamente considerado um sistema em equilíbrio estático no qual uma pequena perturbação é introduzida. Este modelo não é inteiramente auto-consistente, porque, em virtude da resistividade finita do plasma, o fluido tem uma velocidade de difusão resistiva de equilíbrio dada por $V_R = r_0 / \tau_R$ (ou o que é equivalente, $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ no equilíbrio). O efeito de V_R não se processa na escala de tempo τ_R , como se argumentava, e sim na escala de tempo necessária para o fluido atravessar a camada resistiva, ou seja, δ / V_R . Em outras palavras, V_R pode ser desprezado somente para modos nos quais $\gamma \delta / V_R \gg 1$. A inclusão de V_R na análise de modos resistivos tais que $\gamma \sim V_R / \delta$ tende a estabilizar o modo.

A análise do efeito de $V_R \neq 0$ na estabilidade de modos resistivos, tem sido até o presente somente restrita a modos, para os quais a perturbação está localizada no entorno da camada resistiva. O trabalho desenvolvido nesta tese estende esta análise para outros modos resistivos para os quais o efeito de $V_R \neq 0$ ainda não havia sido estudado. Em particular, analisaremos o modo Kink Interno Resistivo e o modo de Reconexão.

Mostramos com este trabalho, que o Modo Kink Interno não é afetado pelo fluxo de difusão. No entanto o Modo de Reconexão é atenuado pela presença de um fluxo difusivo de velocidade. A razão de crescimento do modo de Reconexão, quando

se considera $V_R \neq 0$ fica reduzida cerca de 35% em relação ao valor encontrado para a análise do modo, usando o modelo de equilíbrio estático.

ABSTRACT

Until recently works on resistive instabilities has systematically considered a system in static equilibrium on which a small perturbation is introduced. This model is not completely self-consistent, because, due to the finite plasma resistivity the fluid has an equilibrium resistive diffusion velocity given by $V_R = r_0/\tau_R$ (in another words, $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ in equilibrium). The effect of V_R does not occur in the time scale of τ_R , as usually given, but in the time scale necessary for the fluid to go through the resistive layer, i. e., δ/V_R . In another words, V_R can be neglected only for modes in which the growth rate $\gamma \gg V_R/\delta$. An inclusion of V_R in the analysis of resistive modes, such that $\gamma \sim V_R/\delta$, tends to stabilize the mode.

Up to now, the analysis of the effect of $V_R \neq 0$ in the stability of resistive modes has been restricted to modes for which the perturbation is localized in the neighborhood of the resistive layer. In this work this analysis is extended to other resistive modes for which the effect of $V_R \neq 0$ is not yet been studied. In particular, we will analyse the resistive internal kink mode and the reconnection mode.

We show that the internal kink mode is not affected by the diffusion flux. However the reconnection mode is attenuated by the presence of a velocity flux diffusion. When we consider $V_R \neq 0$, the growth rate of the reconnection mode is reduced by about 35% relative to the static equilibrium case.

ÍNDICE

	páginas	
I	INTRODUÇÃO	1
II	DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS	
	1 - MHD com Resistividade	9
	2 - Equilíbrio	12
	3 - Equações Perturbadas	15
	4 - Região MHD Ideal	18
	5 - Camada Resistiva	23
III	ANÁLISE DO MODO KINK INTERNO RESISTIVO E DE RECONEXÃO	
	1 - Discussão Inicial	28
	2 - Modo Kink Interno Resistivo	29
	3 - Modo de Reconexão	30
	4 - Casamento Assintótico	32
	5 - Soluções Analíticas da Equação de Auto-valor para o Modo de Reconexão	36
	6 - Solução Numérica da Equação de Auto-valor para o Modo de Reconexão e Resultados	43
	7 - Figuras	50
	8 - Tabelas	54
IV	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	55
V	APÊNDICES	
	A -	58
	B -	84
	C	86
VI	REFERÊNCIAS	94

I - INTRODUÇÃO

Atualmente o esquema mais promissor para a realização de um reator de fusão termonuclear controlada é o sistema de confinamento magnético. Neste sistema uma coluna de plasma de alta densidade ($n \geq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) e de alta temperatura ($T \geq 10 \text{ keV}$) é mantida em equilíbrio, sem contacto com paredes materiais, por campos magnéticos criados por bobinas externas ao plasma e/ou por correntes que circulam no mesmo. É necessário, no entanto, manter este plasma confinado por tempos razoavelmente longos, da ordem de 1 sec. (com isto se quer dizer que o tempo característico de decaimento das grandezas características do plasma, por exemplo, a temperatura, deve ser maior que 1 sec.). No entanto, como uma coluna de plasma confinada magneticamente não é um sistema em equilíbrio termodinâmico, várias instabilidades tendem a ser desenvolver no plasma, provocando uma rápida destruição do equilíbrio, magnetohidrodinâmico num tempo muito menor do que o necessário para a fusão termonuclear. Por isso o estudo de plasmas confinados magneticamente tem sido em grande parte relacionado com instabilidades que podem se desenvolver num determinado sistema e esquemas para suprimi-las.

As instabilidades mais perigosas que podem destruir um sistema de confinamento magnético são as chamadas instabilidades magnetohidrodinâmicas (MHD) ideais. Estas instabilidades se desenvolvem em escalas de tempo da ordem de microsegundos e levam a uma violenta destruição do delicado estado de

equilíbrio MHD. As instabilidades MHD ideais são assim denominadas porque elas podem ser descritas por um sistema de equações em que o plasma é considerado um fluido condutor perfeito, ou seja, com resistividade nula, imerso num campo magnético de equilíbrio. Este modelo permite construir um princípio variacional extremamente poderoso para o estudo das instabilidades MHD^(1,2). Utilizando-se este princípio, é possível atualmente se fazer um estudo criterioso dos sistemas de equilíbrio MHD mais estáveis com respeito às instabilidades MHD, determinar o espectro das oscilações características do sistema e projetar sistemas de confinamento em que só as instabilidades menos perigosas para o equilíbrio possam ocorrer^(3,4,5).

Naturalmente um modelo mais apropriado para a descrição de plasmas termonucleares tem que incluir efeitos dissipativos, tais como, em particular, a resistividade finita do plasma. A difusão causada pela resistividade η do plasma se processa numa escala de tempo muito lenta dada por

$$\tau_R = \frac{4\pi r_0^2}{\eta c^2}$$

onde r_0 é uma dimensão característica da coluna de plasma e c a velocidade da luz. Por outro lado as instabilidades MHD tem um crescimento exponencial num tempo característico dado por

$$\tau_H = \frac{r_0}{V_A}$$

onde $V_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ é a velocidade de Alfvén, B o campo magnético e ρ a densidade do plasma. Como $\epsilon \equiv \tau_H/\tau_R$ é um número

extremamente pequeno, ou seja $\epsilon \sim 10^{-5}$, 10^{-6} , para plasmas termonucleares, se acreditava inicialmente que, uma vez eliminada as instabilidades MHD ideais, os efeitos da resistividade finita do plasma ocorreriam numa escala de tempo muito lenta para destruir o equilíbrio MHD.

No entanto, foi mostrado por Furth, Killeen e Rosenbluth⁽⁶⁾ que a resistividade do plasma permite que haja um movimento relativo entre o fluido e o campo magnético, ocasionando instabilidades com uma razão de crescimento dada por

$$\gamma \sim \left(\frac{\tau_H}{\tau_R}\right)^\alpha \tau_H^{-1}$$

onde α é um número entre 0 e 1. Portanto estas instabilidades resistivas são mais lentas que as instabilidades MHD ideais mas bem mais rápidas do que a difusão resistiva do plasma. A importância das instabilidades resistivas é que elas ocasionam o rompimento de linhas de força e posterior reconexão, formando ilhas magnéticas dentro do plasma. Estas ilhas se deslocam para o exterior do plasma, provocando um rápido transporte de energia⁽⁷⁾. Por isso as instabilidades resistivas são denominadas "tearing modes". Os "tearing modes" são extremamente importantes para explicar não só fenômenos que ocorrem em plasmas de laboratório^(8,9), mas também fenômenos astrofísicos, tais como manchas solares⁽¹⁰⁾ e a dinâmica da magnetosfera terrestre⁽¹¹⁾.

O estudo analítico dos modos resistivos são feitos em geral empregando-se a teoria de camada limite^(6,12,13). Co

mo a resistividade do plasma é pequena e a razão de crescimento do modo resistivo é proporcional a uma certa potência positiva da resistividade η e γ são inicialmente desprezados e as equações MHD ideais são resolvidas para uma perturbação no entorno do estado de equilíbrio MHD. A solução não trivial destas equações que satisfaz condições de contorno apropriadas no centro e na superfície da coluna de plasma tem, em geral, um ou vários pontos singulares dentro do plasma onde a solução diverge. No entorno destes pontos é considerada uma pequena camada resistiva de espessura $\delta \ll r_0$ onde η e γ não são nulos. Todas as grandezas dentro da camada resistiva são re-escaladas de modo que os termos proporcionais a η se tornem da mesma ordem que os outros relevantes nas equações que descrevem o sistema perturbado. O sistema de equação resultante é então solucionado com a condição de contorno de que a solução tenda assintoticamente para a solução das equações MHD ideais fora da camada resistiva. O auto-valor γ é determinado pela condição de casamento assintótico das soluções nestas diferentes regiões.

Até recentemente, os trabalhos sobre instabilidades, têm sistematicamente considerado um equilíbrio estático em torno do qual uma pequena perturbação é introduzida. Este modelo não é inteiramente auto-consistente porque em virtude da resistividade finita do plasma, o fluido tem uma velocidade de difusão resistiva de equilíbrio dada por $V_R = r_0/\tau_R$. (ou, o que é equivalente, $\partial\beta/\partial t \neq 0$ no equilíbrio). O argumento para desprezar V_R é que os modos resistivos tem uma escala de tempo muito mais rápida do que τ_R , ou seja $\gamma \tau_R \gg 1$, e portan

to o efeito de uma pequena velocidade de difusão não é importante. No entanto, Dobrott, Prager e Taylor⁽¹⁴⁾ mostraram recentemente que o efeito de V_R não se processa na escala de tempo τ_R , mas sim na escala de tempo necessária para o fluido atravessar a camada resistiva, ou seja, δ/V_R . Em outras palavras, V_R pode ser desprezado somente para modos tais que $\gamma\delta/V_R \gg 1$ ⁽¹⁴⁾. Segundo a referência (14) a inclusão de V_R na análise de modos resistivos tais que $\gamma \sim V_R/\delta$ tende a estabilizar o modo. Estes resultados iniciais foram confirmados por trabalhos posteriores mais detalhados tanto numéricos⁽¹⁵⁾, sem utilizar a teoria de camada limite, como analíticos^(16,17).

A análise do efeito de V_R na estabilidade de modos resistivos tem sido até o presente, restrita somente a modos em que a perturbação está localizada no entorno da camada resistiva. O trabalho desenvolvido nesta tese estende esta análise para outros modos resistivos em que o efeito de $V_R \neq 0$ ainda não havia sido estudado. No entanto, para explicar em mais detalhe o trabalho aqui desenvolvido e sua relação com trabalhos anteriores, se faz necessário discutir inicialmente a geometria do sistema de equilíbrio e a topologia dos modos resistivos.

A configuração de equilíbrio considerado é uma coluna de plasma cilíndrica infinita e periódica de raio a e período $L = 2\pi R$. No plasma circula uma corrente longitudinal I_p na direção do campo B_z criado externamente. A corrente de plasma cria um campo poloidal B_θ , conforme mostrado na Figura 1 (a). Este sistema é um modelo de uma coluna toroidal de plasma de raio maior R e raio menor a , como em um tokamak⁽¹⁸⁾. Nos sis-

temas experimentais de interesse o campo poloidal é muito menor que o campo longitudinal, ou melhor, $B_\theta/B_z \sim a/R \ll 1$. O equilíbrio é considerado simétrico de modo que todas as grandezas de equilíbrio só dependem da coordenada radial r . Então as perturbações no entorno destes equilíbrio podem ser compostas em componentes de Fourier nas coordenadas θ e z ou seja $\tilde{X}(r, \theta, z, t) = \tilde{X}(r) \exp [i(m\theta + \gamma t)]$, onde \tilde{X} representa qualquer grandeza perturbada. Será mostrado posteriormente que a solução das equações MHD ideais é singular na superfície $r = r_0$, onde o valor da grandeza $q(r)$, definida por

$$q(r) = \frac{rB_z}{RB_\theta}$$

é igual a m , ou seja, $q(r_0) = m$. A perturbação tende a formar uma estrutura helicoidal dentro da coluna de plasma, conforme indicado na Figura 1(a). A estrutura radial dos modos resistivos com número poloidal $m > 2$ é, no entanto, bastante diferente dos modos com número poloidal $m=1$. Para os primeiros, a perturbação tende a ser localizada, formando ilhas magnéticas no entorno da superfície ressonante $r=r_0$. Isto é indicado na Figura 1(c) para os modos $m=2$. Nesta figura ξ representa a componente radial do deslocamento do fluido associado com a instabilidade. Para os modos com $m=1$, a perturbação é praticamente constante na região dentro da superfície $r=r_0$. Neste caso certas aproximações que são utilizadas na análise dos modos com $m \geq 2$ não se aplicam. Na realidade os cálculos apresentados no artigo original de Furth, Killeen e Rosenbluth⁽⁶⁾ sobre modos de instabilidade resistivos, só são válidos para modos com $m \geq 2$. Os modos resistivos com $m=1$ só foram estudados re

centemente^(19,20). A análise dos efeitos de $V_R \neq 0$ sobre os modos resistivos apresentados nas referências (14), a (17) também só é válida para modos com $m \geq 2$. O objetivo desta tese é estender esta análise para os modos com $m=1$ porque, estes modos são extremamente importantes para explicar as chamadas mini-disrupções em tokamaks^(21,22).

Existem dois modos resistivos que podem ser excitados com o número poloidal $m=1$, o modo kink interno resistivo⁽¹⁹⁾ e o modo de reconexão⁽²⁰⁾. Estes dois modos diferem pela estrutura radial do deslocamento perturbado, dentro da camada resistiva conforme indicado na Figura 2(a) e 2(b) e pelos valores da razão de crescimento e espessura da camada resistiva. Para o modo kink interno resistivo $\gamma \sim \epsilon^{1/3} \tau_H^{-1}$ e $\delta \sim \epsilon^{1/3} r_0$ para o modo de reconexão $\gamma \sim \epsilon^{3/5} \tau_H^{-1}$ e $\delta \sim \epsilon^{2/5} r_0$. De acordo com o critério de Dobrott, Prager e Taylor, o efeito de $V_R \neq 0$ só é importante para modos tais que $\gamma \delta / V_R \sim 1$. Embora este critério não tenha sido derivado explicitamente para os modos $m=1$, será mostrado neste trabalho que também para estes, o critério é válido. Utilizando-se os valores de γ e δ dados acima, verifica-se que para o modo kink interno resistivo $\gamma \delta / V_R \sim \epsilon^{-1/3} > 1$ e para o modo de reconexão $\gamma \delta / V_R \sim 1$. Portanto a velocidade de difusão resistiva V_R só deve influir na razão de crescimento do segundo modo. Este resultado será verificado pela análise mais rigorosa a ser apresentada nos capítulos seguintes.

Deduziremos as equações básicas que descrevem o nosso sistema no capítulo II. Na seção (II-2) faremos um breve estudo sobre o equilíbrio do sistema. Na seção (II-3) consideraremos as perturbações e trataremos o problema em duas regiões dis

tintas. Uma região que é bem descrita pelas equações de MHD (II-4), e uma outra região resistiva no entorno do ponto singular r_0 onde $q(r_0) = 1$ e $F(r_0) = 0$ seção (II-5)

No capítulo III analisaremos especificamente os modos de instabilidade Kink Interno Resistivo e o modo de Reconexão. seção (III-2) e seção (III-3). Na seção (III-4) estudaremos o casamento assintótico das soluções encontradas para o modo de Reconexão nas duas regiões distintas do plasma. Estudaremos na seção (III-5) as soluções analíticas da equação de auto-valor - para o modo de reconexão e a solução numérica da mesma equação na seção (III-6). Discutiremos os resultados encontrados para o modo de reconexão na seção (III-7). Finalmente, faremos nossas apreciações, conclusões e sugestões para trabalhos futuros, no capítulo IV.

CAPÍTULO II

DEDUÇÕES DAS EQUAÇÕES BÁSICAS

II-1 MHD COM RESISTIVIDADE

II-2 EQUILÍBRIO

II-3 EQUAÇÕES PERTURBADAS

II-4 REGIÃO MHD IDEAL

II-5 CAMADA RESISTIVA

Consideremos uma coluna de plasma cilíndrica de comprimento $L = 2\pi R$, conforme mostrado na Figura 1(a). O campo magnético de equilíbrio é dado por $\vec{B}_0(r) = B_{0\theta}(r) \hat{\theta} + B_{0z}(r) \hat{z}$. Vamos supor um equilíbrio estacionário com uma velocidade de difusão $\vec{V}(r) = V_0 \hat{r}$, mantida por fontes apropriadas. Tanto o equilíbrio como as perturbações em torno do mesmo, serão descritas pelas equações MHD resistivas⁽²³⁾, ou seja:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2-2)$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2-4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2-5)$$

Nestas equações ρ é a densidade do plasma, \vec{V} a velocidade do fluido, \vec{J} a densidade de corrente do plasma p , a pressão cinética que é suposta aqui como uma grandeza escalar, \vec{E} o campo elétrico, \vec{B} o campo magnético, η a resistividade do plasma, c a velocidade da luz, e $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ é a derivada convectiva.

Todas estas equações estão escritas no sistema C.G.S

não racionalizado. As condições de validade destas equações são discutidas em detalhe na referência (23). Além destas equações, vamos supor que os deslocamentos do plasma são incompressíveis isto é

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2-6)$$

Esta hipótese permite simplificar um pouco a álgebra necessária para obter as equações perturbadas. Pode-se mostrar rigorosamente que esta hipótese é válida para a análise de modos cuja fonte de energia livre é a corrente que circula no plasma, como os modos aqui considerados⁽⁶⁾. Vamos também supor que a resistividade do plasma é constante, eliminando desta forma modos resistivos de menor importância que são ocasionados pelo gradiente da resistividade⁽⁶⁾.

O sistema de equações (2-1) a (2-6) pode ser simplificado consideravelmente. Inicialmente utilizamos a lei de Ampère, equação (2-4), para substituir a densidade de corrente \vec{J} nas equações (2-1) e (2-3) pelo rotacional do campo magnético \vec{B} . Em seguida notamos que como os modos a serem estudados são incompressíveis, equação (2-6), o gradiente da pressão não é relevante para a dinâmica dos mesmos. Desta forma, eliminamos ∇p da equação (2-1) aplicando à mesma, o operador rotacional $\nabla \times$. Finalmente, substituímos o campo elétrico a partir da lei de Ohm, (2-3), na lei de Faraday, equação (2-2), para obter uma equação de difusão para o campo magnético. Então o sistema de equações (2-1) a (2-6) se reduz a

$$\nabla \times \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \frac{\eta c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \quad (2-8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2-9)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2-10)$$

São seis as variáveis independentes deste sistema, as três componentes de \vec{V} e as três componentes de \vec{B} . Portanto somente as duas primeiras equações (2-7) e (2-8) são necessárias para determinar a solução do sistema. As equações (2-9) e (2-10) tem um papel de condições iniciais, porque pode-se mostrar que elas foram satisfeitas pelas soluções das equações (2-7) e (2-8) em $t = 0$, elas também o serão para $t > 0$ ⁽²³⁾.

A seguir vamos considerar as grandezas \vec{V} e \vec{B} como sendo dadas pelo valor de equilíbrio mais uma pequena perturbação em torno do mesmo, ou seja,

$$\vec{V}(r, \theta, z, t) = \vec{V}_0(r) + \vec{V}_1(r, \theta, z, t); |\vec{V}_1| \ll |\vec{V}_0| \quad (2-11)$$

$$\vec{B}(r, \theta, z, t) = \vec{B}_0(r, t) + \vec{B}_1(r, \theta, z, t); |\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0| \quad (2-12)$$

A densidade do fluido, ρ , é considerada uniforme e constante porque o gradiente e perturbação da densidade, não são importantes para os modos aqui considerados ^(6,14,15). Substituindo as equações (2-11) e (2-12) nas equações (2-7) a (2-10), e desprezando os termos de segunda ordem, obtemos as equações de equilíbrio e as equações perturbadas, que são analisadas nas seções seguintes.

As equações de ordem zero são essencialmente as equações (2-7) e (2-10) com $\frac{\partial V_0}{\partial t} = 0$. No entanto vamos também supor, que o equilíbrio é mantido em estado estacionário por fontes apropriadas, ou seja, $\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = 0$. Esta hipótese não restringe a validade de nossos resultados, porque o efeito de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ só é importante na camada resistiva. Desta forma esta modificação pode ser incorporada, efetuando-se os cálculos para a camada resistiva em um referencial onde $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ localmente. O referencial apropriado tem velocidade $-\vec{V}_0$ e portanto, os resultados a serem obtidos na análise das equações perturbadas continuarão igualmente válidas para este caso⁽¹⁴⁾.

Assim, as equações que descrevem o equilíbrio são:

$$\rho_0 \nabla \times [(\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_0] = \frac{1}{4\pi} \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0] \quad (2-13)$$

$$\nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) = \frac{n c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_0) \quad (2-14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (2-15)$$

$$\nabla \cdot \vec{V}_0 = 0 \quad (2-16)$$

Conforme mencionamos na introdução deste capítulo, os campos de equilíbrio são considerados da forma:

$$\vec{V}_0 = V_0(r) \hat{r} \quad (2-17)$$

$$\vec{B}_0 = B_{0\theta}(r) \hat{\theta} + B_{0z}(r) \hat{z} \quad (2-18)$$

Para estes campos as equações (2-13) a (2-15) são trivialmente satisfeitas. A equação (2-16) fornece então a expressão para V_0

$$V_0 = \frac{A}{r} \quad (2-19)$$

onde A é uma constante. Como V_0 é a velocidade de difusão resistiva, a constante A é proporcional à resistividade η . Esta velocidade diverge em $r = 0$, o que indica simplesmente que é necessário colocar uma fonte na origem, para manter o equilíbrio em regime estacionário. Da equação (2-14) obtemos então as equações para as componentes do campo magnético, ou seja:

$$\frac{\eta c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{0\theta} - \frac{\partial}{\partial r} (V_0 B_{0\theta})) \right) = 0 \quad (2-20)$$

$$\frac{\eta c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_0 B_{0z}) \right) = 0 \quad (2-21)$$

Estas equações são integradas sem dificuldades. As soluções possíveis são:

$$B_{0\theta} = b_1 r, \quad B_{0z} = b_2 c \quad (2-22)$$

$$B_{0\theta} = b_1 r \left(\frac{4\pi A}{\eta c^2} - 1 \right), \quad B_{0z} = b_2 r \frac{4\pi A}{\eta c^2} \quad (2-23)$$

onde,

b_1 e b_2 são constantes de integração ajustáveis às condições de contorno apropriadas. A solução (2-22) corresponde a uma coluna de plasma com uma densidade de corrente uniforme, e a solução (2-23) corresponde a um equilíbrio especial, con-

sistente com uma difusão estacionária.

A forma particular do equilíbrio não é, no entanto, importante para a análise das instabilidades resistivas. Portanto os resultados a serem obtidos são, em princípio, válidos para equilíbrios mais gerais do que os representados pelas equações (2-22) e (2-23)⁽¹⁶⁾.

As equações perturbadas de primeira ordem correspondentes às equações (2-7) a (2-10) são dadas por:

$$\rho_0 \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_0 + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 \right] = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \equiv \nabla \times [\vec{V}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{B}_0] - \frac{\eta c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) \quad (2-25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (2-26)$$

$$\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (2-27)$$

Este sistema de equações pode ser reduzido a duas equações diferenciais ordinárias para as componentes radiais das perturbações V_{1r} e B_{1r} . O tratamento algébrico correspondente é bastante longo e está, portanto, desenvolvido no Apêndice A. As grandezas perturbadas são decompostas em componentes de Fourier nas direções θ e z , ou seja,

$$\vec{V}_1(r, \theta, z, t) = \vec{V}_1(r) \exp [i(m\theta + kz) + \gamma t] \quad (2-28)$$

$$\vec{B}_1(r, \theta, z, t) = \vec{B}_1(r) \exp [i(m\theta + kz) + \gamma t] \quad (2-29)$$

Portanto o comprimento de onda na direção longitudinal é dado por $\lambda = 2\pi/k$. Naturalmente como o nosso sistema de equilíbrio (coluna periódica de período $L = 2\pi R$), é um mode-

lo para um sistema toroidal de raio maior R , um número inteiro n de comprimento de onda tem que estar contidos em um período do do sistema, ou seja, $2\pi R = n\lambda$

Desta forma nós obtemos que:

$$k = n/R$$

Experimentalmente é verificado que só os modos com longo comprimento de onda (pequeno valor de n) são perigosos para a destruição do equilíbrio; em particular $|n|=1$. Neste trabalho nós vamos considerar somente $|n|=1$. Por outro lado, vamos simular sistemas toroidais de grande razão de aspecto, isto é, $R/a \gg 1$. Isto implica que

$$ka \ll 1 \quad (2-31)$$

Esta quantidade é utilizada como um parâmetro pequeno de comparação, para simplificar os cálculos apresentados no apêndice A. Em outras palavras, consideramos neste trabalho somente modos com longos comprimentos de onda, comparados com o raio menor da coluna do plasma, a . Assim o sistema de equação resultante (equações (A-58), (A-61) e (A-64)

$$\frac{dr^2}{dr} V_0 \frac{d^2 V_{1r}}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d V_{1r}}{dr} + 3 \frac{d}{dr} r V_0 \frac{d V_{1r}}{dr} - \frac{i r F}{4\pi \rho_e} \left\{ \frac{1}{r} \frac{dr}{dr} \frac{d}{dr} (r B_{1r}) - \frac{B_{1r}}{r F} \left[H + \frac{dr}{dr} \frac{d(rF)}{dr} \right] \right\} \quad (2-32)$$

$$\gamma B_{1r} = i F V_{1r} - \frac{V_0}{r} \frac{d}{dr} r B_{1r} + \frac{\eta C^2}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d B_{1r}}{dr} \right] \quad (2-33)$$

$$F = K B_{oz} - \frac{B_{o\theta}}{r}, \quad H = -4(kr) \frac{d}{dr} B_{oz} \quad (2-34)$$

onde desprezamos todos os termos de ordem $(kr)^2$ ou potências superiores de (kr) bem como os termos que continham $V_1 z$ e $B_1 z$, de acordo com as justificativas apresentadas a partir da equação (A-64) no apêndice A. Também fizemos uso do número de onda azimutal, $m = -1$, como justificaremos na seção (II-4).

As equações (2-32) e (2-33) constituem o sistema básico que deve ser solucionado. Conforme foi mencionado no capítulo introdutório, este sistema é resolvido, utilizando-se a teoria de camada limite⁽¹³⁾. Duas regiões são consideradas: A região MHD ideal, onde os termos proporcionais a η e V_0 são desprezados, e a camada resistiva nas vizinhanças do ponto singular $r = r_0$ da equação MHD ideal. O casamento assintótico das soluções das equações correspondentes às duas regiões, permite-nos determinar o auto-valor γ e a espessura da camada resistiva δ , de forma autoconsistente.

II-4

REGIÃO MHD IDEAL

No limite $\eta \rightarrow 0$, a equação (2-33) torna-se simplesmente $B_{1r} = \frac{iF}{\gamma} V_{1r}$. A fim de simplificar a notação das equações que se seguem, definiremos a componente radial do deslocamento associado à perturbação como:

$$\xi = \frac{V_{1r}}{\gamma} \quad (2-35)$$

ou seja, $V_{1r} = \int \xi dt$. Substituindo-se $B_{1r} = iF\xi$ e $V_{1r} = \gamma\xi$ na equação (2-32) obtemos, conforme apêndice B;

$$\frac{d}{dr} r^3 (4\pi\gamma^2\rho + F^2) \frac{d}{dr} \xi - g\xi = 0 \quad (2-36)$$

$$g = r FH \quad (2-37)$$

Como os modos a serem estudados são lentos comparados com o tempo magnetohidrodinâmico τ_H , o termo de inércia $4\pi\gamma^2\rho$ na equação (2-36) pode ser desprezado pois

$$\frac{4\pi\gamma^2\rho}{F^2} \sim (\gamma\tau_H)^2 \ll 1 \quad (2-38)$$

A equação resultante

$$\frac{d}{dr} r^3 F^2 \frac{d\xi}{dr} - g\xi = 0 \quad (2-39)$$

tem um ponto singular no ponto $r = r_0$, onde $F(r_0) = 0$. Naturalmente, nas vizinhanças deste ponto, o termo de inércia não

pode ser desprezado e tem que ser considerado juntamente com a resistividade finita do plasma.

A equação (2-39) tem que ser solucionada com condições de contorno apropriadas em $r=0$ e $r=a$. A condição de regularidade em $r=0$ depende do valor do número poloidal m e para prosseguirmos temos que especificar este número. Para os modos $m = -1$ (o sinal de m é escolhido de tal maneira que o modo $\xi \sim \exp [i (m \theta + \kappa z) + \gamma t]$ tenha heliticidade no mesmo sentido que as linhas de força do campo magnético.

$\vec{B}_0 = B_{0\theta}(r) \hat{\theta} + B_{0z}(r) \hat{z}$ considerados neste trabalho. As condições de contorno são:

$$\begin{cases} \xi = \text{const} & r = 0 \\ \xi = 0 & r = a \end{cases} \quad (2-40)$$

transportando a expressão para H do apêndice A equação (A-40)

$$H = F(m^2 + k^2 r^2 - 1) - \frac{2 k^2 r^2}{m^2} \left(\frac{m}{r} B_{0\theta} + \frac{2 m^2}{k r} \frac{d}{dr} B_{0z} \right) \quad (2-41)$$

$$F = \frac{m}{r} B_{0\theta} + k B_{0z} = m \frac{B_{0\theta}}{r} \left(1 + \frac{k r B_{0z}}{m B_{0\theta}} \right), \quad m = 1$$

definimos anteriormente

$$q(r) \equiv \frac{r B_{0z}}{R B_{0\theta}} \quad (2-42) \quad \text{e} \quad F = \frac{B_{0\theta}}{r} \left[1 - q(r) \right] \quad (2-43)$$

$$H \simeq - 2 k^2 r^2 \frac{B_{0\theta}}{r} \left(\frac{2R}{B_{0\theta}} \frac{d}{dr} B_{0z} - 1 \right) \quad (2-44)$$

Sendo assim podemos escrever a grandeza g como:

$$g(r) \sim 2(k^2 r^2) \frac{B_{0\theta}^2}{r} \left(\frac{2R}{B_{0\theta}} \frac{d}{dr} B_{0z} - 1 \right) \quad (2-45)$$

Portanto a quantidade

$$\frac{|g|}{|rF^2|} \sim (k^2 r^2) \ll 1 \quad (2-46)$$

Este resultado indica que a solução da equação (2-39) pode ser obtida como uma expansão em potência do parâmetro pequeno $(kr)^2$, ou seja:

$$\xi = \xi_0 + \frac{\xi_1}{(kr)^2} + \dots \quad (2-47)$$

Vamos supor que o perfil de equilíbrio da grandeza $q(r)$ é uma curva monotonamente crescente a partir de um valor menor que 1 na origem, até um valor maior que 1 na superfície do plasma $r = a$, conforme é mostrado na figura 3. Este perfil corresponde aos perfis de $q(r)$ obtidos experimentalmente^(4,18, 21)

. Então a equação (2-39) tem um ponto singular dentro do plasma em $r = r_0$, onde $q(r_0) = 1$ e $F(r_0) = 0$. Neste ponto a solução de (2-39) pode ser descontínua e a solução da equação para ξ_0 (ordem zero);

$$\frac{d}{dr} r^3 F^2 \frac{d}{dr} \xi_0 = 0 \quad (2-48)$$

que satisfaz as condições de contorno (2-40) é simplesmente:

$$\xi_0 = \begin{cases} \text{const.} & r < r_0^- \\ 0 & r^+ < r < a \end{cases} \quad (2-49)$$

Esta solução é mostrada esquematicamente na Figura 3. A equação para ξ_1 é obtida substituindo-se ξ_1 no segundo termo da equação (2-39), já que $\xi_1 \sim g \xi_0 \sim (kr_0)^2$.

Temos então a seguinte equação para ξ_1 :

$$\frac{d}{dr} r^3 F^2 \frac{d}{dr} \xi_1 = g \xi_0 \quad (2-50)$$

a qual pode ser integrada sem dificuldades nos dois domínios, $r < r_0^-$ e $r_0^+ < r \leq a$,

e obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} \xi_1 = \frac{\xi_0}{r^3 F^2} \int_0^r g(r) dr; \quad 0 < r < r_0^- \\ \frac{d}{dr} \xi_1 = \frac{\text{const}}{r^3 F^2}; \quad r_0^+ < r < a \end{array} \right. \quad (2-51)$$

onde a constante pode ser escolhida simplesmente igual a $\xi_0 \int_0^{r_0} g(r) dr$. Naturalmente esta solução diverge em $r = r_0$. No entanto, como a solução dentro da camada resistiva terá que casar-se assintoticamente com a solução (2-51), é importante de terminarmos o comportamento dela em torno de $r = r_0$. Nas vizinhanças deste ponto temos:

$$F(r) \sim \frac{dF}{dr} \Big|_{r=r_0} (r - r_0) = \left[\left(\frac{dB_{0\theta}}{dr} \right) (1 - q) - \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right] (r - r_0)$$

e lembrando que $q(r_0) = 1$ temos

$$F(r) \sim - \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0) \quad (2-52)$$

Substituindo-se (2-52) em (2-51) temos

$$\frac{d}{dr} \xi_1 \approx \frac{\xi_0 \int_0^{r_0} g(r) dr}{r_0^3 \left[\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{d}{dr} q \right]_{r_0}^2 (r-r_0)^2} = \frac{\xi_0 \int_0^{r_0} g(r) dr}{r_0^3 \left[\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{d}{dr} q \right]^2 \delta^2 \chi^2}$$

(2-53)

Portanto a solução apropriada dentro da camada resistiva deverá ter um comportamento assintótico dado por $\xi \sim 1/(r-r_0)$ a fim de obter o casamento com a solução da região MHD ideal.

II-5

CAMADA RESISTIVA

Vamos agora considerar uma região de espessura δ nas vizinhanças do ponto $r = r_0$, onde os termos proporcionais a γ , η e V_0 não são desprezíveis. A largura δ desta camada resistiva será determinada de forma auto-consistente pelo reescalonamento das grandezas nesta região. No entanto podemos antecipar que $\delta \ll r_0$ e portanto a camada resistiva pode ser considerada plana. Desta forma simplificaremos a equação (2-32) e (2-33) dentro da camada, desprezando os termos adicionais devido à curvatura cilíndrica. Utilizando novamente a variável ξ (equação (2-35)), $m = -1$ e $k^2 r^2 \ll 1$ as equações (2-32) e (2-33) tornam-se

$$\begin{aligned}
 & - 4\pi\rho_0\gamma \left[\gamma r_0^2 \frac{d^2}{dr^2} \xi - V_0 \left(3r_0 \frac{d^2}{dr^2} \xi + r_0^2 \frac{d^3}{dr^3} \xi \right) \right] = \\
 & = - iFr_0^2 \frac{d^2}{dr^2} B_{1r} + iHB_{1r} + ir_0^2 \left(\frac{d^2 F}{dr^2} \right)_{r_0} B_{1r} \quad (2-54)
 \end{aligned}$$

$$\gamma B_{1r} = - V_0 \frac{d}{dr} B_{1r} + i\gamma F \xi + \frac{\eta c^2 d^2}{4\pi dr^2} B_{1r} \quad (2-55)$$

respectivamente. As grandezas perturbadas ξ e B_{1r} tem que variar rapidamente numa escala de comprimento da ordem da espessura da camada δ , afim de conectarem apropriadamente às soluções MHD divergentes fora da camada. Definindo a variável radial interna na camada resistiva como:

$$x \equiv \frac{r - r_0}{\delta}$$

Notemos que para $\delta \ll r_0$, $\chi \sim 1$ somente entorno de $r = r_0$. Quando $|r-r_0| \gg \delta$, $\chi \rightarrow \infty$. As equações (2-54) e (2-55) ficam então:

$$\frac{4\pi\rho_0\gamma V_0 r_0^2}{\delta^3} \left[\frac{d^3\xi}{d\chi^3} + \frac{\gamma\delta}{V_0} \frac{d^2\xi}{d\chi^2} - \frac{\delta d^2\xi}{r_0 d\chi^2} \right] = -i \frac{B_{0\theta} \left(r \frac{d}{dr} q \right)_{r_0} \chi}{\delta} \frac{d^2}{dr^2} B_{1r} +$$

$$+ iH(r_0) B_{1r} + ir_0^2 \left(\frac{d^2 F}{dr^2} \right)_{r_0} B_{1r} \quad (2-57)$$

$$\gamma B_{1r} = - \frac{V_0}{\delta} \frac{d}{d\chi} B_{1r} - i \frac{\gamma\delta}{r_0} B_{0\theta} \left(\frac{d}{dr} q \right)_{r_0} \chi \xi + \frac{\eta c^2}{4\pi\delta^2} \frac{d^2}{dr^2} B_{1r}$$

(2-58)

Fizemos uso da expressão (2-52) para F. As relações entre o segundo e o primeiro termo e entre o terceiro e o primeiro do lado direito de (2-56) são da ordem de $\delta \ll 1$. Da mesma forma a relação entre o terceiro e o primeiro termos do lado esquerdo de (2-56) é de ordem δ . Todos estes termos podem portanto ser desprezados em relação aos demais. O segundo termo do lado esquerdo também é de ordem δ mas não deve ser eliminado indiscriminadamente, porque contém outras grandezas pequenas como γ , V_0 , as quais ainda não foram avaliadas.

A equação (2-56) pode ser escrita como:

$$\frac{d^3\xi}{d\chi^3} + \frac{\gamma\delta}{V_0} \frac{d^2\xi}{d\chi^2} = i \frac{B_{0\theta} \left(r \frac{d}{dr} q \right)_{r_0} \delta^2 \chi}{4\pi\rho_0\gamma V_0 r_0^2} \frac{d^2}{d\chi^2} B_{1r} \quad (2-59)$$

Os efeitos da resistividade η , e da velocidade de difusão V_0 , são evidentes na equação (2-58) e (2-59). A resistividade introduz um termo de difusão (derivada segunda de B_{1r}), e V_0 introduz um termo de dispersão (derivada terceira de ξ). Ambos os termos tendem a produzir uma transição suave das grandezas perturbadas através da camada, eliminando a descontinuidade das soluções MHD Ideais. Na análise dos modos resistivos com $|m| = 1$, só o termo de difusão tem sido considerado^(19,20). No entanto, é evidente que dependendo do valor relativo das grandezas γ , δ , V_0 e η , o termo de dispersão pode se tornar comparável ao termo de difusão. O valor relativo entre todas estas grandezas dependem da relação entre duas escalas de tempo que estão de certa forma "embutidas" nas equações (2-57) e (2-58); o tempo magnetohidrodinâmico τ_H que redefinimos como:

$$\tau_H = \frac{r_0 \sqrt{4\pi\rho_0}}{\left[B_0 r \frac{d}{dr} q \right]_{r_0}} \quad (2-60)$$

e o tempo de difusão resistiva τ_R definido como:

$$\tau_R = \frac{4\pi r_0^2}{\eta c^2} \quad (2-61)$$

Conforme mencionamos no capítulo introdutório deste trabalho, o efeito da resistividade é medido através do parâmetro pequeno $\varepsilon = \tau_H/\tau_R \ll 1$. Naturalmente, para que a resistividade seja relevante, o termo de difusão resistiva na equação

(2-57) tem que ser da mesma ordem que os termos de menor ordem nas equações (2-58) e (2-59). Isto pode ser conseguido através de um reescalonamento das grandezas que aparecem nas equações (2-58) e (2-59), em termos do parâmetro ϵ . Introduziremos uma razão de crescimento adimensional λ definida como:

$$\gamma \equiv \epsilon^a \lambda \tau_H^{-1} \quad (2-62)$$

e uma velocidade de difusão também adimensional.

$$C \equiv \frac{V_0 \tau_R}{r_0} \quad (2-63)$$

Definiremos a espessura da camada δ por

$$\delta = r_0 \epsilon^b \quad (2-64)$$

e as variáveis ξ e B_{1r} também de forma adimensional

$$\xi = r_0 \bar{\xi} \quad (2-65)$$

$$B_{1r} = iB_{0\theta} \left(r \frac{d}{dr} q \right)_{r_0} \epsilon^c \Psi \quad (2-66)$$

As constantes a, b, c , são determinadas pela imposição de que diferentes termos nas equações (2-58) e (2-59) sejam de mesma ordem. Naturalmente, para que a análise de cada camada limite seja válida, é necessário que todos estes ex-

poentes tenham um valor absoluto menor que 1 um. Todas as variáveis normalizadas são consideradas da mesma ordem de grandeza, isto é:

$$\lambda \sim c \sim \bar{\xi} \sim \psi \sim 1 \quad (2-67)$$

Em termos destas grandezas normalizadas, as equações (2-58) e (2-59) tornam-se:

$$\frac{d^3 \bar{\xi}}{d\chi^3} + \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\chi^2} \epsilon^{a+b+1} = \frac{\chi}{\lambda c} \frac{d^2 \psi}{d\chi^2} \epsilon^{2b+c-a-1} \quad (2-68)$$

$$\psi = \chi \bar{\xi} \epsilon^{b-c} - c \frac{d\psi}{d\chi} \epsilon^{1-a-b} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \psi}{d\chi^2} \epsilon^{1-a-2b} \quad (2-69)$$

A escolha das constantes a, b e c fixa as características dos modos correspondentes e isto será apresentado em detalhes no próximo capítulo. No escalonamento discutido acima, $\bar{\xi}$ foi escolhido de ordem ϵ^0 . Naturalmente isto é possível porque o sistema de equações (2-58) e (2-59) é linear, e daí a ordem de uma grandeza pode ser escolhida de forma arbitrária. A constante C também é de ordem ϵ^0 porque V_0 é proporcional a η e τ_R é proporcional a η^{-1} , de modo que C é independente da resistividade do plasma.

CAPÍTULO - III

ANÁLISE DO MODO KINK INTERNO RESISTIVO E DE RECONEXÃO

- III - 1 Discussão Inicial
- III - 2 Modo Kink Interno Resistivo
- III - 3 Modo de Reconexão
- III - 4 Casamento Assintótico para o Modo de
Reconexão
- III - 5 Soluções Analíticas da Equação de Auto-
Valor para o Modo de Reconexão
- III - 6 Solução Numérica da Equação de Auto-
-Valor para o Modo de Reconexão e Res
ultados
- III - 7 Figuras
- III - 8 Tabelas

III - DISCUSSÃO INICIAL

Neste capítulo, vamos especificar o escalonamento das diferentes grandezas dentro da camada resistiva, através da escolha das constantes a, b e c introduzidas no capítulo anterior. As equações resultantes serão então resolvidas e as soluções serão casadas assintoticamente com a solução na Região MHD ideal, dada pelas equações (2-47), (2-49) e (2-53). Duas escolhas diferentes para a, b e c são possíveis, levando ao modo Kink (19) e ao modo de Reconexão (20). Cada um desses casos será tratado independentemente. A escolha das constantes a, b e c é sujeita a certas condições de contorno. Inicialmente os termos devido à resistividade finita do plasma tem que ser da mesma ordem que os termos de menor ordem das equações (2-68) e (2-69). Em segundo lugar, o sistema de equações resultante tem que possuir uma solução assintótica, quando $\chi \rightarrow \infty$, dada por $\bar{\xi} \sim \frac{1}{\chi}$, a fim de ser possível o casamento com ξ_1 (equação (2-53)) na Região MHD ideal.

III - 2 MODO KINK INTERNO RESISTIVO

A escolha mais simples para as constantes a, b e c é:

$$a = b = c = \frac{1}{3} \quad (3-1)$$

Com esta escolha e mantendo somente os termos de menor ordem nas equações (2-68) e (2-69), temos:

$$\frac{d^2}{d\chi^2} \bar{\xi} = \frac{\chi}{\lambda^2} \frac{d^2 \Psi}{d\chi^2} \quad (3-2)$$

$$\Psi = -\chi \bar{\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \Psi}{d\chi^2} \quad (3-3)$$

Os termos $\frac{d^3 \bar{\xi}}{d\chi^3}$ e $c \frac{d\Psi}{d\chi}$ ficam multiplicados por $\varepsilon^{1/3}$ e portanto podem ser desprezados em relação aos termos de ordem mais baixa. Como a grandeza c não aparece no sistema acima, é evidente que a velocidade de difusão, V_0 , não influe na razão de crescimento do modo, derivado a partir destas equações. Uma solução exata das equações (3-2) e (3-3) é $\bar{\xi} = \text{cte.}$, quando $\chi \rightarrow \infty$ e uma solução assintótica é $\bar{\xi} \sim \frac{1}{\chi}$. Portanto o casamento com a solução MHD ideal é possível. As equações (3-2) e (3-3), são as mesmas equações derivadas por Coppi e colaboradores para o modo Kink interno resistivo (19). Nesta referência, o sistema acima é solucionado analiticamente e uma relação de dispersão é derivada para λ . Nós não vamos repetir aqui o trabalho desses investigadores. De qualquer forma a nossa análise prova corretamente que a velocidade de difusão V_0 (ou, o que é equivalente $\frac{\partial B}{\partial t}$) pode ser desprezada nas equações de equilíbrio para o modo Kink Interno Resistivo, conforme já havíamos argumentado na introdução desta tese.

III - 3 MODO DE RECONEXÃO

Há uma segunda possibilidade de escolha para as constantes a, b e c, embora esta última não seja tão evidente como o foi a escolha para o modo Kink Interno Resistivo. A partir da equação (2-63) nós notamos que o comportamento assintótico desejado para $\bar{\xi}$, ou seja, $\bar{\xi} \sim \frac{1}{\chi}$ pode também ser obtido se $\Psi = \Psi_0 = \text{cte.}$, e $b = c$. Então escolhemos para Ψ uma função da forma:

$$\Psi = \Psi_0 + \epsilon^d \Psi_1 \quad (3-4)$$

onde $\Psi_0 = \text{cte.}$ e $\Psi_1 = \Psi_1(x)$. Substituindo (3-4) nas equações (2-67) e (2-68) temos:

$$\frac{d^3 \bar{\xi}}{d\chi^3} + \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\chi^2} \epsilon^{a+b-1} = \frac{\chi}{\lambda c} \frac{d^2 \Psi_1}{d\chi^2} \epsilon^{2b+c+d-a-1} \quad (3-5)$$

$$\Psi_0 + \Psi_1 \epsilon^d = -\chi \bar{\xi} \epsilon^{b-c} + c \frac{d\Psi_1}{d\chi} \epsilon^{1-a-b+d} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \Psi_1}{d\chi^2} \epsilon^{d+1-a-2b} \quad (3-6)$$

A escolha possível para as constantes a, b, c e d é então:

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = c = d = \frac{2}{5} \quad (3-7)$$

com esta escolha, as equações (3-5) e (3-6) tornam-se:

$$\frac{d^3 \bar{\xi}}{d\chi^3} + \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\chi^2} = \frac{\chi}{\lambda c} \frac{d^2 \Psi_1}{d\chi^2} \quad (3-8)$$

$$\Psi_0 = -\chi \bar{\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \Psi_1}{d\chi^2} \quad (3-9)$$

Os termos ψ_1 e $c \frac{d\psi_1}{dx}$ na equação (3-6) ficam multiplicados por $\epsilon^{2/5}$ e podem assim ser desprezados. As equações (3-8) e (3-9) podem ser combinadas numa só equação para $\bar{\xi}$, substituindo-se $\frac{1}{\lambda} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1$ de (3-9) em (3-8), obtemos:

$$c \frac{d^3}{dx^3} \bar{\xi} + \frac{\lambda d^2}{dx^2} \bar{\xi} - \chi^2 \bar{\xi} = \chi \psi_0 \quad (3-10)$$

Quando $c \equiv 0$, a equação resultante é a mesma equação derivada por Basu e Coppi para o modo de Reconexão (20). Vemos que para este modo, o efeito dispersivo da velocidade de difusão V_0 é importante, e pode alterar o auto valor λ (ou seja, a razão de crescimento γ). A equação (3-10) tem uma solução assintótica dada por $\bar{\xi} \sim -\psi_0/\chi$ de maneira que o casamento com a solução MHD ideal externa pode ser efetuado. A derivada terceira de $\bar{\xi}$ tem vários efeitos importantes nas características do modo. Inicialmente notamos que com $c = 0$, a equação homogênea resultante admite uma solução para e uma solução ímpar. No entanto com $c \neq 0$ a solução não possui paridade específica. Por outro lado, a derivada terceira altera o comportamento assintótico da solução divergente de (3-10), ou seja de $\xi \sim \exp[\chi^2/2\sqrt{\lambda}]$ quando $c = 0$ para $\xi \sim \exp[3\chi^{5/3}/5c^{1/3}]$ quando $c \neq 0$. Isto dificulta a solução numérica da equação (3-10) e também impede a possibilidade de uma representação integral conveniente para a mesma solução (20). Nos limites $c \gg \lambda$ e $c \ll \lambda$ é possível solucionar a equação (3-10) analiticamente. Estas soluções e o método numérico para solucionar a equação acima serão apresentados após uma breve discussão sobre o problema de casamento assintótico com a solução MHD ideal.

III - 4 CASAMENTO ASSINTÓTICO PARA O MODO DE RECONEXÃO

Podemos notar, da equação (2-53), que o comportamento assintótico da solução ξ na região MHD ideal pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{1}{\xi_0} \frac{d}{dr} \xi_e \Big|_{r \rightarrow r_0} = - \frac{\lambda_H}{\pi X} \quad \xi_e = \xi_{\text{externo}} \quad (3-11)$$

onde

$$x = \frac{r-r_0}{r_0} \quad e \quad \lambda_H = - \frac{\pi}{r_0^3 \left[B_{0\theta} \frac{d}{dr} q \right]^2} \int_0^{r_0} r^0 g(r) dr \leq \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \quad (3-12)$$

Usando agora (2-49), (2-51) juntamente com (3-11) podemos escrever a solução para ξ nas vizinhanças de r_0 ou equivalentemente $x \rightarrow 0$.

$$\xi_e = \xi_0 \left(1 + \frac{\lambda_H}{\pi X} \right) \quad x \rightarrow 0^- \quad r - r_0 \quad (3-13)$$

$$\xi_e = \xi_0 \frac{\lambda_H}{\pi X} \quad x \rightarrow 0^+ \quad r + r_0 \quad (3-14)$$

Já que procuramos escrever todas as grandezas numa forma dimensional e normalizada, continuaremos nesta prática - para fazermos o casamento assintótico de forma correta.

Quando $x \rightarrow 0$ na região MHD ideal temos:

$$\gamma B_{1r} = i F V_{1r} = i F r_0 \gamma \bar{\xi}$$

tomando

$$F \simeq \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{d}{dr} q \right) \delta \chi \quad e \quad B_{1r} = i \left(r B_{0\theta} \frac{d}{dr} q \right) r_0 \epsilon^c \psi$$

temos:

$$\psi_{\text{ext}} = - \epsilon^{b-c} \chi \bar{\xi} \quad (3-15)$$

Estamos considerando $b = c$ para que ξ assumo o comportamento assintótico desejado. Com estas considerações podemos escrever uma expressão para o campo magnético.

$$\bar{\xi} = \begin{cases} \bar{\xi}_0 \left(1 + \frac{\lambda_H}{\pi \chi} \epsilon^{-2/5}\right) & \chi \rightarrow 0^- \quad r < r_0 \\ \bar{\xi}_0 \frac{\lambda_H}{\pi \chi} \epsilon^{-2/5} & \chi \rightarrow 0^+ \quad r > r_0 \end{cases} \quad (3-16)$$

$$\psi_{\text{ext}} = \begin{cases} -\bar{\xi}_0 \left(\frac{\lambda_H}{\pi} \epsilon^{-2/5} + \chi\right) & \chi \rightarrow 0^- \\ -\bar{\xi}_0 \frac{\lambda_H}{\pi} \epsilon^{-2/5} & \chi \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad (3-17)$$

onde $\bar{\xi}_0$ é uma constante.

A descontinuidade na derivada logarítmica Δ' é dada por (1)

$$\Delta' = \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\chi} \Big|_{\chi \rightarrow 0^+} - \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\chi} \Big|_{\chi \rightarrow 0^-} = 0 + \frac{\bar{\xi}_0}{-\bar{\xi}_0 \frac{\lambda_H}{\pi} \epsilon^{-2/5}}$$

$$\Delta' = -\frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad (3-18)$$

Vamos agora impor que as derivadas logarítmicas se igualem em cada mudança de região. Devido ao fato de estarmos tomando $\psi_{\text{int}} = \psi_0 + \epsilon^{2/5} \psi_1$, $\psi_0 = \text{cte}$. Temos que multiplicar a derivada logarítmica da região interna por $\epsilon^{-2/5}$ para equilibrarmos as ordens de grandezas.

$$\frac{\epsilon^{-2/5}}{\psi_{\text{int}}} \frac{d\psi_{\text{int}}}{d\chi} \Big|_{\chi \rightarrow \infty} = \frac{1}{\psi_{\text{ext}}} \frac{d\psi_{\text{ext}}}{d\chi} \Big|_{\chi \rightarrow 0^+} \quad (3-19)$$

$$\frac{\epsilon^{-2/5}}{\psi_{\text{int}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{int}} \Big|_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{\psi_{\text{ext}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{ext}} \Big|_{x \rightarrow 0^-} \quad (3-20)$$

onde ψ_{int} e ψ_{ext} são os campos interno da camada resistiva e externo respectivamente.

Associando (3-19) e (3-20), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^{-2/5}}{\psi_{\text{int}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{int}} \Big|_{x \rightarrow \infty} - \frac{\epsilon^{-2/5}}{\psi_{\text{int}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{int}} \Big|_{x \rightarrow -\infty} &= \frac{1}{\psi_{\text{ext}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{ext}} \Big|_{x \rightarrow 0^+} - \\ &- \frac{1}{\psi_{\text{ext}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{ext}} \Big|_{x \rightarrow 0^-} \end{aligned} \quad (3-21)$$

$$\Delta' = \frac{\epsilon^{-2/5}}{\psi_{\text{int}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{int}} \Big|_{x \rightarrow \infty} - \frac{\epsilon^{-2/5}}{\psi_{\text{int}}} \frac{d}{dx} \psi_{\text{int}} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = - \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H}$$

Usando a expansão $\psi_{\text{int}} = \psi_0 + \epsilon^{2/5} \psi_1$

$$\Delta' = \frac{1}{\psi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1 dx = - \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad (3-22)$$

Da equação (3-9) nós escrevemos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1 = \lambda (\psi_0 + x \bar{\xi}) \quad (3-23)$$

que em (3-22) fornece a seguinte condição de casamento assintótico.

$$\Delta' = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + x \frac{\bar{\xi}}{\psi_0}\right) dx = - \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad (3-24)$$

Potanto, solucionando a equação (3-10) para ξ e usando-a em (3-24) poderemos determinar a razão de crescimento do modo de instabilidade ora em estudo.

Não foi possível encontrar uma solução analítica para (3-10), como justificado no final da seção III-3. No entanto é possível para valores assintóticos de c .

III - 5 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE AUTO-VALOR PARA O MODO DE RECONEXÃO

A equação (3-10) ou seja:

$$c \frac{d^3}{d\chi^3} \bar{\xi} + \lambda \frac{d^2}{d\chi^2} \bar{\xi} - \chi^2 \bar{\xi} = \chi \Psi_0$$

apresenta dois parâmetros a ser variados numa integração numérica. No entanto, uma redefinição das grandezas nos permitirá reduzir o problema a um parâmetro apenas.

$$\text{Seja } \bar{\xi} \equiv \frac{\Psi_0}{\lambda^{1/4}} h \quad \text{e} \quad \chi \equiv \lambda^{1/4} t \quad (3-25)$$

$$\frac{c}{\lambda} \frac{d^3}{dt^3} h + \lambda^{1/4} \frac{d^2}{dt^2} h - \lambda^{1/4} t^2 h = \lambda^{1/4} t \quad \text{ou}$$

$$\frac{c}{\lambda^{5/4}} \frac{d^3}{dt^3} h + \frac{d^2}{dt^2} h - t^2 h = t \quad (3-26)$$

definindo o parâmetro

$$\Lambda \equiv c \lambda^{-5/4} \quad (3-27)$$

temos

$$\Lambda \frac{d^3}{dt^3} h + \frac{d^2}{dt^2} h - t^2 h = t \quad (3-28)$$

SOLUÇÕES PARA VALORES ASSINTÓTICOS DE Λ

A) $\Lambda \ll 1$

Neste caso podemos expandir h em função do parâmetro pequeno Λ .

$$h = h_0 + \Lambda h_1 + \Lambda^2 h_2 + \dots \quad (3-29)$$

Usando (3-29) em (3-28) obtemos:

$$\begin{aligned} & (h_0'' - t^2 h_0) \Lambda^0 + (h_0''' + h_1'' - t^2 h_1) \Lambda^1 + \\ & + (h_1''' + h_2'' - t^2 h_2) \Lambda^2 + \dots = t \end{aligned} \quad (3-30)$$

Donde obtemos a seguinte hierarquia de funções:

$$\begin{aligned} \text{a) } & h_0'' - t^2 h_0 = t \\ \text{b) } & h_1'' - t^2 h_1 = - h_0''' \\ \text{c) } & h_2'' - t^2 h_2 = - h_1''' \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3-31)$$

onde o símbolo $h_i \frac{d}{dt} h_i$ bem como para ordens superiores.

Podemos notar, no sistema (3-31) que as soluções das equações a e c são ímpares e a da equação b é par.

Usando as definições (3-25) em (3-24) obtemos:

$$\lambda^{5/4} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + th(t, \Lambda)] dt = - \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad (3-32)$$

Portanto, como h_1 é par th_1 é ímpar e não deve afetar a integração (3-32) por ser simétrica. Definindo.

$$G(\Lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [1 + th(t, \Lambda)] dt \quad (3-33)$$

utilizando (3-29) em (3-33) encontramos:

$$G(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + th_0) dt + \Lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} th_2 dt + o(\Lambda^4) + \dots \quad (3-34)$$

de (3-31)

$$th_0 = \frac{h_0''}{t} - 1 \quad (3-35)$$

(3-35) em (3-34) fornece:

$$G(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{d^2}{dt^2} h_0 + \Lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} th_2 dt \quad (3-36)$$

É possível uma solução analítica para a equação "a" do sistema (3-31) como também a primeira integral em (3-36) converge facilmente. Uma discussão detalhada desta solução está no apêndice C.

Da equação (C-22) e (C-38) temos:

$$G(\Lambda) = 2\pi \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} + 2,25\Lambda^2 \quad (3-37)$$

Usando os valores conhecidos da função Gama presente na equação (3-37) encontramos:

$$G(\Lambda) = 2,12 + 2,25\Lambda^2 \quad (3-38)$$

Finalmente combinando (3-27), (3-32) e (3-38) encontramos:

$$\lambda^{5/4} (2,12 + 2,25 \frac{c^2}{\lambda^{5/2}}) = - \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad (3-39)$$

$$2,12(\lambda^{5/4})^2 + \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} (\lambda^{5/4}) + 2,25 c^2 = 0 \quad (3-40)$$

Resolvendo (3-40) para $\lambda^{5/4}$ e usando a definição de λ (equação (2-62) temos.

$$\gamma = \frac{\epsilon^{3/5}}{\tau_H} \left\{ 0,24 \left[-\frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} + \left(\frac{\pi^2 \epsilon^{4/5}}{\lambda_H^2} - 19,08 c^2 \right)^{1/2} \right] \right\}^{4/5} \quad (3-41)$$

ou seja: $\gamma = \gamma_0 (1 - 0,39 \lambda_H^2 \epsilon^{-4/5} c^2)$

B) $\Lambda = 0$

O cálculo para Δ' ou equivalentemente para $G(\Lambda)$, quando $\Lambda = 0$ foi efetuado por Furth e colaboradores (1) como também por outros autores. Na realidade, nestes cálculos λ era mantido no lado esquerdo da equação (3-10) e o termo $c\xi'''$ era desprezado como já frizamos anteriormente. Desde que somente a parte antissimétrica de (3-28) contribui para Δ' , esta omissão tem um errôneo efeito sobre Δ' , tornando-a aparentemente independente de Λ e conseqüentemente independente de V_0 .

De (3-37) encontramos para $\Lambda = 0$.

$$G(0) = 2\pi\Gamma(3/4)/\Gamma(1/4) \cong 2,12 \quad (3-42)$$

cujo cálculo detalhado está no apêndice C.

Da equação (3-32) para este caso.

$$\Delta' = \lambda^{5/4} G(0) = 2,12 \lambda^{5/4} = -\frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad (3-43)$$

$$\lambda^{5/4} = \Delta' \frac{\Gamma(1/4)}{2\pi\Gamma(3/4)}$$

e usando novamente a equação (3-10)

$$\gamma = \epsilon^{2/5} \frac{\lambda}{\tau_H} \quad \text{e} \quad \Delta' = -\frac{\pi \epsilon^{2/5}}{\lambda_H}$$

$$\gamma = \frac{\epsilon^{2/5}}{\tau_H} \left[-1,48 \frac{\epsilon^{2/5}}{\lambda_H} \right]^{4/5} \quad (3-44)$$

C) $\Lambda \gg 1$

O caso de grandes valores de Λ acontece quando a relação entre as grandezas c e $\lambda^{5/4}$ se torna grande. Isto acontece ou quando o valor c é demasiado grande comparado com o outro, ou simplesmente quando $\lambda \rightarrow 0$.

Não podemos entretanto, simplesmente tomar o $\lim \lambda \rightarrow \infty$ na equação (3-28) porque a função h não exibirá o comportamento assintótico correto. Vamos então reescalonar as grandezas com o objetivo de preservarmos o comportamento $h \sim \frac{1}{t}$ quando $t \rightarrow \infty$. Fazendo:

$$t \equiv \Lambda^a z \quad ; \quad h \equiv \Lambda^b f \quad (3-45)$$

o exato valor dos parâmetros a e b para que seja alcançado o objetivo desejado é:

$$a = \frac{1}{5} \quad e \quad b = -\frac{1}{5} \quad (3-46)$$

ou seja

$$\frac{d^3}{dz^3} f - z^2 f = z \quad (3-47)$$

Neste caso a função $G(\Lambda)$ torna-se:

$$G(\Lambda) = \Lambda^{1/5} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + zf(z)] dz = \lambda^{-1/4} c^{1/5} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + zf(z)] dz$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{G(\Lambda)}{\Lambda^{1/5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x [1 + zf(z)] dz \quad (3-48)$$

Tomando a transformada de Fourier de (3-47) temos:

$$\frac{d^2 g}{dk^2} + ik^3 g = -2\pi i \frac{d}{dk} \delta(k) \quad (3-49)$$

$$\mathcal{F} [f(z)] = g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} f(z) dz \quad (3-50)$$

onde $\delta(k)$ é a função de distribuição delta de Dirac.

A função $g(k)$ é bem comportada em toda a região do espaço, o mesmo acontecendo com sua derivada. No entanto $g(k)$ é descontínua em $k = 0$ e sua primeira derivada é descontínua de salto infinito, conforme a discussão apresentada no apêndice C.

Da equação (C-43) e (C-44) a função $g(k)$ pode ser escrita como:

$$g(k) = \begin{cases} A u(k)/u(0) & k > 0 \\ B u^*(-k)/u(0) & k < 0 \end{cases} \quad (3-51)$$

onde

$$u(k) = k^{1/2} H_{1/5}^{(1)} \left[\frac{2}{5} e^{i\pi/4} k^{5/2} \right] \quad (3-52)$$

$$u^*(-k) = k^{1/2} H_{1/5}^{(2)} \left[\frac{2}{5} e^{-i\pi/4} k^{5/2} \right] \quad (3-53)$$

de (C-51) e (C-52) encontramos que:

$$A = -\pi \tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad , \quad B = -\pi \left[\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2i \right] \quad (3-54)$$

De (C-53) temos que:

$$zf(z) = -1 + \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[g(-\epsilon) e^{i\epsilon z} - g(\epsilon) e^{-i\epsilon z} \right] \quad (3-55)$$

usando (3-55) ou simplesmente (3-55) em (3-48) encontramos fi-

nalmente que:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{G(\Lambda)}{\Lambda^{1/5}} = 2 \quad (3-56)$$

Tanto (3-37) quanto (3-36) foram integrados numericamente usando um método desenvolvido por Sakanaka, Galvão e Machado o qual será esquematizado na próxima seção.

De (3-32) e (C-55)

$$\underline{cte} = \Delta' = \lambda^{5/4} G(\Lambda) = \lambda^{5/4} 2\Lambda^{1/5} = 2\lambda_C^{1/5} \quad (3-57)$$

ou seja

$$\lambda = - \frac{\pi \epsilon^{2/5}}{2\lambda_{HC}^{1/5}} \quad (3-58)$$

ou ainda

$$\gamma = - \frac{\pi \epsilon^{4/5}}{2\tau_H \lambda_{HC}^{1/5}} \quad (3-59)$$

III-6 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE AUTO-VALOR PARA O MODO DE RECONEXÃO E RESULTADOS

O nosso objetivo aqui é encontrarmos a auto função, solução da equação diferencial (3-10) e que exiba um comportamento assintótico hiperbólico quando $t \rightarrow \infty$. Em seguida calcularemos a função $\Delta'(\lambda)$ equação (3-24).

Para alcançarmos este objetivo, fizemos uso do método numérico desenvolvido por Sakanaka, Galvão e Machado que passamos a esquematizá-lo como se segue:

De forma mais geral seja a equação (3-10)

$$\frac{d^3}{dx^3} \bar{\xi} + \frac{\lambda}{c} \frac{d^2}{dx^2} \bar{\xi} - \frac{\chi^2}{c} \bar{\xi} = \chi \frac{\psi_0}{c} \quad (3-60)$$

como a solução assintótica $Y_p = -\frac{1}{t}$ limite $t \rightarrow \infty$. Usaremos a seguinte discretização:

$$t = \{t_k\}, \quad Y(t) = \left\{ \frac{1}{k} \right\}, \quad h = t_{k+1} - t_k = \text{cte.} \quad k \in [1, N] \quad (3-61)$$

utilizando também as diferenças finitas

$$Y'' \approx (Y_{k-1} - 2Y_k + Y_{k+1})/2 \quad (3-62)$$

$$Y''' \approx (-Y_{k-2} + 2Y_{k-1} - 2Y_{k+1} + Y_{k+2})/2h^3 \quad (3-63)$$

Usando (3-61), (3-62) e (3-63) para aproximar a equação (3-60) obtemos:

$$D_k \{Y_k\} = Z_k, \quad k = 1, N \quad (3-64)$$

onde D_k é um operador definido como:

onde os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i são dados pelas seguintes fórmulas de recorrência encontradas, usando-se a equação (3-69).

$$a_1 = b_1 = b_2 = 0, \quad c_1 = \beta_1, \quad a_2 = \alpha/\beta_1, \quad d_2 = \gamma, \quad b_3 = -\beta_1^{-1}$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = f_2, \quad q_1 = -\alpha f_1, \quad q_2 = f_1 - a_2 q_1$$

$$d_k = \gamma - a_{k-1}, \quad c_k = \beta_k - b_k - a_k d_k$$

$$p_k = -b_k p_{k-2} - a_k p_{k-1}, \quad q_k = -b_k q_{k-2} - a_k q_{k-1}$$

$$p_{N-3}^* = 1 + p_{N-3}, \quad p_{N-2}^* = \gamma + p_{N-2}$$

$$q_{N-2}^* = 1 + q_{N-2}, \quad q_2^* = f_1 + q_2$$

$$r_0 = 0, \quad r_1 = -g_1/\beta_1, \quad r_2 = -r_1 d_2/c_2$$

$$s_0 = 0, \quad s_1 = -\gamma g_1/\beta_1, \quad s_2 = -(g_2 + s_1 d_2)/c_2$$

$$r_{N-3}^* = -c_{N-3}^{-1} - r_{N-3}, \quad s_{N-2}^* = c_{N-2}^{-1} + s_{N-2}, \quad r_{N-2}^* = \alpha/c_{N-2} + r_{N-2}$$

$$p_{N-1} = \beta_{N-1} - \sum_{k=1}^{N-2} r_k p_k, \quad q_{N-1} = \gamma - \sum_{k=1}^{N-2} r_k q_k$$

$$s_{N-1} = (\alpha - \sum_{k=1}^{N-2} r_k q_k)/p_{N-1}, \quad q_N = \beta_N -$$

$$- \sum_{k=1}^{N-2} s_k q_k - s_{N-1} q_{N-1} \quad (3-72)$$

$$a_{1+i} = (\alpha - b_{k+1} d_k)/c_k, \quad b_{k+2} = -c_k^{-1}$$

Com isto podemos escrever:

$$x_1 = z_1$$

$$x_2 = z_2 - a_2 x_1$$

$$x_3 = z_3 - b_3 x_1 - a_3 x_2$$

⋮

$$x_k = z_k - b_k x_{k-2} - a_k x_{k-1}$$

⋮

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
x_{N-3} &= z_{N-3} - b_{N-3}x_{N-5} - a_{N-3}x_{N-4} \\
x_{N-2} &= z_{N-2} - b_{N-2}x_{N-4} - a_{N-2}x_{N-3} \\
x_{N-1} &= z_{N-1} - \sum_{k=1}^{N-2} r_k x_k \\
x_N &= z_N - \sum_{k=1}^{N-1} s_k x_k \\
Y_N &= x_N/q_N \\
Y_{N-1} &= (x_{N-1} - q_{N-1}Y_N)/p_{N-1} \\
Y_{N-2} &= (x_{N-2} - p_{N-2}Y_{N-1} - q_{N-2}Y_N)/c_{N-2} \\
Y_{N-3} &= (x_{N-3} - d_{N-2}Y_{N-2} - p_{N-3}Y_{N-1} - q_{N-3}Y_N)/c_{N-3} \\
& \vdots \\
Y_k &= (x_k - d_{k+1}Y_{k+1} - Y_{k+2} - p_k Y_{N-1} - q_k Y_N)/c_k \quad (3-73)
\end{aligned}$$

Feito isto, escrevemos um programa em FORTRAN e integramos a função desejada.

Da equação (3-10) e (3-24) notamos que a auto-função $Y(t, \lambda, c)$ depende do parâmetro c bem como a função $\Delta'(\lambda, c)$, equação (3-24). Usamos então o procedimento descrito na seção III-5 até à equação (3-28), onde, para efeito de cálculo numérico, tomamos $\lambda = \psi_0 = 1$ e definimos $\Lambda = c$. Estas considerações não alteram em nada os resultados, porque todas as informações contidas em λ , ψ_0 e c passam a estar imbutidas no parâmetro Λ . Com isto a equação para Δ' , equação (3-24) tornou-se a equação (3-32), ou seja:

$$\Delta' = \lambda^{5/4} I(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \text{th}(t, \Lambda)] dt \quad (3-74)$$

uma solução típica de auto-função $h(\Lambda, t)$ é apresentada na fig.

(3). Podemos notar que o comportamento assintótico para a auto-função $h(\Lambda, t) \sim 1/t$ quando $t > t_{\text{crítico}}$ independe do parâmetro Λ . O que na realidade acontece é que o perfil da auto-função, fig(3) achata-se e alarga-se para valores crescentes de Λ e assim os seus pontos críticos se distanciam mais um do outro. Efetuamos a integração da equação (3-60) na forma (3-28) para vários valores de Λ abrangendo um intervalo de $[10^{-3}, 200]$ e em seguida calculamos a quantidade $I(\Lambda)$, equação (3-34) e encontramos que no limite $\Lambda \rightarrow \infty \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{I(\Lambda)}{\Lambda^{1/5}} = 2,20$. Podemos também notar que este limite já é alcançado para valores não exageradamente grandes de Λ , ou seja $\Lambda \sim 20$ i.e.

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 20} \frac{I(\Lambda)}{\Lambda^{1/5}} = 2,20 \quad (3-75)$$

A tabela I mostra a relação entre as várias grandezas Λ , $I(\Lambda)$, $G(\Lambda_p)$, $G(\Lambda_g)$, V_0/A e γ/B , cujas representações analíticas estão esboçadas na própria página da tabela I.

Para a construção desta tabela fizemos uso das relações (3-27), (3-32), (3-33), (3-37), (3-48), (3-57) e (3-75).

Podemos notar que $G(\Lambda)$ assume valores consistentes com $I(\Lambda)$ para pequenos valores de Λ . Já as quantidades $G(\Lambda_g)$ e $L(\Lambda)$ não tem significado para valores pequenos de Λ . Estas funções, ao contrário de $G(\Lambda)$, só assumem valores consistentes para grandes valores de Λ .

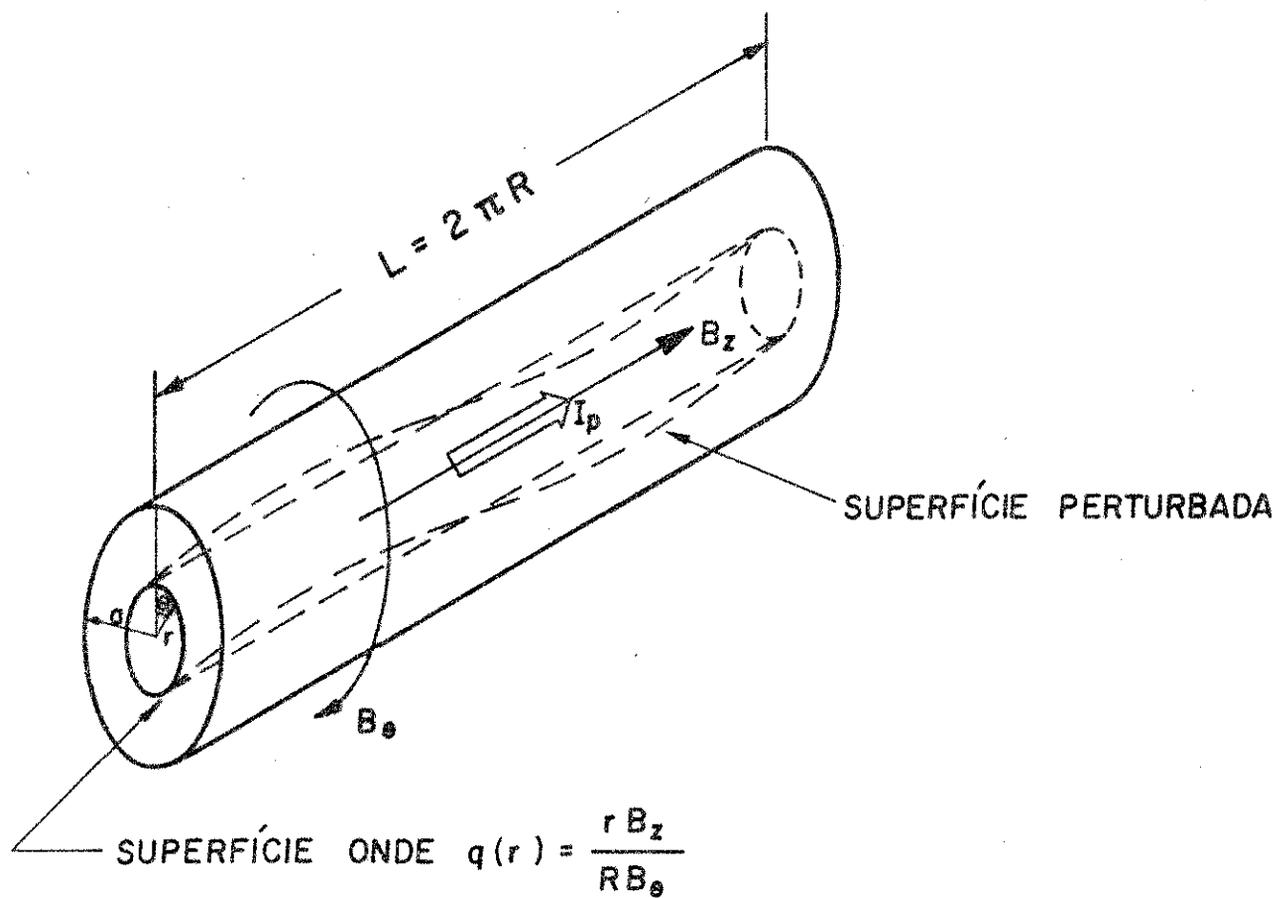
Finalmente a figura (4) mostra a dependência explícita do auto-valor γ com a velocidade de difusão V_0 . Esta figura foi plotada usando-se simplesmente as quantidades V_0/A e γ/B da tabela I. Encontramos uma atenuação na razão de crescimento γ , em virtude das contribuições do fluxo difusivo V_0 , de

cerca de 35% em torno do valor $c \sim 2$. Este valor é realmente uma quantidade característica da difusão. No entanto, o valor Λ não pode ser tomado arbitrariamente grande. Este efeito estabilizante não acontece nas mesmas proporções para $\Lambda(s)$ grandes como para $\Lambda(s)$ pequenas. Da figura (4) podemos notar que para $\Lambda \gg 1$ a variação relativa de γ em função do parâmetro V_0 é muito mais suave que para pequenos valores de Λ . Observamos também que para $\Lambda = 0$ há um valor crítico para o auto-valor γ dado pela equação (3-44)

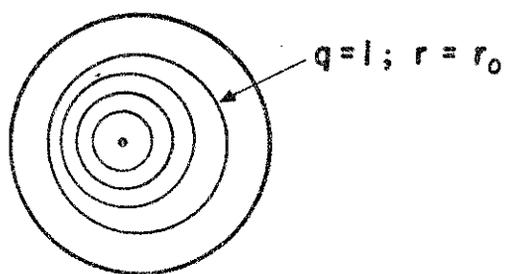
$$\Delta'_{\text{crit}} = - \frac{\pi \varepsilon^{2/5}}{\lambda_H} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\varepsilon^{2/5}}{\tau_H} \left[- 1,48 \frac{\varepsilon^{2/5}}{\lambda_H} \right]^{4/5}$$

para valores $\lambda_H < 0$ temos γ como um número positivo e portanto o fator $\exp(\gamma t)$ da solução, dominará o comportamento da auto-função $\xi(\vec{r}, t)$.

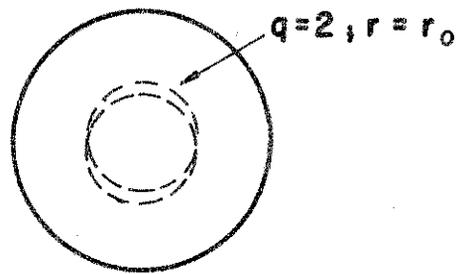
Para qualquer valor de $V_0 \neq 0$ teremos $c \neq 0$ e o auto-valor γ da equação assintótica (3-41), será sempre menor que o auto-valor $\gamma_{\text{crítico}}$, relacionado a Δ'_{crit} .



(a)



(b)



(c)

Fig. 1

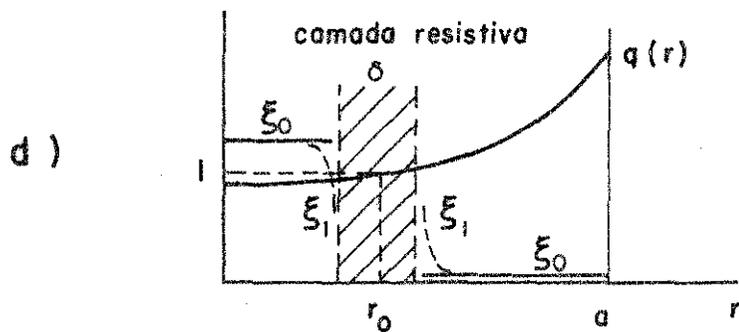
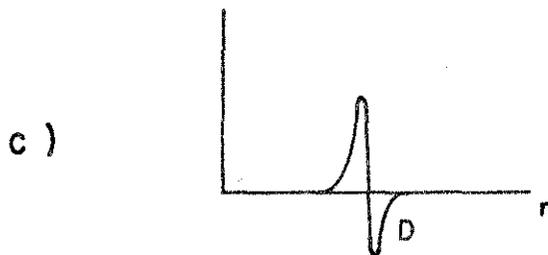
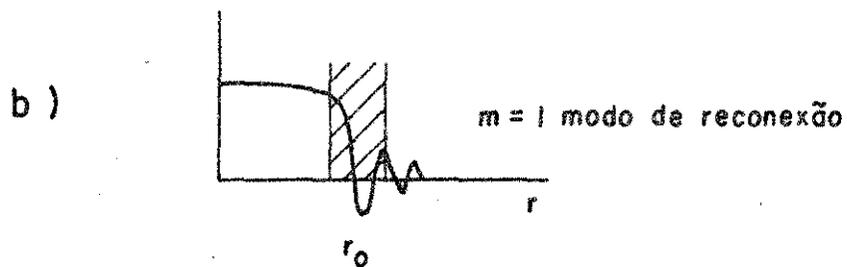
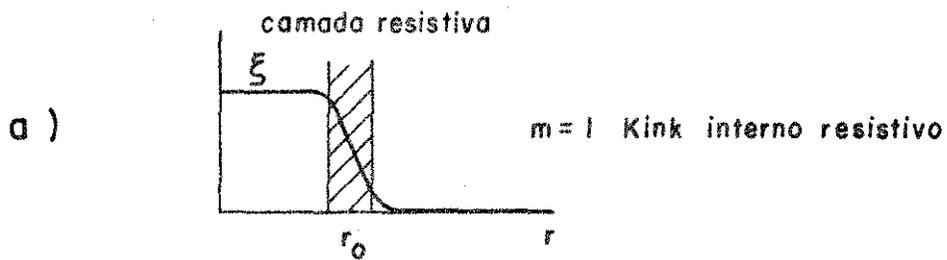


Fig. 2

$$Y^{(4)} + Y'' - \lambda^2 Y = 1$$

$$C = \lambda = \frac{1}{10} = 1$$

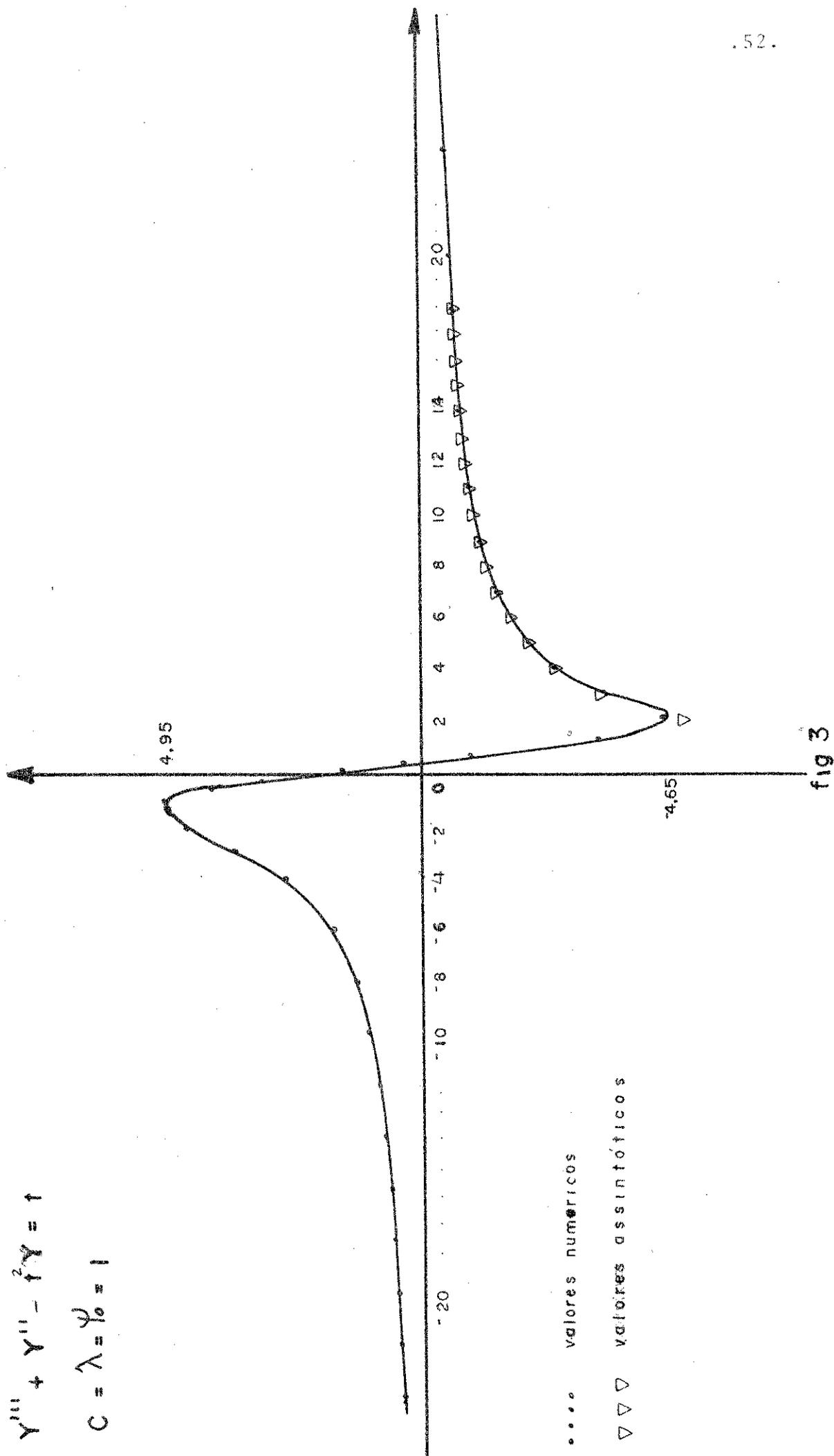


fig 3

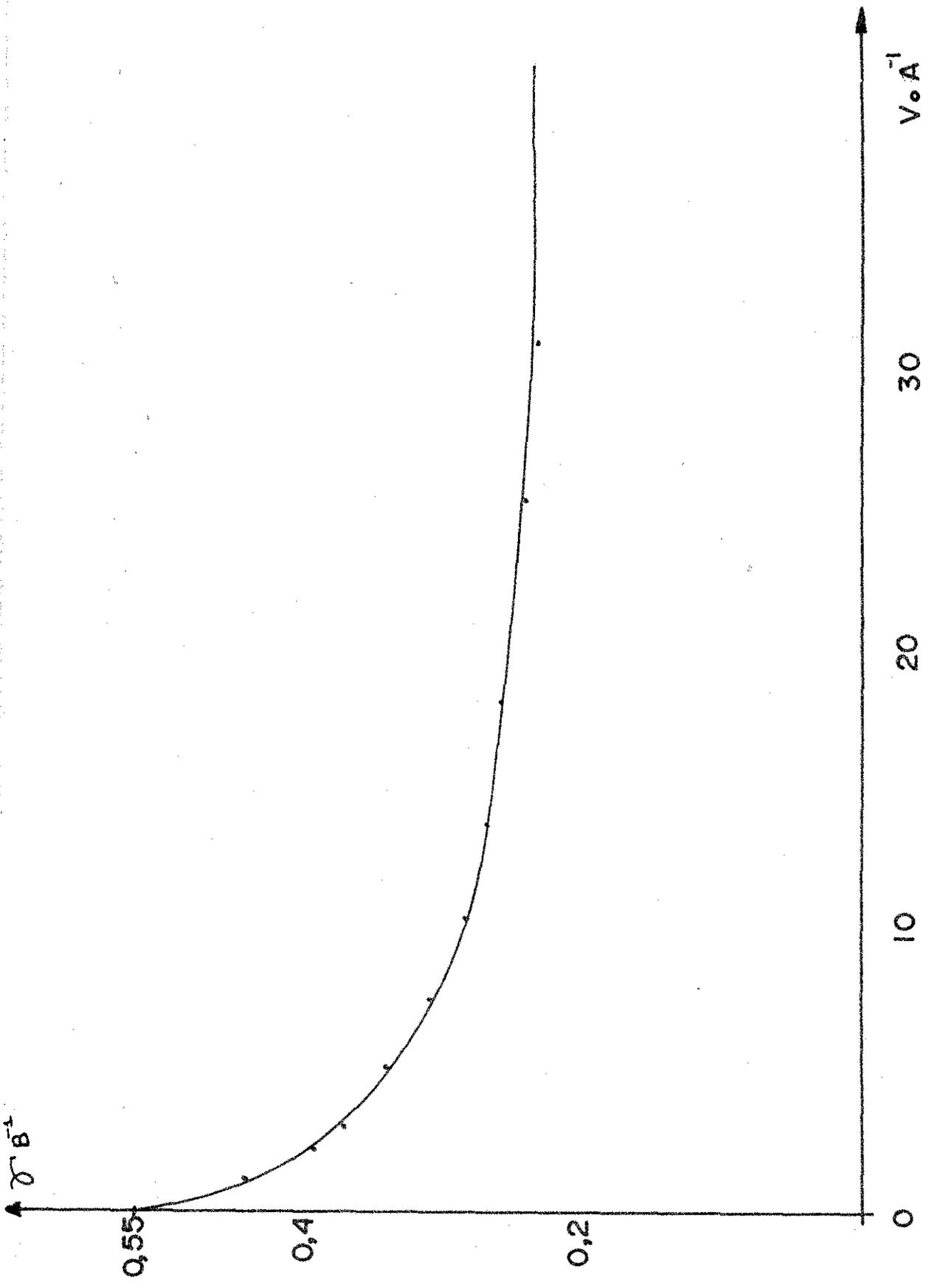


fig 4

TABELA I

Λ	$I(\Lambda)$	$G(\Lambda p)$	$G(\Lambda g)$	$L(\Lambda)$	V_0/A	γ/B
$1,00 \times 10^{-3}$	2,12	2,12	0,50	8,44	$4,72 \times 10^{-4}$	$5,50 \times 10^{-2}$
$1,00 \times 10^{-3}$	2,12	2,12	0,80	5,33	$4,72 \times 10^{-4}$	$5,50 \times 10^{-2}$
$1,00 \times 10^{-1}$	2,13	2,14	1,26	3,38	0,05	$5,50 \times 10^{-2}$
0,50	2,22	2,68	1,74	2,55	0,23	$5,29 \times 10^{-2}$
1,00	2,35	4,37	2,00	2,35	0,43	$5,05 \times 10^{-2}$
1,50	2,48	7,18	2,17	2,29	0,60	$4,80 \times 10^{-2}$
2,00	2,60	$11,1 \times 10^1$	2,30	2,26	0,77	$4,70 \times 10^{-2}$
3,00	2,78	$2,24 \times 10^1$	2,49	2,23	1,08	$4,40 \times 10^{-2}$
4,00	2,93	$3,81 \times 10^1$	2,64	2,22	1,37	$4,20 \times 10^{-2}$
5,00	3,06	$5,84 \times 10^1$	2,76	2,22	1,63	$4,10 \times 10^{-2}$
7,00	3,26	$1,12 \times 10^2$	2,95	2,21	2,15	$3,90 \times 10^{-2}$
$1,00 \times 10^1$	3,50	$2,27 \times 10^2$	3,17	2,21	2,86	$3,75 \times 10^{-2}$
$3,00 \times 10^1$	4,35	$2,03 \times 10^3$	3,95	2,20	6,90	$3,15 \times 10^{-2}$
$3,20 \times 10^1$	4,39	$2,31 \times 10^3$	4,00	2,20	7,29	$3,10 \times 10^{-2}$
$5,00 \times 10^1$	4,81	$5,63 \times 10^3$	4,37	2,20	$1,04 \times 10^1$	$2,80 \times 10^{-2}$
$1,00 \times 10^2$	5,53	$2,25 \times 10^4$	5,02	2,20	$1,81 \times 10^1$	$2,54 \times 10^{-2}$
$2,00 \times 10^2$	6,35	$9,00 \times 10^4$	5,77	2,20	$3,15 \times 10^1$	$2,35 \times 10^{-2}$

$$I(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \text{th}(t, \Lambda)] dt ; \quad G(\Lambda) = 2,12 + 2,25\Lambda^2$$

$$G(\Lambda_g) = 2\Lambda^{1/5} ; \quad \Lambda = c\lambda^{-5/4} ; \quad L(\Lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{I(\Lambda)}{\Lambda^{1/5}}$$

$$V_0/A = \frac{\Lambda}{I(\Lambda)} ; \quad A = -\frac{\pi\tau_R}{r_0\lambda_H} \epsilon^{2/5} ; \quad \gamma/B = (c/\Lambda)^{4/5}$$

$$B = \epsilon^{3/5} \tau_H^{-1}$$

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS

FUTUROS

Como salientamos em várias partes deste trabalho, até recentemente, os trabalhos tratando instabilidades resistivas em plasmas, sistematicamente desprezam a influência de fluxos de difusão sobre a dinâmica do plasma, argumentando que os modos resistivos têm uma escala de tempo muito mais rápida que τ_R . No entanto, a escala de tempo correta, está relacionada com o tempo necessário para o fluido atravessar a camada resistiva. Em outras palavras V_R só deve ser desprezado para modos em que $\gamma\delta/V_R \gg 1$.

O modo Kink Interno Resistivo tem uma razão de crescimento dada por $\gamma \sim \epsilon^{1/3} \tau_H^{-1}$ e a largura da camada $\delta \sim \epsilon^{1/3} r_0$. Portanto, para este modo, $\gamma\delta/V_R \sim \epsilon^{-1/2} \gg 1$, não devemos esperar que o fluxo de difusão afete a instabilidade do mesmo. Esta hipótese foi confirmada rigorosamente neste trabalho. Na seção III-2, concluimos que o escalonamento das grandezas tal que o comportamento assintótico $\xi \rightarrow 1/\chi$, $\chi \rightarrow \infty$ fique estabelecido, leva-nos a outras equações, contendo apenas os termos de menor ordem. Neste escalonamento, todos os termos contendo $c(V_R)$, são de ordens maiores que os demais termos. Portanto, podemos concluir finalmente que o modo Kink Interno Resistivo é indiferente à presença de fluxos difusivos através da camada singular, onde estas instabilidades tendem a se desenvolver.

No entanto, para o Modo de Reconexão, $\gamma \sim \epsilon^{3/5} \tau_H^{-1}$ e $\delta \sim \epsilon^{2/5} r_0$, temos que $\gamma\delta/V_R \sim 1$. Portanto, sob este critério, a probabilidade do modo ser afetado por fluxos de difusão é

bem grande.

Resolvemos este problema da forma padrão usando teoria da camada limite. No entanto, o fluxo difusivo introduziu um termo de dispersão na equação de auto valor para ξ , removendo as propriedades de simetria e paridade e obviamente impediu-nos de encontrar uma solução exata e geral em todo o espaço complexo para o auto valor γ .

Foi possível encontrar soluções exatas para valores assintóticos do parâmetro Λ e portanto do fluxo de difusão.

Para $\Lambda \gg 1$ encontramos que a razão de crescimento tem uma dependência direta com o quadrado do fluxo de difusão e é sempre menor que a razão de crescimento anteriormente calculada para $V_R = 0$. eq. (3-41).

Para $\Lambda = 0$ encontramos o valor crítico da derivada logarítmica $\Delta'_{\text{crít.}}$ que define as condições de instabilidade do modo, conforme expresso na eq. (3-44). Para $\lambda_H < 0$ o modo se torna instável.

Para $\Lambda \gg 1$ encontramos que γ está relacionado com o fluxo de difusão mediante uma potência $(-1/5)$, eq. (3-59). Também neste regime a razão de crescimento γ é atenuada pelo fluxo de difusão embora o seja de uma forma mais suave.

Para valores intermediários de Λ conseguimos o auto valor γ numericamente. Para valores característicos $V_0 \tau_R / r_0 \sim 2$ da velocidade de difusão encontramos que o auto valor γ é cerca de 35% menor que o anteriormente calculado para $V_R = 0$.

O auto valor γ mostra uma dependência razoável com o fluxo de difusão. No entanto a influência relativa para valores grandes de Λ se torna muito suave como podemos notar na

figura 4.

Em suma, podemos dizer que é considerável o erro de se desprezar o efeito de um fluxo de difusão no modo de Reconexão.

Uma extensão possível para este trabalho é retomarmos todo este tratamento, tanto para o modo Kink Interno Resistivo como para o modo de Reconexão, incluindo também os efeitos cinéticos do plasma. Tem sido encontrado que os efeitos cinéticos ocorrem com um caráter estabilizante em alguns modos e especialmente no modo de Reconexão.⁽²⁰⁾ Um tratamento completo incluindo a velocidade de difusão e os efeitos cinéticos deve levar a resultados muito bons.

APÊNDICE A

Pretendemos trabalhar aqui de forma mais detalhada, o sistema de equação que descreve o sistema perturbado. Iniciaremos pelas equações (2-24), (2-25), (2,26) e (2-27) que se seguem abaixo.

$$\rho_0 \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_0 \right] = \left\{ \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] \right\} \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left[\vec{V}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{B}_0 \right] - \frac{nc^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) \quad (\text{A-2})$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (\text{A-4})$$

Decomporemos as grandezas perturbadas em componentes de Fourier da forma:

$$\vec{f}_1(r, \theta, z, t) = \vec{f}_1(r) \exp [i(m\theta + kz) + \gamma t] \quad (\text{A-5})$$

portanto o comprimento de onda na direção longitudinal, é dado por $\lambda = 2\pi/k$. Como já dissemos, o nosso sistema de equilíbrio é um modelo para uma estrutura toroidal de raio maior R. Um número inteiro de comprimentos de onda tem que caber dentro de um período do sistema, ou seja,

$$2\pi R = n\lambda \quad k = \frac{n}{R}$$

Experimentalmente é verificado que sô os modos com longo comprimento de onda, são perigosos para a destruição do equilíbrio. Em particular $|n| = 1$ o que implica que $\frac{R}{a} \gg 1$ ou

$$ka \ll 1 \quad (\text{A-6})$$

Esta quantidade será usada como parâmetro pequeno de comparação para simplificar a álgebra envolvida no tratamento analítico do problema ora apresentado.

Vamos primeiramente desenvolver a equação (A-1) usando propriedades do operador nabla ∇

$$\rho_0 \nabla \times \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_1 + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_0 \right] =$$

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right]$$

$$\text{Seja } \vec{\mathcal{P}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_1 + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_0 \quad (\text{A-7})$$

$$\vec{V}_0 \equiv [V_0(r), 0, 0] \quad (\text{A-8})$$

$$\vec{V}_1 \equiv [V_{1r}(r, \theta, z, t), V_{1\theta}(r, \theta, z, t), V_{1z}(r, \theta, z, t)] \quad (\text{A-9})$$

$$(\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{V}_1 = V_0(r) \frac{\partial}{\partial r} \vec{V}_1(r, \theta, z, t) \quad (\text{A-10})$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_0 = \left[V_{1r}(r, \theta, z, t) \frac{\partial}{\partial r} V_0(r), \frac{V_{1\theta}(r, \theta, z, t) V_0(r)}{r}, 0 \right] \quad (\text{A-11})$$

Por simplicidade, não escreveremos mais as coordenadas das grandezas.

$$\vec{\mathcal{L}} = \left[\gamma V_{1r} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} + V_{1r} \frac{\partial}{\partial r} V_0, \gamma V_{1\theta} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1\theta} + \frac{V_{1\theta} V_0}{r}, \right. \\ \left. \gamma V_{1z} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1z} \right] \quad (\text{A-12})$$

$$v_x \vec{\mathcal{L}} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\gamma V_{1z} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1z}) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} (\gamma V_{1\theta} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1\theta} + \frac{V_{1\theta} V_0}{r}) , \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (\gamma V_{1r} + \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r}) - \frac{\partial}{\partial r} (\gamma V_{1z} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1z}) , \right.$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} (\gamma V_{1\theta} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1\theta} + \frac{V_{1\theta} V_0}{r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\gamma V_{1r} + \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r}) \right] =$$

usando (A-5) encontramos.

$$v_x \vec{\mathcal{L}} = \left[\frac{im}{r} (\gamma V_{1z} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_{1z}) - ik (\gamma V_{1\theta} - V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1\theta}) , \right.$$

$$ik (\gamma V_{1r} + \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r}) - \frac{\partial}{\partial r} (\gamma V_{1z} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1z}) ,$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} (\gamma V_{1\theta} + V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1\theta}) - \frac{im}{r} (\gamma V_{1r} + \frac{\partial}{\partial r} (V_0 V_{1r})) \right] \quad (\text{A-13})$$

Trabalhando a coordenada \hat{r} e $\hat{\theta}$ de (A-13) encontramos:

$$[v_x \vec{\mathcal{L}}]_r = \frac{i}{r} \{ \gamma [mV_{1z} - (kr)V_{1\theta}] + V_0 \frac{\partial}{\partial r} [mV_{1z} - (kr)V_{1\theta}] \} \quad (\text{A-14})$$

$$[v_x \vec{\mathcal{L}}]_{\theta} = ik (\gamma V_{1r} + \frac{\partial}{\partial r} V_0) V_{1r} + ik V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} - \\ - \gamma \frac{\partial}{\partial r} V_{1z} - \frac{\partial}{\partial r} V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1z} \quad (\text{A-15})$$

Deixaremos os resultados (A-14) e (A-15) para futuros tratamentos. O nosso objetivo a seguir é conseguirmos um sistema de duas equações contendo apenas as grandezas V_{1r} e B_{1r} . Com este intuito, definiremos o operador \tilde{W} como segue:

$$\tilde{W} = \left[0, -\frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A-16})$$

E tomaremos $\tilde{W} \cdot (\nabla \times \vec{L})$

$$\begin{aligned} \tilde{W} \cdot (\nabla \times \vec{L}) &= \gamma \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) V_{1r} + \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} (ikV_{1z}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \left(\frac{im}{r} V_{1\theta} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r} V_0 \left(\frac{im}{r} V_{1\theta} \right) + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r} V_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{im}{r} V_{1\theta} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial r} V_0 \frac{\partial}{\partial r} (ikV_{1z}) \right] \quad (\text{A-17}) \end{aligned}$$

Seja $A_1 \equiv \frac{\gamma}{r^2} \left[\frac{\partial r^2}{\partial r} \left(\frac{im}{r} V_{1\theta} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} (ikV_{1z}) \right]$ usando (A-4)

$$A_1 = -\frac{\gamma}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} V_{1r} - \frac{2\gamma}{r} (ikV_{1z}) \quad (\text{A-18})$$

ou seja estamos fazendo uso da hipótese de que o fluido é incompressível $\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0$.

Seja $B_1 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial r} V_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{im}{r} V_{1\theta} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} V_0 \frac{\partial}{\partial r} (ikV_{1z}) \right]$

também usando (A-5)

$$B_1 = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r} V_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} rV_{1r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 (ikV_{1z}) -$$

$$- \frac{2V_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ikV_{1z}) \quad (A-19)$$

$$C_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 \left(\frac{im}{r} V_{1\theta} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} V_0 \frac{\partial}{\partial r} rV_{1r} -$$

$$- \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 (ikV_{1z}) \quad (A-20)$$

Rearranjando A_1 , B_1 e C_1 algebricamente, encontramos as seguintes expressões:

$$A_1 = - \frac{\gamma V_{1r}}{r^2} - \frac{\gamma}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} - \frac{2\gamma}{r} (ikV_{1z}) \quad (A-21)$$

$$B_1 = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 V_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} V_{1r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} -$$

$$- \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 (ikV_{1z}) - \frac{2V_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ikV_{1z}) \quad (A-22)$$

$$C_1 = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r} -$$

$$- \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} rV_0 (ikV_{1z}) \quad (A-23)$$

$$\bar{W} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{L}}) = \gamma \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) V_{1r} + \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r} + A_1 + B_1 + C_1$$

$$\bar{W} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{L}}) = \frac{\gamma}{r^2} \left[(m^2 + k^2 r^2 - 1) V_{1r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \left[(m^2 + k^2 r^2 - 1) \frac{\partial}{\partial r} V_0 V_{1r} - \right. \\
& - \left. \left(3 \frac{\partial}{\partial r} r V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} + \frac{\partial}{\partial r} r^2 V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} \right) \right] - \\
& - \frac{2ik}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r V_0 V_{1z} + r V_0 \frac{\partial}{\partial r} V_{1z} + r V_{1z} \right) \quad (A-24)
\end{aligned}$$

Vamos agora trabalhar o lado direito da equação (A-1).

Seja:

$$(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 - \nabla (\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0) \quad (A-25)$$

$$(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 = \left[- \frac{B_{1\theta} B_{0\theta}}{r}, B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0\theta}, B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0z} \right] \quad (A-26)$$

$$\begin{aligned}
(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 &= \left[\frac{im}{r} B_{0\theta} B_{1r} + ik B_{0z} B_{1r} - \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{r}, \frac{im}{r} B_{0\theta} B_{1\theta} + \right. \\
& + ik B_{0z} B_{1\theta} + \left. \frac{B_{0\theta} B_{1r}}{r}, \frac{im}{r} B_{0\theta} B_{1z} + ik B_{0z} B_{1z} \right] \quad (A-27)
\end{aligned}$$

$$\text{Se } \vec{K} \equiv \left[0, \frac{m}{r}, k \right] \quad \text{e} \quad \vec{B}_0 = \left[0, B_{0\theta}, B_{0z} \right] \quad (A-28)$$

$$F \equiv \vec{K} \cdot \vec{B}_0 = \frac{m}{r} B_{0\theta} + k B_{0z} \quad (A-29)$$

$$\vec{\beta} \equiv (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \quad (A-30)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\beta} = & \left[\frac{im}{r} (iFB_{1z} + B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0z}) - ik(iFB_{1\theta} + B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0\theta} + \frac{B_{0\theta} B_{1r}}{r}), \right. \\
& , ik(iFB_{1r} - \frac{2B_{0\theta} B_{1\theta}}{r}) - \frac{\partial}{\partial r} (iFB_{1z} + B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0z}), \\
& , \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (iFB_{1\theta} + B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0\theta} + \frac{B_{0\theta} B_{1r}}{r}) - \\
& \left. - \frac{im}{r} (iFB_{1r} - \frac{2B_{0\theta} B_{1\theta}}{r}) \right] \quad (A-31)
\end{aligned}$$

fizemos uso da propriedade $\nabla \times \nabla(f) \equiv 0$.

As componentes radial e azimutal de (A-31) podem ser expressas como:

$$[\nabla \times \vec{\beta}]_r = F(kB_{1\theta} - \frac{m}{r} B_{1z}) + \frac{iB_{1r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{m}{k} \left[F - \frac{B_{0\theta}}{rm} (m^2 + k^2 r^2) \right] \quad (A-32)$$

$$\begin{aligned}
[\nabla \times \vec{\beta}]_\theta = & \left(-\frac{2kB_{0\theta}}{m r} - kF - \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{0z} \right) B_{1r} + \left(-\frac{2kB_{0\theta}}{m} - \frac{\partial}{\partial r} B_{0z} \right) \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} + \\
& + \left[\frac{2iB_{0\theta}}{m r^2} (k^2 r^2) - i \frac{\partial}{\partial r} F \right] B_{1z} - iF \frac{\partial}{\partial r} B_{1z} \quad (A-33)
\end{aligned}$$

Também guardaremos os resultados (A-32) e (A-33) para posteriores tratamentos.

Aplicaremos o operador \tilde{W} em (A-31)

$$\begin{aligned}
\tilde{W} \cdot (\nabla \times \vec{\beta}) = & \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) (iFB_{1r} - \frac{2B_{0\theta} B_{1\theta}}{r}) + \frac{im}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} B_{0\theta} B_{1r} + \\
& + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 iF \left(\frac{im}{r} B_{1\theta} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} iF (ikB_{1z}) \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{i}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial r} B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{m}{r} B_{0\theta} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} (kB_{0z}) \right] \quad (\text{A-34})$$

$$A_2 \equiv \frac{i}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 F \left(\frac{im}{r} B_{1\theta} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} F(ikB_{1z}) \right] \quad (\text{A-35})$$

Usando a equação de Maxwell (A-3)

$$A_2 = - \frac{iF}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} - \frac{i}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} \right) - \frac{2i}{r} F(ikB_{1z}) \quad (\text{A-36})$$

$$\begin{aligned} B_2 &\equiv \frac{i}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{m}{r} B_{0\theta} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} (kB_{0z}) \right] = \\ &= \frac{i}{r^2} B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r F + \frac{i}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} r F \right) \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} - \\ &- \frac{i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} (kB_{0z}) - \frac{i}{r^2} \left[2r B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} (kB_{0z}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-37})$$

$$\text{de (A-3)} \quad B_{1\theta} = + \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} - \frac{kr}{m} B_{1z}$$

$$C_2 \equiv \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \left(- \frac{2B_{0\theta} B_{1\theta}}{r} \right)$$

$$C_2 = - \frac{2iB_{0\theta}}{mr} \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} + \frac{2B_{0\theta}}{mr} \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) (kr) B_{1z} \quad (\text{A-38})$$

$$\tilde{W} \cdot (\nabla \times \vec{\beta}) = \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) iF B_{1r} + \frac{im}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} B_{0\theta} B_{1r} + A_2 + B_2 + C_2 \quad (\text{A-39})$$

simplificando (A-39)

$$\begin{aligned} \tilde{W} \cdot (\nabla \times \vec{\beta}) = & -\frac{i r F}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} - \frac{1}{r^2 F} \left[H(r) + \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r F \right] (r B_{1r}) \right\} - \\ & - \frac{2i B_{0\theta}}{m r^3} (k^2 r^2) \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{2 B_{0\theta}}{m r} (m^2 + k^2 r^2) + 2F \right] (k r) B_{1z} \end{aligned} \quad (A-40)$$

onde

$$H(r) = (m^2 + k^2 r^2 - 1)F - \frac{2k^2 r^2}{m} \left(\frac{m}{r} B_{0\theta} + \frac{2m^2}{k r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0z} \right)$$

Tomemos agora a equação (A-2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_1 = \nabla \times \left[\vec{V}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{B}_0 \right] - \frac{\eta c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1)$$

$$\vec{V}_0 \times \vec{B}_1 = \left[0, V_0 B_{1z}, V_0 B_{1\theta} \right] \quad (A-41)$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{B}_0 = \left[V_{1\theta} B_{0z} - V_{1z} B_{0\theta}, -V_{1r} B_{0z}, V_{1r} B_{0\theta} \right] \quad (A-42)$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \equiv \vec{V}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{B}_0 = & \left[V_{1\theta} B_{0z} - V_{1z} B_{0\theta}, \right. \\ & \left. -(V_0 B_{1z} + V_{1r} B_{0z}), V_0 B_{1\theta} + V_{1r} B_{0\theta} \right] \end{aligned} \quad (A-43)$$

$$\nabla \times \vec{\alpha} = \left[\frac{i m}{r} V_0 B_{1\theta} + \frac{i m}{r} V_{1r} B_{0\theta} + i k V_0 B_{1z} + i k V_{1r} B_{0z}, \right.$$

$$\left. , i k V_{1\theta} B_{0z} - i k V_{1z} B_{0\theta} - \frac{\partial}{\partial r} V_0 B_{1\theta} - \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} B_{0\theta}, \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_0 B_{1z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_{1r} B_{0z} - \frac{i m}{r} V_{1\theta} B_{0z} + \frac{i m}{r} V_{1z} B_{0\theta} \right]$$

(A-44)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) = & \left[\frac{im}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1\theta} + \frac{m^2}{r^2} B_{1r} + k^2 B_{1r} + ik \frac{\partial}{\partial r} B_{1z}, - \frac{km}{r} B_{1z} + \right. \\ & + k^2 B_{1\theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1\theta} + \frac{im}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_{1\theta}}{r}, \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1\theta} - \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} B_{1z} + \frac{m^2}{r^2} B_{1z} - \frac{mk}{r} B_{1\theta} \right] \end{aligned} \quad (A-45)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \alpha - \frac{\eta c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) \quad (A-46)$$

Vamos tratar a equação (A-44) separando suas componentes usando (A-3), (A-4) e (A-5).

PARTE RADIAL

$$\begin{aligned} \gamma B_{1r} = & iFV_{1r} - \frac{V_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} - \frac{\eta c^2}{4\pi} \left(\frac{im}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + B_{1\theta} + \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{r^2} B_{1r} + k^2 B_{1r} + ik \frac{\partial}{\partial r} B_{1z} \right) \end{aligned} \quad (A-47)$$

$$\begin{aligned} \gamma B_{1r} = & iFV_{1r} - \frac{V_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} + \frac{\eta c^2}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} - \right. \\ & \left. - (m^2 + k^2 r^2 - 1) \frac{B_{1r}}{r^2} + \frac{2ik}{r} B_{1z} \right] \end{aligned} \quad (A-48)$$

onde

$$\frac{im}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1\theta} + ik \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} + \frac{B_{1r}}{r^2} + \frac{2ik}{r} B_{1z}$$

PARTE AZIMUTAL

$$\begin{aligned} \gamma B_{1\theta} = & ikV_{1\theta} B_{0z} - ikV_{1z} B_{0\theta} - \frac{\partial}{\partial r} V_0 B_{1\theta} - \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} B_{0\theta} - \\ & - \frac{\eta c^2}{4\pi} \left(-\frac{km}{r} B_{1z} + k^2 B_{1\theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1\theta} + im \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_{1r}}{r} \right) \end{aligned} \quad (A-49)$$

$$\begin{aligned} ikV_{1\theta} B_{0z} - ikV_{1z} B_{0\theta} - \frac{\partial}{\partial r} V_{1r} B_{0\theta} = & iFV_{1\theta} - rV_{1r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_{0\theta}}{r} \\ - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1\theta} = & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} + \frac{B_{1\theta}}{r^2} \\ - \frac{m}{r} (kB_{1z}) = & \frac{m^2}{r^2} B_{1\theta} - \frac{2mi}{r^2} B_{1r} - \frac{mi}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_{1r} \\ \gamma B_{1\theta} = & iFV_{1\theta} - rV_{1r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_{0\theta}}{r} - \frac{\partial}{\partial r} V_0 B_{1\theta} + \\ & + \frac{\eta c^2}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} B_{1\theta} - \frac{1}{r^2} (m^2 + k^2 r^2 + 1) B_{1\theta} + \frac{2im}{r^2} B_{1r} \right] \end{aligned} \quad (A-50)$$

PARTE AXIAL

$$\begin{aligned} \gamma B_{1z} = & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_0 B_{1z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_{1r} B_{0z} - \frac{im}{r} V_{1\theta} B_{0z} + \frac{im}{r} V_{1z} B_{0\theta} - \\ & - \frac{\eta c^2}{4\pi} \left(\frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} B_{1z} + \frac{m^2}{r^2} B_{1z} - \frac{mk}{r} B_{1\theta} \right) \end{aligned} \quad (A-51)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_{1r} B_{0z} - \frac{im}{r} V_{1\theta} B_{0z} + \frac{im}{r} V_{1z} B_{0\theta} = iFV_{1z} - V_{1r} \frac{d}{dr} B_{0z}$$

$$\frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{1r} = \frac{mk}{r} B_{1\theta} + k^2 B_{1z}$$

$$\begin{aligned} \gamma B_{1z} &= iFV_{1z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_{0z} B_{1z} - V_{1r} \frac{\partial}{\partial r} B_{0z} + \\ &+ \frac{\eta c^2}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} B_{1z} - \frac{1}{r^2} (m^2 + k^2 r^2) B_{1z} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-52})$$

$$\rho_0 [\nabla \times \vec{\mathcal{P}}]_r = \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \vec{\beta}]_r \quad (\text{A-53})$$

$$\rho_0 [\nabla \times \vec{\mathcal{P}}]_\theta = \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \vec{\beta}]_\theta \quad (\text{A-54})$$

$$\rho_0 \vec{w} \cdot [\nabla \times \vec{\mathcal{P}}] = \frac{1}{4\pi} \vec{w} \cdot [\nabla \times \vec{\beta}] \quad (\text{A-55})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{1r} = [\nabla \times \vec{\mathcal{P}}]_r - \frac{\eta c^2}{4\pi} [\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1)]_r \quad (\text{A-56})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{1\theta} = [\nabla \times \vec{\mathcal{P}}]_\theta - \frac{\eta c^2}{4\pi} [\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1)]_\theta \quad (\text{A-57})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{1z} = [\nabla \times \vec{\mathcal{P}}]_z - \frac{\eta c^2}{4\pi} [\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1)]_z \quad (\text{A-58})$$

Portanto este conjunto de equações forma o sistema de seis equações diferenciais linearmente independentes desejado.

Podemos notar que em todas as equações deduzidas até agora, somente permaneceram as derivadas parciais na coordenada r como consequência do fato de que as grandezas perturbadas foram escritas numa representação de Fourier conforme

(A-5). Sendo assim abandonaremos doravante, a notação $\frac{\partial}{\partial r}f(r)$ e usaremos simplesmente $\frac{d}{dr}f(r)$ bem como as derivadas de ordens superiores. Lembrem-nos também que faremos uso de (A-6), bem como o número de onda azimutal $m = -1$ conforme justificado anteriormente. Sendo assim o nosso sistema torna-se:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{d}{dr} r^2 V_0 \frac{d^2}{dr^2} V_{1r} + \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d}{dr} V_{1r} + 3 \frac{d}{dr} r V_0 \frac{d}{dr} V_{1r} + \\
 & + 2ik \left(\frac{d}{dr} r V_0 V_{1z} + r V_0 \frac{d}{dr} V_{1z} + \gamma r V_{1z} \right) = \\
 & = \frac{i r F}{4 \pi \rho_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r B_{1r} - \frac{B_{1r}}{r F} \left[H + \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r F \right] \right\} + \\
 & + \left(\frac{4 B_{0\theta}}{r} - 2 k B_{0\theta} \right) (k r) B_{1z} \tag{A-59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \gamma \left[V_{1z} + (k r) V_{1\theta} \right] + V_0 \frac{d}{dr} \left[V_{1z} + (k r) V_{1\theta} \right] = \\
 & = \frac{i F}{4 \pi \rho_0} \left[B_{1z} + (k r) B_{1\theta} \right] + \frac{m}{4 \pi \rho_0} B_{1r} \frac{d}{dr} B_{0z} \tag{A-60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & (ik) \left[\gamma V_{1r} + \frac{d}{dr} V_0 V_{1r} \right] - \left[\gamma + \frac{d}{dr} V_0 \right] \frac{d}{dr} V_{1z} = \\
 & = - \frac{i}{4 \pi \rho_0} \frac{d}{dr} F B_{1z} - \left(\frac{2 k B_{0\theta}}{r} + k F + \frac{d^2}{dr^2} B_{0z} \right) B_{1r} - \\
 & - \left(2 k B_{0\theta} + \frac{d}{dr} B_{0z} \right) \frac{d}{dr} B_{1r} \tag{A-61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \gamma B_{1r} &= iFV_{1r} - \frac{V_0}{r} \frac{d}{dr} r B_{1r} + \frac{\eta c^2}{4\pi r^3} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d}{dr} B_{1r} + \\
 &+ (2ik) \frac{\eta c^2}{4\pi} B_{1z} \quad (A-62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \gamma B_{1\theta} &= iFV_{1\theta} - rV_{1r} \frac{d}{dr} \frac{B_{0\theta}}{r} - \frac{d}{dr} V_0 B_{1\theta} + \frac{\eta c^2}{4\pi r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} B_{1\theta} - \\
 &- \frac{\eta c^2}{4\pi} \frac{2i}{r^2} B_{1r} \quad (A-63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \gamma B_{1z} &= iFV_{1z} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r V_0 B_{1z} - V_{1r} \frac{d}{dr} B_{0z} + \\
 &+ \frac{\eta c^2}{4\pi r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} B_{1z} \quad (A-64)
 \end{aligned}$$

$$F = - \frac{B_{0\theta}}{r} + kB_{0z}$$

$$H = - 4(kr) \frac{d}{dr} B_{0z} \quad (A-65)$$

Estamos procurando um par de equações que contenha apenas as componentes V_{1r} e B_{1r} . As equações que mais se aproximam do par de equações que queremos são (A-59) e (A-62). No entanto elas contêm contribuições de V_{1z} e B_{1z} . Vamos portanto comparar, termo a termo, todos os termos que aparecer nestas equações e se possível desprezã-los no sentido de alcançarmos o nosso intento.

Para isto, vamos tratar o sistema de equações nas duas regiões distintas. Uma caracterizada pela condutividade infinita $\eta = 0$ e onde a coluna de plasma pode sem perda de

generalidadês, ser considerada em repouso e neste caso $V_0 \equiv 0$. Esta região é denominada "região de MHD ideal". A outra região se situa nas vizinhanças da região onde $F = 0$. Nesta região $n \neq 0$ e $V_0(r) \neq 0$.

REGIÃO DE MHD IDEAL

$$n = 0 \quad \text{e} \quad V_0(r) = 0$$

$$1) \quad \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d}{dr} V_{1r} + 2i\gamma(kr)V_{1z} = iF \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r B_{1r} +$$

$$+ iB_{1r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r F - 4i(kr)B_{1r} \frac{d}{dr} B_{0z} + \left[\frac{4B_{0\theta}}{r} - 2kB_{0z} \right] (kr)B_{1z}$$

(A-66)

$$2) \quad \gamma [V_{1z} + (kr)V_{1\theta}] = \frac{iF}{4\pi\rho_0} [B_{1z} + (kr)B_{1\theta}] +$$

$$+ \frac{B_{1r}}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dr} B_{0z}$$

(A-67)

$$3) \quad ik\gamma V_{1r} - \gamma \frac{d}{dr} V_{1z} = - \frac{i}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dr} F B_{1z} -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho_0} \left(\frac{2kB_{0\theta}}{r} + kF + \frac{d^2}{dr^2} B_{0z} \right) B_{1r} -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho_0} (2kB_{0\theta} + \frac{d}{dr} B_{0z}) \frac{d}{dr} B_{1r}$$

(A-68)

$$4) \quad \gamma B_{1r} = iF V_{1r}$$

(A-69)

$$5) \gamma B_{1\theta} = iFV_{1\theta} - rV_{1r} \frac{d}{dr} \frac{B_{0\theta}}{r} \quad (A-70)$$

$$6) \gamma B_{1z} = iFV_{1z} - V_{1r} \frac{d}{dr} B_{0z} \quad (A-71)$$

substituindo-se (A-69), (A-70), (A-71) em (A-67)

$$\begin{aligned} \gamma [V_{1z} + (kr)V_{1\theta}] &= \frac{iF}{4\pi\rho_0} \left[\frac{iF}{\gamma} V_{1z} - \frac{V_{1r}}{\gamma} \frac{d}{dr} B_{0z} + \frac{iF(kr)V_{1\theta}}{\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(kr)rV_{1r}}{\gamma} \frac{d}{dr} \frac{B_{0\theta}}{r} \right] + \frac{iFV_{1r}}{4\pi\rho_0\gamma} \frac{d}{dr} B_{0z} \end{aligned}$$

o segundo termo e último do lado direito se cancelam.

$$\left(\gamma - \frac{F^2}{4\pi\rho_0\gamma} \right) \left(\frac{V_{1z}}{r} + kV_{1\theta} \right) = - (kr) \frac{V_{1r}}{\gamma} \frac{d}{dr} B_{0\theta}$$

$$\left(\gamma - \frac{F^2}{4\pi\rho_0\gamma} \right) V_{1z} + \left(\gamma - \frac{F^2}{4\pi\rho_0\gamma} \right) (kr)V_{1\theta} =$$

$$- \left(\frac{r}{\gamma} \frac{d}{dr} B_{0\theta} \right) (kr)V_{1r} \quad (A-72)$$

Da equação (A-72) observamos que a grandeza V_{1z} é da ordem de $(kr)V_{1r}$ ou seja

$$V_{1z} \sim (kr)V_{1r} \quad \text{que em (A-71) produz}$$

$$B_{1z} \sim \left[\frac{iF}{\gamma}(kr) - \frac{d}{dr} B_{0z} \right] V_{1r} \quad (A-73)$$

usando estes resultados em (A-66) temos

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d}{dr} V_{1r} + 2 i \gamma (kr)^2 V_{1r} &= iF \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r B_{1r} + \\ + i B_{1r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r F - 4i(kr) B_{1r} \frac{d}{dr} B_{0z} + \\ + \left[\frac{4B_{0\theta}}{r} - 2kB_{0z} \right] (kr)^2 V_{1r} - \left[\frac{4B_{0\theta}}{r} - 2kB_{0z} \right] (kr) V_{1r} \times \frac{d}{dr} B_{0z} \end{aligned}$$

Podemos portanto desprezar todos os termos que são de ordem (kr) ou de ordens superiores. A dupla de equações (A-66,69) fica portanto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} r^3 \frac{d}{dr} V_{1r} &= iF \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r B_{1r} + i \left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r F - \right. \\ &\quad \left. - 4(kr) \frac{d}{dr} B_{0z} \right] B_{1r} \end{aligned}$$

$$\gamma B_{1r} = iF V_{1r} \quad (A-74)$$

REGIÃO RESISTIVA

No interior da camada não podemos desprezar η e nem $V_0(r)$. Como a camada é extremamente fina, vamos considerar uma geometria planar. Além disto consideraremos também que a derivada de uma grandeza perturbada é maior que a própria grandeza.

$$\frac{d}{dr} r f(r) \sim r \frac{d}{dr} f(r) \quad (A-75)$$

Lembramos que $V_0(r) = \frac{A}{r}$ onde "A" está relacionada com a resistividade "η".

Usaremos também a simplificação de notação

$$\frac{d}{dr}f(r) = f'(r)$$

$$1) (\gamma r_0^2 + 3A)V''_{1r} - r_0 A V'''_{1r} + 2ik(\gamma r_0 V_{1z} + 2A V'_{1z}) = \frac{ir_0^2 F}{4\pi\rho_0} B''_{1r} + \\ + \frac{4i(kr_0)}{4\pi\rho_0} B_{1r} B'_{0z} - \frac{ir_0^2 B_{1r}}{4\pi\rho_0} F'' + \left(\frac{2}{r} B_{0\theta} - 2F\right) \left(\frac{kr_0}{4\pi\rho_0}\right) B_{1z} \quad (A-76)$$

$$2) \gamma \left[V_{1z} + (kr_0)V_{1\theta} \right] + \frac{A}{r_0} V'_{1z} + \frac{A}{r_0} (kr_0)V'_{1\theta} = \\ = \frac{iF}{4\pi\rho_0} \left[B_{1z} + (kr_0)B_{1\theta} \right] + \frac{B_{1r}}{4\pi\rho_0} B'_{0z} \quad (A-77)$$

$$3) \frac{i}{r_0} \left(\gamma - \frac{A}{r_0^2} \right) (kr_0)V_{1r} + \frac{iA}{r_0^2} (kr_0)V'_{1r} + \left(\frac{A}{r_0^2} - \gamma \right) V'_{1z} - \\ - \frac{A}{r_0} V''_{1z} = \frac{-1}{4\pi\rho_0} \left(\frac{2kB_{0\theta}}{r_0} + kF + B''_{0z} \right) B_{1r} - \\ - \frac{1}{4\pi\rho_0} (2kB_{0\theta} + B'_{0\theta}) B'_{1r} - \frac{i}{4\pi\rho_0} (FB_{1z})' \quad (A-78)$$

$$4) \gamma B_{1r} = iFV_{1r} - \frac{A}{r_0} B'_{1r} + \frac{\eta c^2}{4\pi} B''_{1r} + \frac{\eta c^2}{4\pi} \frac{2i}{r_0} (kr_0) B_{1z} \quad (A-79)$$

$$5) \gamma B_{1\theta} = iFV_{1\theta} - r_0 V_{1r} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \right)' + \frac{A}{r_0^2} B_{1\theta} - \frac{A}{r_0} B'_{1\theta} + \\ + \frac{\eta c^2}{4\pi} B''_{1\theta} - \frac{2i\eta c^2}{4\pi} B_{1r} \quad (A-80)$$

$$6) \gamma B_{1z} = iFV_{1z} - \frac{A}{r_0} B'_{1z} - V_{1r} B'_{0z} + \frac{\eta c^2}{4\pi} B''_{1z} \quad (\text{A-81})$$

Redefinindo a variável r como:

$$\chi = \frac{r - r_0}{\delta} \quad (\text{A-82})$$

logo

$$f'(r) = \frac{d}{dr} f(r) = \frac{1}{\delta} \frac{d}{d\chi} f(\chi) = \delta^{-1} f'(\chi) \quad (\text{A-83})$$

$$\delta \ll 1$$

Dentro da camada a função $F(r_0) \equiv 0$, portanto podemos desenvolver-la em série de Taylor

$$\begin{aligned} F &\simeq - \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0) + \frac{d^2 F}{dr^2} \Big|_{r_0} (r - r_0)^2 \simeq - \\ &\simeq - \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right)_{r_0} \delta \chi \end{aligned} \quad (\text{A-84})$$

estas considerações introduzidas na equação (A-76) mostram que o segundo e terceiro termos da lado direito são de ordem $\delta \ll 1$ quando comparados com o primeiro termo do mesmo lado.

Usaremos a seguinte aproximação na eq.(A-77)

$$- \frac{B_{1r}}{4\pi\rho_0} B'_{0z} \simeq - \frac{B_{1r}}{4\pi\rho_0 k} F' = \frac{B_{1r}}{4\pi\rho_0 k} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right)_{r_0} \quad (\text{A-85})$$

O primeiro e terceiro termos do primeiro parêntesis do lado direito de (A-78) são de ordem $\delta \ll 1$ quando comparados com a ordem dos termos do segundo parêntesis do mesmo lado. O segundo termo do primeiro parêntesis é de ordem δ^2 quando submetido a mesma comparação anterior, usando argumentos se-

melhantes a estes nas demais equações, o nosso sistema torna-se:

$$\begin{aligned}
 1) \quad V''_{1r} + \frac{\gamma r_0^2 + 3A}{r_0 A} \delta V''_{1r} + \frac{2ik\delta^3}{r_0 A} \left(\gamma r_0 V_{1z} + \frac{2A}{\delta} V'_{1z} \right) &= \\
 = \frac{i r_0^2 \left(-\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right) r_0}{4\pi\rho_0 r_0 A} \chi \delta^2 B''_{1r} - 4 \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right) r_0 \frac{\delta^4 \chi (kr_0)}{4\pi\rho_0} B_{1z} & \quad (A-86)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \gamma \left[V_{1z} + (kr_0) V_{1\theta} \right] + \frac{A}{r_0 \delta} V'_{1z} + \frac{A}{r_0 \delta} V'_{1\theta} &= - \\
 - \frac{i \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right) r_0}{4\pi\rho_0} \delta \chi \left[B_{1z} + (kr_0) B_{1\theta} \right] + \frac{B_{1r}}{4\pi\rho_0 (kr_0)} \left(\frac{B_{0\theta}}{r_0} \frac{dq}{dr} \right) r_0 & \quad (A-87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{i}{r_0} \left(\gamma - \frac{A}{r_0^2} \right) (kr_0) V_{1r} + \frac{iA}{r_0} (kr_0) V'_{1r} + \left(\frac{A}{r_0^2} - \gamma \right) V'_{1z} - \frac{A}{r_0} V''_{1z} &= \\
 = - \frac{1}{4\pi\rho_0 k} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right) r_0 \frac{B'_{1r}}{\delta} + \frac{i \chi}{4\pi\rho_0} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right) r_0 B'_{1z} & \quad (A-88)
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \gamma B_{1r} = i F V_{1r} - \frac{A}{r_0 \delta} B'_{1r} + \frac{\eta c^2}{4\pi \delta^2} B''_{1r} + \frac{\eta c^2}{4\pi} \frac{2i}{r_0^2} (kr_0) B_{1z} \quad (A-89)$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \gamma B_{1\theta} = i F V_{1\theta} - r_0 V_{1r} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{dq}{dr} \right) r_0 + \frac{A}{r_0^2} B_{1\theta} - \\
 - \frac{A B'_{1\theta}}{r_0} + \frac{\eta c^2}{4\pi} B''_{1\theta} - \frac{2i \eta c^2}{4\pi} B_{1r} & \quad (A-90)
 \end{aligned}$$

$$6) \quad \gamma B_{1z} = i F V_{1z} - \frac{A}{r_0} B'_{1z} - V_{1r} B'_{0z} + \frac{\eta c^2}{4\pi} B''_{1z} \quad (A-91)$$

Definindo um parâmetro pequeno $\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R}$ onde τ_R e τ_H são os tempos característicos, resistivo e de MHD ideal respectivamente.

$$\epsilon = \frac{\tau_H}{\tau_R} \ll 1 \quad (\text{A-92})$$

$$\delta \equiv r_0 \epsilon^b, \quad \gamma \equiv \frac{\lambda \epsilon^a}{\tau_H}; \quad \tau_H \equiv \frac{r_0 \sqrt{4\pi\rho_0}}{\left[B_{0\theta} r \frac{dq}{dr} \right] r_0}$$

$$\tau_R \equiv \frac{4\pi r_0^2}{\eta c^2}, \quad C \equiv \frac{A\tau_R}{r_0^2} \quad \text{e} \quad V_1 = \gamma \xi_1$$

$$V_{1r} = \gamma r_0 \bar{\xi}, \quad V_{1\theta} = \gamma r_0 \xi_\theta; \quad V_{1z} = \gamma r_0 \xi_z \quad (\text{A-93})$$

$$B_{1r} = i B_{0\theta} \left(r \frac{dq}{dr} \right) r_0 \epsilon^c \psi, \quad B_{1\theta} = i B_{0\theta} \left(r \frac{dq}{dr} \right) r_0 \epsilon^f \psi_\theta$$

$$B_{1z} = i B_{0\theta} \left(r \frac{dq}{dr} \right) r_0 \epsilon^g \psi_z$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\xi}'''' + \left(\frac{\lambda}{c} \epsilon^{a+b-1} + 3\epsilon^b \right) \bar{\xi}'' + 2i(kr_0) \left(\frac{\lambda}{c} \xi_z \epsilon^{3b+a+e-1} + 2\epsilon^{2b+e} \xi_z' \right) = \\ = \frac{\chi \psi''}{\lambda c} \epsilon^{2b+c-a-1} - \frac{4i(kr_0) \chi \psi_z}{\lambda c} \epsilon^{g+4b-a-1} \end{aligned} \quad (\text{A-94})$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \xi_z \epsilon^e + (kr_0) \xi_\theta \epsilon^d + \frac{C}{\lambda \xi_z'} \epsilon^{e+1-a-b} + (kr_0) \frac{C}{\lambda \xi_\theta'} \epsilon^{d+1-a-b} = \\ = \frac{\chi}{\lambda^2} \psi_z \epsilon^{b+g-2a} + \frac{\chi}{\lambda^2} (kr_0) \psi_\theta \epsilon^{b+f-2a} + \frac{i\psi}{(kr_0) \lambda^2} \epsilon^{c-2a} \end{aligned} \quad (\text{A-95})$$

$$3) \quad \left(\frac{\lambda}{c} \epsilon^{2a} - \epsilon^{1+a} \right) (kr_0) \bar{\xi} + (kr_0) \bar{\xi}' \epsilon^{a-b+1} -$$

$$\begin{aligned}
& - i(\epsilon^{a+e-b+1} - \frac{\lambda}{c}\epsilon^{2a+e-b})\xi'_z + i\xi''_z\epsilon^{e+a-2b+1} = \\
& = \frac{\psi'}{(kr_0)\lambda c}\epsilon^{c-b} + i\frac{\chi\psi'_z\epsilon^g}{\lambda c}
\end{aligned} \tag{A-96}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \psi\epsilon^{a+c} & = -\chi\bar{\xi}\epsilon^{a+b} - \frac{c\psi'}{\lambda}\epsilon^{c-b+1} + \frac{\psi''}{\lambda}\epsilon^{c+1-2b} + \\
& + \frac{2i(kr_0)\psi_z}{\lambda}\epsilon^{g+1}
\end{aligned} \tag{A-97}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad \psi_\theta\epsilon^{a+f} & = -\chi\xi_\theta\epsilon^{a+b+d} - i\bar{\xi}\epsilon^a - \frac{2i\psi_\theta}{\lambda}\epsilon^{f+1} - \frac{c\psi'_\theta}{\lambda}\epsilon^{f+1-b} + \\
& + \frac{\psi''_\theta}{\lambda}\epsilon^{f+1-2b} - \frac{2i\psi}{\lambda}\epsilon^{c+1}
\end{aligned} \tag{A-98}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad \psi_z\epsilon^{a+g} & = -\chi\xi_z\epsilon^{a+b+e} - \frac{c\psi'_z}{\lambda}\epsilon^{g+1-b} - \frac{\bar{\xi}i}{(kr_0)}\epsilon^a + \\
& + \frac{\psi''}{\lambda}\epsilon^{g+1-2b} - \frac{\epsilon^{1-a}}{\lambda}\psi_z
\end{aligned} \tag{A-99}$$

$$7) \quad \bar{\xi}'\epsilon^{-b} - i\xi_\theta\epsilon^d + i(kr_0)\xi_z\epsilon^e = 0 \quad [\vec{v} \cdot \vec{V}_1 = 0] \tag{A-100}$$

$$8) \quad \xi'\epsilon^{c-b} - i\psi_\theta\epsilon^f + i(kr_0)\psi_z\epsilon^g = 0 \quad [\vec{v} \cdot \vec{B}_1 = 0] \tag{A-101}$$

$$\lambda \sim \chi \sim \bar{\xi} \sim \xi_\theta \sim \xi_z \sim \psi \sim \psi_\theta \sim \psi_z \sim c \sim 1 \text{ e } (kr_0) \ll 1 \tag{A-102}$$

As constantes $a, b, c, d, e, f, e g$ devem ser escolhidas de tal forma que as oito equações acima se tornem equilibradas em ordem de grandeza termo a termo, além de apresentarem o comportamento assintótico $\xi \sim \frac{1}{\chi}$.

$$\text{a escolha } \begin{cases} a = b = c = d = \frac{1}{3} \\ g = f = 0, \quad e = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{A-103})$$

satisfaz as exigências mencionadas acima.

Notamos também que com uma tal escolha, apenas os termos que contêm ξ e ψ em (A-94 e 97) é que são de ordem inferior termos do parâmetro pequeno ϵ e portanto são os termos que regem o comportamento do sistema descrito por elas.

O sistema (A-94) a (A-102) pode ser expresso da seguinte forma:

$$1) \bar{\xi}'' = \frac{\chi}{\lambda^2} \psi'' \quad (\text{A-104})$$

$$2) \lambda^2 (kr_0) \xi_z = \chi (kr_0) \psi_z + \chi (kr_0)^2 \psi_\theta + i\psi \quad (\text{A-105})$$

$$3) \lambda (kr_0) \xi'_z = i\psi' - \chi \psi'_z \quad (\text{A-106})$$

$$4) \psi = -\chi \bar{\xi} + \frac{1}{\lambda} \psi'' \quad (\text{A-k07})$$

$$5) \psi_\theta = -i\bar{\xi} + \frac{1}{\lambda} \psi''_\theta \quad (\text{A-108})$$

$$6) \psi_z = -\chi \xi_z - i(kr_0)^{-1} \bar{\xi} + \frac{1}{\lambda} \psi''_z \quad (\text{A-109})$$

Uma segunda possibilidade de escolha é:

(A-110)

$\psi'_0 = \text{constante}$

essão para ψ no sistema de equa -

Usando esta nova expressão (A-94) a (A-101) temos:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \bar{\xi}''' + \left(\frac{\lambda}{c}\epsilon^{a+b-1} + 3\epsilon^b\right)\bar{\xi}'' + 2i(kr_0)\left(\frac{\lambda}{c}\xi_z\epsilon^{3b+a+e-1} + 2\epsilon^{2b+e}\xi_z'\right) = \\
& = \frac{\chi\psi_1''}{\lambda c}\epsilon^{2b+c+h-a-1} - \frac{4i(kr_0)}{\lambda c}\chi\psi_z\epsilon^{g+4b-a-1} \quad (A-111)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & \xi_z\epsilon^{e+2a} + (kr_0)\xi_\theta\epsilon^{d+2a} + \frac{c}{\lambda}\xi_z'\epsilon^{e+1+a-b} + (kr_0)\frac{c}{\lambda}\xi_\theta'\epsilon^{d+1+a-b} = \\
& = \frac{\chi}{\lambda^2}\psi_z\epsilon^{b+g} + \frac{\chi}{\lambda^2}(kr_0)\psi_\theta\epsilon^{b+f} + \frac{i\psi_0}{\lambda^2(kr_0)}\epsilon^c + \frac{i\psi_1}{\lambda^2(kr_0)}\epsilon^{c+h} \quad (A-112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \left(\frac{\lambda}{c}\epsilon^{2a} - \epsilon^{1+a}\right)(kr_0)^2\bar{\xi} + (kr_0)^2\bar{\xi}'\epsilon^{a-b+1} - \\
& - i\left(\epsilon^{a+e-b+1} - \frac{\lambda}{c}\epsilon^{2a+e-b}\right)(kr_0)\xi_z' - \xi_z''\epsilon^{e+a-2b+1} = \\
& = \frac{\psi_1'}{\lambda c}\epsilon^{c+h-b} + i(kr_0)\frac{\chi}{\lambda c}\psi_z'\epsilon^g \quad (A-113)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & \psi_0\epsilon^{a+c} + \psi_1\epsilon^{a+c+h} = -\chi\bar{\xi}\epsilon^{a+c} - \frac{c}{\lambda}\psi_1'\epsilon^{c+1+h-b} + \\
& + \frac{2i(kr_0)}{\lambda}\psi_z\epsilon^{g+1} + \frac{\psi_1''}{\lambda}\epsilon^{c+1+h-2b} \quad (A-114)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad & \psi_\theta\epsilon^{a+f} = -\chi\xi_\theta\epsilon^{a+b+d} - i\bar{\xi}\epsilon^a - \frac{2i\psi_\theta}{\lambda}\epsilon^{f+1} - \frac{c\psi_\theta'}{\lambda}\epsilon^{f+1-b} + \\
& + \frac{\psi_\theta''}{\lambda}\epsilon^{f+1-2b} + \frac{2i\psi_0}{\lambda}\epsilon^{c+1} + \frac{2i}{\lambda}\psi_1\epsilon^{c+h+1} \quad (A-115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad & \psi_z\epsilon^{a+g} = -\chi\xi_z\epsilon^{a+b+e} - \frac{c\psi_z'}{\lambda}\epsilon^{g+1-b} - \frac{i\bar{\xi}}{(kr_0)}\epsilon^a + \\
& + \frac{\psi_z''}{\lambda}\epsilon^{g+1-2b} - \frac{\psi_z}{\lambda}\epsilon^{g+1} \quad (A-116)
\end{aligned}$$

$$7) \quad \psi_1'\epsilon^{c+h-b} - i\psi_\theta\epsilon^f + i(kr_0)\psi_z\epsilon^g = 0 \quad (A-117)$$

$$8) \bar{\xi}' \varepsilon^{-b} + i \xi_{\theta} \varepsilon^d + i(kr_0) \xi_z \varepsilon^e = 0 \quad (\text{A-118})$$

$$\bar{\xi} \sim \xi_{\theta} \sim \xi_z \sim \psi_0 \sim \psi_1 \sim \psi_{\theta} \sim \psi_z \sim \lambda \sim c \sim \chi \sim 1 \quad (\text{A-119})$$

Analisando este sistema acima termo por termo, concluímos que a escolha:

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = c = f = g = h = \frac{2}{5}, \quad d = e = -\frac{2}{5} \quad (\text{A-120})$$

torna-o consistente tanto no equilíbrio das equações quanto às ordens de grandezas dos termos como também no comportamento assintótico $\bar{\xi} \rightarrow \frac{1}{\chi}$, quando $\chi \rightarrow \infty$.

Podemos finalmente escrever o sistema da seguinte forma:

$$1) \xi''' + \frac{\lambda}{c} \xi'' = \frac{\chi}{\lambda c} \psi_1'' \quad (\text{A-121})$$

$$2) \psi_0 = \text{constante} \quad (\text{A-122})$$

$$3) \lambda^2 (kr_0) \xi_z' - \lambda c (kr_0) \xi_z'' = \psi_1' + i \chi \psi_z' \quad (\text{A-123})$$

$$4) \psi_0 = -\chi \xi + \frac{1}{\lambda} \psi_1'' \quad (\text{A-124})$$

$$5) \chi \xi_{\theta} + i \xi = \frac{1}{\lambda} \psi_{\theta}'' \quad (\text{A-125})$$

$$6) i \xi + (kr_0) \chi \xi_z = 0 \quad (\text{A-126})$$

$$7) \psi_1' - i \psi_{\theta} + i(kr_0) \psi_z = 0 \quad (\text{A-127})$$

$$8) \xi' + i \xi + i(kr_0) \xi_z = 0 \quad (\text{A-128})$$

Com esta escolha para as constantes a,b,c,d,e,f,g e h, notamos que as equações (A-121) e (A-124) só contêm as contribuições desejadas isto é de B_{1r} e V_{1r} .

$$\left\{ \begin{array}{l} C\xi''' + \lambda\xi'' = \frac{\chi}{\lambda}\psi_1'' \\ \psi_0 = -\chi\xi + \frac{1}{\lambda}\psi_1'' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A-129)} \\ \text{(A-130)} \end{array}$$

APÊNDICE B

Vamos trabalhar aqui o sistema (2-32) e (2-33) na região MHD Ideal. No limite de resistividade nula i.e. $\eta = 0$ teremos $\vec{V}_0(r) = \frac{A}{r} \hat{r} \propto \eta = 0$. Estaremos formando o modo $|m| = 1$ e considerando $kr \ll 1$.

$$\gamma B_{1r} = iFV_{1r} = \gamma iF\xi \quad \therefore \quad \gamma B_{1r} = i(rF)\xi \quad (\text{B-1})$$

usando o resultado (B-1) na equação (2-32) temos.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\gamma}{r} \frac{d}{dr} \rho r^2 \frac{d\gamma}{dr} \xi &= i(rF) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} i(rF)\xi - \right. \\ &\left. - \frac{i r F \xi}{Fr^2} \left[H + \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} rF \right] \right\} \quad (\text{B-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (4\pi\gamma^2 \rho r^3 \frac{d}{dr} \xi) &= F \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} rF\xi + FH\xi + \\ &+ F\xi \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} rF \quad (\text{B-3}) \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{d}{dr} (4\pi\gamma^2 \rho r^3 \frac{d}{dr} \xi) + (rF) \left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (rF)\xi - \xi \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (rF) \right] - (Fr)H\xi = 0$$

seja

$$g = FHr \text{ e } f(r, F, \xi) = (rF) \left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (rF)\xi - \xi \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (rF) \right] \quad (\text{B-4})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (rF)\xi &= F\xi + 3r\xi \frac{dF}{dr} + 3rF \frac{d\xi}{dr} + \\ &+ 2\left(\frac{dF}{dr}\right)\left(\frac{d\xi}{dr}\right) + r^2 \left(\xi \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{Fd^2 \xi}{dr^2} \right) \quad (\text{B-5}) \end{aligned}$$

$$\xi \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} r F = \xi F + 3r\xi \frac{d}{dr} F + r^2 \frac{\xi d^2 F}{dr^2} \quad (\text{B-6})$$

$$f(r, F, \xi) = (rF) \left[F\xi + 3r\xi \frac{dF}{dr} + 3rF \frac{d\xi}{dr} + 2r^2 \left(\frac{d\xi}{dr} \right) \left(\frac{dF}{dr} \right) + r^2 \xi \frac{d^2 F}{dr^2} + r^2 F \frac{d^2 \xi}{dr^2} - \xi F - 3r\xi \frac{dF}{dr} - r^2 \xi \frac{d^2 F}{dr^2} \right]$$

os termos semelhantes e de sinais opostos se cancelam.

$$f(r, F, \xi) = \frac{d}{dr} r^2 F^2 \frac{d}{dr} \xi \quad (\text{B-7})$$

Portanto a expressão (B-2) torna-se

$$\frac{d}{dr} r^3 (4\pi\gamma^2 \rho + F^2) \frac{d}{dr} \xi - g\xi = 0 \quad (\text{B-8})$$

$$F = kB_{0z} - \frac{B_{0\theta}}{r} \quad (\text{B-9})$$

$$H = -4(kr) \frac{d}{dr} B_{0z} \quad (\text{B-10})$$

$$g = rFH \quad (\text{B-11})$$

APÊNDICE C

Cálculo de $G(\Lambda)$ para os valores assintóticos de Λ .

$$\Lambda \ll 1$$

$$\Delta' = \lambda^{5/4} G(\Lambda) \quad (C-1)$$

$$G(\Lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x [1 + \text{th}(t, \Lambda)] dt \quad (C-2)$$

$$h(t, \Lambda) = h_0(t) + \Lambda h_1(t) + \Lambda^2 h_2(t) + \dots \quad (C-3)$$

$$G(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \Lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{th}_2 dt \quad (C-4)$$

$$G(\Lambda) = G(0) + \Lambda^2 G \quad (C-5)$$

Primeiramente, notemos que é possível solucionar-se a equação (3-31-a) analiticamente.

$$\text{Seja } \frac{d^2}{dt^2} h_0 - t^2 h_0 = t \quad (C-6)$$

$$\text{definimos } z = \frac{t^2}{2}, \quad h_0(t) = Y(z) e^{-z} \quad (C-7)$$

então (B-6) torna-se:

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} - (2z - \frac{1}{2}) \frac{dy}{dz} - \frac{1}{2} y = (-\frac{z}{2})^{1/2} e^z \quad (C-8)$$

Suponhamos uma solução particular para (C-8) da seguinte forma:

$$y_p(z) = z^\alpha \int_c dt V(t) e^{zt} \quad (C-9)$$

onde o expoente " α ", o contorno c e a função $V(t)$ devem ser

determinadas com condições de contorno apropriadas.

Substituindo (C-9) em (C-8) encontramos:

$$\int_c dt V(t) \left[(t^2 - 2t) \frac{d}{dt} e^{zt} + (2\alpha + \frac{1}{2})(t - 1)e^{zt} \right] =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^{-1/2} z^{-\alpha} e^z \quad (C-10)$$

uma integração por partes para o primeiro termo do integrando de (C-10) leva-nos a:

$$V(t)(t^2 - 2t)e^{zt} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_c dt e^{zt} \left[\frac{d}{dt} \{V(t)(t^2 - 2t)\} - \right.$$

$$\left. - (2\alpha + \frac{1}{2})(t - 1) \right] = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} z^{-\alpha} e^z \quad (C-11)$$

onde t_1 e t_2 são os extremos do contorno de integração c .

Se exigirmos que o integrando se anule identicamente ao longo do contorno c teremos:

$$\frac{d}{dt} \{ V(t)(t^2 - 2t) \} - (2\alpha + \frac{1}{2})(t - 1)V(t) = 0 \quad (C-12)$$

Sendo assim o contorno c fica consistentemente determinado, isto é,

$$(t^2 - 2t) V(t) e^{zt} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{z^{1/2-\alpha}}{\sqrt{2}} e^z \quad (C-13)$$

de (C-12) temos:

$$V(t) = K [t(2 - t)]^{\alpha-3/4} \quad (C-14)$$

onde K é uma constante de integração.

Usando (C-14) em (C-13)

$$- K(t^2 - 2t)^2 e^{zt} \Big|_{t_1}^{t_2} = 2^{-1/2} z^{1/2-\alpha} e^z \quad (C-15)$$

O percurso mais simples que pode ser usado em (C-15) é o segmento do eixo real no plano complexo começando em $t = 0$ e seguindo até $t = 1$. Para isto concorrem também os parâmetros K e α .

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad K = -2^{-1/2} \quad (\text{C-16})$$

Portanto

$$h_0(t) = -\frac{t}{2} \int_0^1 dx [x(x-2)]^{-1/4} e^{\frac{-1}{2}t^2(1-x)} \quad (\text{C-17})$$

Notemos que $h_0(t)$ é uma função par.

Desenvolvendo $G(0)$ em (C-4) e usando (C-17) obtemos:

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{d^2 h}{dt^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \frac{dh_0}{dt} \Big|_{-x}^x + \frac{1}{t^2} h_0 \Big|_{-x}^x \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^3} h_0 dt \quad (\text{C-18})$$

onde (C-18) foi integrada por partes.

O limite quando $x \rightarrow \infty$ em (C-18) é zero porque tanto h_0 quanto sua derivada tem um comportamento proporcional a $\exp(-x^2)$.

$$G(0) = 4 \int_0^{\infty} \frac{h_0}{t^3} dt = -2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} \int_0^1 dx [x(2-x)]^{-1/4} e^{\frac{-1}{2}t^2(1-x)} \quad (\text{C-19})$$

fazendo $t = \left(\frac{2y}{1-x}\right)^{1/2}$ em (C-19) temos

$$G(0) = -2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8}} \frac{(1-x)^{1/2}}{|x(2-x)|^{1/4}} \int_0^{\infty} y^{-3/2} e^{-y} dy = \\ = -\frac{\Gamma(-1/2)}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-x)^{1/2} x^{-1/4} (2-x)^{-1/4} dx \quad (\text{C-20})$$

$$G(0) = - \frac{\Gamma(-1/2)}{2^{3/4}} \times \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(3/2)}{\Gamma(9/4)} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, z = \frac{1}{2}\right) \quad (C-21)$$

Utilizando as propriedades padrões das funções Gama e Hipergeométrica obtemos finalmente:

$$G(0) = 2\pi \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \cong 2,12 \quad (C-22)$$

A hierarquia de funções (3-31) pode ser expandida em polinômios de Hermite da seguinte maneira:

$$h_0'' - t^2 h_0 = t \quad (C-23)$$

$$h_1'' - t^2 h_1 = -h_0''' \quad (C-24)$$

$$h_2'' - t^2 h_2 = -h_1''' \quad (C-25)$$

⋮

$$h_{0,1,2} = e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(0); (1), (2)} H_n \quad (C-26)$$

$$h'_{0,1,2} = e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(0), (1), (2)} (H'_n - tH_n) \quad (C-27)$$

$$h''_{0,1,2} = e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{0,1,2} [H''_n - 2tH'_n + (t^2 - 1)H_n] \quad (C-28)$$

$$h'''_{0,1,2} = e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{0,1,2} [H'''_n - 3tH''_n + 3(t^2 - 1)H'_n - (t^3 - 3t)H_n] \quad (C-29)$$

portanto (C-23) torna-se

$$e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^0 (2n + 1)H_n(t) = -t \quad (C-30)$$

onde utilizamos a propriedade padrão:

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0 \tag{C-31}$$

Multiplicando (C-30) por $e^{-t^2/2}H_m$ e integrando no intervalo $(-\infty, \infty)$ encontramos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^0 (2n+1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n H_m dt = - \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} H_m dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^0 (2n+1) 2^n \pi^{1/2} n! \delta_{n,m} = - \frac{(2\pi)^{1/2} (m+1)!}{\left(\frac{m+1}{2}\right)!} \quad \left| \begin{array}{l} m \text{ impar} \\ \hline \end{array} \right. \tag{C-32}$$

fazendo $m = 2v + 1$

$$\alpha_{2v+1}^0 = \frac{-2^{1/2}}{2^v (4v+3) (2v+1)!} ;$$

$$h_0(t) = e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{2^{1/2} H_{2v+1}(t)}{2^v (4v+3) (2v+1)!} \tag{C-33}$$

Usando (C-31) e (C-29) em (C-24), multiplicando por $e^{-t^2/2}H_m$ e integrando no domínio dos polinômios de Hermite encontramos que:

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{(n+1)(2n+5)}{(2n+1)} \alpha_{n+1}^{(0)} \tag{C-34}$$

mas os coeficientes α_0 sô existem para os valores $n+1 = 2v+1$ ($v = 0, 1, 2, \dots$).

$$\alpha_{2v}^{(1)} = \frac{2^{1/2} (2v+1) (4v+5)}{2^v (4v+3) (4v+1) (2v+1)!}$$

$$h_1(t) = e^{-t^2/2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{2^{1/2} (2v+1) (4v+5) H_{2v}(t)}{2^v (4v+3) (4v+1) (2v+1)!} \tag{C-35}$$

Devido à estrutura das equações (C-24) e C-25) ser a mesma, os coeficientes $\alpha_n^{(2)}$ são:

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{(n+1)(2n+5)}{(2n+1)} \alpha_{n+1}^{(0)} \quad (\text{C-36})$$

mas os coeficientes $\alpha_{n+1}^{(0)}$ sã existem para $n+1 = 2v$

$$\alpha_{2v-1}^{(2)} = \frac{2^{1/2} (2v+1)(4v+5)}{2^v (4v+1)(4v-1)(2v+1)!}$$

$$h_2(t) = e^{-t^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1/2} v(2v+1)(4v+5)}{2^v (4v+1)(4v-1)(2v+1)!} H_{2v-1}(t) \quad (\text{C-37})$$

mas $G = \int_{-\infty}^{\infty} t h_2(t) dt$

$$\begin{aligned} G &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3/2} v(2v+1)(4v+5)}{2^v (4v+1)(4v-1)(2v+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} H_{2v-1}(t) dt = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2^{3/2} v(2v+1)(4v+5)}{2^v (4v+1)(4v-1)(2v+1)!} \left[\frac{(2\pi)^{1/2} (n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!} \right] \end{aligned}$$

onde $n = 2v-1$ (ímpar)

$$G = 4\pi^{1/2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v(2v+1)(4v+5)}{(4v+1)(4v-1)(2v+1)!} \quad (\text{C-38})$$

O fator $[(2v+1)!]^{-1}$ faz com que a série convirja rapidamente

$$G \cong 2,25 \quad (\text{C-39})$$

finalmente, agrupando (C-38), (C-22) em (C-5) encontramos:

$$G(\Lambda) = 2,12 + 2,25\Lambda^2 = 2,12 + 2,25c^2\lambda^{-5/2} \quad (\text{C-40})$$

$\Lambda \gg 1$

Para obtermos o correto comportamento assintótico da solução da equação (3-38) redefiniremos o problema conforme equação (3-46) a (3-51). Desta forma temos

$$G(\Lambda) = \Lambda^{1/5} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + zf(z)] dz \quad (C-41)$$

onde

$$f(z) = \mathcal{F}^{-1} [g(k)] = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} g(k) dk \quad (C-42)$$

e a função g satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dk^2} g(k) + ik^3 g(k) = -2\pi i \frac{d}{dk} \delta(k) \quad (C-43)$$

No limite quando $k \rightarrow 0$ podemos remover o segundo termo do lado esquerdo de (C-43). Neste limite, notamos que a derivada $g'(k)$ é descontínua de salto infinito e a função $g(k)$ é descontínua de salto finito.

Ademais o espaço de soluções da equação (C-43) homogênea contém as funções de Hankel de ordem $\nu = \frac{1}{5}$, ou seja:

$$g(k) = \begin{cases} A u(k)/u(0) & k > 0 \\ B u^*(-k)/u(0) & k < 0 \end{cases} \quad (C-44)$$

$$(C-45)$$

onde as constante A e B podem ser complexas.

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} g(k) - \lim_{k \rightarrow 0^-} g(k) = A - B = \Delta g = -2\pi i \quad (C-46)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} g'(k) - \lim_{k \rightarrow 0^-} g'(k) = \Delta g'(k) = 0 \quad (C-47)$$

$$A = a + ic, \quad B = b + id \quad (C-48)$$

$$A - B = 2\pi i \quad a = b \quad e \quad c = d - 2\pi \quad (C-49)$$

$$\Delta g'(k) = A \left(\frac{1}{u(k)} \frac{d}{dk} u(k) \right)_{k \rightarrow 0^+} - B \left(\frac{1}{u^*(k)} \frac{d}{dk} u^*(-k) \right)_{k \rightarrow 0^-} = 0 \quad (C-50)$$

como

$$\frac{\text{Im} \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dk} \right)}{\text{Re} \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dk} \right)} = \text{Tan} \left[\arg \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dk} \right) \right] = \tan \left(\frac{\pi}{10} \right) \quad (C-51)$$

Associando (C-48), (C-49), C-50) e (C-51) e usando as propriedades das funções de Hankel (complexas) encontramos:

$$A = -\pi \text{Tan} \left(\frac{\pi}{10} \right) \quad (C-52)$$

$$B = -\pi \left[\text{Tan} \left(\frac{\pi}{10} \right) - 2i \right] \quad (C-53)$$

De (C-41) temos:

$$zf(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} z g(k) dk = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \frac{\partial}{\partial k} e^{-ikz} dk \quad (C-54)$$

Integrando-se (C-54) por partes e lembrando que $g(k)$ é descontínua e $g'(k) = -2\pi i \delta(k)$.

$$zf(z) = -1 + \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[g(-\epsilon) e^{i\epsilon z} - g(\epsilon) e^{-i\epsilon z} \right] \quad (C-55)$$

usando (C-55) na equação (C-41) temos:

$$G(\Lambda) = \Lambda^{1/5} \left(\frac{i}{2\pi} \right) \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{2 \text{sen} \epsilon x}{\epsilon} \left[g(-\epsilon) - g(\epsilon) \right] \right\} \quad (C-56)$$

usando o valor da descontinuidade da função Δg temos finalmente que:

$$G(\Lambda) = 2\Lambda^{1/5} = 2\lambda^{-1/4} c^{1/5} \quad (C-57)$$

REFERÊNCIAS

- (1) I.B. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal, and R.M. Kulsrud, Proc. Royal Soc. A 224, 1 (1958).
- (2) W.A. Newcomb, Ann. Phys. 10, 232 (1960).
- (3) P.H. Sakanaka and J.P. Goedbloed, Phys. Fluids 17, 919 (1974).
- (4) J.A. Wesson, Nuclear Fusion .
- (5) J.P. Goedbloed, in Trends in Physics 1978, M.M. Woolfson, Editor; Adam Hilger Ltd, Bristol 1979, p. 324.
- (6) H.P. Furth, J. Killeen, and M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 6, 459 (1963).
- (7) B.B. Kadomtsev, Fiz. Plazmy 1, 710 (1975).
- (8) B. Carreras, H.R. Hicks, and B.V. Waddell, Nuclear Fusion 19, 583 (1979).
- (9) J.H. Irby, J.F. Drake, and H.R. Griem, Phys. Rev. Lett. 42, 228 (1979).
- (10) C. Chiuderi, in Trends in Physics 1978, M.M. Woolfson Editor; Adam Hilger Ltd. Bristol 1979, p.336.
- (11) B. Coppi, G. Laval, and R. Pellat, Phys. Rev. Lett. 16, 1207 (1966).
- (12) B. Coppi, J.M. Greene, and J.L. Johnson, Nuclear Fusion 6, 101 (1966).
- (13) H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill series in Mechanical Engineering, 6th Edition (1968).
- (14) D. Dobrott, S.C. Prager, and J.B. Taylor; Phys. Fluids 20, 1850 (1977).

- (15) J. Killeen and A.I. Shestakov, *Phys. Fluids* 21, 1746 (1978).
- (16) R.K. Pollard and J.B. Taylor, *Phys. Fluids* 22, 126 (1979).
- (17) S.V. Bulanov, J. Sakai, and S.I. Syrovatskii, *Fiz. Plasmy* 5, 280 (1979) *Sov. J. Plasma Phys.* 5, 157 (1979).
- (18) H.P. Furth, *Nuclear Fusion and Scientific American*.
- (19) B. Coppi, R. Galvão, R. Pellat, M.N. Rosenbluth, and P.H. Rutherford, *Fiz. Plazmy* 2, 961 (1976) *Sov. J. Plasma Phys.* 2.
- (20) B. Basu and B. Coppi, *Nuclear Fusion* 17, 1245 (1977).
- (21) S. von Goeler, W. Stodiek, and N. Sauthoff, *Phys. Rev. Lett.* 33, 1201 (1974).
- (22) G.L. Jahns, M. Soler, B.V. Waddell, J.D. Callen, H.R. Hicks, *Nuclear Fusion* 18, 609 (1978); também B.V. Waddell, G.L. Jahns, J.D. Callen, H.R. Hicks, *Nuclear Fusion* 18, 735 (1978).
- (23) J.P. Goedbloed, Notes on Magnetohydrodynamics, Universidade Estadual de Campinas. Campinas (1979).