GARIBALDI MONTEIRO SARMENTO

FUNDAMENTOS LÓGICO-EPISTEMOLÓGICOS DA ARITMÉTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Unicamp, sob a orientação do Prof. Dr. Michael Beaumont Wrigley.

Este exemplar corresponde à versão final da tese de doutorado defendida e aprovada, em 28 de fevereiro de 2000, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Michael Beaumont Wrigley [orientador]

Prof. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vásquez

Prof. Dr. Jairo José da Silva

Prof. Dr. Elias Humberto Alves

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli [suplente]

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves [suplente]

Campinas

IFCH – Unicamp

2000

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP

Sarmento, Garibaldi Monteiro
Sa74f Fundamentos lógico-epistemológicos da aritmética / Garibaldi Monteiro Sarmento. -- Campinas, SP : [s.n.], 2000.

Orientador : Michael Beaumont Wrigley.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Matemática - Fundamentos. 2. Matemática - Filosofia. 3. Lógica simbólica e matemática. I. Wrigley, Michael Beaumont . II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Expresso aqui o meu agradecimento a todos aqueles que colaboraram com a redação desta tese de doutorado. Em primeiro lugar, ao professor Michael B. Wrigley pela proposta do tópico de pesquisa e orientação da tese.

Agradeço aos professores Dr^s.: Ítala L. D'Ottaviano, Marco A. Ruffino, Jairo J. da Silva, José C. Cifuentes e Elias Alves, pelas críticas e comentários pontuais sobre as versões anteriores desta tese. Agradeço também aos professores Dr^s.: Walter A. Carnielli e Daniel D. P. Alves.

Enfim, agradeço aos colegas de doutorado da Unicamp que participaram dos meus seminários sobre o projeto de pesquisa no Programa de Lógica – GLTA. E, particularmente, ao colega Rodolfo C. Ertola Biraben pelas discussões sobre o logicismo Fregeano e, pelas críticas efetuadas na fase final desta tese.

Agradeço à CAPES, pela Bolsa que possibilitou este trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO

Tomando-se por base uma análise lógico-epistemológica da noção Fregeana de *analiticidade*, e uma (re)definição dessa noção em termos de teoria de modelos, proponho uma abordagem 'neo-logicista' para fundamentação da aritmética elementar. Este enfoque lógico-reducionista consiste na *derivação* formal dos axiomas da Teoria Geral de Conjuntos (arcabouço semântico para a aritmética de Peano em segunda ordem) de um sistema lógico de ordem superior, cuja base axiomático-definicional é caracterizada pelo acréscimo do axioma da *extensionalidade*, a um fragmento da lógica de segunda ordem (total), e pela introdução de um princípio de abstração analítico que denominamos de 'princípio de *equipolência lógica*'. Além disso, estabeleço um *critério* lógico-epistemológico para a demarcação de definições contextuais analíticas baseado na (re)definição de analiticidade e no princípio de equipolência lógica.

ABSTRACT

Taking as starting point a logico-epistemological analysis of Frege's notion of *analyticity*, and a (re)definition of this notion in model-theoretic terms, I offer a 'neo-logicist' approach to the foundations of arithmetic. This logico-reductionist approach consists in the formal *derivation* of the axioms of General Set Theory (which is the semantic framework for second-order Peano arithmetic) from a higher-order logical system, whose axiomatic-definitional basis consists of axiom of *extensionality* and an analytic principle of abstraction which we shall call the "principle of *logical equipollence*". Furthermore, I establish a logico-epistemological *criterion* for demarcation of analytical contextual definitions based on the (re)definition of analyticity, here proposed, and the principle of logical equipollence.

INTRODUÇÃO

Leibniz é considerado o precursor da lógica simbólica pela sua idéia, de inspiração cartesiana, de *mathesis universalis*, ou seja, de um cálculo conceitual (universal) *a priori*, que permitiria estudar todas as combinações possíveis entre os conceitos de qualquer área do conhecimento humano. Em 1847, com a publicação de *Mathematical Analysis of Logic*, de Boole, inicia-se uma nova época na história da lógica, retomando-se a proposta de Leibniz —de um *calculus ratiocinator*—, mediante uma síntese entre a lógica formal aristotélica e o simbolismo leibniziano.

Em *Laws of Thought*, publicado em 1854, Boole tomou como postulado que as leis fundamentais da lógica são de natureza algébrica relativamente à forma (ou estrutura sintática) justificando-se, assim, a apresentação da lógica sob a forma de um cálculo simbólico.

Frege, com o seu *Begriffsschrift*, publicado em 1879 —desenvolvendo uma concepção de lógica oposta à de Boole—, considera a idéia leibniziana de uma *lingua characteristica*. A contribuição de Frege, nesta obra, pode ser resumida em dois aspectos principais: primeiro, a introdução e desenvolvimento da lógica de relações, que representou a diferença básica entre a lógica escolástico-aristotélica e a lógica moderna; segundo, a introdução do conceito básico de um sistema formal (ou 'cálculo simbólico'), que trata de um certo tipo de sistema algébrico definido matematicamente, considerando-o como uma representação abstrata da noção de uma linguagem (formal).

Frege, ao contrário de Boole, não tencionava representar simplesmente uma lógica abstrata por meio de fórmulas, mas expressar um *conteúdo* por intermédio de uma linguagem formalizada. De acordo com Frege, o cálculo simbólico de Boole representa apenas o aspecto formal da linguagem.

Nos *Grundlagen*, publicado em 1884, Frege tinha como objetivo precípuo apresentar um fundamento filosófico para a aritmética, mostrando que todas as verdades da aritmética são analíticas. Este projeto seria realizado pela derivação formal das leis básicas da aritmética de um conjunto de princípios lógicos gerais (i.e., verdades analíticas).

A derivação seria expressa em uma linguagem formal, na qual as regras lógicas de inferência são dadas explicitamente. Estabelecendo-se, por conseguinte, uma base lógico-formal para a aritmética elementar.

Esta doutrina filosófica é denominada de *logicismo*. O logicismo é o enfoque epistemológico cuja tese filosófica (*geral*) estabelece que as verdades da *matemática* são analíticas e, em conseqüência, deriváveis exclusivamente da lógica.

Sob esta perspectiva lógico-epistemológica trata-se em primeiro lugar de estabelecer uma base lógico-axiomática; em seguida, de reduzir a matemática, da seguinte forma:

1º. expressando-se todas as definições matemáticas em termos de conceitos lógicos básicos;

2º. derivar dessas definições e dos axiomas lógicos, por meio de regras de inferência, todos os teoremas da matemática.

Na monografia *Was sind und was sollen die Zahlen*?, publicada em 1888, Dedekind defende uma variante da doutrina logicista para fundamentação da matemática. Dedekind admitia que as noções de conjunto e função formam uma parte da lógica (de ordem superior) e são necessárias para a derivação da matemática.

Com a descoberta da *antinomia* de Zermelo-Russell, em 1901, Frege e Dedekind abandonam essa doutrina filosófica. Mas, Russell-Whitehead, nos *Principia Mathematica*, publicado em 1910-13, por meio da *teoria* de *tipos*, retomam a perspectiva logicista. Nesta teoria, cujo objetivo era a redução lógica da *teoria* de *conjuntos* —base principal para a formalização da matemática—, todas as entidades às quais referem-se as propriedades da teoria de conjuntos (conjuntos, conjuntos de conjuntos, etc.) devem ser consideradas numa hierarquia de tipos, tais que cada entidade pertença exatamente a um só tipo. Transpondo-se assim, as antinomias da teoria de conjuntos.

De fato, o primeiro tipo é constituído por indivíduos (entidades que *não* são conjuntos); o segundo tipo é formado por conjuntos cujos elementos são entidades do primeiro tipo; e, assim sucessivamente. Portanto, consideram-se apenas conjuntos cujos elementos são entidades de tipo imediatamente inferior. Contudo, a introdução de certos axiomas, como por exemplo, o axioma da *redutibilidade*[1], cuja analiticidade não foi justificada, interrompeu este projeto logicista.

No livro *Frege's Conception of Numbers as Objects*, publicado em 1983, C. Wright retoma a linha de pesquisa de Frege, introduzindo uma proposta denominada hoje de 'neo-Fregeana', viz., a lógica de segunda ordem acrescida do 'princípio de Hume' (como axioma)[2] permite derivar os

[1] Expresso formalmente, $(\forall x)(\exists w)(\forall z_1)...(\forall z_n)(w(z_1,...,z_n) \leftrightarrow x(z_1,...,z_n))$ onde x tem tipo de ordem $(t_1,...,t_k)/k/(y_1,...,y_n)$ e w é uma *fbf* predicativa de tipo de ordem $(t_1,...,t_n)/r/(y_1,...,y_n)$, com $r \leq k$.

[2] Veja discussão sobre a analiticidade do princípio de Hume no Cap. I: sec. I.3, §4, desta tese.

axiomas de Peano. Infelizmente, esta proposta de Wright é insatisfatória na medida em que, as críticas feitas por Boolos —e, discutidas nesta tese, no Cap. I: sec. I.3—, são suficientemente fortes para refutar o caráter lógico do princípio de Hume.

A perspectiva logicista que proponho nesta tese, de um ponto de vista filosófico, trata-se, em última análise, de um enfoque alternativo àqueles de Frege, Dedekind e Russell-Whitehead.

A presente tese monográfica, inscrita na interseção da área de Fundamentos de Matemática com a área de Filosofia da Matemática, tem por objeto de estudo um sistema lógico de ordem superior para a fundamentação lógica da aritmética elementar. Esse sistema lógico caracteriza-se pela utilização: do axioma da *extensionalidade*, do esquema de *compreensão* e pela introdução de um princípio de abstração analítico, i.e., o princípio de *equipolência lógica*, demonstrável em uma linguagem de segunda ordem total. Denomino esse enfoque, sob uma perspectiva lógico-extensional, de 'neo-logicista'. Esta expressão, em conformidade com o significado que lhe é conferido nesta dissertação —i.e., pressupondo-se uma redefinição da noção de analiticidade de uma sentença—, refere-se à abordagem reducionista, segundo a qual, a teoria geral de conjuntos finitos (em segunda ordem) é *redutível* ao sistema lógico supracitado.

Nos Prolegômenos da tese, apresentam-se as *hipóteses filosóficas gerais* e, são estabelecidos: a base *axiomática* e o fragmento *definicional* que constituem o sistema lógico de ordem superior $\mathfrak{L}$. No capítulo I, faz-se uma exposição resumida do enfoque logicista Fregeano, bem como da abordagem neo-Fregeana. No capítulo II, discute-se a problemática desta tese:

1. Subproblema *principal*: derivação dos axiomas da teoria geral de conjuntos finitos (em segunda ordem) tomando-se por base o axioma de extensionalidade, o esquema de compreensão e as regras de inferência de $\mathfrak{L}$.

2. Subproblema *secundário*: demonstração da analiticidade de uma definição contextual, em $\mathfrak{L}$, formalmente análoga à 'Lei V das *Grundgesetze*', via princípio de equipolência lógica.

Concluindo, o capítulo III tem por finalidade a discussão das principais implicações filosóficas desses resultados, no que concerne aos aspectos epistemológicos acerca da natureza lógico-extensional e da neutralidade tópica do sistema $\mathfrak{L}$; bem como, de um critério geral de analiticidade para definições contextuais de ordem superior. Deve-se ter presente que esta tese monográfica está circunscrita à demonstração, em nível metalógico, de cada um dos subproblemas mencionados acima, assim como, à análise lógico-epistemológica desses resultados.

As principais contribuições (originais) apresentadas nesta tese de doutorado podem ser resumidas da seguinte forma:

RESULTADOS PRINCIPAIS

I. *A definição da noção de* ***função-conceito****, a formulação e a derivação do princípio de* ***equipolência lógica*** *do axioma da extensionalidade*

[v. **Prolegômenos II, §5**; Cap. II: sec. II.2, §3]

II. *A derivação dos axiomas da Teoria Geral de Conjuntos (finitos) com base no sistema lógico* $\mathfrak{L}$

[v. Cap. II: sec. II.2, §4]

III. *A demonstração da analiticidade de um análogo formal da 'lei V' das "Grundgesetze"*

[v. Cap. II: sec. II.2, §3]

- **II** ⇒ '*a redução lógica da Aritmética de Peano em segunda ordem*'

  [v. Cap. II: sec. II.3, §3]

- **III** ⇒ '*a redução lógica da teoria dos números cardinais (finitos)*'

  [v. Cap. II: sec. II.1, §1 e sec. II.2, §5]

IV. *Uma (re)definição do conceito de analiticidade de uma sentença em segunda ordem*

[v. Cap. II: sec. II.2, §1]

V. *A formulação de um* ***critério geral de analiticidade*** *para definições contextuais de ordem superior*

[v. Cap. III: sec. III.1, §1]

PROLEGÔMENOS

Este capítulo introdutório trata da exposição preliminar das *hipóteses filosóficas gerais* e do estabelecimento da base axiomático-definicional da *linguagem* do sistema lógico de ordem superior ($\mathfrak{L}$). Esta introdução geral constitui, em certo sentido, o fundamento teórico de toda a tese.

I. LINEAMENTOS GERAIS DAS HIPÓTESES FILOSÓFICAS

O conjunto de hipóteses filosóficas, relativas ao escopo desta tese, é constituído por:

• **Tese logicista (*restrita*):** todos os *termos aritméticos* específicos são definíveis estritamente com base num alfabeto lógico e, os *axiomas da aritmética* elementar são deriváveis apenas de axiomas e regras de inferência da lógica.

• **Critério (de Tarski) para noções lógicas:** uma noção é *lógica*, somente se é invariante sob todas as transformações [aplicações 1-1] do universo de discurso de uma estrutura qualquer; ou, posto de outra forma, uma noção, com referência ao universo de discurso, é dita lógica se, e somente se, é levada sobre si própria, através de cada aplicação injetora, cujo domínio e imagem coincidem com a totalidade do universo de discurso.

• **Pressupostos lógico-filosóficos básicos:**

1°. *Categoria lógica de objetos.* Esta categoria é formada exclusivamente por *classes*, *conjuntos* e *valores-verdade*: V°, F°.

Seja $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ uma fórmula de $\mathfrak{L}$. Denomina-se $\mathfrak{C} := \{x : \phi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$ de *classe*, i.e., $\mathfrak{C}$ é a extensão do predicado ϕ. Num sentido lógico, conjuntos são *indivíduos* de uma classe fixa $\mathfrak{C}$ (ou *$\mathfrak{C}$-elementos*), isto significa que, os elementos da classe $\mathfrak{C}$ são todos os conjuntos x que satisfazem $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$.

Dizemos que $\mathfrak{C}$ é *definível com respeito* a $p_1, \ldots, p_n$. Se ϕ tem exatamente uma variável livre x, então a classe $\mathfrak{C}$ é *definível*.

$V := \{x : x = x\}$[1] é a *classe universal* (i.e., a classe de todos os conjuntos) e, $\Lambda := \{x : x \neq x\}$ classe *vazia*.

[1] A *igualdade* entre indivíduos é introduzida no sistema lógico $\mathfrak{L}$ via 'lei de Leibniz' [v. *Df.* II.1, sec. II, §5].

2°. *Categoria lógica de operadores*. Esta categoria é constituída essencialmente pelos conectivos proposicionais, quantificadores e a identidade, que caracterizam a estrutura da linguagem formal, e pela relação de *pertinência*, denotada da maneira usual por '$\in$'; acrescentando-se como fórmulas atômicas, na linguagem $\mathfrak{L}$, expressões da forma '$t \in \mathcal{X}$', onde t é um termo e $\mathcal{X}$ é uma variável (de segunda ordem) monádica. Considerando-se a seguinte interpretação metalingüística:

Seja $\mathcal{U}$ o universo de discurso [universo de indivíduos]. Uma transformação (aplicação 1-1) definida sobre $\mathcal{U}$ *induz* transformações[2] sobre conjuntos de indivíduos, relações entre indivíduos, e assim sucessivamente. De modo tal que, um indivíduo x é um '$\mathbb{C}$-*elemento*' de um conjunto de indivíduos $\mathbb{C}$; um conjunto (de indivíduos) $\mathbb{C}$ é um '$\mathbb{C}^{(1)}$-*elemento*' de um conjunto de conjuntos de indivíduos $\mathbb{C}^{(1)}$, etc. Nesta acepção, pela definição de uma transformação induzida, a relação de pertinência é *invariante* sob toda transformação de $\mathcal{U}$ sobre si próprio.

Isto significa que, via esta interpretação metalingüística e, consoante o critério de Tarski, a relação de pertinência pode ser introduzida na linguagem $\mathfrak{L}$ como um operador *lógico*[3].

- **Hipóteses ontológicas:**

1ª. Existem *objetos abstratos*, i.e., objetos sem localização espaço-temporal.

2ª. [No que tange ao status existencial das classes] Existem *universais* (ou conceitos gerais abstratos) de forma independente do pensamento conceitual subjetivo.

- **Hipóteses gnosiológicas:**

1ª. O conhecimento matemático não depende de relações *causais*, i.e., a *referência* de nomes, predicados e quantificadores de uma sentença matemática é independente de qualquer relação causal entre o sujeito cognoscente e o constructo matemático, visto que um objeto abstrato não corresponde a nenhum dado sensorial ou intuição sensível.

---

[2] Considerando-se, de forma específica, o domínio de quantificação A das variáveis de primeira ordem e, uma transformação f tal que, $dom(f) = ran(f) = A$. Então, f induz uma transformação f' em que domínio e imagem coincidem com o domínio de quantificação $\wp(A)$, i.e., o conjunto potência de A. E, assim sucessivamente.

[3] A relação binária de pertinência pode ser interpretada, em nível de metalinguagem, no sentido de um *functor* lógico da seguinte forma:

$$'x \in X' \Leftrightarrow_{df} (\exists \varepsilon)\left[\left((\mathbb{V} \times \mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon} \{\top, \bot\}\right)\langle X, x\rangle = \top\right];$$

onde 'x é um $\mathbb{C}$-*elemento*, X é um $\mathbb{V}$-*elemento*'. Em outros termos, o par $\langle X, x\rangle$ está na relação '$\in$' see existe um functor lógico ε, com argumento $\langle X, x\rangle$, tal que, $\varepsilon(X, x)$ toma o valor-verdade *verdadeiro*.

2ª. O conhecimento matemático é *a priori*, i.e., esse conhecimento não necessita de justificação epistemológica pela experiência.

II. LINGUAGEM FORMAL $\mathfrak{L}(\tau)$

Sintaxe Formal de $\mathfrak{L}(\tau)$. Fixemos um tipo de similaridade unissortido τ. Nesta seção, introduzimos uma formalização ($\mathfrak{L}$) da linguagem de segunda ordem *total* ($\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$), i.e., para qualquer estrutura $\mathfrak{A} = \langle \mathrm{A}; \{\mathfrak{R}_i\}_{i\in \mathrm{I}}, \{f_j\}_{j\in \mathrm{J}}\rangle$, $\mathrm{A} \neq \varnothing$, seja A_n o conjunto potência de A^n, $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$ admite quantificação sobre $\bigcup_{n<\omega} \mathrm{A}_n$.

§ 1. Símbolos primitivos

1. *constantes lógicas*:

(*i*) os conectivos lógicos do cálculo de predicados de primeira ordem;

(*ii*) os valores-verdade: V°, F°.

2. *variáveis de primeira ordem*: $x_0, x_1, ..., x_n, ..., x, y, z, u, v, w$;

3. *constantes de primeira ordem*: $c_0, c_1, ...$;

4. *variáveis (de segunda ordem) n-ádicas*: X_0^n, X_1^n, ..., X, Y, Z, para cada $n \geq 0$;

5. *constantes (de segunda-ordem) n-ádicas*: P_0^n, P_1^n, ...

§2. Fórmulas atômicas

Consistem nas mesmas fórmulas atômicas de $\mathscr{L}^{\mathrm{I}}(\tau)$ acrescidas de:

Para cada $n\geq 1$, $X^n(t_1,...,t_n)$, onde X^n é uma variável de segunda ordem n-ádica e t_1, ... $t_n \in Term$; onde *Term* [conjunto dos *termos* de $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}(\tau)$] denota o menor conjunto que satisfaz:

(*i*) variáveis (de primeira ordem) e as constantes são termos.

(*ii*) se t_1, ..., $t_n \in Term$ e F_k é um símbolo de função n-ário, então $F_k(t_1,...,t_n) \in Term$.

§2.1. Fórmulas

São definidas indutivamente por:

1. X_i^0, $P_i^0 \in \mathscr{F}orm$,

2. para $n > 0$, $$X^n(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{F}orm,$$ $$P^n(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{F}orm,$$

onde t_i é uma variável de primeira ordem ou constante;

3. $\mathcal{F}orm$ é fechado sob os conectivos proposicionais;

4. $\mathcal{F}orm$ é fechado sob a quantificação de primeira e segunda ordens: se $\phi \in \mathcal{F}orm$, $n \geq 1$ e X^n é uma variável relacional n-ária, então $(\forall X^n)\phi$, $(\exists X^n)\phi \in \mathcal{F}orm$.

§3. Regras de inferência

Acrescentam-se às regras de dedução natural, da lógica de primeira ordem, as seguintes regras de inferência em $\mathfrak{L}$:

RI 1: $$\frac{\varphi}{\forall X^n \varphi}\ (i\forall) \qquad \frac{\forall X^n \varphi}{\mathbb{S}_{X^n}^{\sigma(\bar{t})}\varphi}\ (e\forall)$$

RI 2: $$\frac{\mathbb{S}_{X^n}^{\sigma(\bar{t})}\varphi}{\exists X^n \varphi}\ (i\exists) \qquad \frac{\exists X^n \varphi \quad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ (e\exists)$$

onde: $\mathbb{S}_{X^n}^{\sigma(\bar{t})}\varphi =_{df} \left(\mathbb{S}_{X^n}^{\sigma(\bar{t})}\varphi\right)t_1 \ldots t_n$, e $\bar{t} = \langle t_1,\ldots,t_n\rangle$, i.e., $\mathbb{S}_{X^n}^{\sigma(\bar{t})}\varphi$ é obtida de φ, pela substituição de cada ocorrência de $X^n(t_1,\ldots,t_n)$ por $\sigma(t_1,\ldots,t_n)$, para uma dada *fbf* σ, tal que, nenhuma das variáveis livres t_i torne-se ligada após a substituição.

§4. Axioma e proposição fundamentais de $\mathfrak{L}$.

($\mathfrak{L}$.1) ***Axioma da Extensionalidade***:

$$\forall \vec{x}\left(X^n(\vec{x}) \leftrightarrow Y^n(\vec{x})\right) \leftrightarrow X^n = Y^n,$$

onde $\vec{x}$ denota uma sucessão finita de variáveis de primeira ordem de $\mathcal{L}^{\mathrm{II}}$, i.e., $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$.

Proposição **($\mathfrak{L}$*)** [*Esquema de Compreensão*]. *Seja X^n uma variável de segunda ordem n-ádica e $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}^{\mathrm{II}}$ em que X^n não ocorre livre. Então,*

$$\vdash \exists X^n \forall x_1 \ldots \forall x_n\left(\phi(x_1,\ldots x_n) \leftrightarrow X^n(x_1,\ldots x_n)\right).$$

Demonstração.

1. $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\phi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n))$ Demonstrável em $\mathscr{L}^1$ [Calc. de Pred. de 1ª ordem]

2. $\underline{\forall x_1 \ldots \forall x_n\left(\phi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow X^n(x_1,\ldots,x_n)\right)}$ Subst. da *fbf* $\phi(\bar{t})$ pela var. $X^n(\bar{t})$ na linha 1

$\exists X^n \forall x_1 \ldots \forall x_n\left(\phi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow X^n(x_1,\ldots,x_n)\right)$ 2, $i\exists$ [*regra* de inferência **RI** 2]. □

Observação. Podemos mostrar que o esquema de compreensão é, de fato, logicamente equivalente à regra de introdução do quantificador existencial em segunda ordem [v. van Dalen (1997), pp. 149-50].

§5. Terminologia de $\mathfrak{L}$. Estabelecemos nesta subseção as *definições básicas* do sistema lógico $\mathfrak{L}$. As definições *Df.* II.1 e *Df.* II.2 introduzem na linguagem do sistema $\mathfrak{L}$, respectivamente, a relação de *igualdade* e o operador de *adjunção.*

Definições Principais

Df. II.1 Definição de *igualdade* para indivíduos [Lei de Leibniz]

$(x = y) \Leftrightarrow_{df} (\forall X)\left(X(x) \leftrightarrow X(y)\right)$.

Observação: a noção de igualdade é considerada em uma acepção *lógica*, i.e., '$x = y$' se, e somente se, x e y denotam o mesmo objeto.

Df. II.2 $X = \varnothing \Leftrightarrow_{df} (\forall x)(x \notin X)$

Df. II.3 $x \in [X \mid y] \Leftrightarrow_{df} x \in X \vee x = y$

$\varnothing$ é o conjunto *vazio*; $[X \mid y]$ é o conjunto cujos elementos são os elementos de X e o conjunto y. Do axioma $\mathfrak{L}$.1 segue-se que $\varnothing$ e $[X \mid y]$ são unicamente determinados pelas propriedades expressas pelas definições *Df.* II.2, 3.

Definições Derivadas

Df. II.4.1 $\{x\} := [\varnothing \mid x]$

Df. II.4.2 $\{x, y\} := [\{x\} \mid y]$

Df. II.4.3 $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Resulta da *Df.* II.4.3 e do axioma $\mathfrak{L}$.1:

$\vdash \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$.

Base Relacional de $\mathfrak{L}$. A existência e unicidade de cada uma das definições seguintes é estabelecida, via esquema de compreensão e axioma $\mathfrak{L}$.1, valendo-se de *Df.* II.4.3.

Df. II.5.1 $\{\langle x, y\rangle : \phi(x, y)\} \equiv_{df} \{z : (\exists x)(\exists y)(z = \langle x, y\rangle \wedge \phi(x, y))\}$, i.e.,

'a classe dos *pares ordenados* $\langle x, y\rangle$ tais que $\phi(x, y)$'.

Df. II.5.2 $\mathfrak{P}(X) \Leftrightarrow_{df} (\forall x)(x \in X \rightarrow (\exists u)(\exists v)(x = \langle u, v\rangle))$, i.e.,

'X é uma classe de pares ordenados'.

Df. II.5.3 Seja f uma classe de pares ordenados. Então,

$\text{Func}(f) \Leftrightarrow_{df} \mathfrak{P}(f) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \rightarrow y = z)$, i.e.,

Func(f) designa que 'f é uma *função* (ou relação funcional)'.

Df. II.6.1 Dados $\Omega = \{\mathsf{V}^\circ, \mathsf{F}^\circ\}$ e um predicado (n-ádico) $\phi(\bar{x}) \in \mathfrak{L}$. Seja $\prod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{f_\phi} \Omega$ uma função n-ária, definida por:

$f_\phi \bar{x} = v \Leftrightarrow \phi(\bar{x})$, i.e., $f_\phi \bar{x} = \mathsf{V}^\circ$ see $\upsilon(\phi(\bar{x})) = \top$, e $f_\phi \bar{x} = \mathsf{F}^\circ$ see $\upsilon(\phi(\bar{x})) = \bot$,

para uma dada *valoração* υ na metalinguagem de $\mathfrak{L}$; onde $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. O functor lógico f_ϕ é denominado de *função-conceito*[4] (n-ária), de primeiro nível, definida por meio da fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, com variáveis livres (de primeira ordem) x_i.

Df. II.6.2 Seja um conjunto $\mathcal{X} \neq \varnothing$. Então,

$\mathrm{E}_{\hbar_\phi}(x, y) \Leftrightarrow_{df} \hbar_\phi(x) = \hbar_\phi(y)$, i.e.,

$\mathrm{E}_{\hbar_\phi}$ é a relação de equivalência sobre $\mathcal{X}$ *induzida* pela função-conceito $\mathcal{X} \xrightarrow{\hbar_\phi} \Omega$.

[4] Note que, para cada predicado (n-ádico) ϕ de $\mathfrak{L}$, existe uma única função-conceito f_ϕ correlativa a $\phi(\bar{x})$, com respeito a um dado domínio $\prod_{i=1}^{n} X_i \neq \varnothing$, i.e., $(\forall \phi)(\exists! f_\phi)(\forall \bar{x})[f_\phi(\bar{x}) = v \leftrightarrow \phi(\bar{x})]$, onde $v \in \Omega$.

Definições Suplementares

Df. II.7.1 $\quad X \sqsubseteq Y \Leftrightarrow_{df} (\forall x)(x \in X \rightarrow x \in Y)$.

Df. II.7.2 $\quad 2^X := \{Y : Y \sqsubseteq X\}$.

III. DEFINIÇÃO DE LÓGICA

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Uma *lógica* é um par $(\mathscr{L}, \mathrm{C}_n)$ onde $\mathscr{L}$ é uma linguagem definida sobre um vocabulário τ tal que, $\mathscr{L}[\tau]$ é uma classe (a classe das *$\mathscr{L}$-sentenças* do vocabulário τ) e $\mathrm{C}_n(\Gamma) := \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$ é denominado de *operador de conseqüência* de Tarski. $(\mathscr{L}, \mathrm{C}_n)$ satisfaz as propriedades seguintes:

(*i*) $\Gamma \subseteq \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}_n(\Gamma) \subseteq \mathrm{C}_n(\Sigma)$;

(*ii*) $\Gamma \subseteq \mathrm{C}_n(\Gamma)$;

(*iii*) $\mathrm{C}_n(\mathrm{C}_n(\Gamma)) = \mathrm{C}_n(\Gamma)$;

(*iv*) $\sigma(\mathrm{C}_n(\Gamma)) \subseteq \mathrm{C}_n(\sigma(\Gamma))$, para qualquer endomorfismo σ de $\mathscr{L}$.

IV. ARCABOUÇO TEÓRICO DA TESE

O arcabouço teórico desta tese pode ser representado, na metalinguagem de $\mathfrak{L}$, pelo seguinte diagrama esquemático. Supondo-se consis(**TGC**) então:

Seja $\mathfrak{L} \equiv_{df} \mathscr{L}^{\mathrm{II}}$ + Ax. da Extensionalidade ($\mathfrak{L}$.1);	
$\mathfrak{L} \Rightarrow$ **TGC** + (*Princípio de Equipotência*)	[via *Equipolência Lógica* e DEF. 1.3 (Cap. II)]
TGC $\Rightarrow$ **AP**$^{(2)}$	[via DEF. 2.1 (Cap. II)]
$\therefore\ \mathfrak{L} \Rightarrow$ **AP**$^{(2)}$.	
AP$^{(2)}$: 'aritmética de Peano em segunda ordem';	
TGC: 'teoria geral de conjuntos (em segunda ordem)'.	

CAPÍTULO I

Neste capítulo, faz-se uma exposição, em linhas gerais, do enfoque logicista Fregeano. Considerando-se, também, segundo uma abordagem neo-Fregeana, a possibilidade de uma reformulação desse projeto de fundamentação lógica da aritmética. No **apêndice**, deste capítulo, acrescenta-se uma explicação sobre as noções de *conceito* e de *extensão* (de um conceito) na acepção Fregeana.

I.1 O PROJETO LOGICISTA FREGEANO

Nos *Grundlagen*, Frege apresentava como objetivo principal uma definição de número cardinal com base em categorias estritamente lógicas, permitindo deste modo a *redução* dos postulados básicos da aritmética elementar a leis lógicas, em outros termos, a demonstração de que os postulados básicos da aritmética são *analíticos*. De acordo com Frege (1884)

> Espero ter, nesta monografia, tornado plausível que as *leis aritméticas sejam juízos analíticos* [o grifo é meu] e, por conseguinte, *a priori*. Em conformidade com isto, a aritmética seria apenas uma lógica mais desenvolvida, cada teorema da aritmética uma lei lógica, ainda que derivada. ... [C]omputação seria inferência.[1]

O logicismo Fregeano consiste na doutrina filosófica, cujo objetivo precípuo é mostrar que a aritmética elementar trata estritamente das relações analíticas entre conceitos.

O enfoque Fregeano caracteriza-se pela utilização de *princípios contextuais* em segunda ordem que apresentam a seguinte forma geral:

(*) $$(\forall F)(\forall G)\big(@x.Fx = @x.Gx \Leftrightarrow \mathbb{E}(F,G)\big)$$

onde '$\mathbb{E}$' denota uma relação de equivalência, F, G são *conceitos* quaisquer e, '@' designa um abstrator com respeito a um domínio primitivo de objetos.

A sentença (*) expressa que: dois conceitos F e G são *coextensivos*, com respeito a um domínio (primitivo) de indivíduos se, e somente se, F e G estão em uma dada relação de *equivalência* $\mathbb{E}$.

Em particular, a famosa 'lei básica V' das *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege (1893) consiste numa instância *inconsistente* de (*).

---

[1] Veja *Grundlagen* §87.

§1. Números como extensões de conceitos

Apresentamos os delineamentos gerais da análise Fregeana do conceito de número. Considere-se inicialmente a seguinte observação de Frege. No §62 dos *Grundlagen*, Frege assinala que há uma indeterminação associada à definição: $Num(n) \equiv_{df} \exists F(N_x Fx = n)$. Ou seja, a definição '$n$ é um *número* se, e somente se, existe um conceito F tal que n é o número que lhe convém' é aplicável apenas na condição de que esteja pressuposto, explicitamente, um critério para decidir o valor-verdade de qualquer igualdade da forma: '$N_x Fx = n$'. Caso contrário, não seremos capazes de decidir, por exemplo, se 'Júlio César é um número'. Expresso sob outros termos, não há um procedimento geral de decisão que permita determinar o valor-verdade de toda asserção de identidade da forma '$N_x Fx = t$', em que t é um termo singular qualquer cuja expressão sintática seja distinta de '$N_x Fx$'.

Neste caso, Frege apresenta a seguinte alternativa, introduzida no §68, que consiste na *definição explícita* de número

o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito "equinumérico ao conceito F".

Isto significa, conforme o enfoque Fregeano, que o conceito lógico de correlação biunívoca (ou correspondência bijetora) é anterior ao conceito de número. Nos §§72, 73 Frege acrescenta uma explicação de como a noção de aplicação bijetiva pode ser formulada em termos lógicos: um conceito Fs está em correlação biunívoca com outro conceito Gs se, e somente se, existe uma relação (binária) $\Re(x, y)$ que correlaciona biunivocamente os objetos que caem sob F com os objetos que caem sob G. Assim, o número de Fs consiste na *classe* (de equivalência) de conceitos que têm a mesma cardinalidade do conceito F.

Ao contrário da análise de Dedekind e Peano —segundo a qual, os números naturais constituem, em última análise, um conjunto fechado com relação à operação sucessor, aplicada a um primeiro elemento (que não seja ele próprio um sucessor)—, Frege considera a preeminência da noção de número *cardinal* em relação à de número ordinal.

Nos §§74-79, Frege estabelece definições para os números singulares:

'$0 := N_x[x : x \neq x]$', '$1 := N_x[x : x = 0]$', ..., '$n + 1 := N_x[\vee_{\mu=0}^{n}\ x = \mu]$'.

Estas definições pressupõem um significado preciso para o operador numérico 'N_x', qual seja, no sentido da definição explícita acima.

§2. A relevância do princípio de Hume para o enfoque Fregeano

O 'princípio de Hume' estabelece que: '*número de Fs = número de Gs se, e só se, existe uma correspondência* 1-1 *entre os Fs e os Gs*', onde F e G denotam conceitos. Formalmente,

$$N_x Fx = N_x Gx$$

$$\text{see}$$

$$\exists R\begin{pmatrix} \forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Rxz \rightarrow y = z) \wedge \forall x\forall y\forall z(Rxz \wedge Ryz \rightarrow x = y) \wedge \forall x(Fx \rightarrow (\exists y)(Gy \wedge Rxy)) \\ \wedge \forall x(Gx \rightarrow (\exists y)(Fy \wedge Ryx)) \end{pmatrix}.$$

Cabe observar que o princípio de Hume é um princípio de abstração (consistente) cuja expressão formal apresenta a forma geral dada pelo esquema de *definições contextuais* (*) [v. demonstração da consistência na sec. I.3, § 3].

Na parte II das *Grundgesetze*, Frege deriva o princípio de Hume de sua definição explícita de números. Baseando-se exclusivamente neste princípio, Frege demonstra as 'leis básicas' da aritmética (i.e., os axiomas de Peano-Dedekind):

A P_1 : $\mathbb{N}(0)$

A P_2 : $\forall x(\mathbb{N}x \rightarrow \exists y(\mathbb{N}y \wedge Suc(x,y)))$

A P_3 : 1. $Func(Suc)$
2. $Func[Conv(Suc)]$

A P_4 : $\neg\exists x.Suc(x, 0)$

A P_5 : $\forall x(\mathbb{N}x \rightarrow \forall F(F(0) \wedge \forall x(\mathbb{N}x \wedge Fx \rightarrow \forall y(Suc(x,y) \rightarrow Fy)) \rightarrow Fx))$;

onde: o predicado '$\mathbb{N}\xi$' denota 'ξ é um número natural';

'$Suc(x, y)$' denota que 'y é o sucessor imediato de x na sucessão numérica';

'$Func(\Re)$' designa que a 'relação $\Re$ é *funcional*', i.e.,

$$Func_{vw}(Rvw) \equiv_{df} \forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow \forall z(R(x,z) \rightarrow y = z));$$

'$Conv(\Re)$' designa a 'relação *recíproca* de $\Re$', i.e.,

$$Conv_{vw}(Rvw)(x,y) \equiv_{df} Ryx.$$

A relevância do princípio de Hume, para o projeto filosófico logicista de Frege, pode ser expressa no seguinte enunciado (admitindo-se a hipótese de que números são objetos):

O princípio de Hume implica a infinidade dos números naturais [Teorema de Frege][2].

Este princípio, no âmbito de um sistema de segunda ordem, é necessário para a derivação do segundo postulado de Peano (*todo número natural tem um sucessor unicamente determinado*).

Nas *Grundgesetze*, Frege mostra que a definição explícita de número implica o princípio de Hume. E, as proposições *analíticas* com relação ao *conceito* de número são exatamente aquelas deriváveis deste princípio. Assim, o princípio de Hume desempenha uma função essencial na demonstração de analiticidade de propriedades aritméticas —formuladas com base no conceito de número.

No §70 dos *Grundlagen*, Frege mostrou a relevância do conceito de relação para a definição de número natural e acrescentou

> O conceito relacional pertence —assim como o simples conceito—, à esfera da lógica pura. Aqui não interessa o conteúdo particular da relação, mas exclusivamente a sua forma lógica. Se algo pode ser afirmado sobre ela, a verdade desse enunciado resulta analítica e é reconhecida *a priori*.

Neste parágrafo supracitado, Frege expressa a anterioridade da noção de *relação* para a definição de número natural, na medida em que, sob um tratamento sintático-formal, o que interessa é exclusivamente a forma lógica e não o conteúdo específico da relação. Em conseqüência, uma teoria geral das relações estabelece uma conexão entre a lógica e a aritmética elementar.

De fato, nas *Grundgesetze*, Frege afirma:

> Eu reduzi Número à relação de equinumerosidade, e reduzi esta última à correspondência muitos-um. ... Se estou certo em pensar que a aritmética é um ramo da lógica, então a noção de 'correspondência' deve ser expressa em termos estritamente lógicos. ... *O conceito e a relação são os fundamentos sobre os quais estabeleci minha construção*[3]. [O grifo é meu]

---

[2] A noção de *infinito*, subentendida neste teorema, consiste na noção de infinito no sentido de Dedekind: *um domínio D é infinito somente se, existe uma função injetiva f de D em D e um objeto c em D tal que c não está na imagem de f*.

[3] Veja *Grundgesetze* I, §0.

§3. O axioma V das *Grundgesetze* e a Antinomia de Russell

O axioma V (ou princípio do contexto) das *Grundgesetze* consiste em um princípio de abstração que estabelece condições para a *igualdade* das extensões de conceitos. Este axioma é necessário, segundo o enfoque Fregeano, para estabelecer a referência das extensões de conceitos de primeiro nível —evitando-se a indeterminação citada anteriormente. Além disso, extensões de conceitos são necessárias para a formulação da definição explícita e, conseqüentemente, na demonstração do princípio de Hume. Todavia, os axiomas da aritmética são deriváveis do princípio de Hume sem a necessidade de recorrer-se ao axioma V nem à existência de extensões de conceitos.

Devemos observar que Frege associou à aplicação do princípio do contexto, enquanto critério de identidade dado por uma relação de equivalência, a definição por abstração lógica —i.e., o procedimento de passar à estrutura quociente determinada pela relação. De maneira que, os elementos do conjunto quociente (i.e., as classes de equivalência definidas pelos conceitos) proporcionariam os referentes dos termos numéricos singulares. Transpondo-se, por conseguinte, o problema da indeterminação da referência dos números cardinais.

O axioma V caracteriza o sistema lógico de Frege sob uma perspectiva *lógico-extensional*, na medida em que fixa as condições de identidade de conceitos quando esses têm as mesmas extensões. Observa-se, em relação à estrutura formal deste axioma, que este princípio de abstração é analogamente similar à seguinte propriedade: 'funções são idênticas quando têm o mesmo gráfico'. Neste sentido, esse tratamento extensional significa que, quando $(\forall x)(Fx \Leftrightarrow Gx)$ é verdadeiro é possível substituir '*F*s' por '*G*s' em quaisquer contextos, conservando-se o valor-verdade de cada uma dessas expressões formais.

Como foi observado por Frege, nada impede a transformação da generalidade de uma identidade da forma $(\forall x)(Fx \Leftrightarrow Gx)$ em uma identidade de curso de valores. Apenas a transformação recíproca —em decorrência da antinomia de Russell—, não é possível em geral. Em conseqüência deste fato não pode ser mantido, em geral, que a sentença 'o conceito Fx tem o mesmo curso de valores do conceito Gx' denota o mesmo que a sentença 'os conceitos Fx e Gx têm sempre o mesmo valor-verdade para o mesmo argumento'. Posto sob outros termos, deve ser considerada a possibilidade de que existam conceitos que *não* tenham extensão.

Neste sentido, a noção de extensão de um conceito era essencial ao projeto reducionista Fregeano, pois teria assegurado a formalização da definição explícita de número em termos lógicos e, mediante regras lógicas de inferência, o princípio de Hume seria derivado desta.

Em 1901, Russell descobre que uma contradição (a '*Antinomia de Zermelo-Russell*') pode ser derivada do 'Axioma V', tomando-se o conjunto de todos os elementos que satisfazem a propriedade de 'não ser elemento de si próprio'.

Considere-se agora o Axioma V das *Grundgesetze*:

$$\hat{\varepsilon}.f(\varepsilon)=\hat{\varepsilon}.g(\varepsilon)\Leftrightarrow(\forall x)[f(x)\Leftrightarrow g(x)],$$

onde $\hat{\varepsilon}.\hbar(\varepsilon)$ denota a *extensão* do *conceito* $\hbar$. Esse axioma expressa formalmente que a *identidade* das extensões de dois conceitos quaisquer é logicamente equivalente à *co-extensionalidade* desses conceitos, i.e., esses conceitos assumem os mesmos valores-verdade para os mesmos argumentos. Isto significa que as extensões de conceitos são introduzidas por intermédio de suas condições de identidade.

De acordo com o enfoque Fregeano: 'todo conceito $\hbar$ tem uma *classe* $\hat{\varepsilon}.\hbar(\varepsilon)$' como sua extensão, e

(‡) $$\hat{\varepsilon}.f(\varepsilon)=\hat{\varepsilon}.g(\varepsilon)\Rightarrow(\forall x)[f(x)\Leftrightarrow g(x)];$$

como os elementos de $\hat{\varepsilon}.\hbar(\varepsilon)$ são tais que

(†) $$(\forall x)[x\in\hat{\varepsilon}.\hbar(\varepsilon)\Leftrightarrow \hbar(x)]$$ [pelo princípio de abstração (*irrestrito*)][4],

segue-se que (†) implica (‡). Posto isto, seja $y=\hat{\varepsilon}.\hbar(\varepsilon)$ e $\hbar(x)\equiv_{df} x\notin x$; então, tem-se a seguinte instância de (†):

$$(\forall x)[x\in y\Leftrightarrow x\notin x]. \qquad (1)$$

Fazendo-se $x=y$ em (1) infere-se que: $y\in y\Leftrightarrow y\notin y$,

a qual é logicamente equivalente à contradição: $\hbar(y)\wedge\neg\hbar(y)$. □

Assim, em virtude do fato de que uma contradição é derivável da implicação (‡), resulta que é *falso* que 'todo conceito $\hbar$ determina uma extensão $\hat{\varepsilon}.\hbar(\varepsilon)$'. Portanto, as hipóteses (†) e (‡) *são reciprocamente inconsistentes*.

---

[4] Axioma da *abstração* (em primeira ordem): $(\exists y)(\forall x)(x\in y\Leftrightarrow\varphi(x))$, onde $\varphi(x)$ é uma fórmula na qual a variável y não ocorre livre.

§4. Rejeição do Axioma V 'modificado' das *Grundgesetze*

Após a comunicação de Russell, Frege fez uma 'modificação' no axioma V para evitar a derivação da contradição —atenuando ao máximo possível o efeito da antinomia de Russell sobre sua teoria de extensão de conceitos—, contudo, a versão modificada do axioma V mostrou-se inconsistente. Como assinalado por Quine (1955), Frege introduz a seguinte forma variante deste axioma:

$$(y)[y \neq \hat{x}(\phi x).\supset: y \in \hat{x}(\phi x).\equiv \phi y]. \qquad \text{(I)}$$

De modo que, para qualquer conceito ϕ, resulta que $\hat{x}(\phi x)$ compreende:

(*i*) exatamente os objetos x tais que, ϕx ou,

(*ii*) todos os objetos que satisfazem a condição (*i*), incluindo-se a própria extensão $\hat{x}(\phi x)$ ou,

(*iii*) todos os objetos que satisfazem a condição (*i*), excluindo-se a própria extensão $\hat{x}(\phi x)$.

Quine[5] [neste artigo de 1955] demonstra que da sentença (I) e de $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ deriva-se uma contradição.

Segundo Frege, sob um aspecto epistemológico, a noção de *extensão* de um conceito é essencial para uma explicação da apreensão cognitiva de *objetos lógicos* justificando-se, dessa maneira, a independência da aritmética de qualquer tipo de *intuição* sensível. Frege propõe a questão seguinte:

> [C]omo os números [naturais] podem ser apreendidos como objetos lógicos, ... exceto que seja permitido —pelo menos condicionalmente— *passar de um conceito à sua extensão*. Posso, sempre que falar da *extensão de um conceito* —falar de uma *classe*? E, se não, como os casos excepcionais são reconhecidos? [O grifo é meu][6]

De acordo com o enfoque Fregeano, a questão é: mostrar que há uma explicação da noção de extensão de um conceito que sirva aos propósitos do logicismo.[7]

Como assinalado por Frege, no excerto acima, o enfoque logicista requer uma justificação epistemológica da função desempenhada, não apenas pela noção de conceito mas, também, pela noção de *classe*, bem como, em que sentido um conceito bem definido determina uma classe (ou extensão).

---

[5] 'On Frege's Way Out', *Mind*, vol. 64. Reimpresso em *Selected Logic Papers* (1966), pp. 150-1.
[6] Veja *Grundgesetze*, vol. II, Apêndice; p. 253.
[7] Esta questão relativa à (*re*)interpretação da noção de extensão de conceitos é relevante, conforme destacado por Burge (1984), para a perspectiva logicista Fregeana. [v. excerto de Burge no **apêndice** do Cap. I]

O esquema de abstração, que consiste num princípio básico para a geração de classes, desempenhou um papel central no sistema lógico de Frege visto que, um teorema de *infinidade* é demonstrável com base exclusivamente no princípio de abstração *irrestrito* e no axioma da *extensionalidade*.

A demonstração de que o princípio de Hume é uma conseqüência lógica da definição explícita de número cardinal —exceto pelo fato de que a definição explícita depende da teoria Fregeana (inconsistente) de extensões—, teria sido um procedimento que garantiria a consistência do sistema lógico de Frege. Porque, este resultado, sob um enfoque da teoria de modelos, estabelece a existência de uma coleção de objetos (i.e., a sucessão infinita de números naturais), para os quais, os axiomas de Peano são verdadeiros.

I.2 ANÁLISE DO CONCEITO DE ANALITICIDADE

Nesta seção, discutimos as principais definições de analiticidade de uma proposição, assim como as limitações formais dessas definições.

§1. Definição Fregeana de analiticidade

De acordo com Frege, o problema epistemológico de classificação de uma proposição verdadeira como *analítica*,

> [C]onsiste, de fato, em encontrar a demonstração da proposição e, no regresso até as verdades primitivas. Se, no decorrer deste processo, resultam-se apenas leis lógicas gerais e definições, então a verdade é *analítica* [o grifo é meu], pressupondo-se, também, que sejam tomadas em consideração, todas as proposições sobre as quais depende a admissibilidade de qualquer definição. ... Se, ... é possível conduzir a demonstração [da proposição] valendo-se exclusivamente de leis gerais, as quais não admitem nem necessitam de demonstração, então a verdade é *a priori*.[8]

Isto significa que, segundo Frege, uma proposição analítica é aquela que é *demonstrável* exclusivamente por meio de axiomas *lógicos* e *definições*. A demonstração de analiticidade de uma proposição implica que essa proposição é uma *verdade lógica* num sentido estrito. Esta definição de analiticidade requer, por conseguinte, três conceitos fundamentais: (*i*) conceito de *demonstração*, (*ii*) conceito de *lei lógica geral*, (*iii*) conceito de *definição*. Admitindo-se que, os significados dos conceitos (*i*), (*ii*) e (*iii*) estejam previamente fixados de forma inequívoca, expressamos formalmente essa definição a seguir.

[8] Veja §3 dos *Grundlagen*.

DEFINIÇÃO (*). Uma sentença ϕ de um sistema formal-axiomático $\Im$ é *analítica* $\Leftrightarrow_{df}$ $\vdash \phi$ ou ϕ é uma definição (explícita) de $\Im$.

De um modo geral, um sistema formal-axiomático consiste em:

1. Uma lista T de termos *indefinidos*.
2. Uma lista F de *fórmulas*.
3. Uma lista Γ_0 de *definições* e, uma lista Λ de axiomas *lógicos*[9].
4. Uma lista Σ_0 de sentenças *deriváveis* de $\Gamma_0 \cup \Lambda$ de acordo com certas regras de *inferência*.

O conjunto T é o gerador de F (o conjunto de todas as fórmulas bem formadas de $\Im$); e o conjunto $\Delta = \Gamma_0 \cup \Lambda$ é o gerador de Σ_0 (o conjunto de todas as sentenças formalizáveis em $\Im$).

Seja $C(\Delta) := \{\psi : \Lambda, \Gamma_0 \vdash \psi\}_{\Im}$.

Assim, se $\Lambda \neq \emptyset$ então, o conjunto $C(\Delta)$ é o gerador de todas as sentenças analíticas (i.e., demonstráveis) em $\Im$, i.e., para toda sentença ϕ em $\Im$, se ϕ é *analítica* então $\phi \in C(\Delta)$.

Observação. No que se refere ao caráter analítico das 'premissas' ou hipóteses (subconjunto de F) é suficiente verificar na demonstração de uma sentença:

(*i*) se as premissas são axiomas *lógicos*, após o procedimento de regresso (finito) às hipóteses iniciais da demonstração;

(*ii*) se alguma premissa resulta de substituição por uma *definição* formalizada na linguagem.

Em conseqüência da incompletude da lógica de ordem superior, com respeito à interpretação *standard*, não é possível estabelecer como pré-condição que o sistema formal $\Im$ seja *dedutivamente completo*, i.e., que toda sentença *válida* de $\Im$ é demonstrável em $\Im$. Nesta linha de análise, devemos considerar dois aspectos principais:

(*i*) se admitirmos que o conceito de *validade* —segundo o enfoque de teoria de modelos—, é anterior ao de lei lógica, teremos que considerar o caso de sistemas formais axiomáticos que *não* são dedutivamente completos;

[9] Note que o conjunto Λ pode ser vazio.

(*ii*) se admitirmos que uma lei lógica pressupõe um procedimento *algorítmico* geral —para decidir se uma forma de argumento expressável num sistema formal axiomático é válida ou não—, teremos que considerar o fato de que o cálculo de predicados é *indecidível*.

Considere-se, agora, na citação anterior, a seguinte afirmação: "todas as proposições sobre as quais depende a admissibilidade de qualquer definição." Como Frege observa no §70 dos *Grundlagen*, dois aspectos básicos devem ser levados em conta na análise de admissibilidade de uma definição introduzida numa demonstração: (*i*) essa definição não pode conduzir a uma contradição e, (*ii*) essa definição deve mostrar-se necessária, i.e., uma definição que permita demonstrar uma proposição, que não pode ser derivada formalmente sem o recurso a essa definição.

Entretanto, como observado por Dummett (1991), Frege não apresenta explicitamente nenhum *critério* específico para correção lógico-formal de definições em geral

> The most serious defect in Frege's characterisations of the concepts of analyticity and aprioricity lies in his failure *to state the conditions under which a definition is correct* [o grifo é meu]. The definitions to which he allows appeal to be made in the course of that proof whose existence shows a proposition to be analytic ... must, obviously, be correct ones; ....[10]

Concordo plenamente com Dummett neste ponto, acrescentando que, para uma fundamentação *neo-logicista* da aritmética, faz-se necessário um tratamento formal da correção lógica de definições contextuais. Apresento na seção II.2, do próximo capítulo, um critério geral para *classificação* de uma definição como lógica —o 'critério de Tarski' [v. **Prolegômenos I**]. E, em acréscimo, no capítulo III, um critério geral de *analiticidade* para definições contextuais [v. Cap. III: sec. III.1, §1].

§2. Definição de analiticidade *à la* Carnap

De acordo com Carnap (1928), podemos restabelecer a definição Fregeana de proposições analíticas e, além disso, estabelecer a tese de que todas as proposições *a priori* são analíticas, estendendo-se, dessa forma, o conceito de analiticidade. Segundo Carnap

> O primeiro tipo de teorema pode ser deduzido somente de definições (pressupondo-se os axiomas da lógica, sem os quais nenhuma dedução é, em absoluto, possível). Denominamos estes de teoremas *analíticos*. ... Se um teorema analítico é transformado em um enunciado sobre as relações básicas,

[10] Veja "*Frege: Philosophy of Mathematics*", p. 30.

resulta uma tautologia; ... Expresso na linguagem natural, isto significa que teoremas analíticos são enunciados tautológicos sobre conceitos ... [11]

Podemos interpretar esta acepção de analiticidade da seguinte forma. Seja p uma variável proposicional, então a fórmula $p \to p$ expressa uma *forma lógica* (ou tautológica) —o princípio clássico de 'identidade'. Esta fórmula pode ser exemplificada mediante 'palavras lógicas' numa linguagem natural como, e.g., o português:

(*i*) Se x é um número par, então x é um número par.

As palavras 'se' e 'então' caracterizam a *estrutura* lógica dessa asserção. Como essa estrutura tem validade geral, segue-se que a sentença

(*ii*) Todos $\underline{\text{os números pares}}_{p}$ são $\underline{\text{números naturais divisíveis por dois}}_{q}$,

expressa uma verdade lógica, na qual o complemento verbal (predicativo) 'q' consiste numa *definição* da expressão 'p' e, que substitui 'p' no conseqüente do condicional implícito em (*ii*); a *substituição* de 'x é número par' por sua definição é uma operação compatível com a estrutura lógica subjacente da sentença (i.e., a substituição de um termo da proposição por sua definição preserva a verdade lógica dessa proposição). Essa análise sintática metalingüística permite mostrar que asserções como (*i*) consistem em enunciados cuja verdade decorre estritamente de sua *forma* lógica, i.e., resulta unicamente dos significados dos *termos* lógicos que ocorrem em (*i*) ao passo que, a verdade de uma asserção do tipo (*ii*) é conseqüência tanto da forma lógica (implícita) $\forall x(Px \to Qx)$ —que, neste caso, não se trata de uma sentença *válida* (i.e., verdadeira em qualquer domínio)— quanto de uma definição específica.

Denomina-se de enunciado *analítico* qualquer enunciado do tipo (*i*) ou do tipo (*ii*), em outras palavras, um enunciado é analítico nessa acepção, somente se é uma *tautologia* e/ou expressa um relação metalógica entre definições numa fórmula proposicional ou numa sentença em uma linguagem de primeira ordem.

Quine (1962) faz a seguinte crítica a essa acepção de analiticidade

> I tend to reserve the *term 'logically true' for the narrower domain*, and to use the *term 'analytic' for the more inclusive domain which includes truths by essential predication.* [o grifo é meu] Carnap on the contrary has used both terms in the broader sense. ...
>
> The truths by essential predication are sentences which can be turned into logical truths by supplanting certain simple predicates ... by complex synonyms ... This formulation is not inadequate to

[11] Veja §106 de "*Der logische Aufbau der Welt*".

such further examples as 'if A is part of B and B is part of C then A is part of C'; ... The relevant notion of synonymy is simply *analytic* co-extensiveness (however circular this might be as a definition).

To count analyticity a genus of logical truth is to grant, it may seem, *the linguistic doctrine of logical truth*; [o grifo é meu] ... 'Analytic' means true by synonymy and logic, hence no doubt true by language and logic, and simply true by language *if* the linguistic doctrine of logical truth is right.[12]

Há dois aspectos distintos nesta análise epistemológica de Quine que devem ser destacados:

(*i*) O termo 'analítico' pode ser utilizado num sentido estrito de 'verdade lógica', restringindo-se assim, a amplitude desse conceito. Embora Quine utilize o termo analítico numa acepção mais inclusiva, abrangendo-se verdades por predicação essencial. Carnap, por outro lado, não delimita a amplitude do conceito de verdade lógica, utilizando-o para explicar o significado do termo analítico.

(*ii*) Admitindo-se como certo que a noção de analiticidade é anterior ao conceito de verdade lógica, bem como uma noção estritamente lingüística, decorre que a *doutrina lingüística* da verdade lógica é legítima. Neste caso, uma proposição verdadeira é analítica se, e somente se, for expressável, de modo sintático, por meio de uma fórmula restrita aos conectivos lógicos do sistema formal. Em outros termos, uma proposição analítica reduz-se simplesmente a uma proposição verdadeira (ou tautologia) expressável em uma certa linguagem formal.

Com relação ao item (*ii*), acrescento que, a condição de *redutibilidade* de uma proposição verdadeira a uma fórmula, restrita aos conectivos lógicos da linguagem, não estabelece o caráter de verdade lógica no caso de uma sentença em uma linguagem de ordem superior.

Não obstante, a existência de um processo de *tradução* ou um método generalizado para representação de teorias de ordem superior sob uma forma de primeira ordem —como apresentado em Robinson (1966)—, ou, ainda que seja considerado, também, o procedimento geral de tradução de uma teoria de primeira ordem para uma sistema lógico proposicional estendido —como o sistema *ON* de Hailperin (1997).

Considerem-se, por exemplo, as seguintes sentenças existenciais:

$(\exists_1 x)Fx \equiv_{df} (\exists x)\big(Fx \wedge (\forall y)(Fy \rightarrow y = x)\big)$,

$(\exists_2 x)Fx \equiv_{df} (\exists x)\big(Fx \wedge (\exists_1 y)(Fy \wedge y \neq x)\big)$;

---

[12] '*Carnap and logical truth*', reimpresso em Benacerraf and Putnam (1983); pp. 372-3.

em que, a primeira sentença expressa formalmente a 'existência de pelo menos um objeto', enquanto a última expressa a 'existência de pelo menos dois objetos' (que satisfazem uma dada propriedade *F*), i.e., que há um conjunto contendo pelo menos dois elementos.

Mas, de modo trivial, a segunda sentença *não* é válida pois, é *falsa* em qualquer modelo cujo domínio seja constituído por um único elemento. De modo que, a transcrição formal desta sentença para um sistema lógico proposicional do tipo *ON*, não a 'transforma' em uma verdade lógica ou tautologia.

Por outro lado, o sistema lógico de Carnap, introduzido em '*The Logical Syntax of Language*', de 1937, pode ser descrito, em linhas gerais, como uma hierarquia de linguagens formais caracterizadas pelas regras lógicas *L* (*L-rules*):

(*i*) regras dadas pela aritmética recursiva primitiva, que constituem a Linguagem I de Carnap;

(*ii*) regras definidas pela teoria de conjuntos ou por meio de uma lógica de ordem superior, que constituem a Linguagem II de Carnap.

A Linguagem II de Carnap consiste em um sistema de tipos de ordem superior sobre os números naturais, que inclui os princípios de extensionalidade, indução e escolha [veja §30 de Carnap (1937)]. Neste sistema, é possível mostrar que estes princípios são *analíticos na Linguagem II.*

De acordo com Friedman (1988),

> By relativizing the notion of logical truth, Carnap attempts to preserve this basic logicist insight in the face of all the well-known technical difficulties; ... From Hilbert (and Gödel), Carnap takes the idea that primitive recursive arithmetic constitutes a privileged and relatively neutral "core" to mathematics and, moreover, that this neutral "core" can be used as a "metalogic" for investigating ... theories. The point, however, is not to provide consistency or conservativeness proofs for classical mathematics, but merely to delimit its logical structure: *to show that the mathematical principles in question are analytic in a suitable language.* [O grifo é meu][13]

Conforme apontado por Friedman, a Linguagem I consiste em uma espécie de 'núcleo' relativamente neutro, cujas regras *L* são aquelas definidas pela aritmética recursiva primitiva, constituindo-se assim, um arcabouço teórico 'minimal' para a formulação da sintaxe lógica da linguagem-objeto.

Além disso, Friedman acrescenta que, se a Linguagem II contém todos os tipos até ω (i.e., todos os tipos finitos), a definição de *analítico na Linguagem II* será formulada, necessariamente,

[13] Veja "*Logical Truth and Analyticity in Carnap*", p. 87.

em uma metalinguagem mais forte, quantificando-se sobre conjuntos arbitrários de tipo de ordem ω. Portanto, em geral, a definição de analiticidade de Carnap para uma linguagem de qualquer ordem requer quantificação sobre conjuntos de ordem superior. Isto significa que, a extensão da noção 'analítico em *L*' para qualquer *L* depende da interpretação dos quantificadores numa *metalinguagem* mais forte [v. Carnap (1937), §34d].

Esta perspectiva logicista de Carnap entretanto, como Friedman assinala, está comprometida pelo teorema de *incompletude* de Gödel,

> For, as we have seen, Carnap's general notion of analytic-in-L is simply not definable in logical syntax so conceived, ... *Analytic-in-L* fails to be captured in what Carnap calls the "*combinatorial analysis* ... of finite, discrete serial structures" (§2): that is, primitive recursive arithmetic. Hence the very notion that supports, and is indeed essential to, Carnap's logicism simply does not occur in pure syntax as he understands it.[14]

Portanto, com respeito ao 'núcleo' básico da hierarquia de linguagens de Carnap, como a relação de conseqüência (semântica) em primeira ordem é recursivamente enumerável (*r.e.*) —i.e., existe um algoritmo para *gerar* todas as conseqüências válidas[15] da lógica de primeira ordem—, então os teoremas da aritmética recursiva primitiva (Linguagem I) não são analíticos na acepção de Carnap. Este fato, evidentemente, estende-se para a Linguagem II, pois o conjunto de —números de Gödel de— sentenças (analíticas) da teoria de números de primeira ordem *não* é um conjunto recursivo e, por conseguinte, não pode ser especificado por meio de funções recursivas primitivas.

§3. Comparação entre as duas definições de analiticidade

Cabe observar que as duas acepções de analiticidade discutidas nos §§1, 2 não são reciprocamente excludentes. A análise crítica de Quine —i.e., a análise filosófica a respeito da complexidade de identificação de definições em certas linguagens naturais (e/ou linguagens formalizadas)— mesmo que correta, não refuta a definição de analiticidade na acepção Fregeana. Analogamente, a análise crítica de Friedman é relevante para a acepção de Carnap, mas não para o enfoque de Frege —pois as verdades analíticas, de acordo com Frege, não envolvem constantes *não* lógicas. De fato, conforme esta acepção, é necessário mostrar que uma lei básica da aritmética é *derivável* de axiomas lógicos e definições, por meio de regras de inferência, e não simplesmente mostrar que essas leis básicas são verdadeiras 'em virtude dos significados dos termos contidos nessas leis'.

---

[14] *op. cit.*, p. 93.
[15] Note que, este conjunto *não* é recursivo, pois o conjunto das não-validades não é *r.e.*. Além disso, a conseqüência em primeira ordem *não* é decidível.

No entanto, a definição Fregeana, prima facie, é insuficiente para caracterizar a tese logicista (restrita) sob uma perspectiva de lógica extensional. Se um fragmento da lógica de segunda ordem inclui a aritmética formal —que é *incompleta*—, podemos considerar a verdade de uma sentença aritmética, não demonstrável no sistema formal-axiomático de Peano (em segunda ordem), como uma verdade *lógica*? Neste sentido —ou seja, considerando-se o fato de que a *conseqüência* em segunda ordem não é recursivamente enumerável— o projeto Fregeano de encontrar um sistema axiomático completo para a aritmética elementar não é realizável. Contudo, na seção II.2 do segundo capítulo, discutiremos uma (re)definição do conceito de analiticidade que serve como uma justificação filosófica para um critério geral de analiticidade de princípios contextuais em segunda ordem e, que transpõe esta limitação formal.

I.3 UM LOGICISMO NEO-FREGEANO?

Nesta seção, serão abordados: a perspectiva de um logicismo neo-Fregeano, de acordo com a proposta de Wright (1983); o Teorema de Frege —que constitui um resultado central na reavaliação do enfoque Fregeano—; e a discussão recente sobre o caráter epistêmico do princípio de Hume.

§1. A perspectiva de um logicismo neo-Fregeano

Wright (1983), Boolos (1987) e Heck (1993) mostraram que os axiomas da Aritmética de Peano em segunda ordem podem ser derivados em um sistema formal axiomático (de segunda ordem), incluindo-se apenas o princípio de Hume como axioma, *sem* a pressuposição da existência de *extensões*. Isto significa que não é necessário admitir-se a 'definição explícita' de número cardinal:

$$N_x F(x) \equiv_{df} \hat{\phi}.\mathbb{E}_x(\phi(x), F(x)),$$

onde $\mathbb{E}_x$ denota a relação de *equinumerosidade*.

Neste caso, esta definição é *substituída* pela seguinte interpretação: o símbolo de função (ou operador) N em $\mathrm{N}_x F(x)$ representa uma função totalmente definida ($\mathrm{N}F$ designa somente 'o *número* de Fs que ...'). Expresso de outra forma, $\mathrm{N}F$ é um termo que denota um objeto no domínio das variáveis (ligadas) que ocorrem na expansão da relação $\mathbb{E}$.

Como Boolos (1995) assinala, estas duas concepções de número são incompatíveis

> Two thoughts about the concept of number are incompatible: that any zero or more things have a (cardinal) number, and that any zero or more things have a number (if and) only if they are the members of some one set. It is Russell's paradox that shows the thoughts incompatible: ***the sets that are not members of themselves cannot be the members of any one set.*** The thought that any (zero or more) things have a number is Frege's; the thought that things have a number only if they are the members of a set may be Cantor's ... [O grifo é meu][16]

Esta diferenciação conceitual concernente à definição de número cardinal é essencial para a caracterização do enfoque denominado 'neo-Fregeano'.

§2. O Teorema de Frege

Neste parágrafo, apresentamos uma demonstração do 'Teorema de Frege' —i.e., *o princípio de Hume implica a infinidade da sucessão dos números naturais*— que, requer o seguinte lema:

LEMA I. *O princípio de Hume implica o segundo postulado de Peano* (AP_2). Em que,

AP_2 : *Se **n** é um número natural, então o sucessor* $s(\boldsymbol{n})$ *é um número natural unicamente determinado.*

É importante destacar que, na demonstração do Teorema de Frege, utiliza-se a propriedade denominada por Dummett (1991) de 'extensibilidade indefinida'[17] do conceito de número natural pela qual, por meio de qualquer segmento inicial da seqüência dos números naturais, caracteriza-se o próximo termo da seqüência.

Considerem-se as definições seguintes:

$0 := \natural_x [x : x \neq x]$,

$\mathrm{Suc}(x, y) \equiv_{\mathrm{df}} (\exists\phi)(\natural_w [w : \phi(w)] = y \wedge (\exists z)(\phi(z) \wedge \natural_w [w : \phi(w) \wedge w \neq z] = x))$;

$\mathrm{Suc}(x, y)$ significa que 'y é um sucessor de x'. $\natural_x$ denota o operador de cardinalidade Fregeano.

DEFINIÇÃO (*) $\qquad \mathcal{N}(x) \equiv_{\mathrm{df}} (\forall\phi)[\phi(0) \wedge (\forall x)(\forall y)(\phi(x) \wedge \mathrm{Suc}(x, y) \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \phi(x)]$;

'$\mathcal{N}(x)$' expressa formalmente, em uma linguagem de segunda ordem, que 'x é um número *natural*'.

PROPOSIÇÃO I. $\qquad \vdash (\forall x)(\forall y)[\mathcal{N}(x) \wedge \mathrm{Suc}(x, y) \rightarrow \mathcal{N}(y)]$

Demonstração:

---

[16] 'Frege's Theorem and the Peano Postulates', em *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, **3**, p.317.

[17] Veja "*Frege: Philosophy of Mathematics*", p. 317.

[1]	1. $\mathcal{N}(x)$	H.
[2]	2. $(\forall\phi)[\phi(0) \wedge (\forall x)(\forall y)(\phi(x) \wedge \mathsf{Suc}[x, y] \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \phi(x)]$	1, **Df.** (*), MP
[3]	3. $\phi(0)$	H.
[4]	4. $\mathsf{Suc}[x, y]$	H.
[5]	5. $(\forall x)(\forall y)(\phi(x) \wedge \mathsf{Suc}[x, y] \rightarrow \phi(y))$	H.
[1]	6. $\phi(0) \wedge (\forall x)(\forall y)(\phi(x) \wedge \mathsf{Suc}[x, y] \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \phi(x)$	2, $e\forall$
[1,3,5]	7. $\phi(x)$	3, 5, 6, $i\wedge$, MP
[5]	8. $(\forall y)(\phi(v) \wedge \mathsf{Suc}[v, y] \rightarrow \phi(y))$	5, $e\forall$
[5]	9. $\phi(v) \wedge \mathsf{Suc}[v, w] \rightarrow \phi(w)$	8, $e\forall$
[1,3,4,5]	10. $\phi(y)$	4, 7, 9, $i\wedge$, MP
[1]	11. $\phi(0) \wedge (\forall y)(\forall z)(\phi(y) \wedge \mathsf{Suc}[y, z] \rightarrow \phi(z)) \rightarrow \phi(y)$	3, 4, 5, eH, $i\rightarrow$
[1]	12. $(\forall\phi)[11]$	11, $i\forall$
[1]	13. $\mathcal{N}(y)$	12, **Df.** (*), MP
	14. $\mathcal{N}(x) \wedge \mathsf{Suc}[x, y] \rightarrow \mathcal{N}(y)$	1, 13, eH, $i\rightarrow$
	15. $(\forall x)(\forall y)[\mathcal{N}(x) \wedge \mathsf{Suc}[x, y] \rightarrow \mathcal{N}(y)]$	14, $i\forall$ □

PROPOSIÇÃO I.1. $\vdash \mathsf{Suc}[n, m] \wedge \mathsf{Suc}[n, k] \rightarrow m = k$

Demonstração. Suponha que existam conceitos $\varphi(x)$, $\psi(x)$ tais que $m = \mathrm{N}_x[x : \varphi(x)]$, $k = \mathrm{N}_x[x : \psi(x)]$ e, que existam elementos c e c' tais que

$\varphi(c)$ e $n = \mathrm{N}_x[x : \varphi(x) \wedge x \neq c]$,

$\psi(c')$ e $n = \mathrm{N}_x[x : \psi(x) \wedge x \neq c']$.

Então, $\mathrm{N}_x[x : \varphi(x) \wedge x \neq c] = \mathrm{N}_x[x : \psi(x) \wedge x \neq c']$;

por conseguinte, via *princípio* de *Hume*, existe uma relação funcional $\mathcal{E}(x, y)$, que consiste em uma correspondência 1-1 entre $[x: \varphi(x) \wedge x \neq c]$ e $[x: \psi(x) \wedge x \neq c']$.

Portanto, tomando-se $\mathcal{E}^*(x, y) \equiv_{df} \mathcal{E}(x, y) \vee (x = c \wedge y = c')$, segue-se que $\mathcal{E}^*(x, y)$ será uma correspondência 1-1 entre os conceitos φ e ψ, i.e., $m = k$. □

DEFINIÇÃO 1. Seja F um conceito qualquer. Então, expressam-se mediante quantificadores numericamente definidos:

$$(\exists_0 x)\mathsf{F}x \equiv_{df} \neg(\exists x)\mathsf{F}x,$$

$$(\exists_{n+1} x)\mathsf{F}x \equiv_{df} (\exists x)\big(\mathsf{F}x \wedge (\exists_n y)(\mathsf{F}x \wedge y \neq x)\big).$$

PROPOSIÇÃO II. *A sucessão dos números naturais é infinita.*

Demonstração. Suponha o contrário, que a sucessão dos números naturais é finita e limitada por n termos. Como, pelas Prop^s. I, I.1, n tem um sucessor unicamente determinado:

$$\mathsf{Suc}(n,m) \equiv_{df} (\exists\varphi)\big(\mathsf{N}_v[v\colon \varphi(v)] = m \wedge (\exists z)\big(\varphi(z) \wedge \mathsf{N}_v[v\colon \varphi(v) \wedge v \neq z] = n\big)\big),$$

segue-se que, via Def. 1,

$$(\forall\varphi)\Big((\exists_m x)\varphi(x) \to (\exists x)\big(\varphi(x) \wedge (\exists_n y)(\varphi(y) \wedge y \neq x)\big)\Big).$$

Portanto, dado um conceito φ, infere-se que $(\exists x)\big(\varphi(x) \wedge (\exists_n y)(\varphi(y) \wedge y \neq x)\big)$, i.e., existem pelo menos m termos (distintos) com $m \geq n+1$; o que contradiz a hipótese. □

§3. Os fragmentos consistentes do sistema lógico de Frege

Terence Parsons (1987) mostrou que o fragmento de primeira ordem das *Grundgesetze* —um conjunto completo de axiomas e regras de inferência para o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade, expresso no sistema Fregeano, acrescido do princípio de 'abstração' [lei V]— é consistente. Isto significa que, no âmbito da lógica de primeira ordem, ao invés de admitir que qualquer fórmula determina um conjunto (que satisfaz essa fórmula), verifica-se apenas que *fórmulas co-extensivas determinam o mesmo curso de valores.*[18]

Dummett (1991) apresenta o seguinte *modelo* ($\mathfrak{M}$) para o fragmento de primeira ordem[19]:

---

[18] Note que, a noção de *curso de valores* é uma generalização da noção de extensão de conceito para funções arbitrárias [v. **apêndice** do Cap. I].

[19] "Let $\mathbf{D}_0$ consist of the two truth-values together with the natural numbers. For any n, let $\mathbf{D}_{n+1}$ be the union of $\mathbf{D}_n$ with the set of all its finite and cofinite subsets. The domain $\mathbf{D}$ is then to consist of every member of any of the sets $\mathbf{D}_n$, for any finite n. In the resulting model, a natural number k, considered as an element of $\mathbf{D}$ (or a member of the transitive closure of an element of $\mathbf{D}$), is to be identified with the set of all subsets of $\mathbf{D}$ having exactly k members. It will be found that $\mathbf{D}$ contains all value-ranges definable by means of the limited vocabulary." [v. *Frege*: *Philosophy of Mathematics*, p. 219]

seja $\mathbb{D}_0 = \mathbb{N} \cup \{\top, \bot\}$, onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais. Definimos de modo recursivo:

$\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_0 \cup \wp_0^*(\mathbb{D}_0) \cup \mathfrak{D}_0$,

...

$\mathbb{D}_{n+1} = \mathbb{D}_n \cup \wp_n^*(\mathbb{D}_n) \cup \mathfrak{D}_n$;

onde: $\wp_n^*(\mathbb{D}_n) := \{X : X \in \wp(\mathbb{D}_n) \wedge \mathrm{Card}(X) = n+1\}$, com $n = 0, 1, \ldots$;

$\mathfrak{D}_n = \{\mathbb{D}_n' \subseteq \mathbb{D}_n : \mathbb{D}_n - \mathbb{D}_n' \text{ é finito}\}$

Então, o domínio de $\mathfrak{N}$ será definido por: $\mathbf{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{D}_n$.

Portanto, se $k \in \mathbf{D}$ (ou $k \in \mathcal{F}_t(X)$ e $X \in \mathbf{D}$, onde $\mathcal{F}_t(X)$ é o fecho transitivo[20] do conjunto X) então, $k := \{K : K \subsetneqq \mathbf{D} \wedge \mathrm{Card}(K) = k\}$, i.e., cada número natural $k \geq 1$ é interpretado como o conjunto de todos os subconjuntos K de $\mathbf{D}$ tendo exatamente k elementos.

Quanto ao fragmento de segunda ordem dos *Grundlagen*, Boolos (1987) provou a consistência de uma formalização *FA* desse fragmento —tomando-se o 'princípio de Hume' em lugar da Lei V—, por meio da construção de um modelo $\mathfrak{M}$, cujo domínio U consiste no conjunto $\{0, 1, \ldots \aleph_0\}$. Modelo no qual, o domínio das variáveis de *conceito* é o conjunto de todos os subconjuntos de U, e o domínio das variáveis de *relação* binárias (ou n-árias) é o conjunto de todas as relações binárias (ou n-árias) de U, i.e., o conjunto de conjuntos de pares ordenados (ou n-uplas) de elementos de U.

Temos, via de regra, para cada $n \geq 1$, $\Gamma^{(n)} = \{X_0^n, \ldots X_k^n, \ldots\}$, i.e., o conjunto das variáveis de segunda ordem n-ádicas. Assim, definimos a seguinte *interpretação s* como:

$$\bigcup_{n\geq 1} \Gamma^{(n)} \xrightarrow{s} \wp(U^n), \qquad s(X_k^n) = S_k^n \in \wp(U^n) \qquad (n \geq 1).$$

Seja $\mathrm{Card}(X) \equiv_{df}$ 'o número de elementos do conjunto X'. E, seja f uma interpretação[21] do operador numérico N em $\mathfrak{M}$. Então, o domínio de U tem a seguinte propriedade:

[20] Dado um conjunto C, o *fecho transitivo* de C é o menor conjunto transitivo (com respeito a $\subseteq$) que contém C.

para todo $X \subseteq U$, Card(X)$\in U$; assim, definimos $\begin{matrix} \wp(U) \xrightarrow{f} U \\ X \mapsto \text{Card}(X) \end{matrix}$.

$\mathfrak{M}$ é um modelo para o princípio de Hume[22]. Com efeito, seja uma interpretação s tal que:

(i) $\mathfrak{M} \models \text{N}F = \text{N}G \quad \Leftrightarrow \quad \text{Card}(s(F)) = \text{Card}(s(G))$;

(ii) $\mathfrak{M} \models \text{Eq}(F,G) \quad \Leftrightarrow \quad \approx (s(F), s(G))$, onde '$\approx$' denota uma correspondência 1-1.

Logo, como $\text{Card}(s(F)) = \text{Card}(s(G)) \leftrightarrow \approx (s(F), s(G))$ segue-se que, para toda interpretação s:

$$\mathfrak{M} \models (\text{N}F = \text{N}G \leftrightarrow \text{Eq}(F,G)).$$

Além disso, Boolos[23] mostrou que ***FA*** é *equiconsistente* com a 'aritmética de segunda ordem' (ou *analysis*).

Com relação ao fragmento (de segunda ordem) do sistema das *Grundgesetze*, Dummett (1991) observa que a inconsistência desse sistema não decorre do Axioma V *per se*, mas da maneira inadequada de introduzir a quantificação de segunda ordem, via operador de abstração. Pois, identificando-se conjuntos com extensões de conceitos e tratando-os como indivíduos sobre um mesmo domínio, resulta em uma ampliação desse domínio original. De acordo com Dummett

> [I]t may be seen as making an inconsistent demand on the size of the domain D, namely that, where D comprises n objects, we should have $n^n \leq n$, which holds only for $n = 1$, whereas we must have $n \geq 2$, since the two truth-values are distinct: for there must be n^n extensionally non-equivalent functions of one argument, and hence n^n distinct value-ranges. But this assumes that the *function-variables range over the entire classical totality of functions from D into D*, [o grifo é meu] ... [notwithstanding] his function-variables ... [range] only over those functions that could be referred to by functional

[21] "To complete the definition of $\mathfrak{M}$, we must define the function f by which the function sign N is to be interpreted in $\mathfrak{M}$. The *cardinality* of a set is the number of members it contains. U has the following important property: *The cardinality of every subset of U is a member of U.* ... Thus we may define f as the function whose value for every subset V of U is the cardinality of V."[v. 'The Consistency of *Foundations*', em Demopoulos (1995), pp. 216-17.

[22] "Observe that an assignment s of appropriate items to variables satisfies $NF = NG$ in $\mathfrak{M}$ if and only if the cardinality of $s(F)$ equals the cardinality of $s(G)$ and satisfies Feq$G$ in $\mathfrak{M}$ if any only if $s(F)$ can be put into one-one correspondence with $s(G)$. Since the cardinality of $s(F)$ is the same as that of $s(G)$ if and only if $s(F)$ can be put into one-one correspondence with $s(G)$, every assignment satisfies ($NF = NG \leftrightarrow FeqG$) in $\mathfrak{M}$, and $\mathfrak{M}$ is a model for Hume's principle." [*op. cit.*, p. 217].

[23] *op. cit.*, p. 220.

expressions of his symbolism (and thus over a denumerable totality of functions), and of the domain D of objects as comprising value-ranges only of such functions.[24]

Expresso sob outra forma, existem mais conceitos do que objetos, o que contradiz um axioma fundamental das *Grundgesetze*, de acordo com o qual para cada conceito, cuja definição é formalizável na linguagem desse sistema, existe uma única extensão. No sistema lógico de Frege, há apenas um *único* universo constituído por todas as coisas que existem, e este universo é fixo. Em conseqüência, as funções (e, em particular, os conceitos) são definidos para todos os objetos, i.e., as variáveis (de primeira ordem) percorrem todos os objetos do universo.

§4. O status epistemológico do princípio de Hume

Consideramos, neste parágrafo, os principais argumentos e contra-argumentos acerca do caráter lógico do princípio de Hume.

De acordo com Wright (1983)

> The most immediate question is whether its right-hand side utilises only logical notions, that is, whether the relation of 1-1 correlation among concepts is a purely logical relation. We can answer affirmatively provided that we are content that *any notion is purely logical which we can express using only the usual truth-functional propositional connectives, identity, and both first- and higher-order quantification*; ... [o grifo é meu].
>
> $N^=$ was originally presented as a *definition*; ... The point is simply that the 'definition' does not everywhere provide the means for translating statements of numerical identity into statements involving *no* specifically arithmetical concepts. The reason why not is the point of analogy between $N^=$ and Axiom V ... [that] utilise an equivalence relation whose field is not objects but *concepts*.[25]

Segundo Wright, é possível reformular o projeto logicista de fundamentação da Aritmética a partir dos *Grundlagen* de Frege, admitindo-se o princípio de Hume como *axioma* (em substituição à *lei básica* (V) das *Grundgesetze* de Frege). Em outros termos, podemos considerar a lógica de segunda ordem acrescida de um princípio de abstração para números —estabelecendo a existência de números cardinais (no sentido do operador $\aleph_x$ de Frege) como abstrações com respeito à relação de equinumerosidade—, ao invés do axioma de compreensão Fregeano (que estabelece a existência de classes como extensões de conceitos). Wright afirma:

---

[24] "*Frege: Philosophy of Mathematics*", pp. 219-20.
[25] '*Frege's Conception of Numbers as Objects*', pp. 132-35.

> [T]here *is* a programme for the foundations of number theory recoverable from *Grundlagen*. The programme is a logicist platonism, which may be characterised, in preference to the rubric of *number-theoretic logicism* ... it is possible, using the concepts of higher-order logic with identity, to explain a genuinely sortal notion of cardinal number; and hence to deduce appropriate statements of the fundamental truths of number-theory, in particular the Peano Axioms, in an appropriate system of higher-order logic with identity to which a statement of that explanation [i.e., $N^=$] has been added as an *axiom*. [O grifo é meu]
>
> Naturally, even without recourse to 'naive' extensions, or classes, there must be concern about the possibility of carrying through this enterprise without inconsistency.[26]

De acordo com Wright, o 'logicismo teórico-numérico' é uma transcrição definicional de $N^=$ (i.e., o princípio de Hume), independentemente da linguagem formal, de ordem superior, utilizada para expressar tal verdade *lógica*. Wright assinala que $N^=$ consiste simplesmente em um princípio de abstração que fixa as condições de verdade de sentenças relativas a números. Além disso, Wright mostrou que $N^=$ permite derivar um princípio de abstração *naïve* para números —i.e., o princípio $(\forall F)(\exists y)(y = \aleph\, x{:}Fx)$— que não conduz a nenhuma contradição. Permitindo-se, por conseguinte, o método contextual de introdução do operador de cardinalidade $\aleph$.

No entanto, como apontado por Burgess (1984), as mesmas razões justificativas para admissão da hipótese de existência de números aplicam-se com relação à existência de abstrações em geral.

A hipótese de Wright, relativa ao fato de que $N^=$ fixa de maneira inequívoca a referência dos termos numéricos e pode ser considerado como um procedimento geral para assegurar as condições de verdade aos termos abstratos, requer uma justificativa metalógica. Visto que, de modo análogo, esse princípio contextual foi introduzido por meio do operador de abstração $\grave{\varepsilon}$, nas *Grundgesetze*, via Lei V.

Em conseqüência, $N^=$ não pode ser utilizado como um critério de caráter universal para a atribuição de referência a termos abstratos. Segundo Dummett[27] (1991), faz-se necessário justificar porque esse princípio contextual, com respeito ao operador de cardinalidade $\aleph$, não conduz a nenhuma contradição, enquanto no caso do operador de abstração essa estratégia resulta na antinomia de Russell.

---

[26] *op. cit.*, pp. 153-54.
[27] '*Frege: Philosophy of Mathematics*', pp. 180-99.

Além disso, o *critério* que Wright apresenta, no excerto acima, não é suficientemente forte para justificar, em termos epistemológicos, que $N^=$ reduz-se a uma sentença *analítica*. Pois, $N^=$ é satisfatível somente em domínios *infinitos*.

Apresento em seguida, o contra-argumento de Boolos (1987) concernente à análise lógica de $N^=$

> As a result of the discovery of Russell's paradox our idea of logical truth has changed drastically, ... [28]

Boolos provavelmente refere-se ao fato de que, em geral, o princípio de abstração (*irrestrito*) '$x \in X \Leftrightarrow \mathfrak{P}(x)$' associado à sentença (fechada) da forma '$\exists x(\mathfrak{P}x \vee \neg\mathfrak{P}x)$' —verdadeira em *todo* domínio não-vazio— conduz a uma contradição. Logo, não pode ser mantido como um princípio (logicamente) válido. Não obstante, este fato não compromete o projeto logicista quanto à derivação dos axiomas de Peano. Por outro lado, o principal aspecto a ser considerado é acerca da demonstração da existência de um conjunto infinito de objetos, com base em princípios estritamente lógicos. Boolos acrescenta que,

> [A]nd we now see arithmetic's commitment to the existence of infinitely many objects as a greater difficulty for logicism than Russell's paradox itself.

De acordo com Boolos, *Numbers*[29] não pode ser considerado como um princípio lógico. A principal crítica de Boolos refere-se ao fato de que, em ***FA*** não se dispõe de nenhum *critério formal* para distinguir 'Numbers' da sentença 'SuperRussell' [$\exists x \forall G(G\eta x \leftrightarrow \exists y(Gy \wedge \neg G\eta y))$] e da 'Lei (V)' [$\forall F \exists! x \forall G(G\eta x \leftrightarrow \forall y(Fy \leftrightarrow Gy))$], no que tange ao caráter lógico. Visto que, estas últimas sentenças (relativas à existência de extensões) são formalizáveis na linguagem de ***FA***; por

[28] '*The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic*' (*FA*), em Demopoulos (1995), p. 228.

[29] 'The sole nonlogical symbol of the language of *FA* [*Foundations of Arithmetic*] is η, a two-place predicate letter attaching to a concept variable and an object variable. (η ... may be read "is in the extension" ...).

The sole (nonlogical) axiom of the system *FA* is the single sentence

Numbers: $\forall F \exists! x \forall G(G\eta x \leftrightarrow FeqG)$,

where *FeqG* is the obvious formula of the language of *FA* expressing the equinumerosity of the values of *F* and *G*, viz.

$$\exists\varphi[\forall y(Fy \rightarrow \exists! z(y\varphi z \wedge Gz)) \wedge \forall z(Gz \rightarrow \exists! y(y\varphi z \wedge Fy))].$$

Here the sign η is used for the relation that holds between a concept *G* and the extension of a (higher level) concept under which *G* falls.' [*op. cit.*, p. 214] conseguinte, não é possível manter que todo conceito determina uma extensão. De acordo com Boolos

> Frege *must deny that SuperRussell and Rule (V) are principles of logic – if he maintains that comprehension axioms are principles of logic. ...* But then Frege cannot maintain both that every predicate of concepts determines a higher level concept and that every higher level concept determines an extension and would thus appear *to be deprived of any way at all to distinguish Numbers from SuperRussell and Rule (V) as a principle of logic.* [O grifo é meu][30]

Admitindo-se, uma distinção entre a noção de verdade lógica e a verdade expressa numa linguagem formalizada, de um sistema lógico, Boolos (1990) acrescenta a explicação seguinte

> Even if the objection that the expression "is in" is not a logical "constant" is waived, this principle [*Numbers* sentence] cannot be held to be a logical principle for a reason we shall consider at length: *it commits us to the existence of too many objects.* Here we should note that a truth's being couched in purely logical terms is not sufficient for it to count as truth *of* logic, a logical truth, a truth that is true solely in virtue of logic. *A distinction must be drawn between truths of logic and truths expressed in the language of logic.* [O grifo é meu] [31]

Posto isto, considerem-se os aspectos seguintes:

1°. A 'lei básica' V das *Grundgesetze* é verdadeira num modelo de primeira ordem [v. T. Parsons (1987)]. Além disso, também é verdadeira num modelo para o fragmento *predicativo* monádico de segunda ordem das *Grundgesetze*.

2°. A 'antinomia de Russell' é derivável por meio do Axioma V num sistema lógico de segunda ordem *total*, i.e., que admite quantificação sobre conjuntos arbitrários.

O primeiro resultado tem como conseqüência que: a 'forma lógica' da lei básica V *não* acarreta nenhuma contradição em *primeira ordem*, bem como no fragmento predicativo de segunda ordem. Ao passo que, o segundo aspecto depende do fato de que esse sistema lógico requer uma interpretação *standard*.

Desse modo, como a 'forma lógica' da lei básica V não é exclusivamente o aspecto responsável pela derivação da antinomia, resulta que, um análogo formal dessa lei —um princípio

---

[30] *op. cit.* p. 230.
[31] '*The Standard of Equality of Numbers*' em Demopoulos (1995), pp. 245-46.

de abstração [v. *definição contextual*, Cap. I, sec. I.1]— prima facie, é examinável quanto à *analiticidade*, independentemente dessa similaridade estrutural.

Entretanto, o 'busílis' da questão está no fato de que o princípio de Hume somente admite um modelo *infinito*, i.e., este princípio é verdadeiro, somente se existir uma quantidade infinita de objetos. Esta pré-condição parece incompatível com a caracterização de uma lei lógica cuja verdade é independente do número de objetos existentes, conforme assinalado por Boolos nos excertos acima.

Considero que o problema principal para a fundamentação lógica da aritmética elementar, de acordo com o enfoque neo-Fregeano, concerne à demonstração de *analiticidade* do princípio de Hume. Por conseguinte, uma resposta afirmativa a esta questão assegura evidentemente o caráter de verdade lógica deste princípio. Este problema é independente de um outro problema epistemológico viz., a *indeterminação* da *referência* de $\aleph_x F(x)$, i.e., a formulação de um *critério geral* de identidade para os números cardinais, mediante o qual seja possível determinar o valor de verdade de qualquer enunciado numérico da forma '$\aleph_x F(x) = n$'.

APÊNDICE DO CAPÍTULO I

Sobre as noções de curso de valores e extensão de conceitos

As noções Fregeanas de curso de valores e extensão constituem duas noções básicas para a análise do conceito de número no sistema lógico Fregeano. Nos *Grundlagen*, Frege propôs que os números naturais sejam identificados com extensões de conceitos. Posteriormente (em 1891), foi introduzida a noção de curso de valores de uma função, de forma que curso de valores é uma generalização da extensão de um conceito.

Em seu ensaio de 1891, *Function und Begriff*, Frege define uma *função* como uma regra que, em geral, transforma objetos, outras funções (saturadas), conjuntos de objetos, etc., em objetos; sendo representada por meio de uma expressão incompleta (ou insaturada) que pode ter um ou vários argumentos.

Um *conceito* consiste numa função que tem como resultado específico um valor-verdade, p. ex.: '$\xi^2 = 1$' (expressa o conceito raiz quadrada de 1) que, tem como valor-verdade **V** para os argumentos: $\xi = -1$, ou $\xi = 1$; e valor-verdade **F** para quaisquer outros argumentos. Observe que, para Frege, um *predicado* representa a forma lingüística de um conceito.

Seja $D \xrightarrow{f} D$ uma função. Podemos dizer, utilizando-se uma terminologia atual, que 'curso de valores' de uma função expressa de fato, o *gráfico* de uma função, i.e., o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $D \times D$, definido por $G(f) := \{\langle x, f(x)\rangle : x \in D\}$.

Em particular, $G(f) := \{\langle x, y\rangle \in D \times \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\} : y = f(x)\}$, onde f denota um conceito, expressa formalmente a *extensão* de um conceito.

Assim, p. ex., se $\{\langle \alpha_0, f(\alpha_0)\rangle, \langle \alpha_1, f(\alpha_1)\rangle, ...\}$ representa o curso de valores de f então, $\{\langle \alpha_0, \mathrm{V}\rangle, \langle \alpha_1, \mathrm{V}\rangle, ...\}$ denota a extensão de um conceito obtido por meio da função f definida anteriormente, para uma dada enumeração $\alpha_i \in D$, (i = 0, 1, . . .).

Decorre da definição de igualdade entre funções que: duas funções são *iguais* se, e só se, têm o mesmo *gráfico*. Logo, a igualdade '$\hat{\varepsilon}.f(\varepsilon) = \hat{\varepsilon}.g(\varepsilon)$' equivale logicamente a $G(f) = G(g)$.

A interpretação usual da noção de curso de valores (e extensão de conceito), segundo um enfoque estritamente extensional, como gráfico de uma função, é compatível com a posição Fregeana. Não obstante, conforme destacado por Burge (1984) na seguinte nota de rodapé[32]

> Frege provides an intuitive means of representing courses of values in terms of geometrical graphs, where the argument of the function is the numerical value of the abscissa and the value is the numerical value of the ordinate. (*G & B* 25/*GGA*, I, 129). ... We are then quite ready to explicate this notion of a graph in set-theoretic terms — as a set of ordered couples, where the members of the couples are the arguments and values of the function. This explication is, however, seriously at odds with Frege's own standpoint. The problem is not merely that Frege's notion of the course-of-values of a predicate lacks any limitations on the objects that can form members of the ordered couples. ... Rather, the point is that the particular limitations imposed by the dominant, iterative conception of sets are very unFregean. Frege *conceived courses-of-values as being projections from predication, not constructions from elements* (cf. section III). ... From his point of view, a course-of-values falling in its own extension is no more peculiar than a predicate's applying to itself. By contrast, a set's belonging to itself is ruled out from the outset by the iterative conception. Another way to put the point is that *Frege's extensions of concepts violate the axiom of foundation.* In fact, if the extensions of concepts are conceived as sets of ordered couples, not a single extension of a concept is well-founded in either the argument or the value position of the ordered couples. From the perspective of the iterative conception of set, this is tantamount, I think, to saying that *courses of values are not sets at all.* [O grifo é meu]
>
> There are, to be sure, set theories, often called 'deviant', that violate the axiom of foundation. But I find it doubtful whether any of these provides an intuitively satisfying reconstruction of Frege's notion of courses of values ... The *lambda calculus provides some explication of a Frege-like conception of function and concept* ... But current model-theoretic interpretations of the lambda calculus do not seem to me to be illuminatingly interpreted as reconstructing Frege's notion of the extension of a concept. [O grifo é meu]

Acrescento as seguintes observações a este excerto de Burge:

Observação 1: o axioma citado acima (i.e., o *axioma da regularidade*) estabelece que: todo conjunto não-vazio x contém um elemento y tal que $x \cap y = \emptyset$. Este axioma é suficiente para excluir o fenômeno seguinte: a possibilidade de um conjunto $x \in x$, ou mais geralmente, uma coleção de n conjuntos $x_1, \ldots x_n$ tais que $x_1 \in x_n$, $x_n \in x_{n-1}$, . . . $x_2 \in x_1$ — a existência de tais coleções

[32] 'Frege on Extensions of Concepts, from 1884 to 1903', *The Philosophical Review*, xciii, 1; pp. 31-2.

(ou de uma seqüência de descenso infinito de conjuntos, i.e., $x_{i+1} \in x_i$ para $i = 1, 2, ...$) é *consistente* com uma teoria que tenha os outros axiomas da teoria **ZF**.

Observação 2: no que se refere à utilização do *λ–calculus* para uma explicação dessas noções básicas, como foi assinalado por Aczel (1980), o sistema axiomático das *Grundgesetze* contém essencialmente o λ–calculus[33].

Segundo Frege, objetos 'caem sob' conceitos, não obstante, *todas* as extensões de conceitos (e.g., *números*) são de fato 'objetos'. Frege estabelece uma diferenciação de funções de acordo com o que se denomina de *níveis* de funções:

(i) funções de *primeiro nível*: funções cujos argumentos são objetos (ou argumentos de tipo 1); uma função de primeiro nível cujo valor para todo objeto (como argumento) é um valor-verdade, consiste num *conceito* de *primeiro nível*. Uma função de primeiro nível de dois argumentos cujo valor é um valor-verdade é uma *relação* de *primeiro nível*.

(ii) funções de *segundo nível*: funções cujos argumentos são funções saturadas (ou completas) de primeiro nível; analogamente, temos conceitos de segundo nível, i.e., se o resultado da função de primeiro nível (que constitui o argumento) é invariavelmente um valor-verdade. Por exemplo, o quantificador universal denota um conceito de segundo nível, cujo valor-verdade é **V** somente se, o argumento é um conceito de primeiro nível que tem o valor-verdade **V** para todo argumento (i.e., sob o qual todo objeto cai).

(iii) funções de nível n são construídas a partir de funções de nível $n - 1$, pela iteração do procedimento: o argumento de uma função de nível n é uma função *saturada* de nível $n - 1$ (para $n = 2, 3, . . .$).

---

[33] 'Frege structures and the notions of proposition, truth and set', em: Barwise (Ed.) *The Kleene Symposium* (1980), pp. 31-60.

CAPÍTULO II

Neste capítulo, em primeiro lugar, apresentam-se as razões justificativas para a *re*definição de analiticidade de uma sentença, expressável em uma linguagem de ordem superior, que —sob um aspecto estritamente técnico—, transpõe a limitação formal determinada pelo (meta)teorema de incompletude da aritmética. Em seguida, discute-se a possibilidade teórica de um problema filosófico essencial para a fundamentação da aritmética elementar. E, finalmente, demonstram-se os axiomas da Teoria Geral de Conjuntos, considerando-se a base axiomático-definicional introduzida nos **Prolegômenos** desta tese.

De um modo geral, o *logicismo* (ou o programa logicista de fundamentação da matemática) é caracterizado pela redução lógica da *teoria geral das estruturas* —i.e., a teoria das estruturas fundamentais da matemática: estruturas algébricas, estruturas topológicas e estruturas de ordem— à lógica de ordem superior acrescida da teoria de *propriedades* (ou de conjuntos), propriedades de propriedades, e assim sucessivamente. Por conseguinte, se a teoria geral de conjuntos (ou de propriedades) é incluída como 'parte' da lógica de ordem superior, então a matemática reduz-se à lógica.

Sob um aspecto filosófico mais restritivo, concernente à tese logicista, esse enfoque consiste na redução da *aritmética* elementar (ou Aritmética de Peano (**AP**)) a princípios estritamente lógicos (definições e axiomas lógicos). Não obstante, cabe observar que a aritmética de Peano é *equivalente* à teoria dos *conjuntos finitos*[1] —i.e., a teoria obtida mediante a exclusão do Axioma do Infinito da teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel (**ZF**)— isto significa que, a redutibilidade lógica de **AP** pressupõe que os números naturais (ou conjuntos finitos) pertençam à categoria dos objetos lógicos. Por conseguinte, podemos desenvolver uma teoria dos números naturais e demonstrar todos os axiomas de **AP** *sem* recorrer a qualquer axioma de *infinidade*[2].

Um método para demonstração de todas as propriedades básicas dos números naturais, sem um axioma explícito de infinidade, encontra-se em Bernays (1968) [v. Cap.^s II, III e IV].

A tese logicista (restrita) será decomposta, para efeito de análise, em duas partes:

---

[1] Veja o **apêndice** (A) deste capítulo.

[2] Zermelo (1909) foi o primeiro a reconhecer que a aritmética elementar pode ser desenvolvida *sem* um axioma do infinito.

1ª. Os *conceitos* básicos da aritmética podem ser definidos em termos de noções lógicas, ou, expresso de outra forma, a aritmética elementar trata exclusivamente de conceitos definíveis por meio de noções lógicas.
2ª. Os *axiomas* da aritmética podem ser derivados de axiomas lógicos por intermédio de regras de inferência de dedução natural, ou, posto sob outros termos, os postulados de $\mathbf{AP}^{(2)}$ são dedutíveis formalmente de um número reduzido de princípios lógicos.

Assim, o arcabouço teórico desta tese, apresentado neste capítulo, caracteriza-se por duas linhas diretrizes: de uma parte, a análise dos conceitos básicos da aritmética; de outra parte, a demonstração dos axiomas da Teoria Geral de Conjuntos e, por conseguinte, a derivação de $\mathbf{AP}^{(2)}$.

II.1 ANÁLISE DOS CONCEITOS BÁSICOS DA ARITMÉTICA

O primeiro ponto acerca da derivação dos conceitos fundamentais da aritmética é estabelecido — considerando-se um *vocabulário* lógico e, mediante, *definições explícitas* formalizáveis na linguagem $\mathfrak{L}$—, com base nos *pressupostos lógico-filosóficos* desta tese, no *critério* de Tarski e, nas *definições principais* de $\mathfrak{L}$ [v. **Prolegômenos**, secs. I e II].

§1. Definição de número cardinal por meio de categorias lógicas

Considere-se inicialmente, uma (*re*)definição[3] de um *sistema-*λ restrito às funções-conceito.

DEFINIÇÃO 1.0. Seja uma seqüência de famílias $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots$ onde $\mathfrak{F}_0$ é uma classe de *objetos* (indivíduos, conjuntos, etc.) *com respeito à* seqüência $\mathfrak{F}$. Se $\mathfrak{F}_n$ (para $n = 1, 2, \ldots$) é uma classe de funções n-árias de $\mathfrak{F}_0$ (denominadas de $\mathfrak{F}$*-funções* n-árias), então $\mathfrak{F}$ é *explicitamente fechada* se, e só se, todas as funções constantes e funções-projeção sobre $\mathfrak{F}_0$ são $\mathfrak{F}$-funções e as $\mathfrak{F}$-funções são fechadas sob composição.

DEFINIÇÃO 1.1. Um sistema-λ (para uma família explicitamente fechada $\mathfrak{F}$) é constituído por dois $\mathfrak{F}$-funcionais: $\lambda:\mathfrak{F}_1 \to \Omega$ e $\Omega \times \mathfrak{F}_0 \xrightarrow{\Gamma} \Omega$, onde $\Omega = \{V^\circ, F^\circ\}$,

tais que $\Gamma(\lambda x.\hbar_\phi(x), c) = \hbar_\phi(c)$ para todas as funções-conceito (unárias) $\hbar_\phi$ em $\mathfrak{F}_1$ e c em $\mathfrak{F}_0$.

[3] Veja Aczel (1980), pp. 38.

Dado um domínio $X \neq \varnothing$ de objetos e, para cada *fbf* φ de $\mathfrak{L}$ existe uma (única) função-conceito f_φ definida em X [pelo esquema de compreensão e pela definição de f_φ] tal que, $\Gamma(\lambda x.f_\varphi x, c) = f_\varphi(c) = \upsilon$, onde $\upsilon \in \{\mathsf{V}^\circ, \mathsf{F}^\circ\}$.

Considerem-se as definições seguintes:

DEFINIÇÃO 1.2. Dados os conjuntos X, Y, dizemos que X e Y são *equinuméricos* (denotando-se por $\approx(X, Y)$) se, e somente se,

$$(\exists \mathrm{E})\begin{pmatrix}(\forall x)(X(x) \to (\exists y)(\mathrm{E}(x,y) \wedge Y(y))) \wedge (\forall y)(Y(y) \to (\exists x)(\mathrm{E}(x,y) \wedge X(x))) \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mathrm{E}(x,z) \wedge \mathrm{E}(y,z) \to x = y)\end{pmatrix}.$$

onde E é uma relação *funcional*.

DEFINIÇÃO 1.3. O operador de *cardinalidade* denotado por '$\mathfrak{K}$' é definido por

$$\mathfrak{K}(X){:=}\lambda Y.\hbar_{\approx}(X, Y),$$

onde $2^{X_1} \times 2^{X_2} \xrightarrow{\hbar_{\approx}} \Omega$ é uma função-conceito induzida por E (na *Df.* 1.2), com $X_1 \neq \varnothing$ e $X_2 \neq \varnothing$.

O *número cardinal* $\mathfrak{K}(X)$, do conjunto X, pode ser interpretado como uma classe de equivalência com respeito ao produto cartesiano $2^{X_1} \times 2^{X_2}$, i.e., como o conjunto $\{Y{:}\hbar_{\approx}(X,Y) = \mathsf{V}^\circ\}$, no qual, $\hbar_{\approx}(X,Y) = \upsilon \leftrightarrow \approx(X, Y)$, onde $\upsilon \in \Omega$.

Com base nesta definição de número cardinal, podemos definir explicitamente, por exemplo, os números cardinais (finitos) zero, um e dois. De fato,

$0 := \{\varnothing\}$, i.e., $\quad 0 := \mathfrak{K}(\varnothing) = \mathfrak{K}_x[x : x \neq x]$,

em outros termos, 0 é o conjunto de todos os conjuntos que não têm elementos;

$1 := \{X : (\exists x)(Xx \wedge (\forall y)(Xy \to x = y))\} \equiv \{X : (\exists_1 x)Xx\}$,

i.e., 1 é o conjunto de todos os conjuntos unitários ou, de modo equivalente,

$1 := \{X : \approx(X, \{\varnothing\})\} = \mathfrak{K}(\{\varnothing\})$.

Procedendo-se de modo similar, definimos:

$$2 := \{X : (\exists x)(\exists y)(Xx \wedge Xy \wedge x \neq y \wedge (\forall z)(Xz \to (z = x \vee z = y)))\} =$$

$$\{X : (\exists x)(Xx \wedge (\exists_1 y)(Xy \wedge y \neq x))\} = \{X : (\exists_2 x)Xx\},$$

i.e., 2 é o conjunto de todos os conjuntos binários ou, de maneira equivalente,

$$2 := \{X : \approx(X, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})\} = \mathfrak{K}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}).$$

Em geral,

$$n+1 := \{X : (\exists x)(Xx \wedge (\exists_n y)(Xy \wedge y \neq x))\} = \{X : (\exists_{n+1} x) Xx\}.$$

Assim, pela DEF. 1.3, podemos definir todos os cardinais *finitos* de forma compatível com o enfoque Fregeano. Todavia, ao contrário do tratamento formal das *Grundgesetze*, a noção de cardinalidade —definível por via de uma função-conceito—, é relativa a um domínio *particular* de objetos. Pois, toda função-conceito é uma função *parcialmente* definida no universo de discurso.

O *critério* de Tarski é aplicável à DEF. 1.3, i.e., esta definição de número cardinal consiste em uma noção *lógica* pois, esta noção aritmético-conjuntista é invariante sob qualquer transformação injetiva do universo do discurso sobre si próprio[4].

§2. Razões justificativas para a aplicabilidade do critério de Tarski

A redução lógica da aritmética consiste na demonstração de que a sentença —formalizável numa linguagem de ordem superior—, que *traduz* uma propriedade da aritmética elementar, sob a forma de conceitos lógicos, é logicamente dedutível de axiomas lógicos.

Essa 'tradução' de uma propriedade (ou axioma) da aritmética em uma sentença formada estritamente por conceitos lógicos básicos (ou noções lógicas), exprime a *logicidade* (*logicality*)[5] dessa propriedade da aritmética.

Nesta acepção, o critério de Tarski fixa as condições gerais sob as quais uma certa noção, expressável em uma linguagem formal, é lógica. Admitindo-se que, uma definição *explícita* será classificada como lógica, somente se for constituída por noções lógicas, então o critério de Tarski estabelece a logicidade dessa definição. De modo que, neste sentido, o critério de Tarski consiste em um princípio lógico-epistemológico para a correção de uma definição.

---

[4] "What are the properties of classes which are logical? ... [T]he only properties of classes (of individuals) which are logical are properties concerning the number of elements in these classes. ... [T]hese are logical notions, and are essentially the only logical notions on this level ... because ... you can always find a transformation of the universe under which one of these classes is transformed into the other." [v. Tarski (1986), p. 151].

[5] Ou seja, a redução de uma dada noção à *categoria* dos conceitos lógicos, i.e., à classe dos conceitos lógicos fundamentais (caracterizada pelos conectivos proposicionais e quantificadores de primeira ordem e de ordem superior).

O critério de Tarski[6] fundamenta-se no conceito de *transformação* 1-1, i.e., uma aplicação injetiva cujo domínio e imagem coincidem com o universo de discurso (de uma dada estrutura abstrata). Segundo esse critério, uma noção qualquer expressável em uma linguagem de ordem superior é denominada 'lógica', somente se essa noção é invariante sob todas as transformações 1-1 possíveis do universo sobre si próprio.

Como Tarski observa, de acordo com esse critério, não há exemplos de noções lógicas entre indivíduos, dado que é sempre possível encontrar uma transformação 1-1 do universo sobre si próprio, na qual um indivíduo é transformado em um indivíduo diferente.

Com relação às classes de indivíduos, que são de natureza lógica, esse critério estabelece que apenas duas classes (de indivíduos) são invariantes sob quaisquer transformações 1-1 do universo sobre si próprio: a classe *universal* e a classe *vazia*. Analogamente, existem apenas quatro relações binárias (entre indivíduos) que são lógicas nesta acepção: a relação universal, a relação vazia, a relação de identidade, e a relação de diferença (ou negação da igualdade).

De acordo com Tarski, 'todas as propriedades *numéricas* de classes são lógicas' —veja a DEF. 1.3 de número cardinal.

Tarski diz:

> This means that *two notions cannot be logically distinguished if they have the same extension, even if their intensions are different.* As it is usually put, we cannot logically distinguish properties from classes. ... [I]t is a logic of number, of numerical relations. [O grifo é meu][7]

Em consonância com esta explicação, o princípio de *equipotência* entre conjuntos reduz-se a uma noção lógica pois, pela DEF. 1.3, o número cardinal de um conjunto qualquer consiste na *extensão* de uma função-conceito definida pela relação de equinumerosidade [veja discussão no Cap. III: sec. III.1, §2]. Por conseguinte, na hipótese de que dois números cardinais tenham a mesma extensão, resulta que esses números cardinais não podem ser distinguidos logicamente. Além disso, mostraremos na sec. II.2, §5 que o princípio de equipotência *é* analítico.

Benacerraf (1981) assinala que, segundo o enfoque Fregeano

> If the definitions are *explicit* definitions, then the requirement Frege imposes in the *Grundgesetze*, of *establishing the existence and uniqueness of the defined entity, would suffice to guarantee that the system including the definition was a conservative extension of the original system, and hence consistent if the system was consistent prior to the introduction of the definitions* ... [o grifo é meu]

---

[6] Veja Tarski (1986), '*What are Logical Notions*?'; pp. 149-53.
[7] *op. cit.*, p. 151.

> although existence and uniqueness suffice to guarantee relative consistency, I am not sure that Frege's requirement that definitions be fully justified does not impose the further condition *that it be proved that existence and uniqueness suffice to guarantee relative consistency.*[8]

No caso específico do sistema lógico $\mathfrak{L}$, a existência e a unicidade de um dado objeto (e.g., um conjunto, uma família de conjuntos, etc.) devem ser, a princípio, asseguradas via esquema de compreensão e axioma da extensionalidade ($\mathfrak{L}$.1). Por conseguinte, qualquer definição explícita introduzida em $\mathfrak{L}$ é estabelecida em conformidade com esta prescrição. Este fato, por seu turno, assevera que o sistema $\mathfrak{L}$ tenha uma extensão conservativa[9] após a introdução da definição. Não havendo necessidade de estabelecer, como pré-condição, a *demonstração* da consistência do sistema formal-axiomático estendido para asseverar que a definição dessa entidade tenha sido completamente justificada.

Assim, de acordo com o tratamento metalógico de noções lógicas baseado no critério de Tarski, a observação de Benacerraf —acerca da necessidade de demonstrar que a existência e a unicidade de uma dada entidade definida é suficiente para garantir a consistência relativa do sistema—, pode ser substituída pela prescrição de *satisfabilidade* de um critério geral para noções lógicas.

Portanto, via aplicação do critério de Tarski, a base axiomático-definicional, formalizável na linguagem do sistema lógico $\mathfrak{L}$, incluindo-se o esquema de compreensão, i.e.,

$$\mathfrak{B}:=\{\mathfrak{L}.1,\ \mathfrak{L}^*,\ \mathit{Df.}\ \text{II}.1,\ \mathit{Df.}\ \text{II}.2,\ \mathit{Df.}\ \text{II}.3,\ \mathit{Df.}\ \text{II}.6.1\},$$

acrescida da definição de número cardinal [v. DEF.1.3], constitui uma extensão *conservativa* do sistema formal $\mathfrak{B}$ e, por conseguinte, compatível com a consistência de $\mathfrak{B}$.

---

[8] '*Frege: The Last Logicist*'; em Demopoulos (1995), pp. 58-9.

[9] Sejam T e T' teorias formalizáveis nas linguagens $\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}'$, respectivamente. Sendo que $\mathscr{L}'$ é o resultado da adição de novos símbolos a $\mathscr{L}$ e T' o resultado do acréscimo de novos axiomas a T, que são formalizados na linguagem expandida $\mathscr{L}'$. Diz-se que T' é uma extensão de T se $T \subseteq T'$. Diz-se que T' é uma *extensão conservativa* de T se $T' \cap \mathscr{L} = T$, i.e.,

$\forall \varphi \quad T' \vdash_{\mathscr{L}} \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ (ou seja, se todo teorema de T' na linguagem $\mathscr{L}$ é teorema de T).

II.2 DEMONSTRAÇÃO DOS AXIOMAS DA TEORIA GERAL DE CONJUNTOS

Nesta seção, em primeiro lugar, apresentamos uma redefinição da noção de analiticidade por intermédio de um enfoque da teoria de *modelos*. Na segunda subseção, discutimos a analiticidade do axioma $\mathcal{L}.1$ e do esquema de compreensão ($\mathcal{L}^*$). Na terceira subseção, consideramos a possibilidade teórica do problema *central* desta tese. Concluindo, nos parágrafos **4** e **5**, respectivamente, demonstramos os axiomas da *teoria geral de conjuntos* (**TGC**) —que constitui o substrato (*framework*) para a interpretação de $\mathbf{AP}^{(2)}$—, e o princípio de equipotência.

§1. Redefinição de analiticidade

A motivação filosófica para uma redefinição do conceito de analiticidade é estabelecer uma fundamentação lógico-epistemológica que permita:

(*i*) formular um *critério* geral de analiticidade para princípios contextuais em segunda ordem;

(*ii*) a derivação formal dos axiomas da **TGC**, caracterizando-se, de fato, uma *redução analítica* da aritmética de Peano. Pois, módulo isomorfismo, a **TGC** constitui o *único* modelo de segunda ordem (com a interpretação standard) para $\mathbf{AP}^{(2)}$. De modo que a demonstração dos axiomas da **TGC** assevere a redução lógica de $\mathbf{AP}^{(2)}$.

Considere-se, inicialmente, o teorema seguinte:

Teorema [de *Löwenheim-Skolem*] *Se uma teoria* $\Im$ *tem um modelo, então esta tem um modelo finito ou denumerável; isto é, um modelo* $\langle D, f\rangle$ *no qual o conjunto D é finito ou denumerável. Além disso, se D' é um conjunto qualquer com* $|D'| \geq |D|$ *e se* $\Im$ *tem um modelo com domínio D, então* $\Im$ *tem um modelo com domínio D'.*

Corolário 1 [forma 'descendente'] *Toda teoria de primeira ordem consistente que tem um modelo infinito admite um modelo denumerável.*

Corolário 2 [forma 'ascendente'] *Toda teoria de primeira ordem consistente admite modelos de qualquer cardinalidade.*

Uma conseqüência imediata do teorema de Löwenheim-Skolem é que não existem teorias categóricas de primeira ordem que admitem um modelo *infinito*. Esses teoremas constituem um resultado limitativo da capacidade expressiva de uma linguagem de primeira ordem. Esta 'limitação' decorre do fato de que: se uma *linguagem* satisfaz algum dos teoremas de Löwenheim-Skolem, então existem estruturas cuja cardinalidade *não* é expressável por nenhum conjunto de sentenças dessa linguagem. O corolário 'descendente' diz que qualquer teoria de primeira ordem —formalizada em uma linguagem de cardinalidade $\kappa \geq \omega$—, que tem um modelo de cardinalidade maior do que κ admite, também, um modelo de cardinalidade κ. Enquanto o teorema 'ascendente' diz que qualquer teoria —formulada em uma linguagem de primeira ordem cuja cardinalidade é $\kappa \geq \omega$—, que tenha um modelo infinito admite um modelo de qualquer cardinalidade superior ou no mínimo igual à de κ. Por exemplo, a aritmética de Peano em primeira ordem ($\mathbf{AP}^{(1)}$) tem modelos de qualquer cardinalidade infinita.

De acordo com Frege [v. *Grundlagen* §§75-83], a seqüência dos números naturais caracteriza-se completamente pelos axiomas de Peano. Entretanto, se admitirmos que o conceito de número natural reduz-se ao conceito de 'conjunto' então, este fato é verdadeiro somente se este último for considerado como um conceito básico, cujo significado é anterior e independente dos axiomas da aritmética elementar. Porque, conforme foi assinalado por Skolem (1934), é impossível uma única e completa caracterização das seqüências numéricas com relação à axiomatização da aritmética de Peano em primeira ordem.

Este resultado está estritamente relacionado com o (meta)teorema de incompletude da aritmética.

De fato, seja $\mathfrak{N}$ o modelo standard com tipo de ordem ω, i.e., $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; s, +, \bullet, 0 \rangle$. E, seja $\mathbf{AP}^{(1)}$ a *axiomática* de Peano expressa em uma linguagem de primeira ordem. O teorema de incompletude de Gödel mostra que nenhuma extensão recursiva de $\mathbf{AP}^{(1)}$ tem as mesmas conseqüências (sintáticas) do conjunto de todas as sentenças verdadeiras do modelo $\mathfrak{N}$.

Expresso de outra forma, do teorema de incompletude decorre que há alguma sentença φ —verdadeira em $\mathfrak{N}$ e— indecidível em $\mathbf{AP}^{(1)}$, i.e., $\mathbf{AP}^{(1)} \nvdash \varphi$ & $\mathbf{AP}^{(1)} \nvdash \neg\varphi$. Portanto,

$\mathbf{AP}^{(1)}+\varphi$ e $\mathbf{AP}^{(1)}+\neg\varphi$ são ambas consistentes.

Seja $\mathfrak{M}_1$ um modelo de $\mathbf{AP}^{(1)}+\neg\varphi$. Então, $\mathfrak{M}_1$ *não* é isomorfo a $\mathfrak{N}$ pois, não é elementarmente equivalente[10] a $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \models \mathbf{AP}^{(1)}+\varphi$). Ainda assim, pelo *corolário* 1 (do teorema de Löwenheim-Skolem), $\mathfrak{M}_1$ pode ser considerado denumerável.

[10] Pelo *Teorema do Isomorfismo*, se duas estruturas matemáticas quaisquer são isomorfas, então elas são L-elementarmente equivalentes (i.e., $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$, se $\forall\sigma \in L_s$: $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$). Formalmente este teorema expressa que: $\forall\mathfrak{A}\forall\mathfrak{B} \in St^{\tau}$, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$.

Observe que, via extensão (de Rosser) do teorema de incompletude, a iteração desse procedimento gera uma sucessão (binária) de 2^{ω} modelos (denumeráveis) de $\mathbf{AP}^{(1)}$ tais que, nenhum deles é isomorfo ao modelo standard $\mathfrak{N}$.

Se a noção Fregeana de analiticidade, como argumenta Benacerraf (1991), pressupõe um procedimento efetivo de demonstração [v. Cap. I: sec. I.2, §2], deduz-se do primeiro (meta)teorema de *incompletude* que a lógica de ordem superior não é adequada para a derivação da aritmética elementar. Pois, *em conseqüência* dessa incompletude, existem sentenças verdadeiras, formalizáveis na linguagem da aritmética, que *não* são demonstráveis nessa linguagem, i.e., *não* são analíticas na acepção Fregeana. Em outros termos, segue-se da incompletude da aritmética de primeira ordem que a conseqüência (sintática) em segunda ordem não é *recursivamente enumerável* (*r.e.*). Este resultado —corolário do teorema de incompletude de Gödel— estabelece que qualquer sistema formal para a aritmética elementar tem uma sentença indecidível. Por conseguinte, não é possível encontrar um sistema axiomático completo[11] para a aritmética, i.e., $\mathbf{AP}^{(2)}$ não é uma teoria *dedutivamente completa.*

Não obstante, como assinalado por Read (1997), $\mathbf{AP}^{(2)}$ *é* completa no seguinte sentido: os axiomas de Peano da aritmética de segunda ordem caracterizam o modelo *standard*[12] de $\mathbf{AP}^{(2)}$ categoricamente na semântica formal e teoria de modelos da lógica utilizada para estabelecer os postulados de $\mathbf{AP}^{(2)}$. Dado que, $\mathbf{AP}^{(2)}$ com interpretação standard[13] é *categórica*, i.e., quaisquer dois modelos standard de $\mathbf{AP}^{(2)}$ são isomorfos.

Sob este aspecto, a existência de um único modelo, módulo isomorfismo, para uma teoria (i.e., categoricidade) é aceita como um critério[14] para a completude da negação (*negation-completeness*)[15]. Assim, com referência a essa concepção de completude —com a noção de demonstrabilidade substituída por uma noção mais fraca (de conseqüência semântica[16])— temos o resultado seguinte:

---

[11] A impossibilidade de uma axiomatização finita da aritmética de Peano foi demonstrada (pelo uso de modelos *não-standard*) por Ryll-Nardzewski (1952).
[12] De tipo de ordem ω.
[13] Veja o *teorema de Dedekind* no **apêndice** (F) do Cap. II.
[14] Veja o *(meta)teorema 2* no **apêndice** (F) do Cap. II.
[15] Uma teoria axiomática é dita *completa* com respeito à *negação* se, para qualquer sentença s dessa teoria, s é um teorema ou $\neg s$ é um teorema.
[16] Uma sentença φ de uma teoria consistente $\mathfrak{I}$ é uma conseqüência *semântica* de $\mathfrak{I}$ se φ é verdadeira em qualquer modelo de $\mathfrak{I}$.

Proposição I. *Como $AP^{(2)}$ é uma teoria axiomática (consistente) e categórica, para cada sentença ϕ de $AP^{(2)}$, segue-se que ϕ é uma conseqüência (semântica) de $AP^{(2)}$ ou $\neg\phi$ é uma conseqüência (semântica) de $AP^{(2)}$.*

Demonstração. Se $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ são modelos isomorfos de $\mathbf{AP}^{(2)}$, então para qualquer enunciado ϕ, na linguagem de $\mathbf{AP}^{(2)}$, ϕ é verdadeiro em ambos $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ ou, ϕ é falso em ambos. Agora, suponha-se que uma sentença ϕ não seja uma conseqüência de $\mathbf{AP}^{(2)}$. Então, pela definição de conseqüência, existe um modelo $\mathfrak{M}_1$ de $\mathbf{AP}^{(2)}$ que não satisfaz ϕ. Seja $\mathfrak{M}$ um modelo qualquer de $\mathbf{AP}^{(2)}$. Então, como $\mathfrak{M}$ é isomorfo a $\mathfrak{M}_1$ (pois, $\mathbf{AP}^{(2)}$ é categórica), segue-se que $\neg\phi$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$.

Logo, como $\mathfrak{M}$ é um modelo qualquer de $\mathbf{AP}^{(2)}$, resulta que $\neg\phi$ é uma conseqüência de $\mathbf{AP}^{(2)}$. □

Esta proposição é relevante, sob um aspecto *epistemológico*, pois a existência de uma sentença aritmética indecidível, em um dado sistema formal axiomático da aritmética, não impede que haja uma forma de *completude* da aritmética em segunda ordem.

Segundo M. Dummett (1991)

> *The distinction between epistemic and ontic necessity is precisely that between proof-theoretic and model-theoretic consequence.* A logical formula may be called 'provable' if it is a theorem of some axiomatic formalisation, or derivable from the null set of hypotheses in a natural deduction system. A statement is analytic in Frege's sense if it is the definitional equivalent of an instance of a provable formula. If we transpose back from the mode of propositions to that of sentences, *a statement is analytic in Bolzano's sense if it is the definitional equivalent of an instance of a (model-theoretically) valid formula.* [O grifo é meu][17]

A diferenciação filosófico-conceitual entre a conseqüência *sintática* e a conseqüência *semântica*, que Dummett assinala, reside na distinção entre a noção de necessidade *epistêmica* e a noção de necessidade *ôntica.*

Cabe assinalar que, com relação à noção de analiticidade em Bolzano, Coffa (1991) acrescenta:

> Bolzano introduced the notion of *general validity* (*allgemeingültigkeit*): A proposition P is generally valid relative to the set x_1, ..., x_n of constituents when ... all propositions obtained by replacing x_1, ...,

[17] *'Frege: Philosophy of Mathematics'*, p. 29.

x_n by arbitrary but grammatically admissible representations are true. ... [H]e proposed to call *logically analytic* all those propositions that are universally valid relative to all their nonlogical concepts.[18]

Sob um aspecto semântico-formal, mediante a teoria de modelos, dizemos que uma sentença expressável num dado sistema formal ($\mathfrak{T}$) é (logicamente) *válida* se, e somente se, essa sentença é verdadeira em todos os modelos de $\mathfrak{T}$. Isto significa que —sob uma abordagem filosófico-ontológica acerca da noção de necessidade *ôntica*—, nenhuma sentença válida pode ser verdadeira sob uma certa interpretação *e* falsa sob outra interpretação. Por conseguinte, a noção de validade de uma sentença implica a verdade *lógica* dessa sentença.

Como assinalado por Wang[19], de maneira explícita, uma sentença é 'logicamente verdadeira', somente se todas as sentenças que apresentam a mesma forma lógica (ou estrutura sintático-proposicional) são verdadeiras. De modo equivalente, acrescenta que, uma sentença é 'logicamente verdadeira', somente se esta é verdadeira e formada unicamente por constantes lógicas. Em outros termos, estas duas definições reduzem a noção de verdade lógica (de uma sentença) às noções de *forma* lógica, *constantes* lógicas e, à noção de *interpretação.*

Por outro lado, num sentido epistemológico, a noção de *demonstrabilidade*[20] é correlativa à noção de necessidade *epistêmica*, i.e., reduz-se à relação de *dependência* da proposição deduzida no conjunto de premissas que a implicam. Por conseguinte, a conseqüência sintática refere-se tão-somente à necessidade da *conclusão* lógica de uma demonstração formal. Uma demonstração formal consiste em uma seqüência (finita) de fórmulas bem formadas (*fbf*'s), em que cada fórmula dessa seqüência é uma hipótese, um axioma ou foi derivada, via regras de inferência, de *fbf*'s anteriores.

Posto isto, cabe observar que as definições de *verdade*, *interpretação* e *validade* dependem necessariamente de noções básicas de uma teoria geral de conjuntos, ao passo que a noção de *dedutibilidade* (ou demonstrabilidade) formal não pressupõe uma noção teórico-conjuntista. Neste último caso, faz-se uso de noções de aritmética elementar, e.g., com respeito à complexidade das fórmulas, ao comprimento das demonstrações, à aritmetização da sintaxe via gödelização, etc.

---

[18] Veja Coffa (1991) '*The Semantic Tradition from Kant to Carnap*', p. 34.

[19] Cabe considerar o excerto seguinte, de Hao Wang (1974)
"A sentence is logically true if all sentences of the same grammatical (or logical) structure are true; or, equivalently, ... a sentence (or schema or sentence form) is (logically) valid if it is true in all models, ... Or ... a sentence is logically true if it is true but contains no constants except logical constants; ..." [*From Mathematics to Philosophy*; v. pp. 143-4]

[20] Isto é, a propriedade de toda fórmula, expressável em uma teoria (formal-dedutiva), para a qual existe uma *demonstração*.

Conforme apontado por van Heijenoort (1966), o enfoque lógico de Frege-Russell pode ser caracterizado como um enfoque *axiomático*, enquanto o enfoque de Löwenheim-Skolem pode ser caracterizado como um enfoque *teórico-conjuntista*. No sistema lógico de Löwenheim não há axiomas ou regras de inferência, fundamentando-se estritamente em uma teoria ingênua de conjuntos. Neste caso, Löwenheim substitui a noção de demonstrabilidade (*provability*) pela noção de validade. Em conseqüência, temos uma transição do tratamento sintático-formal para o método semântico-formal.

A redefinição de analiticidade, que proponho nesta dissertação, visa estabelecer uma correlação entre esses dois enfoques independentes.

Efetivamente, com base nesta análise lógico-epistemológica, a definição de *analiticidade* de uma sentença, expressável em uma linguagem de ordem superior, pode ser modificada (ou estendida) de tal modo que abranja a acepção de Bolzano, i.e., a noção de 'equivalente definicional de uma instância de uma fórmula válida (no sentido da teoria de modelos)'.

Em conseqüência desta acepção e da *proposição* anterior, estabeleço a seguinte definição:

DEFINIÇÃO DE ANALITICIDADE. *Seja* $\mathscr{L}^{II}$ *uma linguagem de segunda ordem. Uma sentença* $\varsigma\in\mathscr{L}^{II}$ *é analítica quer seja demonstrável por meio de axiomas lógicos (e definições), via regras de inferência* [na acepção de Frege], *quer seja válida em sentido geral* [na acepção de Bolzano].

Observação. A noção de validade em *sentido geral* "$\models \varsigma$" implica que '*ς é verdadeira em todos os modelos standard*', i.e., todas as fórmulas válidas em sentido *geral* são válidas em sentido standard. A recíproca não é verdadeira.

Assim, de acordo com esta definição, a noção de analiticidade não pressupõe a noção de *completude* semântica de um sistema lógico de ordem superior —não estabelece como pré-condição, que um dado sistema formal-axiomático $\mathscr{F}$ seja *dedutivamente completo*, i.e., que toda sentença válida de $\mathscr{F}$ é *demonstrável*—, isto significa que, esta acepção de analiticidade é aplicável a um sistema lógico de ordem superior. Não obstante, o fato de a lógica de segunda ordem não ter qualquer axiomatização completa das sentenças válidas em todos os modelos *standard* de segunda ordem, nem dispor de um (meta)teorema de completude. Ao passo que, a lógica de primeira ordem tem uma axiomatização recursiva completa. Neste caso, consideramos apenas um 'fragmento' da lógica de segunda ordem total.

Concluindo, sob um aspecto estritamente filosófico, esta (re)definição de analiticidade restabelece a tese Fregeana [v. §88 dos *Grundlagen*] de que as proposições analíticas têm valor cognitivo —i.e., apresentam um conteúdo informativo e expressam relações entre definições. Pois, esta definição de analiticidade reintroduz, via noção de validade, o conceito de *generalidade* para a classificação de uma proposição (ou de uma sentença).

Em acréscimo, serve como fundamento filosófico para um *critério geral* de analiticidade de *princípios contextuais* em segunda ordem [veja Cap. III: sec. III.1, §1].

§2. Discussão do axioma $\mathfrak{L}$.1 e do esquema de compreensão ($\mathfrak{L}$*)

Apresenta-se, neste parágrafo, uma justificação da *analiticidade* de $\mathfrak{L}$.1, do esquema de compreensão e, por conseguinte, da consistência do sistema lógico $\mathfrak{L}$.

Esquema de Compreensão

O esquema de compreensão estabelece que toda fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$ de $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}(\tau)$ total e, em particular, de $\mathscr{L}^{\mathrm{I}}(\tau)$, define uma relação n-ária em uma estrutura $\mathfrak{A}$. Mais precisamente,

Seja $\phi(x_1, ..., x_n)$ uma fórmula em $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}(\tau)$ sem variáveis livres de segunda ordem e, seja X^n uma variável de segunda ordem n-ádica. Então, para toda estrutura $\mathfrak{A} \in Est(\tau)$:

$$\mathfrak{A} \models (\exists X^n)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\big(X^n(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,...,x_n)\big).$$

Demonstração[21]: Definindo-se $S \subseteq A^n$ como $S := \{(a_1,...,a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \phi[a_1,...,a_n]\}$ então,

para algum $S \subseteq A^n$ e para todo $a_1, ... a_n \in A$ temos

(*) $\quad S(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1,...,a_n]$,

assim,

$S(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models X^n(x_1,...,x_n)[a_1,...,a_n,S]$,

logo, (*) equivale a

$\mathfrak{A} \models X^n(x_1,...,x_n)[a_1,...,a_n,S] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1,...,a_n]$, i.e., se, e somente se,

$\mathfrak{A} \models \phi[a_1,...,a_n,S]$, pois X^n não é livre em ϕ.

[21] Esta demonstração foi extraída de Cifuentes (1992), pp. 83-4.

Portanto, (*) equivale a

$$\mathfrak{A} \models \left(X^n(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n)\right)[a_1,\ldots,a_n,S]$$

para algum $S \subseteq A^n$ e para todo $a_1, \ldots a_n \in A$. Logo,

$$\mathfrak{A} \models (\exists X^n)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\left(X^n(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n)\right). \qquad \square$$

Esta demonstração de que a sentença acima, expressável em uma linguagem $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}(\tau)$ total, é *válida*, —i.e., verdadeira em toda estrutura de tipo τ— consiste numa demonstração de analiticidade do esquema de compreensão de acordo com a definição de analiticidade proposta.

***Axioma* $\mathfrak{L}$.1** [*extensionalidade*]

$\mathfrak{L}$.1 é analítico dado que, pode ser introduzido em qualquer modelo de segunda ordem, por meio de uma estrutura quociente com respeito à relação de equivalência induzida pela relação de *identidade* (sobre o universo de indivíduos). Ou seja, $\mathfrak{L}$.1 é verdadeiro sob qualquer interpretação (em sentido *geral*) e, portanto, satisfaz a definição de analiticidade.

Conclui-se, no que tange à *consistência*, que o sistema de ordem superior $\mathfrak{L}$ é consistente pois, a analiticidade do axioma $\mathfrak{L}$.1 e do esquema de compreensão assevera, trivialmente, *Consis*($\mathfrak{L}$).

§3. Problema Central da Tese

Com o propósito, agora, de introduzir o ***problema central*** desta tese, considere-se inicialmente o seguinte excerto de Dummett (1998)

> The context principle, enunciated in *Grundlagen*, ... required that the specification of the domain, in such a way as to guarantee the existence of its elements, should be effected *by* determining truth-values for statements of the theory. It appears, therefore, to follow that the *same* stipulations must simultaneously fix the domain and the intended interpretations of the primitives with respect to it. This, at least, is what Frege attempted to do in *Grundgesetze*; given his general principles, ... [*v.* p. 369, Chap. 14][22]

De acordo com Dummett, este era o 'problema central' de fundamentos da matemática e, o status epistemológico de uma sentença (demonstrável) em uma teoria formal-axiomática —como logicamente verdadeira, ou analítica— constitui um problema *subordinado*. Concordando com esta

[22] '*Neo-Fregeans: in Bad Company?*', em Schirn (1998), pp. 369-87.

classificação e subordinação do problema da analiticidade (de uma sentença), enunciamos como problema fundamental desta pesquisa:

Problema Central: *Sobre a especificação do domínio de uma definição contextual, por intermédio da determinação dos valores-verdade de sentenças formalizáveis numa linguagem de ordem superior; de modo que seja assegurada a existência dos elementos desse domínio.*

Em outros termos, quais são as condições (suficientes) para que sejam, de forma simultânea, determinados os valores-verdade de sentenças de $\mathfrak{L}$ e fixado um domínio (não-vazio) de objetos para uma dada definição contextual em segunda ordem?

Estabeleço a seguir, as (pré-)condições para uma *resposta* a esta questão.

Introduzindo-se na linguagem do sistema lógico $\mathfrak{L}$ o princípio de ***equipolência lógica***: *duas funções-conceito são idênticas se, e somente se, suas propriedades definidoras são logicamente equivalentes*. Expresso formalmente,

TEOREMA PRINCIPAL. *Sejam φ, ψ predicados (n-ádicos) quaisquer de segunda ordem. Assim,*

$$\vdash \mathbb{F}_\varphi = \mathbb{F}_\psi \leftrightarrow (\forall \vec{x})(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})), \qquad (\ddagger)$$

onde:

$\mathbb{F}_\varsigma(x_1,...,x_n,v) \leftrightarrow f_\varsigma(x_1,...,x_n) = v$ *e*

f_ς *denota uma função-conceito definida no domínio* $\prod_{i=1}^{n} X_i \neq \varnothing$, *via predicado (n-ádico)* ς.

Demonstração.

$$\mathbb{F}_\varphi = \mathbb{F}_\psi \rightarrow (\forall \vec{x})(\forall v)(\mathbb{F}_\varphi(\vec{x},v) \leftrightarrow \mathbb{F}_\psi(\vec{x},v)) \qquad [\textit{Axioma } \mathfrak{L}.1]$$

$$\rightarrow (\forall \vec{x})(\forall v)(f_\varphi \vec{x} = v \leftrightarrow f_\psi \vec{x} = v) \qquad [\text{equivalência lógica}^{23}]$$

$$\rightarrow \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})) \qquad [\textit{Df.} \text{ de função-conceito}]$$

Reciprocamente, temos:

$$(\forall \vec{x})(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})) \rightarrow \varphi = \psi \qquad [\textit{Ax. } \mathfrak{L}.1]$$

[23] Uma função $y = f(x_1,...,x_n)$ pode ser sempre representada por uma relação (funcional) $R(x_1,...,x_n,y)$ tal que $R(x_1,...,x_n,y)$ é verdadeira se, e somente se, y é igual a $f(x_1,...,x_n)$.

$\rightarrow \mathbb{F}_\varphi = \mathbb{F}_\psi$ [*Df.* de função-conceito].□

Observação. Este princípio de abstração satisfaz as (pré-)condições do *problema central* via definição de função-conceito [v. *Df.* II.6.1, **Prolegômenos II, §5**].

Considere-se, agora, a definição DEF. 1.1 [v. Sec. I, §1] de sistema-λ (substractum incorporado à linguagem $\mathfrak{L}$). Podemos expressar, via λ–abstração (aplicada às funções-conceito $\hbar_\varphi$, $\hbar_\psi$), a *forma geral* de uma definição contextual em segunda ordem.

DEFINIÇÃO 2.1. Sejam φ, ψ variáveis (unárias) de segunda ordem. Então, uma *definição contextual*, formalizável em segunda ordem, consiste em uma instância de

(†) $$\forall\varphi\forall\psi[\lambda x.\mathbb{F}_\varphi(x,v) = \lambda x.\mathbb{F}_\psi(x,v) \leftrightarrow \mathbb{E}_x(\varphi(x),\psi(x))],$$

onde $\mathbb{E}_x$ denota uma relação de equivalência qualquer, e $\mathbb{F}_\varsigma(x,z) \leftrightarrow \hbar_\varsigma x = z$, para uma dada função-conceito $\hbar_\varsigma$.

Em particular, temos a seguinte instância de (†), corolário do *teorema principal*.

COROLÁRIO 1. *Para todas as funções-conceito* $\hbar_\varphi, \hbar_\psi$ *em* $\mathfrak{F}_1$:

(*) $$\lambda x.\mathbb{F}_\varphi(x,v) = \lambda x.\mathbb{F}_\psi(x,v) \leftrightarrow (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)).$$

Demonstração. Suponha que para todo v: $\lambda x.\mathbb{F}_\varphi(x,v) = \lambda x.\mathbb{F}_\psi(x,v)$, então

$\mathbb{F}_\varphi(c,v) = \Gamma(\lambda x.\mathbb{F}_\varphi(x,v),c) = \Gamma(\lambda x.\mathbb{F}_\psi(x,v),c) = \mathbb{F}_\psi(c,v)$ para qualquer indivíduo c em $\mathfrak{F}_0$.

Assim, $(\forall x)(\forall v)(\mathbb{F}_\varphi(x,v) = \mathbb{F}_\psi(x,v))$. Isto implica que $\mathbb{F}_\varphi = \mathbb{F}_\psi$, por conseguinte, $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ via TEOREMA PRINCIPAL.

Reciprocamente, suponha que $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$, segue-se que $\mathbb{F}_\varphi = \mathbb{F}_\psi$.

Logo, $\lambda x.\mathbb{F}_\varphi(x,v) = \lambda x.\mathbb{F}_\psi(x,v)$. □

Observação. A equivalência (*) consiste em um análogo formal do *Axioma V* das *Grundgesetze* de Frege.

Portanto, o teorema principal e o corolário acima representam formalmente princípios gerais, em uma linguagem de ordem superior, que satisfazem aos pressupostos do problema central.[24]

§4. Derivação formal dos axiomas da Teoria Geral de Conjuntos em 2ª ordem (TGC)

A base axiomática que caracteriza[25] a **TGC** é constituída pelos axiomas seguintes:

(*i*) $\forall X\forall Y(\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$ [*Extensionalidade*]

(*ii*) $(\forall w)(\forall Z)(\exists Y)(\forall x)(x \in Y \leftrightarrow x \in Z \vee x = w)$ [*Adjunção*]

(*iii*) $(\forall F)(\forall Z)(\exists Y)(\forall x)(x \in Y \leftrightarrow x \in Z \wedge Fx)$ [*Separação*]

Considerem-se os fechos universais de todas as fórmulas da forma

$$\exists X\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow Xx) \qquad (*)$$

onde $\varphi(x)$ é uma fórmula da linguagem de $\mathfrak{L}$ que não contém X livre.

Sejam $\Omega=\{V^{\circ}, F^{\circ}\}$ e um conjunto qualquer $\mathfrak{X} \neq \varnothing$.

O esquema de compreensão (*) estabelece em $\mathfrak{L}$ a *existência* de uma função-conceito f_{ϕ} definida de $\mathfrak{X}$ em Ω (via predicado ϕ) tal que,

$$(\forall \mathfrak{X})(\forall \phi)(\exists! f_{\phi})(\forall x)(f_{\phi}x = v \leftrightarrow \phi(x)), \quad \text{onde } v \in \Omega.$$

A existência de uma função-conceito f_{ϕ} assegura, por sua vez, a existência de uma relação de equivalência *induzida* por f_{ϕ}, i.e., a relação:

$$\mathrm{E}_{f_{\phi}}(x,y) \Leftrightarrow_{df} f_{\phi}(x) = f_{\phi}(y).$$

Portanto, temos a seguinte fatorização:

$$f_{\phi} = \bar{f}_{\phi} \circ \pi_{f_{\phi}} \qquad \text{com} \qquad \mathfrak{X} \xrightarrow{\pi_{f_{\phi}}} \mathfrak{X}/_{\mathrm{E}_{f_{\phi}}} \xrightarrow{\bar{f}_{\phi}} \Omega \ \text{ em que}$$

$\pi_{f_{\phi}}$ é projeção canônica;

---

[24] Note que, valendo-se do princípio de equipolência lógica, no Cap. III, será formulado um *critério* de analiticidade para definições contextuais da forma (†) acima. Além disso, o Corolário 1 permite demonstrar o princípio de *equipotência* entre conjuntos [veja o §5 desta seção].

[25] Veja Boolos (1987), *'Saving Frege from Contradiction'*, reimpresso em Demopoulos (1995), pp. 449-51. E, veja também, Wang (1962), *'A Survey of Mathematical Logic'*, pp. 480-9.

$\bar{f}_\phi$ é a aplicação sobre $\mathfrak{X}/_{\mathrm{E}_{f_\phi}}$ induzida por f_ϕ onde

$\mathfrak{X}/_{\mathrm{E}_{f_\phi}} = \{\overline{\mathrm{V}}°, \overline{\mathrm{F}}°\}$ (conjunto quociente).

Agora, podemos estabelecer os seguintes resultados.

O ***Princípio de Extensionalidade*** —i.e., '*dois conjuntos quaisquer são iguais somente se, têm os mesmos elementos*'—, é um caso particular (para n =1) do AXIOMA $\mathfrak{L}$.1.

TEOREMA 1 [***Princípio de Separação***][26]. *Se $\phi(x;\bar{v})$ é uma fórmula de $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{X}$ um conjunto, então existe um conjunto $\mathfrak{B}_\phi$ cujos elementos são exatamente aqueles $x \in \mathfrak{X}$ que satisfazem $\phi(x;\bar{v})$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ um conjunto qualquer. Para toda função-conceito $\mathfrak{X} \xrightarrow{\hbar_\phi} \Omega$; $\hbar_\phi(x) = v \leftrightarrow \phi(x)$, existe um único conjunto $\mathfrak{B}_\phi$ (de elementos $x \in \mathfrak{X}$) tal que $\phi(x)$. Com efeito, pela *Df.* II.6.2, $\mathfrak{B}_\phi$ é a classe de equivalência em $\mathfrak{X}$ (do predicado ϕ) determinada pela função-conceito $\hbar_\phi$ (via relação de equivalência $\mathrm{E}_{\hbar_\phi}$), i.e.,

$$\mathfrak{B}_\phi := \hbar_\phi^{-1}(\mathrm{V}°) = \hbar_\phi^{-1}(\hbar_\phi(x)) = \{y \in \mathfrak{X} : \hbar_\phi(x) = \hbar_\phi(y) = \mathrm{V}°\};$$

este conjunto é único pelo *Ax.* $\mathfrak{L}$.1.

Logo, $(\forall\phi)(\forall\mathfrak{X})(\exists\mathfrak{B}_\phi)(\forall x)\big(x \in \mathfrak{B}_\phi \leftrightarrow x \in \mathfrak{X} \wedge \phi(x)\big)$. □

TEOREMA 2 [***Princípio de Adjunção***][27]. *Dados dois conjuntos $\mathfrak{B}_F$ e w, existe um conjunto $\mathfrak{B}_\phi$ constituído pelos elementos de $\mathfrak{B}_F$ e o conjunto w.*

Demonstração. Seja um conjunto $\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Assim, é suficiente considerar a seguinte função-conceito (de 2° nível):

$$\mathfrak{X} \times \Omega \xrightarrow{\Sigma_\phi} \Omega;\ \Sigma_\phi(x, \hbar_F(x)) = v \leftrightarrow \phi(x) \equiv_{df} x \in \mathfrak{B}_F \vee x = w,$$

onde: $\mathfrak{X} \xrightarrow{\hbar_F} \Omega$; $\hbar_F(x) = v \leftrightarrow Fx$ e, $\mathfrak{B}_F = \hbar_F^{-1}(\mathrm{V}°)$.

---

[26] Este princípio é uma conseqüência imediata do *esquema* de *compreensão* ($\mathfrak{L}$*). Com efeito, seja $\varphi(x) \Leftrightarrow_{df} x \in Z \wedge Fx$, para uma dada propriedade F, então via $\mathfrak{L}$*: $\exists Y \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow Yx)$. □

[27] Analogamente, este princípio é uma conseqüência imediata de $\mathfrak{L}$*. Com efeito, seja $\varphi(x) \Leftrightarrow_{df} x \in Z \vee x = w$ então, pelo axioma $\mathfrak{L}$*, $\exists Y \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow Yx)$. □

Logo, $(\forall \mathfrak{B}_F)(\forall w)(\exists \mathfrak{B}_\phi)(\forall x)\big(x \in \mathfrak{B}_\phi \leftrightarrow x \in [\mathfrak{B}_F|w]\big)$; em que $\mathfrak{B}_\phi = \Sigma_\phi^{-1}(V^\circ)$. □

§5. Demonstração do princípio de *equipotência*

Demonstra-se a seguir que, o TEOREMA PRINCIPAL implica o princípio de *equipotência*[28] entre conjuntos —i.e., '*dois conjuntos equinuméricos têm o mesmo número cardinal associado*'. Este é um princípio fundamental, pois constitui a base para a generalização das propriedades da definição de número natural àquelas da definição de número cardinal (finito).

Em $\mathfrak{L}$, podemos estabelecer a *existência* de um número cardinal por meio de uma função-conceito com respeito a um domínio de objetos. Em conseqüência, demonstra-se que, para cada conjunto X existe um único conjunto $\mathfrak{K}(X)$ associado, i.e., o número *cardinal* de X.

Com efeito, podemos estabelecer com base nas definições anteriores e no COROLÁRIO 1 os resultados seguintes:

PROPOSIÇÃO 1. $\vdash \forall X \exists ! c\big(c = \mathfrak{K}(X)\big)$.

Demonstração:

(*i*) [existência] é suficiente tomar uma função-conceito (binária) da forma:

$$2^{X_1} \times 2^{X_2} \xrightarrow{f_\approx} \Omega$$
$$\langle X, Y\rangle \mapsto f_\approx(X,Y) = v \leftrightarrow \approx(X,Y)$$

onde '$\approx$' denota a relação de equinumerosidade; definindo-se $c = \lambda Y. f_\approx(X,Y)$.

Assim, pela DEF. 1.3, resulta que: $c = \mathfrak{K}(X)$.

(*ii*) [unicidade] suponha que exista outro número cardinal c' tal que $c' = \mathfrak{K}(X)$, então $Y \in c \leftrightarrow Y \in c'$, logo $c = c$' pelo Axioma da Extensionalidade. □

PROPOSIÇÃO 2. $\vdash \forall X \forall Y\big(\mathfrak{K}(X) = \mathfrak{K}(Y) \leftrightarrow \approx(X,Y)\big)$

Demonstração.

$\approx(X,Y) \rightarrow (\forall Z)\big(\approx(X,Z) \leftrightarrow \approx(Y,Z)\big)$, $\approx$ é uma relação de equivalência;

$\approx(X,Y) \rightarrow \lambda Z.\hbar_\approx(X,Z) = \lambda Z.\hbar_\approx(Y,Z)$, via COROLÁRIO 1;

[28] Note que, o princípio de equipotência é demonstrável, via *axioma* da *escolha*, em **ZFC**.

$\approx(X,Y) \rightarrow \mathfrak{K}(X) = \mathfrak{K}(Y)$. pela DEFINIÇÃO 1.3.

A recíproca resulta de

$\lambda Z.\hbar_{\approx}(X,Z) = \lambda Z.\hbar_{\approx}(Y,Z) \rightarrow (\forall Z)(\approx(X,Z) \leftrightarrow \approx(Y,Z))$. □

Como o princípio de equipotência é tradutível em termos de conceitos lógicos [v. sec. II.1, §2], resulta que a teoria dos números cardinais finitos é *redutível* a noções lógicas e *derivável* formalmente de axiomas lógicos.

Conforme apontado por Boolos (1997)

> Peano arithmetic based on the von Neumann definition of the natural numbers can be carried out (interpreted) in a surprisingly weak theory of sets sometimes called General Set Theory... [29]

Isto significa que, dada uma certa formalização equivalente à **TGC**, tal como a axiomática apresentada, podemos demonstrar todos os postulados de Peano para o conjunto ω (dos números naturais), da maneira usual, admitindo-se apenas que ω é um conjunto munido com um elemento '0' e uma aplicação s de ω sobre si próprio, para a qual vale o teorema de *recursão simples*[30], demonstrável em $\mathfrak{L}$. Portanto, baseando-se exclusivamente no axioma $\mathfrak{L}$.1, no esquema de compreensão —que satisfazem a definição de analiticidade [v. sec. II.2 §1]—, nas definições principais e, na *Df.* II.6.1 [v. **Prolegômenos II, §5**], podemos derivar (formalmente) os axiomas de **AP**$^{(2)}$. De forma equivalente, esta base axiomático-definicional do sistema $\mathfrak{L}$ torna possível a *redução lógica* da aritmética elementar.

Observe que Boolos (1987) apresenta uma estratégia alternativa para a derivação formal dos axiomas da **TGC**, utilizando-se um princípio contextual denominado de princípio de *similaridade*[31] —análogo formal do princípio de Hume—, que estabelece:

$*F = *G$ see F é *similar* a G

ou seja, supondo-se que para cada conceito F existe um objeto associado $*F$ —chamado a *subtensão* de F—, tal que subtensões estão em correspondência 1-1 com classes de equivalência da relação de equivalência '*similar a*'.

---

[29] Veja 'The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*', em Demopoulos (1995), p. 227.

[30] Expresso formalmente: *Sejam X um conjunto (não-vazio), c∈X, e f uma função de ω × X em X. Então, existe exatamente um função ħ : ω → X, tal que*

$$\hbar(0) = c \quad e \quad \hbar(sn) = f(n, \hbar(n)).$$

[31] Veja '*Saving Frege from Contradiction*', em Demopoulos (1995), pp. 446-7.

F é 'similar a' G see (F é *pequeno* $\vee$ G é *pequeno* $\rightarrow$ F é co-extensivo com G), em que:

(*i*) um conceito F é chamado de *pequeno* se o conceito $V = [x : x = x]$ não está em F, i.e., se V *não* é equinumérico com um *sub*conceito de F —dizemos que um conceito F é um '*sub*conceito' de um conceito G se todo objeto que cai sob F cai sob G;

(*ii*) um conceito F é *co-extensivo com* um conceito G see todos objetos que caem sob F caem sob G e, vice-versa.

Boolos demonstra, neste artigo, a consistência do princípio acima e apresenta um esboço da derivação formal dos axiomas da **TGC**. Não obstante, como Boolos observa, o princípio de similaridade não é suficiente para justificar epistemologicamente o projeto logicista. Visto que, de modo análogo ao princípio de Hume, este princípio somente é verdadeiro em modelos infinitos.

II.3 DEMONSTRAÇÃO DOS AXIOMAS DE AP$^{(2)}$

Nesta seção, mostramos que **AP**$^{(2)}$ pode ser desenvolvida da maneira usual tomando-se como base a **TGC**, mediante a introdução do conceito de número ordinal.

§1. Definição de fecho de um conjunto

Considere-se uma estrutura $\mathfrak{A}=\langle A; \{R_0, ..., R_{\mu-1}\}, \{F_0, ..., F_{\nu-1}\}\rangle$. Seja $X \sqsubseteq A$.

Diz-se que um conjunto X é *fechado* se o resultado da aplicação de qualquer operação aos elementos de X está em X. Em outros termos, se para todo $j \leq \nu - 1$ e para todos $a_0, ..., a_{f_j-1} \in X$, $F_j(a_0,...,a_{f_j-1}) \in X$, supondo-se que F_j esteja definida.

Sejam $X_1 \neq \emptyset$, e $X^2(x,y)$ uma relação binária qualquer. Então, definimos formalmente o *fecho* $\mathcal{F}$ de um conjunto X_1 sob a relação X^2 como:

$$\mathcal{F}(X_1) := \left\{x : (\forall X_2)\left[X_1 \sqsubseteq X_2 \wedge (\forall y)(\forall z)\left((y \in X_2 \wedge X^2(y,z)) \rightarrow z \in X_2\right) \rightarrow x \in X_2\right]\right\} \quad (1)$$

cuja existência é estabelecida em $\mathfrak{L}$ pelo esquema de compreensão.

Expresso de forma equivalente, o fecho $\mathcal{F}(X_1)$ de um subconjunto X_1 de A, sob uma aplicação F dada, é o menor conjunto fechado tal que $X_1 \sqsubseteq \mathcal{F}(X_1)$ contendo todos aqueles elementos obtidos pela iteração da aplicação F, partindo-se de X_1:

$$\mathcal{F}(X_1) = \bigcap\{X \sqsubseteq A : X_1 \sqsubseteq X \wedge X \text{ fechado}\}.$$

Observe que o conjunto $\bigcap\{\ldots\} \neq \varnothing$ pois, A é um conjunto fechado que contém X_1.

Introduzimos agora um teorema fundamental utilizado para demonstrar que todos os elementos de um fecho têm uma dada propriedade $\mathbb{P}$.

TEOREMA (*) Seja $\mathbb{P}(x)$ uma propriedade expressável em $\mathfrak{L}$. Suponha que

(i) $\mathbb{P}(c)$ vale para todo $c \in X_1$.

(ii) Para cada $j \leq \nu - 1$, se $\mathbb{P}(a_0)$, ..., $\mathbb{P}(a_{f_j - 1})$ são verdadeiras e $F_j(a_0, \ldots, a_{f_j - 1})$ é definida, então

$$\mathbb{P}\left(F_j(a_0, \ldots, a_{f_j - 1})\right) \text{ é verdadeira.}$$

Então, $\mathbb{P}(x)$ vale para todo $x \in \mathcal{F}(X_1)$.

Demonstração. As hipóteses (i) e (ii) estabelecem que o conjunto $X = \{x \in A : \mathbb{P}(x)\}$, cuja existência é assegurada pelo teorema da separação, é fechado e X_1 é um subconjunto de X. Por conseguinte, pela definição de fecho, $\mathbb{P}(x)$ é verdadeira para todo $x \in \mathcal{F}(X_1)$. □

Observe que este teorema consiste em uma forma generalizada do princípio de *indução.*

§2. Definição de número natural

Para o desenvolvimento formal da teoria dos números naturais, no arcabouço axiomático da **TGC**, é usual iniciarmos com a teoria dos ordinais. Com efeito, introduzimos os conceitos básicos desta teoria e, seguimos em linhas gerais o tratamento formal apresentado no Capítulo III: §§1-3 de Bernays (1968).

Definições principais:

$$\mathrm{Trans}(x) \equiv_{df} (\forall y)(y \in x \rightarrow y \sqsubseteq x).$$

$$\mathrm{Con}(x) \equiv_{df} (\forall y)(\forall z)\big((y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \rightarrow y \in z \vee z \in y\big).$$

$\mathrm{Fund}(x) \equiv_{df} (\forall z)((z \sqsubseteq x \wedge z \neq \varnothing) \rightarrow (\exists y)(y \in z \wedge (y \cap x) = \varnothing))$.

Agora definimos o conceito de número *ordinal* como

Df. 2.1 $\mathrm{Ord}(x) \equiv_{df} \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{Con}(x) \wedge \mathrm{Fund}(x)$.

Introduzimos, sem demonstração, as proposições seguintes:

Prop. 2.1: $(\mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{Ord}(y)) \rightarrow (x = y \vee x \in y \vee y \in x)$.

Prop. 2.2: $(\mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{Ord}(y) \wedge \mathrm{Ord}(z)) \rightarrow ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z)$.

Prop. 2.3: $(\mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{Ord}(y) \wedge x \in y) \rightarrow y \notin x$.

Os enunciados principais necessários para a demonstração dos postulados de Peano são:

***Teorema* 2.1**: $\vdash \mathrm{Ord}(0)$, onde $0 := \{x : x \in \varnothing\}$.

Demonstração. É conseqüência imediata da proposição $\vdash (\forall x)(x \notin \varnothing)$. □

Df. 2.2 $x' := \{z : z \in [x|x]\}$, i.e., $x' = x \cup \{x\}$. A existência deste conjunto x' é assegurada pelo princípio de *adjunção*.

***Teorema* 2.2**: *Se* $x \in x'$, $x' \neq 0$ *então*, $\vdash (\forall x)(\mathrm{Ord}(x) \rightarrow \mathrm{Ord}(x'))$.

Demonstração. É uma conseqüência imediata da definição *Df.* 2.2. □

***Teorema* 2.3**: *Sejam* $\mathrm{Ord}(x)$ e $\mathrm{Ord}(y)$ *então*, $\vdash (\forall x)(\forall y)(x' = y' \rightarrow x = y)$.

Demonstração. Por hipótese $x' = y'$. Isto significa que

$(\forall z)(z \in (x \cup \{x\}) \leftrightarrow z \in (y \cup \{y\}))$, pela *Df.* 2.2 e pelo princípio de extensionalidade.

Em particular, $\vdash x \in (x \cup \{x\})$ e, por conseguinte, temos que $x \in (y \cup \{y\})$, via $e\forall$ e MP. De modo similar, $\vdash y \in (y \cup \{y\})$ implica que $y \in (x \cup \{x\})$.

Suponha que $x \neq y$ então, os casos $x \in \{y\}$ e $y \in \{x\}$ estão excluídos e, portanto, $x \in y$ e $y \in x$. Mas, pela *Prop.* 2.3 resulta que,

$\vdash x \in y \rightarrow y \notin x$ assim, $y \in x \wedge y \notin x$, uma contradição. Logo, $x = y$. □

Considere-se, agora, a seguinte definição:

Df. 2.3 $\mathrm{Suc}(x) \equiv_{df} (\exists y)(\mathrm{Ord}(y) \wedge y' = x)$, onde x é um termo no qual a variável y não ocorre.

Isto significa que o conjunto x é um sucessor, somente se for o sucessor de algum número ordinal.

Conseqüentemente, temos a seguinte definição de número *natural*:

$$\mathsf{N}(x) \equiv_{df} \mathrm{Ord}(x) \wedge (x = 0 \vee \mathrm{Suc}(x)) \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y = 0 \vee \mathrm{Suc}(y))$$

onde x é algum termo no qual y não ocorre.

O predicado $\mathsf{N}(x)$ expressa que um número natural é um ordinal x que é 0 ou um sucessor e, tal que, todo elemento de x é 0 ou um sucessor.

Além disso, definimos, com base no conceito de fecho de um conjunto [veja §1 desta seção], o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais como o fecho do conjunto $\{0\}$ sob a relação '$z \cup \{z\}$', via definição (1): $\mathbb{N} := \mathcal{F}(\{0\})$.[32]

Em seguida, demonstramos os postulados de Peano para os conjuntos que satisfazem o predicado $\mathsf{N}(x)$ da definição acima.

§3. Demonstração dos axiomas de Peano

Agora, podemos derivar formalmente, com base nas definições e proposições anteriores, as seguintes propriedades dos números naturais:

AP₁: $\vdash \mathsf{N}(0)$

Demonstração. É uma conseqüência imediata do *Teorema* 2.1. □

AP₂: $\vdash (\forall x)(\mathsf{N}(x) \rightarrow 0 \neq x')$

Demonstração. É uma conseqüência imediata da proposição: $\vdash (\forall x)(0 \neq x')$. Com efeito,

$\vdash 0 = x' \rightarrow x \in 0$, assim, a conclusão segue de $\vdash (\forall x)(x \notin 0)$ e das regras de inferência. □

[32] Em outros termos, $\mathcal{F}(\{0\})$ caracteriza os 'conjuntos hereditariamente finitos' —elementos de V_ω [v. **Apêndice** (A) do Cap. II]— formalmente:

$$\mathcal{F}(\{0\}) = \{x : (\forall X)(\{0\} \sqsubseteq X \wedge (\forall y)(y \in X \rightarrow (y \cup \{y\}) \in X) \rightarrow x \in X)\}.$$

AP$_3$: $\vdash (\forall x)(\mathsf{N}(x) \rightarrow \mathsf{N}(x'))$

Demonstração. Por hipótese: $\mathsf{N}(x)$. Como Ord(x), pela definição de N, segue-se que Ord(x') pelo *Teorema* 2.2. Em conseqüência,

(i) Se $x = 0$ então $x' = 0'$, logo, Suc(x').

(ii) Se Suc(x) então Suc(x'), pois Ord(x).

Por conseguinte, se $y \in x'$, então $y \in x \vee y = x$. Temos que,

(i) Se $y \in x$ então $y = 0 \vee$ Suc(y), pois $\mathsf{N}(x)$.

(ii) Se $y = x$ então $y = 0 \vee$ Suc(y), pois $x = 0 \vee$ Suc(x), via princípio de extensionalidade.

Logo, $\mathsf{N}(x')$. □

AP$_4$: $\vdash (\forall x)(\forall y)((\mathsf{N}(x) \wedge \mathsf{N}(y) \wedge x' = y') \rightarrow x = y)$

Demonstração. É uma conseqüência imediata do *Teorema* 2.3. □

AP$_5$: $\vdash (\forall \phi)(\phi(0) \wedge (\forall x)(x \in \mathbb{N} \wedge \phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow (\forall x)(x \in \mathbb{N} \rightarrow \phi(x)))$

Demonstração. É um caso particular do TEOREMA (*) [veja §1 desta seção], tomando-se $X_1 = \{0\}$ e $\mathbb{N} = \mathcal{F}(\{0\})$.[33] □

§4. Discussão do status epistemológico do conceito de número ordinal

A introdução do conceito de número ordinal na **TGC** permite a derivação formal dos axiomas de **AP**$^{(2)}$ e, por conseguinte, estabelece a analiticidade de **AP**$^{(2)}$. Não obstante, o critério de Tarski não é aplicável diretamente à definição de número ordinal. Neste sentido, a noção de número ordinal requer —no que concerne à logicidade—, uma justificação específica.

Sejam duas cadeias[34] X e Y. Então

X é 'similar (ordinalmente)' a $Y \Leftrightarrow X \cong Y$,

[33] Para uma demonstração utilizando estritamente a teoria dos números ordinais, veja Bernays (1968): Cap. III, §3. Veja também Hatcher (1968): pp. 177-8.

[34] Uma *cadeia* (ou conjunto linearmente ordenado) é um par ordenado $\langle X, \rho \rangle$ tal que, a relação ρ no conjunto X é uma *ordem total* (em X), i.e., ρ é reflexiva (em X), antisimétrica, e transitiva.

i.e., X e Y são *similares* (ordinalmente) se, e somente se, existe um *isomorfismo* de ordem[35] entre os conjuntos X e Y.

Acresce que a existência de um isomorfismo entre dois conjuntos X, Y, parcialmente ordenados, caracteriza o fato de que qualquer propriedade expressável em termos da relação de ordem em X tem uma análoga em Y. Ou seja, essas propriedades são logicamente indiscerníveis com respeito a uma transformação isomórfica entre esses conjuntos. Resulta para X e Y uma *identidade* de estrutura.

Denominamos uma classe de equivalência sob similaridade ordinal de *tipo de ordem*. E, dizemos que o tipo de ordem de um conjunto *bem ordenado*[36] define um número *ordinal*.

Seja $\mathfrak{O}$ uma classe de conjuntos. Em geral, podemos estabelecer que

1. Para cada conjunto bem ordenado X, ord(X) —i.e., o tipo de ordem de X—, está em $\mathfrak{O}$ e $X \cong \mathrm{ord}(X)$;

2. Se $\alpha \in \mathfrak{O}$, então $\mathrm{ord}(\alpha) = \alpha$;

3. Se X e Y são bem ordenados então $X \cong Y \leftrightarrow \mathrm{ord}(X) = \mathrm{ord}(Y)$.

Dado que o conceito de número ordinal pressupõe a *definição* de um isomorfismo entre dois conjuntos, resulta que as propriedades básicas dos números ordinais são aquelas *invariantes* sob transformações de similaridade ordinal.

Este fato não é suficiente para assegurar o caráter lógico do conceito de número ordinal. Entretanto, podemos estabelecer, via critério de Tarski, a logicidade de uma classe de números ordinais. Pois, por definição, um conjunto X é um *cardinal* se, e somente se,

1. X é um ordinal

   e

2. Se α é um ordinal e $\alpha \equiv X$[37], então $X \sqsubseteq \alpha$.

A cada número ordinal $\alpha = \mathrm{ord}(X)$ podemos associar um único número cardinal

---

[35] Uma função $f : X \to X'$ conserva uma relação de ordem (com respeito a uma ordem ρ para X e uma ordem ρ' para X') se, e somente se, $x\rho y \to f(x)\rho' f(y)$. Assim, um *isomorfismo* f entre conjuntos parcialmente ordenados $\langle X, \rho\rangle$ e $\langle X', \rho'\rangle$ é uma correspondência 1-1 entre X e X' tal que ambos f e a sua inversa f^{-1} preservam a relação de ordem.

[36] Um conjunto parcialmente ordenado por ρ é bem ordenado por ρ se todo subconjunto não vazio de X tem mínimo. Em particular, existe $0_X = \min X$. Note que, se X é bem ordenado por ρ então é linearmente ordenado por ρ.

[37] '$\alpha \equiv X$' denota que: 'existe uma função bijetora de α em X'.

κ = Card(X), designando-o por $\kappa = \overline{\alpha}$.

Esta função de números ordinais para os números cardinais não é injetiva pois, há números ordinais diferentes correlacionados ao mesmo número cardinal. Por exemplo,

$$\omega = \mathrm{ord}(\{1, 2, \ldots\})$$

$$\omega 2 = \mathrm{ord}(\{x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots\})$$

são conjuntos com o mesmo número cardinal $\aleph_0$, i.e., $\overline{\omega} = \aleph_0 = \overline{\omega 2}$.

Em virtude do teorema da boa ordenação, a imagem da função anterior é definida no conjunto dos números cardinais. Com efeito, suponha que κ = Card(X) seja um número cardinal qualquer. Então, pelo teorema da boa ordem, X pode ser bem ordenado. Se α = ord(X), então $\kappa = \overline{\alpha}$. Portanto, κ é o número cardinal de pelo menos um número ordinal α.

Como o critério de Tarski é aplicável aos números cardinais [v. sec.II.1, §1] segue-se que o conceito de *ordinal inicial* é de natureza lógica.

Em conseqüência, estabelecemos a logicidade de uma classe de ordinais necessária para a redução lógica de $\mathbf{AP}^{(2)}$.

APÊNDICES DO CAPÍTULO II

(A) $ZF_\omega^{(2)}$ É UM MODELO PARA $AP^{(2)}$

Qualquer estrutura que satisfaça os axiomas da teoria de conjuntos *finitos* em segunda ordem ($\mathbf{ZF}_\omega^{(2)}$) —em que, $\mathbf{ZF}_\omega \equiv \mathbf{ZF}$ – *Ax. do Infinito*— constitui um *modelo* para a aritmética de Peano em segunda ordem ($\mathbf{AP}^{(2)}$). Este resultado foi estabelecido por Ackermann (1937), utilizando-se um modelo cujo domínio (de interpretação) é o conjunto $\mathbb{N}$. Para definir a relação de *pertinência*, necessita-se da seguinte propriedade aritmética:

'*todo número natural **n** tem uma única representação sob a forma:* $\quad n = \sum_{i=1}^{r} 2^{x_i} \quad$ (*)
onde os x's *são números naturais e* $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$.'

Então, para números naturais (i.e., *conjuntos*) x e n, '$x \in n$ *é verdadeiro*' $\Leftrightarrow$ 'x é um expoente na representação de n em (*)'.

Portanto, cada conjunto tem apenas um número *finito* de elementos e o modelo elaborado por Ackermann satisfaz os axiomas de **ZF** excluindo-se o Axioma do Infinito.

Observe que podemos considerar o Axioma do Infinito de **ZF** como estabelecendo a existência do primeiro cardinal denumerável, de maneira que podemos construir um modelo $\mathfrak{N}$ para $\mathbf{ZF}_\omega^{(2)}$, entre os conjuntos de cardinalidade inferior a ω, via teorema de recursão (para ordinais)[1]. De fato, tomando-se:

$f(V_0, 0) = V_0 = \varnothing$, e

$f(V_n, n) = V_{n+1} = F(f|_n)$ onde $F(f|_n) = \bigcup\{\wp(V_n) : V_n \in \operatorname{ran}(f|_n)\}$. Assim,

$V_{n+1} = \wp(V_n)$, $\quad n \in \omega$

$V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n$.

O conjunto V_ω tem as seguintes propriedades (por indução):

1ª. V_ω é transitivo.

2ª. $\omega \subseteq V_\omega$.

---

[1] *Teorema da Recursão*. Seja f uma operação. Para qualquer conjunto A existe uma única seqüência infinita $\langle A_n \mid n\in\omega\rangle$ tal que,
(*i*) $A_0 = A$
(*ii*) $A_{n+1} = f(A_n, n)$ para todo $n\in\omega$.

Todos os conjuntos neste modelo têm cardinalidade finita (menor do que ω): todo $x \in V_\omega$ é *finito*. Além disso, se X é um subconjunto finito de V_ω, então $X \in V_\omega$.

Além disso, $V_\omega = \{x : x \text{ é } \textit{hereditariamente finito}\} = HF$[2]

Assim, $\mathfrak{N}$ é um modelo para a *teoria* de *conjuntos finitos*, no qual a aritmética de Peano pode ser desenvolvida formalmente.

(B) RESULTADOS METATEORÉTICOS PRINCIPAIS

• ***Metateorema de Incompletude.*** *Estabelece que, em qualquer sistema formal ω–consistente*[3] *(adequado para a aritmética elementar), existe uma fórmula válida expressável (numeralmente) no sistema, mas não demonstrável no sistema.*

• ***Metateorema de Indecidibilidade.*** *Se a teoria aritmética é ω–consistente, então esta é indecidível; i.e., se a teoria aritmética é ω–consistente, então o problema de decisão para esta teoria é insolúvel.*

(C) DEFINIÇÕES BÁSICAS DA SEMÂNTICA DA LÓGICA DE SEGUNDA ORDEM

***Df.* I.** Uma *estrutura* de segunda ordem é uma quádrupla $\mathfrak{A} = \langle A; A^*, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{c}^* \rangle$, onde

A denota o *universo* de indivíduos;

$A^* = \langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$, seqüência de universos de *relações* n-árias ($n \geq 0$), $A_n \subseteq \wp(A^n)$;

$\mathfrak{R}^* = \langle R_i^n \mid i, n \in \mathbb{N} \rangle$, seqüência de constantes *relacionais* $R_i^n \in A_n$;

$\mathfrak{c}^* = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, c_i denotam constantes *individuais*.

No caso em que $A_n = \wp(A^n)$, i.e., A_n contém todas as relações n-árias (para todo n), denomina-se $\mathfrak{A}$ de *total*.

***Df.* II.** Uma estrutura de segunda ordem $\mathfrak{A}$ é denominada um *modelo* de segunda ordem se o esquema de *compreensão* $\mathfrak{L}^*$ [v. **Prolegômenos**, sec. II] é válido em $\mathfrak{A}$.

Se $\mathfrak{A}$ é total então, $\mathfrak{A}$ é denominada de modelo *standard* (ou *principal*).

[2] Um conjunto C é *hereditariamente finito* (HF) se seu fecho transitivo (i.e., o menor conjunto transitivo, com respeito a $\subseteq$, que contém C) é finito.
[3] Sistema ω–*consistente*: refere-se a um sistema formal no qual, para quaisquer (meta)variável $\bar{x}$ e fórmula $\mathfrak{P}(\bar{x})$: $\nvdash(\exists\bar{x})\neg\mathfrak{P}(\bar{x})$ *ou* $\nvdash\mathfrak{P}(\mathbf{n})$ para todo número natural n. Note que, se um sistema formal da aritmética é ω–consistente, então este é *consistente*. A recíproca é falsa.

Observação: da definição de modelo resultam duas noções distintas de *validade* (de uma sentença) em segunda ordem:

(*i*) verdadeiro em todos os modelos, i.e., $\models \varphi$ (validade em sentido *geral*);

(*ii*) verdadeiro em todos os modelos principais $\mathfrak{A}$, i.e., $\mathfrak{A} \models \varphi$ (validade em sentido *standard*).

***Df.* III.** *Relação* de *Satisfação* em $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}(\tau)$:

1°. se $c \in A$, então $\alpha\left[\frac{v_k}{c}\right](v_i) = \begin{cases} \alpha(v_i), \text{ se } i \neq k \\ c, \text{ se } i = k \end{cases}$

2°. se $S \subseteq A^n$ então $\alpha\left[\frac{X_k^n}{S}\right](X_i^n) = \begin{cases} \alpha(X_i^n), \text{ se } i \neq k \\ S, \text{ se } i = k \end{cases}$

onde $\alpha(X_i^n) = S_i^n \in \wp(A^n)$ para $n \geq 1$. Assim, definimos

$$\mathfrak{A} \models (\forall X_k^n)\varphi[\alpha] \Leftrightarrow \text{para todo } S \subseteq A^n\text{: } \mathfrak{A} \models \varphi\left[\alpha\left[\frac{X_k^n}{S}\right]\right],$$

$$\mathfrak{A} \models (\exists X_k^n)\varphi[\alpha] \Leftrightarrow \text{para algum } S \subseteq A^n\text{: } \mathfrak{A} \models \varphi\left[\alpha\left[\frac{X_k^n}{S}\right]\right].$$

(D) RESULTADOS DE INCOMPLETUDE EM SEGUNDA ORDEM

• ***Metateorema* I.** *Não existe um sistema axiomático completo para* $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$.

Demonstração. Seja $\mathscr{L}_S^{\mathrm{I}}$ a coleção de sentenças em primeira ordem. Como $\mathbf{AP}^{(2)}$ é categórica, segue-se que, o único modelo de $\mathbf{AP}^{(2)}$, módulo isomorfismo, é $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}; +, \circ, 0, 1 \rangle$, i.e., o modelo standard de aritmética. Supondo-se que a validade em segunda ordem é recursivamente enumerável (*r.e.*) então, para toda *fbf* $\phi \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, onde $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) := \{\varsigma \in \mathscr{L}_S^{\mathrm{I}} : \mathbb{N} \models \varsigma\}$, temos que:

$\mathbb{N} \models \phi \Leftrightarrow \models \mathbf{AP}^{(2)} \rightarrow \phi$. Portanto, Th($\mathbb{N}$) é *r.e.*, ou seja, o conjunto[4] das sentenças aritméticas verdadeiras em primeira ordem, também, é *r.e.*, o que contradiz o teorema de incompletude.

Isto implica a incompletude, em sentido *standard*, da lógica de segunda ordem. □

[4] Note que, nenhum sistema formal-axiomático da aritmética de primeira ordem —suficientemente forte para deduzir o conjunto de sentenças aritméticas verdadeiras (e nenhuma falsa)—, é completo com respeito à negação.

Isto significa que, se fosse possível uma axiomática semanticamente completa, em sentido *standard*, para $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$, então seria admissível inferir dessa axiomática todos os teoremas de Th(ℕ) dos axiomas de **AP**$^{(2)}$, i.e., seria possível uma axiomatização completa de Th(ℕ), o que contradiz o (meta)teorema de incompletude da aritmética.

• ***Metateorema* II.** *Não existe um sistema formal* ($\mathfrak{S}$) *com uma família recursivamente enumerável de axiomas (e de regras) que admita completude fraca para* $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$ (i.e., $\models \phi \Rightarrow \vdash_{\mathfrak{S}} \phi$).

(E) COMPLETUDE EM SENTIDO GERAL DE $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$

• ***Lema.*** *Todo conjunto consistente de sentenças é satisfatível em sentido geral.*

• ***Metateorema.*** *Para qualquer conjunto* Σ *de sentenças e qualquer sentença* ϕ *temos que: se* ϕ *é uma conseqüência em sentido geral de* Σ*, então* ϕ *é derivável sintaticamente de* Σ *em* $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$.

Demonstração. Seja ϕ uma conseqüência (em sentido geral) de Σ. Como toda interpretação geral que satisfaz Σ também satisfaz ϕ, segue-se que, $\not\models \Sigma\cup\{\neg\phi\}$ (em sentido geral). Decorre do lema anterior que $\Sigma\cup\{\neg\phi\}$ é inconsistente. Por conseguinte, $\Sigma\cup\{\neg\phi\}\vdash\phi$. Isto implica que $\Sigma\vdash\phi$. □

Observação. Supondo $\Sigma=\varnothing$, resulta que: qualquer fórmula válida em sentido geral é demonstrável sem premissas em $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$.

Em resumo, em $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$, podemos obter todas as sentenças válidas em sentido geral. Por outro lado, 'todas as fórmulas válidas em sentido geral são válidas em sentido standard'. A recíproca não é verdadeira [v. van Dalen (1997), pp. 151-2].

(F) CATEGORICIDADE DE AP$^{(2)}$

***Df.* I.** Uma estrutura $\langle A;\sigma^A,0^A\rangle$, onde $A\xrightarrow{\sigma^A}A$ é uma função e $0^A\in A$, é denominada uma estrutura de *Peano-Dedekind* somente se:

AP_1: $(\forall x)\sigma(x)\neq 0$

AP_2: $(\forall x)(\forall y)(\sigma(x)=\sigma(y)\rightarrow x=y)$

AP_3: $(\forall X)(0\in X\wedge(\forall x)(x\in X\rightarrow\sigma(x)\in X)\rightarrow(\forall x)(x\in X))$.

• ***Teorema de Dedekind.*** *Toda estrutura* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma^A, 0^A \rangle$ *que satisfaz* AP_i $(i = 1, 2, 3)$ *é isomorfa a* $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; \sigma^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}} \rangle$.

• ***Metateorema 1.*** *Uma teoria* $\mathfrak{T}$ *é completa com respeito à negação se, e somente se, toda sentença de* $\mathfrak{T}$ *que é verdadeira em um modelo de* $\mathfrak{T}$ *é verdadeira em todo modelo de* $\mathfrak{T}$.

• ***Metateorema 2.*** *Se* $\mathfrak{T}$ *é categórica, então* $\mathfrak{T}$ *é completa com respeito à negação.*

Demonstração. Por hipótese $\mathfrak{T}$ é categórica. Então, uma sentença que é verdadeira em um modelo de $\mathfrak{T}$ é verdadeira em qualquer modelo. Portanto, $\mathfrak{T}$ é completa com respeito à negação [pelo *metateorema* 1]. □

(G) DEFINIÇÃO RECURSIVA DE FUNÇÕES-CONCEITO DE NÍVEL SUPERIOR

Seja υ uma *valoração*. Podemos estabelecer recursivamente uma escala de funções-conceito:

(*i*) função-conceito (unária) de *primeiro nível*:

$$X \xrightarrow{f_\varphi^{(1)}} \Omega \;;\; f_\varphi^{(1)} x = \begin{cases} \mathsf{V}^\circ, & \text{se} \quad \upsilon(\varphi(x)) = \top \\ \mathsf{F}^\circ, & \text{se} \quad \upsilon(\neg\varphi(x)) = \bot \end{cases}.$$

(*ii*) função-conceito (unária) de *segundo nível*:

$$X \times \Omega \xrightarrow{f_{\Phi_1}^{(2)}} \Omega$$

$$\langle x, f_\varphi^{(1)} x \rangle \mapsto f_{\Phi_1}^{(2)}(x, f_\varphi^{(1)}) = \begin{cases} \mathsf{V}^\circ, & \text{se} \quad \upsilon\left(\Phi_1(x, f_\varphi^{(1)} x)\right) = \top \\ \mathsf{F}^\circ, & \text{se} \quad \upsilon\left(\neg\Phi_1(x, f_\varphi^{(1)} x)\right) = \bot \end{cases}$$

(*iii*) função-conceito (unária) de (n+1)-ésimo *nível* ($n \geq 1$): é obtida de uma função-conceito de n-ésimo nível, generalizando-se o procedimento. Com efeito,

$$X \times \Omega \times \ldots \times \Omega \xrightarrow{f_{\Phi_n}^{(n+1)}} \Omega$$

$$\langle x, f_\varphi^{(1)} x, \ldots, f_{\Phi_{n-1}}^{(n)} \vartheta \rangle \mapsto f_{\Phi_n}^{(n+1)}(x, f_\varphi^{(1)} x, \ldots, f_{\Phi_{n-1}}^{(n)} \vartheta) = \begin{cases} \mathsf{V}^\circ, & \text{se} \quad \upsilon\left(\Phi_n(x, f_\varphi^{(1)} x, \ldots, f_{\Phi_{n-1}}^{(n)} \vartheta)\right) = \top \\ \mathsf{F}^\circ, & \text{se} \quad \upsilon\left(\neg\Phi_n(x, f_\varphi^{(1)} x, \ldots, f_{\Phi_{n-1}}^{(n)} \vartheta)\right) = \bot \end{cases}$$

onde ϑ denota uma n-tupla obtida a partir das funções-conceito precedentes.

CAPÍTULO III

As ramificações do problema central desta tese e as principais implicações filosóficas da redução lógica da aritmética elementar, por intermédio da derivação da *teoria geral de conjuntos* —com referência à base axiomático-definicional estabelecida nos **Prolegômenos**—, são discutidas neste capítulo. A discussão epistemológica, dos resultados anteriores, será direcionada aos aspectos lógico-extensional, semântico e tópico-neutro do sistema lógico de ordem superior $\mathfrak{L}$.

III.1 RAMIFICAÇÕES DO PROBLEMA CENTRAL

Nesta seção, consideramos: a formulação de um critério geral de analiticidade para definições contextuais em segunda ordem; a relevância filosófica do princípio de equipolência lógica e, a discussão sobre um teorema de infinidade com relação às principais doutrinas filosóficas para a fundamentação lógica da aritmética.

§1. Critério geral de analiticidade

No Cap. II, sec. II.2, §3 introduzimos o problema *central* desta tese, i.e., o problema sobre as (pré-) condições para a especificação simultânea do domínio e das interpretações das fórmulas do sistema lógico $\mathfrak{L}$ com referência a esse domínio de quantificação. A resposta a esse problema, apresentada nesta tese, é dada pelos seguintes princípios gerais: *esquema* de *compreensão* [v. Prop. (*), **Prolegômenos II, §4**], definição de *função-conceito* [v. *Df.* II.6.1, **Prolegômenos II, §5**] e o princípio de *equipolência lógica* [v. Teorema Principal, sec. II.2, §3].

Estes princípios lógicos, com base nos resultados estabelecidos no capítulo II, são suficientemente fortes para a demonstração dos axiomas da teoria geral de conjuntos (**TGC**), que constitui, por seu turno, o arcabouço teórico para a derivação formal de $\mathbf{AP}^{(2)}$. Expressando-se, por intermédio destes princípios, as condições (suficientes) para fixar, de maneira concomitante, o domínio de predicação e os valores-verdade das fórmulas de $\mathfrak{L}$ com relação a esse domínio —via função-conceito, cuja existência é determinada pelo esquema de compreensão—, por conseguinte, estabelecemos uma correlação lógica entre um predicado, expressável na linguagem do sistema lógico estendido, e um domínio qualquer de objetos.

Como conseqüência deste resultado, e baseando-se na redefinição de analiticidade [introduzida na sec. II.2, §1], apresento uma resposta a um problema epistemológico subordinado:

Sobre a formulação de um princípio de demarcação para definições contextuais analíticas.[1]

Em outros termos, trata-se da formulação de um critério geral para demarcar princípios contextuais que são verdades lógicas.

Critério de Analiticidade: *uma definição contextual expressável sob a forma*

$$\forall\varphi\forall\psi\big(\lambda x.\mathbb{F}_{\varphi}(x,\nu) = \lambda x.\mathbb{F}_{\psi}(x,\nu)\leftrightarrow \mathrm{E}_x(\varphi(x),\psi(x))\big) \qquad (\blacklozenge)$$

em uma linguagem de ordem superior é analítica se, e somente se:

(*i*) *a sentença* ($\blacklozenge$) *é válida em sentido geral* (*e, por conseguinte, em sentido standard*),

ou,

(*ii*) *a sentença* ($\blacklozenge$) *é derivável formalmente do princípio de equipolência lógica.*

Seja ς uma sentença qualquer de $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$. E, seja $\mathscr{L}^{\mathrm{II}} + \mathfrak{B}(\varsigma)$ a expansão de $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$ pela adição da seguinte definição contextual:

$\mathfrak{B}(\varsigma)$: $$\lambda x.\mathbb{F}_{\varphi}(x,\nu) = \lambda x.\mathbb{F}_{\psi}(x,\nu) \leftrightarrow \big(\mathrm{E}_x(\varphi(x),\psi(x))\vee\varsigma\big)^2$$

Considerem-se os casos seguintes:

1. Suponha que $(\forall\mathfrak{A})\ \mathfrak{A}\models\varsigma$, i.e., ς é válida com a interpretação *standard* (*i. s.*). Então, podemos expandir qualquer modelo $\mathfrak{A}$ (em *i. s.*) a um modelo $\mathfrak{A}'$ (em *i. s.*) para $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}+\mathfrak{B}(\varsigma)$.

2. Suponha que ς *não* é válida em sentido standard, i.e., $(\forall\mathfrak{A})\ \mathfrak{A}\models\neg\varsigma$. Então, temos que

$$\lambda x.\mathbb{F}_{\varphi}(x,\nu) = \lambda x.\mathbb{F}_{\psi}(x,\nu)\leftrightarrow \mathrm{E}_x(\varphi(x),\psi(x)) \qquad (\mathfrak{B})$$

pois, ς é logicamente falsa.

Por conseguinte, para todo modelo com interpretação standard, temos que:

(*i*) $(\forall\mathfrak{A})\ \mathfrak{A}\not\models\mathfrak{B}$

ou

[1] 'How to demarcate those contextual definitions that should count as logical truths in some extended sense of the expression from those that should not ...' [v. Boolos (1993), *Whence the Contradiction*?, p. 228]

[2] Note que, se $\mathrm{E}_x(...)$ é uma relação de equivalência então, $\mathrm{E}_x(...)\vee\varsigma$ também é uma relação de equivalência.

(*ii*) $(\forall\mathfrak{A})\ \mathfrak{A}\models\mathfrak{B}$

Portanto, os casos 1 e 2(*i*) combinados mostram que: se fosse decidível (recursivamente) que a definição contextual $\mathfrak{B}$ é válida em sentido standard, então seria decidível se uma sentença arbitrária ς é válida em sentido standard[3]. Mas, em conseqüência da incompletude de $\mathscr{L}^{\mathrm{II}}$ em sentido standard [v. **apêndice** (D), Cap. III], isto *não* é possível.

Por outro lado, nos casos 1 e 2(*ii*), como validade em sentido standard *não* implica validade em sentido geral, segue-se que $\mathfrak{B}$ é *analítica* se, e somente se, $\mathfrak{B}$ é derivável do princípio de equipolência lógica (pelo critério de analiticidade).

Isto significa que, independemente da indecidibilidade da validade (em sentido standard) de uma definição contextual —expressável sob a forma (♦)—, o critério de analiticidade permite caracterizar recursivamente um *subconjunto* de todas as definições contextuais em segunda ordem válidas em sentido geral e/ou deriváveis do princípio de equipolência lógica.

§2. Equipolência lógica

A lei de equipolência lógica [v. *Teorema Principal*, sec. II.2, §3] —derivável formalmente da definição de função-conceito, via axioma da extensionalidade ($\mathfrak{L}$.1)—, consiste em um princípio de abstração, i.e., em uma igualdade extensional que estabelece que duas funções-conceito são idênticas com respeito à equivalência lógica de suas propriedades definidoras. A relevância deste princípio reside na demonstração de analiticidade de um análogo formal da 'lei V' das *Grundgesetze* [v. Corol. 1, sec. II, §3].

Análogo formal que, por sua vez, torna possível a demonstração do princípio de *equipotência* ($\mathfrak{N}^{=}$) entre conjuntos. E, por conseguinte, estabelece a redução lógica da teoria dos números *cardinais* (finitos). Resultado fundamental para um projeto reducionista neo-logicista.

Observe que o princípio de Hume ($\mathcal{N}^{=}$) *não* satisfaz o critério de analiticidade:

$\mathcal{N}^{=}$ não é derivável do princípio de equipolência lógica e não é válido.

Sob este aspecto trata-se em primeiro lugar de considerar que os operadores (de cardinalidade) '$\mathfrak{K}$' e '$\mathcal{N}$' são conceitualmente diferentes pois, simbolizam noções incompatíveis — em virtude da antinomia de Russell—, visto que o conjunto formado por todos os conjuntos que não pertencem a si próprios não pode ser elemento de nenhum conjunto.

[3] Isto é, seria decidível se ς é satisfatível em todos os modelos principais de segunda ordem. Observe que, neste caso, $\mathfrak{B}(\varsigma)$ é válida em sentido standard $\Leftrightarrow$ ς é válida em sentido standard.

Em segundo lugar, temos as seguintes relações lógicas entre $\mathcal{N}^{=}$ e $\mathbb{N}^{=}$ (supondo-se Consis($\mathbf{AP}^{(2)}$)):

Eq. L. $\Rightarrow \mathbb{N}^{=} \nRightarrow \mathbf{AP}^{(2)}$

Eq. L. $\nRightarrow \mathcal{N}^{=} \Rightarrow \mathbf{AP}^{(2)}$

onde **Eq. L.** denota o princípio de equipolência lógica.

Podemos expressar $\mathbb{N}^{=}$ da seguinte forma: existe uma função ϑ de *conceitos* (de primeiro nível) a *conceitos* de segundo nível, tal que

$$(\forall H)\big(\vartheta_x(Fx)(Hx) \leftrightarrow \vartheta_x(Gx)(Hx)\big) \leftrightarrow \approx_x (Fx;Gx) \qquad (*)$$

onde '$\approx_x$' denota a relação de equinumerosidade.

De fato, é suficiente tomar $\vartheta(...)$ como $\approx_x(Fx; ... x ...)$ em (*).

Não obstante, (*) *não permite uma demonstração dos axiomas da aritmética de segunda ordem*. Pois, para realizar esta derivação formal, é necessário recorrer ao conjunto *universal*, viz., $V = \{x : x = x\}$.

A demonstração de um teorema de infinidade (i.e., que V é infinito) implica o postulado de Peano[4]: '*para todos os números naturais* ***m*** *e* ***n****, se* $\mathfrak{s}$***m*** $=$ $\mathfrak{s}$***n*** *então* ***m*** $=$ ***n***'; onde '$\mathfrak{s}$' denota a função sucessor. No entanto, a antinomia de Cantor pode ser deduzida nesse sistema.

§3. Discussão sobre um teorema de infinidade

Consoante a demonstração dos postulados de Peano com referência à base axiomática da **TGC** e ao conceito de número ordinal [veja a sec. II.3 do capítulo anterior], deve ser assinalado que, para o desenvolvimento de todas as propriedades básicas dos números naturais não há necessidade de um axioma de *infinidade*. Isto significa que, em relação ao enfoque lógico-epistemológico proposto nesta tese, um projeto 'neo-logicista' de fundamentação lógica da aritmética pode ser implementado sem recorrer a um axioma que prescreva a existência de um conjunto infinito.

Por outro lado, no tocante ao projeto Fregeano, um teorema de infinidade, demonstrável por axiomas lógicos e definições, era uma pré-condição para estabelecer o postulado de Peano —

[4] Veja Hatcher (1968), pp. 103-9.

sobre a injetividade da função sucessor—, citado acima. Contudo, não é possível demonstrar a existência de um conjunto universal[5].

Quanto ao enfoque logicista de Dedekind, apresentado na monografia '*Was sind und was sollen die Zahlen*?', cabe observar que: a *transcrição* de sentenças acerca de propriedades dos números naturais em sentenças logicamente verdadeiras (sobre todas as estruturas satisfazendo os postulados de Peano) pressupõe —conforme apontado por Boolos (1990)—, a existência de um conjunto infinito.

Boolos afirma que:

> We have seen that in order to be able to claim that the function that assigns $\forall N,s,1(\alpha,\beta,\gamma,\delta(N,s,1) \to S)$ to any sentence S of arithmetic shows that "arithmetic is a part of logic", Dedekind needs a proof from logical truths that *there are infinitely many objects*. [O grifo é meu]

Uma sentença da aritmética (expressa por uma sentença S em lógica de segunda ordem), na qual todos os quantificadores referem-se ao predicado monádico N, à função monádica s e à constante 1, tem a forma lógica seguinte:

$$\forall N,s,1(\alpha,\beta,\gamma,\delta(N,s,1) \to S) \qquad (*)$$

onde as condições α, β, γ, δ denotam os axiomas de Peano.

Boolos mostra que, para *traduzir* uma dada sentença aritmética S em uma sentença Tr(S) de segunda ordem da forma expressa por (*), contendo apenas constantes lógicas, é preciso recorrer a um axioma de infinidade. Caso contrário, não será possível estabelecer nenhuma relação lógica entre S e Tr(S).

Com relação à *teoria* dos *tipos* (**TT**) de Russell-Whitehead, as *fbf*'s de **TT** válidas são aquelas *fbf*'s verdadeiras em todas as hierarquias de tipos. Todavia, o axioma do infinito *não* é verdadeiro numa hierarquia de tipo com um domínio finito de indivíduos. Por conseguinte,

---

[5] Este fato é conseqüência da proposição seguinte:
Proposição (*)

1. Não existe um conjunto X tal que, para todo x, $x \in X$;

2. Seja um conjunto $X \neq \varnothing$. Não existe um conjunto Z tal que, para todo conjunto Y, se existir uma função bijetora $Y \xrightarrow{f} X$, então $Y \in Z$;

3. Seja um conjunto $X \neq \varnothing$. Não existe um conjunto Z tal que, para todo conjunto Y, se existir uma função *injetora* $Y \xrightarrow{f} X$, então $Y \in Z$.

conforme a definição de analiticidade, este axioma não é um princípio verdadeiro universalmente, e portanto, não expressa uma verdade da lógica formalizável em **TT**.

III.2 CONSEQÜÊNCIAS LÓGICO-EPISTEMOLÓGICAS

§1. Sistema de lógica extensional

As antinomias de (Zermelo-)Russell e de Cantor produziram, de certa forma, uma 'cisão' entre a lógica de primeira ordem e a teoria de conjuntos. Isto é, as antinomias da teoria de conjuntos causaram, com relação à utilização do princípio de *abstração* (irrestrito), uma espécie de 'solução de continuidade' entre o enfoque lógico-axiomático e o tratamento conjuntista, necessários aos fundamentos lógicos da aritmética. Não obstante, o fato de a lógica de primeira ordem ser a linguagem básica para certas axiomatizações da teoria de conjuntos e, esta última consistir no 'substrato' (*framework*) para a teoria de modelos e semântica formal. A estratégia formulada nesta tese visa o restabelecimento de uma inter-relação entre um sistema lógico (de ordem superior) e a teoria geral de conjuntos.

Essa inter-relação decorre da demonstração dos axiomas da teoria geral de conjuntos, por meio de um axioma e um esquema de compreensão *analíticos*, bem como, de definições básicas, formalizáveis na linguagem do sistema lógico $\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ caracteriza-se como um sistema de *lógica extensional* pelo fato de que os conjuntos (e as classes) constituem um substrato do sistema lógico $\mathfrak{L}$. Além disso, é estabelecida uma conexão entre predicados e conjuntos. Essa conexão conceitual faz-se mediante a definição de *função-conceito* e via *Df.* II.6.2 [v. sec. II, §5 dos **Prolegômenos**].

Deve ser assinalado que, em $\mathfrak{L}$, toda função-conceito determina uma relação de equivalência sobre o domínio de definição dessa função-conceito. Isto significa que *toda função-conceito* f_ϕ (definida pelo predicado ϕ) determina uma *extensão* $\partial_D\phi(x)$, i.e., uma classe de equivalência $f_\phi^{-1}(\mathrm{V}^\circ) \sqsubseteq dom(f_\phi)$[6].

Esta definição de extensão de um predicado, com respeito ao domínio de uma função-conceito, caracteriza a conexão entre a *teoria geral de conjuntos* e o sistema de *lógica extensional*

---

[6] A extensão de um predicado, com respeito a um domínio D, é um conjunto *vazio* somente se, $\mathrm{V}^\circ \notin im(f_\phi)$. Pois, apenas para predicados da forma $(\forall x)(Px \wedge \neg Px)$, onde P denota uma propriedade qualquer, temos que

$$(\forall D)(\forall x)(\partial_D\phi(x) = \varnothing) \Leftrightarrow (\forall D)(\forall x) f_\phi x \neq \mathrm{V}^\circ \text{, i.e., } (\forall x)\neg\phi(x).$$

$\mathfrak{L}$, na medida em que, a operação de formação da classe de equivalência $\partial_D\phi(x)$, de um predicado $\phi(x)$, consiste em uma *operação lógica* irrestrita e independente de um axioma de compreensão específico. Dispõe-se, desta forma, de um procedimento que permite distinguir um conjunto D, considerado como domínio de *predicação* (ou classe de referência), de um dado predicado $\phi(x)$, da extensão $\partial_D\phi(x)$ desse predicado com respeito a D[7].

Acrescento que a *identidade* de duas extensões $\partial_D\varphi(x)$ e $\partial_D\psi(x)$ (i.e., a *co-extensionalidade* dos predicados φ e ψ com respeito ao domínio de predicação D) implica que: $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ determinam a mesma classe de equivalência sobre D, i.e., $\bar{x}_{E_{f_\varphi}} = \bar{x}_{E_{f_\psi}}$ e, reciprocamente; onde E_{f_φ} (E_{f_ψ}) é a relação de equivalência induzida pela função-conceito f_φ (f_ψ).

Com referência às diferenças entre teorias de conjuntos e sistemas lógicos de ordem superior, como o sistema $\mathfrak{L}$, considerem-se, em seguida, as seguintes observações de Boolos.

Tendo em vista que, um sistema lógico de ordem superior pressupõe a *existência* de conjuntos, devemos considerar em que sentido esse sistema lógico relaciona-se com uma teoria de conjuntos. Segundo Boolos (1975)

> First of all, "in second-order logic one quantifies over sets." There are certain (second-order) sentences of any given language that will be classified by second-order logic as logical truths (i.e., as valid), even though they assert, under any interpretation of the language whose domain forms a set, the *existence of certain sorts of subsets of the domain.* (The sort depends upon the interpretation.)[8] [O grifo é meu]

Na asserção: 'na lógica de segunda ordem quantifica-se sobre conjuntos', está implícita a pré-condição de existência de um *domínio* de quantificação (não-vazio). Sob um aspecto semântico, se uma dada sentença, formalizável em uma linguagem de segunda ordem, quantificada com respeito a esse domínio de objetos é considerada na acepção de *generalidade* —i.e., como sendo o conceito que convém a todos os indivíduos de uma classe— então, essa sentença será uma verdade lógica somente se, sua valoração for independente de uma interpretação específica (na metalinguagem), fixando um certo conjunto (*subconjunto* desse domínio de quantificação) que

[7] Note que, a extensão $\partial_D\phi(x)$ *não* é um *sub*conjunto de qualquer outro conjunto que contenha somente elementos x tais que $\phi(x)$ é verdadeiro. Contudo, dado que, a princípio, é possível que exista um domínio de predicação X, tal que, $D \sqsubseteq X$ com $\hbar_\phi : X \rightarrow \Omega$, $\hbar_\phi\, x = \mathrm{V}^\circ$ para algum $x \in X - D$, decorre que:

a função-conceito $\hbar_\phi$ '*estende*' f_ϕ ao domínio X para o qual $\partial_X\phi(x) \neq \varnothing$.

[8] Veja "*On Second-order Logic*", p. 516.

satisfaz uma dada propriedade definível na linguagem-objeto. Assim, nesta acepção, a noção de *validade*, i.e., de verdadeiro sob qualquer interpretação, é um conceito anterior ao conceito de 'verdade lógica'.

De fato, como Boolos acrescenta, o conjunto vazio é o único conjunto com cuja existência pode-se dizer que a lógica de segunda ordem está comprometida. Pois, conforme assinala

> For since the empty set is a subset of the domain of every interpretation whatsoever and is the only set to which no members of any domain belong, '$\exists X\, \forall x\, \neg Xx$' may be taken to assert the existence of the empty set independently of any interpretation, ...[9]

Acrescento que, com relação ao aspecto extensional do sistema lógico $\mathfrak{L}$, a base axiomático-definicional [introduzida nos **Prolegômenos** desta tese] diferencia-se, de um ponto de vista filosófico, do enfoque de Dedekind.

Como afirma Ferreirós, no projeto reducionista de Dedekind, "as noções de conjunto e aplicação formam parte da lógica, e ... são a parte da lógica essencial para derivar a matemática" [v. Ferreirós (1994), p.261]. Ferreirós acrescenta que o logicismo de Dedekind fundamenta-se em uma teoria de conjuntos[10] e aplicações sem nenhuma referência à lógica proposicional ou ao cálculo de predicados.

Não obstante, com base na análise epistemológica que apresento no capítulo II, esta abordagem *à la* Dedekind somente será considerada um enfoque logicista se, a exemplo da abordagem de Löwenheim-Skolem, a noção de demonstração for substituída pela noção de validade.

O enfoque neo-logicista, em contraposição com esta perspectiva lógico-extensional, que proponho nesta tese, pressupõe, obviamente, uma base axiomático-definicional incorporada a um fragmento da lógica de ordem superior. Apresentando-se uma justificação epistemológica dos axiomas e definições —que formam essa base axiomático-definicional—, de modo que a logicidade dessas definições e a analiticidade dos axiomas sejam asseveradas, respectivamente, por intermédio do critério de Tarski e, via (re)definição de analiticidade.

---

[9] *op. cit.*, p. 520.

[10] Dedekind admitia, antes da descoberta da antinomia de Zermelo-Russell, que o axioma da abstração (irrestrito) em primeira ordem e o axioma da extensionalidade eram verdades lógicas.

§2. Aspectos semânticos e tópico-neutralidade de $\mathfrak{L}$

A derivação sintático-formal dos axiomas da teoria geral de conjuntos (finitos) em segunda ordem, por meio da base axiomático-definicional e do conjunto de regras de inferência de $\mathfrak{L}$, estabelece a analiticidade dos axiomas desta teoria. Isto equivale a afirmar, dado que a totalidade das fórmulas *analíticas* de $\mathfrak{L}$ não depende de nenhum outro pressuposto (extra-lógico), que a classe de conseqüências (sintáticas) de $\mathfrak{L}$ é independente de qualquer teoria matemática; expresso de outra forma, as sentenças demonstráveis em $\mathfrak{L}$ são *satisfeitas* em todos os modelos de segunda-ordem (sob a interpretação *standard*).

Esta descrição caracteriza o fato de que o arcabouço semântico do sistema lógico $\mathfrak{L}$, mediante a demonstração dos axiomas da **TGC**, pode ser desenvolvido *independentemente* de qualquer teoria matemática particular.

De um modo geral, a teoria de conjuntos é identificada com o substrato referencial da lógica de ordem superior, ou seja, com a base que permite fixar as noções metalingüísticas de interpretação, verdade e validade. Segundo Boolos (1975)

> [T]he definability in set theory of the notion of second-order validity at once guarantees both the nonexistence of a reduction of the notion of set-theoretical truth to that of second-order validity and the existence of a reduction in the opposite direction ... (otherwise set-theoretical truth would be set-theoretically definable). However, the function that assigns to each formula of second-order logic the sentence of set theory that asserts that the formula *is* a second-order logical truth *reduces second-order validity to set-theoretical truth.*[11] [O grifo é meu]

Boolos observa que, na sucessão: ⟨*validade* de primeira ordem, *verdade aritmética* de primeira ordem, *verdade aritmética*[12] de segunda ordem, *validade* de segunda ordem, *verdade em teoria de conjuntos*⟩, cada uma dessas noções metalingüísticas pode ser reduzida formalmente, via funções efetivas, à subseqüente na sucessão, mas, a redução no sentido inverso não é possível. Assim, a redutibilidade da noção de validade (em segunda ordem) à noção de verdade em teoria de conjuntos é compatível com a redução lógica efetuada por intermédio da demonstração dos axiomas da **TGC** com base no sistema lógico $\mathfrak{L}$.

Outro aspecto a ser considerado —com referência ao aspecto semântico de sistemas lógicos de ordem superior—, diz respeito à *tradução* efetiva da linguagem da lógica de segunda ordem em

---

[11] *op. cit.*, pp. 518-9.

[12] Observe que, a verdade das sentenças da lógica de primeira ordem é *definível* numa linguagem (expandida) de segunda ordem monádica.

uma linguagem lógica de primeira ordem tal que, a noção de demonstração é conservada. Toda teoria de ordem superior pode ser traduzida,[13] em um sentido preciso, numa teoria de primeira ordem, por meio de:

(*i*) adição de uma seqüência (Ap_i) de predicados (i+1)-ários: Ap_0, Ap_1, ..., Ap_i, ... tal que, cada $Ap_n(x, y_1, ..., y_n)$ é da forma $x^n(y_1, ..., y_n)$;

(*ii*) quantificação restrita;

(*iii*) codificação dos símbolos da linguagem de segunda ordem.

Este procedimento de transcrição simbólica justifica, também, a utilização de propriedades básicas da teoria de modelos. Pois, certas noções, e.g., validade no sentido standard, que são verificadas apenas relativamente à semântica da lógica de segunda ordem, não apresentam correlação na semântica de primeira ordem.

Com efeito, podemos considerar, prima facie, a *tópico-neutralidade* do sistema $\mathfrak{L}$ na acepção de *aplicabilidade universal*[14]. No entanto, o sistema $\mathfrak{L}$ *não* é ontologicamente *neutro*, pois não apresenta conteúdo informativo (-conjuntista) *nulo*, dada sua natureza extensional, discutida na subseção anterior.

Conforme assinalado por Friedman (1988),

> Frege's construction of arithmetic is not simply the embedding of a *special mathematical theory* (arithmetic) in a more *general one* (set theory). Frege's *Begriffsschrift* is not intended to be a mathematical theory at all; rather, it is to function as the *logical framework* that governs all rational thinking (and therefore all particular theories) whatsoever. As such, it has *no special subject matter* (the universe of sets, for example) with which we are acquainted by "intuition" or any other special faculty. [O grifo é meu][15]

Segundo Friedman, o projeto Fregeano não visa simplesmente reduzir uma teoria matemática *particular* a uma teoria matemática *geral* (i.e., uma teoria de conjuntos). Dado que, o *Begriffsschrift* de Frege constitui um arcabouço de natureza estritamente *lógica*.

---

[13] Robinson (1974) apresenta um método geral para a representação de teorias de ordem superior sob uma formalização de primeira ordem [v. pp. 19-48]. Veja também, van Dalen (1997), pp. 150-1.

[14] No sentido de que, um sistema lógico é aplicável de forma independente do domínio de objetos, i.e., suas regras de inferência e axiomas são universalmente verdadeiros.

[15] Veja "*Logical Truth and Analyticity in Carnap*", p. 84.

Nesta acepção, observo que, a realização do projeto logicista de Frege requer: ou uma redução *imediata* da aritmética elementar a um sistema lógico ou, necessariamente, que esse sistema lógico (de ordem superior) *contenha* uma teoria geral de conjuntos.

A perspectiva filosófica 'neo-logicista' que defendo nesta tese requer, obviamente, que a redução lógica de $\mathbf{AP}^{(2)}$ seja realizada por *intermédio* da **TGC**.[16] Todavia, foi justificado em termos lógico-epistemológicos —via derivação dos axiomas da **TGC**—, a analiticidade da base axiomática que constitui a **TGC** [v. Cap. II: sec. II.2, §4].

Sob este enfoque, a **TGC** *não* está simplesmente 'incorporada' à linguagem do sistema lógico £. Por conseguinte, o tratamento lógico-extensional que caracteriza £ não consiste em um enfoque 'neo-Fegeano'.

Friedman observa, no excerto acima, que a abordagem reducionista Fregeana não tem um *objeto* especial de estudo, e.g., o universo de conjuntos; em conseqüência, o sistema lógico de Frege seria *tópico-neutro*. Pois, seria aplicável universalmente e ontologicamente neutro.

No âmbito do sistema lógico £ conjuntos são considerados —numa acepção lógica—, como *indivíduos*. Neste sentido, ao contrário do que Friedman afirma, a compreensão da noção de conjunto não pressupõe uma 'faculdade' especial ou 'intuição' sensível. E, conseqüentemente, a redução lógica da aritmética não é dependente de nenhuma intuição espaço-temporal. Além disso, em consonância com os *pressupostos* ontológicos admitidos nesta tese, conjuntos (e classes) são objetos *abstratos*, i.e., objetos sem localização espaço-temporal. E, portanto, o conhecimento desses objetos *não* é condicionado por nenhuma intuição sensível.

[16] Pois, a redução formal da **TGC** a um sistema lógico (fragmento de ordem superior) *implica* a redução lógica de $\mathbf{AP}^{(2)}$.

CONCLUSÕES

Como a aritmética de Peano (em segunda ordem) —baseada na definição de número natural de von Neumann— pode ser desenvolvida (interpretada) formalmente na Teoria Geral de Conjuntos e, os axiomas desta teoria são *demonstráveis* com referência à base axiomático-definicional do sistema lógico de ordem superior £, resulta que este sistema lógico realiza a *redução lógica* dos axiomas da aritmética de Peano.

Expresso de outra forma, a abordagem lógico-epistemológica, apresentada nesta dissertação, é suficiente para a demonstração (metalógica) da *tese logicista* restrita. Concluindo, acrescento que, o axioma £.1, o esquema de compreensão, a definição de função-conceito, o princípio de equipolência lógica e o critério de Tarski constituem a base filosófico-analítica de um projeto *neo*-logicista de fundamentação da aritmética.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACKERMANN, W.

1937. "Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre", *Math. Ann.* **114:** 305-15.

ACZEL, P.

1980. "Frege Structures and the Notions of Proposition, Truth and Set". In: *The Kleene Symposium.* Barwise, Ed. (1980); pp. 31-60.

BARWISE, J. (ED.)

1980. *The Kleene Symposium, 'Studies in Logic'* **101**. North-Holland, Amsterdam.

BELL, J. L.

1995. "Type Reducing Correspondences and Well-Orderings: Frege's and Zermelo's Constructions Re-examined". In: *The Journal of Symbolic Logic*, vol. **60**, **1**; pp. 209-21.

BENACERRAF, P.

1981. "Frege: The Last Logicist". *Midwest studies in philosophy* **VI**, P. French (ed.), pp. 17-35. Reprinted in Demopoulos (1995), pp. 41-67.

BENACERRAF, P. AND PUTNAM, H. (ED)

1983. *Philosophy of Mathematics.* Cambridge Univ. Press, II edition.

BERNAYS, P.

1958. *Axiomatic Set Theory*. North-Holland, Amsterdam.

BLACK, M. (ED.)

1965. *Philosophy in America.* Cornell Univ. Press.

BOLZANO, B.

1972. *Theory of Science*. Ed. and transl. by R. George. Univ. of California Press, Berkeley.

BOOLOS, G.

1975. "On Second-order Logic". In: *The Journal of Philosophy*, **LXXII**, **16**; pp. 509-27.

1987a. "The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*". In : Thomson, Ed. (1987), pp. 3-20.

1987b. "Saving Frege from Contradiction". In: *Proceedings of the Aristotelian Society*, **new series, 87**, pp. 137-51. Reprinted in Demopoulos, Ed. (1995), pp. 438-52.

1990. "The Standard of Equality of Numbers". In: Boolos, Ed. (1990); pp. 261-77. Reprinted in Demopoulos (ed.) (1995), pp. 234-54.

1993. "Whence the Contradiction?". In: *Proceedings of the Aristotelian Society*, suppl. **67**, p. 213-33.

1995. "Frege's Theorem and the Peano Postulates". In: *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, **3**; pp. 317-26.

BOOLOS, G. (ED.)

1990. *Meaning and method: essays in honor of Hilary Putnam.* Cambridge Univ. Press.

BURGE, T.

1984. "Frege on Extensions of Concepts from 1884 to 1903". In: *The Philosophical Review* **XCIII, 1**; pp. 3-34.

BURGESS, J. P.

1984. "Review of Wright's book: Frege's conception of numbers as objects". In: *The Philosophical Review*, **93**; pp. 638-40.

1993. "Hintikka *et* Sandu *versus* Frege *in re* arbitrary functions". In: *Philosophia Mathematica.* Series **III, 1**; pp. 50-65.

CARNAP, R.

1928. *Der logische Aufbau der Welt.* Berlin: Weltkreis.

1931. "Die logizistische Grundlegung der Mathematik". *Erkenntnis*, vol. **2**. Translated as "The Logicist Foundations of Mathematics" by E. Putnam and G.J. Massey in Benacerraf and Putnam, Ed. (1983).

1934. *Logische Syntax der Sprache*. Springer.

1937. *The Logical Syntax of Language*. Transl. of Carnap (1934) by A. Smeaton. Routledge & Kegan Paul. London.

CIFUENTES V., J. C.

1992. *O Método dos Isomorfismos Parciais*. Coleção CLE-Unicamp, vol. 10.

COFFA, J. A.

1991. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*. Cambridge Univ. Press.

DEDEKIND, R.

1888. *Was sind und was sollen die Zahlen*? Braunschweig: Vieweg.

1930/32. *Gesammelte mathematische Werke*. Braunschweig: Vieweg.

DEMOPOULOS, W. AND BELL, J. L.

1993. "Frege's theory of concepts and objects and the interpretation of second-order logic". *Philosophia Mathematica*. Series **III**, **1**; pp. 139-56.

DEMOPOULOS, W. (ED.)

1995. *Frege's Philosophy of Mathematics*. Harvard Univ. Press.

DUMMETT, M.

1991. *Frege: Philosophy of Mathematics*. Harvard Univ. Press.

1998. "Neo-Fregeans: in Bad Company?". In: *Philosophy of Mathematics Today*, M. Schirn, Ed. (1998); pp. 369-87.

FERREIRÓS, J.

1994. "Lógica, conjuntos y logicismo: desarrollos alemanes de 1870 a 1908". In: *Mathesis* **10**, pp. 255-72.

FREGE, G.

1879. *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*.

1884. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*.

1891. *Function und Begriff. Vortrag gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft* (Jena).

1893-1903. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich.abgeleitet*. Vols. I, II. Jena: Pohle.

FRIEDMAN, M.

1988. "Logical Truth and Analyticity in Carnap's 'Logical Syntax of Language'". In: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. **XI**. Ed. by Aspray, W. and Kitcher, P.

FURTH, M.

1967. *The Basic Laws of Arithmetic, 'Exposition of the System'*. Univ. of California Press, Berkeley.

GEACH, P. AND BLACK, M.

1952. *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Blackwell, Oxford.

HAILPERIN, T.

1997. "Ontologically Neutral Logic". In: *History and Philosophy of Logic*, **18**, pp. 185-200.

HATCHER, W.

1968. *Foundations of Mathematics*. W.B. Saunders Company, Philadelphia.

HECK JR., R.

1992. "On the Consistency of Second-Order Contextual Definitions". In: *Noûs* **26**, pp. 491-4.

1993. "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*". In: *The Journal of Symbolic Logic*, 58, **2**; pp. 579-601. Reprinted in Demopoulos (1995), pp. 257-94.

1995. "Frege's Principle". *Synthese Library: From Dedekind to Gödel*; J. Hintikka, Ed. (1995), vol. **251**; pp. 121-36.

HENKIN, L.

1950. "Completeness in the theory of types". In: *The Journal of Symbolic Logic*, **15**: pp. 81-91.

HINTIKKA, J. (ED.)

1995. *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*. Synthese Library: Studies in Epistemology, Logic , Methodology, and Philosophy of Science. Kluwer Acad. Publ.

PARSONS, C.

1965. "Frege's Theory of Number". In: M. Black, ed., (1965), pp. 180-203. Reprinted with Postscript in: Demopoulos (1995), pp. 182-210.

PARSONS, T.

1987. "On the Consistency of the First-Order Portion of Frege's Logical System". In: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **28**, **1**; pp. 161-8.

QUINE, W. V.

1955. "On Frege's Way Out". *Mind*, n.s. vol. **64**.

1962. "Carnap and Logical Truth". In: *Logic and Language: Studies Dedicated to Professor Rudolf Carnap*. Ed. by B. H. Kazemier and D. Vuysje. Dordrecht: Reidel. Reprinted in: *Philosophy of Mathematics*, Benacerraf and Putnam Ed. (1983), pp. 355-76.

1966. *Selected Logic Papers*. Randons House, N.Y.

READ, S.

1997. "Completeness and Categoricity: Frege, Gödel and Model Theory". In: *History and Philosophy of Logic*, **18**; pp. 79-93.

ROBINSON, A.

1974. *Non-Standard Analysis*. Revised Ed.; North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.

RYLL-NARDZEWSKI, Cz.

1952. "The role of the axiom of induction in elementary arithmetic". In: *Fundamenta Mathematicae*, vol. **39**, pp. 239-63.

SCHIRN, M. (ED.)

1998. *The Philosophy of Mathematics Today*. Clarendon Press, Oxford.

SKOLEM, T.

1934. "Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen". In: *Fundamenta Mathematicae*, vol. **23**, pp. 150-61.

TARSKI, A.

1986. "What are Logical Notions?". *History and Philosophy of Logic*, **7**; pp.: 143-54.

THOMSON, J. J. (ED.)

1987. *On Being and Saying: Essays for Richard Cartwright*. MIT Press.

VAN DALEN, D.

1997. *Logic and Structure*. Third, augmented edition [corrected second printing]. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.

VAN HEIJENOORT, J.

1966. "Logic as Calculus and Logic as Language". In: *Proceedings of the Boston Colloquium for Philosophy of Science 1964/1966*. Synthese Library, vol. III.

WANG, H.

1962. *A Survey of Mathematical Logic*. Peking: Science Press; North-Holland, Amsterdam.

1974. *From Mathematics to Philosophy*. Routledge and Kegan Paul, London.

WRIGHT, C.

1983. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Scots Philosophical Monographs Number Two. Aberdeen Univ. Press.

ZERMELO, E.

1909. "Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète". In: *Acta Mathematica*, vol. 32, pp. 185-93.