

GERAÇÃO DE FÓTONS MUITO DUROS POR
ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA
RADIACÃO SÍNCROTRON

Este exemplar corresponde à peça final
da Tese defendida pelo aluno Antonio Luiz
Fernandes Marques e aprovada pela Comissão
Julgadora.

7.5. 1993

Carla Augusta Luella

monografia apresentada para
defesa de tese de mestrado
no Instituto de Física
"Gleb Wataghin" (IFGW)
UNICAMP.

Antonio Luiz Fernandes Marques

À MÔNICA,
COM AMOR

AGRADECIMENTOS

À meu pai e minha mãe por terem me colocado no primeiro ano primário, pois se não fosse isso não estaria aqui.

Ao Prof. Dr. Bernardo Lakes pela sua orientação nos assuntos relacionados ao IFGW/UNICAMP.

Ao Prof. Paulo Roberto Labegalini pelo seu empenho, como Chefe do Departamento de Física e Química (DFQ/ICI/EFEI), pela capacitação dos docentes do DFQ.

À assembléia do DFQ por ter aprovado meu pedido de afastamento, de dois anos, da EFEI para continuar meu curso de mestrado.

À CAPES por ter financiado meu projeto de tese.

Ao Prof. Dr. Ariel Caticha por ter proposto este tema de tese, pela orientação segura e constante, e pela disposição em discutir sobre o tema mesmo após ter se transferido do IFGW/UNICAMP.

À Prof^a. Dr^a. Carola Dobrigkeit [Chinellato por ter aceito a coorientação deste projeto, por ter assumido oficialmente a orientação após a transferência do Ariel, e principalmente por não ter medido esforços, através de sua orientação segura e constante, para que fosse possível defendermos esta tese de mestrado neste semestre.

Aos professores Dr. José Bellandi Filho e Dr. Antonio Rubens Brito de Castro pelas sugestões e disposição em discutir sobre o tema da tese.

Ao Prof. Dr. Farnézio Moreira de Carvalho Filho, atual Chefe do DFQ/ICI/EFEI, por me liberar sempre que precisei me deslocar para a UNICAMP.

Ao Prof. Dr. Élcio Rogério Barrak, Diretor do Instituto de Ciências (ICI/EFEI), por ter colocado à minha disposição todos os recursos do ICI.

Ao Departamento de Raios C3smicos e Cronologia (DRCC/IFGW/UNICAM) por ter cedido suas depend4ncias para a realiza33o deste projeto.

À CPG/IFGW e sua secretaria pelo apoio institucional.

À Matilde, secret3ria do DFQ, por ter me auxiliado na digita33o do texto da tese.

Ao Prof. Sebastião Fernandes por ter me ajudado a editar o texto da tese.

À M3nica, em especial, por ter me ag3ntado todos estes anos.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente me auxiliaram e me incentivaram durante este projeto.

OBRIGADO ...

RESUMO

O mecanismo mais eficiente para se gerar fótons com energia da ordem de 100 MeV ou acima é o espalhamento Compton inverso de luz de laser por elétrons relativísticos. Pode-se elevar a energia dos fótons emitidos aumentando-se a energia dos elétrons (o que encarece muito os experimentos) ou a energia do fóton. S. Caticha-Ellis sugeriu (1983) que um feixe intenso de raios X pode ser obtido pela retrodifração da radiação síncrotron em um cristal, abrindo assim a possibilidade de se gerar fótons duros pelo espalhamento Compton inverso da própria radiação síncrotron. Dessa forma os fótons emitidos podem ter energias maiores do que a energia do feixe de elétrons (vários GeV), sendo altamente colimados e não polarizados. Esses fótons podem ser usados em experiências de física nuclear e para se testar a eletrodinâmica quântica.

THE GENERATION OF VERY HARD PHOTONS BY INVERSE COMPTON SCATTERING OF SYNCHROTRON RADIATION

ABSTRACT

The most efficient mechanism to generate photons in the 100 MeV energy range is by Inverse Compton Scattering (ICS) of laser from relativistic electron. The energy of the emitted photons can be increased by raising either the energy of the electron, which is very expensive, or that of the photon. With the suggestion (S. Caticha-Ellis, 1983) that intense X-ray beams could be obtained by back-reflecting synchrotron radiation using a crystal diffracting at normal incidence, the possibility is now open of generating very hard photons by ICS of the synchrotron radiation itself. The photons emitted in this way will have energies ranging all the way up to the electron beam energy (up to the several GeV), will be non-polarized and highly collimated. The photons may be used to study phenomena of quantum electrodynamics and nuclear physics.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - RADIAÇÃO SÍNCROTRON</u>	2
2.1 Histórico	2
2.2 - O feixe de elétrons	4
2.3 - Propriedades da radiação síncrotron	9
A) Radiação de cargas em movimento	9
B) Potencia total radiada por uma carga	11
C) Distribuição angular da radiação emitida por uma carga acelerada	15
D) Interdependência da distribuição espectral e angular	19
E) Fluxo da radiação emitida	27
2.4 - Onduladores	28
a) Ondulador fraco	30
b) Ondulador forte	33
<u>CAPÍTULO 3 - RAIOS X</u>	35
3.1 - Introdução	35
3.2 - Interferência de ondas planas	39
3.3 - Espalhamento por um cristal	41
3.4 - Condições de difração	45
3.5 - Teoria dinâmica da difração dos raios X	47
3.6 - Difração dinâmica dos raios X para cristais finos a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$	50
<u>CAPÍTULO 4 - EFEITO COMPTON</u>	53
4.1 - Histórico	53
4.2 - Seção de choque do espalhamento Compton	57
4.3 - Seção de choque de Klein-Nishina	61

<u>CAPÍTULO 5 - ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA RADIAÇÃO</u> <u>SÍNCROTRON</u>	74
5.1 - Espalhamento Compton inverso	74
5.2 - Seção de choque para o espalhamento Compton inverso da radiação síncrotron	79
5.3 - Fluxo de fótons para o espalhamento Compton inverso da radiação síncrotron retrodifratada a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$	84
<u>CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</u>	89
<u>APÊNDICE A</u>	92
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	100

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Há quase meio século o espalhamento Compton inverso é estudado.

A princípio foi usado para descrever interações de raios cósmicos e atualmente este espalhamento é utilizado na geração de fótons de energias da ordem de centenas de MeV, polarizados, para o estudo da fotodesintegração do deuteron no projeto Laser + Eletrons Gama Source (LEGS) do National Synchrotron Light Source (NSLS) de Brookhaven National Laboratory (BNL).

Após a sugestão de S. Caticha-Ellis da construção de novas linhas de luz nos anéis de armazenamento retrodifratando radiação X por um cristal, ficou aberta a possibilidade de utilização da própria radiação síncrotron como fonte de fótons para o estudo do efeito Compton inverso com os elétrons do anel de armazenamento.

O recuo dos elétrons não é desprezível no ECI da radiação síncrotron e a energia dos fótons espalhados é da ordem da energia dos elétrons, alguns GeV.

Este projeto de tese tem como objetivo estudar o espalhamento Compton inverso da radiação síncrotron retrodifratada por um cristal a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$. Para isso apresentaremos algumas características da radiação síncrotron no capítulo 2, os resultados obtidos por Ariel Caticha e S. Caticha-Ellis para a difração dinâmica dos raios X em um cristal de grafite para ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$ no capítulo 3 e deduziremos a seção de choque de Klein-Nishina que descreve este espalhamento no capítulo 4. No capítulo 5 obteremos uma estimativa do fluxo de fótons resultantes do espalhamento Compton inverso da radiação síncrotron retrodifratada por um cristal a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$. Os comentários e conclusões constam do capítulo 6.

RADIAÇÃO SÍNCROTRON

Luz Síncrotron é emitida por elétrons de alta energia quando seu movimento é perturbado por um campo magnético. Neste capítulo faremos um estudo das características dessa radiação, iniciando com um breve histórico tendo a preocupação de mostrar a origem desta grande área de pesquisa. Faremos também uma breve discussão sobre a distribuição dos elétrons no anel de armazenamento, mostrando sua influência sobre as propriedades da radiação síncrotron.

Através do estudo da radiação emitida por uma carga em movimento discutiremos a distribuição angular e espectral da radiação síncrotron. Finalmente, apresentaremos as propriedades de uma inserção no anel de armazenamento, o ondulador; pois ela será útil para a viabilização da utilização dos fótons gerados pelo espalhamento Compton inverso da radiação síncrotron retrodifratada por um cristal.

2.1. HISTÓRICO

Quase um século se passou desde que Liénard⁽¹⁾, em 1898, publicou os resultados dos seus estudos sobre a radiação emitida por uma carga elétrica movendo-se em uma trajetória circular, onde calculou a razão da radiação emitida pelos elétrons sob a ação da aceleração centrípeta. Este estudo foi estendido por Schott⁽²⁾ em 1907, calculando a intensidade e a distribuição angular da radiação dos elétrons em vários caminhos dentro de suas órbitas. Schott desenvolveu a teoria clássica da radiação de um elétron movendo-se em uma região onde o campo magnético é homogêneo, como uma tentativa de entender a natureza discreta dos espectros atômicos. Entretanto este desenvolvimento baseado nos primeiros modelos atômicos não obteve grandes sucessos e por aproximadamente 40 anos as investigações de Schott sobre a intensidade, a

distribuição espectral e angular da radiação emitida por um elétron só despertaram interesse acadêmico.

O problema da radiação de elétrons relativísticos adquiriu interesse especial em função do rápido desenvolvimento das técnicas de aceleradores cíclicos de elétrons.

Em um acelerador cíclico, como um Betatron por exemplo, os elétrons se movem em trajetória circular sob a ação de um campo magnético que aumenta adiabaticamente com o tempo e é praticamente homogêneo ao longo da trajetória da carga. A descrição teórica do regime de aceleração foi lançada por Wideröe⁽³⁾. Já que, sob tais condições, o elétron torna-se uma fonte de radiação eletromagnética, surgiu a questão sobre a influência da perda da energia radiada sobre a operação de um acelerador de indução.

A possibilidade de violação do regime de trabalho normal do Betatron foi primeiro apontada por Ivanenko e Pomeranchuk⁽⁴⁾, estabelecendo que em um Betatron a energia do elétron apenas pode aumentar até um valor limite, por causa da perda de energia por radiação.

Em 1946, Blewett⁽⁵⁾ publicou os resultados de suas experiências que testavam as predições de Ivanenko e Pomeranchuk usando o Betatron de 100 MeV da GE, recém-construído. Blewett acreditava que a potência total da radiação era em torno de 1 W, podendo ser avaliada por detecção. Experimentalmente a radiação não foi diretamente detetada embora a perda de energia pudesse ser inferida da estrutura das órbitas dos elétrons. Nesta época, Schwinger⁽⁶⁾ em seus cálculos sobre a radiação clássica dos elétrons acelerados, mostrou que a radiação, procurada por Blewett na região de microondas, seria encontrada na faixa do infravermelho ou do espectro visível.

Em 1947 Pollock⁽⁷⁾ formou uma equipe para a construção de um Síncrotron de 70 MeV, usando a idéia da injeção de elétrons a partir do Betatron. Assim conseguiu chegar à radiação síncrotron de 300 MeV, dando início a esta grande área de pesquisa.

2.2. O FEIXE DE ELÉTRONS

Em um Síncrotron os elétrons são confinados em uma trajetória circular⁽⁸⁾ por elementos magnéticos como mostrados na figura 1.

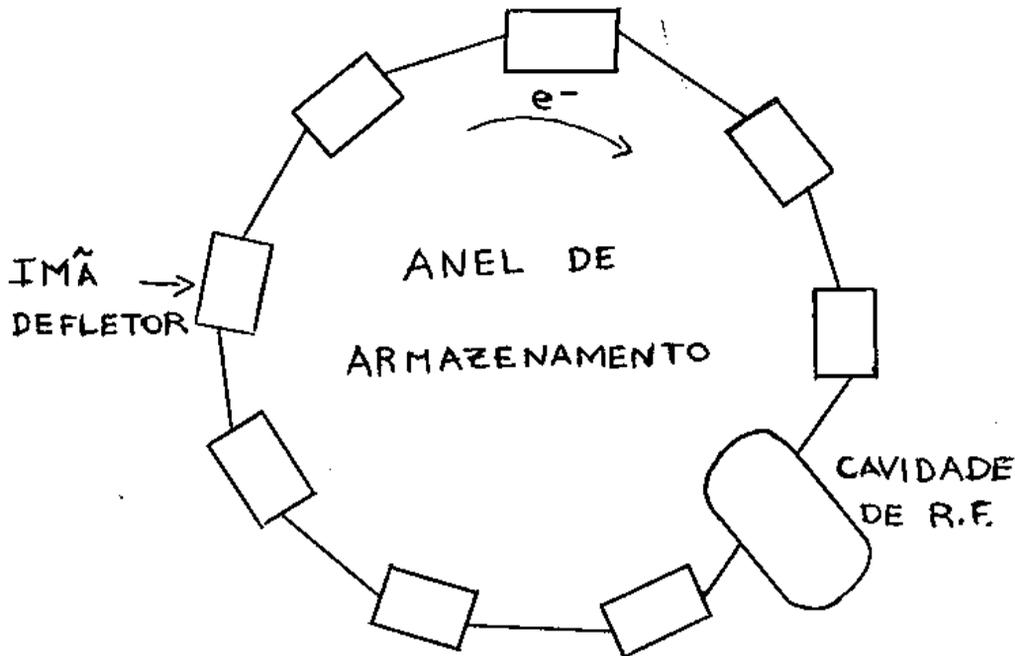


FIG.1. ESQUEMA DO ANEL DE ARMAZENAMENTO DE ELÉTRONS

Deseja-se escrever as equações de movimento de um elétron que se move sobre uma trajetória próxima à órbita ideal (entende-se aqui esta última como aquela em que um elétron com a energia nominal E_0 coincidente com a projetada, uma vez iniciando seu movimento na órbita ideal, o manterá indefinidamente). O tratamento destas equações de movimento será feito aqui em primeira aproximação (linear), admitindo portanto pequenos os afastamentos em relação à órbita ideal.

Convém usar como coordenadas que especificam a posição instantânea do elétron (s, x, z) , onde s é a distância ao longo da órbita ideal, a partir de um ponto de referência arbitrário, e x e z são as distâncias horizontal e vertical medidas a partir da órbita ideal. Aqui x e z serão considerados pequenos (muito menores do que o raio de curvatura da trajetória).

Durante cada revolução o elétron perde uma pequena fração de sua energia através da Radiação Síncrotron. Esta energia é compensada pelo ganho de energia na cavidade de radiofrequência.

Analisaremos o movimento de um elétron P sobre uma órbita plana ideal \underline{s} , onde $\vec{R}(s)$ é o vetor posição do elétron em relação a uma origem arbitrária como mostra a figura 2⁽⁹⁾.

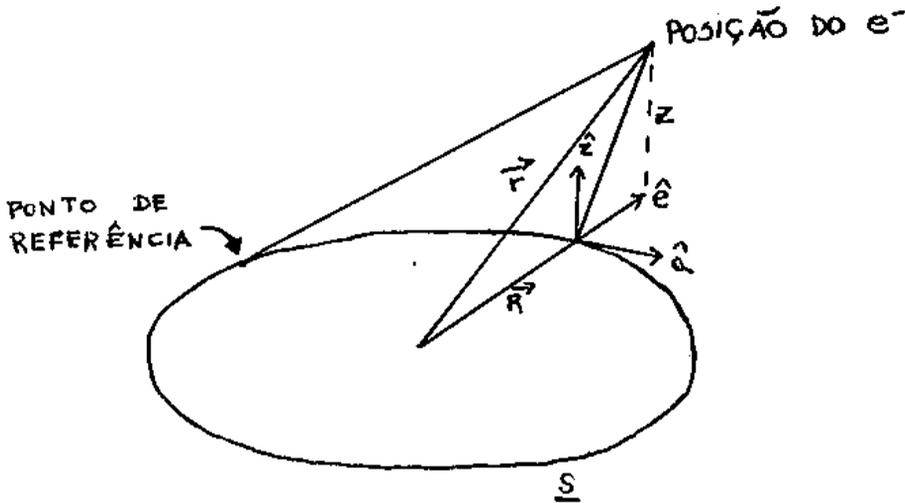


FIG.2. ESQUEMA DA TRAJETÓRIA DO ELÉTRON SOBRE UMA ÓRBITA IDEAL \underline{s} SUPOSTA CIRCULAR

Tomando-se os vetores unitários paralelo, \hat{a} , e perpendicular, \hat{e} , a \underline{s} como

$$\hat{a} = \frac{d\vec{R}}{ds} \quad e \quad \hat{e} = -R(s) \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} \quad , \quad (2.1)$$

podemos escrever o vetor unitário na direção \underline{z} , \hat{z} , como:

$$\hat{z} = \hat{a} \times \hat{e} = -R(s) \frac{d\vec{R}}{ds} \times \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} \quad . \quad (2.2)$$

Definindo-se a função de curvatura $G(s)$ como o inverso de $R(s)$, isto é

$$G(s) = \frac{1}{R(s)} \quad , \quad (2.3)$$

temos que

$$\frac{d\hat{a}}{ds} = \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} = -\frac{\hat{e}(s)}{R(s)} = -G(s)\hat{e} \quad (2.4)$$

e

$$\frac{d\hat{e}}{ds} = G(s)\hat{a} \quad (2.5)$$

Portanto pode-se chegar à equação da trajetória, considerando:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}(s) + x\hat{e}(s) + z\hat{z}(s) \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\dot{s} + \dot{x}\hat{e} + x\frac{d\hat{e}}{ds}\dot{s} + \dot{z}\hat{z} \\ &= \dot{s}(1 + xG)\hat{a} + \dot{x}\hat{e} + \dot{z}\hat{z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde "·" denota a derivação em relação ao tempo.

Para encontrarmos o módulo de \vec{v} fazemos:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{v} &= v^2 = \dot{s}^2(1 + Gx)^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2 \\ v &= \left[(1 + Gx)^2 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}{\dot{s}^2} \right]^{1/2} \dot{s} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para baixa dispersão do feixe vale a aproximação

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 \ll \dot{s}^2 \cong c^2 \quad (2.8)$$

$$v = (1 + Gx)\dot{s}.$$

Portanto, para a aproximação linear ilustrada na figura 3, teremos

$$\frac{dl}{dt} \cong (1 + Gx) \frac{ds}{dt} \quad (2.9a)$$

ou ainda

$$\frac{dl}{ds} \cong (1 + Gx) \quad (2.9b)$$

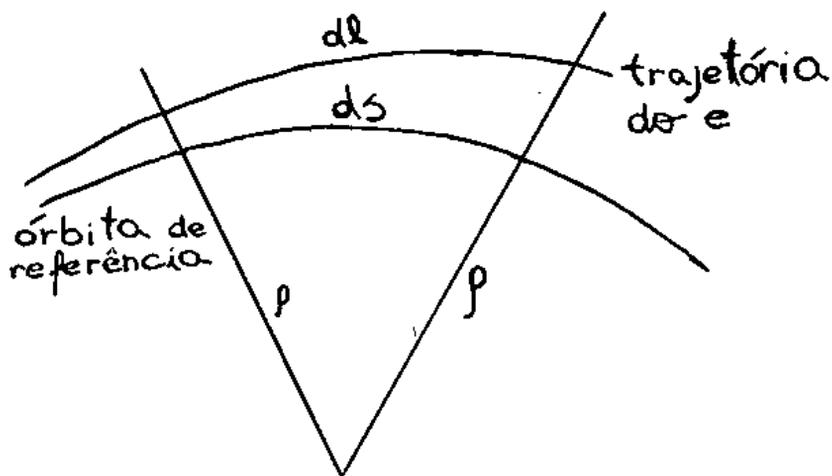


FIG.3. ILUSTRAÇÃO DA APROXIMAÇÃO LINEAR, EQUAÇÃO (2.9a)

O campo acelerador periódico força os elétrons a circular em "pacotes". A trajetória de cada elétron, pertencente a um pacote, tende à trajetória de uma partícula ideal de referência no centro do "pacote" (que se move com uma velocidade constante ao longo da órbita).

Em uma situação estacionária as distribuições das amplitudes de oscilação e fases dos elétrons em um pacote também serão estacionárias, com distribuição gaussiana de amplitudes nas coordenadas transversal e longitudinal como esquematizado na figura 4.

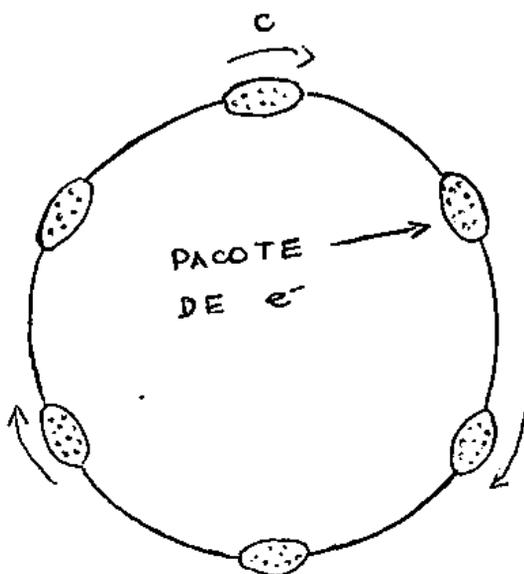


FIG.4 "PACOTES" DE ELÉTRONS CIRCULANDO NO ANEL DE ARMAZENAMENTO

Para estudar o comportamento dos elétrons em sua trajetória circular dentro do anel de armazenamento podemos, em primeira aproximação, considerá-los como partículas que não interagem entre si e, a partir desta hipótese podemos descrever os efeitos destas partículas. Quando o número de elétrons no pacote que circula é grande, tipicamente maior que 10^3 , interações entre os elétrons do pacote ou entre os pacotes passam a ficar importantes. Temos uma série de efeitos coletivos que devem ser levados em conta, como por exemplo:

1) O EFEITO TOUSCHECK

Dois elétrons oscilando, dentro do pacote, sofrem espalhamento coulombiano, causando uma transferência mútua de parte de suas energias de oscilação de uma coordenada para outra. As novas amplitudes podem contribuir para um aumento nas dimensões do pacote. Este efeito é significativo a baixas energias, tipicamente da ordem de 1 GeV.

11) OSCILAÇÕES COERENTES

Cada elétron, no pacote que circula, produz um campo eletromagnético, na câmara de vácuo, que influencia o movimento dos outros elétrons armazenados. Tais interações coletivas entre elétrons podem gerar oscilações coerentes instáveis, em que os elétrons do pacote oscilam num modo coletivo, com amplitude aumentando exponencialmente com o tempo. Tais oscilações coerentes podem se dar tanto no movimento longitudinal dos elétrons quanto no transversal, e podem levar também a um aumento do tamanho do pacote.

A interferência construtiva dos campos de radiação dos elétrons dentro de um pacote pode gerar radiação síncrotron coerente, o que pode aumentar a perda de energia de cada elétron, acarretando assim a diminuição da vida média do feixe.

Vemos que uma série de efeitos são responsáveis pela distribuição do feixe de elétrons e portanto são responsáveis pelas propriedades da radiação síncrotron.

2.3 PROPRIEDADES DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON

A. RADIAÇÃO DE CARGAS EM MOVIMENTO

Na Eletrodinâmica Clássica^{(10) (11)}, as equações que descrevem as interações eletromagnéticas são as equações de Maxwell, que no vácuo, na presença de fontes e no sistema gaussiano de unidades têm a forma:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde a densidade volumétrica de carga, $\rho(\vec{r}, t)$, e a densidade superficial de corrente, $\vec{J}(\vec{r}, t)$, para uma carga q em movimento, como mostrado na figura 5, têm a forma:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= q \vec{v}_0(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

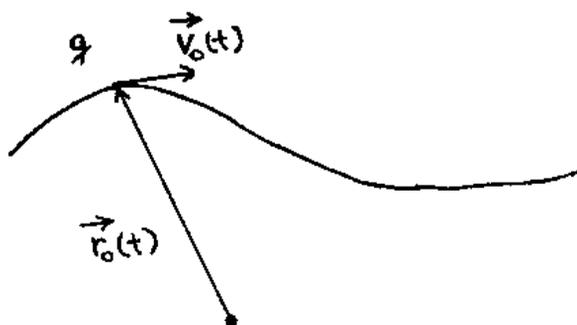


FIG. 5. TRAJETÓRIA DO ELÉTRON, $\vec{r}_0(t)$, E SUA VELOCIDADE $\vec{v}_0(t)$

Podemos escrever os campos elétrico e magnético em função dos seus respectivos potenciais como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.12)$$

Então as equações de Maxwell podem ser escritas em termos dos potenciais como

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.14)$$

Usando as transformações de calibre

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \quad (2.15)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\text{e a condição de Lorentz: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.16)$$

podemos desacoplar as equações (2.13) e (2.14), e como resultado, ficamos com duas equações de onda não homogêneas, uma para ϕ e outra para \vec{A} :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \quad (2.17)$$

As equações (2.17), juntamente com a equação (2.16), formam um conjunto de equações equivalentes, sob todos pontos de vista, às equações de Maxwell.

As soluções das equações (2.17) são:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}'', t') \frac{\delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}''|} d^3 r'' dt' \quad (2.18a)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \rho(\vec{r}'', t') \frac{\delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}''|} d^3 r'' dt'. \quad (2.18b)$$

Portanto, usando os resultados das equações (2.18) nas equações (2.12), determinamos os campos elétricos e magnéticos para essa distribuição de carga^(*):

(*) CÁLCULOS NO APÊNDICE A

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left(\frac{(\hat{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 R} \right)_{\text{ret}} \quad (2.19a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.19b)$$

onde o colchete com o índice "ret" indica que a grandeza nele compreendida deve ser estimada no instante retardado

$$t' = t - R/c.$$

\vec{r} é a posição do observador em t

\vec{r}' é a posição da carga móvel em t'

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'(t')$$

$\hat{n} = \vec{R}/R$ é um versor dirigido da posição da carga para o ponto de observação

$$\vec{\beta} = \vec{v}'(t') / c$$

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{dt'} = \dot{\vec{v}}'(t') / c$$

A diferença entre t e t' é o intervalo de tempo necessário para a luz se propagar de \vec{r}' até \vec{r} , e é igual a $|\vec{r} - \vec{r}'|/c$. Podemos notar que as equações (2.19) apresentam contribuições dependentes da velocidade $\vec{\beta}$ e contribuições dependentes da aceleração $\dot{\vec{\beta}}$.

B.POTÊNCIA TOTAL RADIADA POR UMA CARGA

O fluxo de energia é dado pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad , \quad (2.20)$$

que, com os valores para os campos elétrico e magnético dados pelas equações (2.19), fica

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}(\vec{r}, t) \times [\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)] = \frac{c}{4\pi} \{E^2 \hat{n} - (\vec{E} \cdot \hat{n}) \vec{E}\}. \quad (2.21)$$

Para obtermos a potência radiada através do elemento de área $d\vec{A}$, durante um intervalo de tempo dt , que equivale à energia que foi perdida pelo elétron durante um intervalo de tempo dt' retardado, fazemos

$$dU(t') = \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} dt \quad (2.22)$$

Lembrando que $t' = t - R/c$, e portanto $\frac{dt}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}$, podemos escrever:

$$\frac{dU(t')}{dt'} = \vec{S}(\vec{r}, t) \frac{dt}{dt'} \cdot d\vec{A} \quad (2.23)$$

Para encontrarmos a potência radiada por unidade de ângulo sólido, Ω , só precisamos dividir por $d\Omega$ a equação (2.23):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dU(t')}{dt' d\Omega} = [\hat{n} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t)] (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) R^2 \quad (2.24)$$

a) caso não relativístico

Quando uma carga está acelerada, mas é observada num referencial onde sua velocidade é pequena em comparação com a velocidade da luz, o termo $(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \approx 1$. Então o seu campo elétrico tem a forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\hat{n}}{R^2} + \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{cR} \right]_{ret} \quad (2.25)$$

O primeiro termo da equação (2.25) é uma contribuição quase estática polarizada longitudinalmente ao vetor de propagação \hat{n} , só sendo relevante perto da carga que se movimenta, e o segundo termo é uma contribuição polarizada perpendicularmente.

Resolvendo a equação (2.21), que determina o vetor de Poynting para este caso, e utilizando este resultado na equação (2.24) encontramos a potência emitida por unidade de ângulo sólido,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}} \sin^2 \theta, \quad (2.26)$$

onde θ é o ângulo entre a direção do vetor $\dot{\vec{\beta}}$ e a direção do vetor \hat{n} como mostra a figura 6.

Portanto a potência emitida instantaneamente em todas as direções é dada pela integral, em relação ao ângulo sólido infinitesimal, $d\Omega$, como mostra a equação abaixo

$$\int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \quad (2.27)$$

que é conhecida como a fórmula de Larmor, para uma carga acelerada não-relativística. Cumpre notar que a radiação emitida é polarizada no plano que contém $\dot{\vec{\beta}}$ e \vec{n} , como se pode ver facilmente em (2.25).

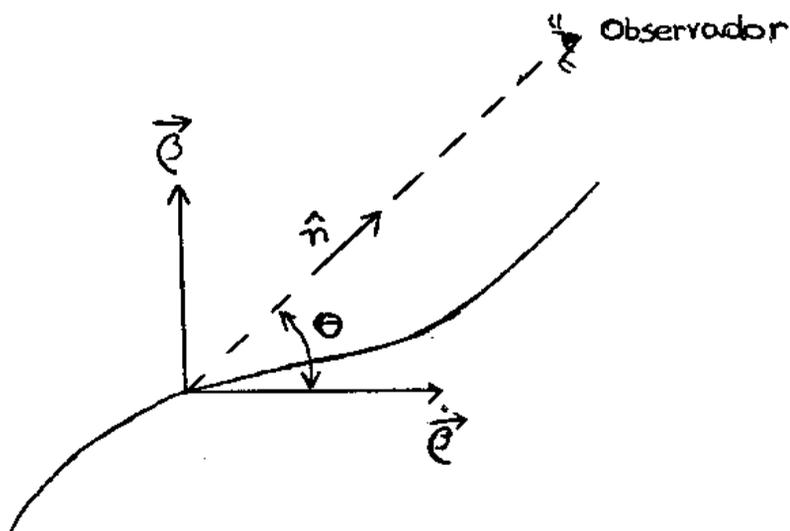


FIG. 6 ESQUEMA QUE MOSTRA A DIREÇÃO DO OBSERVADOR NO REFERENCIAL FORMADO POR $\dot{\vec{\beta}}$ E $\vec{\beta}$.

b) caso relativístico

Quando uma carga está acelerada mas sua velocidade é comparável à velocidade da luz, $\beta \rightarrow 1$, o termo $(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})$ depende fortemente do ângulo entre \hat{n} e $\vec{\beta}$. Neste caso, a expressão da potência radiada tem a forma:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} [E^2 - (\dot{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2] (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) R^2 \quad (2.28)$$

Neste caso o campo elétrico, equação (2.19), fica com a forma:

$$\dot{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = q \left(\frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^3 R} \right)_{ret} \quad (2.29)$$

Portanto a equação (2.28) toma a forma:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^5} \{ \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 - 2(\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \} \quad (2.30)$$

O resultado acima se reduz à equação (2.26) se $\beta \rightarrow 0$.

A potência total emitida em todas as direções será

$$P = \frac{2q^2}{3c} \left(\frac{(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta^2)^3} \right)_{ret} \quad (2.31)$$

Em um anel síncrotron, se ρ for o raio da órbita, a trajetória do elétron será dada por:

$$\vec{r}'(t') = \rho (\hat{x} \cos \omega t' + \hat{y} \sin \omega t') \quad (2.32)$$

sua velocidade por

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \frac{\omega \rho}{c} (\hat{y} \cos \omega t' - \hat{x} \sin \omega t') \quad (2.33)$$

e sua aceleração por

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}}(t') = -\frac{\omega^2 \rho}{c} (\hat{x} \cos \omega t' + \hat{y} \sin \omega t') \quad (2.34)$$

Assim a potência total emitida por esse elétron (2.31) é dada por

$$P = \frac{2q^2 c}{3\rho^2} \beta^4 \gamma^4 \quad (2.35)$$

onde usamos $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ e $\omega = c\beta/\rho$. Este resultado foi obtido pela primeira vez por Liénard⁽¹⁾. A perda radiativa, por volta, é

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4 \quad (2.36)$$

C. DISTRIBUIÇÃO ANGULAR DA RADIAÇÃO EMITIDA POR UMA CARGA ACELERADA

Para uma carga acelerada em movimento não relativístico a distribuição angular mostra o comportamento simples em $\sin^2\theta$, expresso pela equação (2.26), onde θ está medido em relação à aceleração. No movimento relativístico os campos de aceleração dependem da velocidade e também da aceleração. Por isso, a distribuição angular é mais complicada. Da equação (2.19a), pode-se calcular a componente radial do vetor de Poynting, e obter

$$[\vec{S} \cdot \hat{n}]_{ret} = \frac{q^2}{4\pi c} \left(\frac{1}{R^2} \left| \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right|^2 \right)_{ret} \quad (2.37)$$

onde estão presentes dois efeitos relativísticos. Um deles é o efeito da relação espacial específica entre $\dot{\vec{\beta}}$ e $\vec{\beta}$, que determinará a distribuição angular detalhada. O outro é um efeito relativístico geral, que provém da transformação do referencial de repouso da partícula para o referencial do observador, e manifesta-se pela presença dos fatores $(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})$ no denominador de (2.37). No caso de partículas ultra-relativísticas, o segundo efeito é dominante para a distribuição angular.

Na equação (2.37), o produto $\vec{S} \cdot \hat{n}$ é a energia por unidade de área por unidade de tempo detetada num ponto de observação e num instante t , e corresponde à radiação emitida pela carga no instante $t' = t - R(t')/c$. Se quiséssemos calcular a energia radiada durante um intervalo finito de aceleração, de $t' = T_1$ até $t' = T_2$, escreveríamos:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{t = T_1 + R(T_1)/c}^{t = T_2 + R(T_2)/c} [\vec{S} \cdot \hat{n}]_{ret} dt \\
 &= \int_{t' = T_1}^{t' = T_2} [\vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}] \frac{dt}{dt'} dt' \quad . \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Vemos então que a grandeza útil e significativa é $[\vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}] [dt/dt']$, isto é, a potência radiada por unidade de área em termos do tempo no referencial da carga. Por isso, definimos a potência radiada por unidade de ângulo sólido como:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 [\vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}] \frac{dt}{dt'} = \hat{n} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) R^2 \quad . \quad (2.39)$$

Se imaginarmos que a carga é acelerada por apenas um curto intervalo de tempo, durante o qual $\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{\beta}}$ são essencialmente constantes em direção e módulo, e se observarmos a radiação a uma distância suficiente da carga para que \hat{n} e \vec{R} se modifiquem desprezivelmente durante o intervalo de aceleração, veremos que (2.39) é proporcional à distribuição angular da energia radiada. Com a equação (2.37) para o vetor de Poynting, a distribuição angular ficará com a forma:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left(\frac{|\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} \right)_{ret} \quad . \quad (2.40)$$

No caso de um movimento retilíneo, $\dot{\vec{\beta}}$ é paralelo a $\vec{\beta}$, e a equação (2.40) fica com a forma

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad . \quad (2.41)$$

Para $\beta \ll 1$ a equação (2.41) se reduz ao resultado de Larmor. Para $\beta \sim 1$ a distribuição angular está concentrada em 2 lobos estreitos quase paralelos à direção de $\vec{\beta}$, como mostra a figura 7.

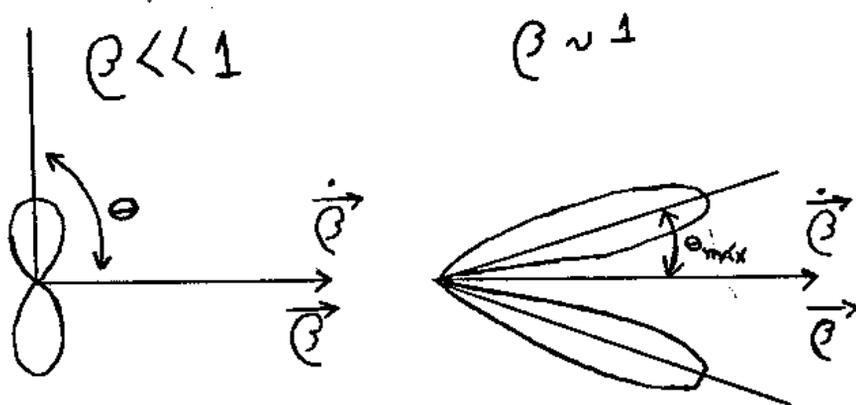


FIG.7. ESQUEMA DA DISTRIBUIÇÃO ANGULAR DA ENERGIA RADIADA POR UMA CARGA ACELERADA NA DIREÇÃO DO SEU MOVIMENTO

O ângulo θ_{\max} para o qual a intensidade é um máximo é

$$\theta_{\max} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right) \right) . \quad (2.42)$$

Quando $\beta \rightarrow 1$, $\theta_{\max} \rightarrow \frac{1}{2\gamma}$, e a intensidade do pico é proporcional a γ^8 . No caso de partículas relativísticas, θ_{\max} é muito pequeno, da ordem da razão entre a energia de repouso da partícula e a sua energia total. A distribuição angular está confinada num cone muito estreito, na direção do movimento. Para estes ângulos pequenos, a distribuição angular toma a forma

$$\frac{dP}{d\Omega} \cong \frac{8q^2\dot{\beta}^2}{\pi c} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} . \quad (2.43)$$

Na figura 8, o pico ocorre em $\gamma\theta = 1/2$, e os pontos de meia-potência estão em $\gamma\theta = 0.23$ e $\gamma\theta = 0.91$. O ângulo médio quadrático de emissão, no limite relativístico, é

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{E} \quad (2.44)$$

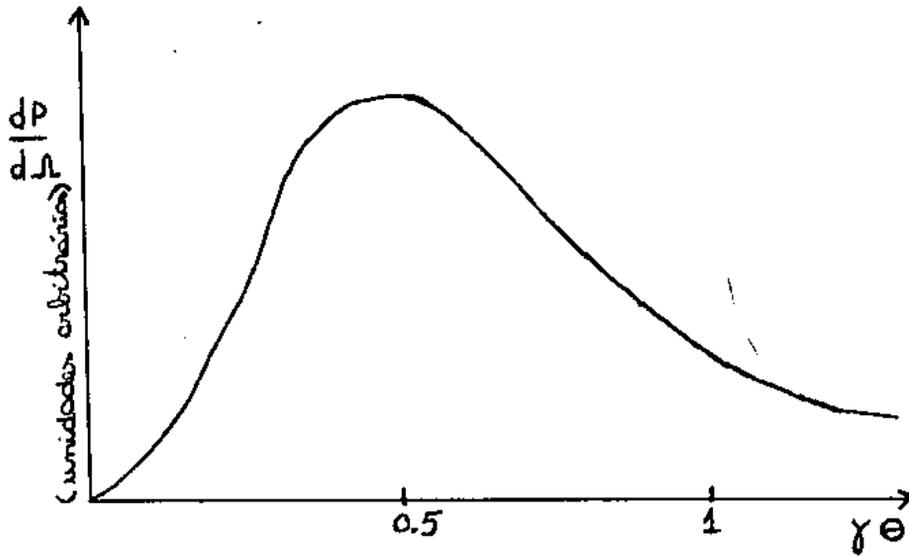


FIG.8. DISTRIBUIÇÃO ANGULAR DA RADIAÇÃO EMITIDA POR UMA CARGA ACELERADA

Em um anel síncrotron, em que os elétrons estão em um movimento circular, a distribuição angular da radiação é dada por:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\dot{\beta}|^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos\theta)^2} \right) \quad (2.45)$$

onde a aceleração $\dot{\beta}$ é perpendicular à sua velocidade β e escolhemos nosso sistema de coordenadas onde β está, instantaneamente, na direção z e $\dot{\beta}$ na direção x, como mostra a figura 9.

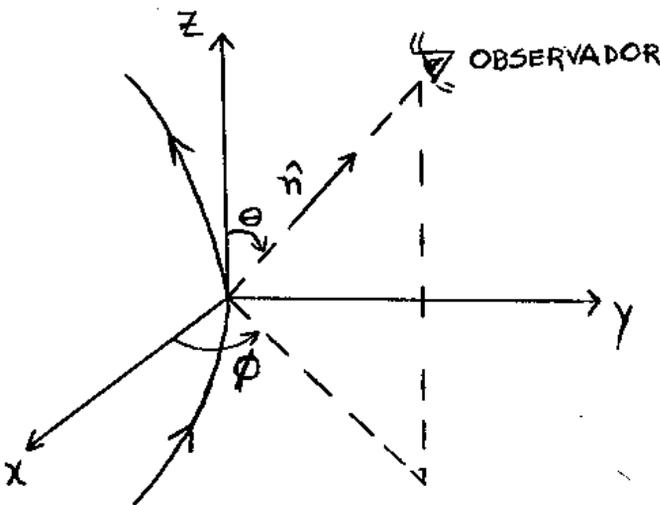


FIG.9 SISTEMA DE COORDENADAS ADOTADO NA EQUAÇÃO (2.45) (ÓRBITA CONTIDA NO PLANO XZ)

Observamos, na equação (2.45), que embora a distribuição angular seja diferente da que aparece no caso da aceleração linear, o mesmo pico característico do efeito relativístico, dirigido para a frente, também está presente. No limite relativístico, $\gamma \gg 1$, a distribuição angular é dada por

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \beta^2}{4\pi c} \frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left(1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right) \quad (2.46)$$

e o ângulo médio quadrático da emissão, nesta aproximação, é dado pela equação (2.44), tal como no movimento unidimensional.

D. INTERDEPENDÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO ESPECTRAL E ANGULAR

A radiação emitida em um anel síncrotron usual, onde a carga descreve um movimento circular, abrange comprimentos de onda em uma faixa bastante larga, incluindo desde alguns Angstroms até dezenas de metros. Toda a emissão se origina em uma região pequena, que pode ser comparada a um "orifício" pelo qual a radiação passa. Dentro dessa analogia, esperaríamos que os comprimentos de onda longos sofressem forte difração, ao passo que os comprimentos de onda curtos não fossem afetados por difração.

Esperamos então, em $\theta = 0$ o feixe com uma grande concentração de comprimentos de onda curtos e em $\theta \neq 0$ uma grande concentração de comprimentos de onda longos. Na verdade a parte visível do espectro é tão estreita, em ω , comparada com a faixa total da emissão, que no visível a radiação é rigorosamente "branca".

Para calcularmos a distribuição espectral da radiação emitida por uma carga em movimento circular partiremos da potência emitida por unidade de ângulo sólido

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left(\frac{|\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^6} \right)_{\text{ret}} = |\vec{A}(t)|^2, \quad (2.47)$$

onde definimos

$$\vec{A}(t) = \left[\sqrt{\frac{c}{4\pi}} (\mathbf{R}\vec{E}) \right]_{\text{ret}} \quad (2.48)$$

e o campo elétrico é dado pela equação (2.19a). Na equação (2.47), a potência instantânea está expressa no tempo do observador, pois queremos considerar o espectro observado de frequências. Vamos fazer a hipótese de que a partícula é acelerada e emite radiação só durante um intervalo de tempo finito, de modo que a potência radiada seja zero para tempos anteriores e posteriores a este intervalo. Além disso supomos que a energia total radiada seja finita.

A energia total radiada por unidade de ângulo sólido é a integral no tempo de (2.47):

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP(t)}{d\Omega} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{A}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t)^* dt \quad (2.49)$$

A integral acima pode ser expressa, também, como uma integral sobre o espectro de frequências. Introduzindo a transformada de Fourier $\vec{A}(\omega)$ de $\vec{A}(t)$,

$$\vec{A}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.50a)$$

e a sua inversa

$$\vec{A}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t} dt \quad (2.50b)$$

a equação (2.49) pode ser escrita como

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \vec{A}^*(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \quad (2.51)$$

A troca da ordem de integração entre o tempo e a frequência mostra que a integral no tempo é justamente a representação de Fourier da função delta $\delta(\omega' - \omega)$. Por isso, a energia total radiada por unidade de ângulo sólido fica

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\vec{A}(\omega)|^2 \quad (2.52)$$

A igualdade de (2.52) e (2.49), com restrições matemáticas apropriadas para $\vec{A}(t)$, consiste no teorema de Parseval. É usual integrar somente sobre as freqüências positivas, pois o sinal negativo da freqüência não tem sentido físico. Então a relação

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (2.53)$$

define uma grandeza, $\frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega}$, que é a energia radiada por unidade de ângulo sólido por unidade de freqüência, que está associada à polarização \hat{e} :

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} = |\vec{A}(\omega) \cdot \hat{e}|^2 + |\vec{A}(-\omega) \cdot \hat{e}|^2 \quad (2.54)$$

Como $\vec{A}(t)$ é real, de (2.50), $\vec{A}(\omega)^* = \vec{A}(-\omega)$. Então:

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} = 2|\vec{A}(\omega) \cdot \hat{e}|^2 \quad (2.54')$$

que relaciona o comportamento da potência radiada em função do tempo ao espectro de freqüência da energia radiada.

A partir da equação para o campo elétrico de uma carga acelerada, (2.19a), obtemos uma expressão geral para a energia radiada por unidade de ângulo sólido por unidade de intervalo de freqüência em termos de uma integral sobre a trajetória da partícula. Devemos calcular a transformada de Fourier (2.49) de $\vec{A}(t)$, dado pela equação (2.48). Usando a equação (2.19a), e supondo que a partícula seja um elétron, $q = e$, encontramos:

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8c\pi^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} \right]} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} dt'$$

Consideremos que a partícula tem velocidade constante exceto na região próxima à origem. Para um observador distante da região onde ocorre a aceleração podemos desprezar a variação do

Para calcularmos a distribuição de energia por unidade de frequência e de ângulo sólido, para uma trajetória circular, é necessário calcularmos a integral na equação (2.55). Como a duração do pulso é muito curta, é necessário conhecer a velocidade $\vec{\beta}$ e a posição $\vec{r}(t)$ sobre apenas um pequeno arco da trajetória, cujos pontos tem tangentes na direção do ponto de observação. A figura 11 mostra um sistema de coordenadas apropriado. O segmento da trajetória está no plano xy , com o raio de curvatura instantâneo ρ . Uma vez que faremos uma integração sobre a trajetória, o versor \hat{n} pode ser escolhido no plano xz , fazendo um ângulo θ (a colatitude) com o eixo x . Somente para θ muito pequeno, haverá uma intensidade de radiação apreciável. A origem dos tempos é escolhida de modo que, em $t = 0$, a partícula esteja na origem das coordenadas.

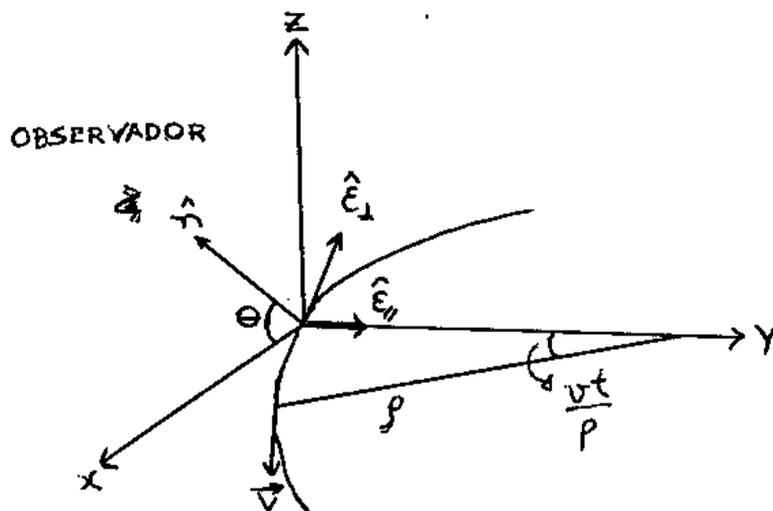


FIG.11. ESQUEMA DO SISTEMA DE COORDENADAS APROPRIADO PARA O CÁLCULO DO ESPECTRO DA FREQUÊNCIA DA RADIAÇÃO EMITIDA POR UMA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA CARREGADA, NUM MOVIMENTO INSTANTÂNEO CIRCULAR.

Se supusermos que a partícula só é desviada da trajetória retilínea durante um intervalo de tempo curto em torno de $t = 0$, e usando o resultado de que só há energia radiada em direções limitadas por $\theta \sim 1/\gamma$, temos que a equação (2.55) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{\epsilon})}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4c\pi^2} | \hat{\epsilon} \cdot [\hat{\epsilon}_1 A_1(\omega) - \hat{\epsilon}_2 A_2(\omega)] |^2 \quad (2.56)$$

com

$\hat{\epsilon}_2 = \hat{y}$ sendo paralelo ao plano da órbita,
 $\hat{\epsilon}_1$ é perpendicular a \hat{n} e a $\hat{\epsilon}_2$ e

onde desenvolvemos todas as funções trigonométricas, definidas a partir da figura 11, em séries de potências.

As amplitudes $A_{\parallel}(\omega)$ e $A_{\perp}(\omega)$ são dadas por

$$A_{\perp}(\omega) = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{i\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2} \right) \right] dt \quad (2.57a)$$

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left[\frac{i\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2} \right) \right] dt . \quad (2.57b)$$

Mudando da variável t para a variável $x = \frac{ct}{\rho} (\gamma^{-2} + \theta^2)^{1/2}$ e dividindo as integrais em duas, mudando a variável em uma delas, e juntando novamente, escrevemos a equação (2.56) na forma:

$$\frac{d^2 W(\omega, \hat{\epsilon})}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \rho^2}{3\pi^2 c^3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 x \left| \hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}_{\perp} \frac{\theta K_{1/3}(\xi)}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^{1/2}} - i \hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}_{\parallel} K_{2/3}(\xi) \right|^2 \quad (2.58)$$

onde $K_{\nu}(\xi)$ é uma função de Bessel (cilíndrica) modificada de segunda espécie e $\xi = (\omega/3\omega_0)(\gamma^{-2} + \theta^2)^{3/2}$, com $\omega_0 = c/\rho$ sendo a freqüência na órbita circular.

Da equação acima podemos tirar as seguintes conclusões:

i) há duas contribuições para a energia total radiada, uma tem polarização perpendicular ao plano da órbita e a outra tem polarização paralela ao plano da órbita. Caso se restrinja a observação a ângulos θ de observação suficientemente pequenos, a contribuição com polarização ϵ_{\perp} perpendicular ao plano da órbita pode ser feita arbitrariamente pequena.

ii) A intensidade cresce quando θ e ω diminuem e decresce quando θ e ω aumentam.

iii) Para cada ω fixo, a intensidade é aproximadamente constante em θ se $\theta^2 < \gamma^{-2}$, e começa a diminuir quando $\theta > \gamma^{-1}$. Entretanto a largura da distribuição em θ depende fortemente de ω .

Se integrarmos a equação (2.58) sobre todas as freqüências, teremos como resultado a distribuição angular de energia radiada:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int \frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-5/2} \left(1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} \right)$$

Como na equação (2.58), o primeiro termo corresponde a uma polarização paralela ao plano da órbita, e o segundo, a uma polarização perpendicular a este plano. Integrando sobre todos os ângulos e comparando as contribuições dos dois termos acima concluímos que a energia radiada com a polarização paralela é sete vezes maior que a radiada com a polarização perpendicular. Portanto a radiação de uma carga em movimento relativístico é fortemente, mas não completamente, polarizada no plano do movimento.

As funções de Bessel, que aparecem na equação (2.58), tem as seguintes propriedades:

$$K_\nu(\xi) = \begin{cases} - [\ln(\xi/2) + 0.5772...] & \text{com } \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} (2/\xi)^\nu & \text{com } \nu \neq 0 \end{cases} \quad \text{e para } \xi \ll 1$$

$$K_\nu(\xi) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{-\xi} [1 + O(1/\xi)] \quad \text{com } \nu \text{ q.q. e para } \xi \gg 1.$$

Concluimos então que a radiação é desprezível para $\xi \gg 1$. Da definição de ξ , vemos que esta condição aparece para ângulos grandes. Quanto maior a freqüência, tanto menor o ângulo crítico acima do qual a radiação será desprezível. Isto mostra que a radiação fica largamente confinada no plano que contém o movimento, sendo o confinamento tão mais estreito quanto maior for a freqüência relativa a c/ρ . Se ω fica muito grande, no entanto, vemos que ξ será grande em todos os ângulos. Então a energia total emitida a esta freqüência será desprezível. A freqüência crítica ω_c corresponde a freqüência tal que a potência emitida com $\omega < \omega_c$ seja igual à emitida com $\omega > \omega_c$. Então, achamos

$$\omega_c = 3\gamma^3(c/\rho)/2 = 3\gamma^3\omega_0/2 \quad (2.59)$$

Por outro lado, restringindo o ângulo θ de observação a valores suficientemente pequenos, a contribuição com polarização \hat{e}_\perp perpendicular ao plano da órbita pode ser feita arbitrariamente pequena. Então, analisando a radiação polarizada paralela ao plano da órbita, restringiremos nossa análise ao termo em $K_{2/3}(\xi)$ da equação (2.58):

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 K_{2/3}^2(\xi) \quad (2.60)$$

Analisando os dois limites para ω , quando $\gamma \gg 1$, isto é:

i) $\omega \ll \omega_c$:

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} = \frac{3e^2}{c} \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right)^{2/3} \gamma^2 \left(\frac{\Gamma(2/3)}{\pi} \right)^2$$

e a largura angular é

$$\gamma \theta_c \cong \left(\frac{2\omega_c}{\omega} \right)^{1/3}$$

ii) $\omega \gg \omega_c$

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{e})}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{c} \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right)^{2/3} \gamma^2 \xi^{1/3} e^{-2\xi}$$

e a largura angular é

$$\gamma \theta_c \cong \left(\frac{2\omega_c}{3\omega} \right)^{1/2}$$

A figura 12 mostra, qualitativamente, a distribuição angular para frequências pequenas em comparação com ω_c , para frequências da ordem de ω_c e para frequências muito maiores que ω_c . Usa-se $\gamma\theta$ como unidade angular.

A densidade espectral de energia emitida é dada pela integração da equação (2.60) sobre o ângulo sólido, dando como resultado:

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega d\omega}$$

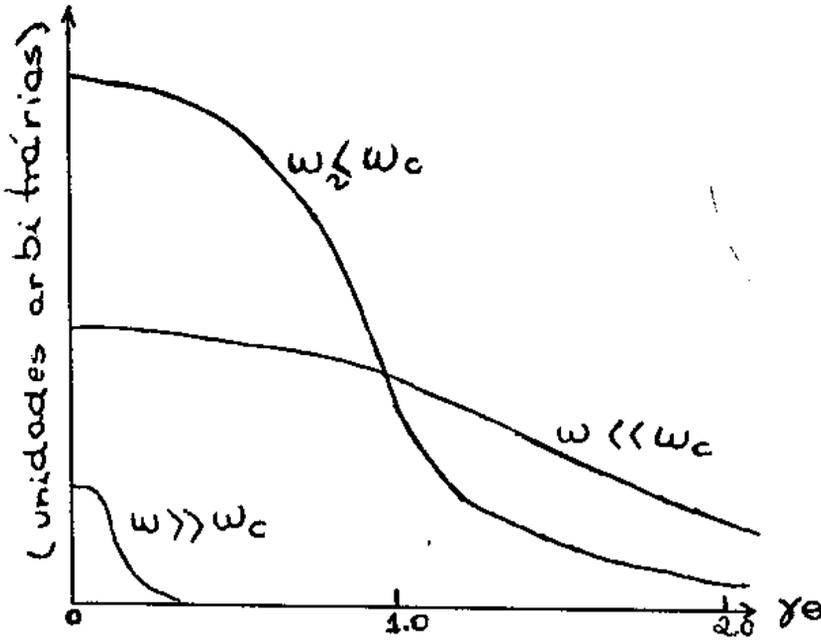


FIG.12. ESPECTRO DIFERENCIAL DA FREQUÊNCIA EM FUNÇÃO DO ÂNGULO $\gamma\theta$

$$\frac{dW}{d\omega} = (3)^{1/2} \frac{e^2}{c} \gamma \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int K_{5/3}(x) dx \quad (2.61)$$

O pico de intensidade é da ordem de $e^2\gamma/c$, e a energia total é da ordem de $2e^2\gamma\omega_c/c = 3e^2\gamma^4/\rho$. Este resultado concorda com o valor obtido para a perda radiativa por volta nos aceleradores circulares, equação (2.36).

As equações (2.58) e (2.61) descrevem a energia radiada por unidade de intervalo de frequência, por unidade de ângulo sólido e a densidade de energia emitida num intervalo de frequência, respectivamente, para um anel síncrotron.

E. FLUXO DA RADIAÇÃO EMITIDA

Para calcularmos o número de fótons emitidos por elétron, do anel de armazenamento de um síncrotron, por intervalo de energia e por unidade angular, na direção paralela ao plano da órbita, partiremos da equação (2.60), que pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d^2W(\omega, \hat{\epsilon})}{d\hbar\omega d\Omega} = \frac{3\alpha}{4\pi^2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma^6 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 K_{2/3}^2(\xi) \quad (2.62)$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c$ é a constante de estrutura fina e vale aproximadamente 1/137. Então o número de fótons emitidos por elétron, por unidade de energia e por unidade de ângulo sólido é

$$\frac{d^2N}{d\hbar\omega d\Omega} = \frac{3\alpha}{4\pi^2} \frac{\hbar\omega}{(\hbar\omega_c)^2} \gamma^6 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 K_{2/3}^2(\xi) \quad (2.63)$$

onde se subentende a relação $dW = \hbar\omega dN$.

Usando a definição de ω_c , podemos reescrever a equação acima na forma

$$\frac{d^2N}{d\hbar\omega d\Omega} = \frac{\alpha}{3\pi^2} \frac{\hbar\omega\rho^2}{(\hbar c)^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 K_{2/3}^2(\xi) \quad (2.64)$$

Então, o fluxo de radiação emitida é dado por

$$\frac{d^2N}{d\hbar\omega d\Omega} = 6,314 \times 10^3 \hbar\omega \rho^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 K_{2/3}^2(\xi) \quad (2.65)$$

onde $\hbar\omega$ está em eV e ρ em metros, e $\frac{d^2N}{d\hbar\omega d\Omega}$ é expresso em fótons por elétron, por eV, por μsr .

Para um anel síncrotron de raio aproximadamente igual a 10 metros, $\gamma = 10.000$ e $\hbar\omega \approx 10^4$ eV, teremos um fluxo de fótons, na direção paralela ao plano do anel, de aproximadamente 6×10^{-6} fótons por elétron, por eV, por μsr ($\mu\text{sr} = \text{mrad} \phi . 1 \text{mrad} \theta$). Para o anel do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS) de raio de 2,7 metros, $\gamma = 2.250$ e $\hbar\omega = 1,25 \times 10^3$ eV, teremos 3×10^{-6} fótons por elétron, por eV, por μsr .

2.4. ONDULADORES

Para aumentar a intensidade da radiação síncrotron, são inseridos onduladores no anel de armazenamento.

Essa inserção produz um campo magnético periódico que causa deflexões na órbita dos elétrons que circulam no anel de armazenamento, tendo como resultado o aumento da emissão de radiação síncrotron. Os onduladores defletem o feixe de

elétrons em direções alternadas produzindo uma oscilação angular do feixe. Entretanto cumpre ressaltar que os onduladores são projetados de forma a não produzir deflexão resultante ou deslocamento no feixe de elétrons que circulam no anel de armazenamento.

Um ondulador⁽¹²⁾ é uma estrutura magnética com vários períodos, como mostra a figura 13. O ondulador preserva a alta intensidade intrínseca da radiação síncrotron, mas, por outro lado, a sua distribuição angular é caracterizada por picos em um ou em poucos comprimentos de onda, em contraste com a radiação síncrotron, que é branca.

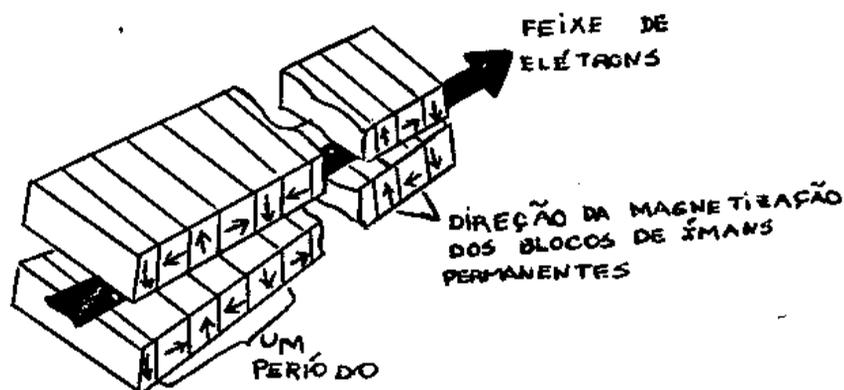


FIG.13. ILUSTRAÇÃO DE UM ONDULADOR

Consideraremos a passagem de um elétron por um período ao longo de um ondulador, como mostra a figura 14.



FIG.14. ILUSTRAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE UM ELÉTRON EM UM ONDULADOR.

a) Ondulador Fraco

Quando o campo magnético do ondulador é pouco intenso, tal que o ângulo máximo de deflexão do elétron, com relação à direção média do feixe incidente, δ , é muito menor que γ^{-1} estamos no caso do ondulador fraco. Podemos então considerar a velocidade longitudinal do elétron como sendo constante e portanto o seu movimento transversal será um movimento harmônico simples. No sistema de laboratório, as frequências dos fótons observados podem ser calculadas considerando a interferência entre as ondas emitidas nas oscilações sucessivas do elétron para dois picos sucessivos no seu movimento harmônico simples. Neste caso, o tempo necessário para o elétron percorrer a distância λ_0 (conhecida como período do ondulador) será $\lambda_0/\beta c$. Mas o fóton leva somente λ_0/c para percorrer esta mesma distância. Quando a diferença entre esses tempos é igual a um período de oscilação da luz, λ/c , teremos uma interferência construtiva. Então a condição de interferência é dada por

$$\lambda/c = \lambda_0/\beta c - \lambda_0/c \quad . \quad (2.66)$$

Para valores de β tendendo a 1, $(1/\beta - 1)$ é muito próximo de $1/2\gamma^2$. Assim a condição de interferência construtiva pode ser escrita com a forma:

$$\lambda = \lambda_0/2\gamma^2 \quad . \quad (2.67)$$

Para radiação emitida a pequenos ângulos com relação ao eixo do ondulador, $\theta \ll 1$, a equação acima pode ser escrita como:

$$\lambda = (\lambda_0/2\gamma^2)(1 + \gamma^2\theta^2) \quad . \quad (2.68)$$

Esta equação nos mostra que para cada ângulo de observação a radiação emitida consiste de apenas de uma única frequência.

Para encontrarmos as distribuições angular e espectral da radiação emitida por um ondulador fraco podemos partir das equações que usamos para a radiação de síncrotron neste capítulo. A título de um exemplo simples consideraremos um ondulador de período λ_0 e comprimento Λ , com $\Lambda \gg \lambda_0$, onde

seu campo magnético pode ser escrito como⁽¹³⁾:

$$B(t') = B_0 \cos 2\pi\nu_0 t' \operatorname{rect}(\lambda_0/\Lambda)\nu_0 t' \quad (2.69)$$

onde: $\nu_0 = c / \lambda_0$ e

$$\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1/2 < x < 1/2 \\ 0 & \text{para os outros valores de } x \end{cases}$$

A distribuição espectral da energia por unidade de ângulo sólido para a radiação vista pelo observador é facilmente obtida da equação (2.56):

$$\frac{dW^2}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4} c^2 \gamma^2 |\vec{f}(\theta, \phi)|^2 (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 B^2 \left(\frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2 \gamma^2} \nu \right) \quad (2.70)$$

onde $c = \frac{2e^2}{m} (\pi c^3)^{-1/2} = 5.5 \times 10^{-8} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1/2}$.

$B^2 \left(\frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2 \gamma^2} \nu \right)$ representa o resultado do seguinte procedimento: dado $B(t')$ conforme (2.67), encontra-se a sua transformada de Fourier $B(\nu')$ e posteriormente substitui-se a variável ν' por $\frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2 \gamma^2} \nu$. Isto é possível na aproximação do ondulator fraco, onde a variação de $B(t')$ é muito maior que a variação de $\vec{f}(\theta, \phi)$. Neste caso despreza-se a variação de θ com t' e portanto, considerando θ aproximadamente constante, a

relação usual $\frac{dt'}{dt} = \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2(t')} = \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2}$ nos

leva a $t' = \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} t$, desta última relação pode-se ver que

$$\nu' = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2 \gamma^2} \nu.$$

$\vec{f}(\theta, \phi)$ engloba os fatores angulares dependentes da direção de observação e pode ser decomposto em suas componentes paralela e perpendicular à aceleração $\vec{\beta}$, \vec{f}_{\parallel} e \vec{f}_{\perp} :

$$\vec{f}(\theta, \phi) = f_{\perp} \hat{i}_{\perp} + f_{\parallel} \hat{i}_{\parallel} = \vec{f}_{\perp} + \vec{f}_{\parallel} \quad (2.71)$$

com

$$\vec{I}_{||} = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2 + 2\gamma^2 \theta^2 \sin^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \quad e \quad \vec{I}_{\perp} = \frac{2\gamma^2 \theta^2 \cos \phi \sin \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} .$$

Seguindo o procedimento acima descrito para $B(t')$ dado, podemos escrever:

$$\frac{dW}{d\nu} = \iint \frac{d^2W}{d\nu d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi = \int \frac{1}{4} \pi c^2 \gamma^2 \frac{y^2 - 2y + 2B_0^2}{4\nu_0^2 y^6} \frac{\Lambda}{\lambda_0} \delta \left(\frac{y\nu}{2\gamma^2 \nu_0} - 1 \right) dy$$

onde $y = 1 + \gamma^2 \theta^2$.

Nota-se aqui claramente a presença da função delta no integrando, descrevendo o fato já mencionado de que para cada θ há uma frequência emitida $\nu = \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \nu_0$.

O resultado da integral nos dá a energia radiada por unidade de frequência:

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{1}{8c} C^2 \pi \gamma^2 B_0^2 \Lambda \frac{\nu}{\nu_m^2} \left(1 - 2\frac{\nu}{\nu_m} + 2\frac{\nu^2}{\nu_m^2} \right) \quad (2.72)$$

onde $\nu/\nu_m < 1$ e ν_m é a frequência máxima contida no espectro, igual a $2\gamma^2 \nu_0$ ($\theta = 0$).

Os harmônicos desta frequência também satisfazem a condição de interferência construtiva, porém as suas amplitudes são desprezíveis, no caso do ondulator fraco, frente à da frequência ν .

A figura 15 ilustra a radiação emitida por um elétron que percorre um ondulator fraco.

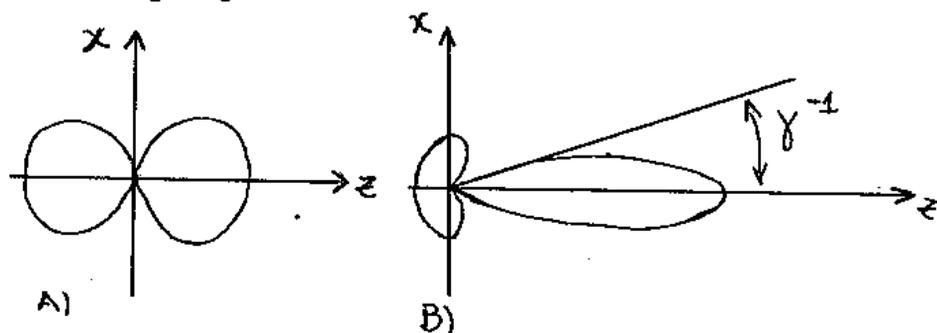


FIG. 15. RADIAÇÃO EMITIDA POR UM ELÉTRON EM UM ONDULATOR FRACO:

A) NO REFERENCIAL ONDE O ELÉTRON PERMANECE EM REPOUSO E

B) NO REFERENCIAL LABORATÓRIO.

b) Ondulador Forte

Por outro lado, quando o campo magnético do ondulador é intenso, tal que o ângulo máximo de deflexão com relação à direção média do feixe é da ordem de γ^{-1} , o movimento do elétron na direção transversal é acompanhado por uma variação da sua velocidade longitudinal. Neste caso, adotamos o nosso referencial como aquele que se move com uma velocidade constante igual à velocidade média longitudinal do elétron. Assim a condição de interferência construtiva toma a forma:

$$\lambda = (\lambda_0/2\gamma^2)(1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2) \quad , \quad (2.73)$$

onde $K = \delta\gamma = eB_0\lambda_0/2\pi m_0 c^2 = 9,34 \times 10^{-3} B_0 \lambda_0$,

δ é aproximadamente igual a $v_{x\max}/v$.

com a amplitude do campo magnético, B_0 , medida em Gauss e os comprimentos de onda em cm.

A frequência angular é dada por:

$$\omega = \frac{4\pi\gamma^2 c/\lambda_0}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \quad . \quad (2.74)$$

No caso do ondulador forte os harmônicos do comprimento de onda, λ , são importantes. Suas intensidades dependem do valor de K : para K próximo a 1 a potência radiada no comprimento de onda fundamental, λ , é máxima e conforme K aumenta, a importância relativa dos harmônicos também aumenta.

A figura 16 mostra a radiação emitida por um elétron passando por um ondulador forte.

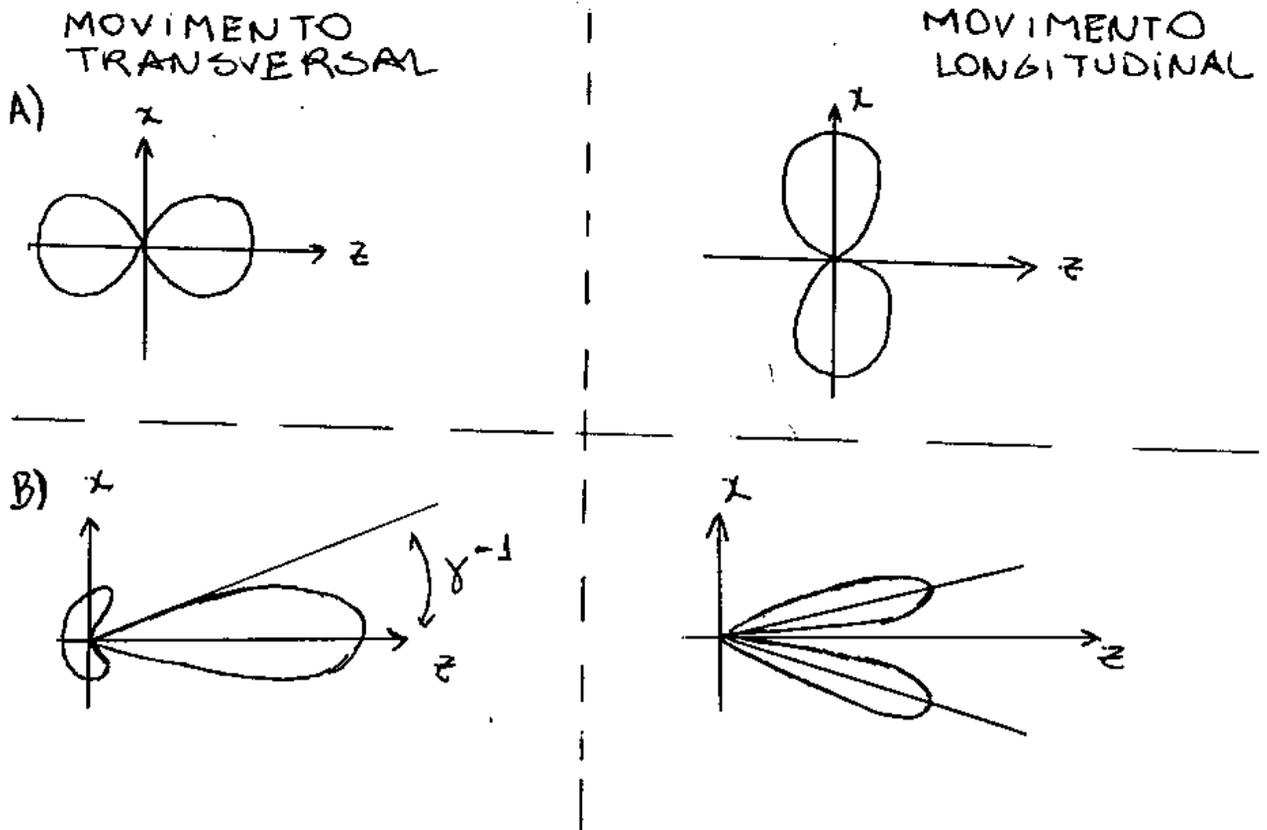


FIG. 16. RADIAÇÃO EMITIDA POR UM ELÉTRON PASSANDO POR UM ONDULADOR FORTE: A) VISTA POR UM REFERENCIAL ONDE O ELÉTRON PERMANECE EM REPOUSO E B) NO REFERENCIAL DO LABORATÓRIO.

RAIOS X

3.1 INTRODUÇÃO

Os raios X foram descobertos em 1895 por Roentgen⁽¹⁴⁾ através de experiências com tubos de raios catódicos, conforme esquematizado na figura 1, onde partículas carregadas colidindo com um anteparo produzem radiação com características incomuns.



FIG.1. TUBO DE RAIOS CATÓDICOS

Em 1897, Stokes e Wichert propuseram que esta radiação consistia de pulsos eletromagnéticos transversais produzidos através da colisão de partículas carregadas com o anteparo.

Em 1903, J. J. Thomson⁽¹⁵⁾ calculou a razão entre a energia radiada e a incidente por unidade de área, ou seja, a seção de choque diferencial, quando ondas eletromagnéticas sofrem espalhamento por cargas livres. Considerando os raios X como pulsos eletromagnéticos transversais, como é usual no Eletromagnetismo Clássico, essa seção de choque diferencial é dada por⁽¹⁶⁾:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sin^2\theta \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = r_0^2 \sin^2\theta \quad (3.1)$$

onde: $d\sigma/d\Omega$ é a seção de choque diferencial,

Ω é o ângulo sólido do espalhamento,

θ é o ângulo de espalhamento,

e é a carga do elétron,

.o
ma
como

- m é a massa de repouso do elétron,
 c é a velocidade da luz no vácuo,
 r_0 é o raio clássico do elétron, $\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{mc^2}$.

Cumprе ressaltar que a expressão (3.1) é válida quando a onda incidente é polarizada, e θ é o ângulo entre a direção de observação e a direção de polarização da onda incidente (é claro que esta é perpendicular à direção de propagação). Se os raios X incidentes não forem polarizados, pode-se fazer uma média sobre todas as direções de polarização, obtendo:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\substack{\sim \\ \text{não} \\ \text{polarizada}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \kappa) \quad , \quad (3.2)$$

onde agora κ é o ângulo entre a direção de observação e o sentido de propagação da onda incidente. Desta maneira, Thomson obteve o "coeficiente de espalhamento" (seção de choque total)

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad . \quad (3.3)$$

Somente em 1905 surgiu uma evidência experimental a favor da teoria de Stokes - Thomson, com a detecção da polarizabilidade dos raios X, por Barkla⁽¹⁷⁾, permitindo sua identificação com as ondas transversais características da teoria eletromagnética de Maxwell.

Através do aprimoramento das técnicas experimentais dessa época⁽¹⁸⁾, foi possível a determinação das características dos raios X, tais como:

- i) alto poder de penetração na matéria,
- ii) ausência de deflexão quando submetidos a campos elétricos e magnéticos
- iii) ejeção de elétrons quando incidentes sobre a matéria (Efeito Fotoelétrico),

que não estavam compatíveis com a teoria desenvolvida (11).

Verificou-se então uma divisão dos físicos da época, basicamente em torno das hipóteses corpuscular e ondulatória. Nomes de calibre como Planck e Sommerfeld preferiam a interpretação ondulatória dos raios X, enquanto Stark⁽¹⁹⁾ defendia sua identificação com os quanta de energia eletromagnética introduzidos por Einstein⁽²⁰⁾ em 1905. Entretanto não era clara a conexão entre fenômenos envolvendo raios X e Efeito Fotoelétrico, e Stark não contribuiu significativamente para a compreensão do fenômeno. Só em 1923, com os trabalhos de Compton⁽²¹⁾ e Debye⁽²²⁾, é que surgiram abordagens baseadas nos quanta.

Em 1912 Laue, Friedrich e Knipping⁽²³⁾ descobriram a difração dos raios X. Laue descreveu o espalhamento dos raios X através de uma formulação geométrica simples baseada na teoria das redes dimensionais.

A teoria cinemática, formulada por Darwin⁽²⁴⁾ em 1914, mostrou-se adequada pois seus resultados, com algumas excessões, reproduziam bem os resultados experimentais da intensidade espalhada. O tratamento de Darwin continha a explicação da extinção dos feixes primário e secundário na difração, e seu modelo teórico concebia o cristal como composto de pequenos blocos desalinhados aleatoriamente em relação a uma orientação média.

Nesta época foi feita a primeira formulação da teoria dinâmica para a difração por Ewald⁽²⁵⁾, que resolveu o problema da propagação de ondas eletromagnéticas com comprimento de onda próximo ao comprimento da periodicidade de um arranjo de dipolos, localizados nos pontos de um reticulado tridimensional e infinito. Este sistema autoconsistente de osciladores emite radiação eletromagnética, que se propaga no meio. A solução encontrada por Ewald para este problema, formulado originalmente por Sommerfeld, seu orientador de tese, está baseada no problema de autovalores e tem, como resultado final, o conjunto das frequências permitidas para os osciladores no campo.

A formulação da teoria dinâmica em uso para a difração dos raios X foi concebida por Laue⁽²⁶⁾ em 1931. Esta teoria resolve o problema da propagação da radiação eletromagnética num meio onde a densidade eletrônica tem uma distribuição contínua e periódica. Esta formulação tem como

principal vantagem, em relação à de Ewald, o fato de que a superfície do cristal aparece naturalmente como condição de contorno para as equações de Maxwell, o que permite implementar um modelo mais realista do meio cristalino.

Em 1941, Borrmann⁽²⁷⁾ observou a transmissão anômala dos raios X. O efeito encontrado foi obtido para cristais essencialmente perfeitos, de calcita e quartzo, e se refere ao decréscimo espetacular no coeficiente de absorção que estes cristais apresentam quando ajustados para difratar os raios X no ângulo próximo ao de Bragg.

Em 1945, Zachariasen⁽²⁸⁾ chegou a uma visão clara e precisa da teoria dinâmica escolhendo parâmetros convenientes para a descrição do espalhamento dos raios X.

O efeito Borrmann possui uma explicação teórica, que é consequência direta da teoria dinâmica e foi publicada por Laue⁽²⁹⁾ em 1949. A versão aceita, até o presente, pode ser extraída das equações contidas no livro de Zachariasen. Isto é conseguido essencialmente por redefinição dos parâmetros do espalhamento.

A aceitação relativamente lenta que teve a teoria dinâmica pelos pesquisadores, deve-se à dificuldade existente na época de se obter cristais de boa perfeição cristalográfica, condição fundamental para a aplicabilidade da teoria. O grande sucesso conseguido na determinação da estrutura cristalina justifica a falta de interesse no tratamento do problema do espalhamento via teoria dinâmica.

No período anterior à descoberta do efeito Borrmann, acreditava-se que a teoria dinâmica poderia apenas dar uma explicação um pouco mais complicada dos problemas que eram resolvidos pela teoria cinemática.

Zachariasen mostra em seu livro que a intensidade espalhada por cristais de pequena espessura se reduz à expressão cinemática. Mas o conteúdo físico da teoria dinâmica apresenta uma explicação mais abrangente do espalhamento de raios X.

Neste capítulo analisaremos a difração de raios X para ângulos de Bragg, θ_B , aproximadamente iguais a $\pi/2$. Para isso precisaremos analisar a interferência de ondas planas⁽³⁰⁾, o espalhamento de raios X por um cristal⁽³⁰⁾, a teoria dinâmica de difração de raios X⁽³¹⁾, a teoria dinâmica da difração dos

raios X para cristais finos a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$ ⁽³²⁾ e apresentaremos os resultados derivados por Ariel Caticha e S. Caticha-Ellis⁽³³⁾ para a difração dinâmica dos raios X em um cristal de grafite para ângulos de Bragg próximos a $\pi/2$.

3.2 INTERFERÊNCIA DE ONDAS PLANAS

Quando um feixe de raios X incide sobre um cristal os elétrons dos átomos do cristal interagem com a radiação, espalhando-a. A expressão geral de uma onda plana monocromática, de comprimento de onda λ , descrita num ponto P no instante t é:

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp\left[i (\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \right] \quad (3.4)$$

cuja parte real é:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) &= A \cos\left[\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi \right] \\ &= A \cos\left[2\pi (\vec{s}_0 \cdot \vec{r} - \nu t + \phi') \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde:

A é a amplitude da onda plana,

\vec{k}_0 é o vetor de onda; sua direção é a direção de propagação e seu módulo é igual a $2\pi/\lambda$,

$$\vec{s}_0 = \vec{k}_0 / 2\pi$$

$\nu = \omega/2\pi$ é a frequência da radiação,

ϕ e ϕ' a fase em $\vec{r} = 0$ e $t = 0$.

Como estamos interessados no fenômeno de difração em um determinado momento e não no processo de propagação, eliminaremos a parte temporal das equações anteriores.

No processo de espalhamento da radiação pela matéria podem ocorrer o espalhamento elástico (não há perda de energia: $\lambda_i = \lambda_f$) e o espalhamento inelástico (a energia da radiação espalhada é diferente da incidente); esse último é o

espalhamento Compton que será analisado no capítulo 4. A difração é resultado do espalhamento elástico.

A superposição de duas ondas ψ_1 e ψ_2 de mesmo comprimento de onda λ se propagando numa mesma direção resulta em uma interferência cujo resultado depende da fase relativa das ondas espalhadas.

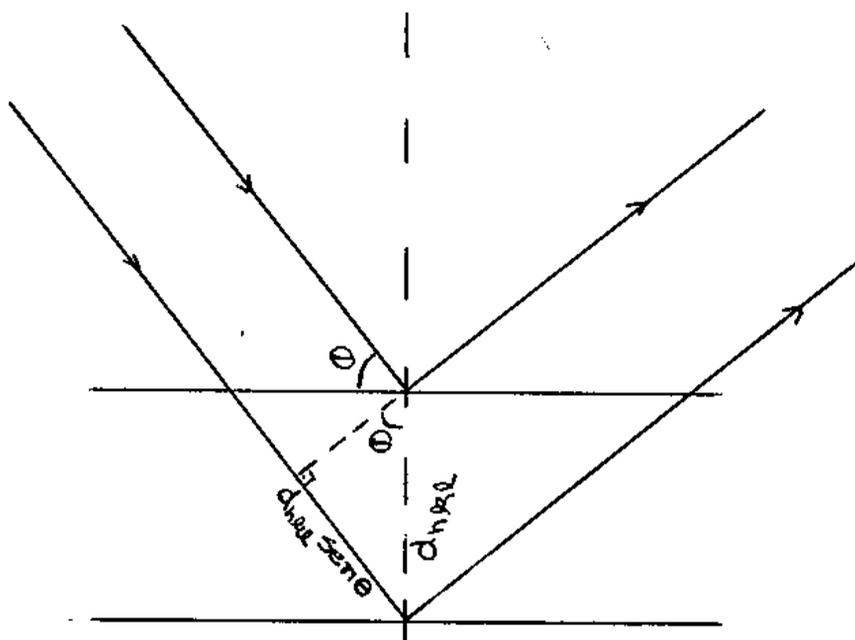


FIG. 2. DIFRAÇÃO DE DUAS ONDAS POR UM CRISTAL

A difração de raios X por cristais pode ser interpretada como "reflexões" pelos planos (hkl) da rede cristalina. Na figura 2 as ondas incidentes tem a mesma amplitude e a mesma fase inicial, sendo espalhadas em dois planos distantes de d_{hkl} . Desta figura pode-se ver que a condição para interferência construtiva é que a diferença de caminhos para os feixes espalhados nos planos sucessivos do cristal seja múltiplo inteiro do comprimento de onda λ :

$$n\lambda = 2 d_{hkl} \text{ sen}\theta \quad (3.6)$$

relação que é conhecida como lei de Bragg.

Num cristal existe um grande número de planos equivalentes (hkl). Quando a equação (3.6) não é satisfeita, a intensidade da onda difratada é nula devido à diferença de fase das ondas espalhadas nos diferentes planos.

3.3 ESPALHAMENTO POR UM CRISTAL

Suponhamos um feixe paralelo de ondas planas, incidindo em dois centros espalhadores O e O' , estando O na origem do sistema de referência e O' em \vec{r} , como mostra a figura 3. A onda plana incidindo segundo a direção \vec{k}_0 será espalhada, por exemplo, na direção \vec{k} .

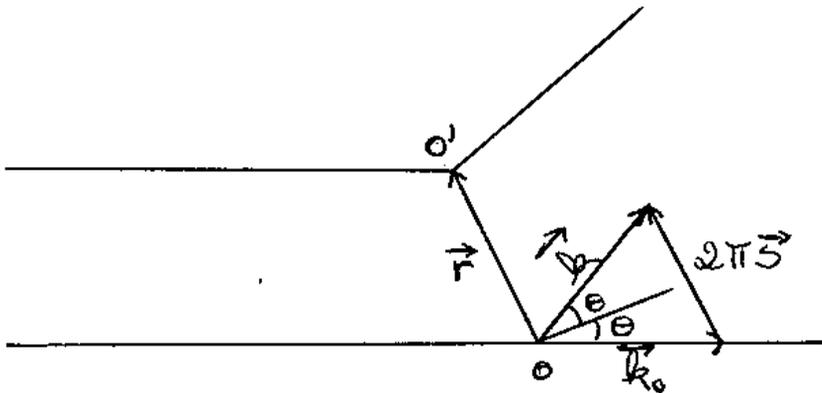


FIG.3.ESPALHAMENTO DE UM FEIXE DE ONDAS PLANAS POR UM CRISTAL

A diferença de caminho entre a onda espalhada em O e a onda espalhada em O' será:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \vec{k}_0 \cdot \vec{r} = (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r} = 2\pi (\vec{s} - \vec{s}_0) \cdot \vec{r} = 2\pi (\vec{s} \cdot \vec{r}) \quad (3.7)$$

$$\text{onde } \vec{s} = \frac{\vec{k} - \vec{k}_0}{2\pi}, \quad |\vec{s}| = \frac{2\text{sen}\theta}{\lambda}$$

Assim, supondo que a onda incidente tenha amplitude unitária, $A = 1$, a onda espalhada em \vec{r} será:

$$f \exp\left[i (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r} \right] = f \exp(2\pi i \vec{s} \cdot \vec{r}) \quad (3.8)$$

O coeficiente f é o poder de espalhamento do centro espalhador em \vec{r} . No caso de termos n centros espalhadores localizados em \vec{r}_j , a amplitude da onda espalhada será:

$$G(\vec{s}) = \sum_{j=1}^n f_j \exp(2\pi i \vec{s} \cdot \vec{r}_j) \quad (3.9)$$

onde f_j é o poder de espalhamento de cada um dos centros espalhadores.

A difração de raios X num cristal é o resultado do espalhamento da radiação pelas cargas elétricas nele contidas, que vão oscilar devido ao campo elétrico da onda eletromagnética. A teoria clássica de espalhamento para uma carga elétrica e , de massa m , desenvolvida por Thomson⁽¹⁵⁾, mostra que a amplitude da onda espalhada é proporcional a $\frac{e}{Rmc^2} \text{sen}\chi$, sendo R a distância ao ponto de observação, c a velocidade da luz no vácuo e $\text{sen}\chi$ o fator que leva em conta a polarização da onda incidente. Pode-se ver, portanto, que a densidade eletrônica é predominante nos fenômenos de espalhamento de raios X, já que a massa do núcleo é 10^3 vezes maior que a massa dos elétrons.

No caso do cristal, a distribuição de elétrons é descrita por uma função $\rho(\vec{r})$, dada geralmente em unidades de elétrons por Å^3 , e o número de elétrons num elemento de volume $d\vec{r}$ será $\rho(\vec{r})d\vec{r}$. A onda difratada por esse cristal será dada então pela equação (3.9), onde a soma é substituída por uma integração:

$$G(\vec{S}) = \int \rho(\vec{r}) \exp(2\pi i \vec{S} \cdot \vec{r}) d\vec{r} \quad (3.10)$$

Adotamos como nosso modelo para a distribuição da densidade eletrônica aquele no qual a função $\rho(\vec{r})$ é o resultado de uma soma de distribuições esféricas de carga, centradas em cada átomo constituinte da matéria:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\mu=1}^N \rho_{\mu} \left(|\vec{r} - \vec{r}_{\mu}| \right) \quad (3.11)$$

como mostra a figura 4.

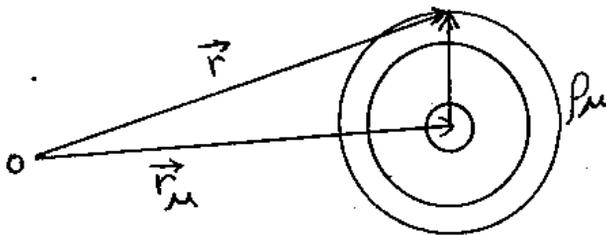


FIG. 4. ESQUEMA QUE MOSTRA A DISTRIBUIÇÃO DE CARGA ELETRÔNICA

Rescrevendo (3.10) e utilizando (3.11), ficamos com:

$$G(\vec{s}) = \int \sum_{\mu}^N \rho_{\mu} \left(|\vec{r} - \vec{r}_{\mu}| \right) \exp(2\pi i \vec{s} \cdot \vec{r}) d\vec{r} ,$$

$$= \sum_{\mu}^N f_{\mu}(\vec{s}) \exp(2\pi i \vec{s} \cdot \vec{r}_{\mu}) \quad (3.12)$$

onde $f_{\mu}(\vec{s}) = \int \rho_{\mu} \left(|\vec{R}| \right) \exp(2\pi i \vec{s} \cdot \vec{R}) d\vec{R}$,

com $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_{\mu}$

f_{μ} é chamado fator de espalhamento atômico ou fator de forma e é a transformada de Fourier da densidade eletrônica do átomo μ .

Com a suposição de que a distribuição de cargas é esférica, o fator de forma fica dependente de $|\vec{s}| = \frac{2 \text{sen} \theta}{\lambda}$. Alguns modelos têm sido feitos para calcular a distribuição de elétrons dos diferentes átomos e a partir daí obter f_{μ} . O $f_{\mu}(|\vec{s}| = 0)$ é igual ao número total de elétrons do átomo.

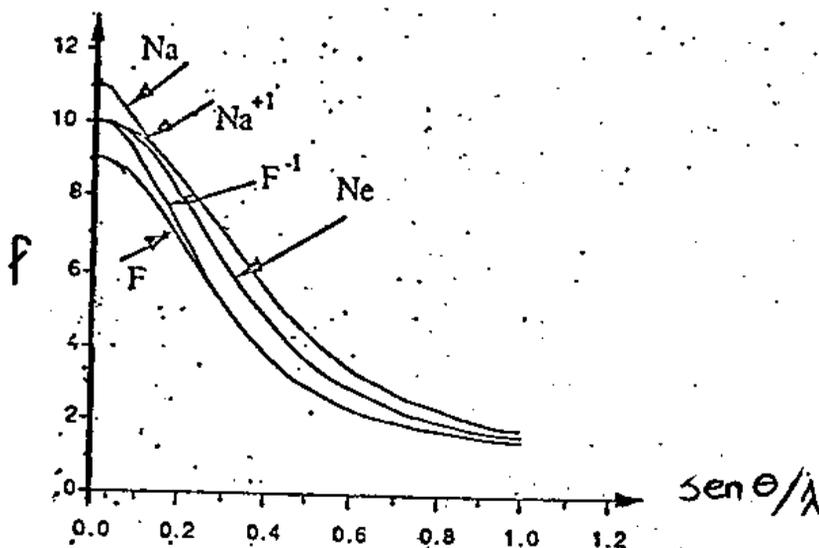


FIG.5. FATOR DE FORMA PARA ALGUNS ÁTOMOS E ÍONS EM FUNÇÃO DE $|\vec{s}|/2$

A figura 5 ilustra o comportamento de f_{μ} para alguns átomos e íons.

O aspecto característico de um cristal é a periodicidade do arranjo dos seus átomos constituintes. Então a densidade eletrônica num cristal é:

$$\rho(\vec{r} + \vec{t}) = \rho(\vec{r}) \quad (3.13)$$

para $\vec{r} = n_a \vec{a} + n_b \vec{b} + n_c \vec{c}$ com n_a, n_b, n_c inteiros e variando de $-\infty$ até $+\infty$, definindo assim a rede cristalina.

Devido a esta periodicidade a equação (3.8), que é a transformada de Fourier da distribuição de cargas do cristal pode ser reescrita como:

$$G(\vec{S}) = \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{células}}} \left(\int_{\text{célula}} \rho(\vec{r}) \exp(2\pi i \vec{S} \cdot \vec{r}) d\vec{r} \right) \exp[2\pi i \vec{S} \cdot (n_a \vec{a} + n_b \vec{b} + n_c \vec{c})]$$

$$= F(\vec{S}) \sum_{n_a=1}^{N_a} \exp(2\pi i \vec{S} \cdot \vec{a}) \sum_{n_b=1}^{N_b} \exp(2\pi i \vec{S} \cdot \vec{b}) \sum_{n_c=1}^{N_c} \exp(2\pi i \vec{S} \cdot \vec{c}) \quad (3.13)$$

A transformada de Fourier da densidade eletrônica de uma célula, $F(\vec{S})$, é chamada de fator de estrutura. Usando a relação para a soma de uma progressão geométrica dada por:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x} \quad (3.14)$$

podemos escrever:

$$\sum_{n_a=0}^{N_a} \exp(2\pi i \vec{S} \cdot \vec{a}) = \frac{1 - \exp(2\pi i N_a \vec{a} \cdot \vec{S})}{1 - \exp(2\pi i \vec{a} \cdot \vec{S})} =$$

$$= \frac{\text{sen}(\pi N_a \vec{a} \cdot \vec{S})}{\text{sen}(\pi \vec{a} \cdot \vec{S})} \exp\left(\pi i (N_a - 1) \vec{a} \cdot \vec{S}\right), \quad (3.15)$$

e equivalentemente para as somas relativas às direções \vec{b} e \vec{c} .

O que realmente se mede em experiências de difração é a intensidade da onda difratada, $I(\vec{S})$, que é proporcional a $|G(\vec{S})|^2$. Teremos:

$$I(\vec{S}) = k |G(\vec{S})|^2 =$$

$$k |F(\vec{S})|^2 \left(\frac{\text{sen}(\pi N_a \vec{a} \cdot \vec{S})}{\text{sen}(\pi \vec{a} \cdot \vec{S})} \right)^2 \left(\frac{\text{sen}(\pi N_b \vec{b} \cdot \vec{S})}{\text{sen}(\pi \vec{b} \cdot \vec{S})} \right)^2 \left(\frac{\text{sen}(\pi N_c \vec{c} \cdot \vec{S})}{\text{sen}(\pi \vec{c} \cdot \vec{S})} \right)^2 \quad (3.16)$$

Pode-se ver que a identidade é diferente de zero apenas se $\vec{a} \cdot \vec{S} = h$, $\vec{b} \cdot \vec{S} = k$, $\vec{c} \cdot \vec{S} = l$, com h, k, l sendo números inteiros.

Estas condições, chamadas condições de Laue, são facilmente interpretadas se lembrarmos da definição dos vetores da base no espaço recíproco, ou seja:

$$\vec{s} = \vec{s} - \vec{s}_0 = \vec{r}^* = ha^* + kb^* + lc^* \quad (3.17)$$

3.4 CONDIÇÕES DE DIFRAÇÃO

A condição para se observar difração num cristal é a de que a equação (3.16) seja satisfeita. Na física da matéria condensada se utiliza em geral o vetor de onda $\vec{k} = 2\pi\vec{s}$ e tem-se então para os vetores de onda incidente e difratado a condição:

$$\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0 = 2\pi\vec{r}^* = 2\pi(ha^* + kb^* + lc^*) \quad (3.18)$$

Como a quantidade de movimento do fóton é:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi} \vec{k} \quad , \quad |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad \text{com } h = \text{constante de Planck,}$$

vemos que a variação da quantidade de movimento num processo de difração num cristal é proporcional a um vetor da rede recíproca:

$$\Delta\vec{p} = \frac{h}{2\pi} \vec{k} = h \vec{r}^* \quad (3.19)$$

Tomando os módulos dos vetores na equação (3.18) temos a lei de Bragg:

$$|\vec{s}| = \frac{2\text{sen}\theta}{\lambda} = |\vec{R}|$$

$$\frac{2\text{sen}\theta}{\lambda} = \frac{1}{d_{hkl}} \quad ,$$

como mostra a figura 6.

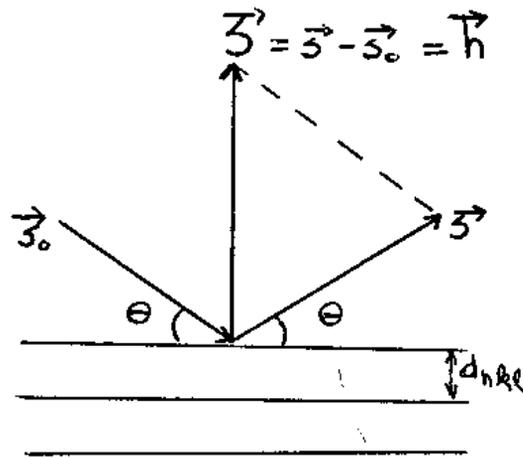


FIG.6. ESQUEMA QUE ILUSTRA A LEI DE BRAGG

No caso de termos $(hkl) = (nH \ nK \ nL)$, onde n é o divisor comum de h , k , l teremos:

$$2d_{HKL} \operatorname{sen}\theta = n\lambda \quad \text{ou} \quad 2d_{hkl} \operatorname{sen}\theta = \lambda \quad (3.20)$$

Portanto a reflexão de n -ésima ordem do plano (HKL) pode ser considerada como a reflexão de 1ª ordem do plano (hkl) .

Uma maneira bastante elegante de representar as condições de difração é utilizando a "esfera de reflexão de Ewald". Esse método é chamado "construção de Ewald".

Constroi-se uma rede recíproca com os vetores \vec{a}_1^* , \vec{a}_2^* , \vec{a}_3^* e desenha-se uma esfera de raio $|\vec{s}_0| = \lambda^{-1}$, tangenciando o ponto \vec{H}_{000} (ou 000); o vetor \vec{s}_0 vai do centro da esfera até o ponto \vec{H}_{000} . A condição de difração será satisfeita para pontos que interceptem a esfera, pois nesse caso teremos a relação $\vec{s} - \vec{s}_0 = \vec{H}$ satisfeita. Em outras palavras, o vetor $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{H}$ dá a direção do vetor (feixe) difratado pela série de planos \vec{H} quando se usa uma radiação monocromática de comprimento de onda λ . A figura 7 mostra a construção de Ewald em duas dimensões.

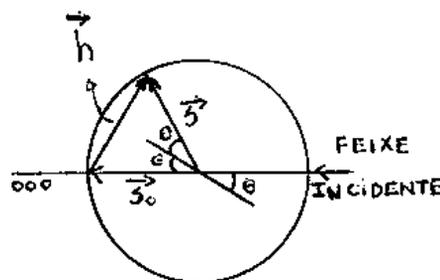


FIG.7. CONSTRUÇÃO DE EWALD EM 2D

A existência de feixes difratados depende da orientação do cristal em relação ao feixe incidente e do raio da esfera de Ewald λ^{-1} , ou seja, do comprimento de onda da radiação utilizada. A intercessão \vec{K} para o ponto (000), origem do espaço recíproco, com a esfera (condição imposta na construção de Ewald), significa que sempre há espalhamento na direção do feixe incidente, $\vec{s} = \vec{s}_0$. A reflexão (hkl) vai acontecer quando a esfera interceptar o ponto hkl. Pode acontecer tanto a esfera interceptar dois pontos simultaneamente, como de não interceptar nenhum. Em geral, um cristal colocado de maneira aleatória sob um feixe de raios X monocromáticos, pode não apresentar nenhum fenômeno de difração.

Para se observar um espectro de difração de um cristal, ou seja, permitir que a lei de Bragg (ou as condições de Ewald) seja satisfeita para vários planos cristalinos (ou para vários \vec{K} ou ainda para vários pontos (hkl)) é necessário variar a orientação do cristal ou variar o comprimento de onda da radiação incidente.

3.5 TEORIA DINÂMICA DA DIFRAÇÃO DOS RAIOS X

De acordo com a teoria dinâmica da difração dos raios X⁽²⁸⁾ o cristal é representado por uma susceptibilidade elétrica (razão entre os vetores polarização, \vec{P} , e o campo elétrico, \vec{E}):

$$\chi(\vec{r}) = \sum_{\mathbf{H}} \chi_{\mathbf{H}} \exp(i\vec{H} \cdot \vec{r}) \quad , \quad (3.21)$$

onde \vec{H} é um vetor da rede recíproca e $\chi_{\mathbf{H}}$ é a componente de Fourier da susceptibilidade elétrica correspondente a \vec{H} . O procedimento teórico consiste em resolver as equações de Maxwell para um meio cristalino não condutor ($\sigma = 0$), não magnético ($\mu = \mu_0 = 1$), eletricamente neutro, periódico e contínuo:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; & \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} &= \vec{0} & ; & \quad \text{div } \vec{B} = \vec{0} \quad , \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon(\vec{r}) \vec{E} = (1 + 4\pi\chi(\vec{r}))\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{B} &= \vec{H} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Temos uma onda plana, $\vec{E} \exp[2\pi i(\vec{K}_0 \cdot \vec{r} - \nu t)]$, incidindo no cristal, que irá excitar ondas de Bloch, $\sum \vec{D}_H \exp(2\pi i\nu t) \exp(-2\pi i\vec{K}_H \cdot \vec{r})$, dentro do mesmo. Na aproximação de que apenas dois feixes tenham amplitudes D_0 e D_H apreciáveis, os raios X dentro do cristal são descritos por:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} (\vec{D}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{D}_H e^{i(\vec{k} + \vec{H}) \cdot \vec{r}}) \quad (3.24)$$

Geralmente é conveniente expressar as quantidades de interesse em termos da frequência e do ângulo de incidência do feixe externo incidente, ou seja, em termos de \vec{K}_0 , com $|\vec{K}_0| = K = \omega/c$. O vetor de onda \vec{K} está relacionado com \vec{K}_0 através das condições de contorno para a continuidade tangencial dos vetores de onda:

$$\vec{K} = \vec{K}_0 + K \Delta \hat{n}, \quad (\Delta \text{ está definido abaixo}) \quad (3.25)$$

onde \hat{n} é o versor normal à superfície do cristal.

Os vetores de onda \vec{K} e $\vec{K} + \vec{H}$ devem satisfazer a condição de estarem sobre a superfície de dispersão, isto é:

$$\vec{K}^2 = K^2(1 - \chi_0 + 2\xi_0) \quad e \quad (3.26)$$

$$(\vec{K} + \vec{H})^2 = K^2(1 - \chi_0 + 2\xi_H) \quad , \quad (3.27)$$

onde ξ_0 e ξ_H são os defeitos de ressonância que satisfazem a relação de dispersão:

$$\xi_0 \xi_H = \frac{1}{4} \chi_H \chi_{-H} \quad (3.28)$$

A quantidade Δ é dada por:

$$\Delta = \frac{\frac{1}{2} \chi_0 + \xi_0}{\hat{n} \cdot \vec{K}_0 / K} \quad (3.29)$$

A razão entre as amplitudes D_H/D_0 pode ser expressa em termos do defeito de ressonância ξ_0 :

$$R_A = D_H/D_0 = 2\xi_0/\chi_{-H} \quad (3.30)$$

Convencionalmente o fator de polarização de 1 ou $\cos 2\theta_B$ é incorporado em χ_{-H} .

Por outro lado o defeito de ressonância ξ_0 pode ser dado por:

$$\xi_0 = \frac{1}{2} [-y \pm (y^2 + b/|b|)^{1/2}] (\chi_H \chi_{-H})^{1/2} |b|^{1/2} \quad (3.31)$$

onde

$$y = \frac{\chi_0(1-b) + ab}{2|b|^{1/2}(\chi_H \chi_{-H})^{1/2}} \quad (3.32)$$

$$b = \frac{\hat{n} \cdot \vec{K}_0}{\hat{n} \cdot (\vec{K}_0 + \vec{H})} \quad (3.33)$$

$$a = K^{-2}(2\vec{K}_0 \cdot \vec{H} + H^2) \quad (3.34)$$

e \hat{n} aqui é o versor normal à superfície do cristal, orientado para dentro do cristal, conforme mostra a figura 8.

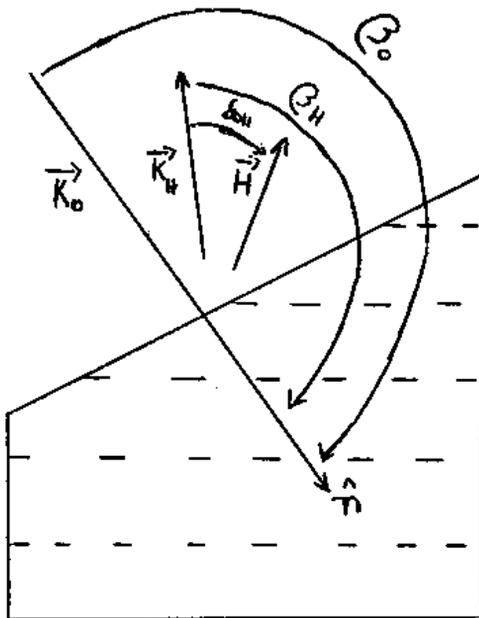


FIG.8. VÁRIAS QUANTIDADES GEOMÉTRICAS DE INTERESSE.

3.6 DIFRAÇÃO DINÂMICA DOS RAIOS X PARA CRISTAIS FINOS A ÂNGULOS DE BRAGG PRÓXIMOS DE $\pi/2$

Na teoria dinâmica da difração quando $\theta_B \approx \pi/2$ ambas polarizações de χ_{-H} são equivalentes, os fatores de polarização são ± 1 e não necessitam ser introduzidos.

No caso de cristais finos de comprimento L , com superfícies paralelas, no caso Bragg simétrico, i.e., para $\hat{n} = \vec{H}/H$, as equações (3.26) a (3.29) implicam que a onda incidente excita duas ondas de Bloch no cristal com a forma (3.24) e com defeitos de ressonância dados por:

$$\xi_0^{\pm} = \frac{1}{2} (\chi_H \chi_{-H})^{1/2} [-y \pm (y^2 - 1)^{1/2}] \quad , \quad (3.37)$$

onde \pm se referem aos dois ramos da superfície de dispersão e onde:

$$y = \frac{\chi_0 - a}{(\chi_H \chi_{-H})^{1/2}} \quad (3.38)$$

com

$$a = \frac{2 \vec{K}_0 \cdot \vec{H} + H^2}{2 K^2} \quad (3.39)$$

As condições de contorno de continuidade tangencial dos vetores de onda implicam que o vetor de onda \vec{K}_T do feixe transmitido seja igual a \vec{K}_0 , enquanto as condições de contorno de continuidade das amplitudes da superfície de entrada são:

$$E_0 = D_0^+ + D_0^- \quad (3.40)$$

$$E_H = R_A^+ D_0^+ + R_A^- D_0^- \quad (3.41)$$

Analogamente na superfície de saída as condições são:

$$E_T = D_0^+ \exp(-iK\Delta_0^+ L) + D_0^- \exp(-iK\Delta_0^- L) \quad e \quad (3.42)$$

$$0 = R_A^+ D_0^+ \exp(-iK\Delta_0^+ L) + R_A^- D_0^- \exp(-iK\Delta_0^- L) \quad (3.43)$$

Resolvendo as equações (3.40) a (3.43) obtemos os coeficientes de reflexão e transmissão:

$$R = \left| \frac{E_H}{E_0} \right|^2 = \left| R_A^- \frac{1 - \exp iKL(\Delta^+ - \Delta^-)}{R_A^+ - R_A^- \exp iKL(\Delta^+ - \Delta^-)} \right|^2, \quad (3.44)$$

$$T = \left| \frac{E_T}{E_0} \right|^2 = \left| \frac{(R_A^+ - R_A^-) \exp(-iKLA^-)}{R_A^+ - R_A^- \exp iKL(\Delta^+ - \Delta^-)} \right|^2. \quad (3.45)$$

A figura 9⁽³³⁾ mostra a curva de reflexão (contínua) e a curva de transmissão (pontilhada) para a reflexão (004) de um cristal de grafite, de 5 μm de espessura, para incidência próxima a $\pi/2$ de fótons de raio X de 3.694 keV. A energia do fóton incidente é dada em termos do parametro ϵ definido por:

$$\epsilon = \frac{2d}{\lambda} - 1 = \frac{\hbar\omega - \hbar\omega_B}{\hbar\omega_B}, \quad (3.46)$$

onde a energia de Bragg $\hbar\omega_B$ é $\hbar\pi c/d$.

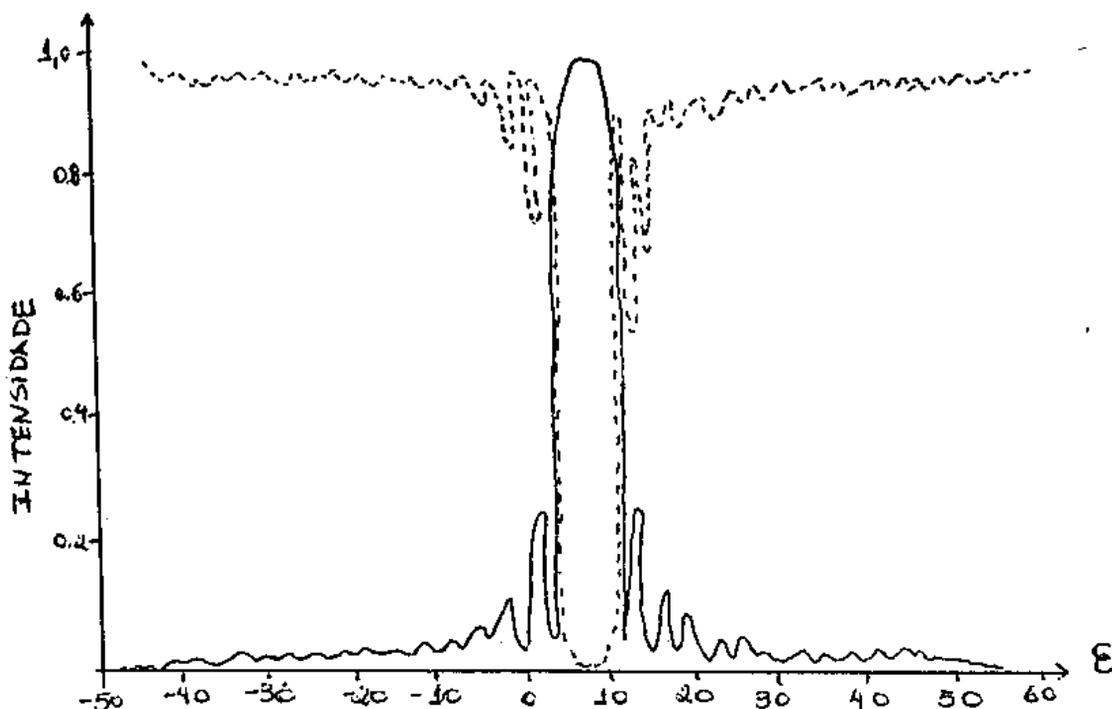


FIG. 9. COEFICIENTE DE REFLEXÃO (LINHA CONTÍNUA) (004) E TRANSMISSÃO (LINHA PONTILHADA) EM FUNÇÃO DO PARAMETRO ϵ PARA UM CRISTAL DE GRAFITE DE 5 μm DE ESPESSURA PARA RAIOS X DE 3.694 keV.

Na figura 9 a refletividade máxima é por volta de 98% e a largura em energia do pico é de 0.2 eV.

Cabe aqui fazer algumas observações de interesse para o nosso trabalho:

1) pode-se ver que cristais finos difratando a ângulos de Bragg próximos a $\pi/2$ têm sua aplicação como monocromadores de radiação síncrotron⁽³³⁾, requerendo condições não tão restritivas quanto à perfeição do cristal e sua superfície, em comparação com as condições quando se usa o cristal a ângulos de Bragg quaisquer;

2) é possível reintroduzir o feixe retrodifratado a $\pi/2$ em um anel de armazenamento⁽³⁴⁾, caso se deixe uma janela conveniente, figura 10, obtendo-se assim um feixe disponível na direção oposta. Aproveitando-se convenientemente a alta refletividade no cristal, acima de 95%, a intensidade do feixe retrodifratado será alta. Outro ponto positivo é que o coeficiente de transmissão de fótons, com comprimentos que não satisfazem a condição de reflexão máxima, é muito próximo de 1, portanto estes fótons serão totalmente transmitidos, o que evita o problema de superaquecimento e destruição do cristal;

3) outro ponto é a pequena abertura angular do feixe refletido.

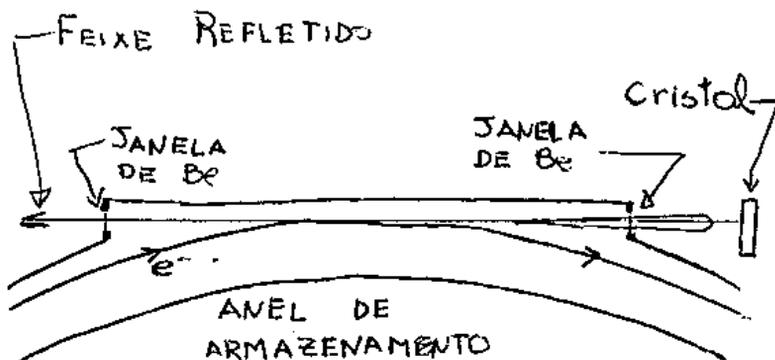


FIG.10 ESQUEMA QUE MOSTRA O FEIXE RETRODIFRATADO DE RADIAÇÃO SÍNCROTRON REINTRODUZIDO NO ANEL DE ARMAZENAMENTO.

EFEITO COMPTON

Um dos processos de interação entre fótons incidentes e elétrons de um material absorvedor é o Espalhamento Compton.

Neste processo, os fótons incidentes são defletidos de um ângulo θ com respeito a sua direção de propagação inicial, transferindo uma fração de sua energia para o elétron, assumido inicialmente em repouso, que é conhecida como Energia de recuo do elétron. Esta energia é função do ângulo de espalhamento, podendo variar de zero a grandes frações da energia do fóton incidente.

4.1. HISTÓRICO

Em 1916 Compton iniciou cuidadosas experiências envolvendo raios X. Inicialmente Compton tentou descrever os fenômenos associados ao espalhamento dos raios X pela matéria através da Eletrodinâmica Clássica, apesar da efervescência da física européia em torno da teoria quântica e de seus sucessos. Destas tentativas utilizando a Eletrodinâmica Clássica, Compton desenvolveu os modelos: (i) do elétron extenso (1917) e (ii) do elétron anelar (1918), que foram abandonados por não ter sido encontrada comprovação experimental.

Einstein, como principal defensor da teoria dos quanta para a radiação eletromagnética, publicou um trabalho em 1917⁽³⁵⁾ no qual, além de deduzir a fórmula espectral de Planck de uma maneira diferente, concluiu que a radiação emitida, ou absorvida por átomos em equilíbrio térmico com a radiação, possuía caráter direcional e carregava um momento bem definido. Não obstante, Compton prosseguia apenas guiado pelos resultados de suas experiências e relutava em abandonar a hipótese ondulatória da radiação.

Em 1921, a partir de novas experiências, Compton⁽²¹⁾ concluiu que a radiação espalhada por um cristal possuía frequência menor do que a da radiação do feixe incidente, fato que encontrava dificuldade de incorporação à

teoria clássica de Stockes - Thomson, já que esta não previa uma mudança do comprimento de onda quando a radiação sofre espalhamento por cargas inicialmente em repouso. Isto foi de fundamental importância para que Compton fosse conduzido à elaboração de uma teoria quântica para o efeito.

A fig.1 mostra o esquema da experiência de Compton, onde raios X monocromáticos de comprimento de onda λ incidem sobre um alvo de grafite. A distribuição de intensidade do feixe de raios X espalhado em função do comprimento de onda de seus fótons é medida em função do ângulo de espalhamento θ . Os comprimentos de onda dos fótons espalhados são medidos observando-se a reflexão de Bragg em um cristal. A intensidade dos fótons espalhados é medida por um detector, como, por exemplo, uma câmara de ionização.

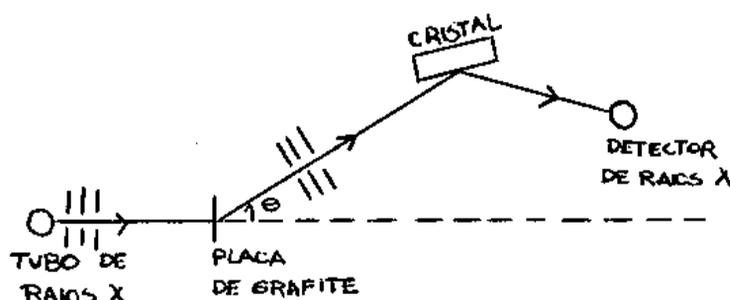


Fig.1. ESQUEMA DA EXPERIÊNCIA DE COMPTON (36)

A fig.2 mostra os resultados experimentais do Espalhamento Compton. Vemos que, embora o feixe incidente consista essencialmente de fótons com um único comprimento de onda λ , os raios X espalhados têm máximos de intensidade em dois comprimentos de onda; um deles é o mesmo que o comprimento de onda incidente, e o outro, λ' , é maior que λ por uma quantidade de $\Delta\lambda$. Este é o chamado deslocamento Compton $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, e varia com o ângulo segundo o qual os raios X foram espalhados.

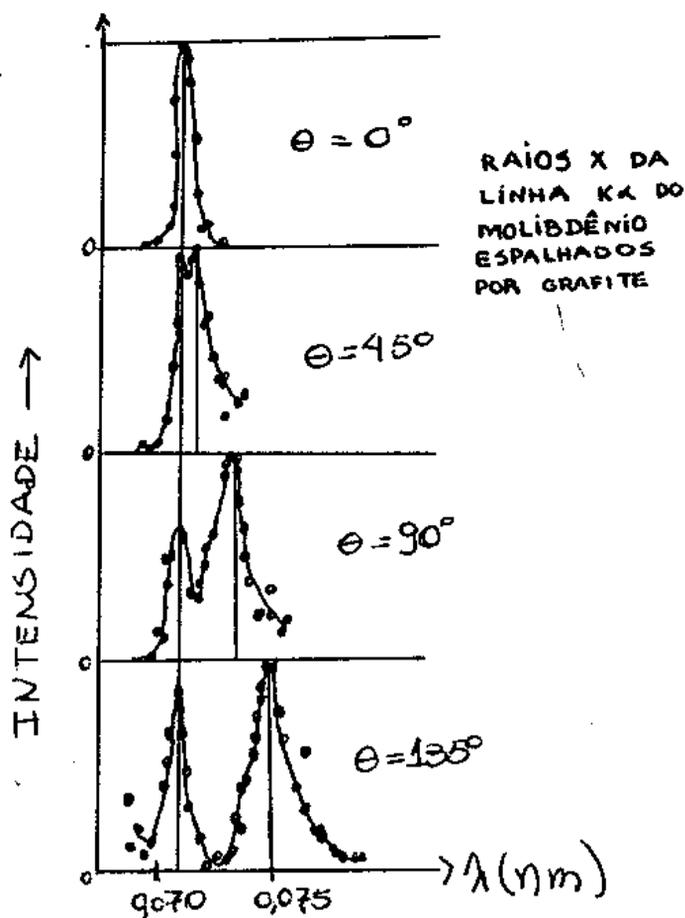


FIG.2. OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO ESPALHAMENTO COMPTON (18)

Compton supôs que um quantum de raio X, de frequência ω_1 , é espalhado por um elétron de massa de repouso m , inicialmente parado, como mostra a figura 3:

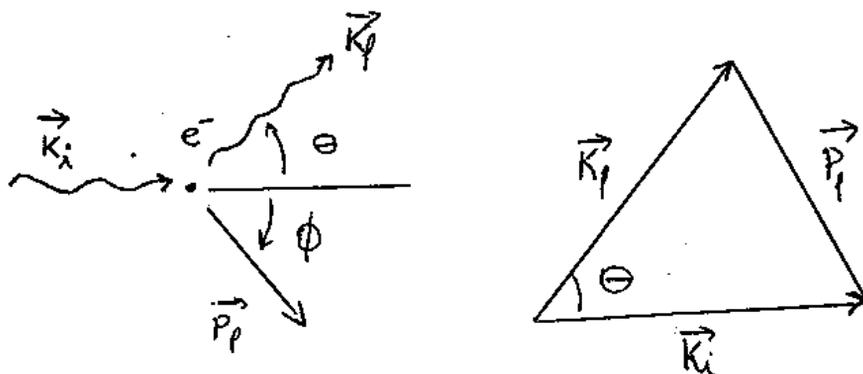


FIG.3. a) EFEITO COMPTON

b) SEU ESQUEMA VETORIAL

O módulo do momento do fóton incidente é $h\omega_1/c$, o do fóton espalhado é $h\omega_f/c$ e θ é o ângulo entre estes vetores momento.

O princípio de conservação do momento nos diz que o momento de recuo do elétron é igual à diferença vetorial dos momentos dos raios X inicial e final. Usando $\beta = v/c$, onde v é o módulo da velocidade de recuo do elétron, e a lei dos cossenos, podemos escrever:

$$\left(\frac{m\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 = \left(\frac{h\omega_f}{c} \right)^2 + \left(\frac{h\omega_1}{c} \right)^2 + 2 \frac{h\omega_1}{c} \frac{h\omega_f}{c} \cos\theta . \quad (4.1)$$

Pelo princípio da conservação de energia temos que:

$$h\omega_f = h\omega_1 - E \quad (4.2)$$

onde E é a energia cinética de recuo do elétron. Além disso sabemos que a Energia cinética do elétron pode também ser escrita como:

$$E = \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - mc^2 . \quad (4.3)$$

Então, o princípio da conservação da Energia fica

$$h\omega_f = h\omega_1 - \frac{mc^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} + mc^2 \quad (4.4)$$

As equações (4.1) e (4.4) formam um sistema cujas variáveis desconhecidas são β e ω_f . Resolvendo o sistema formado por estas duas equações, obtemos que

$$\omega_f = \frac{\omega_1}{1 + \frac{2h\omega_1}{mc^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (4.5)$$

e portanto

$$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_1 = \frac{2h}{mc} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.6)$$

onde $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ é o comprimento de onda Compton do elétron.

A equação (4.6) está de acordo com os resultados experimentais mostrados na fig.2.

4.2. SEÇÃO DE CHOQUE DO ESPALHAMENTO COMPTON

Compton também calculou a distribuição espacial da energia espalhada pelo elétron. Ele estudou a distribuição espacial da energia radiada por um corpo isotrópico carregado em movimento, vista por um observador movendo-se junto com este corpo. Compton escreveu (4.5) na forma:

$$\omega_f = \frac{\omega_1}{1 + 2\alpha_c \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (4.7)$$

$$\text{com: } \alpha_c = \frac{h\nu_1}{mc^2} = \frac{h}{mc\lambda_1} \quad (4.8)$$

e chamou atenção para o fato de que, segundo a teoria clássica, se um fóton de raio X é espalhado por um elétron que se move na direção de propagação com uma velocidade $\beta'c$, a frequência do raio espalhado a um ângulo θ é dada pelo princípio de Doppler por:

$$\omega_f = \frac{\omega_1}{1 + \frac{2\beta'}{1 - \beta'} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (4.9)$$

Vemos que (4.9) é exatamente da mesma forma de (4.7), derivada com a hipótese do recuo do elétron espalhador. De fato, se $\alpha_c = \beta'/(1-\beta')$ ou, equivalentemente, $\beta' = \alpha_c/(1 + \alpha_c)$, as duas expressões ficarão idênticas. Assim, Compton argumentou que, no que se refere ao efeito sobre o comprimento de onda do raio X incidente, é equivalente supor um elétron recuando ou um elétron espalhador se movendo na direção do feixe incidente a uma velocidade $\alpha_c c/(1 + \alpha_c)$. Para raios γ do RaC ($\lambda = 0.022 \text{ A}$, $\alpha_c = 1,09$), Compton usou β' igual a 0.52, que notou estar de

acordo com a estimativa de Rutherford, que era de $0.5^{(36)}$.

Primeiramente, Compton obteve uma expressão para a distribuição angular produzida por um oscilador movendo-se com a velocidade relativística efetiva $v = \beta'c$, e depois usou a correspondência

$$\beta' / (1 - \beta') \longleftrightarrow \alpha_c \quad (4.10)$$

para convertê-la na expressão da distribuição angular dos quanta espalhados. O resultado final assim obtido equivale a uma intensidade de raios X espalhados a um ângulo θ com a direção do feixe incidente

$$I(\theta, \alpha) \propto N \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 I \left\{ \frac{1 + \cos^2\theta + 2\alpha_c(1 + \alpha_c)(1 - \cos\theta)^2}{2 [1 + \alpha_c(1 - \cos\theta)]^5} \right\} \quad (4.11)$$

onde I é a intensidade do feixe incidente e N é o número de elétrons, por unidade de volume, efetivos no espalhamento.

Integrando a equação acima Compton encontrou o que chamou de coeficiente de absorção do espalhamento, definido como a fração da energia do feixe primário removida pelo processo de espalhamento, por unidade de comprimento:

$$\frac{\sigma(\alpha)}{\rho} = \frac{\sigma_0}{\rho} \frac{1}{1 + 2\alpha_c} \quad (4.12)$$

onde σ_0 é dada por (3.3), e ρ é a densidade do absorvedor.

Da expressão (4.11) podemos obter seção de choque diferencial por elétron espalhador obtida por Compton seguindo este raciocínio:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Compton}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 \left\{ \frac{1 + \cos^2\theta + 2\alpha_c(1 + \alpha_c)(1 - \cos\theta)^2}{[1 + \alpha_c(1 - \cos\theta)]^5} \right\}. \quad (4.13)$$

Vemos que a equação (4.13) se reduz à expressão obtida por Thomson (3.2) no limite de baixas energias ($\alpha_c \rightarrow 0$):

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Thomson}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2\theta)$$

onde agora usamos θ para designar o ângulo formado entre a direção de propagação do feixe incidente e a direção de observação.

A figura 4 mostra a comparação entre os valores teóricos e os valores experimentais para a variação do coeficiente de absorção do espalhamento com o comprimento de onda dos raios X incidentes:

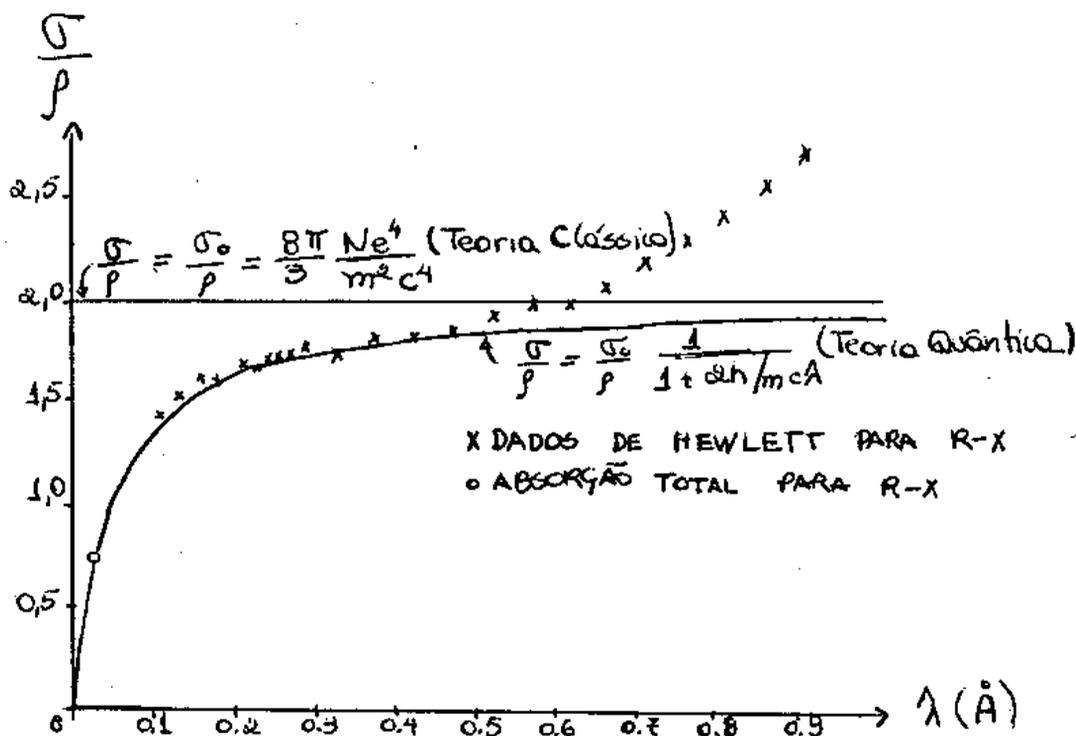


FIG. 4. COMPARAÇÃO ENTRE A TEORIA E A EXPERIÊNCIA PARA A VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE ABSORÇÃO DO ESPALHAMENTO COM O COMPRIMENTO DE ONDA.

Para grandes comprimentos de onda nota-se que os dados não foram corrigidos devido à foto-absorção nos átomos de carbono (efeito fotoelétrico)

A teoria apresentada por Compton depende essencialmente da hipótese de que cada elétron espalha completamente um quantum. Envolve também a hipótese de que o

quantum de radiação possui inicialmente uma direção definida e é espalhado em uma outra direção também definida. As experiências nas quais se baseia esta teoria indicam muito convincentemente que o quantum de radiação carrega consigo um momento e uma energia bem definidos.

Curiosamente, no mesmo ano de 1923, Debye⁽²²⁾ publicou um trabalho sobre a teoria quântica do efeito estudado por Compton, coincidente em muitos pontos com a teoria de Compton, e desenvolvida independentemente. Utilizando também a cinemática fóton - elétron, calculou não apenas o desvio do comprimento de onda (4.6), como também a energia dos elétrons que recuam e a relação entre o ângulo de espalhamento θ do quantum emitido e o ângulo ϕ dos elétrons.

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{1}{(1 + \alpha_c) \operatorname{tg}(\theta/2)} \quad (4.14)$$

Debye concluiu então que os elétrons são sempre espalhados na direção dianteira ($0 \leq \phi \leq \Pi/2$) enquanto os fótons o são em todas as direções ($0 \leq \phi_1 \leq \Pi$), resultado que não ficou evidente no trabalho de Compton. Ao contrário de Compton, Debye referiu-se explicitamente ao artigo de Einstein⁽³⁵⁾ sobre o efeito fotoelétrico, e identificou seus quanta de energia com aqueles introduzidos por Einstein.

E', no entanto, no cálculo da seção de choque de espalhamento da radiação que se verifica a diferença mais drástica entre os trabalhos de Compton e Debye. Debye invocou o princípio da correspondência de Bohr, no sentido de que no limite de grandes comprimentos de onda a Eletrodinâmica Clássica deve ser válida e a seção de choque deve se reduzir à expressão de Thomson (3.2). Assim, simplesmente modulou a seção de choque clássica com a razão entre as frequências da radiação espalhada e incidente, dada por (4.7). Segundo Debye a seção de choque diferencial seria:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Debye}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{1 + \alpha_c(1 - \cos\theta)} \quad (4.15)$$

Apesar de qualitativamente semelhante à fórmula de Compton (4.13), a fórmula de Debye (4.15) encontra-se mais

distante dos dados experimentais. A diferença entre as expressões de Thomson (3.2), Compton (4.13) e Debye (4.15) é apresentada na figura 5.

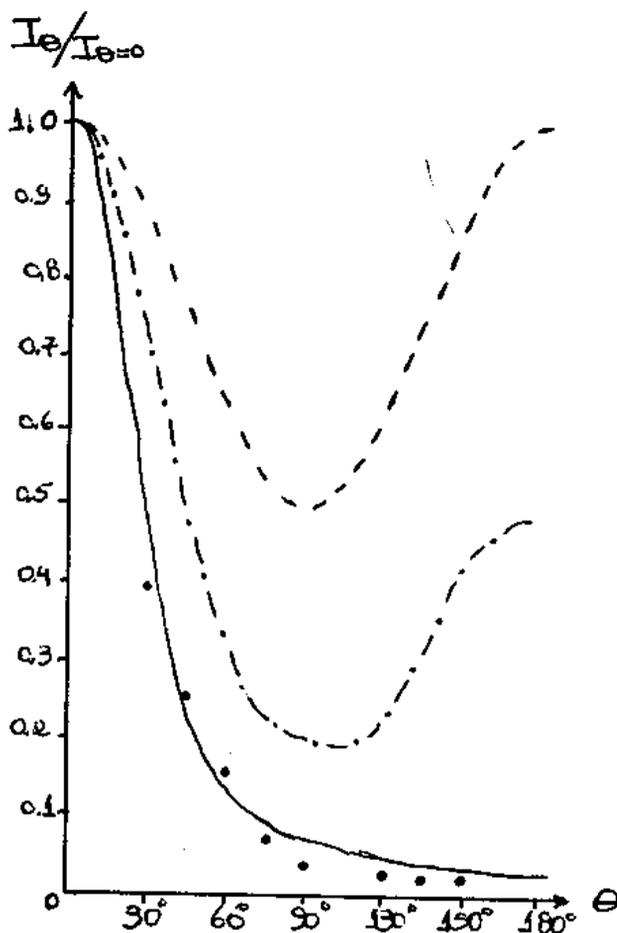


FIG.5. COMPARAÇÃO ENTRE AS SEÇÕES DE CHOQUE (EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE ESPALHAMENTO θ) SEGUNDO THOMSON ----, DEBYE - - - - -, COMPTON ——— E OS DADOS EXPERIMENTAIS PARA $\alpha = 1.09$.

4.3. SEÇÃO DE CHOQUE DE KLEIN - NISHINA*

Nesta seção analisaremos o espalhamento de fótons por elétrons livres do ponto de vista da eletrodinâmica quântica.

* A PARTIR DESTA SEÇÃO ADOTAREMOS $\hbar = c = 1$

Apesar dos sucessos alcançados pelos modelos baseados na teoria quântica, era evidente, através do estudo do próprio efeito Compton, que não seria possível resolver satisfatoriamente todos os problemas sem antes atingir um formalismo quântico adequado.

No período 1924 - 1926 os esforços de de Broglie e Schroedinger resultaram em uma versão ondulatória da teoria quântica. Até esta época as partículas, como o elétron, vinham sendo tratadas como corpúsculos com massa m e carga elementar e . O comportamento ora ondulatório ora corpuscular da radiação eletromagnética inspirou de Broglie a questionar se não seria possível que objetos tradicionalmente considerados corpusculares exibissem características ondulatórias. Surgiu então a Mecânica Ondulatória que, através da formulação de Schroedinger, notabilizou-se rapidamente, em vista do alcance de suas previsões e relativa simplicidade.

No ano de 1927 Schroedinger publicou um trabalho não muito conhecido⁽³⁷⁾ que continha uma abordagem diferente do efeito Compton. Considerou que os elétrons são caracterizados por uma função de onda que é solução da equação de Klein - Gordon. Mais tarde verificou-se que esta equação não era a mais adequada para descrever os elétrons, já que a equação diferencial relativística que os descreve deve levar em conta, além de sua massa, o seu spin. Para Schroedinger, no entanto, a radiação consistia de ondas eletromagnéticas clássicas, que sofrem reflexões de Bragg em ondas estacionárias formadas pelos elétrons incidentes e emergentes no processo de espalhamento. Este tratamento semi-clássico diferiu em muito das concepções de Compton e Debye, principalmente pelo fato de não invocar o fóton.

É interessante ressaltar a diferença entre a abordagem de Schroedinger e de Bohr e seus colaboradores⁽³⁸⁾. Apesar dos dois tratamentos considerarem a radiação como sendo clássica, segundo Schroedinger o caráter quântico residia nas propriedades ondulatórias dos elétrons, enquanto que, segundo Bohr, ocorria nos níveis de energia atômicos, ou seja, nos átomos como um todo. Contudo Schroedinger não calculou as seções de choque de espalhamento da radiação e dos elétrons de recuo. O único resultado obtido por ele foi o deslocamento do

comprimento de onda dado por (4.6).

Foi necessário esperar uma formulação adequada para a Mecânica Quântica, desenvolvida por Dirac em 1927⁽³⁹⁾. Dirac escreveu pela primeira vez uma equação invariante por transformações de Lorentz e que descrevia partículas com spin meio. Tornou-se possível tratar de maneira conveniente o efeito Compton, e no ano seguinte Klein e Nishina⁽⁴⁰⁾ publicaram um trabalho com a hoje famosa expressão para a seção de choque de espalhamento da radiação por elétrons livres.

Deduziremos a seguir a fórmula da seção de choque de Klein - Nishina, que se ajusta perfeitamente bem aos dados experimentais, para feixes não polarizados.

Para o espalhamento Compton os diagramas de Feynman de ordem mais baixa em e (2^a ordem) são mostrados na figura abaixo (as contribuições de ambos os diagramas devem ser incluídas para se ter invariância por transformações de calibre)

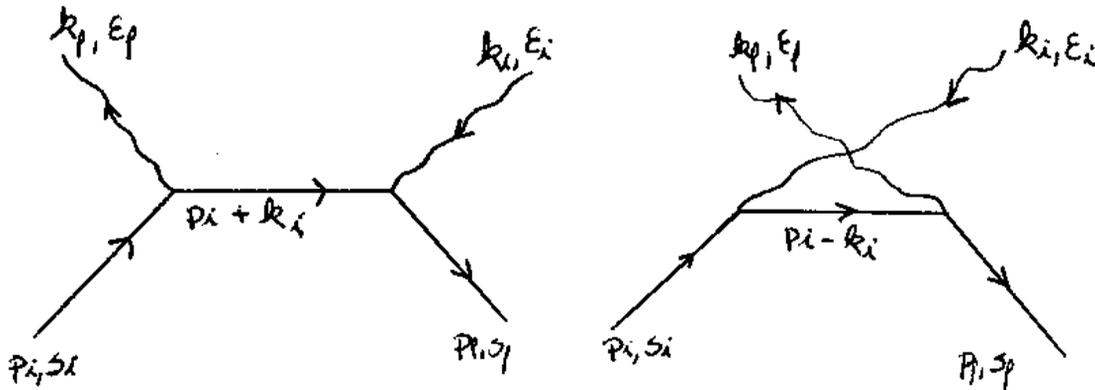


FIG. 6. DIAGRAMAS DE FEYNMAN PARA O ESPALHAMENTO COMPTON

O elemento de matriz que descreve o processo é ⁽⁴¹⁾:

$$S_{fi} = e^2 (2\pi)^4 \delta(p_f + k_f - p_i - k_i) \tau_{fi} \quad (4.16)$$

com

$$\tau_{fi} = -i \bar{u}_f \left[\not{\epsilon}_f \frac{1}{\not{p}_i + \not{k}_i - m} \not{\epsilon}_i + \not{\epsilon}_i \frac{1}{\not{p}_i - \not{k}_i - m} \not{\epsilon}_f \right] u_i \quad (4.17)$$

onde ϵ_i é a polarização transversal do fóton inicial

ϵ_f e a polarização transversal do fóton final

$p_i = (\vec{p}_i, E_i) =$ quadrivector momento inicial do elétron

$p_f = (\vec{p}_f, E_f) =$ quadrivector momento final do elétron

$k_i = (\vec{k}_i, \omega_i) =$ quadrivector momento do fóton inicial

$k_f = (\vec{k}_f, \omega_f) =$ quadrivector momento do fóton final

$u_i = u(p_i, s_i) =$ é o spinor solução da equação de Dirac com energia positiva, quadrimomento p_i e spin s_i

$u_f = u(p_f, s_f) =$ é o spinor solução da equação de Dirac com energia positiva, quadrimomento p_f e spin s_f ,

\bar{u} é o spinor conjugado ou adjunto $u^\dagger \gamma^0$, e γ^μ são as matrizes de Dirac,

$$\not{x} = \gamma^\mu a_\mu,$$

e satisfazem as seguintes propriedades:

$$k_i^2 = k_f^2 = 0, \quad \epsilon_i^2 = \epsilon_f^2 = -1, \quad k_i \cdot \epsilon_i = k_f \cdot \epsilon_f = 0, \quad p_i^2 = p_f^2 = m^2$$

A equação (4.17) também pode ser escrita como

$$\tau_{fi} = -i \bar{u}_f \left[\not{x}_f \frac{\not{x}_i + m}{f_1^2 - m^2} \not{x}_i + \not{x}_i \frac{\not{x}_f + m}{f_2^2 - m^2} \not{x}_f \right] u_i \quad (4.18)$$

onde $f_1 = p_i + k_i$ e $f_2 = p_i - k_f = p_f - k_i$.

A probabilidade de transição por espalhamento no alvo, por unidade de fluxo incidente resultará na seção de choque de espalhamento:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Delta s_i s_f} e^4 (2\pi)^4 \delta(p_f + k_f - p_i - k_i) |\tau_{fi}|^2 \frac{m}{2p_i \cdot k_i} \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{m d^3 p_f}{2\omega_f (2\pi)^3 E_f} \quad (4.19)$$

onde $(2/m) p_1 \cdot k_1$ é o fator de fluxo do elétron inicial,

$\frac{m d^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f}$ é o fator de espaço de fase do estado final do elétron.

Se definirmos:

$$\chi_1 = \frac{f_1^2 - m^2}{m^2} = \frac{2p_1 \cdot k_1}{m^2} \quad e$$

$$\chi_2 = \frac{f_2^2 - m^2}{m^2} = - \frac{2p_1 \cdot k_f}{m^2} \quad ,$$

a equação (4.19) toma a forma:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Delta} \sum_{s_i, s_f} e^4 \delta(p_f + k_f - p_i - k_1) |\tau_{if}|^2 \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^2 \omega_f} \frac{d^3 p_f}{2\chi_1 E_f} \quad (4.20)$$

com:

$$\tau_{fi} = - \frac{i\bar{u}_f}{m^2} \left[\not{f}_f \frac{\not{f}_1 + m}{\chi_1} \not{f}_1 + \not{f}_1 \frac{\not{f}_2 + m}{\chi_2} \not{f}_f \right] u_i \quad (4.21)$$

Quer-se descrever o espalhamento de fótons por elétrons não polarizados, quando a polarização final do elétron não é detetada. Para tanto a equação (4.20) contém a média sobre os estados iniciais de spins do elétron e a soma sobre os estados finais de spins do elétron. Cada estado possui um momento bem definido sendo integrado através da resolução, Δ , de energia e momento.

O resultado da integral da equação (4.20) é:

$$\int d^3 p_f d^3 k_f \delta^4(p_f + k_f - p_i - k_1) = \frac{(\omega_f)^2 d\Omega}{\left| \frac{\partial(\omega_f + E_f)}{\partial\omega_f} \right|} \quad (4.22)$$

onde Ω é o ângulo sólido formado pela direção do momento do fóton espalhado, medido com respeito à direção do momento do fóton incidente.

O resultado da equação (4.22) é devido às integrais:

$$\int d^3 p_f \delta^3(\vec{p}_f + \vec{k}_f - \vec{p}_i - \vec{k}_i) = 1 \quad (4.23a)$$

e

$$\int \omega_f^2 d\omega_f d\Omega \delta(E_f + \omega_f - E_i - \omega_i) = \frac{(\omega_f)^2 d\Omega}{\left| \frac{\partial(\omega_f + E_f)}{\partial \omega_f} \right|} \quad (4.23b)$$

Calculando-se o Jacobiano em (4.23b), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_f + E_f)}{\partial \omega_f} &= 1 + \frac{1}{2E_f} \frac{\partial E_f^2}{\partial \omega_f} = 1 + \frac{1}{2E_f} \frac{\partial [m^2 + (\vec{p}_i + \vec{k}_i - \vec{k}_f)^2]}{\partial \omega_f} \\ &= 1 - \frac{1}{2E_f} 2(\vec{p}_i + \vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \frac{\vec{k}_f}{|\vec{k}_f|} = 1 - \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{k}_f}{E_f \omega_f} = \frac{p_f \cdot k_f}{E_f \omega_f} \end{aligned}$$

$$\text{Como: } p_f \cdot k_f = \frac{m^2 \chi_1}{2}, \quad \frac{\partial(\omega_f + E_f)}{\partial \omega_f} = \frac{m^2 \chi_1}{2 E_f \omega_f} \quad (4.24)$$

$$\text{Então: } d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} e^4 |\tau_{if}|^2 \left(\frac{\omega_f}{2\pi m \chi_1} \right)^2 d\Omega, \quad (4.25)$$

Como $\alpha = e^2/4\pi$ e $r_0 = \alpha/m = 2,8 \times 10^{-13}$ cm, a equação (4.25) pode ser reescrita como:

$$d\sigma = 4 \frac{\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega_f}{\chi_1} \right)^2 d\Omega \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\tau_{if}|^2 \quad (4.26)$$

A somatória sobre os spins inicial e final pode ser resolvida da seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\tau_{if}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} | \bar{u}_f \not{O} u_i |^2,$$

$$\text{onde} \quad 0 = \not{p}_f \frac{\not{p}_1 + m}{m^2 \chi_1} \not{p}_1 + \not{p}_1 \frac{\not{p}_2 + m}{m^2 \chi_2} \not{p}_f \quad (4.27)$$

A matriz \bar{O} é calculada a partir de $\bar{O} = \gamma^0 O^* \gamma^0$ e com as matrizes de Dirac satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\delta} = \gamma^\delta \dots \gamma^\nu \gamma^\mu,$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \longrightarrow \begin{aligned} \not{a}\not{b} &= -\not{b}\not{a} + 2a \cdot b \\ \not{a}\not{a} &= a^2 \end{aligned}$$

$$(\gamma^k)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1, \quad \gamma^{k+} = -\gamma^k, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0, \quad \text{Tr} \gamma^\mu = 0.$$

Então:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}_f O u_i u_i^* O^* \gamma^0 u_f = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}_f O u_i \bar{u}_i \bar{O} u_f$$

Usando agora o operador projeção:

$$\sum_{s_i} u_\xi(p_i, s_i) \bar{u}_{\xi'}(p_i, s_i) = \left(\frac{\not{p}_i + m}{2m} \right)_{\xi\xi'}$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}_f O u_i \bar{u}_i \bar{O} u_f = \frac{1}{2} \sum_{s_f} \bar{u}_{f\xi} O_{\xi\xi'} \left(\frac{\not{p}_i + m}{2m} \right)_{\xi'\alpha} \bar{O}_{\alpha\beta} u_{f\beta}$$

$$\text{e similarmente} \quad \sum_{s_f} u_\beta(p_f, s_f) \bar{u}_\xi(p_f, s_f) = \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m} \right)_{\beta\xi}$$

Ficamos com:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m} \right)_{\beta\xi} O_{\xi\xi'} \left(\frac{\not{p}_i + m}{2m} \right)_{\xi'\alpha} \bar{O}_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2} \text{TR} \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m} O \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{O} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Para simplificar nossos cálculos consideraremos a seguinte transformação de calibre para os novos vetores de polarização⁽⁴²⁾:

$$e_i = \varepsilon_i - \frac{p_i \cdot \varepsilon_i}{p_i \cdot k_i} k_i, \quad e_f = \varepsilon_f - \frac{p_i \cdot \varepsilon_f}{p_i \cdot k_f} k_f. \quad (4.29)$$

Se escrevermos a equação (4.18) usando essa transformação de calibre veremos que τ_{f1} é invariante por esta transformação.

Os novos vetores polarização satisfazem as seguintes propriedades:

$$e_i^2 = e_f^2 = -1, \quad k_i \cdot e_i = k_f \cdot e_i = 0, \quad e_i \cdot p_i = e_f \cdot p_i = 0.$$

Neste calibre a equação (4.28) fica com a forma:

$$S = \frac{1}{8} \text{TR} \left(O \left(1 + \frac{\not{p}_i}{m} \right) \bar{O} \left(1 + \frac{\not{p}_f}{m} \right) \right), \quad (4.30)$$

com

$$O = \not{\varepsilon}_f \frac{\not{\varepsilon}_1 + m}{m^2 \chi_1} \not{\varepsilon}_1 + \not{\varepsilon}_1 \frac{\not{\varepsilon}_2 + m}{m^2 \chi_2} \not{\varepsilon}_f. \quad (4.31)$$

Usando a definição de f_i e as propriedades dos novos vetores polarização, a equação (4.31) pode ser simplificada tomando a forma:

$$O = \frac{\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_1 (m - \not{p}_1 - \not{\chi}_1)}{2p_i \cdot k_i} - \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_f (m - \not{p}_1 + \not{\chi}_f)}{2p_i \cdot k_f}.$$

Usando a identidade $(m + \not{p})(m - \not{p}) = m^2 - p^2 = 0$, a equação (3.30) toma a forma:

$$S = \frac{1}{8} \text{TR} \left(\left(\frac{\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_1 \not{\chi}_1}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_f \not{\chi}_f}{2p_i \cdot k_f} \right) \left(1 + \frac{\not{p}_i}{m} \right) \left(\frac{\not{\chi}_1 \not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_f}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\not{\chi}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_1}{2p_i \cdot k_f} \right) \left(1 + \frac{\not{p}_f}{m} \right) \right). \quad (4.32)$$

Podemos notar que a contribuição total dos dois diagramas de Feynman é invariante pela troca

$$(\varepsilon_i, k_i) \leftrightarrow (\varepsilon_f, -k_f) \quad , \quad (4.33)$$

que permuta as variáveis inicial e final do fóton. Da mesma forma:

$$(e_i, k_i) \leftrightarrow (e_f, -k_f) \quad . \quad (4.34)$$

Este é um exemplo da nova simetria das amplitudes de transição, a simetria de "crossing" ou de cruzamento.

A equação (4.32) pode ser dividida em duas

$$S = \frac{1}{8} (S_1 + S_2) \quad ,$$

onde $S_1 = \text{TR} \left[\left(1 + \frac{\not{\varepsilon}_i}{m} \right) K \left(1 + \frac{\not{\varepsilon}_f}{m} \right) \bar{K} \right]$ que não leva em conta o recuo do e^-

$$S_2 = \text{TR} \left[\left(1 + \frac{\not{\varepsilon}_i}{m} \right) K \left(\frac{\not{\varepsilon}_i - \not{\varepsilon}_f}{m} \right) \bar{K} \right]$$
 contribuição do recuo do e^-

com $K = \left(\frac{\not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{\varepsilon}_f}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\not{\varepsilon}_f \not{k}_f \not{\varepsilon}_i}{2p_i \cdot k_f} \right)$

Para calcularmos S_1 partiremos de:

$$\begin{aligned} K \left(1 + \frac{\not{\varepsilon}_i}{m} \right) &= K - \frac{\not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{\varepsilon}_f}{2p_i \cdot k_i m} - \frac{\not{\varepsilon}_f \not{k}_f \not{\varepsilon}_i}{2p_i \cdot k_f m} = \\ &= K - \frac{\not{\varepsilon}_i (-\not{\varepsilon}_i \not{k}_i + 2p_i \cdot k_i) \not{\varepsilon}_f}{2p_i \cdot k_i m} - \frac{\not{\varepsilon}_f (-\not{\varepsilon}_f \not{k}_f + 2p_i \cdot k_f) \not{\varepsilon}_i}{2p_i \cdot k_f m} = \\ &= K - \frac{\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{\varepsilon}_f}{2p_i \cdot k_i m} - \frac{\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{k}_f \not{\varepsilon}_i}{2p_i \cdot k_f m} - \frac{\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i}{m} - \frac{\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f}{m} = \left(1 - \frac{\not{\varepsilon}_i}{m} \right) K - \\ &2 \frac{e_i \cdot e_f}{m} \quad , \end{aligned}$$

onde usamos a identidade (4.34). Então S_1 toma a forma:

$$S_1 = \text{TR} \left(\left(1 + \frac{\gamma_1}{m} \right) \left(\left(1 - \frac{\gamma_1}{m} \right) K - 2 \frac{e_1 \cdot e_f}{m} \right) \right) \bar{K} .$$

Como

$$\left(1 + \frac{\gamma_1}{m} \right) \left(1 - \frac{\gamma_1}{m} \right) = 0$$

$$S_1 = - 2 \frac{e_1 \cdot e_f}{m} \text{TR} \left(\left(1 + \frac{\gamma_1}{m} \right) \left(\frac{\gamma_f \gamma_1 \gamma_1}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\gamma_1 \gamma_f \gamma_f}{2p_1 \cdot k_f} \right) \right) .$$

Como o primeiro termo dentro do traço contém um número ímpar de matrizes γ , S_1 toma a forma:

$$S_1 = - 2 \frac{e_1 \cdot e_f}{m} \text{TR} \left(\frac{\gamma_1}{m} \left(\frac{\gamma_f \gamma_1 \gamma_1}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\gamma_1 \gamma_f \gamma_f}{2p_1 \cdot k_f} \right) \right)$$

$$S_1 = - 2 \frac{e_1 \cdot e_f}{m^2} \left(- 2 \frac{p_1 \cdot k_1 e_1 \cdot e_f}{p_1 \cdot k_1} - 2 \frac{p_1 \cdot k_f e_1 \cdot e_f}{p_1 \cdot k_f} \right) = 8 \left(\frac{e_1 \cdot e_f}{m} \right)^2 .$$

Para calcularmos S_2 também usaremos que o primeiro termo dentro do traço contribui com zero pois contém um número ímpar de matrizes γ . Então ficamos com:

$$S_2 = \frac{1}{m^2} \text{TR} \left(\gamma_1 \left(\frac{\gamma_1 \gamma_1 \gamma_f}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\gamma_f \gamma_f \gamma_1}{2p_1 \cdot k_f} \right) (\gamma_1 - \gamma_f) \left(\frac{\gamma_f \gamma_1 \gamma_1}{2p_1 \cdot k_1} + \frac{\gamma_1 \gamma_f \gamma_f}{2p_1 \cdot k_f} \right) \right) .$$

O traço pode ser dividido em quatro termos: dois diagonais, cada um obtido do outro pela substituição (4.34), e dois termos cruzados. Os últimos são iguais, já que o traço de um número ímpar de matrizes γ é nulo e já que

$$\text{Tr} (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_{2n}) = \text{Tr} (\gamma_{2n} \dots \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1) ,$$

igualdade esta obtida usando a propriedade da transposição e trocando γ por γ^T através da matriz conjugação de carga C .

Resta apenas calcular os dois traços não triviais. Usando as identidades $k_i^2 = k_f^2 = 0$, $e_i^2 = e_f^2 = -1$ e aplicando a identidade $\cancel{ab} = -\cancel{ba} + 2 a.b$, obteremos:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \text{Tr}[\cancel{p}_1 \cancel{e}_1 \cancel{k}_1 \cancel{e}_f (K_i - K_f) \cancel{e}_f \cancel{k}_1 \cancel{e}_1] = \\
 &= \text{Tr}[\cancel{p}_1 \cancel{k}_1 \cancel{e}_f (K_i - K_f) \cancel{e}_f \cancel{k}_1] = \\
 &= 2 p_1 . k_1 \text{Tr}[\cancel{e}_f (K_i - K_f) \cancel{e}_f \cancel{k}_1] = \\
 &= 2 p_1 . k_1 \text{Tr}[(- (K_i - K_f) \cancel{e}_f + 2 e_f . k_1) \cancel{e}_f \cancel{k}_1] = \\
 &= 2 p_1 . k_1 \text{Tr}[(- K_f \cancel{k}_1 + 2 e_f . k_1 \cancel{e}_f \cancel{k}_1] = \\
 &= 2 p_1 . k_1 4[- k_f . k_1 + 2(e_f . k_1)^2] ,
 \end{aligned}$$

e similarmente:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \text{Tr}[\cancel{p}_1 \cancel{e}_1 \cancel{k}_1 \cancel{e}_f (K_i - K_f) \cancel{e}_1 \cancel{k}_f \cancel{e}_f] = \\
 &= \text{Tr}[\cancel{p}_1 \cancel{e}_1 (-\cancel{e}_f \cancel{k}_1 + 2 k_1 . e_f) (K_i - K_f) (-\cancel{k}_f \cancel{e}_1 + 2 k_f . e_1) \cancel{e}_f] = \\
 &= \text{Tr}[\cancel{p}_1 \cancel{e}_1 (\cancel{e}_f \cancel{k}_1 \cancel{k}_f 2 k_f . e_1 - 2 k_1 . e_f \cancel{k}_1 \cancel{k}_f \cancel{e}_1 + 4 k_1 . e_f k_f . e_1 (K_i - K_f)) \cancel{e}_f] \\
 &= \text{Tr}[\cancel{p}_1 (\cancel{e}_1 \cancel{e}_f - 2 e_1 . e_f) (\cancel{e}_f \cancel{k}_1 \cancel{k}_f 2 k_f . e_1 - 2 k_1 . e_f \cancel{k}_1 \cancel{k}_f \cancel{e}_1 + \\
 &\quad + 4 k_1 . e_f k_f . e_1 (K_i - K_f))] = \\
 &= \text{Tr}[-\cancel{p}_1 \cancel{e}_1 \cancel{k}_1 \cancel{k}_f 2 k_f . e_1 - 2 e_1 . e_f 2 k_f . e_1 \cancel{p}_1 \cancel{e}_f \cancel{k}_1 \cancel{k}_f - 2 k_1 . e_f \cancel{p}_1 \cancel{e}_1 \cancel{k}_1 \cancel{k}_f \\
 &\quad + 4 e_1 . e_f k_1 . e_f \cancel{p}_1 \cancel{k}_1 \cancel{k}_f \cancel{e}_1 + 4 k_1 . e_f k_f . e_1 \cancel{p}_1 \cancel{e}_1 \cancel{e}_f (K_i - K_f) - 2 \\
 &\quad e_1 . e_f 4 k_1 . e_f k_f . e_1 \cancel{p}_1 (K_i - K_f)] = \\
 &= 4\{-2 k_f . e_1 (- p_1 . k_1 e_1 . k_f) - 4 e_1 . e_f k_f . e_1 (p_1 . k_f e_f . k_1) + \\
 &\quad - 2 k_1 . e_f (p_1 . k_f e_f . k_1) + 4 e_1 . e_f k_1 . e_f (p_1 . k_1 k_f . e_1) - 4 k_1 . e_f \\
 &\quad k_f . e_1 (p_1 . k_1 e_1 . e_f - p_1 . k_f e_1 . e_f) - 8 e_1 . e_f k_1 . e_f k_f . e_1 \\
 &\quad (p_1 . k_1 - p_1 . k_f)\} = 8 \{ (e_1 . k_f)^2 p_1 . k_1 - p_1 . k_f (e_f . k_1)^2 \}.
 \end{aligned}$$

O segundo termo cruzado T_3 é igual a T_2 ; finalmente, T_4 é obtido de T_1 através da substituição (4.34). Portanto S_2 toma a forma:

$$S_2 = \frac{2}{m^2} k_1 . k_f \left(\frac{1}{p_1 . k_f} - \frac{1}{p_1 . k_1} \right) \quad (4.35)$$

Usando a conservação do momento:

$$\begin{aligned} (p_1 + k_1 - k_f)^2 &= p_f^2 \\ k_1 \cdot p_f &= k_f \cdot p_1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad p_1(k_1 - k_f) = k_1 \cdot k_f ,$$

ficamos com:

$$S_2 = \frac{2}{m^2} \left(\frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_f} + \frac{p_1 \cdot k_f}{p_1 \cdot k_1} - 2 \right) \quad (4.36)$$

Então S toma a forma:

$$S = \frac{1}{4m^2} \left(4(e_1 \cdot e_f)^2 + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_f} + \frac{p_1 \cdot k_f}{p_1 \cdot k_1} - 2 \right) \quad (4.37)$$

e portanto a seção de choque diferencial toma a forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{m\omega_f}{p_1 \cdot k_1} \right)^2 \left(4(e_1 \cdot e_f)^2 + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_f} + \frac{p_1 \cdot k_f}{p_1 \cdot k_1} - 2 \right) \quad (4.38)$$

Se considerarmos que o elétron está inicialmente em repouso, e_1 e e_f recairão nos quadrivetores ε_1 e ε_f e a seção de choque diferencial toma a forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\omega_f}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_f} + 4(e_f \cdot e_1)^2 - 2 \right) \quad (4.39)$$

que é a equação de Klein - Nishina.

Se o feixe de fótons incidentes for não-polarizado e a polarização do fóton final não for detetada, é necessário, como no caso do elétron, tomar a média sobre ε_1 e somar sobre ε_f , obtendo assim a seção de choque não-polarizada:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\substack{\text{não} \\ \text{polarizada}}} = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_f} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Usando-se o resultado: $\sum_{\epsilon_1, \epsilon_f} (\epsilon_1 \cdot \epsilon_f)^2 = 1 + \cos^2 \theta$

chega-se a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\substack{\text{não} \\ \text{polarizada}}} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - \cos^2 \theta \right)$$

Usando a equação que relaciona ω_f com ω_i , equação (4.7), ficamos com :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \alpha_c (1 - \cos \theta)]^2} \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\alpha_c^2 (1 - \cos \theta)^2}{[1 + \cos^2 \theta] [1 + \alpha_c (1 - \cos \theta)]} \right\}, \quad (4.40)$$

com $\alpha_c = \omega_i/m$. Com esta seção de choque se consegue uma ótima descrição dos resultados experimentais.

Na verdade a análise apresentada por Klein e Nishima, no artigo, é de certa maneira semi-clássica, no sentido de que os cálculos não foram realizados em segunda quantização, ou seja, foram efetuados sem uma quantização explícita do campo eletromagnético. No entanto, com o rápido estabelecimento da Eletrodinâmica Quântica, surgiu a primeira abordagem do efeito Compton neste espírito, executada por Tamm⁽⁴³⁾ em 1930. Segundo a Eletrodinâmica Quântica, ou seja, o cálculo que acabamos de mostrar, objetos com características ondulatórias e corpusculares que obedecem a equação de Dirac (elétrons), interagem com objetos também quânticos e duais que obedecem às equações de Maxwell (fótons), de maneira que, através de um cálculo perturbativo, é possível calcular a seção de choque para o espalhamento da radiação, como calculamos, com a ordem de aproximação desejada (pelo menos em princípio). A conservação do quadri vetor energia - momento no processo, necessária para deduzir (4.6) acompanha naturalmente o formalismo.

ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON

5.1. ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO

Consideremos agora o caso de um fóton, com energia ω_1 e momento \vec{k}_1 , que é espalhado por um elétron, com energia E_1 e momento \vec{p}_1 , como mostra a figura 1.

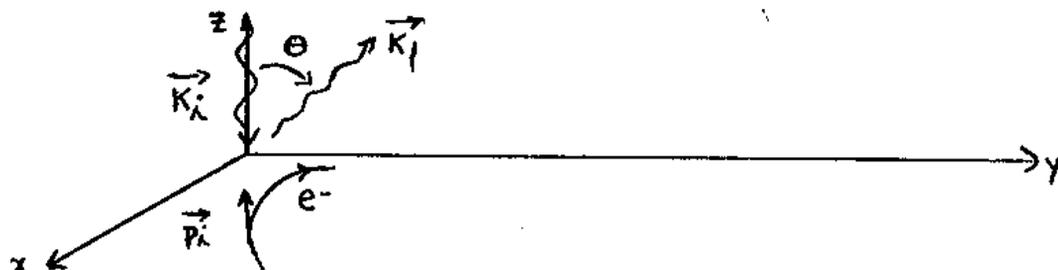


FIG. 1. ESPALHAMENTO FÓTON + ELÉTRON. A ÓRBITA DO ELÉTRON ESTÁ CONTIDA NO PLANO YZ.

De acordo com a figura 1 os quadrimomenta iniciais para o elétron e para o fóton são dadas por:

$$p_1 = (\gamma m, 0, 0, \gamma m \beta) \quad \text{e} \quad k_1 = (\omega_1, 0, 0, -\omega_1) \quad , \quad (5.1)$$

e os quadrimomenta finais por:

$$p_f = (E_f, \vec{p}_f) \quad \text{onde} \quad E_f^2 - \vec{p}_f \cdot \vec{p}_f = m^2 \quad \text{e} \\ k_f = (\omega_f, \omega_f \text{sen} \theta \cos \phi, \omega_f \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \omega_f \cos \theta) \quad (5.2)$$

A energia do fóton espalhado é obtida a partir da conservação do momento e da energia:

$$E_1 + \omega_1 = E_f + \omega_f \quad , \quad \vec{p}_1 + \vec{k}_1 = \vec{p}_f + \vec{k}_f \quad (5.3)$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações (5.3), ficamos com:

$$- E_f^2 + \vec{p}_f \cdot \vec{p}_f = - (E_1 + \omega_1 - \omega_f)^2 + (\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}_f)^2 \quad .$$

$$\text{Como} \quad E_f^2 + \vec{p}_f \cdot \vec{p}_f = - m^2 \quad \text{e} \quad - \omega_f^2 + \vec{k}_f \cdot \vec{k}_f = 0 \\ - \omega_1^2 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0 \quad ,$$

Temos das equações (5.1) e (5.2) que:

$$\vec{p}_i \cdot \vec{k}_i = -\gamma m \beta \omega_i, \quad \vec{p}_i \cdot \vec{k}_f = \gamma m \beta \omega_f \cos \theta \quad \text{e} \quad \vec{k}_i \cdot \vec{k}_f = -\omega_i \omega_f \cos \theta.$$

Então:

$$-m^2 = -m^2 - 2\gamma m \omega_i + 2\gamma m \omega_f + 2\omega_i \omega_f - 2\gamma m \beta \omega_i - 2\gamma m \beta \omega_f \cos \theta - 2\omega_i \omega_f \cos \theta.$$

Portanto:

$$\omega_f = \omega_i \frac{1 + \beta}{1 - \beta \cos \theta + \frac{\omega_i}{m\gamma} (1 + \cos \theta)} \quad (5.4)$$

onde: β é a velocidade do elétron incidente em unidades da velocidade da luz c ,

θ é o ângulo entre a direção do fóton espalhado e a direção do eixo z , eixo de simetria do problema na geometria de espalhamento inverso ("backscattering"),

$$\gamma = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}}.$$

A energia máxima do fóton espalhado é obtida quando o fóton é espalhado na direção do eixo z , i. e., quando $\theta = 0$ (Espalhamento Compton Inverso). No limite relativístico, quando $E_i \gg mc^2$, temos $\gamma \gg 1$ e pode-se escrever $\beta \cong 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$; para $\theta \rightarrow 0$ pode-se aproximar $\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Com estas aproximações (5.4) se reduz a:

$$\omega_f = \frac{4\gamma^2 \omega_i}{1 + \frac{4\gamma^2 \omega_i}{\gamma m} + \gamma^2 \theta^2} \quad (5.5)$$

Quando $\theta = 0$ a equação (5.5) alcança seu valor máximo e toma a forma:

$$\omega_{f\text{máx}} = \frac{4\gamma^2\omega_1}{1 + \frac{4\gamma^2\omega_1}{\gamma m}} \quad (5.6)$$

Na equação (5.6) podemos reconhecer dois regimes:

1) quando $\frac{4\gamma^2\omega_1}{\gamma m} \ll 1 \rightarrow$ onde desprezamos o recuo do elétron \rightarrow REGIME CLÁSSICO

então:

$$\omega_{f\text{máx}} = 4\gamma^2\omega_1$$

i.e., a energia máxima do fóton espalhado aumenta linearmente com a energia do fóton incidente.

2) quando $\frac{4\gamma^2\omega_1}{\gamma m} \gg 1 \rightarrow$ onde o recuo do elétron é grande \rightarrow REGIME QUÂNTICO

então:

$$\omega_{f\text{máx}} = \gamma m$$

i.e., a energia do fóton espalhado alcança o seu máximo que é igual à energia do elétron espalhador.

A transição entre os dois regimes ocorre quando a energia do fóton incidente é dada por $\frac{4\gamma^2\omega_1}{\gamma m} = 1$, (5.7)

ou seja: $\omega_t = \frac{m}{4\gamma} = \frac{m^2}{4\gamma m} = \frac{m^2}{4E_1}$ (5.8)

Então a energia do fóton incidente que caracteriza a transição entre os dois regimes, clássico e quântico, é inversamente proporcional à energia do elétron espalhador.

A figura 2 mostra o gráfico da energia máxima do fóton espalhado, em MeV, em função da energia do fóton incidente, em keV, para algumas energias do elétron (100 MeV, 500 MeV, 1 GeV e 5 GeV).

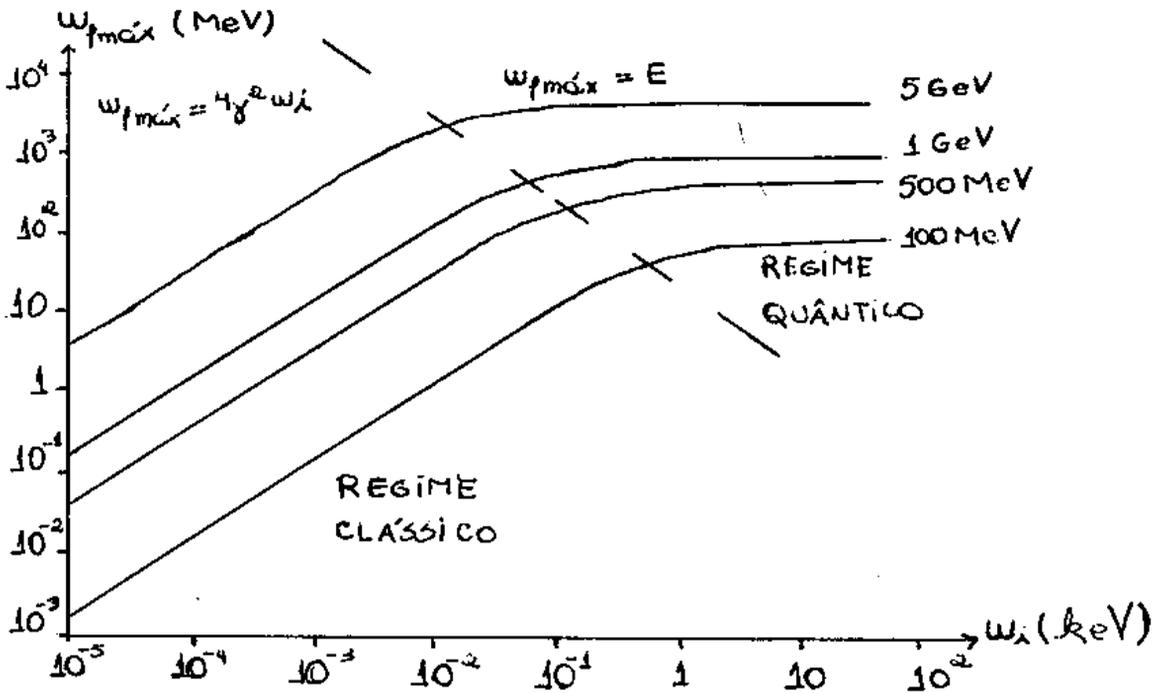


FIG.2. GRÁFICO DA ENERGIA MÁXIMA DO FÓTON ESPALHADO EM FUNÇÃO DA ENERGIA DO FÓTON INCIDENTE

Observa-se que quando a velocidade do elétron for relativística e $4\gamma\omega_i \gg m$, o elétron transferirá praticamente toda sua energia para o fóton espalhado, independentemente da energia do fóton incidente. Em ambos os casos ω_f é maior que ω_i , ao contrário do que se observa no espalhamento Compton por elétrons em repouso. Portanto o espalhamento Compton inverso é o melhor mecanismo para gerar fótons muito duros, radiação γ , de alta energia.

Agora vamos analisar a dependência angular da energia do fóton espalhado. A equação (5.5) pode ser reescrita em função da energia máxima do fóton espalhado da seguinte forma:

$$\omega_f = \frac{\omega_{f \text{ máx}}}{1 + \frac{(\gamma\theta)^2}{1 + \frac{4\gamma^2\omega_i}{\gamma m}}} \quad (5.9)$$

No regime clássico teremos:

$$\omega_f = \frac{\omega_{f \text{ máx}}}{1 + (\gamma\theta)^2} \quad (5.10)$$

onde observamos que para $\theta \approx \gamma^{-1}$ a frequência do fóton espalhado é reduzida a $\omega_{f \text{ máx}}/2$.

No regime quântico:

$$\omega_f = \frac{\omega_{f \text{ máx}}}{1 + \frac{\gamma m}{4\gamma^2 \omega_1} (\gamma\theta)^2} \quad (5.11)$$

como neste regime $4\gamma^2 \omega_1 / \gamma m \gg 1$ temos que $\frac{\gamma m}{4\gamma^2 \omega_1} \ll 1$ e a dependência com $\gamma\theta$ é muito menor que no regime clássico. Vê-se claramente que para $\theta = \gamma^{-1}$ a frequência do fóton diminuirá pouquíssimo, resultando em uma variação muito menor que no regime clássico.

A figura 3 mostra a dependência angular da energia do fóton espalhado, estando o ângulo de espalhamento dado em unidades de $\gamma\theta$.

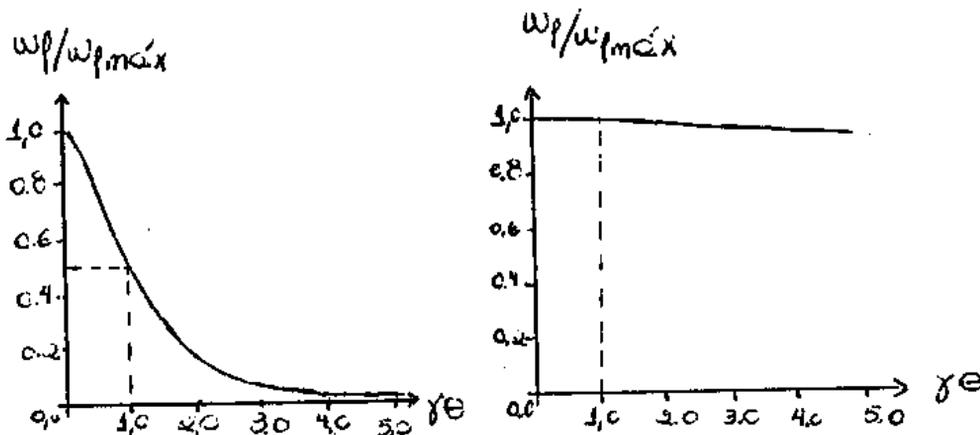


FIG. 3. GRÁFICO QUE ILUSTRA A DEPENDÊNCIA DA ENERGIA DO FÓTON ESPALHADO EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE ESPALHAMENTO (EM UNIDADES $\gamma\theta$), A) PARA O REGIME CLÁSSICO ($E=30\text{GeV}$, $\omega_1=2,5\text{eV}$) E B) PARA O REGIME QUÂNTICO ($E=50\text{GeV}$, $\omega_1=10\text{keV}$).

Observamos que a energia dos fótons espalhados no regime quântico varia menos, em função do ângulo de espalhamento θ , do que no regime clássico, i.e., os fótons espalhados no regime quântico são mais monocromáticos do que os fótons espalhados no regime clássico.

5.2 SEÇÃO DE CHOQUE PARA O ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON

No capítulo 4, Espalhamento Compton, deduzimos a equação para a seção de choque diferencial do espalhamento Compton no referencial do laboratório, com $|\vec{p}_i| \neq 0$, equação (4.38). Reescrevendo esta equação usando a transformação de calibre (4.29) que relaciona os quadrivetores e_i e e_f com os quadrivetores ε_i e ε_f , ficamos com:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{m \omega_f}{p_i \cdot k_i} \right)^2 \left(4 \left[\left(\varepsilon_i - \frac{p_i \cdot \varepsilon_i}{p_i \cdot k_i} k_i \right) \cdot \left(\varepsilon_f - \frac{p_i \cdot \varepsilon_f}{p_i \cdot k_f} k_f \right) \right]^2 + \frac{p_i \cdot k_i}{p_i \cdot k_f} + \frac{p_i \cdot k_f}{p_i \cdot k_i} - 2 \right), \quad (5.12)$$

onde os quadrivetores p_i , k_i e k_f são dados pelas equações (5.1) e (5.2) e falta determinarmos os quadrivetores polarização para os fótons inicial e final.

Estamos interessados no espalhamento Compton inverso da radiação síncrotron retrodifratada por um cristal a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$, como mostra a figura 4. Então a polarização do nosso fóton inicial será a polarização do fóton da radiação síncrotron pois após a retrodifração no cristal os fótons conservam sua polarização inicial. No capítulo 2, Radiação Síncrotron, concluímos que, para ângulos pequenos de observação, a radiação síncrotron é polarizada paralelamente ao plano da órbita dos elétrons no anel de armazenamento, equação (2.58). Por hipótese, o plano da órbita dos elétrons é o plano yz (figura 1). Então o vetor polarização da radiação síncrotron emitida por esse elétron, e consequentemente o vetor polarização do nosso fóton inicial, está contido no plano yz. Como a direção da polarização do

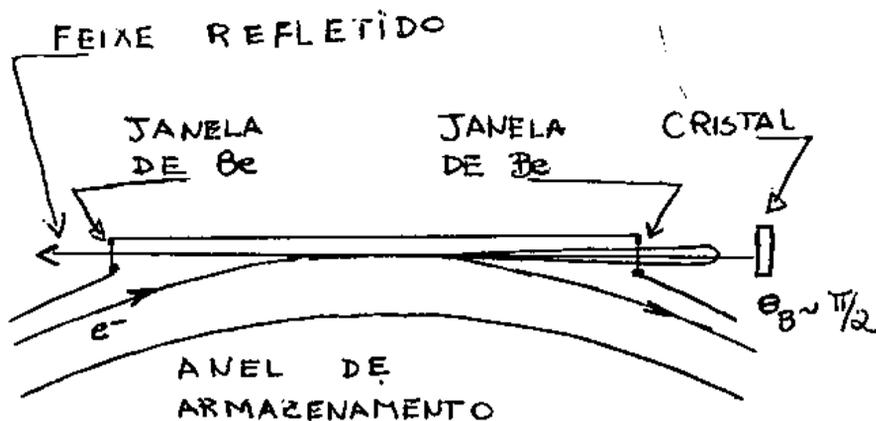


FIG.4. ESQUEMA DA RETRODIFRAÇÃO DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON POR UM CRISTAL A ÂNGULOS DE BRAGG PRÓXIMOS DE $\pi/2$.

fóton é perpendicular a sua direção de propagação, direção z , a direção do vetor polarização só pode ser a direção y . Portanto o quadrivetor polarização do fóton inicial tem a forma:

$$\varepsilon_1 = (0 , 0 , -1 , 0) \quad . \quad (5.13)$$

Considerando que após o espalhamento Compton inverso o fóton se propague na direção caracterizada pelos ângulos (θ, ϕ) , os dois vetores polarizações possíveis para o fóton final são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f1} &= (0 , \text{sen}\phi , -\text{cos}\phi , 0) \quad e \\ \varepsilon_{f2} &= (0 , \text{cos}\theta \text{cos}\phi , \text{cos}\theta \text{sen}\phi , -\text{sen}\theta) \quad . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Resolvendo os produtos escalares da equação (5.12) utilizando as equações (5.1), (5.2), (5.13) e (5.14), podemos dividir a seção de choque diferencial em dois termos:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f1}} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\omega_f}{\omega_1(1+\beta)\gamma} \right)^2 \left(4 \cos^2 \phi + \frac{\omega_1(1+\beta)}{\omega_f(1-\beta \cos \theta)} + \frac{\omega_f(1-\beta \cos \theta)}{\omega_1(1+\beta)} - 2 \right) \quad e$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f2}} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\omega_f}{\omega_1(1+\beta)\gamma} \right)^2 \left(4 \sin^2 \phi \left(\frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right)^2 + \frac{\omega_1(1+\beta)}{\omega_f(1-\beta \cos \theta)} + \frac{\omega_f(1-\beta \cos \theta)}{\omega_1(1+\beta)} - 2 \right) \quad (5.15)$$

Integrando ambas expressões em ϕ , de 0 a 2π , ficamos com:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\cos \theta} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f1}} = \frac{\pi r_0^2}{2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_1(1+\beta)\gamma} \right)^2 \left(\frac{\omega_1(1+\beta)}{\omega_f(1-\beta \cos \theta)} + \frac{\omega_f(1-\beta \cos \theta)}{\omega_1(1+\beta)} \right)$$

e

$$\left. \frac{d\sigma}{d\cos \theta} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f2}} = \frac{\pi r_0^2}{2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_1(1+\beta)\gamma} \right)^2 \left(2 \left(\left(\frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\omega_1(1+\beta)}{\omega_f(1-\beta \cos \theta)} + \frac{\omega_f(1-\beta \cos \theta)}{\omega_1(1+\beta)} \right) \quad (5.16)$$

Usando a relação:

$$d\cos \theta = \frac{1}{\omega_f^2} \frac{\omega_1(1+\beta)}{\left(\beta - \frac{\omega_1}{\gamma m}\right)} d\omega_f$$

que é derivada da equação (5.4), podemos escrever as equações (5.16) da seguinte forma:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\omega_f} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f1}} = \frac{\pi r_0^2}{2} \frac{1}{\gamma^2 \omega_1(1+\beta) \left(\beta - \frac{\omega_1}{\gamma m}\right)} \left(\frac{\omega_1(1+\beta)}{\omega_f(1-\beta \cos \theta)} + \frac{\omega_f(1-\beta \cos \theta)}{\omega_1(1+\beta)} \right) \quad (5.17a)$$

e

$$\left. \frac{d\sigma}{d\omega_f} \right|_{\varepsilon_1, \varepsilon_{f2}} = \frac{\pi r_0^2}{2} \frac{1}{\gamma^2 \omega_1 (1 + \beta) \left(\beta - \frac{\omega_1}{\gamma m} \right)} \left(2 \left(\left(\frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\omega_1 (1 + \beta)}{\omega_f (1 - \beta \cos\theta)} + \frac{\omega_f (1 - \beta \cos\theta)}{\omega_1 (1 + \beta)} \right). \quad (5.17b)$$

Somando-se as duas expressões da equação acima, ficamos com:

$$\frac{d\sigma}{d\omega_f} = \frac{\pi r_0^2}{\gamma^2 \omega_1 (1 + \beta) \left(\beta - \frac{\omega_1}{\gamma m} \right)} \left(\left(\frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta} \right)^2 - 1 + \frac{\omega_1 (1 + \beta)}{\omega_f (1 - \beta \cos\theta)} + \frac{\omega_f (1 - \beta \cos\theta)}{\omega_1 (1 + \beta)} \right). \quad (5.18)$$

Pode-se reescrever a expressão (5.18) considerando $\gamma \gg 1$ e $\theta \rightarrow 0$, em função da variável $\omega_f / \omega_{f\text{máx}} = X$ e do parâmetro $\alpha = 4\gamma^2 \omega_1 / \gamma m$:

$$\frac{d\sigma}{d\omega_f} = \frac{\pi r_0^2}{2 \gamma^2 \omega_1} \left[\left(\frac{2X - 1 - \alpha + \alpha X}{1 - \alpha - \alpha X} \right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{\alpha X}{1 + \alpha}} - \frac{\alpha X}{1 + \alpha} \right]$$

As figuras 5 e 6 ilustram a dependência da equação acima com a frequência dos fótons espalhados, em unidades da frequência máxima, para os regimes clássico e quântico, respectivamente.

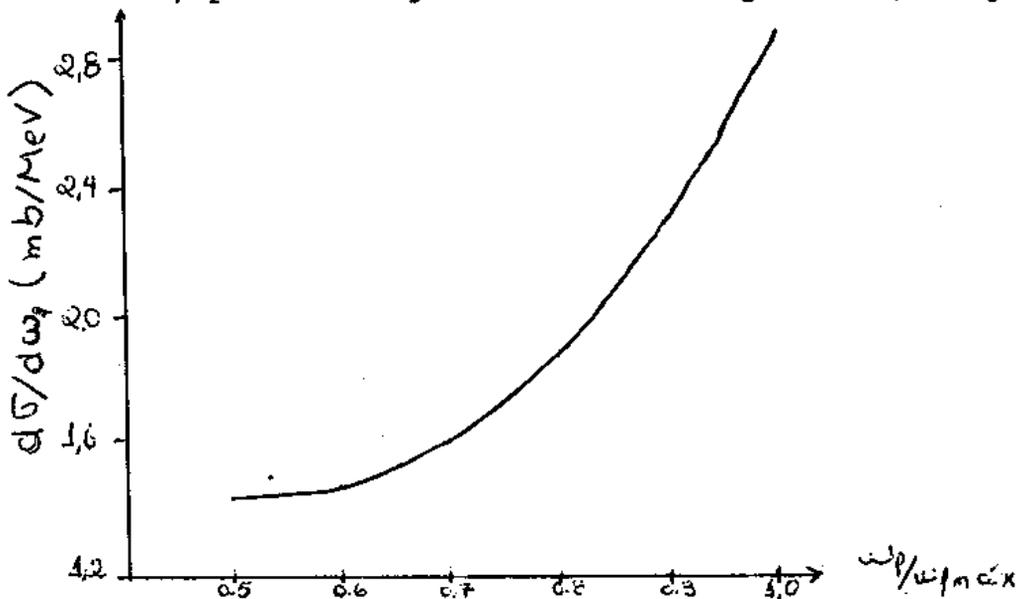


FIG. 5. SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL, POR UNIDADE DE ENERGIA ESPALHADA, PARA O ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON RETRODIFRATADO POR UM CRISTAL NO REGIME CLÁSSICO ($E = 3$ GeV, $\omega_1 = 2,5$ eV)

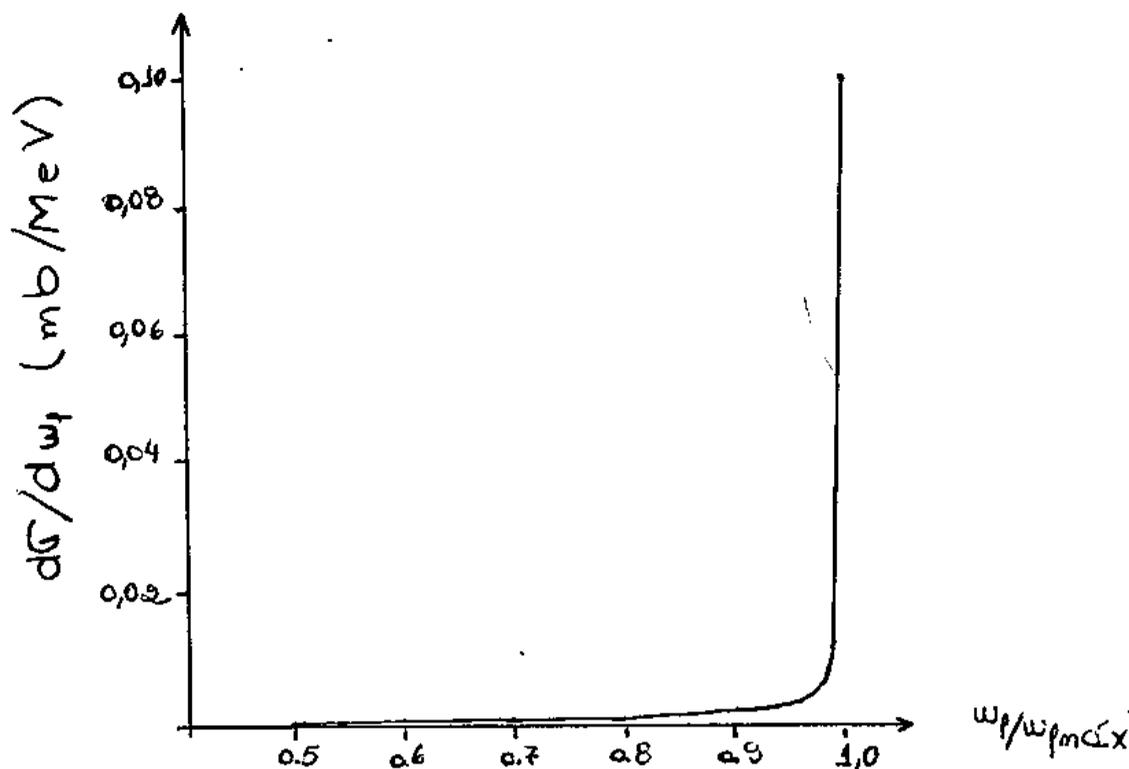


FIG. 6. SEÇÃO DE DIFERENCIAL POR UNIDADE DE ENERGIA ESPALHADA PARA O ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON RETRODIFRATADA POR UM CRISTAL NO REGIME QUÂNTICO ($E = 5\text{ GeV}$, $\omega_1 = 10\text{ keV}$).

Comparando as duas figuras observa-se claramente que enquanto no regime clássico há um crescimento suave da seção de choque diferencial com ω_f/ω_{fmax} , para o regime quântico a seção de choque é considerável apenas para ω_f/ω_{fmax} próximo a 1. Já para uma frequência apenas 5% menor que a máxima ($\omega_f = 0.95 \omega_{fmax}$) a seção de choque é reduzida de um fator aproximadamente de 40.

É ainda de interesse estudar a polarização do fóton espalhado na direção de $\theta = 0$. Consideremos que o fóton incidente de quadrimomento p_i esteja polarizado segundo o quadrivetor polarização ϵ_i . Analogamente seja ϵ_f o quadrivetor polarização do fóton espalhado de quadrimomento p_f .

Assim, da equação 5.12 e considerando que $p_i \cdot \epsilon_i = p_f \cdot \epsilon_f = 0$ obtemos:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_f} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{m \omega_f}{p_1 \cdot k_1} \right)^2 \left(4 (\epsilon_1 \cdot \epsilon_f)^2 + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_f} + \frac{p_1 \cdot k_f}{p_1 \cdot k_1} - 2 \right).$$

Chamemos os dois estados de polarização final do fóton espalhado de ϵ_{f1} e ϵ_{f2} , tais que ϵ_{f1} corresponda à mesma direção de polarização do fóton incidente e ϵ_{f2} à direção ortogonal. Neste caso $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_{f1})^2 = 1$ e $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_{f2})^2 = 0$. Estamos interessados nos casos em que $\gamma \gg 1$ e $\theta \rightarrow 0$. Nestas condições pode-se escrever:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_f} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{m \omega_f}{p_1 \cdot k_1} \right)^2 \left(4 (\epsilon_1 \cdot \epsilon_f)^2 + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \right), \quad \alpha = 4\gamma\omega_1/m.$$

Lembrando que no regime clássico $\alpha \ll 1$, observa-se que a seção de choque $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f2}}$ será muito menor que $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f1}}$,

onde se conclui que a radiação espalhada na direção $\theta \rightarrow 0$ é polarizada.

Se introduzirmos o parâmetro

$$P = \frac{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f1}} - \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f2}}}{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f1}} + \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\epsilon_1, \epsilon_{f2}}} \quad \text{obtemos}$$

$$P = \frac{4}{4 + \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha}} \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2} \sim 1 \quad \text{para } \alpha \ll 1.$$

Já se estivermos no regime quântico, $\alpha \gg 1$, observamos que as seções de choque para os dois estados de polarização são aproximadamente iguais e, portanto concluímos que a radiação espalhada a $\theta \rightarrow 0$ não será polarizada. Neste caso, $P \sim 0$.

5.3 FLUXO DE FÓTONS ESPALHADOS NO ESPALHAMENTO COMPTON INVERSO DA RADIAÇÃO SÍNCROTRON RETRODIFRATADA POR UM CRISTAL A ÂNGULOS DE BRAGG PRÓXIMOS DE $\Pi/2$.

Nesta seção faremos uma estimativa da ordem de grandeza do fluxo de fótons resultantes do espalhamento Compton

inverso da radiação síncrotron retrodifratada por um cristal a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$. O número de fótons espalhados no espalhamento Compton inverso, por unidade de tempo e por unidade de energia, é dado por:

$$\frac{d^2N}{d\hbar\omega_f dt} = 2 \frac{d\sigma}{d\hbar\omega_f} N_e \phi_1 \quad (5.19)$$

onde: $\frac{d\sigma}{d\hbar\omega_f}$ é a seção de choque diferencial, por unidade de energia espalhada,

N_e é o número de elétrons que circulam por pacote no anel de armazenamento,

ϕ_1 é o fluxo de fótons iniciais.

O fator 2 deve-se ao fato de que estamos estudando o espalhamento no referencial laboratório, i.e., onde os elétrons se movem com velocidade da ordem de c e os fótons se aproximam com velocidade $-c$. Assim o fluxo efetivo resulta duplicado neste caso.

Temos radiação síncrotron, de 10 keV, retrodifratada por um cristal. Esta radiação incide sobre elétrons, de 5 GeV, de um anel de armazenamento. A seção de choque diferencial, por unidade de energia espalhada, para este espalhamento Compton inverso (regime quântico) é igual a 0,1 mb/MeV (figura 6)

O número de elétrons por pacote que circulam no anel de armazenamento, N_e , é dado pelo produto da corrente média no anel, aproximadamente 500 mA (NSLS/BNL⁽⁴⁵⁾), pelo intervalo de tempo entre a passagem de dois pacotes consecutivos que circulam no anel de armazenamento, aproximadamente 100 ns, dividido pelo módulo da carga do elétron e . Portanto teremos aproximadamente 3×10^{11} elétrons por pacote.

O fluxo de fótons iniciais, ϕ_1 , será dado por:

$$\phi_1 = \frac{N_e \cdot c}{V} d\Omega$$

onde: N_f é o número total de fótons de 10 keV (6×10^{-6} fótons por eV, por μsr (resultado obtido no Cap.2); multiplicado por 3×10^{11} elétrons por pacote),
 c é a velocidade da luz no vácuo,
 V é o volume do pacote de elétrons,
 $d\Omega$ é o ângulo sólido.

O volume do pacote será de aproximadamente 10^{-2} cm^3 (consideramos o comprimento do pacote de 30 cm e usamos como estimativa da dimensão transversal o valor do projeto LEGS⁽⁴⁵⁾ que é de 0.4 mm x 0.07 mm).

O ângulo sólido $d\Omega = \cos\theta \, d\theta \, d\phi \approx 1,0 \, \mu\text{sr}$ (por hipótese todos os fótons de raio X emitidos num certo $d\Omega$ são refletidos pelo cristal e reincidentem no feixe de elétrons, $d\theta$ é a abertura angular do feixe de radiação síncrotron, aproximadamente igual a $\gamma^{-1} = 10^{-4}$, então $d\theta \approx 10^{-4}$ rad, e $d\phi$ é aproximadamente igual a 10^{-2} rd - cristal de dimensão de 10 cm x 10 cm e situado a 15 metros de distância -), como mostra a figura 8.

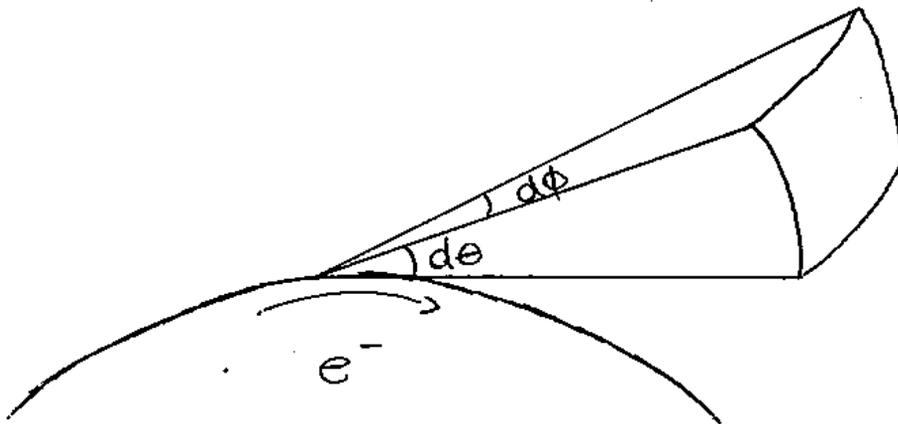


FIG. 8. ESQUEMA QUE ILUSTRA O ÂNGULO SÓLIDO $d\Omega$

Então $\phi_1 = 5 \times 10^{18}$ fótons/cm.s. Portanto

teremos:

$$\frac{d^2N}{d\hbar\omega_f dt} = 3 \times 10^{12} \text{ fótons/MeV.s.}$$

Da equação (5.5) podemos determinar a resolução espectral dos fótons no espalhamento Compton inverso é dada por:

$$\Delta\omega_f/\omega_f \approx 0,001$$

para fótons de 5 GeV temos que $d\omega_f = 5$ MeV e portanto temos que

$$1.500 \text{ fótons/s}$$

foram produzidos no espalhamento Compton inverso dos fótons retrodifratados incidindo novamente sobre os elétrons do anel.

Para o anel do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS) teremos um fluxo de aproximadamente 30 fótons/s, pois este anel possui 2,7 metros de raio, corrente média de 100 mA, energia dos elétrons igual a 1,15 GeV e energia crítica, equação (2.59), igual a 1,25 kev. A tabela 1 apresenta os valores usados para a estimativa do fluxo final de fótons para um anel hipotético e para o anel do LNLS.

Podemos aumentar estes fluxos de fótons espalhados se:

- i) focalizarmos o feixe de fótons espalhados usando por exemplo um cristal curvo (x10);
- ii) usarmos um cristal imperfeito (x10), já que este tipo de cristal diminui a criticidade da reflexão de Bragg pois em um cristal tipo mosaico temos esta reflexão para abertura da ordem de minutos de arco e para um cristal perfeito é da ordem de segundos de arco;
- iii) usarmos onduladores (aumento de 10^2 a 10^3).

	ANEL HIPOTÉTICO	ANEL DO LNLS
raio do dipolo	10 m	2,7 m
energia dos elétrons	5 GeV	1,15 GeV
γ	10.000	2.250
ω_1	3×10^4 eV	$1,25 \times 10^3$ eV
$\frac{d\sigma}{d\hbar\omega_f}$ (mbar/Mev)	0,10	0,44
número de fótons emitidos por elétron, por eV, por μsr	6×10^{-6}	3×10^{-7}
tamanho do pulso	100 ns	100 ns
corrente média	500 mA	100 mA
número de elétrons por pacote	3×10^{11}	$6,25 \times 10^{10}$
ângulo sólido	1 μsr	1 μsr
volume do pacote	10^{-2} cm ³	10^{-2} cm ³
ϕ_1 (fótons/cm ² .s)	$5,4 \times 10^{18}$	$5,6 \times 10^{17}$
resolução espectral	0,001	0,04
fluxo final	1.500	30

TABELA 1. VALORES USADOS PARA A ESTIMATIVA DO FLUXO FINAL DE FÓTONS PARA UM ANEL HIPOTÉTICO E PARA O ANEL DO LNLS.

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Luz síncrotron é emitida por elétrons de alta energia quando seu movimento é perturbado por um campo magnético.

Os elétrons são confinados em uma trajetória suposta idealmente circular e movimentam-se em pacotes.

A potência total emitida por um elétron em um anel síncrotron é dada por:

$$P = \frac{2q^2 c}{3\rho^2} \beta^4 \gamma^4$$

e a distribuição angular da radiação por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \beta^2}{4\pi c} \frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left(1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \frac{2}{\gamma} \theta)^2} \right)$$

A radiação é fortemente polarizada no plano da órbita dos elétrons e seu fluxo emitido é dado por:

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = 6,314 \times 10^3 \hbar \omega \rho^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 K_{2/3}^2(\xi)$$

(onde $\hbar \omega$ está em eV e ρ em metros), sendo igual a 6×10^{-6} fótons por elétron, por eV, por μsr (para um anel de 10 metros de raio, $\gamma = 10.000$ e $\hbar \omega = 10^4$ eV) e igual a 3×10^{-6} fótons por elétron, por eV, por μsr para o anel do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (de 2,7 metros de raio do dipolo, $\gamma = 2,25 \times 10^3$ e energia crítica de 1,25 keV).

Radiação X quando incidindo sobre um cristal de grafite, a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$, é totalmente retrodifratada como mostra o gráfico para o coeficiente de reflexão e transmissão, em função do parametro ϵ , para raios X de 3.694 keV incidindo sobre um cristal de grafite de 5 μm (figura 9 do capítulo 3).

A seção de choque do espalhamento Compton inverso para a radiação síncrotron retrodifratada a ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$ é dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\omega_f} = \frac{\pi r_0^2}{\gamma^2 \omega_1 (1 + \beta) \left(\beta - \frac{\omega}{\gamma m} \right)} \left(\left(\frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta} \right)^2 - 1 + \frac{\omega_1 (1 + \beta)}{\omega_f (1 - \beta \cos\theta)} + \frac{\omega_f (1 - \beta \cos\theta)}{\omega_1 (1 + \beta)} \right).$$

Nosso estudo do espalhamento Compton inverso identificou dois regimes: i) Clássico (onde o recuo do elétron é desprezível), ii) Quântico (onde o recuo do elétron é considerável)

No regime de interesse deste trabalho, regime quântico, a energia do fóton espalhado alcança seu máximo no valor da energia do elétron espalhador, sendo constante. Enquanto que no regime clássico a energia espalhada é diretamente proporcional a energia do fóton inicial.

A energia dos fótons espalhados no regime quântico varia menos, em função do ângulo de espalhamento θ , do que no regime clássico, i.e., os fótons espalhados no regime quântico são mais monocromáticos do que os fótons espalhados no regime clássico.

Obtemos radiação altamente energética, da ordem de GeV, com uma resolução espectral muito boa, 0.1% e não polarizada.

Obtivemos $1,5 \times 10^3$ fótons/s espalhados considerando a situação hipotética de:

i) elétrons: $E = 5$ GeV

$i_{\text{média}} = 500$ mA

volume do pacote: 30 cm \times 0.4 mm \times 0.07 mm

ii) cristal: 10 cm \times 10 cm

situado a aproximadamente 15 m do feixe,

mas podemos aumentar este fluxo de fótons espalhados se:

- i) focalizarmos o feixe de fótons espalhados ($\times 10$),
- ii) usarmos onduladores (aumento de 10^2 a 10^3),
- iii) usarmos um cristal imperfeito ($\times 10$).

O procedimento exposto pode ser aplicado para o anel do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron produzindo aproximadamente 30 fótons/s espalhados e também para os seguintes casos:

- a) estudo do espalhamento Compton inverso entre fótons de baixa energia (infravermelho ou menor) e elétrons de 500 MeV (fonte de raios X),
- b) estudo do espalhamento Compton inverso entre elétrons de um acelerador linear (energia de aproximadamente 100 MeV) e fótons de um laser de alta potência.

DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS PARA $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ⁽¹¹⁾

A partir das equações (2.11) podemos reescrever a densidade volumétrica de carga, $\rho(\vec{r}, t)$ e a densidade superficial de corrente, $\vec{J}(\vec{r}, t)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}'', t') &= q \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t')) \\ \vec{J}(\vec{r}'', t') &= \rho \vec{v}' = c\rho\vec{\beta} = cq\vec{\beta}(t') \delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t')) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde: $\vec{r}'(t')$ e $\vec{v}'(t') = \dot{\vec{r}}'(t')$ são dados.

Dada a dependência espacial via funções δ , começamos integrando em d^3r'' :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \int_{\text{fontes}} q\delta(\vec{r}'' - \vec{r}'(t')) \frac{\delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}''|} d^3r'' dt',$$

então:

$$\phi(\vec{r}, t) = q \int \frac{\delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|} dt' \quad , \quad (\text{A.2})$$

Analogamente:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{\beta}(t') \delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|} dt' \quad (\text{A.3})$$

Para fazer a integral temporal, usaremos a seguinte propriedade da função δ :

$$\int g(t') \delta[f(t') - \alpha] dt' = \left[\left(\frac{g(t')}{\frac{df}{dt'}} \right) \right]_{f(t') = \alpha} \quad (\text{A.4})$$

$f(t')$ tem o valor:

$$f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} . \quad (\text{A.5})$$

Com $\alpha = t$, então:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt'} &= 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |\vec{r} - \vec{r}'(t')| \\ &= 1 + \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}'(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|} \left(- \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} \right) = 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} \equiv \kappa \quad (\text{A.5}') \end{aligned}$$

Então, os potenciais de Liénard-Wiechert são:

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \left[\frac{q}{\kappa R(t')} \right]_{\text{ret}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \left[\frac{q\vec{\beta}(t')}{\kappa R(t')} \right]_{\text{ret}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde: "ret" quer dizer calculado em $t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} = t$

Para calcular os campos \vec{E} e \vec{B} é mais fácil partir das integrais $\int dt'$ do que dos potenciais retardados acima.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}_r \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = q \left\{ -\vec{\nabla}_r \int \frac{\delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|} dt' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \int \frac{\vec{\beta}(t') \delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|} dt \right\} , \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_r \times \vec{A} = q \vec{\nabla}_r \times \int \frac{\vec{\beta}(t') \delta \left[t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c} - t \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|} dt' .$$

Nota-se que \vec{r} só aparece em $R = |\vec{r} - \vec{r}'(t')|$ e como $\nabla_r = \hat{n} \frac{\partial}{\partial R}$:

$$\vec{\nabla}_r \frac{\delta(t' + R/c - t)}{R} = -\hat{n} \frac{\delta(t' + R/c - t)}{R^2} + \hat{n} \frac{\delta'(t' + R/c - t)}{cR}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= -\nabla_r \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = q \int \hat{n} \frac{\delta(t' + R/c - t)}{R^2} dt' \\ &+ \frac{q}{c} \int (\vec{\beta} - \hat{n}) \frac{\delta'(t' + R/c - t)}{R} dt', \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e com

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, \vec{A}) &= q \hat{n} \times \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{\vec{\beta}(t') \delta[t' + R/c - t]}{R} dt' \\ &= q \hat{n} \times \left\{ -\int \frac{\vec{\beta}(t') \delta[t' + R/c - t]}{R^2} dt' + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{c} \int \frac{\vec{\beta}(t') \delta'[t' + R/c - t]}{R} dt' \right\} = \\ &= -q \int \frac{\hat{n} \times \vec{\beta} \delta[t' + R/c - t]}{R^2} dt' + \\ &+ \frac{q}{c} \int \frac{\hat{n} \times \vec{\beta} \delta'[t' + R/c - t]}{R} dt' . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A segunda integral nas expressões para \vec{E} e \vec{B} depende de:

$$\delta'(f(t') - t) \equiv \frac{d}{df} \delta [f(t') - t] \text{ onde } f(t') \equiv t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'(t')|}{c}$$

$$\text{e } \frac{df}{dt'} = \kappa \equiv 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} . \quad \text{Então:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t') \delta'[f(t') - t] dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(f) \frac{d}{df} \delta[f - t] \frac{dt'}{df} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(f)}{\kappa} \frac{d}{df} \delta[f - t] df ;$$

tomando

$$u = \frac{g(f)}{\kappa} \quad \text{e} \quad dv = \frac{d}{df} \delta[f - t] df, \quad \text{obtemos:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t') \delta'[f(t') - t] dt' = uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{df} \left(\frac{g(f)}{\kappa} \right) \delta[f - t] df$$

$$= - \frac{d}{df} \left(\frac{g(f)}{\kappa} \right) \Big|_{f(t') = t}. \quad (\text{A.10})$$

Como:

$$\frac{d}{df} = \frac{dt'}{df} \frac{d}{dt'}, \quad \text{a integral (A.10) resulta}$$

$$= - \left[\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{g(f)}{\kappa} \right) \right]_{\text{retardado}} \quad (\text{A.11})$$

Usando esse resultado, ficamos com:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\hat{n}}{\kappa R^2} \right]_{\text{ret}} - \frac{q}{c} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta} - \hat{n}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}} \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\vec{\beta} \times \hat{n}}{\kappa R^2} \right]_{\text{ret}} - \frac{q}{c} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\hat{n} \times \vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret.}}$$

Cálculo de várias derivadas relevantes:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}'(t') = \\ R &= [x - x'(t')]^2 + (y - y'(t'))^2 + (z - z'(t'))^2]^{1/2}\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

$$\frac{dR}{dt'} = \frac{(x - x')(-\dot{x}') + (y - y')(-\dot{y}') + (z - z')(-\dot{z}')}{R} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R}$$

$$\boxed{\frac{dR}{dt'} = -\hat{n} \cdot \vec{v}} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dt'} \hat{n} = \frac{d}{dt'} \frac{\vec{R}}{R} = \frac{1}{R} \dot{\vec{R}} + \vec{R} \frac{d}{dt'} R^{-1} = -\frac{1}{R} \vec{v} - \frac{\vec{R}}{R^2} \frac{d}{dt'} R = -\frac{1}{R} \vec{v} - \frac{\hat{n}}{R} (-\hat{n} \cdot \vec{v})$$

$$\boxed{\frac{d\hat{n}}{dt'} = \frac{(\hat{n} \cdot \vec{v}) \hat{n} - \vec{v}}{R}} \quad (\text{A.15})$$

$$\kappa = 1 - \hat{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\frac{d\kappa}{dt'} = -\hat{n} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt'} \frac{1}{c} - \left(\frac{d\hat{n}}{dt'} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = -\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - \frac{(\hat{n} \cdot \vec{v}) \hat{n} - \vec{v}}{R} \cdot \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\boxed{\frac{d\kappa}{dt'} = -\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - \frac{(\hat{n} \cdot \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \vec{v})}{R} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{v}}{R}} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\kappa R) = \frac{1}{c} \left(\frac{d\kappa}{dt'} \right)_R + \frac{\kappa}{c} \left(\frac{dR}{dt'} \right)$$

$$= \frac{1}{c} \left(-\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}_R - (\hat{n} \cdot \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \vec{v}) + \vec{\beta} \cdot \vec{v} + \kappa(-\hat{n} \cdot \vec{v}) \right) \quad (\text{A.17})$$

$$= -\hat{n} R \cdot \dot{\vec{\beta}} \frac{1}{c} - (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 + \beta^2 - \kappa(\hat{n} \cdot \vec{\beta})$$

Como:

$$\kappa(\hat{n} \cdot \vec{\beta}) = [(\hat{n} \cdot \vec{\beta}) - (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2] \quad (\text{A.18})$$

$$\boxed{\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\kappa R) = \beta^2 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} - \frac{R}{c} \dot{\hat{n}} \cdot \vec{\beta}} \quad (\text{A.19})$$

Podemos agora simplificar os campos \vec{E} e \vec{B} :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\hat{n}}{\kappa R^2} \right]_{\text{ret}} - \frac{q}{c} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta} - \hat{n}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}},$$

$$\text{como } \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta} - \hat{n}}{\kappa R} \right) = \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) - \hat{n} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{1}{\kappa R} \frac{d}{dt'} \hat{n}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\hat{n}}{\kappa R^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) + \frac{\hat{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) + \frac{1}{c\kappa^2 R} \frac{(\hat{n} \cdot \vec{v}) \hat{n} - \vec{v}}{R} \right]_{\text{ret}},$$

$$\text{como } \frac{\kappa \hat{n}}{\kappa^2 R^2} = \frac{\hat{n}}{\kappa^2 R^2} - \frac{\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{\beta})}{\kappa^2 R^2} \quad \text{ficamos com a expressão:}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\hat{n}}{\kappa^2 R^2} - \frac{\hat{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\hat{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}} \quad (\text{A.20a})$$

e análogamente:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{\vec{\beta} \times \hat{n}}{\kappa R^2} \right]_{\text{ret}} + \left[\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \times \hat{n} \right) \right]_{\text{ret}},$$

$\frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \times \hat{n} + \frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \times \frac{d}{dt'} \hat{n}$ é o resultado da última derivada.

Como:

$$\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \times \frac{d}{dt'} \hat{n} = \frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \times \frac{[-(\hat{n} \cdot \vec{v})\hat{n} - \vec{v}]}{R} = \frac{\vec{\beta} \times \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{v}) - \vec{\beta} \times \vec{v}}{\kappa R^2},$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= q \left[\frac{\vec{\beta} \times \hat{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \times \hat{n} + \frac{(\vec{\beta} \times \hat{n})(1 - \kappa)}{\kappa^2 R^2} \right]_{\text{ret}} \\ &= q \left[\frac{\vec{\beta} \times \hat{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \times \hat{n} \right]_{\text{ret}} \end{aligned} \quad (\text{A.20b})$$

Notamos agora, comparando \vec{E} e \vec{B} (equações (A.20)), que

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = -\vec{E}(\vec{r}, t) \times \hat{n}} \quad (\text{A.21})$$

Simplificação final de $\vec{E}(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \left[\frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\hat{n}}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}} \\ &= \left[\frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\vec{\beta}}{ck^2 R} \right]_{\text{ret}} \end{aligned}$$

onde:

$$-\frac{1}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{\beta}}{\kappa R} \right) = -\frac{\dot{\vec{\beta}}}{ck^2 R} - \frac{\vec{\beta}}{ck} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) \quad \text{e como:}$$

$\frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) = \left(-\frac{1}{\kappa^2 R^2} \right) \left(-\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \beta^2 - R \hat{n} \cdot \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c} \right)$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{\kappa^3 R^2} \left\{ \kappa + \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - \beta^2 + R \hat{n} \cdot \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c} \right\} - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{\kappa^2 R} \right]_{\text{ret}} \\ &= \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{\kappa^3 R^2} \left\{ 1 - \beta^2 \right\} + \frac{(\hat{n} - \vec{\beta}) (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{\kappa^3 R} - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{\kappa^2 R} \right]_{\text{ret}} \end{aligned}$$

onde:

$$\frac{(\hat{n} - \vec{\beta}) (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{\kappa^3 R} - \frac{\dot{\vec{\beta}}}{\kappa^2 R} = \frac{(\hat{n} - \vec{\beta}) (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \kappa \dot{\vec{\beta}}}{\kappa^3 R} \quad (\text{A.22})$$

Por outro lado:

$$\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}) = (\hat{n} - \vec{\beta}) (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \kappa \dot{\vec{\beta}}$$

Portanto

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{\kappa^3 R} \right]_{\text{ret}} \quad (\text{A.23})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) Liénard, A., L'Éclairage Elec., 16, 5, 1898
- (2) Schott, G. A., Philos. Mag., 13, 189, 1898
- (3) Wideröe, R., Arch. Electrotechn, 21, 387, 1929
- (4) Ivanenko, D. e Pomeranchuk, I., Phys. Rev., 65, 343, 1944
- (5) Blewett, J. P., Phys. Rev., 69, 87, 1946
- (6) Schwinger, J., Phys. Rev. 70, 798, 1946; 75, 1912, 1949
- (7) Elder, F. R., Gurewitsch, A. M., Langmuir, R. V. e Pollock, H.C., J. Appl. Phys., 18, 810, 1947
- (8) Sands, M., "The Physical of Eletron Storage Rings: an Introduction" , in International School of "Enrico Fermi" , Proceedings Course 46, 257, Academic Press, 1971
- (9) notas de aula da disciplina Tóp. Fís. Acer. Anéis de Estocagem (FI-250), do curso de pós-graduação do I F G W /UNICAMP, do Prof. Dr. Cylon E. T. Gonçalves, 1991.
- (10) Jackson, J. D., Eletrodinâmica Clássica; tradução de Macedo, A. e Macedo, H., Guanabara Dois, 1983
- (11) notas de aula da disciplina Eletrodinâmica I (FI-008), do curso de pós-graduação em física do IFGW/UNICAMP , do Prof. Dr. Antonio Rubens Brito de Castro, 1989.
- (12) Winick, H., Brown, G., Halbach, K. e Harris, J., Physics Today, 34 , 5, 50 (Maio), 1981
- (13) Coïsson, R., Physical Review A, 20, N^o 2, 524, 1979.
- (14) Roentgen, Sitzber. Würz. Ger. , 1895, reimpresso em Klassische Arbeiten Deuscher Physiker, 1 (Leipzig: J. A. Borth , 14 , 1954). Traduzido para o inglês por H. A. Boorse e L. Motz (eds), "The World of the Atom", 1, 396, N. Y. Basic Books inc., 1966.
- (15) Para uma discussão da origem das idéias de Thomson, Mc-Cormmach, R., Brit. J. Hist. Sci., 3, 362, 1967.
- (16) Landau, D., Lifchitz, E., "Teoria do Campo", Ed. Mir, 1980.
- (17) Barkla, W., Phil. Trans. Roy. Soc. London, 204, 467, 467, 1905.

- (18) Struewer, R. H., "The Compton Effect" , Science History Publication, N. Y., 1975.
- (19) Stark, J., Phys. Z., 10, 902, 1909.
- (20) Einstein, A., Ann. Phys., 17, 132, 1905; traduzido para o inglês em D. ter Haar, "The Old Quantum Theory", Pergamon Press, 91, 1967.
- (21) Compton, A. H., Phys. Rev., 21, 483, 1923.
- (22) Debye, P., Phys. Z., 24, 161, 1923.
- (23) Laue, M. von, Friedrich, W. e Knipping, P., Ann. Physick, 41, 971, 1913.
- (24) Darwin, C. G., Phil. Mag., 27, 315 e 675, 1914.
- (25) Ewald, P. P., Tese de Doutorado, 1912; Ann. Phys. Lpz. 49, 1 e 117, 1916; Ann. Phys. Lpz., 54, 519, 1917.
- (26) Laue, M. von, Ergerb. Exakt. Naturw., 10, 133, 1931.
- (27) Borrmann, G., Phys. Zeit, 42, 157, 1941.
- (28) Zachariasen, W. A., "Theory of X-ray Diffraction by Crystals", N. Y. Willey, 1945.
- (29) Laue, M. von, Acta Cryst., 2, 106, 1949. Olhar: Zachariase, W. H., "Theory of X-ray Diffraction in Crystals", New York , Wiley, 1945; James, R. W., Sol. St. Phys. , 15 , 1963 ; Batterman, B., Rev. Mod. Phys., 36 , 3, 681, 1964; Kato, N. , em "X-ray Diffraction", L. Azàroff, McGrall-Hill, 1974.
- (30) Notas de aula do curso "Introdução a Cristalografia", ministrado pelo Prof. Dr. Nivaldo Lúcio Speziali na "III Escola de Inverno: FÍSICA - UFMG", de 08/07 a 19/07/1991 em Belo Horizonte, M. G..
- (31) Caticha, A., "Difração Dinâmica de Raios X para ângulos de Bragg próximos de $\pi/2$ ", Tese de Mestrado defendida no IFGW/UNICAMP, Campinas, S. P., Brasil, 1979; Caticha, A. e Caticha-Ellis, S., 10^o Int. Conference, I. V. Cr., Ottawa, Canadá, Agosto de 1981; Caticha, A. e Caticha-Ellis, S., Phys. Rev., B25, 971, 1982; Caticha, A. e Caticha-Ellis, S. , em "Free Electron Generation of Extreme Ultraviolet Coherent Radiation", editado por J. M. J. Madey e C. Pellegrini, AIP Conf. Proc., 118, 220, 1984.

- (32) Caticha, A. e Caticha-Ellis, S., Phys. St. Sol. A, 119(1), 47-54, 1990.
- (33) Caticha, A. e Caticha-Ellis, S., Synchrotron light: applications and related instrumentation: proceedings of the II Workshop, Campinas, SP, Brazil, 04-08 September 1989/editor, Aldo Craievich.
- (34) Caticha-Ellis, S., anais do encontro "Técnicas e Aplicações da Radiação Síncrotron", CBPF, Rio de Janeiro, RJ, 240-257, 1983.
- (35) Einstein, A., Phys. Z., 18, 121, 1917.
- (36) Stuewer, R. H., "The Compton Effect", Science History Publication, N. Y., 1975. Rutherford, E., Radiactive Substances and their Radiations, Cambridge University Press, 275, 1913.
- (37) Schroedinger, E., Ann. Phis., 82, 275, 1927.
- (38) Bohr, N., Kramers e Slater, Phil. Mag., 47, 785, 1924.
- (39) Dirac, P. A. M., Proc. Roy. Soc., 114:(A), 243, 1927.
- (40) Klein, O., Nishina, Y., Z. Phys., 52, 857, 1928.
- (41) Itzykson, C. e Zuber, J.-B. , Quantum Field Theory, McGraw-Hill Inc., 1980.
- (42) Caticha, A., comunicação pessoal.
- (43) Tamm, I., Z. Phys., 62, 545, 1930.
- (44) Sandorfi, A. M. e colaboradores, Phys. Rev. Let., 67, N^o 10, 1206, 1991.
- (45) Sandorfi, A. M. e colaboradores, IEEE Trans. Nucl. Sci., 30, 3083, 1983.